ÁLGEBRA

- TEORÍA
- EJERCICIOS RESUELTOS
- EJERCICIOS PARA RESOLVER
- EJERCICIOS DE REFUERZO

ING. JOSÉ SILVA CEVALLOS

2011

ÍNDICE

CONTENIDOS PÁGINA

CAPÍTULO I. CONJUNTOS NUMÉRICOS

1.1. Conceptos básicos ... 1
1.1.1. Matemática ... 1
1.1.2. Álgebra ... 1
1.1.3. Aritmética ... 1
1.1.4. Signos del álgebra ... 1
1.1.4.1. Signos de operación ... 1
1.1.4.2. Signos de relación ... 1
1.1.4.3. Signos de agrupación ... 1
1.1.4.4. Ley de los signos ... 1
1.2. Clasificación de los números ... 2
1.2.1. Números naturales ... 2
1.2.2. Números enteros ... 2
1.2.3. Números racionales ... 2
1.2.4. Números irracionales ... 3
1.2.5. Números reales ... 4
1.3. Operaciones con números racionales ... 4
Ejercicios resueltos ... 5
Ejercicios para resolver en el aula ... 5
Ejercicios de refuerzo ... 5
1.4. Potenciación ... 6
1.4.1. Notación exponencial ... 6
1.4.2. Propiedades de los exponentes ... 6
1.4.3. Signos de la potencia ... 7
Ejercicios resueltos ... 7
1.5. Radicación ... 8
1.5.1. Propiedades de los radicales ... 8
1.5.2. Signos de las raíces ... 8
Ejercicios resueltos ... 9
Ejercicios para resolver en el aula ... 10
Ejercicios de refuerzo ... 11
1.6. Radicales semejantes ... 14
1.6.1. Simplificación de radicales semejantes ... 14
Ejercicios para resolver en el aula ... 15
Ejercicios de refuerzo ... 15
1.7. Notación científica ... 16
Ejercicios resueltos ... 16
Ejercicios para resolver en el aula ... 17
Ejercicios de refuerzo ... 17
1.8. Transformación de radicales dobles, en sencillos ... 17
Ejercicios para resolver en el aula ... 18
Ejercicios de refuerzo ... 18

CAPÍTULO II. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

2.1. Conceptos básicos ... 19
2.1.1. Expresión algebraica ... 19
2.1.2. Término algebraico ... 19
2.1.3. Polinomio ... 19
2.1.4. Grado de un polinomio ... 19
2.1.5. Grado de un las expresiones algebraicas ... 19
2.1.5.1. Grado absoluto ... 19
2.1.5.2. Grado relativo ... 20
2.1.5.3. Grado absoluto de un polinomio ... 20
2.1.5.4. Grado relativo de un polinomio ... 20

2.1.6. Cero o raíz de un polinomio ... 20
2.1.7. Términos semejantes ... 20
2.1.8. Polinomio homogéneo ... 20
2.1.9. Polinomio ordenado ... 20
2.1.10. Polinomio completo ... 20
2.1.11. Polinomio entero en "x" ... 20
2.1.12. Valor numérico de un polinomio ... 21
Ejercicios resueltos ... 21
2.2. Operaciones con polinomios ... 21
2.2.1. Suma algebraica ... 21
2.2.2. Resta algebraica ... 21
2.2.3. Multiplicación ... 21
Ejercicios para resolver en el aula ... 22
Ejercicios de refuerzo ... 23
2.2.4. Productos notables ... 25
Ejercicios para resolver en el aula ... 25
Ejercicios de refuerzo ... 26
2.2.5. Binomio de Newton ... 27
2.2.5.1. Notación factorial ... 27
2.2.5.2. Coeficientes binomiales ... 27
2.2.5.3. Teorema del binomio ... 27
2.2.5.4. Término general ... 28
Ejercicios para resolver en el aula ... 29
Ejercicios de refuerzo ... 29
2.2.6. División ... 30
2.2.6.1. Método clásico o de la galera ... 30
2.2.7. Método de ruffini ... 31
2.2.8. Método de los coeficientes indeterminados ... 32
2.2.8.1. Algoritmo de la división ... 32
2.2.9. Teorema del resto ... 33
2.2.10. Teorema del factor ... 34
2.2.11. Divisibilidad de $x^n \pm a^n$ entre $x \pm a$ ... 34
2.2.12. Cocientes notables ... 35
Ejercicios para resolver en el aula ... 35
Ejercicios de refuerzo ... 36
2.3. Descomposición factorial ... 38
2.3.1. Factorización de binomios ... 38
Diferencia de cuadrados ... 38
Suma de cuadrados perfectos ... 38
Diferencia de cubos ... 38
Suma de cubos ... 39
Binomios de la forma: $x^n \pm a^n$ ... 39
2.3.2. Factorización de trinomios ... 39
Trinomio cuadrado perfecto ... 40
Trinomios cuadrados incompletos ... 40
Trinomios de la forma: $x^2 + bx + c$ ... 40
Trinomios de la forma: $ax^2 + bx + c$ ... 41
Método del aspa simple ... 41
2.3.3. Factorización de polinomios ... 42
Factor común ... 42
Agrupación ... 42
Por evaluación ... 42
Criterio de artificio de cálculo ... 43
Ejercicios para resolver en el aula ... 44
Ejercicios de refuerzo ... 45
2.4. Máximo común divisor (M.C.D.) ... 46
2.4.1. Métodos para determinar el M.C.D. ... 47

2.4.1.1. Por factorización ... 47
2.4.1.2. Por divisiones sucesivas ... 47
Algoritmo de euclides ... 48
2.5. Mínimo común múltiplo (m.c.m) ... 48
Ejercicios resueltos ... 49
Ejercicios para resolver en el aula ... 49
Ejercicios de refuerzo ... 50
2.6. Raíces de un polinomio ... 51
2.6.1. Número de raíces ... 51
2.6.2. Ceros complejos ... 51
2.6.3. Regla de los signos de descartes ... 52
2.6.4. Cotas para los ceros reales ... 52
2.6.5. Ceros racionales (fraccionarios) ... 53
2.6.6. Ceros decimales ... 54
Método: aproximaciones sucesivas ... 54
Ejercicios para resolver en el aula ... 56
Ejercicios de refuerzo ... 56

CAPÍTULO III. FRACCIONES ALGEBRAICAS

3.1. Fracción algebraica ... 57
3.2. Clases de fracciones ... 57
3.2.1. Fracciones propias ... 57
3.2.2. Fracciones impropias ... 57
3.2.3. Fracciones homogéneas ... 57
3.2.4. Fracciones heterogéneas ... 57
3.2.5. Fracciones irreducibles ... 57
3.2.6. Fracciones equivalentes ... 57
3.3. Propiedades ... 57
3.4. Signos de una fracción ... 57
3.5. Cambios de signo de una fracción ... 58
3.5.1. Cuando no hay factores ... 58
3.5.2. Cuando la fracción tiene factores ... 58
3.6. Álgebra de fracciones ... 58
3.7. Simplificación de fracciones ... 59
3.8. Fracciones complejas ... 59
3.9. Fracciones continuas ... 59
3.10. Operaciones con fracciones ... 60
3.10.1. Adición y sustracción ... 60
3.10.2. Multiplicación y división ... 60
3.10.3. Combinación de las operaciones ... 61
Ejercicios para resolver en el aula ... 61
Ejercicios de refuerzo ... 63

CAPÍTULO IV. RACIONALIZACIÓN

4.1. Racionalización ... 65
4.2. Factor Racionalizante ... 65
4.3. Casos que se presentan ... 65
4.3.1. Cuando el denominador es un monomio ... 65
4.3.2. Cuando el denominador es un binomio ... 65
4.3.3. Cuando el denominador es un trinomio ... 67
4.3.4. Cuando el denominador es un polinomio ... 67
Ejercicios para resolver en el aula ... 68
Ejercicios de refuerzo ... 69

CAPÍTULO V. ECUACIÓN DE PRIMER GRADO Y SISTEMAS LINEALES

5.1. Conceptos básicos ... 71

5.1.1. Identidad ... 71
5.1.2. Ecuación ... 71
5.1.3. Ecuaciones equivalentes ... 71
5.2. Clasificación de las ecuaciones ... 71
5.2.1. Por su estructura ... 71
5.2.2. Por sus coeficientes ... 71
5.2.3. Por sus incógnitas ... 71
5.2.4. Por su grado ... 71
5.2.5. Por el número de soluciones ... 71
5.3. Principios fundamentales para la resolución de ecuaciones ... 71
5.4. Ecuación de primer grado con una incógnita ... 73
5.4.1. Discusión de la solución ... 73
Ejercicios resueltos ... 73
Ejercicios para resolver en el aula ... 74
5.5. Resolución de problemas con ecuaciones ... 75
Ejercicios resueltos ... 75
Ejercicios para resolver en el aula ... 76
Ejercicios de refuerzo ... 77
5.6. Sistemas de ecuaciones ... 80
5.6.1. Sistemas consistentes e inconsistentes ... 80
5.6.2. Sistemas equivalentes ... 81
5.6.3. Sistemas homogéneos ... 81
5.7. Métodos de resolución ... 81
5.7.1. Método por igualación ... 81
5.7.2. Método por sustitución ... 82
5.7.3. Método por reducción (suma o resta) ... 83
Ejercicios para resolver en el aula ... 84
5.8. Aplicaciones sistemas de ecuaciones lineales ... 85
Ejercicios resueltos ... 85
Ejercicios para resolver en el aula ... 86
Ejercicios de refuerzo ... 87

CAPÍTULO VI. ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

6.1. Ecuación de Segundo Grado con una Incógnita ... 91
6.1.1. Ecuaciones Incompletas ... 91
Ejercicios resueltos ... 91
6.1.2. Ecuación completa ... 92
6.1.2.1. Métodos de resolución ... 92
Por factorización ... 92
Formando un cuadrado perfecto (Fórmula general) ... 92
6.1.3. Carácter de las raíces ... 93
6.1.4. Propiedades de las raíces ... 93
6.1.4.1. Raíces de la ecuación cuadrática ... 94
6.2. Ecuaciones irracionales ... 95
6.3. Ecuaciones reducibles a ecuaciones de segundo grado ... 96
6.3.1. Ecuaciones bicuadradas ... 96
6.3.2. Ecuaciones binomios ... 97
6.3.3. Ecuaciones trinomias ... 97
6.3.4. Ecuaciones que se resuelven con cambio de variable ... 98
Ejercicios para resolver en el aula ... 98
Aplicaciones de las ecuaciones de segundo grado ... 99
Ejercicios para resolver en el aula ... 102
Ejercicios de refuerzo ... 102
6.4. Sistemas de ecuaciones no lineales ... 105
Ejercicios resueltos ... 105
Ejercicios rara resolver en el aula ... 107
Problemas de aplicación ... 107
Ejercicios de refuerzo ... 108

CAPÍTULO VII. FRACCIONES PARCIALES

7.1. Fracciones parciales (F.P.) ... 109
7.2. Procedimiento para descomponer una fracción en fracciones parciales ... 109
Ejercicios resueltos ... 110
Ejercicios para resolver en el aula ... 113
Ejercicios de refuerzo ... 113

CAPÍTULO VIII. DESIGUALDADES E INECUACIONES

8.1. Desigualdad ... 115
8.1.1. Propiedades de las desigualdades ... 115
8.1.2. Desigualdades absolutas ... 116
8.2. Inecuación o desigualdad condicional ... 116
8.3. Conjunto solución de una inecuación ... 116
8.4. Intervalos ... 116
8.4.1 Tipos de intervalos ... 116
8.5. Operaciones con intervalos ... 117
8.5.1 Aplicaciones del buen uso de los intervalos ... 118
Ejercicios para resolver en el aula ... 121
Ejercicios de refuerzo ... 121
8.6. Inecuaciones de primer grado ó lineales ... 122
Ejercicios resueltos ... 122
Ejercicios para resolver en el aula ... 122
8.7. Sistema de inecuaciones lineales con una variable ... 122
8.7.1. Inecuaciones simultáneas ... 123
Ejercicios para resolver en el aula ... 123
8.8. Inecuaciones de segundo grado ó cuadrática ... 124
8.8.1 Método del diagrama de signos o puntos referenciales ... 124
8.8.2 Método de los intervalos ... 125
8.8.3 Principio de absorción ... 126
Ejercicios para resolver en el aula ... 127
8.9. Inecuaciones polinómicas ... 127
8.9.1. Raíces de multiplicidad par o impar ... 128
Ejercicios para resolver en el aula ... 129
Ejercicios de refuerzo ... 129
8.10. Inecuaciones racionales ... 130
8.10.1. Restricción del denominador ... 131
Ejercicios para resolver en el aula ... 132
Ejercicios de refuerzo ... 132
8.11. Valor absoluto ... 133
8.11.1. Propiedades ... 133
Ejercicios resueltos ... 134
8.11.2. Método de las regiones ... 138
Ejercicios rara resolver en el aula ... 140
Ejercicios de refuerzo ... 141
8.12. Inecuaciones irracionales ... 142
Ejercicios resueltos ... 143
Ejercicios para resolver en el aula ... 145
Ejercicios de refuerzo ... 145
8.13. Sistema de inecuaciones con dos variables ... 147
8.13.1. Procedimiento para trazar una gráfica de una desigualdad en x e y ... 147
Ejercicios resueltos ... 148
Ejercicios para resolver en el aula ... 149
Ejercicios de refuerzo ... 150

CAPÍTULO IX. RELACIONES Y FUNCIONES

9.1. Par ordenado (a,b) ... 153

9.1.1. Producto cartesiano ... 153
9.2. Relación binaria ... 154
9.2.1. Dominio y rango de una relación ... 155
9.2.2. Gráfica de una relación ... 155
9.2.2.1. Técnicas para hallar el dominio ... 157
9.2.2.2. Técnicas para hallar el rango ... 158
Ejercicios resueltos ... 159
Ejercicios para resolver en el aula ... 162
Ejercicios de refuerzo ... 164
9.3. Función o aplicación ... 165
9.3.1. Evaluación de una función ... 166
9.3.2. Dominio y rango de una función ... 166
9.3.3. Determinación del dominio de una función ... 166
Ejercicios resueltos ... 167
Ejercicios para resolver en el aula ... 168
Ejercicios de refuerzo ... 169
9.3.4. Determinación del rango de una función ... 170
Ejercicios para resolver en el aula ... 172
Ejercicios de refuerzo ... 172
9.3.5. Prueba de la recta vertical ... 172
9.3.6. Gráficas de funciones especiales ... 173
9.3.7. Cambios estructurales en una función ... 176
9.4. Puntos de retorno en una función ... 179
9.5. Tipos de funciones ... 180
9.5.1. Funciones monótonas ... 180
Ejercicios resueltos ... 181
Ejercicios para resolver en el aula ... 185
Ejercicios de refuerzo ... 186
9.5.2. Paridad de una función ... 186
Ejercicios para resolver en el aula ... 187
Ejercicios de refuerzo ... 187
9.6. Función lineal ... 188
Ejercicios de refuerzo ... 189
9.7. Función cuadrática ... 189
9.7.1. Forma canónica de la función cuadrática ... 190
9.7.2. Rango de la función cuadrática ... 190
9.7.3. Eje de simetría ... 191
9.7.4. Raíces de la función cuadrática ... 191
Ejercicios para resolver en el aula ... 191
Ejercicios de refuerzo ... 191
9.8. Función polinomial ... 192
9.8.1. Gráfica de funciones polinomiales ... 192
Ejercicios resueltos ... 192
Ejercicios para resolver en el aula ... 194
Ejercicios de refuerzo ... 194
9.9. Funciones racionales ... 195
Ejercicios resueltos ... 195
9.10. Función irracional ... 199
Ejercicios resueltos ... 199
9.11. Funciones con valor absoluto ... 200
Ejercicios para resolver en el aula ... 201
Ejercicios de refuerzo ... 202
9.12. Función seccionada ... 207
9.13. Función máximo entero o entero mayor ... 208
9.14. Función signo ... 209
Ejercicios para resolver en el aula ... 209
Ejercicios de refuerzo ... 210
9.15. Operaciones con funciones ... 212
Ejercicios resueltos ... 212

Ejercicios para resolver en el aula ... 217
Ejercicios de refuerzo ... 217
9.16. Composición de funciones ... 218
9.16.1. Propiedades de la función compuesta ... 219
Ejercicios resueltos ... 219
9.17. Descomponer en las dos funciones simples ... 223
9.17.1. Monotonía de funciones compuestas ... 223
Ejercicios para resolver en el aula ... 227
Ejercicios de refuerzo ... 227
9.18. Función inyectiva ... 229
9.19. Función sobreyectiva ... 230
9.20. Función biyectiva ... 231
9.21. Función inversa ... 232
9.21.1. Determinación de la función inversa ... 233
Ejercicio resuelto ... 235
9.21.2. Función inversa de una función seccionada ... 237
Ejercicios para resolver en el aula ... 242
Ejercicios de refuerzo ... 242

