МИНОБРНАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

О.П. Шустрова, А.В. Беляков, А.Д. Иванов, И.А. Куянов

МЕХАНИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2018

УДК 530/537

Механика поступательного и вращательного движения: учебное пособие / О.П. Шустрова [др.]. – СПб: Изд-во СПб ГТИ (ТУ), 2018. – 29 с.

Учебное пособие относится к разделу «Механика» курса общей физики. Данная работа знакомит студентов с законами механики, предлагает выполнить экспериментальную проверку некоторых из них, а также определить опытным путем ряд основных характеристик механического движения. Даны методические указания по выполнению лабораторных работ.

Учебное пособие предназначено для студентов первого курса обучающихся в бакалавриате очной формы обучения по всем направлениям подготовки в соответствии с рабочей программой дисциплины «Физика» для формирования общекультурных, общепрофессиональных и профессиональных компетенций.

Рис. 8, табл. 4, библ. наим. 4

Рецензент:

1. СПб ГХФУ. Кафедра физической и коллоидной химии, д.т.н. проф. А.П. Беляев.

2. В.П. Рубец, канд. хим. наук, доцент кафедры аналитической химии СПб ГТИ (ТУ).

Издание подготовлено в рамках выполнения государственного задания по оказанию общеобразовательных услуг Минобрнауки России.

Утверждено на заседании учебно-методического совета инженерно-технологического факультета, 18 апреля 2018 г.

Рекомендовано к изданию РИС СПб ГТИ (ТУ)

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ВВЕДЕНИЕ

Наглядность механических движений явилась причиной того, что из всех естественных наук механика получила наиболее широкое развитие.

Практическое знакомство студентов с физическими явлениями и методами измерения физических характеристик на примерах механических движений особенно эффективно в силу наглядности, простоты эксперимента и неопосредованного способа наблюдения.

Проверка выполнения законов механики и использование их для определения основных механических характеристик позволяет приобрести навыки обращения с физическими приборами и оценки достоверности полученных результатов.

1 КИНЕМАТИКА

1.1 Поступательное движение

Кинематикой называют раздел механики, в котором движение тел рассматривается без выяснения причин, его вызывающих.

Механическим движением называют изменение положения одних тел относительно других, происходящее в пространстве с течением времени.

Поступательное движение – такое движение, при котором все точки тела двигаются по одинаковым траекториям, имеют одинаковые скорости и ускорения в каждый момент времени. Поэтому поступательное движение можно описать как движение одной точки. Такая модель тела, в которой не учитываются его размеры и форма, называется *материальной точкой* (*частицей*).

Положение частицы, движущейся в пространстве, определяется относительно другого тела, которое условно считают неподвижным (тело отсчета). С телом отсчета связывают ту или иную систему координат.

Поступательное движение удобно описывать в декартовой системе координат.

Тело отсчета, система координат и связанные с нею часы образуют систему отсчета (СО).

Положение тела относительно СО определяется с помощью радиуса-вектора $\vec{r}$. Радиус-вектор можно задать, указав его проекции на координатные оси (x, y, z), в соответствии с рисунком 1.

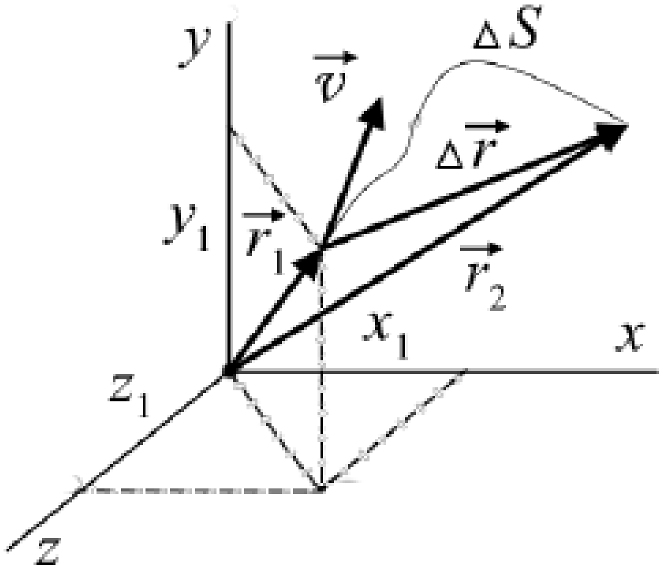


Рисунок 1 – Положение материальной точки в декартовой системе координат

При движении частицы длина и направление радиуса-вектора изменяется, а его конец описывает траекторию движения.

Зависимость $\vec{r}(t)$ называется *кинематическим уравнением*.
Векторное уравнение $\vec{r}(t)$ эквивалентно 3 скалярным уравнениям:

$$x(t),\ y(t),\ z(t).$$

Введем основные кинематические характеристики:

– вектор перемещения $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, который показывает на сколько и в каком направлении переместилось тело;
– путь (ΔS) – длина траектории. В пределе при малых перемещениях

$$|d\vec{r}| = dS\ ;$$

– средняя скорость ($\vec{v}_{\text{ср}}$) – перемещение за единицу времени (1.1):

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\ . \tag{1.1}$$

Предел этого отношения при $\Delta t \to 0$ или производную по времени от перемещения называют *мгновенной скоростью* ($\vec{v}$)

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}\ .$$

Мгновенная скорость, как вектор, направлена по касательной к траектории.

Ускорение ($\vec{a}$) – первая производная от скорости по времени или вторая производная от перемещения по времени (1.2):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\ . \tag{1.2}$$

Если известна зависимость $\vec{r}(t)$ от времени, то выполняя дифференцирование, можно найти скорость и ускорение.

Если задано ускорение как функция времени, то изменение скорости и перемещение за время t находят путем интегрирования (1.3)

$$\Delta\vec{v} = \int_0^t \vec{a}(t)\cdot dt\ ; \qquad \Delta\vec{r}(t) = \int_0^t \vec{v}(t)\cdot dt\ . \tag{1.3}$$

В частности, если частица движется с постоянным ускорением (1.4)

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t\ . \tag{1.4}$$

Подставив выражение (1.4) в (1.3) получим (1.5)

$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2} \ , \tag{1.5}$$

где $\vec{v}_0$ – начальная скорость;

$\vec{r}_0$ – радиус-вектор частицы в момент времени, принятый за начало его отсчета, т. е. при $t = 0$.

