МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(технический университет)"
СПбГТИ(ТУ)

Кафедра системного анализа

А.Г. Курицын

ВЫПОЛНЕНИЕ РАСЧЁТНЫХ ЗАДАНИЙ ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ (ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ)

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2016

УДК 519.65

Курицын, А.Г. Выполнение расчётных заданий по вычислительной математике (приближение функций): учебное пособие / А.Г. Курицын.– СПб. : СПбГТИ(ТУ), 2016. – 20 с.

Учебное пособие содержит постановку задач и примеры выполнения варианта расчётных заданий по вычислительной математике по теме «Приближение функций».

Пособие предназначено для студентов второго курса бакалавриата и специалитета, изучающих дисциплину «Вычислительная математика», в соответствии с указанными компетенциями, обучающихся по направлениям

09.03.01 (230100.62)- Информатика и вычислительная техника (ОК-1, ОК-2, ОК-6, ОК-10)
15.03.04 - Автоматизация технологических процессов и производств (ОПК-3, ОПК-4)
27.03.03 - Системный анализ и управление (ОПК-1, ОПК-2, ПК-1)
27.03.04 - Управление в технических системах (ОПК-1)
240300.65 - Химическая технология энергонасыщенных материалов и изделий (ОК-1, ОК-7, ОК-8, ПК-2)
240501.65 - Химическая технология высокомолекулярных соединений (ОК-1, ОК-4, ОК-5, ОК-10, ПК-1)

Табл. 6, рис. 4, библиогр. 4 назв.

Рецензенты: 1 ФГБОУ ВО «Российский государственный гидрометеорологический университет». Доцент кафедры математического моделирования социально-экономических и природных процессов, канд. физ.-мат. наук В.Г.Никитенко

2 Т.В.Слободинская, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики СПбГТИ(ТУ).

Издание подготовлено в рамках выполнения государственного задания по оказанию образовательных услуг Минобрнауки России.

Утверждено на заседании учебно-методической комиссии факультета информационных технологий и управления 05.02.2016.

Рекомендовано к изданию РИС СПбГТИ(ТУ)

Содержание

Введение

Цель настоящего пособия – помочь обучающимся при выполнении расчётных заданий по вычислительной математике и, в особенности, - в написании соответствующих отчётов. Как показывает опыт, именно при написании отчётов и обнаруживается неумение грамотно излагать понимание смысла проделанной работы (если, конечно, такое понимание вообще имеется). Возможно, некоторые общие идеи могут быть полезны и при составлении отчётов по другим видам работ.

Что должен содержать отчёт? Помимо титульного листа, в котором, после общих сведений, указывается тема работы и фамилия **автора отчёта** (который и обязан отвечать за всё, что там написано) отчёт должен содержать:

- постановку задачи (что дано и что надо сделать);
- описание (по возможности, краткое, без ненужных подробностей) этапов выполненной работы с приведением используемых формул (и там, где требуется, с проверкой условий применимости этих формул) и результатов каждого этапа;
- результаты работы и выводы.

Типичные ошибки неопытных составителей отчётов:

1) Копирование чужого отчёта с заменой (часто неполной) исходных данных и результатов своими, не меняя даже выводов, хотя они могут и не соответствовать новым результатам (в особо тяжёлых случаях может оказаться, что «работу выполнила студентка Пётр Иванов»).
2) Отсутствует постановка задачи или исходные данные.
3) Не приведены конкретные результаты работы.
4) Не сделаны выводы по работе либо они носят общий или формальный характер.
5) Отчёт загромождён ненужными подробностями (например, если дано $y(x) = x^{10}$, то можно сразу написать: $y(2) = 1024$, вместо того, чтобы пояснять: $y(2) = 2^{10} =$ $= 2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2 = 1024$).
6) Результаты вычислений (промежуточные или окончательные) содержат слишком много или слишком мало значащих цифр.

В пособии приведены примеры выполнения расчётных заданий по вычислительной математике, которые можно принять за основу при написании отчётов. Все основные результаты приводятся до четвёртого знака после запятой (а при оценке погрешностей достаточно одной-двух значащих цифр).

Перечень основных вопросов, знание которых необходимо при выполнении и защите расчётных заданий, дан в приложении А.

Приложение Б содержит образец оформления титульного листа отчёта.

1 Расчётное задание №1 - Приближение функций (часть 1)

1.1 Постановка задачи

Для заданной функции: $f(x) = e^{0,1017x^3+0,5153x}$, - определённой на отрезке [-1, 1], построить её приближения:

1) с помощью формулы Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ порядков $n = 2$ и $n = 4$
2) по интерполяционной формуле Лагранжа с узлами: {-1; 0; 1} и {-1; -1/2; 0; 1/2; 1}.