CAPÍTULO X. FUNCIONES TRASCENDENTES

10.1. Función exponencial ... 247
10.1.1. Análisis de la base a ... 247
10.2. Gráficas de funciones exponenciales ... 247
10.2.1. La base e ... 248
Ejercicios resueltos ... 248
Ejercicios para resolver en el aula ... 249
Ejercicios de refuerzo ... 250
10.3. Función logarítmica ... 251
10.3.1. Gráfica de funciones logarítmicas ... 251
10.4. Sistemas de logaritmos ... 252
10.4.1. Propiedades operativas ... 253
Ejercicios resueltos ... 254
Ejercicios para resolver en el aula ... 256
Ejercicios de refuerzo ... 257
10.5. Sistema de ecuaciones exponenciales y logarítmicas ... 259
Ejercicios resueltos ... 259
Ejercicios para resolver en el aula ... 261
Ejercicios de refuerzo ... 261
10.6. Análisis de funciones exponenciales y logarítmicas ... 263
Ejercicios para resolver en el aula ... 267
Ejercicios de refuerzo ... 268
10.7. Inecuaciones exponenciales ... 271
10.8. Inecuaciones logarítmicas ... 272
Ejercicios para resolver en el aula ... 274
Ejercicios de refuerzo ... 275
10.9. Funciones periódica ... 276
10.9.1. Funciones trigonométricas ... 276
10.9.2. Características de las funciones trigonométricas directas ... 277
10.9.3. Funciones trigonométricas generalizadas ... 278
Ejercicios resueltos ... 278
Ejercicios para resolver en el aula ... 282
Ejercicios de refuerzo ... 282
10.10. Funciones trigonométricas inversas ... 284
10.10.1. Características de las funciones trigonométricas inversas ... 285
10.10.2. Propiedades fundamentales de las funciones inversas ... 286
Ejercicios resueltos ... 287
Ejercicios para resolver en el aula ... 296
Ejercicios de refuerzo ... 296

10.11. Funciones hiperbólicas ... 298
10.11.1. Características de las funciones hiperbólicas ... 300
10.12. Funciones hiperbólicas inversas ... 301
Ejercicios resueltos ... 302
10.13. Identidades hiperbólicas ... 302
Ejercicios resueltos ... 303
Ejercicios para resolver en el aula ... 304
Ejercicios de refuerzo ... 304

CAPÍTULO XI. ECUACIONES PARAMÉTRICAS Y COORDENADAS POLARES

11.1. Ecuaciones dadas en forma paramétrica ... 305
11.1.1. Eliminación del parámetro ... 305
Ejercicios resueltos ... 305
Ejercicios de refuerzo ... 308
11.2. Estudio y gráfico de ecuaciones paramétricas ... 308
Ejercicios resueltos ... 309
Ejercicios de refuerzo ... 312
11.3. Coordenadas polares ... 313
11.3.1. Relación entre coordenadas polares y rectangulares ... 315
11.4. Curvas polares ... 317
11.5. Ecuaciones polares ... 319
11.6. Tangentes en el origen ... 320
11.7. Gráficas en coordenadas polares ... 320
Ejercicios para resolver en el aula ... 323
Ejercicios de refuerzo ... 324

CAPÍTULO XII. NÚMEROS COMPLEJOS

12.1. Cantidades imaginarias ... 329
12.1.1. Potencias de la unidad imaginaria ... 329
Ejercicios resueltos ... 329
12.2. Números complejos ... 330
12.2.1. Expresiones binomial y cartesiana de un número complejo ... 330
12.2.2. Clases de números complejos ... 330
12.2.3. Representación gráfica de un número complejo ... 331
12.2.4. Módulo o valor absoluto de un número complejo ... 331
12.2.5. Argumento o amplitud de un número complejo ... 332
12.2.6. Representación en forma polar o trigonométrica ... 333
12.3. Adición de números complejos ... 334
12.4. Multiplicación de números complejos ... 334
12.5. Operaciones con números complejos en forma polar trigonométrica ... 335
12.6. Raíz cuadrada de un número complejo ... 337
Ejercicios resueltos ... 337
12.7. Forma exponencial de un número complejo ... 342
12.7.1 Operaciones en forma exponencial ... 343
Ejercicios resueltos ... 344
Ejercicios para resolver en el aula ... 345
Ejercicios de refuerzo ... 347

CAPÍTULO I
CONJUNTOS NUMÉRICOS

1.1. CONCEPTOS BÁSICOS

1.1.1. MATEMÁTICA.- Ciencia que se ocupa del estudio de los números y de las figuras.

1.1.2. ÁLGEBRA.- Rama de las matemáticas que estudia la cantidad del modo más general posible.

Para lograr la generalización, las cantidades se representan por medio de letras las cuales pueden representar todos los valores.

Ejemplo:

"a" representa el valor que nosotros le asignemos.
$a, b, c, \ldots\ldots$ = Cantidades conocidas , $x, y, z, \ldots\ldots$ = Cantidades desconocidas

1.1.3. ARITMÉTICA.- Rama de las matemáticas en la que las cantidades se representan por números y estos expresan valores determinados. Por ejemplo para expresar un número mayor o menor que 5, habrá que escribir un número distinto de 5.

1.1.4. SIGNOS DEL ÁLGEBRA

1.1.4.1. SIGNOS DE OPERACIÓN

+	: Suma o adición	$\div$, : , /	: División o cociente
-	: Resta o sustracción	a^n	: Potencia
$\times$, .	: Multiplicación o producto	$\sqrt{\ }$	: Radicación

1.1.4.2. SIGNOS DE RELACIÓN

=	:	"Igual"	>	:	" Mayor que"	$\geq$	:	" Mayor o igual que"
<	:	"Menor que"	$\leq$	:	"Menor o igual que"	$\equiv$	:	"Idénticamente igual a"
$\neq$	:	"Diferente"						

1.1.4.3. SIGNOS DE AGRUPACIÓN

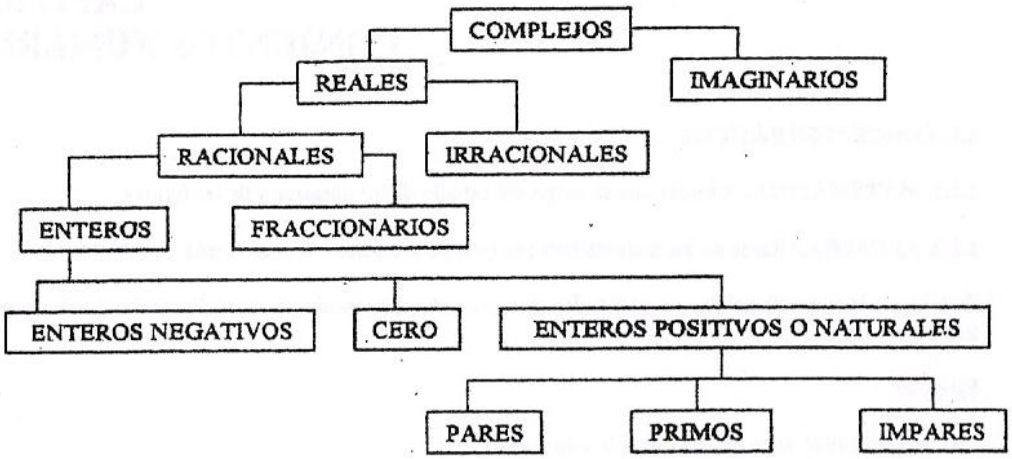
( ) : Paréntesis , [ ] : Corchetes , { } : Llaves

1.1.4.4. LEY DE LOS SIGNOS

MULTIPLICACIÓN	DIVISIÓN
+ . + = +	+ ÷ + = +
+ . − = −	+ ÷ − = −
− . + = −	− ÷ + = −
− . − = +	− ÷ − = +

Conjuntos Numéricos

1.2. CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS



1.2.1. NÚMEROS NATURALES N (Surgen del proceso de contar.)

$N = \{1,2,3,4,5,6,7,.....\}$

En el conjunto de números naturales existen dos operaciones: suma y multiplicación.

$\forall a,b \in N \Rightarrow a+b \wedge a.b \in N$

Números Cabales : $\{0,1,2,3,4,5,6,7,.....\}$

Números Dígitos: $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

A los números naturales N, se les conoce también como los enteros positivos Z^+.

Números primos: Un entero positivo $p > 1$ es primo si y sólo si sus únicos factores son exactamente 1 y p

Los primeros números primos son: $2,3,5,7,11,13,17,19,.....$

1.2.2. NÚMEROS ENTEROS Z

$Z = \{.....,-4,-3,-2,-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,.....\}$

Los números enteros son cerrados respecto a la suma, multiplicación y sustracción; es decir el resultado de estas operaciones es siempre otro entero.

El cociente de dos enteros no necesariamente es otro entero. Ejemplo: $\frac{3}{2}$

Número par: $2n$; **Número impar:** $2n+1$, $n \in Z$

1.2.3. NÚMEROS RACIONALES Q

Son de la forma: $\frac{p}{q}$, donde $q \neq 0$ y $p \wedge q \in Z$

Son cerrados respecto a la suma, resta, multiplicación y división, es decir el resultado es siempre un número racional, la única operación no permitida es la división entre cero.

$$-\frac{7}{5} \ ; \quad 4 = \frac{4}{1} \ ; \quad \frac{0}{1} = 0 \ ; \quad 0.5 = \frac{1}{2} \ ; \quad 0.33333..... = \frac{1}{3} \ ; \quad \frac{3}{0} = no\ existe$$

De aquí se deduce:

Conjuntos Numéricos

Todo entero es racional: $2 = \frac{2}{1}$

Los números decimales exactos o finitos son racionales: $0.4 = \frac{2}{5}$, $0.25 = \frac{1}{4}$, $-0.08 = -\frac{2}{25}$

Los números decimales periódicos son racionales: $2.55.....= 2.\overline{5} = \frac{23}{9}$, $3.1444.....= 3.1\overline{4} = \frac{283}{90}$

Observación: La barra sobre el número, indica la cifra o cifras que se repiten indefinidamente (**período**).

CONVERSIÓN DE DECIMAL PERÍODICO A FRACCIÓN

Para transformar un decimal periódico en fracción utilizaremos el siguiente procedimiento:

1) Denominar como x al número decimal periódico.
2) Localizar el período del número.
3) Llevar el punto decimal después del primer período, multiplicando al número x por la potencia de base 10, correspondiente a la cantidad de decimales recorridos.
4) Llevar el punto decimal antes del primer período, multiplicando al número x por la potencia de base 10, correspondiente a la cantidad de decimales recorridos.
5) Restar las expresiones obtenidas en los numerales 3) y 4)
6) Despejar x.
7) Simplificar en caso de ser posible.

Ejemplos:

Encontrar la fracción de los siguientes decimales periódicos: $0.\overline{5}$, $0.\overline{26}$ y $4.3\overline{1}$

1)	$x = 0.555.....$	$x = 0.2626.....$	$x = 4.31111.....$
2)	Período : 5	Período : 26	Período : $\overline{1}$
3)	$10x = 5.555.....$	$100x = 26.2626.....$	$100x = 431.111.....$
4)	$x = 0.555.....$	$x = 0.26.....$	$10x = 43.1111.....$
5)	$9x = 5$	$99x = 26$	$90x = 388$
6)	$x = \frac{5}{9}$	$x = \frac{26}{99}$	$x = \frac{388}{90} = \frac{194}{45}$

PORCENTAJE

Los números fraccionarios o decimales algunas veces se expresan como porcentaje; por ejemplo 5% quiere decir $\frac{5}{100}$ ó 0.05. En general $b\,\%$ significa "b partes de 100", y es, simplemente otra manera de escribir $\frac{b}{100}$.

Por ejemplo $42\,\%$ significa $\frac{42}{100}$, entonces $42\,\% = 0.42$

Una forma simple de convertir un decimal a porcentaje es multiplicar el decimal por 1 escrito en forma de $100\,\%$, por ejemplo $0.35 = 0.35 \times 1 = 0.35 \times 100\,\% = 35\%$.

1.2.4. NÚMEROS IRRACIONALES Q' o I

Se llaman también cantidades inconmensurables, son decimales no periódicos con un número infinito de dígitos que no se pueden expresar en forma de fracción.

Ejemplos:

$\pi = 3.141592654.....$, $\sqrt{2} = 1.414213562.....$, $e = 2.718281828.....$

1.2.5. NÚMEROS REALES $\Re$, $\Re = Q \cup I$

Es un sistema con dos operaciones, la adición y la multiplicación; y una relación de igualdad y una relación de orden donde se cumplen los siguientes axiomas:

Axiomas de Igualdad

$\forall\, a, b\ y\ c \in \Re$

- ✓ Simétrico: $Si\ \ a = b \Rightarrow b = a$
- ✓ Transitivo: $Si\ \ a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$
- ✓ Reflexivo: $Si\ \ a = a$

Axiomas de Campo

Axiomas de la Adición	Axiomas de la Multiplicación
1) Clausura: $\forall a, b \in \Re \Rightarrow a + b \in \Re$	1) Clausura: $\forall a, b \in \Re \Rightarrow a \times b \in \Re$
2) Conmutativa: $\forall a, b \in \Re \Rightarrow a + b = b + a$	2) Conmutativa: $\forall a, b \in \Re \Rightarrow a \times b = b \times a$
3) Asociativa: $\forall a, b, c \in \Re \Rightarrow a + (b + c) = (a + b) + c$	3) Asociativa: $\forall a, b, c \in \Re \Rightarrow a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
4) Existencia del elemento neutro aditivo: $\exists!\,(0) \in \Re\ ;\ \forall a \in \Re /\ a + 0 = a$	4) Existencia del elemento neutro multiplicativo: $\exists!\,(1) \in \Re; \forall a \in \Re /\ a \times 1 = a$
5) Existencia del inverso aditivo u opuesto $\forall a \in \Re\ ;\ \exists!\,(-a) \in \Re /\ a + (-a) = 0$	5) Existencia del inverso multiplicativo o recíproco $\forall a \in \Re - \{0\}\ ;\ \exists!\left(\frac{1}{a}\right) \in \Re / a \times \left(\frac{1}{a}\right) = 1$
6) Definición de la sustracción: $\forall a, b \in \Re \Rightarrow a - b = a + (-b)$	6) Definición de la división: $\forall a, b \in \Re \wedge b \neq 0 \Rightarrow a \div b = a \times \left(\frac{1}{b}\right)$
	7) Existencia del elemento absorbente de la multiplicación $\forall a \in \Re\ ;\ \exists!\,(0) \in \Re /\ a \times 0 = 0$

Distributiva de la multiplicación respecto a la adición: $\forall\, a, b, c \in \Re \Rightarrow a \times (b + c) = ab + ac$

1.3. OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

Cuando no existen signos de agrupación se opera siguiendo el siguiente orden de prioridad de las operaciones:

En primer lugar efectuamos la multiplicación
En segundo lugar efectuamos la división
En tercer lugar efectuamos la suma
En cuarto lugar efectuamos la resta

Ejemplos:

Calcular el valor de las siguientes expresiones:

a) $20 - 5 \times 3 + 2 = 20 - 15 + 2 = 7$; b) $16 + 40 \div 8 - 4 \times 2 = 16 + 5 - 8 = 13$

Conjuntos Numéricos

EJERCICIOS RESUELTOS

Simplificar las siguientes expresiones:

1) $\frac{4}{9}\times(-2)-1\div\frac{3}{2}-\left(\frac{5}{18}-\frac{2}{3}\right)\times\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\div-1$

$$=-\frac{8}{9}-\frac{2}{3}-\left(\frac{5}{18}-\frac{12}{18}\right)\times\frac{3}{2}-\frac{4}{3}=-\frac{8}{9}-\frac{2}{3}-\left(-\frac{7}{18}\right)\times\frac{3}{2}-\frac{4}{3}$$

$$=-\frac{8}{9}-\frac{2}{3}+\frac{7}{18}\times\frac{3}{2}-\frac{4}{3}=-\frac{8}{9}-\frac{2}{3}+\frac{21}{36}-\frac{4}{3}=\frac{-32-24+21-48}{36}=-\frac{83}{36}$$

2) $$\frac{1.222.....\div\left(4-\frac{1}{3}\right)+0.55....\times5\div\frac{5}{3}}{(2.66.....-1.6)\left(0.8080.....-0.44.....+\frac{1}{11}\right)\times\frac{11}{3}}$$

$$\frac{1.\bar{2}\div\frac{11}{3}+0.\bar{5}\times5\times\frac{3}{5}}{\left(2.\bar{6}-\frac{8}{5}\right)\left(0.\overline{80}-0.\bar{4}+\frac{1}{11}\right)\times\frac{11}{3}}=\frac{\frac{11}{9}\times\frac{3}{11}+\frac{5}{9}\times5\times\frac{3}{5}}{\left(\frac{24}{9}-\frac{8}{5}\right)\left(\frac{80}{99}-\frac{4}{9}+\frac{1}{11}\right)\times\frac{11}{3}}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{5}{3}}{\left(\frac{48}{45}\right)\left(\frac{45}{99}\right)\times\frac{11}{3}}=\frac{2}{\frac{16}{9}}=\frac{9}{8}$$

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

Simplificar las siguientes expresiones:

1) $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\div2+\frac{15}{8}\left(-\frac{4}{5}\right)-1\div\left(-\frac{2}{3}\right)$

2) $$\frac{-3+\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\div\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\div\frac{1}{4}}\times\frac{-\frac{1}{2}}{2-\frac{5}{3}\times\frac{5}{4}}$$

3) $$\frac{2}{3}-\left[-\frac{1}{2}+1-\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{12}-\frac{1}{2}\right)-2\right]-\frac{1}{4}-\left\{-1+\left[\frac{2}{3}-\left(\frac{13}{4}-\frac{7}{3}\right)\right]\right\}$$

4) $$\frac{\left(9-\frac{43}{8}\right)\left[4\frac{5}{12}-4\div2\frac{2}{3}+(0.3-0.5\div4)\frac{4}{7}\right]}{\frac{1}{24}+0.25\div13\frac{1}{3}}$$

5) $1{,}33.....-0{,}066.....-0{,}3030.....+\frac{2}{5}-\frac{4}{11}$

Respuestas:

1) $\frac{1}{2}$ 2) -17 3) 3 4) 181 5) 1

EJERCICIOS DE REFUERZO

1) $$\frac{4.5\div\left[47.375-\left(\frac{79}{3}-18\times0.75\right)\times2.4\div0.88\right]}{17.81\div1.37-\frac{71}{3}\div\frac{11}{6}}$$

2) $\frac{12}{5}\div\frac{3}{5}-\frac{3}{7}\times\frac{1}{6}-\frac{50}{7}+\frac{3}{14}$

3) $1.05-1.0555.....+\frac{0.21010.....}{0.9090.....\times0.2}-0.003333....\times10$

4) $\left[\dfrac{\left(2.4+\dfrac{12}{7}\right)\times 4.375}{0.66.....-0.166....}-\dfrac{\left(2.75-\dfrac{11}{6}\right)\times 21}{8\dfrac{3}{20}-0.45}\right]\div\dfrac{67}{200}$

5) $1-\dfrac{8}{3}\left(-\dfrac{3}{4}\right)-\left\{2-\left[\dfrac{3}{4}-1+\dfrac{2}{5}\left(-10+\dfrac{15}{4}\right)-1\right]\right\}$

6) $\left[\dfrac{(3.2-1.7)\div 0.003}{\left(\dfrac{29}{35}-\dfrac{3}{7}\right)\times 4\div 0.2}-\dfrac{\left(\dfrac{33}{20}-1.5\right)\times 1.5}{\left(2.44+\dfrac{39}{25}\right)\times\dfrac{1}{8}}\right]\div 62\dfrac{1}{20}+1.364\div 0.124$

Respuestas:

1) 4 2) -3 3) $\dfrac{67}{60}$ 4) 100 5) $-\dfrac{11}{4}$ 6) 12

1.4. POTENCIACIÓN

Es la operación que consiste en repetir un número llamado base tantas veces como factor como lo indica otro llamado exponente; al resultado de esta operación se le denomina potencia.