Из соотношений (1.4) и (1.5) можно найти, что при равноускоренном движении (1.6)

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\left(\vec{v}_0 + \vec{v}\right)}{2} \ . \tag{1.6}$$

Исключив время из уравнения (1.5) получим (1.7)

$$v^2 - v_0^2 = 2a\left|\Delta\vec{\mathrm{r}}\right| \ . \tag{1.7}$$

1.2 Вращательное движение

При движении частицы по окружности изменение ее положения удобно характеризовать углом поворота ($\Delta\varphi$) радиуса R, соединяющего движущуюся точку с центром окружности (рисунок 2). Угол φ измеряется в радианах.

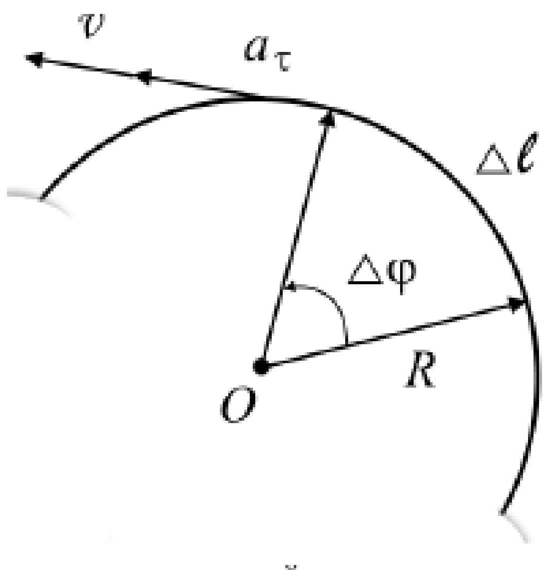


Рисунок 2 – Параметры материальной точки при вращательном движении

Производная от угла поворота по времени называется *угловой скоростью* ω (1.8).

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \ , \left[\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right]. \tag{1.8}$$

Угловая скоростью (ω) не является вектором, но имеет направление определяющееся правилом правого винта.

Быстрота изменения угловой скорости или производная от угловой скорости по времени называется *угловым ускорением* (1.9)

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \left[\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}\right]. \tag{1.9}$$

Величины угловой скорости и ускорения связаны с соответствующими линейными величинами (1.10) и (1.11):

$$v = \omega R, \tag{1.10}$$

$$a_\tau = \varepsilon R, \tag{1.11}$$

где a_τ – проекция ускорения на направление касательной к окружности или так называемое тангенциальное ускорение.

Эти соотношения легко получить продифференцировав по времени равенство $\Delta\varphi = \frac{\Delta\ell}{R}$, которое определяет радиальную меру угла

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\ell}{dtR} = \frac{v}{R}.$$

Составим таблицу аналогий между характеристиками поступательного и вращательного движений тела (таблица 1).

Таблица 1 – Аналогии между характеристиками поступательного и вращательного движений тела

Поступательное движение	Вращательное движение	Формулы связи между модулями линейных и угловых характеристик
Путь S	Угловой путь φ	$S = \varphi r$, где r – радиусокружности
Элементарное перемещение $d\vec{r}$	Элементарное угловое перемещение $d\vec{\varphi}$	$dr = rd\varphi$
Линейная скорость $\vec{v}$	Угловая скорость ω	$v = \omega r$
Тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau$	Угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$	$a_\tau = \varepsilon r$
—	Нормальное ускорение $\vec{a}_n$	$a_n = \frac{v^2}{r}$

2 ДИНАМИКА

2.1 Поступательное движение

Динамика – раздел механики, описывающий процесс изменения состояния движения тел, в результате их взаимодействия друг с другом.

Основу классической динамики частицы составляют три закона Ньютона, сформулированные на основе обобщения многочисленных опытных фактов.

I закон Ньютона. *Существуют такие системы отсчета, в которых тела сохраняют состояние относительного покоя* (*или равномерного прямолинейного движения*), *если действия на них всех других тел* (*сил*) скомпенсировано.

Первый закон динамики среди множества систем отсчета на основании эксперимента выделяет особый тип систем, в которых описание физических явлений имеет наиболее простой вид. Системы отсчета, удовлетворяющие требованию первого закона Ньютона, называют *инерциальными*.

II закон Ньютона. *В инерциальных системах отсчета скорость изменения импульса частицы пропорциональна векторной сумме всех сил, действующих на частицу* (2.1).

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \quad . \tag{2.1}$$

Импульсом (или количеством движения) *частицы* называют векторную величину, равную произведению массы частицы на ее скорость (2.2)

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon} \quad . \tag{2.2}$$

Масса – мера инертности тела, т. е. величина, показывающая насколько трудно с помощью данного воздействия изменить характер его движения.

Сила – количественная характеристика взаимодействия тел (конкретное выражение для силы зависит от вида взаимодействий).

Если масса частицы со временем не меняется, т. е. при $\upsilon << c = 3\cdot10^8$ м/с, то используя формулы (2.1) и (2.2) получим:

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{m}\vec{\upsilon})}{\mathrm{dt}} = \frac{m\cdot d\vec{\upsilon}}{dt} \; .$$

Тогда второй закон Ньютона можно записать в виде (2.3):

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i \quad . \tag{2.3}$$

III закон Ньютона. *В инерциальных системах отсчета два тела взаимодействуют друг с другом с силами равными по величине и противоположными по направлению* (2.4).

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad . \tag{2.4}$$

Используя законы Ньютона, а также кинематические соотношения, можно получить ряд следствий (теорем) удобных при решении практических задач.

Приведем некоторые из них:

1. Скорость изменения полного импульса системы частиц $\left(\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_n\right)$ равна сумме внешних сил, действующих на данную систему (2.5)

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \vec{F}_{i\ \text{внешн.}} \quad . \tag{2.5}$$

Внешние силы – силы, возникающие при взаимодействии частиц системы с телами, не входящими в данную систему.

