Proiect
Varianta A

1) X_t - variabila aleatoare ce arată starea vremii pe zile în perioada 31.12.2019 - - 20.04.2020 în Seoul, capitala Coreei de Sud

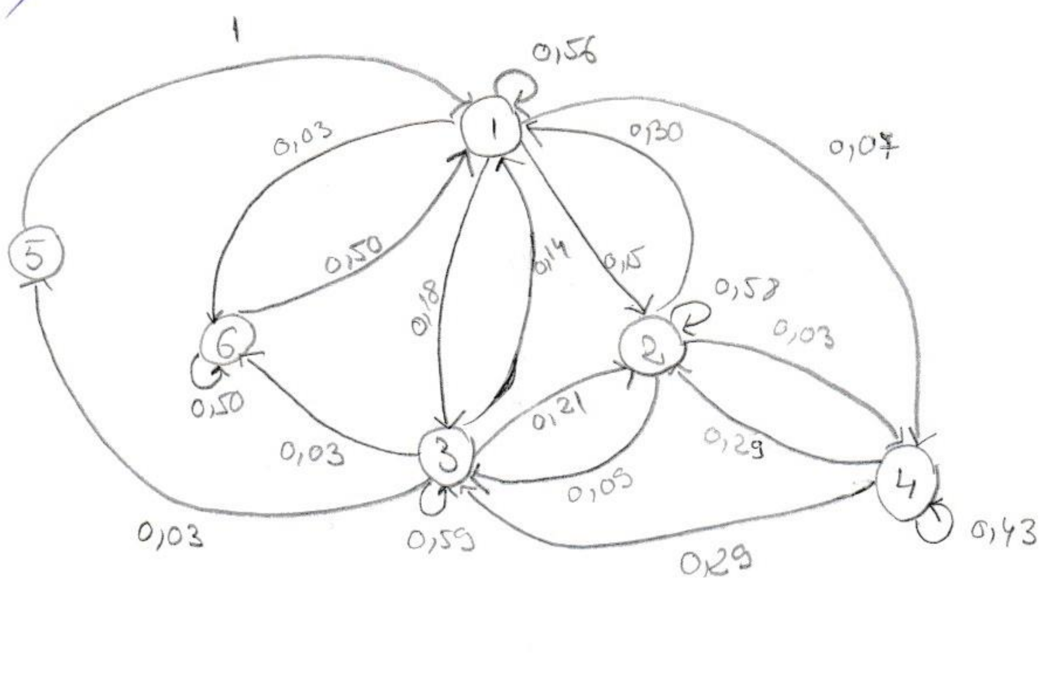
$X_0, X_1, X_2 \dots X_{112}$ este un lanț Markov <u>finit</u> și <u>omogen</u> cu spațiul stărilor $S = \{$"clear-day", "partly-cloudy-day", "cloudy", "rain", "snow", "wind"$\}$

$$S \overset{cod}{=} \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

2)

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}56 & 0{,}15 & 0{,}18 & 0{,}07 & 0 & 0{,}03 \\ 0{,}30 & 0{,}58 & 0{,}09 & 0{,}03 & 0 & 0 \\ 0{,}14 & 0{,}21 & 0{,}59 & 0 & 0{,}03 & 0{,}03 \\ 0 & 0{,}29 & 0{,}29 & 0{,}43 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}50 & 0 & 0 & 0 & & 0{,}50 \end{pmatrix} \end{array}$$

3)



4)

$1 \rightleftarrows 1$ $\quad 1 \rightleftarrows 2$ $\quad 1 \rightleftarrows 3$ $\quad 1 \rightleftarrows 4$ $\quad 1 \rightleftarrows 5$ $\quad 1 \rightleftarrows 6$

$2 \rightleftarrows 2$ $\quad 2 \rightleftarrows 3$ $\quad 2 \rightleftarrows 4$ $\quad 2 \rightleftarrows 5$ $\quad 2 \rightleftarrows 6$

$3 \rightleftarrows 3$ $\quad 3 \rightleftarrows 4$ $\quad 3 \rightleftarrows 5$ $\quad 3 \rightleftarrows 6$

$4 \rightleftarrows 4$ $\quad 4 \rightleftarrows 5$ $\quad 4 \rightleftarrows 6$

$5 \rightleftarrows 5$ $\quad 5 \rightleftarrows 6$

$6 \rightleftarrows 6$

(semnul $i \rightsquigarrow j$ înseamnă că ∃ un "drum" de la starea i la j, nu neapărat într-o tranziție)

=> singura clasă de comunicare este chiar spațiul stărilor

$1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 6 \to 1 \to 3 \to 5 \to 1$