Составить таблицы соответствующих функций в точках: -1, -0.9, …1 и нарисовать их графики.

Исследовать зависимость точности полученных приближений от x, от степени многочлена, а также от вида приближения.

1.2 Расчётная часть.

1.2.1 Приближение функции с помощью формулы Тейлора

Формула Тейлора порядка n для функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 имеет вид:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k (x - x_0)^k + R_n(x),$$

где

$$C_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k f(x)}{dx^k}\bigg|_{x=x_0},$$

$R_n(x)$ - остаточный член формулы.

Отбрасывая остаточный член, получим приближённую формулу:

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} C_k (x - x_0)^k,$$

В нашем случае: $x_0 = 0$ – имеем формулу Маклорена

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} C_k x^k,$$

Вычислим коэффициенты C_k при k от 0 до 4.

Сначала найдём производные:

$$\frac{df}{dx}=e^{0,1017x^3+0,5153x}\left(0,3051x^2+0,5153\right),$$

$$\frac{d^2f}{dx^2}=e^{0,1017x^3+0,5153x}\left(0,0931x^4+0,3144x^2+0,6102x+0,2655\right),$$

$$\frac{d^3f}{dx^3}=e^{0,1017x^3+0,5153x}\left(0,0284x^6+0,1439x^4+0,5585x^3+0,2430x^2+0,9433x+0,7470\right),$$

$$\frac{d^4f}{dx^4}=e^{0,1017x^3+0,5153x}\left(0,0087x^8+0,0585x^6+\ldots+0,9722x+1,3283\right).$$

Отсюда получим: $C_0 = 1$; $C_1 = 0,5153$; $C_2 = 0,1328$; $C_3 = 0,1245$; $C_4 = 0,0553$.

Таким образом, найдём искомые приближения.

При $n = 2$:

$$f(x) \approx f_2(x) = 1 + 0,5153x+0,1328x^2.$$

При $n = 4$:

$$f(x) \approx f_4(x) = 1 + 0,5153x+0,1328x^2 +0,1245x^3 + 0,0553x^4.$$

Построим соответствующие таблицы и графики.

Таблица 1 – Приближение функции с помощью формулы Тейлора

x	$f(x)$	$f_2(x)$	$f_4(x)$
-1	0,5396	0,6175	0,5483
-0,9	0,5840	0,6438	0,5893
-0,8	0,6286	0,6727	0,6317
-0,7	0,6733	0,7043	0,6749
-0,6	0,7181	0,7386	0,7189
-0,5	0,7631	0,7755	0,7634
-0,4	0,8085	0,8151	0,8086
-0,3	0,8544	0,8574	0,8544
-0,2	0,9013	0,9023	0,9013
-0,1	0,9497	0,9498	0,9497
0	1	1	1
0,1	1,0530	1,0529	1,0530
0,2	1,1095	1,1084	1,1095
0,3	1,1704	1,1665	1,1703
0,4	1,2369	1,2274	1,2367
0,5	1,3104	1,2908	1,3099
0,6	1,3926	1,3570	1,3910
0,7	1,4853	1,4258	1,4818
0,8	1,5909	1,4972	1,5836
0,9	1,7124	1,5713	1,6984
1	1,8534	1,6481	1,8279