Если система замкнута, т. е. $\sum_i \vec{F}_{i\ \text{внешн.}} = 0$, то (2.6)

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \qquad \text{или} \qquad \vec{P} = \text{const} \quad . \tag{2.6}$$

Таким образом, полный импульс замкнутой системы есть величина постоянная (*закон сохранения импульса*).

2. Введем в рассмотрение точку C , положение которой определяется радиус-вектором следующим образом (2.7):

$$R_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \ , \tag{2.7}$$

где m_i – масса i-той частицы системы;

$\vec{r}_i$ – радиус-вектор i-той частицы системы.

Такую точку называют *центром масс* (или центром инерции) системы частиц. Для этой точки справедлив следующий закон динамики (2.8):

$$M\frac{d^2\vec{R}_c}{dt^2} = \sum_i \vec{F}_{i\ \text{внешн.}} \ , \tag{2.8}$$

т. е. произведение массы всей системы $\left(M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n\right)$ на ускорение центра масс равно сумме внешних сил действующих на систему.

Важное следствие можно получить относительно величины, получившей название *механической работы* (A). За величину *элементарной работы* принимают скалярное произведение силы на элементарное перемещение (2.9):

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = |F|\cdot|d\vec{r}|\cdot\cos\alpha = F\,dS\cdot\cos\alpha = F_S\,dS \ . \qquad (2.9)$$

В цепочке последних равенств:

α – угол между $\vec{F}$ и $d\vec{r}$;

F_S – проекция силы на направление, касательное к траектории.

Равенство (2.9) дает работу при бесконечно малом перемещении. В общем случае при перемещении тела из точки (1) в точку (2) работу находят, выполняя интегрирование:

$$A = \int_1^2 F_S\,dS \ .$$

Существуют силы, в поле которых работа определяется только выбором начальной и конечной точек перемещения и не зависит от формы траектории, соединяющей эти точки. Такие силы называют *консервативными*.

Сила тяжести и упругая сила консервативны. В то же время работа в поле сил трения зависит от формы траектории. Силы, подобные силе трения, называют диссипативными.

Можно показать, что существует величина, называемая *механической энергией системы* (E), изменение которой равно работе диссипативных и внешних сил (2.10)

$$E_2 - E_1 = A_{\text{дисс.}} + A_{\text{внешн.}} \ . \qquad (2.10)$$

Если $A_{\text{внешн.}} = 0$, то система является замкнутой.

Полная механическая энергия складывается из суммы кинетической и потенциальной энергий

$$E = T + U \ ,$$

где T – кинетическая энергия;
U –потенциальная энергия.

Кинетическая энергия связана с движением тела и вычисляется по формуле (2.11):

$$T = \frac{m\upsilon^2}{2} \ . \qquad (2.11)$$

Потенциальная энергия учитывает работу консервативных сил. Ее явное выражение зависит от конкретного вида взаимодействия. Например, потенциальная энергия тела в однородном поле сил тяжести (2.12)

$$U = mgh \ , \tag{2.12}$$

где h – высота подъема относительно уровня, от которого отсчитывается потенциальная энергия.

Потенциальная энергия упруго деформированной пружины (2.13)

$$U_{\text{упр.}} = \frac{kx^2}{2} \ . \tag{2.13}$$

Заметим, что потенциальная энергия и соответствующие силы связаны соотношением (2.14)

$$F_x = -\frac{dU}{dx} \ , \tag{2.14}$$

в соответствии с которым проекция силы на произвольное направление (F_x) равна производной с обратным знаком от потенциальной энергии по этому направлению.

Если в замкнутой системе отсутствуют диссипативные силы, т. е. система консервативна, то $A_{\text{дисс.}} = 0$, тогда из (2.10) следует (2.15)

$$E_2 = E_1 \ , \tag{2.15}$$

т. е. полная механическая энергия в замкнутых консервативных системах сохраняется.

2.2 Вращательное движение

При динамическом описании вращательного движения тела удобно использовать физические величины аналогичные ранее введенным: массе тела, силе и импульсу. Такими величинами являются момент инерции, момент силы, момент импульса.

Момент инерции ($\mathcal{J}$) материальной точки:

$$\mathcal{J}_{\text{точки}} = mr^2 \ ,$$

где m – масса точки;

r – расстояние до оси вращения.

Момент инерции системы $\mathcal{J}_C$ материальных точек

$$\mathcal{J}_C = \sum_i^n m_i \cdot r_i^2 \ .$$

Момент силы ($\vec{M}$) относительно точки поворота есть векторное произведение $\vec{r}$ и $\vec{F}$ (рисунок 3)

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \ ,$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный от точки поворота до точки приложения силы;

$\vec{F}$ – сила.

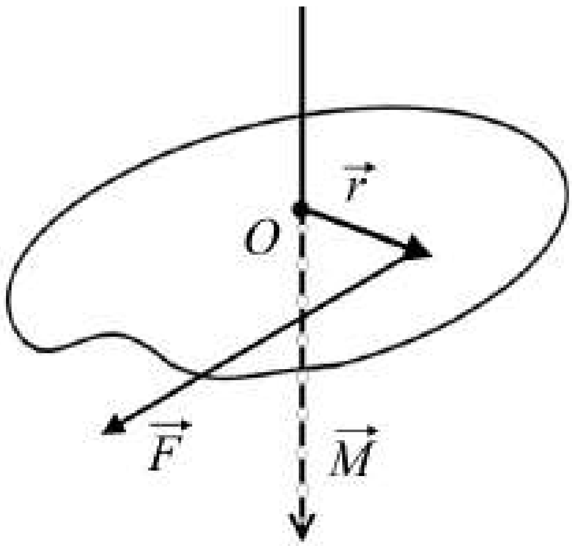


Рисунок 3 – Направление момента силы относительно точки поворота O

Момент импульса ($\vec{L}$) тела относительно точки поворота определяется, как векторное произведение радиуса вектора $\vec{r}$ и импульса $\vec{p}$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \ .$$

Проведем аналогию между характеристиками поступательного и вращательного движений тела (таблица 2).