Potencia: a^n , $a=$ base , $n=$ exponente

1.4.1. NOTACIÓN EXPONENCIAL

$\underbrace{a\times a\times a\times a\times.....\times a}_{n\ veces\ como\ factor}=a^n$, $2\times 2\times 2\times 2\times 2=2^5$

1.4.2. PROPIEDADES DE LOS EXPONENTES

1) $a^0=1$; $a\neq 0$	2) $a^1=a$
3) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$	4) $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$; $a\neq 0$
5) $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$	6) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$; $b\neq 0$
7) $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$; $a\neq 0$	8) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\dfrac{b}{a}\right)^n=\dfrac{b^n}{a^n}$
9) $\left(a^m\right)^n=a^{mn}$	10) $\left\{\left[\left(a^m\right)^n\right]^r\right\}^s=a^{mnrs}$
11) Exponente fraccionario: $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$	12) Escalera de exponentes $a^{m^{n^{r^{t^{s}}}}}$ Para efectuar esta operación se toman los exponentes de dos en dos desde la parte superior hacia abajo, sin considerar el signo de la base de estos exponentes.
13) $a^x=a^n\Rightarrow x=n$ Ley de bases iguales	14) $x^x=a^a\Rightarrow x=a$ Ley de semejanza

1.4.3. SIGNOS DE LA POTENCIA

$[(+)]^{PAR} = (+)$; $3^2 = 9$ $\qquad$ $[(-)]^{PAR} = (+)$; $(-3)^2 = 9$

$[(+)]^{IMPAR} = (+)$; $3^3 = 27$ $\qquad$ $[(-)]^{IMPAR} = (-)$; $(-3)^3 = -27$

OBSERVACIÓN:

INCORRECTO	CORRECTO
$2^3 + 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32$	$2^3 + 2^2 = 8 + 4 = 12$
$3 \cdot 2^{x+5} = 6^{x+5}$	$3^{x+5} . 2^{x+5} = 6^{x+5}$
$(-2)^4 = -2^4 = -16$	$(-2)^4 = 16$
$-2^4 = 16$	$-2^4 = -16$

EJERCICIOS RESUELTOS

Aplicando las propiedades de los exponentes simplificar las siguientes expresiones:

1) $$\frac{8^{\frac{-2}{3}} . 16^{\frac{-1}{4}}}{32^{\frac{-3}{5}}} = \frac{\left(2^3\right)^{\frac{-2}{3}} \cdot \left(2^4\right)^{\frac{-1}{4}}}{\left(2^5\right)^{\frac{-3}{5}}} = \frac{2^{-2} \cdot 2^{-1}}{2^{-3}} = \frac{\frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2^3}} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{8}} = 1$$

2) $$16^{-16^{-2^{-1}}} = 16^{-16^{-\frac{1}{2}}} = 16^{-\left[(2)^4\right]^{-\frac{1}{2}}} = 16^{-(2)^{-2}} = 16^{-\frac{1}{4}} = \left(2^4\right)^{-\frac{1}{4}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

3) $$\left[\frac{x^{\frac{-1}{2}} y^{\frac{-2}{3}}}{x^{\frac{-1}{6}} y^{-1}} \div \frac{x^{-2} y^2}{(xy)^{-3}}\right]^{-3} = \left[x^{\frac{-1}{2}-\left(\frac{-1}{6}\right)} y^{\frac{-2}{3}-(-1)} \div x^{-2-(-3)} y^{2-(-3)}\right]^{-3}$$

$$= \left(x^{\frac{-1}{3}} y^{\frac{1}{3}} \div xy^5\right)^{-3} = \left(x^{\frac{-1}{3}-1} y^{\frac{1}{3}-5}\right)^{-3} = \left(x^{\frac{-4}{3}} y^{\frac{-14}{3}}\right)^{-3} = x^4 y^{14}$$

4) $$\frac{9^{n+1}}{27^n} \div \frac{243}{3^{n+2}} = \frac{3^{2n+2}}{3^{3n}} \div \frac{3^5}{3^{n+2}} = 3^{2n+2-3n} \div 3^{5-(n+2)} = 3^{-n+2} \div 3^{3-n}$$

$$= 3^{-n+2-(3-n)} = 3^{-n+2-3+n} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

5) $$\frac{21^6 \cdot 35^3 \cdot 80^3}{15^4 \cdot 14^9 \cdot 30^2} = \frac{7^6 \cdot 3^6 \cdot 7^3 \cdot 5^3 \cdot (2^4 \cdot 5)^3}{3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^9 \cdot 2^9 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5)^2} = \frac{7^6 \cdot 3^6 \cdot 7^3 \cdot 5^3 \cdot 2^{12} \cdot 5^3}{3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^9 \cdot 2^9 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}$$

$$= \frac{7^9 \cdot 5^6 \cdot 3^6 \cdot 2^{12}}{7^9 \cdot 5^6 \cdot 3^6 \cdot 2^{11}} = 2$$

6) $$\frac{2^{n+1}.4^{-2n+1}+8^{-n+2}}{4^2\left(2^n\right)^{-3}}=\frac{2^n.2.2^{-4n+2}+2^{-3n+6}}{2^4.2^{-3n}}=\frac{2^{-3n+3}+2^{-3n+6}}{2^4.2^{-3n}}$$

$$=\frac{2^{-3n}.2^3+2^{-3n}.2^6}{2^4.2^{-3n}}=\frac{2^{-3n}\left(2^3+2^6\right)}{2^4.2^{-3n}}=\frac{8+64}{16}=\frac{72}{16}=\frac{9}{2}$$

1.5. RADICACIÓN

Es una operación inversa a la potenciación que consiste en que dados dos números radicando (a) e índice (n), se halla otro, llamado raíz (k), que elevado a un exponente igual al índice (n), reproduzca el radicando.

$\sqrt[n]{a}=k \quad \Rightarrow \quad a=k^n$

$a=$ Radicando o cantidad subradical

$n=$ Índice

$\sqrt{\ }=$ Signo del radical

1.5.1. PROPIEDADES DE LOS RADICALES

1) $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$	2) $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$
3) $\sqrt[n]{a^n}=\lvert a\rvert$; *Si n es par* ; $\sqrt[n]{a^n}=a$; *Si n es impar*	4) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$
5) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$	6) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$
7) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}};b\neq 0$	8) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[r]{\sqrt[s]{a}}}}=\sqrt[mnrs]{a}$
9) $a^k\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^{kn}b}$; (Introducir un factor en un radical)	10) $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[kn]{a^{km}}=\sqrt[\frac{n}{k}]{a^{\frac{m}{k}}}$,$k\neq 0$
11) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[nm]{a^m b^n}$	12) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[mn]{\frac{a^m}{b^n}}$; $b\neq 0$

1.5.2. SIGNOS DE LAS RAÍCES

$\sqrt{(+)}=\pm$; $\sqrt{16}=\pm 4$

$\sqrt{(-)}=\pm i$; $\sqrt{-4}=\pm 2i$

$\sqrt[IMPAR]{(+)}=+$; $\sqrt[3]{8}=2$

$\sqrt[IMPAR]{(-)}=-$; $\sqrt[3]{-27}=-3$

OBSERVACIÓN:

INCORRECTO	CORRECTO
$\sqrt[n]{a+b}=\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$, $(a+b)^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}$	$\sqrt[n]{a+b}=(a+b)^{\frac{1}{n}}$, $(a+b)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a+b}$
$\sqrt{4+a^2}=2+a$,	$\sqrt{4a^2}=2a$
$2\sqrt{a+1}=\sqrt{2a+2}$	$2\sqrt{a+1}=\sqrt{4a+4}$
$a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{a+b}}$	$a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$
$\sqrt{(x-1)^2}=x-1$	$\sqrt{(x-1)^2}=\lvert x-1\rvert$
$\sqrt{x^9}=x^3$	$\sqrt{x^9}=\sqrt{x^8x}=x^4\sqrt{x}$

EJERCICIOS RESUELTOS

Aplicando las propiedades de los radicales simplificar las siguientes expresiones:

1) $$\sqrt[3]{\frac{\frac{1}{2}\sqrt{a}}{a^{\frac{1}{2}}}}=\sqrt[3]{\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}}=\sqrt[3]{\frac{a^2}{a^{\frac{1}{2}}}}=\sqrt[3]{a^{2-\frac{1}{2}}}=\sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}}}=\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{2}}$$

2) $$\left[\sqrt[\frac{1}{5}]{\left(a^2\right)^{-\frac{1}{10}}}\right]^{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}=\left[\sqrt[\frac{1}{5}]{a^{-\frac{1}{5}}}\right]^{3^{\frac{1}{\frac{1}{3}}}}=\left(a^{-1}\right)^{3^3}=\left(a^{-1}\right)^{27}=a^{-27}=\frac{1}{a^{27}}$$

3) $$\sqrt[3]{a\sqrt[3]{2a\sqrt[3]{2a}}}=\sqrt[3]{a\sqrt[3]{2a\,(2a)^{\frac{1}{3}}}}=\sqrt[3]{a\sqrt[3]{(2a)^{\frac{4}{3}}}}=\sqrt[3]{a\,(2a)^{\frac{4}{9}}}=a^{\frac{1}{3}}2^{\frac{4}{27}}a^{\frac{4}{27}}=2^{\frac{4}{27}}a^{\frac{13}{27}}=\sqrt[27]{16\,a^{13}}$$

4) $$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^{2m}\,c^m}}\right)^n=\left(\sqrt[mn]{a^{2m}\,c^m}\right)^n=\sqrt[mn]{\left(a^{2m}\,c^m\right)^n}=\sqrt[mn]{a^{2mn}\,c^{mn}}=a^2c$$

5) $$\sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{\sqrt[n+2]{4\sqrt{4^n}}}}=\sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{\sqrt[n+2]{4\cdot 4^{\frac{n}{2}}}}}=\sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{\sqrt[n+2]{4^{\frac{2+n}{2}}}}}=\sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{4^{\frac{1}{2}}}}=\sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{2}}=\sqrt[n]{\frac{2^n\cdot 2}{2}}=\sqrt[n]{2^n}=2$$

Conjuntos Numéricos

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

Simplificar las siguientes expresiones, aplicando las propiedades de los exponentes y radicales.

1) $(-32)^{\frac{1}{5}}$ 2) $(-27)^{\frac{2}{3}}$ 3) $\dfrac{(0.008)^{\frac{1}{3}}}{5^{-1}}$ 4) $\dfrac{8^{-\frac{2}{3}}.16^{-\frac{1}{4}}}{32^{-\frac{3}{5}}}$

5) $\dfrac{81^{0.25}+9^{-0.5}}{(-27)^{\frac{1}{3}}+(-8)^{\frac{2}{3}}}$ 6) $4^{\frac{5}{2}}\cdot 2^{-3}$ 7) $(-2)^{100}+(-16)^{25}$

8) $\left\{m^{-1}\left[m\left(m^{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{5}}\right\}^{-4}$ 9) $\left(\dfrac{4x^{-2}}{9y^{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\div\left(\dfrac{8x^{3}}{27y^{3}}\right)^{-\frac{1}{3}}$ 10) $\left[\left(8a^{6}\right)^{-\frac{1}{3}}\times\dfrac{1}{\left(a^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]^{-1}$

11) $E=\dfrac{7^{x+3}-7^{x+1}}{3\left(7^{x+1}\right)2^{4}}$ 12) $E=\dfrac{2^{3n}-8^{n}+4}{2^{2-n}}$ 13) $E=\dfrac{15^{6}\cdot 12^{4}\cdot 5^{9}\cdot 6^{3}}{10^{11}\cdot 3^{13}\cdot 5^{4}}$

14) $\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2}+\left(\dfrac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}+\left(\dfrac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}\right]^{-\frac{1}{2}}$ 15) $\sqrt{\dfrac{2^{n+4}-2^{n+3}}{2^{n}}}$ 16) $\dfrac{\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}}}{\sqrt{\sqrt{27}}\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}$

17) $\sqrt[x-1]{\dfrac{3^{x-1}+4^{x-1}+6^{x-1}}{4^{1-x}+6^{1-x}+8^{1-x}}}$ 18) $\left[\sqrt[4]{\left(\sqrt[3]{\left(\sqrt{ab}\right)^{5}}\right)^{6}}\right]^{2}$ 19) $\left[\left(-2^{3}\right)^{-2}\right]^{0.5}\left[(-0.5)^{0.75}\right]^{-4}$

20) $\dfrac{\sqrt[3]{-\dfrac{8}{9}}\,\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}+\dfrac{1}{46}\times 2.044.....-(0.8-1)\div 3}{0.55.....-\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^{-2}}\times 5^{-1}$

21) $\dfrac{\sqrt{\left(-\dfrac{5}{8}\right)\left(-\dfrac{1}{10}\right)}}{\sqrt[3]{10^{2}+\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2}}}\div\dfrac{\sqrt{-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}\div\dfrac{1}{11}}}{\sqrt{6.4\times 2\left(\dfrac{1}{10}\right)^{-1}-\left[(0.33.....)^{-2}-2\right]}}\left(\dfrac{5}{4}\right)^{-1}$

Respuestas:

1) -2 2) 9 3) 1 4) 1 5) $\dfrac{10}{3}$ 6) 4

7) 0 8) m^{2} 9) x^{2} 10) $2a$ 11) $E=1$

12) $E=2^{n}$ 13) $E=1$ 14) $\dfrac{1}{4}$ 15) $2\sqrt{2}$ 16) $\sqrt[16]{3}$

17) 24 18) $a^{2}b^{2}\sqrt{ab}$ 19) 1 20) -1 21) $\dfrac{1}{8}$

Conjuntos Numéricos

EJERCICIOS DE REFUERZO

Aplicando las propiedades de los exponentes y radicales simplificar las siguientes expresiones

1) $(-32)^{-0.6}$

2) $27^{-3^{-1}}$

3) $\dfrac{40\left(2^{x-3}\right)+3\left(2^{x+1}\right)+12\left(2^{x-2}\right)}{22\left(2^{x-1}\right)-2^{x+2}}\times 2^{-5}$

4) $\dfrac{21^6.35^3.80^3}{15^4.14^9.30^2}$

5) $\sqrt{a^4\sqrt[3]{a^5\sqrt{a^{14}}}}$

6) $5\sqrt{\dfrac{1}{5}\sqrt{\dfrac{1}{5}\sqrt{\dfrac{1}{5}\sqrt{\dfrac{1}{5}\sqrt{\dfrac{1}{5}}}}}}$

7) $\sqrt[n]{\dfrac{3^{n^2+4}+3\left(3^{n^2+1}\right)-12\left(3^{n^2-1}\right)}{3^{n^2+3}+2\left(3^{n^2+2}\right)-6\left(3^{n^2-1}\right)}}$

8) $\left(\sqrt[n]{\dfrac{\sqrt[4]{9^{n+1}}\,\sqrt{3^{1+n}}}{3\sqrt{3^{-n}}}}\right)^2$

9) $\left(x^{\frac{a+b}{c-a}}\right)^{\frac{1}{b-c}}\left(x^{\frac{c+a}{b-c}}\right)^{\frac{1}{a-b}}\left(x^{\frac{b+c}{a-b}}\right)^{\frac{1}{c-a}}$

10) $\dfrac{\left[\left(a^m\right)^{\frac{1}{r}}\left(a^q\right)^{\frac{1}{n}}\right]^{nr}}{\left[b^{\frac{n}{q}}\left(b^{\frac{r}{m}}\right)\right]^{mq}}\div\left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^q\right]^r$

11) $\left(\dfrac{64a^{-6}b^{\frac{2}{3}}}{125a^{-9}b^{-\frac{4}{3}}}\right)^{\frac{2}{3}}$

12) $\dfrac{ma^{\frac{1}{2}}}{9nb}\div\left(\dfrac{3n^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{3}}}{b^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-2}$

13) $\left[16^{-2^{-1}}+8^{-3^{-1}}+4^{-2^{-1}}\right]^{-1}$

14) $\left[\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}+\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}\right]^{15^0}$

15) $\dfrac{\left(16x^2y^{-3}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(3x^{-4}y\right)^{-\frac{1}{4}}}\times\dfrac{\left(3^{\frac{1}{2}}x^4y^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{4}}\right)^{-2}}$

16) $\dfrac{9^{2^{-1}}+36^{2^{-1}}+125^{3^{-1}}}{4^{2^{-1}}}$

17) $\dfrac{2^{x+3}+2^{x+1}-2^x}{2^{x+1}+2^x}$

18) $\dfrac{7\cdot 2^{n-3}+11\cdot 2^{n-1}-2^{n-3}}{6\cdot 2^{n-3}+2^{n-3}}\cdot\left(\dfrac{5^2}{14}\right)^{-1}$

19) $\dfrac{\left\{\left\{(ab)^{-1}\left[ab\left\{(ab)^3\right\}^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{5}}\right\}^{-2}\right\}^{m-n}}{\left\{\sqrt{ab}\,\sqrt{ab}\left(\sqrt{ab}\right)^{\frac{2n}{m}}\left[a^{\frac{1}{m}}b^{\frac{1}{m}}\right]^{-2n}\right\}^m}$

20) $\sqrt[\frac{m}{n}]{ab}\,\sqrt[m]{ab}\left(\sqrt{ab}\right)^{\frac{2n}{m}}\left(a^{\frac{1}{m}}b^{\frac{1}{m}}\right)^{-2n}$

Ing. José Silva C.