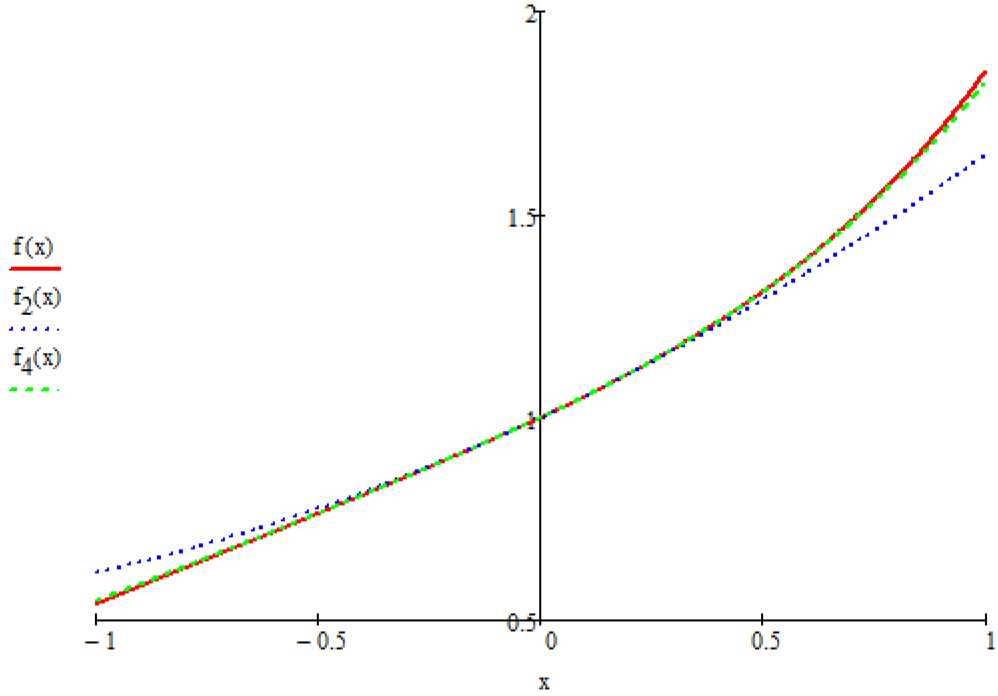

Рисунок 1 - Приближение функции с помощью формулы Тейлора

1.2.2 Приближение функции по интерполяционной формуле Лагранжа

Интерполяционная формула Лагранжа имеет вид:

$$f(x) \approx L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k(x) \cdot f(x_k),$$

где $x_0, x_1, \ldots, x_n$ - узлы интерполяции, а полиномы $p_k(x)$ задаются формулой:

$$p_k(x) = \frac{\prod\limits_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n}(x - x_i)}{\prod\limits_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n}(x_k - x_i)}..$$

Рассмотрим вначале 3 узла: $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$ ($n = 2$). Тогда

$$p_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{x(x-1)}{2},$$

$$p_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} = 1 - x^2,$$

$$p_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} = \frac{x(x+1)}{2}$$

Формула Лагранжа для этого случая:

$$f(x) \approx L_2(x) = \frac{x(x-1)}{2} \cdot f(-1) + (1-x^2) \cdot f(0) + \frac{x(x+1)}{2} \cdot f(1).$$

Подставляя значения функции в узлах: $f(-1) = 0{,}53956$, $f(0) = 1$, $f(1) = 1{,}85336$, – и раскрывая скобки, получим

$$f(x) \approx L_2(x) = 1 + 0{,}6569x + 0{,}1965x^2.$$

Для пяти узлов: $x_0 = -1$, $x_1 = -0.5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0.5$, $x_4 = 1$ ($n = 4$):

$$p_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} = \frac{2}{3}x\left(x^2-\frac{1}{4}\right)(x-1),$$

$$p_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} = \frac{8}{3}x(1-x^2)\left(x-\frac{1}{2}\right),$$

$$p_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} = 4\cdot(x^2-1)\left(x^2-\frac{1}{4}\right),$$

$$p_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} = \frac{8}{3}x(1-x^2)\left(x+\frac{1}{2}\right),$$

$$p_4(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} = \frac{2}{3}x\left(x^2-\frac{1}{4}\right)(x+1).$$

Отсюда, действуя аналогично предыдущему, с учётом значений функции в узлах:

$f(-1) = 0{,}53956$, $f(-0{,}5) = 0{,}76310$, $f(0) = 1$, $f(0{,}5) = 1{,}31044$, $f(1) = 1{,}85336$,

- получим:

$$f(x) \approx L_4(x) = 1 + 0{,}5108x + 0{,}1306x^2 + 0{,}1461x^3 + 0{,}0658x^4.$$

Таблица 2 – Приближение функции с помощью интерполяционной формулы Лагранжа

x	$f(x)$	$L_2(x)$	$L_4(x)$
-1	0,5396	0,5396	0,5396
-0,9	0,5840	0,5679	0,5828
-0,8	0,6286	0,6002	0,6271
-0,7	0,6733	0,6364	0,6721
-0,6	0,7181	0,6766	0,7175
-0,5	0,7631	0,7207	0,7631
-0,4	0,8085	0,7687	0,8089
-0,3	0,8544	0,8206	0,8551
-0,2	0,9013	0,8765	0,9020
-0,1	0,9497	0,9363	0,9501
0	1	1	1
0,1	1,0530	1,0677	1,0525
0,2	1,1095	1,1392	1,1087
0,3	1,1704	1,2148	1,1695
0,4	1,2369	1,2942	1,2363
0,5	1,3104	1,3776	1,3104
0,6	1,3926	1,4649	1,3936
0,7	1,4853	1,5561	1,4875
0,8	1,5909	1,6513	1,5940
0,9	1,7124	1,7503	1,7152
1	1,8534	1,8534	1,8534