Таблица 2 – Аналогии между характеристиками поступательного и вращательного движений тела

Поступательное движение	Вращательное движение	Формулы связи
Масса тела m	Момент инерции $\mathcal{J}$	$\mathcal{J} = \sum m_i \cdot r_i^2$
Сила $\vec{F}$	Момент силы $\vec{M}$	$\vec{M} = \vec{r} \cdot \vec{F}$
Импульс $\vec{p}$	Момент импульса $\vec{L}$	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

Скорость изменения $\vec{L}$ равна сумме моментов внешних сил, действующих на систему (2.16):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{внешн}} \ . \qquad (2.16)$$

Полный момент импульса сохраняется $\left(\vec{L} = \text{const}\right)$, если $\vec{M}_{\text{внеш}} = 0$. Легко показать, что (2.17)

$$L = \mathcal{J}\omega \ . \qquad (2.17)$$

Подставив (2.17) в (2.16), получим *основное уравнение динамики вращательного движения абсолютно твердого тела относительно фиксированной оси* (2.18):

$$\frac{d\left(\mathcal{J}\omega\right)}{dt} = M \ . \qquad (2.18)$$

Если $\mathcal{J} = \text{const}$, то (2.19)

$$\frac{\mathcal{J}d\omega}{dt} = \mathcal{J}\varepsilon = M \ . \qquad (2.19)$$

где ε – угловое ускорение.

Формула $\mathcal{J} = \sum m_i \cdot r_i^2$ может быть использована для нахождения момента инерции $\mathcal{J}$ при дискретном распределении масс. Если масса внутри тела распределена непрерывно с объемной плотностью $\rho(r)$, то суммирование следует заменить интегрированием по объему тела (2.20):

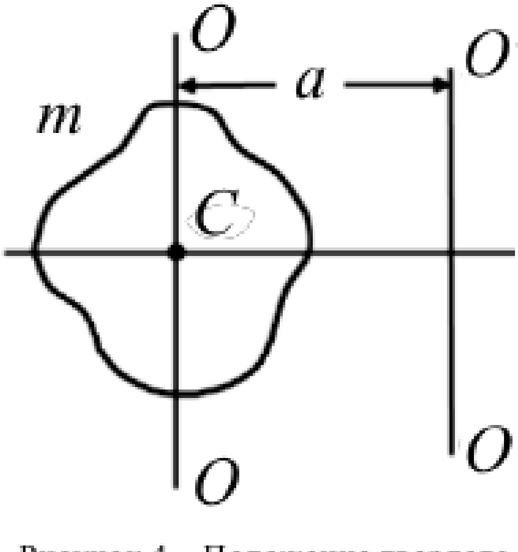


Рисунок 4 – Положение твердого тела относительно произвольной оси

$$\mathcal{J} = \int\limits_{(V)} \rho(r) r^2 dV \ . \qquad (2.20)$$

Для вычисления момента инерции полезна теорема Штейнера-Гюйгенса о параллельных осях (рисунок 4).

Пусть известен момент инерции тела относительно оси OO, проходящей через центр масс. Тогда момент инерции относительно оси $O'O'$, параллельной оси OO и отстоящей от нее на расстоянии a, равен (2.21):

$$\mathcal{J}_{O'O'} = \mathcal{J}_{OO} + m a^2 \ , \tag{2.21}$$

где m – масса тела;

a – расстояние между параллельными осями.

Вращающееся твердое тело обладает кинетической энергией, которую можно найти по формуле (2.22), как сумму кинетических энергий частиц (материальных точек), составляющих тело:

$$E_{\text{к.вр}} = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i (\omega r_i)^2}{2} = \frac{\left(\sum m_i r_i^2\right)\omega^2}{2} = \frac{\mathcal{J}\omega^2}{2} \ . \tag{2.22}$$

Приведем основные законы динамики для частицы в таблице 3.

Таблица 3 – Основные законы динамики поступательного и вращательного движения

	Поступательное движение	Вращательное движение
Основной закон динамики частицы	$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$, где $\vec{p}$ – импульс частиц	$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{M}$, где $\vec{\ell}$ – момент импульса частицы
Основной закон динамики системы частиц	$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{внешн.}}$ $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_n$	$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{внешн}}$ $\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \ldots + \vec{\ell}_n$
Основной закон динамики твердого тела	$m\frac{d^2\vec{R}_c}{dt^2} = \vec{F}_{\text{внешн.}}$	$\mathcal{J}\varepsilon = M$
Кинетическая энергия	$E_{\text{к}} = \frac{m v^2}{2}$	$E_{\text{к}} = \frac{\mathcal{J}\omega^2}{2}$

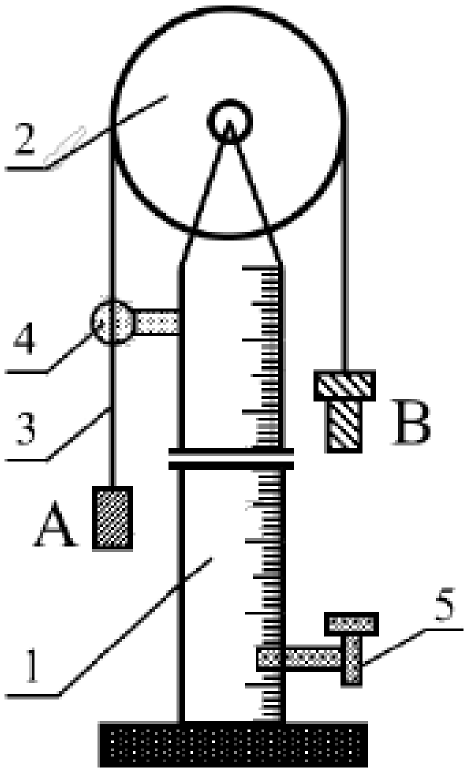
3 Лабораторная работа № 07
ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ МАШИНЫ АТВУДА

3.1 Цель работы

Целью работы является изучение законов равноускоренного движения и определение ускорения свободного падения.