Conjuntos Numéricos

21) $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)^{2}-\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-1}\div 2-6\div\frac{8}{3}-(-1)^{-2}$

22) $\frac{4}{27}(-0.8)\frac{15}{2}-1\div\sqrt{2.4\left(\frac{3}{5}\right)}+\frac{1}{6}\div 0.01-\frac{1.99.....}{0.8}+\frac{5}{9}$

23) $1.2(-0.1)^{-2}+\left[(0.05-0.3(0.1))\sqrt[3]{0.03\sqrt{0.81}}\right](10^{3})$

24) $\frac{0.3\times 0.2\times(0.1)^{-1}\sqrt[3]{1-0.784}}{(0.3)^{-1}(0.2)^{2}\times 5}+\frac{0.2+\left(\frac{1.3-0.8}{0.25}\right)^{-1}}{(1.3-0.6)(0.1)^{-2}}$

25) $\frac{5}{6}(0.5-1)^{-2}-\frac{\frac{1}{100}}{(0.1)^{3}}+0.66.....-\sqrt[3]{-\frac{0.25}{2}}$

26) $\sqrt[3]{10^{2}(0.2)^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}}\times\left[\sqrt{0.55...\times\sqrt{(0.2)^{-2}}}\right]^{-1}$

27) $\left[\frac{1+0.2\div 0.01}{1-(0.5)^{2}}-1.6\div\sqrt{0.04}\right]^{2}\div\left[\frac{-0.2\div(-0.01)}{\left[-1-(-0.5)^{2}\right]^{-1}}\times 0.5^{-2}\right]$

28) $\sqrt[n]{\frac{20^{n+1}}{4^{n+2}+2^{2n+2}}}$

29) $\frac{\sqrt[3]{ab^{2}}\left(ab^{-1}\right)^{\frac{2}{3}}b}{\sqrt{a^{3}b^{-1}}\left(ab^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}}$

30) $\frac{\sqrt[3]{x^{2}y\sqrt{xz}}\ \sqrt[4]{y^{3}z^{2}\sqrt[3]{xy}}}{\sqrt[6]{x^{-1}y^{2}z^{4}}}$

31) $\sqrt[n]{\frac{a^{n}b^{n}+a^{n}c^{n}+b^{n}c^{n}}{a^{-n}+b^{-n}+c^{-n}}}$

32) $\left\{x^{\frac{2}{3}}\left[\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{4}}}\right)^{6}\right]^{\frac{1}{3}}\right\}^{2}$

33) $\sqrt[n]{\frac{9^{\frac{n+1}{4}}\cdot 3^{\frac{n-2}{2}}}{\sqrt{3^{-1}\cdot 3^{n}}}}$

34) $\frac{\sqrt[5]{3\sqrt[3]{8}}}{\sqrt[5]{3}\sqrt[5]{2}}+\frac{\sqrt[3]{2\sqrt[5]{3\sqrt{5}}}}{\sqrt[3]{2}\ \sqrt[15]{3}\ \sqrt[30]{5}}$

35) $\frac{\sqrt{\left(-\frac{5}{8}\right)\left(-\frac{1}{10}\right)}}{\sqrt[3]{10^{2}+\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}}}\div\frac{\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\div\frac{1}{11}}}{\sqrt{6.4\times 2\times\left(\frac{1}{10}\right)^{-1}-\left[(0.33...)^{-2}-2\right]}}$

36) $\frac{\sqrt[3]{\frac{8}{27}}\left(\frac{2}{3}\right)^{4}\left\{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right]^{2}\right\}^{2}}{\frac{8}{33}\times\frac{11}{2}-\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{8}}}\times\frac{\frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}-1}}{\frac{\sqrt[4]{8}\sqrt[4]{2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}}}$

37) $\sqrt[x]{\frac{10^{x}-6^{x}}{25^{x}-15^{x}}}$

38) $\sqrt[2x]{\frac{16^{x^{2}}-8^{x^{2}}}{4^{x^{2}}-2^{x^{2}}}}\cdot 2^{-x}$

39) $25^{16^{-1^{-1}}}$

40) $\frac{625^{x+1}\ \sqrt[x+1]{5^{x^{2}-1}}}{125^{x+1}\ \sqrt[\frac{1}{x}]{5^{-1}}}$

41) $\sqrt[2m]{3+\sqrt{8}}\ \sqrt[m]{\sqrt{2}-1}$

Conjuntos Numéricos

42) $$\sqrt[n]{\frac{x^{3n}+\sqrt[n]{\frac{x^{4n^2}+x^{3n^2}}{x^{2n^2}+x^{n^2}}}}{x^n+1}}$$

43) $$\left[\left(x^{n^2}\right)^{n^{-2}}\left(x^{2^n}\right)^{2^{-n}}\right]^{2n}\left(x^{-3^n}\right)^{3^{-n}}\left(x^{4n-1}\right)^{-1}$$

44) $$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}+\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}}$$

45) $$\frac{12^{x+2}\cdot 6^x}{18^{x+1}\cdot 4^x}$$

46) $$\frac{2\left(8^n\right)-(0.5)^{1-3n}}{(0.125)^{1-n}}$$

47) $$\sqrt{\frac{x^n y^n+y^{2n}}{x^{-n}y^n+1}}\cdot\sqrt{\frac{x^n y^{-n}+1}{x^n y^n+x^{2n}}}$$

48) $$\sqrt[2^n]{b^{2^n}+\sqrt{b^{2^{n+1}}-a^{2^n}}}\cdot\left[\sqrt[2^n]{b^{2^n}-\sqrt{b^{2^{n+1}}-a^{2^n}}}\right]$$

49) $$\sqrt[n]{\frac{\frac{5^{2n}2^{n+1}+50^n}{5^n\cdot 8-5^{n+1}}\cdot\sqrt[n+1]{5^{n^2-1}}}{5^{-1}\cdot\sqrt[n]{5^{-1}}}}\cdot\left[\sqrt[x^4]{\left[\sqrt[3]{25^{3x^3}}\right]^x}\right]^{-1}$$

50) $$\frac{4^{\frac{2a}{a-b}}+12\cdot 4^{\frac{2b}{a-b}}}{\sqrt[a-b]{4^{a+b}}}$$

51) $$\left[\frac{(ab)^n+(bc)^n+(ac)^n}{a^{-n}+b^{-n}+c^{-n}}\right]^{\frac{1}{n}}\left[c^2a^{n+1}a^{-2-n}b^{-1}c^{-3}\right]$$

52) $$\frac{\frac{0.25-2}{\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}\sqrt{\sqrt{25}+\sqrt{16}}}}\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}}{\frac{-2+\frac{2-\frac{1}{3}}{2}}{-0.75+(-1)^6}}.$$

53) $$6\div\frac{1}{3}-0.8\div\frac{1.5}{\frac{3}{2}\times 0.4\times\frac{50}{1\div\frac{1}{2}}}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{0.25}}{6-\frac{46}{1+2.2\times 10}}}$$

54) $$\frac{\left[\frac{\sqrt[3]{1-\frac{37}{64}}}{(0.5-1)^2\times\frac{25}{92}\times 1.022.....\times 2.5^{-2}}\right]\times\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\times\sqrt[3]{\frac{8}{25}+5}}{\frac{1}{5^{-3}}\times 9}$$

55) $$\frac{\left(1.33....+\frac{4}{5}-\frac{12}{15}\right)^2\left[\left(0.222....-\frac{2}{3}+\frac{3}{12}+0.055.....\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-2}}{\left[(2.666.....+0.25-2.5)\left(\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[3]{512}}}\right)^4\right]^{-1}}$$

Respuestas:

1) $-\frac{1}{8}$	2) $\frac{1}{3}$	3) $\frac{1}{16}$	4) $E=2$	5) a^4
6) $\sqrt[32]{5}$	7) $\sqrt[n]{2}$	8) 27	9) 1	10) $\left(\frac{a}{b}\right)^{mn}$
11) $\frac{16}{25}a^2b^{\frac{4}{3}}$	12) $a^{\frac{7}{6}}m$	13) $\frac{4}{5}$	14) 285	15) $\frac{y^3}{x^3}$
16) 7	17) 3	18) 4	19) 1	20) $\sqrt[m]{ab}$
21) $-\frac{13}{9}$	22) 13	23) 126	24) $\frac{11}{20}$	25) $-\frac{11}{2}$
26) 12	27) -4	28) 5	29) b	30) $x^{\frac{13}{12}}\ y^{\frac{5}{6}}$
31) abc	32) x^3	33) $\sqrt{3}$	34) 2	35) $\frac{1}{10}$
36) $\frac{9}{16}$	37) $\frac{2}{5}$	38) 1	39) 5	40) 5^{3x}
41) 1	42) x^2	43) 1	44) 3	45) 8
46) 12	47) 1	48) a	49) 10	50) 7
51) 1	52) $\frac{1}{2}$	53) 11	54) $\frac{3}{5}$	55) $-\frac{64}{3}$

1.6. RADICALES SEMEJANTES

Son los que tienen el mismo índice y la misma cantidad subradical.

Ejemplos:

a) $2\sqrt[5]{3}$; $-\frac{1}{3}\sqrt[5]{3}$; $8\sqrt[5]{3}$; Son semejantes

b) $\sqrt{32}$; $\sqrt{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{8}$; Simplificando tenemos:

$$\sqrt{32}=\sqrt{16\cdot 2}=4\sqrt{2}\ ;\qquad \sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}\ ;\qquad \sqrt{8}=\sqrt{4\cdot 2}=2\sqrt{2}$$

Por lo tanto: $4\sqrt{2}$; $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; Son semejantes

1.6.1 SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES SEMEJANTES

Ejemplos:

Simplificar:

1) $\sqrt{20}-\sqrt{45}+\sqrt[4]{25}+2\sqrt[6]{125}$

$$=2\sqrt{5}-\sqrt{9\times 5}+\sqrt[4]{5^2}+2\sqrt[6]{5^3}=2\sqrt{5}-3\sqrt{5}+\sqrt{5}+2\sqrt{5}=2\sqrt{5}$$

2) $\sqrt{28}+21\sqrt{\frac{1}{7}}-\frac{4\sqrt{14}}{\sqrt[4]{4}}+\sqrt[4]{49}$

$$=\sqrt{4\cdot 7}+21\sqrt{\frac{7}{49}}-\frac{4\sqrt{2\cdot 7}}{\sqrt[4]{2^2}}+\sqrt[4]{7^2}=2\sqrt{7}+3\sqrt{7}-\frac{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{2}}+\sqrt{7}=5\sqrt{7}-4\sqrt{7}+\sqrt{7}=2\sqrt{7}$$

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

Simplificar los siguientes radicales:

Ejercicios

1) $\sqrt{48ab^2}+b\sqrt{75a}+\sqrt{3a(a-9b)^2}$

2) $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{\frac{9}{2}}}+6\sqrt[3]{\frac{2}{9}}-7\sqrt[3]{\left(\frac{4}{3}\right)^2}+\frac{5}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}+3\sqrt{\frac{1}{6}}$

3) $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{72}$

4) $4\sqrt{75}+3\sqrt{\frac{4}{3}}-2\sqrt{48}$

5) $\sqrt{48}-2\sqrt[4]{9}+\sqrt{8}-\sqrt{50}$

Respuestas:

1) $a\sqrt{3a}$ 2) $\frac{9}{4}\sqrt{6}-\frac{8}{3}\sqrt[3]{6}$ 3) $2\sqrt{2}$ 4) $14\sqrt{3}$ 5) $2\sqrt{3}-3\sqrt{2}$

EJERCICIOS DE REFUERZO

Simplificar los siguientes radicales:

1) $\sqrt{128}-2\sqrt{50}+\sqrt{72}-\sqrt{18}$

2) $8\sqrt{\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}\sqrt{12}+4\sqrt{27}-2\sqrt{\frac{3}{16}}$

3) $7\sqrt[3]{54}+3\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{128}$

4) $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}-b\sqrt{\frac{1}{ab}}+\frac{1}{ab^2}\sqrt{a^3b^3}$

5) $5\sqrt[6]{64a^2}-5\sqrt[3]{27a}+6\sqrt[9]{a^3}$

6) $2\sqrt{\frac{2}{3}}+4\sqrt{\frac{3}{8}}-5\sqrt{\frac{1}{24}}$

7) $\sqrt[3]{48}+2\sqrt[6]{4}-3\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{2}+2\sqrt[6]{36}$

8) $\sqrt[6]{4}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{54}-12\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

9) $a\sqrt[3]{b^6}+b\sqrt[5]{a^5b}-\frac{2}{ab}\sqrt[5]{a^{10}b^{11}}$

10) $\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{14}$

11) $\sqrt{ab}\sqrt[3]{a^2b^2}\sqrt[4]{ab^3}$

12) $\sqrt[20]{x}\sqrt[7]{x^2}\sqrt[30]{x^3}$

13) $\sqrt[5]{a\sqrt[3]{a^2}}\sqrt[6]{\sqrt[4]{a^9}}\sqrt[3]{a^2\sqrt[8]{a^7}}$

14) $\left[\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}\right)\right]$

15) $\sqrt{15}\div\sqrt{3}$

16) $\left(10\sqrt[3]{108}\right)\div\left(5\sqrt[3]{4}\right)$

17) $4\sqrt[3]{9}\div 2\sqrt{3}$

18) $\sqrt[6]{a}\div\sqrt[4]{a^3}$

19) $\sqrt{\frac{2x}{y}}\div\sqrt[3]{\frac{2y}{x^2}}$

20) $\left(84\sqrt{15}+168\sqrt{6}\right)\div 3\sqrt{21}$

21) $\left(\sqrt{8}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[4]{4}\right)\div\sqrt{2}$

Respuestas:

1) $\sqrt{2}$ 2) $\frac{29}{2}\sqrt{3}$ 3) $8\sqrt[3]{2}$ 4) $\frac{2\sqrt{ab}}{b}$ 5) $\sqrt[3]{a}$

6) $\frac{5}{4}\sqrt{6}$ 7) $\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{2}$ 8) $-4\sqrt[3]{2}$ 9) 0 10) $2\sqrt[3]{7}$

11) $ab\sqrt[12]{a^5 b^{11}}$ 12) $\sqrt[2n]{x^7}$ 13) $a\sqrt[3]{a^2}$ 14) -1 15) $\sqrt{5}$

16) 6 17) $2\sqrt[6]{3}$ 18) $\dfrac{\sqrt[12]{a^5}}{a}$ 19) $\dfrac{x\sqrt[6]{2xy}}{y}$ 20) $4\sqrt{35}+8\sqrt{14}$

21) $3+\sqrt[6]{18}$

1.7. NOTACIÓN CIENTÍFICA

La notación científica es muy importante en el campo de la ciencia y la técnica ya que es muy útil para los cálculos con números muy grandes o muy pequeños.