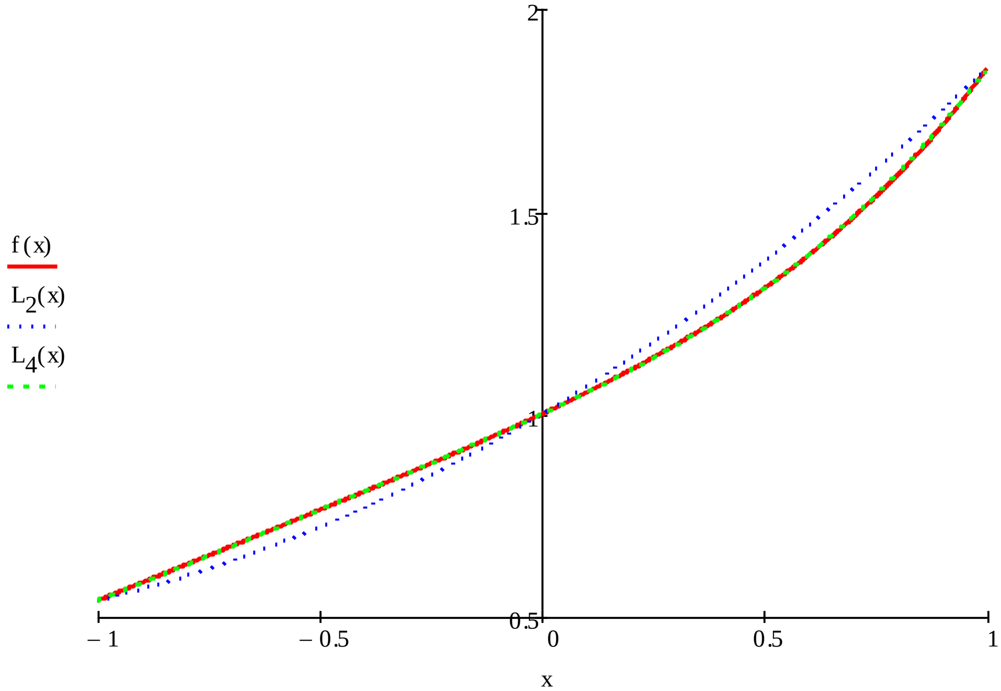

Рисунок 2 - Приближение функции с помощью интерполяционной формулы Лагранжа.

1.3 Результаты и выводы

В работе получены приближения заданной функции с помощью формулы Тейлора 2 и 4 порядков, а также по интерполяционной формуле Лагранжа при 3 и 5 узлах интерполяции. Построены соответствующие таблицы и графики.

Видно, что при возрастании степени аппроксимирующего многочлена точность приближения возрастает. Однако для более подробного анализа составим таблицу погрешностей.

Таблица 3 – Погрешности приближений

x	$f_2(x)$ - $f(x)$	$f_4(x)$ - $f(x)$	$L_2(x)$ - $f(x)$	$L_4(x)$ - $f(x)$
-1	0,0779	0,0087	0	0
-0,9	0,0598	0,0054	-0,0160	-0,0012
-0,8	0,0442	0,0031	-0,0284	-0,0014
-0,7	0,0311	0,0016	-0,0368	-0,0011
-0,6	0,0205	0,0008	-0,0415	-0,0006
-0,5	0,0124	0,0003	-0,0424	0
-0,4	0,0067	0,0001	-0,0398	0,0005
-0,3	0,0029	0,0000	-0,0338	0,0007
-0,2	0,0009	0,0000	-0,0249	0,0007
-0,1	0,0001	0,0000	-0,0134	0,0004
0	0	0	0	0
0,1	-0,0001	0,0000	0,0147	-0,0004
0,2	-0,0011	0,0000	0,0298	-0,0008
0,3	-0,0038	0,0000	0,0444	-0,0009
0,4	-0,0096	-0,0002	0,0573	-0,0007
0,5	-0,0196	-0,0006	0,0671	0
0,6	-0,0356	-0,0015	0,0723	0,0010
0,7	-0,0595	-0,0035	0,0708	0,0022
0,8	-0,0937	-0,0073	0,0603	0,0031
0,9	-0,1411	-0,0140	0,0379	0,0028
1	-0,2053	-0,0254	0	0

(здесь «0» в ячейке означает, что погрешность отсутствует, а «0,0000» - что абсолютная погрешность не превосходит 0,00005).

Таблица показывает, что для приближений по формуле Тейлора точность уменьшается при удалении от точки $x_0 = 0$, а для интерполяционной формулы - при удалении от узлов интерполяции. При этом на отрезке [-0,3, 0,3] абсолютная погрешность приближения по формуле Тейлора меньше, чем у интерполяционного многочлена такой же степени (не считая точки $x_0 = 0$, где, естественно, все приближения дают точное значение функции).