3.2 Описание установки

Лабораторная установка представляет собой, так называемую машину Атвуда (см. рисунки 5 и 6).



1 – шкала, 2 – легкий блок, 3 – тонкая нить,
А и В – грузы, 4 – электромагнит,
5 – приемный столик

Рисунок 5 – Устройство машины Атвуда:

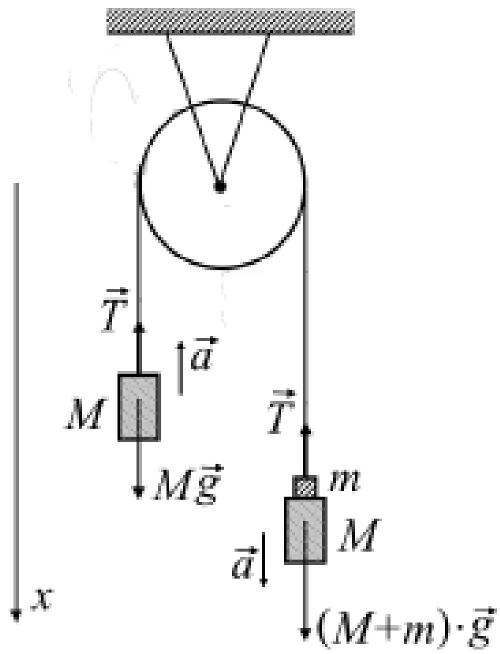


Рисунок 6 – Схема машины Атвуда

Через легкий блок перекинута нить, к концам которой прикреплены одинаковые грузы массой M. На один из грузов кладется перегрузок массой m, и грузы приходят в ускоренное движение. Пренебрегая массой блока и нити, а также трением в оси блока и сопротивлением воздуха движению грузов, можно следующими уравнениями (3.1):

$$M g - T = -M a \ ,$$

$$(M + m) \cdot g - T = (M + m) \cdot a \ . \tag{3.1}$$

где M – масса груза;

m – масса перегрузка;

g – ускорение свободного падения;

T – сила натяжения нити;

a – ускорение грузов.

Исключая T из уравнений (3.1), получаем (3.2)

$$a = g \frac{m}{2M + m} \ . \tag{3.2}$$

Машину Атвуда можно использовать для измерения ускорения свободного падения.

Пусть на отрезке пути S_0 грузы M и $(M + m)$ двигаются равноускорено. Скорость грузов в конце равноускоренного движения найдем из формул равноускоренного движения (3.3):

$$v_0^2 = 2a \cdot S_0 \ . \tag{3.3}$$

Если затем снять перегрузок, то грузы M продолжат движение по инерции с постоянной скоростью v_0, пройдя путь S за время t (3.4):

$$S = v_0 t = t \cdot \sqrt{2aS_0} \ . \tag{3.4}$$

Используя формулу (3.4) , из формулы (3.2) можно выразить g (3.5):

$$g = \frac{2M + m}{m} \cdot \frac{S^2}{2S_0 t^2} \ . \tag{3.5}$$

Для определения g необходимо измерить путь S_0 равноускоренного движения, а также путь S и время t равномерного движения.

Измерение времени движения груза в лабораторной установке осуществляется автоматически с помощью электронного секундомера и двух фотоэлектрических датчиков.

3.3 Порядок выполнения работы

1. Наложить на шкив нить с большими грузиками. Масса каждого грузика $M = (60{,}00 \pm 0{,}01)$ г.

2. Включить прибор, нажав клавишу «СЕТЬ». Для деблокировки шкива клавиша «ПУСК» должна быть в нажатом (утопленном) положении.

3. Переместить правый грузик в верхнее положение, совместив нижний край грузика с чертой на верхнем кронштейне и произвести блокировку шкива, отжав клавишу «ПУСК». Наложить на верхний груз один из перегрузков.

4. Нажать клавишу «ПУСК», шкив деблокируется и грузы приходят в движение. Когда груз проходит через средний кронштейн, перегрузок автоматически снимается и включается секундомер. Пересекая оптическую ось нижнего фотоэлектрического датчика, груз выключает секундомер. Записать время равномерного движения и нажать клавишу «СБРОС» для деблокировки шкива. Поднять груз в верхнее положение и заблокировать его положение, отжав клавишу "ПУСК". Повторить измерение с данным перегрузком еще 4 раза. По результатам измерений получить $t_{\text{ср}}$ и Δt и вычислить по формуле (3.5) g, измерив предварительно по шкале S_0 и S.

5. Проделать по 5 измерений с двумя другими перегрузками. Вычислить g_2 и g_3.

3.4 Обработка результатов измерений

1. Вычислить среднее значение ускорения свободного падения.

2. Вывести формулу для расчета относительной погрешности метода и рассчитать ее для измерений с каждым перегрузком. Используя наибольшее значение относительной погрешности, рассчитать абсолютную погрешность среднего значения ускорения свободного падения. Результаты представить в виде:

$$g_{\text{ср}} \pm \Delta g$$

3.5 Контрольные вопросы

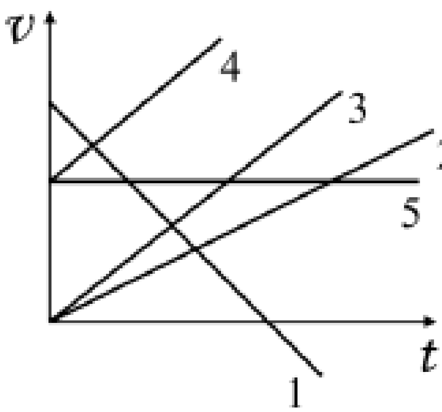
1) Дайте определение кинематических характеристик поступательного движения. Как направлены $\vec{a}$ и $\vec{v}$ при ускоренном движении, при замедленном движении?