Cualquier número x se puede escribir como: $\boxed{x = a\times 10^n \quad ; \text{donde:} \quad 1 \le a < 10 \quad ; n \in Z}$

Ejemplos:

La distancia que recorre un rayo de luz en un año es aproximadamente 9.5×10^{12} *Km.* El exponente positivo 12 indica que el punto decimal se debe recorrer 12 lugares hacia la derecha.
$9.5\times 10^{12} = 9\ 500\ 000\ 000\ 000\ Km$

La notación se aplica similarmente para números pequeños. Por ejemplo, el peso estimado de una molécula de oxígeno es 0.000 000 000 000 000 000 000 053 gramos o bien, en notación científica 5.3×10^{-23}
El exponente negativo indica que el punto decimal se debe recorrer 23 lugares hacia la izquierda.

Regla:

Si el punto decimal se recorre hacia la izquierda el exponente es positivo: $932000000000 = 9.32\times 10^{11}$
Si el punto decimal se recorre hacia la derecha el exponente es negativo : $0.000000028 = 2.8\times 10^{-8}$

Consideraciones:

$$\left(A\times 10^{-2}\right)\left(-B\times 10^{-5}\right) = -AB\times 10^{-7}$$

$A\times 10^{-2} \pm B\times 10^{-2} = (A\pm B)\times 10^{-2}$ Las potencias deben ser iguales

$A\times 10^{-2} \pm B\times 10^{5} = (A\pm B)\times 10^{3}$ Incorrecto

EJERCICIOS RESUELTOS

Aplicando las reglas de la notación científica calcular las siguientes expresiones:

1) $$\frac{(9300000000)\times(0.0000026)}{(0.00031)\times(1300)} = \frac{\left(9.3\times 10^9\right)\left(2.6\times 10^{-6}\right)}{\left(3.1\times 10^{-4}\right)\left(1.3\times 10^3\right)} = \frac{6\times 10^3}{10^{-1}} = 6\times 10^4 = 60000$$

2) $$\frac{(4000)^3\times(1000000)}{(20000000)^5} = \frac{\left(4\times 10^3\right)^3\times\left(1\times 10^6\right)}{\left(2\times 10^7\right)^5} = \frac{2^6\times 10^9\times 1\times 10^6}{2^5\times 10^{35}} = \frac{2^6\times 10^{15}}{2^5\times 10^{35}} = 2\times 10^{-20}$$

3) $$\frac{(80000)^2}{(2000000)(0.0001)^4} = \frac{\left(8\times 10^4\right)^2}{\left(2\times 10^6\right)\left(1\times 10^{-4}\right)^4} = \frac{64\times 10^8}{\left(2\times 10^6\right)\left(1\times 10^{-16}\right)} = \frac{32\times 10^8}{10^{-10}} = 3.2\times 10^{19}$$

4) $-0.02\times 0.07+(1-0.96)^3+0.1^4=-2\times 10^{-2}\times 7\times 10^{-2}+(0.04)^3+\left(1\times 10^{-1}\right)$

$=-14\times 10^{-4}+\left(4\times 10^{-2}\right)^3+1\times 10^{-4}=-14\times 10^{-4}+64\times 10^{-6}+1\times 10^{-4}$

$=-14\times 10^{-4}+0.64\times 10^{-4}+1\times 10^{-4}=(-14+0.64+1)\times 10^{-4}=-12.36\times 10^{-4}=-1.236\times 10^{-3}$

CIFRAS SIGNIFICATIVAS

Si un número se escribe en notación científica $x=a\times 10^n$, donde $1\le a<10$, y si a se redondea a K cifras decimales, entonces se dice que x es exacta (o que se ha redondeado) a $K+1$ cifras significativas.

Por ejemplo, 37.2638 redondeado a 5 cifras significativas es 3.7264×10 o sea 37.264; con redondeo a 3 cifras significativas es 3.73×10, o sea 37.3 y a una cifra significativa, es 4×10, o sea 40.

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

Exprese cada número en notación científica:

1) 537000000000 2) 0.047 3) $(0.003)(0.00015)$ 4) $\dfrac{1400000}{700}$

5) $\dfrac{(0.000012)(400000)}{0.000006}$ 6) $(0.004)(30000)^2$ 7) $\sqrt{0.000004}\,(8000)^{\frac{2}{3}}\,(100000)^{\frac{4}{5}}$

Exprese cada número sin exponentes:

1) 5.2×10^3 2) 8.12×10^{-5} 3) 9.3×10^4

4) $\left(5\times 10^3\right)\left(3\times 10^4\right)$ 5) $\dfrac{25\times 10^3}{5\times 10^{-2}}$ 6) $\dfrac{\left(6.1\times 10^4\right)\left(7.2\times 10^{-6}\right)}{9.8\times 10^{-4}}$

EJERCICIOS DE REFUERZO

Exprese cada número en notación científica:

1) 3700 2) 900000 3) 0.00000452 4) $(230000)(3000)$

5) $\dfrac{0.0000426}{200}$ 6) $\dfrac{(80000000)^2(0.000003)}{(600000)(0.0002)^4}$ 7) $\sqrt[3]{\dfrac{(0.004)^4(0.0036)}{(120000)^2}}$

Respuestas:

1) $3{,}7\times 10^3$ 2) 9×10^5 3) $4{,}52\times 10^{-6}$ 4) $6{,}9\times 10^8$ 5) $2{,}7\times 10^{-7}$ 6) 2×10^{19} 7) 4×10^{-8}

Exprese cada número sin exponentes:

1) 3×10^7 2) 9.3×10^4 3) $\left(1.6\times 10^{-2}\right)\left(4\times 10^{-3}\right)$

4) $\dfrac{\left(2\times 10^2\right)^3\left(6\times 10^{-5}\right)}{4\times 10^3}$ 5) $\dfrac{\left(8\times 10^2\right)^2\left(3\times 10^{-2}\right)}{24\times 10^{-3}}$

Respuestas:

1) 30000.000 2) 93000 3) $0{,}000064$ 4) $0{,}12$ 5) 800000

1.8. TRANSFORMACIÓN DE RADICALES DOBLES, EN SENCILLOS

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}} \quad ; \quad C = \sqrt{A^2 - B}$$

Ejemplos:

1) $\sqrt{5-\sqrt{24}}$; $C = \sqrt{5^2 - 24}$; $C = 1$

$= \sqrt{\frac{5+1}{2}} - \sqrt{\frac{5-1}{2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

2) $\sqrt{11+6\sqrt{2}} = \sqrt{11+\sqrt{72}}$; $C = \sqrt{11^2 - 72}$; $C = 7$

$= \sqrt{\frac{11+7}{2}} + \sqrt{\frac{11-7}{2}} = 3 + \sqrt{2}$

3) $\sqrt{2x+2\sqrt{x^2-25}}$; $= \sqrt{2x+\sqrt{4x^2-100}} =$; $C = \sqrt{(2x)^2 - (4x^2 - 100)}$; $C = 10$

$= \sqrt{\frac{2x+10}{2}} + \sqrt{\frac{2x-10}{2}} = \sqrt{x+5} + \sqrt{x-5}$

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

Transformar los siguientes radicales dobles en sencillos.

1) $\sqrt{28+5\sqrt{12}}$ 2) $\sqrt{a^2+b+2a\sqrt{b}}$ 3) $\sqrt{1-2x\sqrt{1-x^2}}$

Respuestas:

1) $5+\sqrt{3}$ 2) $a+\sqrt{b}$ 3) $\sqrt{1-x^2}-x$

EJERCICIOS DE REFUERZO

Transformar los siguientes radicales dobles en sencillos:

1) $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$ 2) $\sqrt{6x+x\sqrt{11}}$ 3) $\sqrt{8a-a\sqrt{-17}}$ 4) $\sqrt{a+2\sqrt{b(a-b)}}$

5) $\sqrt{x-\frac{1}{2}\sqrt{2x-\frac{1}{4}}}$ 6) $\sqrt{m+n+r-2\sqrt{(m+n)r}}$ 7) $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{4\sqrt{ab}}}$

8) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$ 9) $\sqrt{7x-x\sqrt{13}}$ 10) $\sqrt{1+\sqrt{3+\sqrt{13+4\sqrt{3}}}}$

Respuestas:

1) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 2) $\sqrt{\frac{11x}{2}}+\sqrt{\frac{x}{2}}$ 3) $\sqrt{\frac{17a}{2}}-\sqrt{-\frac{a}{2}}$ 4) $\sqrt{a-b}+\sqrt{b}$

5) $\sqrt{\frac{8x-1}{8}}-\sqrt{\frac{1}{8}}$ 6) $\sqrt{m+n}-\sqrt{r}$ 7) $\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}$ 8) $3+\sqrt{2}$

9) $\sqrt{\frac{13x}{2}}-\sqrt{\frac{x}{2}}$ 10) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$

CAPÍTULO II
EXPRESIONES ALGEBRAICAS

2.1. CONCEPTOS BÁSICOS

2.1.1. EXPRESIÓN ALGEBRAICA

Es una expresión constituida por letras y números enlazados entre si mediante los signos de operación.

$2x+3y$; $\dfrac{5x-2}{x+3}$; $\sqrt{\dfrac{7y-2}{x^2y^{-1}+z}}$; $4x$

2.1.2. TÉRMINO ALGEBRAICO

Es toda expresión algebraica conectada por los signos de la adición $(+)$ o el signo de la sustracción $(-)$.

$x^3-2x^2+\sqrt{x}-\pi$; (4 términos algebraicos)

En todo término algebraico se distinguen dos partes:

Coeficiente (números o letras) y la **variable** (letras) esta última elevada a un exponente natural.

Ejemplo:

$6x^3$

Exponente

Variable

Coeficiente

De acuerdo al número de términos que tenga la expresión algebraica se le conoce con el nombre de:

Monomio: $3x^2y^3$; $\frac{1}{5}y^4$; -7 ; ax (Un término)

Binomios: x^3-5 ; $2x+3yz^3$; $-6a+5a^2$ (Dos términos)

Trinomios: $4x^3-12x^2+3$; $3x-2y+1$; $a^2-2ab+b^2$ (Tres términos)

2.1.3. POLINOMIO

Un polinomio en una variable es toda expresión algebraica de la forma:

$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$; $a_n \neq 0$

Se representa como $P(x)$

n ; $n-1$; $n-2$; .....= Exponentes $\in Z^+ \cup \{0\}$

a_n ; a_{n-1} ; a_{n-2} ;.....= Coeficientes

x = Variable, que puede ser reemplazada por cualquier elemento de los números reales

a_0 = Término independiente

2.1.4. GRADO DE UN POLINOMIO

El mayor de los exponentes con el cual aparece la variable con coeficientes no nulo, se denomina grado del polinomio.

2.1.5. GRADO DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

2.1.5.1. GRADO ABSOLUTO: Esta referida a todas las variables de una expresión algebraica.

$2x^4y^3z^2$; $G.A.=9$

2.1.5.2. GRADO RELATIVO: Se refiere a una sola variable de la expresión algebraica.

$2x^4y^3z^2$; $G.R.(x)=4$, $G.R.(y)=3$, $G.R.(z)=2$

2.1.5.3. GRADO ABSOLUTO DE UN POLINOMIO: Es el término de mayor grado absoluto.

$$P(x,y) = 3xy^4 - 5x^3y - x^2y^5$$

G. A. $\longrightarrow$ 5 4 7 $\therefore$ G. A. = 7

2.1.5.4. GRADO RELATIVO DE UN POLINOMIO: Es el del término de mayor grado relativo.

$$P(x,y) = 3xy^4 - 5x^3y - x^2y^5$$

G. R. (x)	$\longrightarrow$	1	3	2
G. R. (y)	$\longrightarrow$	4	1	5
G. R. P(x)	$\longrightarrow$	3		
G. R. P(y)	$\longrightarrow$	5		

2.1.6. CERO O RAÍZ DE UN POLINOMIO: Es el valor que logra eliminar el polinomio.

$P(x) = x^7 - 43x - 42$

$P(2) = 2^7 - 43(2) - 42$

$P(2) = 128 - 86 - 42 = 0$, entonces una raíz de $P(x)$ es $x = 2$

2.1.7. TÉRMINOS SEMEJANTES: Son aquellos términos que se diferencian en su coeficiente numérico.

$5x^2y^3$; $\frac{1}{3}x^2y^3$; $8x^2y^3$ son términos semejantes.

ax^2 ; bx^2 ; $5x^2$ no son términos semejantes.

2.1.8. POLINOMIO HOMOGÉNEO: Cuando todos sus términos son del mismo grado.

$P(a,b) = 4a^3 + 5a^2b + 7ab^2 - 8b^3$; (3er grado)

2.1.9. POLINOMIO ORDENADO: Con respecto a una letra es aquel que se caracteriza porque los valores de los exponentes de la letra considerada, van aumentando o disminuyendo según sea la ordenación en forma ascendente o descendente.

$P(x) = 2x^5 - 3x^3 + x^2 - 5x + 1$ Polinomio ordenado respecto a x en forma descendente

$P(x) = x^2 + 2x^4 - x^5 - 3x^7$ Polinomio ordenado respecto a x en forma ascendente

2.1.10. POLINOMIO COMPLETO: Con respecto a una letra, es aquel que se caracteriza porque los exponentes de la letra considerada van aumentando o disminuyendo a partir el primer término hasta el cero inclusive, denominado este último "término independiente" con respecto a esa letra.

$P(x) = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + x$; Término independiente : 0

$P(y) = 2y^5 + y^4 - 3y^3 + y^2 - 2y + 4$; Término independiente: 4

$P(x) = 2a^2x^3 - 5x^2 + abx + a + b$; Término independiente : $a + b$

2.1.11. POLINOMIO ENTERO EN "x": Es aquel que se caracteriza porque todos sus exponentes son enteros y su única variable es "x".

2.1.12. VALOR NUMÉRICO DE UN POLINOMIO: Es la constante obtenida al sustituir la variable por las constantes asignadas; ejemplo:

$P(x) = x^2 - 5x + 6$

$P(0) = (0)^2 - 5(0) + 6 \;,\; P(0) = 6 \qquad ; \qquad P(1) = (1)^2 - 5(1) + 6 \;,\; P(1) = 2$

EJERCICIOS RESUELTOS

1) Dado el Polinomio $P(x,y) = 3x^{n+3}y^{m-2} + x^{n+2} + y^{m-3}$; tal que $G.R(x) - G.R(y) = 5$; además $G.A[P(x,y)] = 11$, determinar el valor de $2m+n$

$$\begin{cases} n+3-(m-2)=5 & ; \quad n-m=0 \quad n=m \\ n+3+m-2=11 & ; \quad n+m=10 \end{cases}$$

Como: $n = m$ reemplazando en la segunda ecuación tenemos

$2m = 10 \;\Rightarrow\; m = 5 \;;\; n = 5$ Por lo tanto $2m + n = 2(5) + 5 = 15$

2) Si el polinomio: $P(x,y) = x^{14+m}y^n - 5x^n y^{2m+4} + 7y^{49}$ es homogéneo, determinar el grado relativo respecto a "x"

Como es homogéneo: $14 + m + n = n + 2m + 4 = 49$

$$\begin{cases} m+n+14=49 & ; \quad m+n=35 \\ n+2m+4=49 & ; \quad 2m+n=45 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema tenemos: $m = 10 \;,\; n = 25$

$P(x,y) = x^{24}y^{25} - 5x^{25}y^{24} + 7y^{49} \qquad ; \qquad G.R.(x) = 25$

2.2. OPERACIONES CON POLINOMIOS

La adición y sustracción de polinomios se realiza considerando términos semejantes.