Максимальная абсолютная погрешность формулы Тейлора (достигаемая на конце отрезка) имеет порядок $2\cdot10^{-1}$ при $n = 2$ и $2{,}5\cdot10^{-2}$ при $n = 4$, а интерполяционной формулы - порядок $7\cdot10^{-2}$ при $n = 2$ и $3\cdot10^{-3}$ при $n = 4$.

2 Расчётное задание №1 - Приближение функций (часть 2)

2.1 Постановка задачи

Для заданной функции: $f(x) = e^{0{,}1017x^3+0{,}5153x}$, - определённой на отрезке [-1, 1], построить её приближения с помощью разложения в ряд Фурье:

1) по системе тригонометрических функций
2) по системе полиномов Лежандра,

используя 3 и 5 первых членов каждого ряда.

Составить таблицы соответствующих функций в точках: -1, -0.9, …1 и нарисовать их графики.

Исследовать зависимость точности полученных приближений от x, от количества используемых членов ряда, а также от вида приближения. В качестве меры отклонения использовать:

$$\rho\left(f, \hat{f}\right) = \left\| f - \hat{f} \right\| = \sqrt{\int_{-1}^{1}\left(f(x) - \hat{f}(x)\right)^2 dx} .$$

2.2 Расчётная часть

Разложение функции в обобщённый ряд Фурье по ортогональной системе функций на отрезке [-1, 1] имеет вид:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cdot \varphi_k(x).$$

Коэффициенты C_k (коэффициенты Фурье) могут быть найдены по формуле:

$$C_k = \frac{(f, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2},$$

где

$$(f, \varphi_k) = \int_{-1}^{1} f(x)\cdot\varphi_k(x)dx,$$

$$\|\varphi_k\|^2 = \int_{-1}^{1}\left(\varphi_k(x)\right)^2 dx,$$

Ограничиваясь первыми $n + 1$ членами ряда, получаем приближение:

$$f(x) \approx f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k \cdot \varphi_k(x).$$

Как известно, в этом случае

$$\rho\left(f, f_n\right) \leq \rho\left(f, g_n\right),$$

где $g_n = g_n(x)$ - любая линейная комбинация первых $n+1$ функций системы.

Для нахождения $\rho(f, f_n)$ можно воспользоваться соотношением

$$\rho\left(f, f_n\right)^2 = \| f - f_n \|^2 = \int_{-1}^{1} \left(f(x) - f_n(x)\right)^2 dx = \| f \|^2 - \sum_{k=0}^{n} C_k^2 \|\varphi_k\|^2 .$$

2.2.1 Разложение по системе тригонометрических функций

Тригонометрическая система функций имеет следующий вид:

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{2},\ \varphi_{2m-1}(x) = \sin(m\pi \cdot x),\ \varphi_{2m}(x) = \cos(m\pi \cdot x)\ (m \geq 1).$$

При этом

$$\|\varphi_0\|^2 = \frac{1}{2},\ \ \|\varphi_k\|^2 = 1\ (k \geq 1),$$

и формулы для коэффициентов Фурье будут:

$$C_0 = \int_{-1}^{1} f(x)dx,\ \ C_k = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot \varphi_k(x)dx\ \ (k \geq 1).$$

Для пяти первых функций системы:

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{2},\ \varphi_1(x) = \sin(\pi \cdot x),\ \varphi_2(x) = \cos(\pi \cdot x)\ .\varphi_3(x) = \sin(2\pi \cdot x),\ \varphi_4(x) = \cos(2\pi \cdot x)$$

- с помощью системы MathCAD вычислим коэффициенты:

C_0 = 2,1130, C_1 = 0,3612. C_2 = -0,0734, C_3 = -0,2005, C_4 = 0,0244.

Используя 3 и 5 членов ряда, соответственно, получим:

$$f(x) \approx f_2(x) = 1{,}0565 + 0.3612 \cdot \sin(\pi \cdot x) - 0{,}0734 \cdot \cos(\pi \cdot x),$$

$$f(x) \approx f_4(x) = 1{,}0565 + 0.3612 \cdot \sin(\pi \cdot x) - 0{,}0734 \cdot \cos(\pi \cdot x) -$$
$$- 0{,}2005 \cdot \sin(2\pi \cdot x) + 0{,}0244 \cdot \cos(2\pi \cdot x).$$

Построим таблицы и графики.