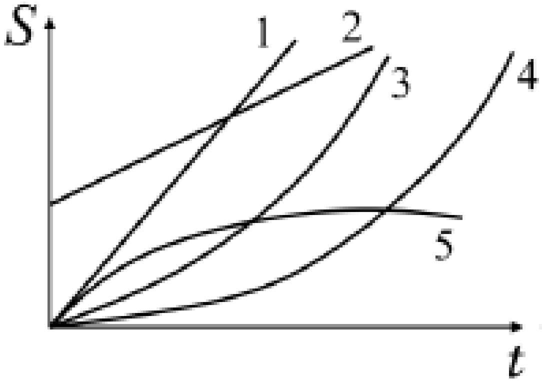
2) Дайте определение силы и импульса тела. Как выглядит основное уравнение динамики? Какие виды сил вы знаете? От чего они зависят?

3) Сформулируйте законы Ньютона.

4) Какие системы отсчета называются инерциальными? Как выглядят кинематические преобразования при переходе из одной инерциальной системы в другую?

5) Опишите движения тел по следующим графикам:





6) Вывести формулу (3.5).

7) Что такое импульс силы?

8) Сформулируйте закон сохранения энергии и закон сохранения импульса. При каких условиях они выполняются?

9) Что такое центр инерции системы? Как он двигается?

4 Лабораторная работа № 1
ИЗУЧЕНИЕ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

4.1 Цель работы

Цель настоящей работы состоит в проверке выполнения основного закона динамики вращательного движения.

Момент вращающей силы равен произведению момента инерции и углового ускорения.

$$M = \mathcal{J}\varepsilon$$

где M – момент силы;

$\mathcal{J}$ – момент инерции;

ε – угловое ускорение.

Это уравнение является основным законом вращательного движения.

4.2 Описание установки

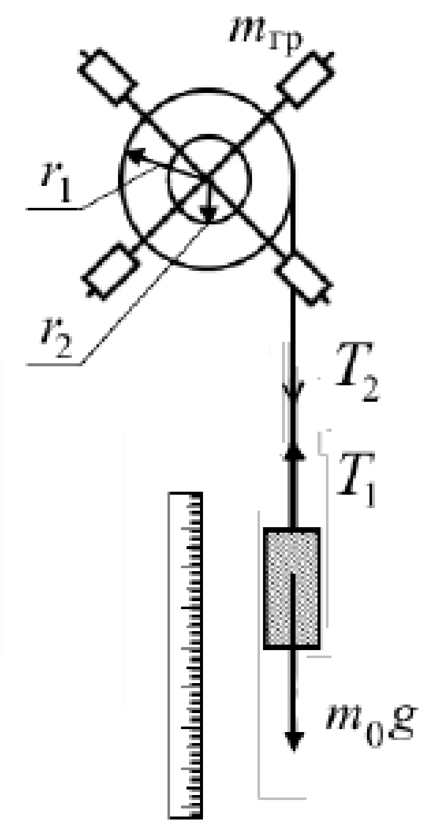


Рисунок 7 – Схема установки

Схема установки, называемой маятником Обербека, приведена на рисунке 7.

Вращающаяся система состоит из двух шкивов радиусами r_1 и r_2, насаженных на общую ось, и крестовины, на которой насажены четыре груза массой $m_{гр}$ каждый. Ось вращения системы расположена горизонтально. На шкив намотана нить, к которой прикрепляется груз массой m_0. Падающий груз вызывает натяжение нити T_1. Согласно III закону Ньютона, сила T_2 приложенная к ободу шкива, равна по величине силе T_1 и противоположно направлена

Таким образом возникает вращающий момент, который раскручивает систему (4.1):

$$M = T\,r\ , \qquad (4.1)$$

где M – вращающий момент;

T – сила натяжения нити;

r – радиус шкива, на который намотана нить

Натяжение нити можно найти из второго закона Ньютона для падающего груза (4.2):

$$m_0 g - T = m_0 a \quad . \tag{4.2}$$

Из уравнений (4.1) и (4.2) получаем, что (4.3)

$$M = T\,r = m(g-a)r \quad . \tag{4.3}$$

Считая движение падающего груза равноускоренным, можно найти его ускорение из формулы (4.4)

$$a = \frac{2h}{t^2} \ , \tag{4.4}$$

где t – время падения груза;

h – высоты, с которой падает груз.

Для обода шкива угловое ускорение ε можно связать с линейным ускорением падающего груза формулой $a = \varepsilon r$.

Таким образом (4.5)

$$\varepsilon = \frac{a}{r} = \frac{2h}{rt^2} \ . \tag{4.5}$$

Если известен момент инерции маятника Обербека, то можно найти значение произведения $\mathcal{J}\varepsilon$ и сопоставить с моментом силы M.

4.3 Порядок выполнения работы

1 Сбалансировать маятник.

2 Измерить расстояния R_i от оси вращения до центров вращающихся грузов. Найти $\langle R \rangle$ и ΔR.

3 Намотав, на один из шкивов радиуса r_1 или r_2 нить (*значение записать*!), прикрепить к свободному концу нити груз известной массы m_0.

4 Измерить 5 раз время падения груза с фиксированной высоты h. Результаты измерения занести в таблицу 4. Записать также паспортные данные установки.

Таблица 4 – Измерение времени падения груза

T	Δt	r_i	m_0	$m_{гр}$	R	$m_{стерж}$	$\ell_{стерж}$	h
t_1		$r_1 \pm \Delta r_1$	$m_0 \pm \Delta m_0$	$m_{гр} \pm \Delta m$	R_1	$\langle m_{ст} \rangle \pm \Delta m$	$\langle \ell_{ст} \rangle \pm \Delta \ell$	$h \pm \Delta h$
t_2		$r_2 \pm \Delta r_2$			R_2			
$\ldots$					$\ldots$			
$\ldots$					$\ldots$			
t_5					R_5			
$\langle t_{ср} \rangle$	$\langle \Delta t \rangle$				$\langle R \rangle \pm \Delta R$			

4.4 Обработка результатов измерений

1 По формуле (4.4) рассчитать линейное ускорение.

2 По формуле (4.5) рассчитать угловое ускорение.

3 Используя формулу (4.4), рассчитать по формуле (4.3) вращающий момент силы натяжения нити.