5) => ∃ o singură clasă de comunicare => lanț Markov <u>ireductibil</u> => 6)
{1, 2, 3, 4, 5, 6}

6) toate stările lanțului sunt <u>recurente</u> (însemnând că dacă lanțul pleacă din orice stare a lanțului ({1, 2, 3, 4, 5, 6}) revizitează cu certitudine respectiva stare la un moment dat);

=> clasa de comunicare {1, 2, 3, 4, 5, 6} este <u>închisă</u>

7) lanț Markov ireductibil => o singură clasă de comunicare => spațiul stărilor S nu poate fi scris sub altă formă

8) Periodicitatea este o proprietate de clasă, astfel stările unei clase de comunicare (în cazul nostru S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}) vor avea atribuite aceeași perioadă.

$\Rightarrow d(S) = d(1) = d(2) = d(3) = d(4) = d(5) = d(6)$

$d(S) = \text{c.m.m.d.c}\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = 1$

9) Conform teoriei, dacă un lanț Markov este <u>ireductibil</u> și toate stările au perioada egală cu <u>1</u> se numește <u>aperiodic</u>.

10) Un lanț Markov se numește ergodic dacă este <u>ireductibil</u>, <u>aperiodic</u> și toate stările au durată medie finită de întoarcere.

De asemenea, conform teoriei mai știm că un lanț Markov finit și omogen dacă și numai dacă matricea $\mathbb{P}$ este regulară.

$\mathbb{P}$ este regulară $\Leftrightarrow \exists\, s \in \mathbb{N}^*$ a.î. $\mathbb{P}^s$ să aibă toate elementele > 0

În cazul nostru $\exists\, s = 3$ (demonstrație R) => lanțul nostru reprezintă un <u>lanț ergodic</u>

11) Conform Teoremei fundamentale a lanțurilor Markov ergodice, $\exists$ o unică distribuție staționară pozitivă $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6)$ care este și distribuția limită a lanțului $\pi_j = \lim_{n \to \infty} p_{i,j}^{(n)}, \forall i, j \in S = \{1, 2, \ldots 6\}$

Vom demonstra distribuția limită a lanțului în pasul următor.

12) Distribuția staționară $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6)$ verifică relația $\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbb{P} = \boldsymbol{\pi}$ adică:

$$\begin{cases} (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6) \cdot \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 0,56 & 0,15 & 0,18 & 0,07 & 0 & 0,03 \\ 2 & 0,30 & 0,58 & 0,09 & 0,03 & 0 & 0 \\ 3 & 0,14 & 0,21 & 0,59 & 0 & 0,03 & 0,03 \\ 4 & 0 & 0,29 & 0,29 & 0,43 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0,50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,50 \end{array} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6) \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,56 \cdot \pi_1 + 0,15 \cdot \pi_2 + 0,18 \cdot \pi_3 + 0,07 \pi_4 + 0,03 \cdot \pi_6 = \pi_1 \\ 0,30 \cdot \pi_1 + 0,58 \pi_2 + 0,09 \cdot \pi_3 + 0,03 \pi_5 = \pi_2 \\ 0,14 \cdot \pi_1 + 0,21 \pi_2 + 0,59 \cdot \pi_3 + 0,03 \pi_5 + 0,03 \cdot \pi_6 = \pi_3 \\ 0,29 \cdot \pi_2 + 0,29 \cdot \pi_3 + 0,43 \cdot \pi_4 = \pi_4 \\ 0,50 \cdot \pi_1 + 0,50 \cdot \pi_6 = \pi_6 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 = 1 \end{cases}$$

Datorită teoriei din domeniul lanțurilor Markov, știm că sistemul de ecuații liniare reprezentat mai sus are o soluție unică $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6)$

Pt. a ne ușura munca, vom culege roadele dezvoltării tehnologiei informației și ne vom folosi de softul R în calculul distribuției staționare echivalentă în cazul nostru cu distribuția limită, astfel:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}^n = \Pi = (0,35 \;,\; 0,29 \;,\; 0,06 \;,\; 0,25 \;,\; 0,01 \;,\; 0,04)$$

interpretare rezultate:

indiferent de starea de pornire, pe termen lung, probabilitatea ca vremea să se afle în starea

1: "clear-day" = 0,35 = 35 %

2: "partly-cloudy-day" = 0,29 = 29 %

3: "cloudy" = 0,06 = 6 %

4: "rain" = 0,25 = 25 %

5: "snow" = 0,01 = 1 %

6: "wind" = 0,04 = 4 %

13) Deoarece ∃ distribuție limită a lanțului, limita probabilităților <u>nu</u> depinde de starea inițială.

14) + 15) -> soft R file