2.2.1. SUMA ALGEBRAICA

Sean: $P1(x) = 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 1 \;;\; P2(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 4$, hallar $P(x) = P1(x) + +P2(x)$

$P(x) = P1(x) + P2(x) = (3x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 1) + (2x^3 - 3x^2 - 5x + 4) = 3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 5x + 5$

2.2.2. RESTA ALGEBRAICA

Sean: $P1(x) = 5x^5 + 2x^4 - 3x^2 + 5x - 2 \;;\; P2(x) = 6x^5 - 3x^2 + 3x - 4$, hallar $P(x) = P1(x) - P2(x)$

$P(x) = P1(x) - P2(x) = (5x^5 + 2x^4 - 3x^2 + 5x - 2) - (6x^5 - 3x^2 + 3x - 4)$

$P(x) = 5x^5 + 2x^4 - 3x^2 + 5x - 2 - 6x^5 + 3x^2 - 3x + 4 = -x^5 + 2x^4 + 2x + 2$

2.2.3. MULTIPLICACIÓN

Sean: $P1(x) = 3x^2 + x - 2 \;;\; P2(x) = x - 3$ hallar $P(x) = P1(x)\; P2(x)$

1) De manera horizontal aplicamos la ley distributiva de la multiplicación:

$P(x) = P1(x)\; P2(x)$

$P(x) = (3x^2 + x - 2)(x - 3) = (3x^2 + x - 2)(x) - (3x^2 + x - 2)(3)$

$P(x) = 3x^3 + x^2 - 2x - 9x^2 - 3x + 6 = 3x^3 - 8x^2 - 5x + 6$

2) Multiplicar $x^{a+2}-3x^{a}-x^{a+1}+x^{a-1}$ por $x^{a+1}+x^{a}+4x^{a-1}$ de manera vertical

$$
\begin{array}{l}
x^{a+2}-x^{a+1}-3x^{a}+x^{a-1} \\
\qquad\quad x^{a+1}+x^{a}+4x^{a-1} \\
\hline
x^{2a+3}-x^{2a+2}-3x^{2a+1}+x^{2a} \\
\qquad\quad x^{2a+2}-x^{2a+1}-3x^{2a}+x^{2a-1} \\
\qquad\qquad\qquad 4x^{2a+1}-4x^{2a}-12x^{2a-1}+4x^{2a-2} \\
\hline
x^{2a+3} \qquad\qquad\qquad -6x^{2a}-11x^{2a-1}+4x^{2a-2}
\end{array}
$$

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

1) Del siguiente grupo de términos, escoger los que son semejantes entre sí:

$2ab$; 9^{x} ; 4^{m+1} ; 3^{2x} ; $\sqrt{a^2b^2}$; 9^{x} ; $8\left(3^2\right)^{x}$; 4.4^{m} ; $3^{-2\sqrt{x}}$; $b^{2\ln x}$;
$\dfrac{4m}{4^{-1}}$; $\dfrac{1}{9^{\sqrt{x}}}$; $\left(b^{\ln x}\right)^2$; $6\left(b^2\right)^{\ln x}$; $\dfrac{b}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}}}$

2) Realizar la reducción de términos semejantes en los siguientes polinomios:

a) $5x^2y^3z-7x^3y^2z+6x^2yz^2-x^2y^3z-4x^2yz^2+5x^3y^2z$

b) $\dfrac{3}{4}m^3n^3+\dfrac{5}{6}m^3n^2-m^2n^2+\dfrac{1}{9}m^2n^3-\dfrac{1}{4}m^2n^2-\dfrac{2}{3}m^2n^3+2m^3n^3-\dfrac{5}{2}m^3n^2$

c) $x^{2a}y^{a}+\dfrac{2}{5}x^{a}y^{2a}-2x^{2a}y^{2a}+\dfrac{2}{3}x^{a}y^{a}-\dfrac{1}{2}x^{2a}y^{2a}+\dfrac{1}{2}x^{2a}y^{a}-x^{a}y^{a}-\dfrac{5}{2}x^{a}y^{2a}$

3) Determinar el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas:

a) $\dfrac{x^2+y^2}{m-n}+\dfrac{x^2-y^2}{m+n}$ para: $x=2$; $y=-1$; $m=\dfrac{1}{3}$; $n=-\dfrac{1}{2}$

b) $\sqrt{3m}-\dfrac{1}{2}\sqrt{16n^2}+n\sqrt{12m}$ para: $m=3$; $n=\dfrac{1}{4}$

c) $\left(\dfrac{3x^2}{y}+\dfrac{3}{2}\right)+\dfrac{xy^2}{2}\cdot z^3$ para: $x=-2$; $y=\dfrac{1}{2}$; $z=2$

4) Determinar "n" para que el grado del monomio $P(x)=\left[\left(x^{n-2}\right)^3x^{n-1}\right]^2$, sea de segundo grado.

5) Calcular m^n sabiendo que el siguiente polinomio es homogéneo $x^{m+3}y^{-2}+x^{m+1}y^{n-4}-x^{n-3}y$

6) Luego de simplificar $P(x,y)=\dfrac{\sqrt[9]{x^{17}y^{22}}}{\sqrt[3]{x^2y\,\sqrt[3]{x^2y}}}$; indicar el grado absoluto de la expresión.

7) Sumar los siguientes polinomios:

a) $a^3-8ax^2+x^3$, $5a^2x-6ax^2-x^3$, $3a^3-5a^2x-x^3$, $a^3+14ax^2-x^3$

b) $\frac{3}{2}m^4+\frac{2}{3}m^2n^2+\frac{3}{5}n^4$, $\frac{5}{4}m^4-\frac{1}{6}m^2n^2+0.2n^4$, $-\frac{3}{4}m^4-3.2m^2n^2-\frac{1}{2}n^4$

8) Efectúe las siguientes sustracciones de polinomios:

a) *De* $8x^3+5x^4-x+6x^2-9$ *restar* $6x^4+3x^3-2x^2+3x-6$

b) *De* $6a^5+4a^4b-5a^3b^2+7b^5$ *restar* $3a^4b-a^3b^2-3a^5+2b^5$

c) *Restar* $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ *de* $a^3-4a^2b+2ab^2+b^3$

d) *Restar* $7a^3+2a^2b+9ab^2-11b^3-4c^3$ *de* $9a^3+8a^2b+5ab^2-7b^3$

9) Qué expresión se debe restar a la suma de: $-\{-[-(-2x-1)-2]\}$; $-\left[5x^2+(9-8x)\right]$; $-\left[x-\left(5x^2+6\right)\right]$ con el fin de obtener el mismo resultado que al restar $\left(6x^3-2x^2\right)-\left(7x^3-2x^2\right)$ de $-x^3-9x+4$

10) Efectuar las siguientes multiplicaciones:

a) $(a^3-3a^2b+4ab^2)(a^2b-2ab^2-10b^3)$ b) $\left(\frac{1}{3}ax-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}a^2\right)\left(\frac{3}{2}x^2-ax+\frac{2}{3}a^2\right)$

c) $(x^{m+2}y^{n-1}+3x^my^{n+1}-4x^{m+1}y^n)(-2x^{2m-1}y^{n-2}-10x^{2m-3}y^n-4x^{2m-2}y^{n-1})$

11) $(x^{a-1}+2x^{a-2}-x^{a-3}+x^{a-4})(-x^{a-3}+x^{a-1}-x^{a-2})$

12) $(0.4m^2+0.33.....mn-0.5n^2)(1.5m^2+2n^2-mn)$

Respuestas:

2) a) $4x^2y^3z-2x^3y^2z+2x^2yz^2$ b) $\frac{11}{4}m^3n^3-\frac{5}{3}m^3n^2-\frac{5}{9}m^2n^3-\frac{5}{4}m^2n^2$

c) $\frac{3}{2}x^{2a}y^a-\frac{21}{10}x^ay^{2a}-\frac{5}{2}x^{2a}y^{2a}-\frac{1}{3}x^ay^a$ 3) a) -12 b) 4 c) 14

4) $n=2$ 5) 1 6) 3 7) a) $5a^3-2x^3$ b) $2m^4-\frac{27}{10}m^2n^2+\frac{3}{10}n^4$

8) a) $-x^4+5x^3+8x^2-4x-3$ b) $9a^5+a^4b-4a^3b^2+5b^5$ 9) $18x-8$

c) $-a^2b-ab^2+2b^3$ d) $2a^3+6a^2b-4ab^2+4b^3+4c^3$

10) a) $a^5b-5a^4b^2+22a^2b^4-40ab^5$ b) $a^4-\frac{23}{18}a^3x+\frac{19}{12}a^2x^2+ax^3-\frac{3}{4}x^4$

c) $-2x^{3m+1}y^{2n-3}+4x^{3m}y^{2n-2}+28x^{3m-2}y^{2n}-30x^{3m-3}y^{2n+1}$

11) $x^{2a-2}+x^{2a-3}-4x^{2a-4}-x^{2a-7}$ 12) $\frac{3}{5}m^4+\frac{1}{10}m^3n-\frac{17}{60}m^2n^2+\frac{7}{6}mn^3-n^4$

EJERCICIOS DE REFUERZO

1) Simplificar:

a) $(-x+y)-\{4x+2y+[-x-y-(x+y)]\}$

b) $8x-(2y-4x)-[3y-(2y-x)]-[2y+(4x-3y)]$

Expresiones Algebraicas

2) Hallar el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para los valores de las letras que se indican:

a) $a(b+c)+2b(a+c)-3c(a+b)$; para : $a=b=1\,;c=-2$

b) $\frac{x+y}{z}+\frac{x+z}{y}+\frac{z+x}{y}-\frac{1}{9}xyz$; para $x=2\,;y=3\,;z=-3$

c) $3(a+b)-4(c-b)+\sqrt{\frac{c-b}{-a}}$; para $a=2\,;b=3\,;c=1$

3) Calcular "m" y "n" para que el monomio $x^{4(m+n)}y^{3m-2n}$ sea de grado absoluto 80 y de grado relativo a "y" 20

4) El monomio $P(x)=\sqrt[3]{\frac{x^{n-2}\sqrt[7]{x^{3n}}}{\sqrt[4]{x^{n+1}}}}$ es de grado 2, determinar el valor de "n"

5) Hallar el coeficiente del monomio: $9^m\left(-\frac{1}{3}\right)^n x^{3m+2n}y^{5m-n}$, si su grado absoluto es 10 y el grado relativo a "x" es 7

6) En el polinomio: $P(x,y)=x^{m+3}y^{n+1}-x^{m+2}y^{n+1}+x^{m+1}y^{n+2}$, calcular "m" y "n" ;si el grado con respecto a "y" es 4 y el grado absoluto del polinomio es 12.

7) Determinar el valor de "m" de modo que el monomio $P(x)=\sqrt{\frac{x^{m-2}\sqrt[3]{x^{2m}}}{\sqrt[3]{x^m}}}$ sea de tercer grado.

8) Hallar $(m-n)$si $P(x,y)=5x^{m-2}y^n+2x^m y^{n-3}-\frac{1}{5}x^{m+1}y^{n-2}$ es de grado 8 respecto a "y" y de tercer grado con respecto a "x".

9) Calcular "n" en el polinomio: $P(x)=(3nx-2n)^2+x^{2n}+12x$, si la suma de coeficientes de $P(x)$ excede en 1 al término independiente.

10) En el polinomio $P(x,y)=4x^{m+n-2}y^{m-3}+7x^{m+n+5}y^{m-4}+13x^{m+n-6}y^{m+2}$ se verifica que la diferencia entre los grados relativo a "x" e "y" es 5 y además que el menor exponente de "y" es 3. Hallar el grado absoluto del polinomio.

11) Restar la suma de $3x^2-y^2$ con $-11xy+9y^2-14$ de la suma de $x^2-3xy-y^2$ con $9y^2-8xy+19x^2$

12) De $\frac{1}{2}a+\frac{3}{5}b-\frac{7}{8}c+\frac{8}{9}d$ restar $-\frac{7}{20}b+\frac{1}{8}c-\frac{1}{9}d+\frac{7}{8}$

13) ¿Cuánto le falta a : $7x^3+3x-8x^2+4$, para ser igual a : $4x+10x^2+7x^3-5$?

14) Efectuar las siguientes multiplicaciones:

a) $\left(a^3x-4a^2x^2+5ax^3-x^4\right)\left(-2a^2x\right)$

b) $\left(6y^2+2x^2-5xy\right)\left(3x^2-4y^2+2xy\right)$

c) $(x^{a+2}-3x^a-x^{a+1}+x^{a-1})\,(x^{a+1}+x^a+4x^{a-1})$

Respuestas:

1) a) $-3x+y$ b) $7x-2y$ 2) a) 9 b) $-\frac{1}{3}$ c) 24 3) $m=10$, $n=5$

4) $n=7$ 5) Coeficiente del monomio = 1 6) $m=6$, $n=2$

7) $m=6$ 8) $m-n=-6$ 9) $n=2$ 10) $m=7$, $n=2$, $G.A=17$

11) $17x^2+14$ 12) $\frac{1}{2}a+\frac{19}{20}b-c+d-\frac{7}{8}$ 13) $18x^2+x-9$

14) a) $-2a^5x^2+8a^4x^3-10a^3x^4+2a^2x^5$ b) $6x^4-11x^3y+32xy^3-24y^4$

c) $x^{2a+3}-6x^{2a}-11x^{2a-1}+4x^{2a-2}$

2.2.4. PRODUCTOS NOTABLES

Son aquellos productos cuyo resultado se pueden obtener directamente sin efectuar la operación, los más comunes son:

1) $a(b+c)=ab+ac$

2) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

3) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

4) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

5) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

6) $(x+a)(x-b)=x^2+(a-b)x-ab$

7) $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

8) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

9) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

10) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

11) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

12) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

13) $(a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$

14) $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

15) $(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)=a^5+b^5$

16) $(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\dots\dots\dots+b^{n-1})=a^n-b^n$; $\forall n\in Z^+$

17) $(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\dots\dots\dots+b^{n-1})=a^n+b^n$; $\forall n\in Z^+$ impares

18) $(x^{2n}-x^n+1)(x^{2n}+x^n+1)=(x^{4n}+x^{2n}+1)$ Identidad de Argand

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

Efectuar los siguientes productos:

1) $(m^2+3)(m^2-5)$ 2) $(x^4-9)(x^4-7)$ 3) $\left(\sqrt{m}+\sqrt{\frac{1}{m}}\right)^2$ 4) $(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{m})^3$

5) $(5x+3y)(2x-3y)$ 6) $(a^m+b^m)(a^m-b^m)$ 7) $(2a-3b+c)^2$ 8) $(x^4+y^3)^3$

9) $(x^2+x+1)^2$ 10) $(m^2-1)(m^4+m^2+1)$ 11) $(m^2-m+1)(m^2+m+1)$

12) $(a^{x+1}-2b^{x-1})(2b^{x-1}+a^{x+1})$ 13) $(z+x)(x^2-xz+z^2)$

14) $(x+y+3)(x+y+4)$ 15) Si $a+b+c=0$ demostrar que $a^3+b^3+c^3=3abc$

16) Si $x+\frac{1}{x}=3\sqrt{5}$ hallar el valor de x^2+x^{-2} 17) Calcular el valor $E=\sqrt[8]{1+24(5^2+1)(5^4+1)(5^8+1)}$

18) Calcular el valor de $E=\left(x^{2^n}+y^{2^n}\right)\left(x^{2^n}-y^{2^n}\right)\left[x^{2^{n+1}}+y^{2^{n+1}}\right]+y^{2^{n+2}}$

19) Si $x+\dfrac{1}{x}=a$ hallar el valor de $E=\sqrt[3]{x^3+\dfrac{1}{x^3}+3a}$

20) Calcular el valor de $E=\sqrt{\sqrt{2}+1}\ \sqrt[6]{5\sqrt{2}-7}$

21) Calcular el valor de $\left(\sqrt[4]{x}+1\right)\left(\sqrt[4]{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x+1\right)\left(x^4+x^2+1\right)$

Respuestas:

16) 43 **17)** $E=25$ **18)** $E=x^{2^{n+2}}$ **19)** $E=a$ **20)** $E=1$ **21)** x^6-1

EJERCICIOS DE REFUERZO

1) Calcular el valor de $E=(1-a)(1+a)\left(1+a+a^2\right)\left(1-a+a^2\right)$

2) Dado: $x^2-1=6x$, hallar el valor de x^2+x^{-2}

3) Calcular el valor de $E=24\left(5^2+1\right)\left(5^4+1\right)\left(5^8+1\right)$

4) Si: $x^3+y^3=133$; $xy(x+y)=70$, determinar el valor de $x+y$

5) Si: $a-b=8$; $ab=3$, hallar el valor de a^2+b^2

6) Si: $x+\dfrac{1}{x}=3$; calcular el valor de $x^5+\dfrac{1}{x^5}$

7) Reducir $\sqrt{a^2+\dfrac{1}{a^2}+4\left(a+\dfrac{1}{a}\right)+6}$ para $a>0$

8) Simplificar $E=(a+b)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(a^2+b^2\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(a^4+b^4\right)+b^8$

9) Calcular el valor de $E=\sqrt{2}\left[\left(\sqrt{2}-1\right)^5+41\right]$

10) Si: $a+b=\sqrt{11}$; $ab=4$, hallar el valor de $E=\dfrac{a^3+b^3+7\sqrt{11}}{a^2+b^2}$

11) Si: $x=\dfrac{ab}{a+b}$; $y=\dfrac{a+b+ab}{a+b-ab}$ hallar el valor de: $y-x-xy$

12) Si: $\dfrac{a}{b}+\dfrac{4b}{a}=4$, hallar el valor de: $E=\sqrt[3]{\dfrac{a+6b}{3b-a}}$

13) Si: $a+b+c=0$; $abc=5$, hallar el valor de $E=ab(a+b)^4+bc(b+c)^4+ac(a+c)^4$

14) Si se cumple que: $x+y=\sqrt{5xy}$, calcular el valor de $E=\left(\dfrac{x}{y}+1\right)^3+\left(\dfrac{y}{x}+1\right)^3$

15) Si $a=b+1$, hallar el valor de $E=\sqrt{(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)+b^8}$

16) Si $a+b=14$, $ab=48$ hallar el valor de $E=\sqrt{a^2+b^2-36}$

Respuestas:

1) $E=1-a^6$	**2)** 38	**3)** $E=5^{16}-1$	**4)** 7	**5)** 70	**6)** 123
7) $a+\frac{1}{a}+2$	**8)** $E=a^8$	**9)** $E=58$	**10)** $2\sqrt{11}$	**11)** 1	**12)** 2
13) 75	**14)** 50	**15)** $E=a^4$	**16)** $E=8$		

2.2.5. BINOMIO DE NEWTON

2.2.5.1. NOTACIÓN FACTORIAL

La notación $n!$ se lee " n factorial ", y se define como el producto indicado de todos los números consecutivos desde 1 hasta n:

$n!=1\times2\times3.....(n-3)(n-2)(n-1)n$ para cualquier entero positivo n

Ejemplos:

$2!=1\times2=2$
$6!=1\times2\times3\times4\times5\times6=720$
Por definición $0!=1$

2.2.5.2. COEFICIENTES BINOMIALES

Para n y r enteros no negativos, $n>r$. $\boxed{\binom{n}{r}=C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}}$

Ejemplos:

Evaluar:

$$\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!(5-2)!}=\frac{5!}{2!3!}=\frac{5.4.3!}{2!3!}=\frac{5.4}{2.1}=10$$

$$\binom{7}{4}=\frac{7!}{4!(7-4)!}=\frac{7!}{4!3!}=\frac{7.6.5.4!}{4!3!}=\frac{7.6.5}{3.2.1}=35$$

$$\binom{4}{4}=\frac{4!}{4!(4-4)!}=\frac{4!}{4!0!}=\frac{1}{0!}=\frac{1}{1}=1 \quad , \quad \binom{5}{0}=\frac{5!}{0!(5-0)!}=\frac{5!}{0!5!}=\frac{1}{0!}=\frac{1}{1}=1$$

Se puede observar que para cualquier entero positivo n: $\binom{n}{n}=1$; $\binom{n}{0}=1$; $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$

2.2.5.3. TEOREMA DEL BINOMIO

Para cualquier entero positivo n

$$\boxed{(a+b)^n=\binom{n}{0}a^nb^0+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\binom{n}{3}a^{n-3}b^3+.....+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}a^0b^n}$$

Como se observa en el teorema del binomio " la suma de los exponentes de las variables en cada término es n y que el número inferior de la combinación siempre es igual al del exponente de la segunda variable del término".