4 Рассчитать момент инерции вращающейся системы.

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_{\text{шкив 1}} + \mathcal{J}_{\text{шкив 2}} + 4\mathcal{J}_{\text{стерж}} + 4\mathcal{J}_{\text{груз}} =$$

$$= \frac{m_1 r_1^2}{2} + \frac{m_2 r_2^2}{2} + 4\left[\frac{m_{ст}\ell_{ст}^2}{3} + m_{гр} \cdot R^2\right].$$

5 Проверить равенство $M = \mathcal{J}\varepsilon$.

6 Рассчитать погрешность для вращающего момента M и произведения $\mathcal{J}\varepsilon$.Результаты работы представить в виде:

$$M \pm \Delta M \;;$$

$$\mathcal{J}\varepsilon \pm \Delta(\mathcal{J}\varepsilon).$$

4.5 Контрольные вопросы

1) Каковы особенности поступательного и вращательного движения тел?
2) Как определяются угловые кинематические величины (угол поворота, вектор угловой скорости, вектор углового ускорения)?
3) Как связаны линейные и угловые кинематические величины?
4. Что такое векторное произведение двух векторов?
5) Дайте определение вектора момента силы и вектора момента импульса. Как они направлены и чему равны их модули?
6) Что такое момент инерции? Каков физический смысл этой характеристики?
7) Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения для точки, для тела, вращающегося относительно оси.
8) Сформулируйте теорему Гюйгенса-Штейнера. Примените ее для вычисления момента инерции стержня относительно оси, проходящей через его конец перпендикулярно к стержню.
9) Сформулируйте закон сохранения момента импульса. При каких условиях он справедлив?

5 Лабораторная работа № 06
ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МАЯТНИКА МАКСВЕЛЛА

5.1 Цель работы

Целью работы является изучение законов равноускоренного движения и определение ускорения свободного падения.

5.2 Описание установки

Цель работы заключается в экспериментальном определении момента инерции кольца с помощью маятника Максвелла.

Маятник Максвелла (рисунок 8) – это массивный диск (1), с надетым на него кольцом (3) насаженный на ось (2) радиусом r, которая подвешена на двух накрученных на нее нитях (4).

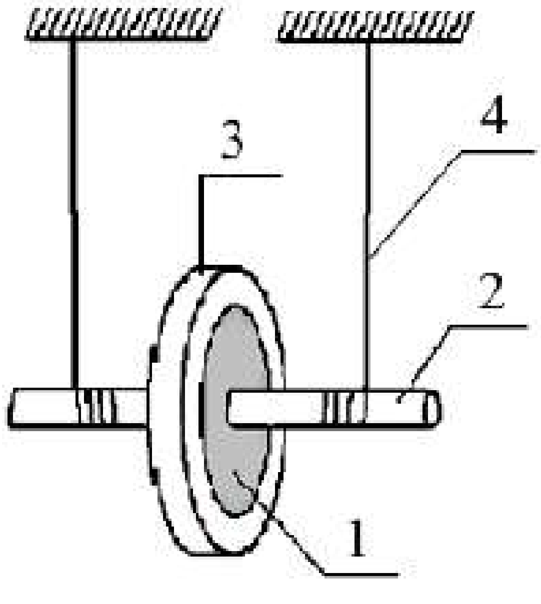


Рисунок 8 – Схема Маятника Максвелла

Если накрутить нити на ось и отпустить диск, то он при раскручивании нити начинает вращаться и двигаться поступательно вниз. Когда нить полностью раскрутится, то вследствие инерции, вращение диска продолжается в прежнем направлении, что приведет к закручиванию нити и подъему диска.

Движение диска легко описать с использованием закона превращения энергии. В верхней точке маятник Максвелла обладает запасом потенциальной энергии mgh, где h – длина подвеса маятника.

По мере опускания диска потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию поступательного и вращательного движения.

Закон сохранения энергии записывается в виде (5.1):

$$mgh = \frac{\mathcal{J}\omega^2}{2} + \frac{mv_c^2}{2} \quad . \qquad (5.1)$$

Скорость центра масс связана с угловой скоростью соотношением

$$v_c = \omega r .$$

Поступательное движение центра масс является равноускоренным, поэтому (5.2):

$$v_c = a t , \qquad h = \frac{a t^2}{2} . \tag{5.2}$$

Исключив из выражений (5.2) ускорение, получаем (5.3):

$$v_c = \frac{2h}{t} . \tag{5.3}$$

Формулу (5.1) можно переписать так (5.4) и (5.5):

$$2mgh = \frac{\mathcal{J} v_c^2}{r^2} + m v_c^2 . \tag{5.4}$$

или

$$gh = \left[\frac{\mathcal{J}}{m r^2} + 1\right] \frac{2h^2}{t^2} . \tag{5.5}$$

Из последнего выражения следует, что (5.6)

$$\mathcal{J} = m r^2 \left[\frac{g t^2}{2h} - 1\right] , \tag{5.6}$$

где $\mathcal{J}$ – момент инерции вращающейся системы;

m – масса вращающейся системы;

g – ускорение свободного падения;

t – время падения маятника;

h – длина маятника, равная пути падения.

Если на диск насадить кольцо, масса которого $m_к$ и момент инерции $\mathcal{J}_к$, то формула (5.6) преобразуется:

$$\mathcal{J} = \left(\frac{1}{4} m D^2\right) \left[\frac{g t^2}{2h} - 1\right] , \tag{5.7}$$

где $\mathcal{J}$ – момент инерции вращающейся системы;

m – общая масса маятника вместе с кольцом;

D – внешний диаметр оси маятника вместе с намотанной на нее нитью подвески;

Масса m определяется по формуле (5.8):

$$m = m_{\text{О}} + m_{\text{К}} + m_{\text{Д}} \ , \tag{5.8}$$

где $m_{\text{О}}$ – масса оси маятника;

$m_{\text{К}}$ – масса наложенного на диск кольца;

$m_{\text{Д}}$ – масса диска.