Таблица 4 – Приближение функции с помощью ряда Фурье по системе тригонометрических функций

x	$f(x)$	$f_2(x)$	$f_4(x)$
-1	0,5396	1,1299	1,1543
-0,9	0,5840	1,0147	0,9166
-0,8	0,6286	0,9036	0,7204
-0,7	0,6733	0,8074	0,6092
-0,6	0,7181	0,7357	0,5981
-0,5	0,7631	0,6953	0,6709
-0,4	0,8085	0,6903	0,7884
-0,3	0,8544	0,7211	0,9043
-0,2	0,9013	0,7848	0,9830
-0,1	0,9497	0,8750	1,0126
0	1	0,9830	1,0074
0,1	1,0530	1,0983	1,0001
0,2	1,1095	1,2094	1,0262
0,3	1,1704	1,3055	1,1073
0,4	1,2369	1,3773	1,2397
0,5	1,3104	1,4177	1,3933
0,6	1,3926	1,4227	1,5208
0,7	1,4853	1,3919	1,5750
0,8	1,5909	1,3282	1,5265
0,9	1,7124	1,2379	1,3756
1	1,8534	1,1299	1,1543

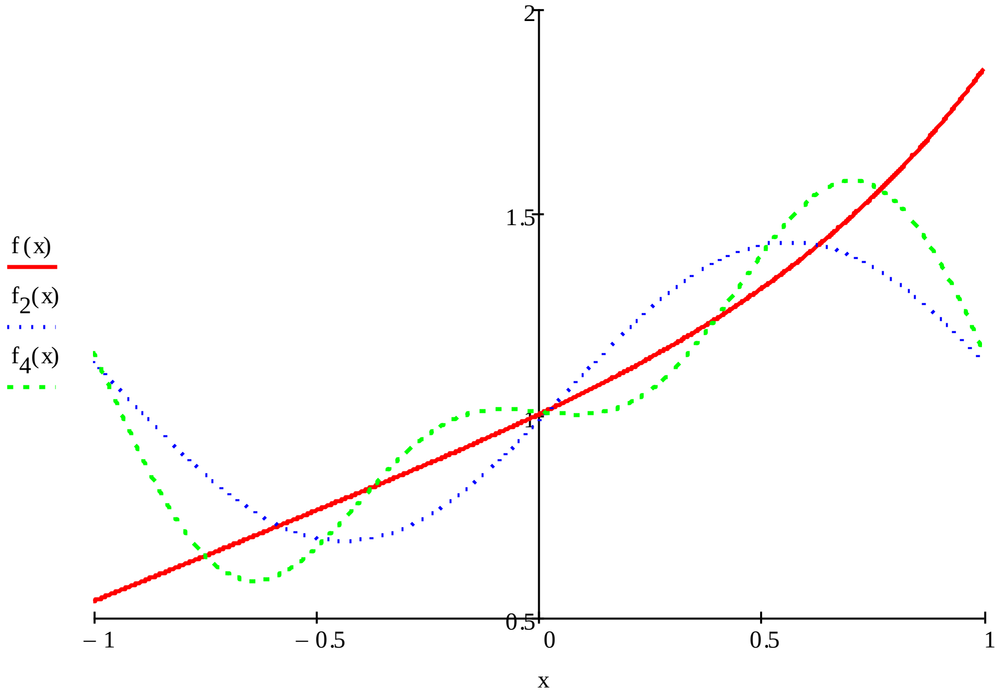

Рисунок 3 – Приближение функции с помощью ряда Фурье по системе тригонометрических функций

Найдём квадраты норм разностей:

$$\|f-f_n\|^2=\|f\|^2-\sum_{k=0}^{n}C_k^2\|\varphi_k\|^2=\|f\|^2-\frac{C_0^2}{2}-\sum_{k=1}^{n}C_k^2\ ,$$

У нас:

$$\|f\|^2=\int_{-1}^{1}\left(f(x)\right)^2dx=2{,}477084.$$

Используя найденные значения коэффициентов Фурье, получим:

$$\rho(f,f_2)=\|f-f_2\|=0{,}33,\quad \rho(f,f_4)=\|f-f_4\|=0{,}26.$$

2.2.2 Разложение по системе полиномов Лежандра

Общая формула для полиномов Лежандра имеет вид:

$$\varphi_k(x)=\frac{1}{k!\cdot 2^k}\cdot\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k.$$

При этом: $\|\varphi_k\|^2=\dfrac{2}{2k+1}$, и формулы для коэффициентов Фурье будут:

$$C_k=(k+0{,}5)\cdot\int_{-1}^{1}f(x)\cdot\varphi_k(x)dx.$$

В частности, первые 5 функций:

$$\varphi_0(x)=1,\ \varphi_1(x)=x,\ \varphi_2(x)=\frac{1}{2}\cdot(3x^2-1),\ \varphi_3(x)=\frac{1}{2}\cdot(5x^3-3x),$$

$$\varphi_4(x)=\frac{1}{8}\cdot(35x^4-30x^2+3).$$

Вычисляя интегралы (в системе MathCAD), с точностью до четвёртого знака после запятой, получим:

C_0= 1,0565, C_1= 0,5970, C_2= 0,1240, C_3= 0,0573, C_4= 0,0153.