Al desarrollar un binomio de la forma, existen $n+1$ términos. El primer término es a^n y el último b^n.

Si se tiene $(a+b)^n$, todos los términos son positivos y si tiene la forma $(a-b)^n$, los términos impares son positivos y los términos pares son negativos.

Ejemplos:

1) $$(2x+3y^2)^4 = \binom{4}{0}(2x)^4(3y^2)^0 + \binom{4}{1}(2x)^3(3y^2)^1 + \binom{4}{2}(2x)^2(3y^2)^2 + \binom{4}{3}(2x)^1(3y^2)^3 + \binom{4}{4}(2x)^0(3y^2)^4$$
$$= 16x^4 + 4(8x^3)(3y^2) + 6(4x^2)(9y^4) + 4(2x)(27y^6) + 81y^8$$
$$= 16x^4 + 96x^3y^2 + 216x^2y^4 + 216xy^6 + 81y^8$$

2) $$(2x+3)^6 = \binom{6}{0}(2x)^6(3)^0 + \binom{6}{1}(2x)^5(3)^1 + \binom{6}{2}(2x)^4(3)^2 + \binom{6}{3}(2x)^3(3)^3 +$$
$$\binom{6}{4}(2x)^2(3)^4 + \binom{6}{5}(2x)^1(3)^5 + \binom{6}{6}(2x)^0(3)^6$$
$$= (2x)^6 + 6(2x)^5(3) + 15(2x)^4(9) + 20(2x)^3(27) + 15(2x)^2(81) + 6(2x)(243) + (3)^6$$
$$= 64x^6 + 576x^5 + 2160x^4 + 4320x^3 + 4860x^2 + 2916x + 729$$

3) $$\left(\frac{1}{x} - 2\sqrt{x}\right)^5 = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{x}\right)^5(-2\sqrt{x})^0 + \binom{5}{1}\left(\frac{1}{x}\right)^4(-2\sqrt{x})^1 + \binom{5}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^3(-2\sqrt{x})^2 +$$
$$\binom{5}{3}\left(\frac{1}{x}\right)^2(-2\sqrt{x})^3 + \binom{5}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^1(-2\sqrt{x})^4 + \binom{5}{5}\left(\frac{1}{x}\right)^0(-2\sqrt{x})^5$$
$$= \frac{1}{x^5} - \frac{10}{x^{\frac{7}{2}}} + \frac{40}{x^2} - \frac{80}{x^{\frac{1}{2}}} + 80x - 32x^{\frac{5}{2}}$$

2.2.5.4 TÉRMINO GENERAL

$$\boxed{T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r}$$

T_r =Lugar que ocupa el término buscado

a = Primer término del binomio ; b = Segundo término del binomio

r = Lugar menos 1 del término buscado ; n = Exponente del binomio

Ejemplos:

1) Calcular el cuarto término de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^5$

$T_R = 4^{to}$ término ; $a = x$; $b = \frac{1}{x}$; $r = 3$; $n = 5$

$$T_4 = \binom{5}{3} x^{5-3}\left(\frac{1}{x}\right)^3 = \frac{5.4.3!}{3!\,(5-3)!}(x)^2\left(\frac{1}{x^3}\right) = \frac{5.4}{2.1}x^{-1} = \frac{10}{x}$$

2) Calcular el término medio de $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$

$T_R = 3^{er}$ término ; $a=\sqrt{x}$; $b=-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $r=2$; $n=4$

$$T_3=\binom{4}{2}\left(\sqrt{x}\right)^{4-2}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=\frac{4.3.2!}{2!\,(4-2)!}\left(\sqrt{x}\right)^2\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{4.3}{2.1}\,(x)\left(\frac{1}{x}\right)=6$$

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

Utilice el teorema del binomio para desarrollar:

1) $\left(x^2-y^3\right)^4$ 2) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^5$ 3) $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$ 4) $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^6$

Respuestas:

1) $x^8-4x^6y^3+6x^4y^6-4x^2y^9+y^{12}$ 2) $x^5+5x^3+10x+\dfrac{10}{x}+\dfrac{5}{x^3}+\dfrac{1}{x^5}$

3) $x^2-4x+6-\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ 4) $x^3+6x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{1}{2}}+15x^2y+20x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}+15xy^2+6x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{5}{2}}+y^3$

Calcular el término indicado en cada desarrollo:

1) Sexto término de $(x+y)^{15}$ 2) Tercer término de $(2x+3)^6$ 3) Término medio de $(5x-2y)^4$

4) Octavo término de $\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)^{12}$ 5) Término que contiene x^{27} en el desarrollo de $\left(x^3+\sqrt{y}\right)^{13}$

6) Término central de $\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)^{10}$ 7) Término independiente de x en el desarrollo de $\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^9$

8) Los dos términos centrales de $\left(\dfrac{x^2}{2}-y\right)^9$

Respuestas:

1) $3003x^{10}y^5$ 2) $2160x^4$ 3) $600x^2y^2$ 4) $792x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{7}{2}}$

5) $715x^{27}y^2$ 6) -252 7) 84 8) $\dfrac{63}{16}x^{10}y^4$; $-\dfrac{63}{8}x^8y^5$

EJERCICIOS DE REFUERZO

1) Hallar el 4to término de $(x+y)^{10}$ 2) Hallar el 5to término de $(x-y)^{12}$

3) Hallar el 4to término de $(x-2y)^{11}$ 4) Hallar el término que contiene x^8 en $(2+x)^{10}$

5) Hallar el término medio del desarrollo de $(a+2x)^{10}$ 6) Hallar el coeficiente de x en $\left(x^2-\dfrac{a}{2x}\right)^{14}$

7) Hallar el término independiente de x en $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^9$ 8) Hallar el coeficiente de x^{12} en $\left(x^2+2x\right)^{10}$

9) Determinar el coeficiente del término que contiene y^3 en el desarrollo de $\left(\sqrt[4]{\frac{x}{14y}}-\sqrt[3]{\frac{y^2}{5x^2}}\right)^{10}$

10) Calcular el producto de los coeficientes numéricos del primero y del último término del desarrollo de $\left(1+3x^2\right)^6$

11) En el desarrollo de $\left(x^6-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{15}$ existe un término, cuyo grado es 38. Indique el lugar que ocupa.

12) En el desarrollo de $\left(\sqrt{2}\,x^{17}+x^{-1}\right)^n$ se verifica que el coeficiente del término de lugar $(n-1)$ es igual al exponente de x". Hallar n.

Respuestas:

1) $120x^7y^3$ 2) $495\,x^8y^4$ 3) $-1320\,x^8y^3$ 4) $180\,x^8$ 5) $8064\,a^5x^5$ 6) $-\frac{1001}{256}a^9x$

7) 84 8) $11520\,x^{12}$ 9) $\frac{3}{5}$ 10) 729 11) 9 12) 6

2.2.6. DIVISIÓN

2.2.6.1. MÉTODO CLÁSICO O DE LA GALERA

$$\begin{array}{l|l} P_{1(x)} & D_{(x)} \\ \hline & Q_{(x)} \\ R_{(x)} & \end{array}$$

$P_{1(x)}$ = Dividendo
$D_{(x)}$ = Divisor
$Q_{(x)}$ = Cociente
$R_{(x)}$ = Residuo

1) Dividir $21x^4+5x^3+10x^2+8x-7$ **entre** $7x^2-3x+3$

$$\begin{array}{l|l}
21x^4+5x^3+10x^2+8x-7 & 7x^2-3x+3 \\ \cline{2-2}
-21x^4+9x^3-9x^2 & 3x^2+2x+1 \\ \cline{1-1}
\quad 14x^3+x^2+8x-7 & \\
\quad -14x^3+6x^2-6x & \\ \cline{1-1}
\qquad 7x^2+2x-7 & \\
\qquad -7x^2+3x-3 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 5x-10 &
\end{array}$$

$Q(x)=3x^2+2x+1$; $R(x)=5x-10$

2) Dividir $3a^{x+5}+19a^{x+3}-10a^{x+4}-8a^{x+2}+5a^{x+1}$ **entre** a^2-3a+5

$$\begin{array}{l|l}
3a^{x+5}-10a^{x+4}+19a^{x+3}-8a^{x+2}+5a^{x+1} & a^2-3a+5 \\ \cline{2-2}
-3a^{x+5}+9a^{x+4}-15a^{x+3} & 3a^{x+3}-a^{x+2}+a^{x+1} \\ \cline{1-1}
\quad -a^{x+4}+4a^{x+3}-8a^{x+2} & \\
\quad a^{x+4}-3a^{x+3}+5a^{x+2} & \\ \cline{1-1}
\qquad a^{x+3}-3a^{x+2}+5a^{x+1} & \\
\qquad -a^{x+3}+3a^{x+2}-5a^{x+1} & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

$Q(a)=3a^{x+3}-a^{x+2}+a^{x+1}$; $R(a)=0$

2.2.7. MÉTODO DE RUFFINI

Este método, también conocido como división sintética se emplea para hallar el cociente y el residuo sin efectuar la división. Es válido solamente cuando se divide un polinomio ordenado $P(x)$ para un binomio de primer grado de la forma $ax \pm b$ ó cualquier otra expresión transformable a esta.

I CASO: $\boxed{P(x) \div (x \pm b)}$

Cuando el primer coeficiente del divisor es la unidad.

Ejemplo 1.

$(3x^5 - 2x^3 + 4x^2 - 1) \div (x+2)$

	3	0	-2	4	0	-1
-2		-6	12	-20	32	-64
	3	-6	10	-16	32	$\boxed{-65}$

; $x+2=0$
$x=-2$

$Q(x) = 3x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 16x + 32$; Residuo = -65

Ejemplo 2.

$\left(2x^4 + 3x^2 - 3x + \frac{22}{81}\right) \div \left(x - \frac{2}{3}\right)$

	2	0	3	-3	$\frac{22}{81}$
$\frac{2}{3}$		$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{70}{27}$	$-\frac{22}{81}$
	2	$\frac{4}{3}$	$\frac{35}{9}$	$-\frac{11}{27}$	$\boxed{0}$

; $x - \frac{2}{3} = 0$
$x = \frac{2}{3}$

$Q(x) = 2x^3 + \frac{4}{3}x^2 + \frac{35}{9} - \frac{11}{27}$; Residuo = 0

II CASO: $\boxed{P(x) \div (ax \pm b)}$

Cuando el coeficiente del divisor es diferente de la unidad ($ax \pm b$; $a \neq 1$). En este caso se procede en forma similar a la anterior pero se debe tener presente que el cociente resultante es un cociente falso; para obtener el cociente verdadero se divide cada uno de los coeficientes del cociente falso entre el primer coeficiente del divisor.

Ejemplo 1.

$(-4x^4 + 3x^3 - 6x^2 + x - 4) \div (-2x - 1)$

	-4	3	-6	1	-4
$-\frac{1}{2}$		2	$-\frac{5}{2}$	17	$-\frac{21}{8}$
	-4	5	$-\frac{17}{2}$	21	$\boxed{-\frac{53}{8}}$

$\div -2$

; $-2x - 1 = 0$
$x = -\frac{1}{2}$

$Q_{(x)} = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{17}{4}x - \frac{21}{8}$; Residuo $= -\frac{53}{8}$

Ejemplo2.

$(x^4y^4 - x^3y^3 - 2x^2y^2 + xy - 5) \div (-xy - 2)$, siendo "y" la variable directriz.

$$\begin{array}{c|ccccc|l}
 & x^4 & -x^3 & -2x^2 & x & -5 & ;\ -xy-2=0 \\
-\frac{2}{x} & & -2x^3 & 6x^2 & -8x & 14 & \quad y = -\frac{2}{x} \\
\hline
 & \underbrace{x^4 \quad -3x^3 \quad 4x^2 \quad -7x}_{\div -x} & & & & \boxed{9} &
\end{array}$$

$Q(y) = -x^3y^3 + 3x^2y^2 - 4xy + 7$; Residuo = 9

CAMBIO DE VARIABLE (Si el divisor es de grado mayor que uno).

Ejemplo:

$(6x^{12} - 4x^8 + 1) \div (3x^4 - 1)$

Si $x^4 = y$ tendríamos ; $(6y^3 - 4y^2 + 1) \div (3y - 1)$

$$\begin{array}{c|cccc|l}
 & 6 & -4 & 0 & 1 & ;\ 3y-1=0 \\
\frac{1}{3} & & 2 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \quad y = \frac{1}{3} \\
\hline
 & \underbrace{6 \quad -2 \quad -\frac{2}{3}}_{\div 3} & & & \boxed{\frac{7}{9}} &
\end{array}$$

$Q(x) = 2y^2 - \frac{2}{3}y - \frac{2}{9}$ Residuo $= \frac{7}{9}$

Como $y = x^4$; reemplazando tenemos: $Q(x) = 2x^8 - \frac{2}{3}x^4 - \frac{2}{9}$

2.2.8. MÉTODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

Este método sirve para encontrar el cociente y el residuo sin efectuar la división entre dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ de cualquier grado y se basa en el algoritmo de la división.

2.2.8.1. ALGORITMO DE LA DIVISIÓN: $\boxed{P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)}$

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)} \quad ; \quad \frac{P(x)}{D(x)} = \frac{D(x)Q(x) + R(x)}{D(x)} \quad ; \quad P(x) = D(x)Q(x) + R(x)$$

Para su aplicación se debe considerar lo siguiente:

1) El grado del polinomio debe ser mayor o igual al grado del divisor; $^\circ P(x) \geq ^\circ D(x)$.
2) El grado del cociente es igual a la diferencia de los grados de los polinomios anteriores; $^\circ Q(x) = ^\circ P(x) - ^\circ D(x)$
3) El grado del residuo es al menos un grado menor que el grado del divisor.
4) Se plantea el algoritmo de la división.
5) Se desarrolla el segundo miembro de la igualdad.
6) Se igualan los coeficientes de los términos de igual grado.
7) Se resuelve el sistema de ecuaciones obtenido.

Tanto el cociente como el residuo se expresarán como polinomios de coeficientes indeterminados.

Grado del polinomio	Polinomio de coeficientes determinados	Polinomio de coeficientes indeterminados
0	8	A
1	$-3x+2$	$Ax+B$
2	$\frac{2}{5}x^2-x+4$	Ax^2+Bx+C
3	x^3-5x	Ax^3+Bx^2+Cx+D
....	....	....

Ejemplo:

1) Hallar el cociente y el residuo de la división: $(2x^3-5x^2+7x+4)\div(x-3)$
Determinamos en primer lugar los grados de los polinomios involucrados:

$P(x)=(2x^3-5x^2+7x+4)$ Grado 3 , $Q(x)=Ax^2+Bx+C$ Grado 2
$D(x)=x-3$ Grado 1 , $R(x)=D$ Grado 0

Aplicando el Algoritmo de la división tenemos:

$$P(x)=D(x)Q(x)+R(x)$$
$$2x^3-5x^2+7x+4=(x-3)(Ax^2+Bx+C)+D$$
$$2x^3-5x^2+7x+4=Ax^3+Bx^2+Cx-3Ax^2-3Bx-3C+D$$
$$2x^3-5x^2+7x+4=Ax^3+(B-3A)x^2+(C-3B)x-3C+D$$

Igualando los coeficientes de los términos de igual grado tenemos:

$$\begin{array}{l|lll} x^3 & 2=A & ; & A=2 \\ x^2 & -5=B-3A & ; & B=1 \\ x & 7=C-3B & ; & C=10 \\ x^0 & 4=-3C+D & ; & D=34 \end{array}$$

Por lo tanto, el cociente y el residuo de la división serán:
$Q(x)=Ax^2+Bx-C$; $Q(x)=2x^2+x+10$ y $R(x)=D$; $R(x)=34$

2.2.9. TEOREMA DEL RESTO

Se emplea para hallar directamente el residuo de la división de un polinomio entero en "x" entre un binomio de la forma $ax\pm b$.