Внешний диаметр оси маятника вместе с намотанной на нее нитью подвески определяется по формуле (5.9):

$$D = D_{\text{О}} + D_{\text{Н}} \ , \tag{5.9}$$

где $D_{\text{О}}$ – диаметр оси маятника;

$D_{\text{К}}$ – диаметр нити подвески.

Теоретическое значение $\mathcal{J}_{\text{теор.}}$ можно определяется по формуле (5.10):

$$\mathcal{J}_{\text{теор.}} = \mathcal{J}_{\text{О}} + \mathcal{J}_{\text{К}} + \mathcal{J}_{\text{Д}} \ , \tag{5.10}$$

где $\mathcal{J}_{\text{О}}$ – момент инерции оси маятника;

$\mathcal{J}_{\text{К}}$ – момент инерции кольца, наложенного на диск;

$\mathcal{J}_{\text{Д}}$ – момент инерции диска.

Значения отдельных моментов инерции определяются по формуле (5.11):

$$\mathcal{J}_{\text{О}} = \left(\frac{1}{8} m_{\text{О}} \, D_{\text{О}}^2\right), \tag{5.11}$$

где $D_{\text{О}}$ – внешний диаметр оси маятника.

$$\mathcal{J}_{\text{Д}} = \frac{1}{8} m_{\text{К}} \left(D_{\text{О}}^2 + D_{\text{Д}}^2\right), \tag{5.12}$$

где $D_{\text{Д}}$ – внешний диаметр диска.

$$\mathcal{J}_{\text{К}} = \frac{1}{8} m_{\text{Д}} \left(D_{\text{Д}}^2 + D_{\text{К}}^2\right), \tag{5.13}$$

где $D_{\text{К}}$ – внешний диаметр кольца.

Измерение времени движения в установке происходит автоматически с помощью электронного секундомера и двух фотоэлектрических, датчиков, один из которых установлен в верхнем кронштейне, а второй – в нижнем.

В верхнем кронштейне находится электромагнит для фиксации маятника в верхнем положении и вороток для изменения длины нитей маятника.

Параметры маятника:

- Диаметр оси маятника $D_О = (10{,}0 \pm 0{,}5)$ мм
- Внешний диаметр диска $D_Д = (86{,}0 \pm 0{,}5)$ мм
- Внешний диаметр кольца $D_К = (105{,}0 \pm 0{,}5)$ мм
- Диаметр нити подвески $D_Н = (0{,}5 \pm 0{,}1)$ мм
- Масса оси $m_О = (33{,}0 \pm 0{,}1)$ г
- Масса диска $m_Д = (156{,}0 \pm 0{,}1)$ г
- Масса кольца выгравирована на каждом кольце

5.3 Порядок выполнения работы

1 На диск плотно насадить кольцо, указанное преподавателем. Отрегулировать положение оси маятника так, чтобы она была горизонтальна, а край кольца перекрывал оптическую ось нижнего фотоэлемента приблизительно на 2 мм. Включить прибор в сеть нажатием клавиши «СЕТЬ».

2 Равномерно намотать нить на ось маятника и зафиксировать его в верхнем положении с помощью электромагнита, отжав клавишу «ПУСК». Нажать клавишу «СБРОС» для обнуления показаний секундомера.

3 Нажать клавишу «ПУСК». Записать время падения. Измерения повторять 5 раз, проделав операции, указанные в пунктах 2 и 3. Рассчитать среднее время t падения и погрешность Δt.

4 Определить по указателю на нижнем кронштейне высоту h падения маятника. Записать данные, о массах оси, диска и кольца, и радиусах оси, диска и кольца.

5.4 Обработка результатов измерений

1 Вычислить момент инерции маятника по формуле (5.7) и рассчитать погрешность измерения момента инерции.

2 По формуле (5.10) вычислить теоретическое значение момента инерции маятника и его абсолютную погрешность.

3 Сравнить теоретический и экспериментальный моменты инерции, полученные из формул (5.7) и (5.10).

5.5 Контрольные вопросы

1) Раскройте физический смысл понятия момент инерции тела.
2) Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения тела и раскройте физический смысл величин, входящих в него.
3) Дайте определение момента силы. Как направлен вектор момента силы? Чему равен модуль момента силы?
4) Сформулируйте закон сохранения энергии и примените его к описанию движения маятника Максвелла.
5) Дайте определение угловой скорости. Как направлен вектор угловой скорости? Каким соотношением связаны между собой линейная и угловая скорости?
6) Дайте определения момента силы и момента импульса. Каким соотношением они связаны друг с другом?

Л И Т Е Р А Т У Р А

1 Валишев, М.Г. Курс общей физики [Текст]: учебное пособие для ВУЗов по техническим направлениям подготовки и специальностям / М.Г. Валишев, А.А. Повзнер. – 2-е изд., стер. – СПб; М.; Краснодар: Лань, 2010. – 573 с.

2 Введение в физический практикум. Обработка результатов измерений [Текст]: учебное пособие для студентов заочной формы обучения / Б.Б. Болотов [и др.]; под ред. В.В. Кашмета. – СПб: Синтез, 2009. – 15 с.

3 Савельев, И.В. Курс общей физики [Текст] в 3-х т.: учебное пособие для ВУЗов по техническим и технологическим направлениям / И.В. Савельев. – 10-е изд., стер. – СПб; М.; Краснодар: Лань, 2008.

Т. 1: Механика. Молекулярная физика. – 2008. – 429 с.

4 Старовиков, М.И. Введение в экспериментальную физику [Текст]: учебное пособие для ВУЗов / М.И. Старовиков. – СПб; М.; Краснодар: Лань, 2008. – 235 с.

Кафедра общей физики

МЕХАНИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Учебное пособие

Ольга Петровна ШУСТРОВА

Александр Васильевич БЕЛЯКОВ

Анатолий Данилович ИВАНОВ

Игорь Александрович КУЯНОВ

Отпечатано с оригинал-макета. Формат 60x90 1/16
Печ. л. 2. Тираж ____________ экз. Заказ № ______________

Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(технический университет)

190013, Санкт-Петербург, Московский пр., 26
Типография издательства СПб ГТИ (ТУ),