Отсюда, используя 3 и 5 первых членов ряда, соответственно:

$$f(x)\approx f_2(x)=1{,}0565+0{,}5970\cdot x+0{,}1240\cdot\frac{1}{2}\cdot(3x^2-1)=0.1861x^2+0.5970x+0.9945,$$

$$f(x)\approx f_4(x)=1{,}0565+0{,}5970\cdot x+0{,}1240\cdot\frac{1}{2}\cdot(3x^2-1)+0{,}0573\cdot\frac{1}{2}\cdot(5x^3-3x)+$$

$$+0{,}0153\cdot\frac{1}{8}\cdot(35x^4-30x^2+3)=0.0668x^4+0.1433x^3+0.1288x^2+0.5110x+1.0002.$$

Построим таблицы и графики.

Таблица 5 – Приближение функции с помощью ряда Фурье по системе полиномов Лежандра

x	$f(x)$	$f_2(x)$	$f_4(x)$
-1	0,5396	0,5835	0,5415
-0,9	0,5840	0,6079	0,5840
-0,8	0,6286	0,6360	0,6278
-0,7	0,6733	0,6677	0,6725
-0,6	0,7181	0,7033	0,7177
-0,5	0,7631	0,7425	0,7631
-0,4	0,8085	0,7854	0,8089
-0,3	0,8544	0,8321	0,8552
-0,2	0,9013	0,8825	0,9021
-0,1	0,9497	0,9366	0,9502
0	1	0,9945	1,0002
0,1	1,0530	1,0560	1,0527
0,2	1,1095	1,1213	1,1088
0,3	1,1704	1,1903	1,1695
0,4	1,2369	1,2630	1,2361
0,5	1,3104	1,3395	1,3100
0,6	1,3926	1,4196	1,3928
0,7	1,4853	1,5035	1,4862
0,8	1,5909	1,5911	1,5922
0,9	1,7124	1,6825	1,7127
1	1,8534	1,7775	1,8501

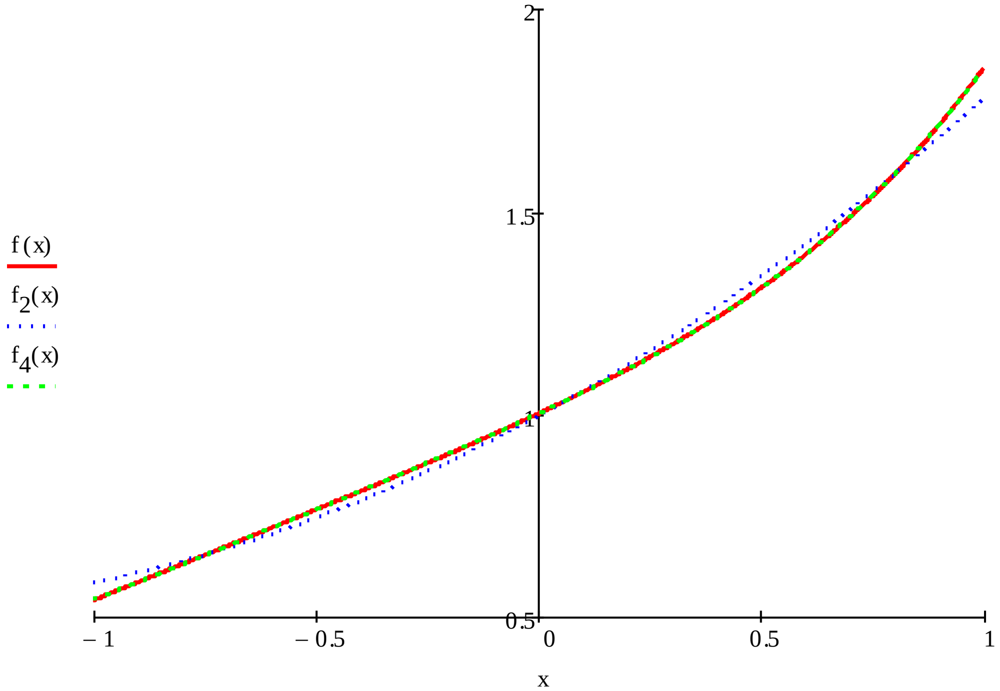

Рисунок 4 – Приближение функции с помощью ряда Фурье по системе полиномов Лежандра

Найдём квадраты норм разностей:

$$\|f - f_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} C_k^2 \|\varphi_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} C_k^2 \frac{2}{2k+1},$$

У нас:

$$\|f\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(f(x)\right)^2 dx = 2{,}477084.$$

Используя найденные значения коэффициентов Фурье, получим:

$$\rho(f, f_2) = \|f - f_2\| = 0{,}031, \quad \rho(f, f_4) = \|f - f_4\| = 0{,}001.$$

2.3 Результаты и выводы

В работе получены приближения заданной функции с помощью разложения в ряды Фурье по системе тригонометрических функций и по системе полиномов Лежандра, используя 3 и 5 первых членов ряда. Построены соответствующие таблицы и графики. Проведена количественная оценка точности приближений.

Очевидно, что при возрастании количества используемых членов ряда точность приближения возрастает. Наименьшая точность наблюдается на концах отрезка. Для численного анализа точности приближений составим таблицу значений величин $\rho(f, f_n)$, служащих мерой погрешностей.

Таблица 6 – Мера погрешностей приближений

n	Система тригонометрических функций	Система полиномов Лежандра
2	0.33	0,031
4	0.26	0,001

Как видно из таблицы, при изменении n от 2 до 4 для разложении по системе тригонометрических функций погрешность уменьшается незначительно (от 0,33 до 0,26), а по системе полиномов Лежандра – примерно в 30 раз (от 0,031 до 0,001). При одних и тех же значениях n погрешности разложения по системе полиномов Лежандра значительно меньше, чем по системе тригонометрических функций.

Литература

1 Жидков, Е.Н. Вычислительная математика: учебное пособие для вузов по направлениям "Информатика и вычислительная техника", "Информационные системы"/ Е. Н. Жидков. - М. : Академия, 2010. - 200 с.

2 Демидович, Б.П. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения: учебное пособие / Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова; под ред. Б. П. Демидовича. - 4-е изд., стер. - СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2008. - 400 с.

3 Демидович, Б.П. Основы вычислительной математики: учебное пособие / Б. П. Демидович, И. А. Марон. - 6-е изд., стер. - СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2007. - 664 с.

4 Копченова, Н.В. Вычислительная математика в примерах и задачах: учебное пособие / Н. В. Копченова, И. А. Марон. - 2-е изд., стер. - СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2008. - 367 с.

Приложение А

(обязательное)

Вопросы, выносимые на защиту

При выполнении и защите расчётного задания необходимо знать (уметь):

1 Для расчётного задания №1 – Приближение функций (часть 1) -

  2.1 Написать формулу Тейлора;

  2.2 Знать постановку задачи интерполирования;

  2.3 Что такое узлы интерполяции;

  2.4 Как связана степень интерполяционного многочлена с количеством узлов интерполяции;

  2.5 Написать интерполяционную формулу Лагранжа и уметь применить её для заданной преподавателем задачи;

  2.6 Что означает единственность интерполяционного многочлена.

2 Для расчётного задания №1 – Приближение функций (часть 2) -

  2.1 Что такое ортогональная система функций;

  2.2 Что такое обобщённый ряд Фурье;

  2.3 Написать формулу для коэффициентов Фурье;

  2.4 Связь ряда Фурье с методом наименьших квадратов;

  2.5 Что служит мерой отклонения конечного отрезка ряда Фурье от функции, и как она зависит от количества используемых членов ряда;

  2.6 Как задаётся ортогональная система тригонометрических функций, и почему она ортогональная;

  2.7 Что такое полиномы Лежандра (уметь проверить их ортогональность в частных случаях).

Приложение Б

(справочное)

Образец оформления титульного листа

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет)"

Факультет информационных технологий и управления

Кафедра системного анализа

Дисциплина: Вычислительная математика

Расчётное задание №1

«Приближение функций (часть 1)»

(вариант № 000)

Выполнила:

Студентка 999 группы

Иванова Мария Ивановна

Принял:

Доцент

Сидоров Степан Петрович

Санкт-Петербург

2016

Кафедра системного анализа

Учебное пособие

Выполнение расчётных заданий по вычислительной математике (приближение функций)

Андрей Григорьевич Курицын

Отпечатано с оригинал-макета. Формат 60×90 $^{1}/_{16}$

Печ.л. 1,25. Тираж 50 экз.

Санкт-Петербургский государственный технологический институт

(Технический университет)

190013, Санкт-Петербург, Московский пр., 26

Типография издательства СПбГТИ(ТУ),

тел. 49-49-365