El residuo de la división de un polinomio $P(x)$ entre un binomio de la forma $ax+b$, es igual al valor numérico que toma el polinomio cuando se reemplaza x por $-\frac{b}{a}$, que resulta de igualar a cero el divisor.

$$ax+b=0 \quad , \quad x=-\frac{b}{a} \quad ; \quad \boxed{\text{Residuo}=P\left(-\frac{b}{a}\right)}$$

Ejemplo:

1) Hallar el residuo de la siguiente división: $(x^4-5x^2+12)\div(x-2)$
$P(x)=x^4-5x^2+12$
$D(x)=x-2$; $x-2=0$; $x=2$
Residuo $=P(2)=2^4-5(2)^2+12=16-20+12=8$, Residuo $=P(2)$, Residuo $=8$

2.2.10. TEOREMA DEL FACTOR

Si el valor numérico que toma el polinomio es cero (0), se considera que el divisor es un factor del polinomio, es decir:

Si $P\left(-\frac{b}{a}\right)=0$; entonces, residuo igual a cero, por lo tanto se puede concluir que el divisor es un factor del polinomio y planteando el algoritmo de la división se tendría: $P(x)=(ax+b)\cdot Q(x)$

Ejemplo:

1) Determine el valor de k para que $x+2$ sea un factor de $x^3-2x^2-10x+k$
   Para que $x+2$ sea factor del polinomio debe cumplir que $P(-2)=0$
   $P(x)=x^3-2x^2-10x+k$, $P(-2)=(-2)^3-2(-2)^2-10(-2)+k=0$
   $-8-8+20+k=0$; $4+k=0$; $k=-4$

2.2.11. DIVISIBILIDAD DE $x^n \pm a^n$ ENTRE $x \pm a$

Analizaremos a continuación qué condiciones deben darse para que $P(x)=x^n \pm a^n$ sea divisible por $x \pm a$. Por el Teorema del Resto sabemos que $P(x)$ es divisible por $x \pm a$ si $P(\mp a)=0$.

1) x^n-a^n siempre es divisible por $x-a$. En efecto, cualquiera que sea n, $P(a)=a^n-a^n=0$
   El cociente lo podemos calcular por una simple división sintética:

	1	0	$0 \ldots\ldots 0$	0	0	$-a^n$
a		a	$a^2 \ldots\ldots a^{n-3}$	a^{n-2}	a^{n-1}	a^n
	1	a	$a^2 \ldots\ldots a^{n-3}$	a^{n-2}	a^{n-1}	0

   Por tanto:

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\ldots\ldots\ldots+a^{n-3}x^2+a^{n-2}x+a^{n-1}$$

2) x^n+a^n nunca es divisible por $x-a$. En efecto cualquiera que sea n, $P(a)=a^n+a^n=2a^n\neq 0$.

3) x^n-a^n es divisible por $x+a$ si n es par. En efecto, si n es par tenemos:
   $P(-a)=(-a)^n-a^n=a^n-a^n=0$.

   El cociente es:

$$\frac{x^n-a^n}{x+a}=x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\ldots\ldots\ldots-a^{n-3}x^2+a^{n-2}x-a^{n-1}$$

   En cambio si n es impar:
   $P(-a)=(-a)^n-a^n=-a^n-a^n=-2a^n\neq 0$

4) x^n+a^n es divisible por $x+a$ si n es impar. En efecto, si n es impar:
   $P(-a)=(-a)^n+a^n=-a^n+a^n=0$.

   El cociente es:

$$\frac{x^n+a^n}{x+a}=x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\ldots\ldots\ldots+a^{n-3}x^2+a^{n-2}x+a^{n-1}$$

   En cambio si n es par:
   $P(-a)=(-a)^n+a^n=a^n+a^n=2a^n\neq 0$

2.2.12. COCIENTES NOTABLES

Son productos notables expresados como cocientes cuyo resultado se puede determinar directamente, los más comunes son:

1)	$\dfrac{a^2-b^2}{a+b}=a-b$	;	$\dfrac{a^2-b^2}{a-b}=a+b$
2)	$\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a+b}=a+b$	;	$\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a-b}=a-b$
3)	$\dfrac{a^3+b^3}{a+b}=a^2-ab+b^2$	;	$\dfrac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}=a+b$
4)	$\dfrac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2$	;	$\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}=a-b$
5)	$\dfrac{a^4-b^4}{a-b}=a^3+a^2b+ab^2+b^3$	;	$\dfrac{a^5-b^5}{a-b}=a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4$
6)	$\dfrac{a^4-b^4}{a+b}=a^3-a^2b+ab^2-b^3$	;	$\dfrac{a^5+b^5}{a+b}=a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4$

OBSERVACIÓN

1) Si el divisor es de la forma $x-a$, todos los signos del cociente son positivos.
2) Si el divisor es de la forma $x+a$, los signos del cociente son alternados $+-+.....-+-+$.

No son productos notables los siguientes ejemplos:

$\dfrac{a^4+b^4}{a+b}$	No es divisible	;	$\dfrac{a^4+b^4}{a-b}$ No es divisible
$\dfrac{x^5-y^5}{x+y}$	No es divisible	;	$\dfrac{x^5+y^5}{x-y}$ No es divisible

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

Efectuar los siguientes cocientes:

1) $\dfrac{a^{2x+2}-100}{a^{x+1}-10}$ 2) $\dfrac{1-9x^{2m+4}}{1+3x^{m+2}}$ 3) $\dfrac{1-(a+n)^2}{1-(a+n)}$ 4) $\dfrac{125-343x^{15}}{5-7x^5}$

5) $\dfrac{n^6+1}{n^2+1}$ 6) $\dfrac{x^7+y^7}{x+y}$ 7) $\dfrac{m^{16}-n^{16}}{m^4-n^4}$ 8) $\dfrac{4p^2-20pq+25q^2}{2p-5q}$

9) $\dfrac{9x^2+24xy+16y^2}{3x+4y}$ 10) $\dfrac{(x-y)^3+z^3}{(x-y)+z}$ 11) $\dfrac{(a+b)^3-(c+d)^3}{(a+b)^2+(a+b)(c+d)+(c+d)^2}$

12) $\dfrac{x^6-y^6}{x^2-y^2}$ 13) $\dfrac{m^{21}+n^{21}}{m^3+n^3}$ 14) $\dfrac{x^5+32}{x+2}$

15) Efectúa las siguientes divisiones:

a) $\left(3a^2-10ab+3b^2\right)\div\left(3a-b\right)$ b) $\left(a^4-a^3b-ab^3+b^4\right)\div\left(a^2+ab+b^2\right)$

c) $\left(\dfrac{3}{5}x^4+\dfrac{1}{10}x^3y-y^4+\dfrac{7}{6}xy^3-\dfrac{17}{60}x^2y^2\right)\div\left(\dfrac{3}{2}x^2+2y^2-xy\right)$

16) Aplicando la regla de Ruffini, hallar el cociente y el residuo.

a) $\left(a^3-2a^2+3a-5\right)\div\left(a+3\right)$

b) $\left(-2x^5+x^3-3x^2+1\right)\div\left(x-\frac{1}{2}\right)$

c) $\left(x^4y^4-x^3y^3-2x^2y^2+xy-5\right)\div\left(-xy-2\right)$

d) $\left(2x^5+3\sqrt{3}x^4+7x^3+2\sqrt{3}x^2-3x+3\sqrt{3}\right)\div\left(x+\sqrt{3}\right)$

e) $\left(3x^{25}-6x^{20}+2x^{15}-7x^5-2\right)\div\left(x^5-2\right)$

17) Determinar el valor de "m" y "n" de modo que x^4-3x^3+mx+n sea divisible por x^2-2x+4

18) Determinar en cada caso el valor que debe tomar m:

a) Para que $P(x)=x^3+mx^2+(m-3)x+10$ sea divisible por $x-2$

b) Para que $P(x)=mx^3-7mx+2$ admita la raíz -3

c) Para que al dividir $P(x)=(m-3)x^3+3x^2+mx+m+2$ entre $x+1$ el residuo sea 10 unidades mayor que si se divide entre $x+2$

d) Determinar "q" para que $P(x)=x^{n+1}+qx^n+3x^{n-1}+7$ sea divisible por $x-1$.

19) Determinar el valor de "m" y "n" si la división $\left(x^4-3ax^3+a^2x^2+amx+a^4n\right)\div\left(x^2-ax+a^2\right)$ deja como resto $7ax+8a^4$

20) Si el polinomio: $P(x)=(5x-1)^{2n-1}(2x+5)^n+\left[(3x+1)(x+5)^n-\left(x^2+n\right)(x-2)\right]$ tiene como término independiente -36, hallar el valor de n

Respuestas:

15) a) $Q(a)=a-3b$, $Residuo=0$ b) $Q(a)=a^2-2ab+b^2$, $Residuo=0$ c) $Q(x)=\frac{2}{5}x^2+\frac{1}{3}xy-\frac{1}{2}y^2$, $Residuo=0$

16) a) $Q(a)=a^2-5a+18$, $Residuo=-59$ b) $Q(x)=-2x^4-x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{11}{4}x-\frac{11}{8}$, $Residuo=\frac{5}{16}$

c) $Q(x)=-x^3y^3+3x^2y^2-4xy+7$, $Residuo=9$ d) $Q(x)=2x^4+\sqrt{3}x^3+4x^2-2\sqrt{3}x+3$, $Residuo=0$

e) $Q(x)=3x^{20}+2x^{10}+4x^5+1$, $Residuo=0$

17) $m=8$; $n=-24$

18) a) -2 b) $\frac{1}{3}$ c) 5 d) -11

19) $m=7$; $n=6$

20) $n=-18$

EJERCICIOS DE REFUERZO

1) Efectuar las siguientes divisiones:

a) $\left(\frac{3}{4}x^3y-\frac{2}{3}x^2y^2+\frac{5}{6}xy^3-\frac{1}{2}y^4\right)\div\frac{5}{6}y$

b) $\left(11a^3-3a^5-46a^2+32\right)\div(8-3a^2-6a)$

c) $\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{35}{36}x^2y+\frac{2}{3}xy^2-\frac{3}{8}y^3\right)\div\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{2}y\right)$

d) $\left(3x^{5n-3}-23x^{5n-2}+5x^{5n-1}+46x^{5n}-30x^{5n+1}\right)\div\left(x^{3n-3}+6x^{3n-1}-8x^{3n-2}\right)$

2) Determinar en cada caso el valor que debe tomar m:

a) Para que al dividir $P(x)=3x^4+2mx^3+(m+7)x^2+3mx+m+3$ entre $x-1$ el residuo sea 26 unidades menor que si se divide entre $x-2$

b) Para que al dividir $P(x)=3x^2-5x-4$ entre $x-m$ el residuo sea -2

c) Determinar p y q para que $P(x)=3x^3+px^2+qx-2$ sea divisible por $x+2$ y por $x-1$.

3) Determinar el cociente y el residuo aplicando el método de Ruffini.

a) $(6x^4+5x^3-3x+2)\div(x+2)$

b) $\left(3x^5+4x^4-2x^3-\frac{1}{3}x^2+2x-\frac{5}{3}\right)\div\left(x-\frac{2}{3}\right)$

c) $(9x^4+6x^3+2x^2+x-3)\div(3x+1)$

d) $(4x^{25}+8x^{20}-x^{15}-2x^{10}+x^5-1)\div(2x^5-1)$

e) $\left[4x(x^2-3)^2-2(x^2+3x-2)(x^2+2)+5\right]\div(x+2)$

4) Si el polinomio $P(x)=x^4+2x^3-7x^2+mx+n$ es divisible para $Q(x)=x^2-3x+5$; determinar el valor de $E=m+n$

5) Si el residuo de la división $6x^4-x^3y-6x^2y^2+5xy^3-3y^4$ entre $2x^2+xy-2y^2$ es -16. Hallar " y "

6) Determinar " m " y " n " de modo que: x^4-3x^3+mx+n sea divisible por x^2-2x+4

7) Calcular el valor de " k " para que el polinomio x^3-kx^2+x+6 sea divisible por $x+2$

8) Calcular el residuo de dividir $x^{35}-2x^7+1$ entre $x-1$

9) Determinar los coeficientes a y b para que el polinomio: x^3+6x^2+ax+b sea divisible por x^2-4

10) Hallar el residuo en la división: $\dfrac{6x^{40}-31x^{30}+47x^{20}-56x^{10}+57}{2x^{10}-7}$

11) Hallar el valor de r y t para que la siguiente división sea exacta: $\dfrac{\left[x^r(x-a)^{3t}-256(3a-x)^{2t}\right]}{(x-2a)}$

12) Si $4x^4-2x^3+x-1$, se divide por un $D(x)$ se obtiene un $Q(x)=x^2-3x+2$ y un $R(x)=47x-45$ Hallar $D(x)$

13) Calcular " p " y " q "de modo que la siguiente división sea exacta $\dfrac{px^5+qx^4+19x^3+6x^2+18x+12}{x^2+x+2}$

Respuestas:

1) a) $\frac{9}{10}x^3-\frac{4}{5}x^2y+xy^2-\frac{3}{5}y^3$ b) $4+3a-2a^2+a^3$ c) $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{1}{4}y^2$

d) $3x^{2n}+x^{2x+1}-5x^{2n+2}$

2) a) -2 b) $2,-\frac{1}{3}$ c) $p=4$; $q=-5$

3) a) $Q(x)=6x^3-7x^2+14x-31$; $R=64$ b) $Q(x)=3x^4+6x^3+2x^2+x+\frac{8}{3}$; $R=\frac{1}{9}$

c) $Q(x)=3x^3+x^2+\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}$; $R=-\frac{29}{9}$ d) $Q(x)=2x^{20}+5x^{15}+2x^{10}+\frac{1}{2}$; $R=-\frac{1}{2}$

e) $Q(x)=4x^4-10x^3-10x^2+20x-16$; $R=45$

4) $E=31$ 5) $y=2$ 6) $m=8$; $n=-24$ 7) -1 8) 0 9) $a=-4$; $b=-24$

10) 8 11) $r=8$; $t=-8$ 12) $D(x)=4x^2+10x+22$ 13) $p=8$; $q=5$

2.3. DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL

Descomponer un polinomio en factores, es ponerlo bajo la forma de un producto de dos o más factores.

2.3.1. FACTORIZACIÓN DE BINOMIOS

DIFERENCIA DE CUADRADOS: $\boxed{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}$

Se extrae la raíz cuadrada de cada término y se forman dos factores uno con la suma de las raíces halladas y el otro con la diferencia de dichas raíces.

Ejemplos:

1) $4x^2-\frac{9}{16}y^2=\left(2x+\frac{3}{4}y\right)\left(2x-\frac{3}{4}y\right)$

2) $x^{4m+2}-y^{8m-4}=\left(x^{2m+1}+y^{4m-2}\right)\left(x^{2m+1}-y^{4m-2}\right)$

3) $a^2-0{,}0001\,b^2=(a+0{,}01\,b)(a-0.01\,b)$

4) $x^2-5=\left(x+\sqrt{5}\right)\left(x-\sqrt{5}\right)$

SUMA DE CUADRADOS PERFECTOS

Calculamos el doble producto de las raíces, sumamos y restamos este valor para completar un trinomio cuadrado perfecto. Agrupando términos se tiene una diferencia de cuadrados.

Ejemplos:

1) $a^4+4b^4=\left(a^4+4a^2b^2+4b^4\right)-4a^2b^2$

$a^2 \quad 2b^2$

$2\left(a^2\right)\left(2b^2\right)=4a^2b^2$

$=\left(a^2+2b^2\right)^2-4a^2b^2$

$=\left(a^2+2b^2+2ab\right)\left(a^2+2b^2-2ab\right)$

2) $81a^4+64b^4=\left(81a^4+144a^2b^2+64b^4\right)-144a^2b^2$

$9a^2 \quad 8b^2$

$2\left(9a^2\right)\left(8b^2\right)=144a^2b^2$

$=\left(9a^2+8b^2\right)^2-144a^2b^2$

$=\left(9a^2+8b^2+12ab\right)\left(9a^2+8b^2-12ab\right)$

$=\left(9a^2+12ab+8b^2\right)\left(9a^2-12ab+8b^2\right)$

DIFERENCIA DE CUBOS: $\boxed{a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)}$

La diferencia de cubos es un producto igual a la diferencia de las bases, multiplicada por el trinomio que consta del cuadrado de la primera base más el producto de las bases y más el cuadrado de la segunda base.

Ejemplos:

1) $x^3 - y^6 = x^3 - \left(y^2\right)^3$
$= \left(x - y^2\right)\left(x^2 + xy^2 + y^4\right)$

2) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 x^9 - \frac{1}{8}y^6 = \left[\frac{2}{3}x^3\right]^3 - \left(\frac{1}{2}y^2\right)^3$
$= \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}y^2\right)\left(\frac{4}{9}x^6 + \frac{1}{3}x^3y^2 + \frac{1}{4}y^4\right)$

SUMA DE CUBOS: $\boxed{a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)}$

La sume de cubos es un producto igual a la suma de las bases, multiplicada por el trinomio que consta del cuadrado de la primera base menos el producto de las bases y más el cuadrado de la segunda base.

Ejemplos:

1) $8x^3 + 27y^3 = (2x)^3 + (3y)^3$
$= (2x + 3y)\left(4x^2 - 6xy + 9y^2\right)$

2) $\frac{1}{64}a^9 + b^9 = \left(\frac{1}{4}a^3\right)^3 + \left(b^3\right)^3$
$= \left(\frac{1}{4}a^3 + b^3\right)\left(\frac{1}{16}a^6 - \frac{1}{4}a^3b^3 + b^6\right)$

BINOMIOS DE LA FORMA: $\boxed{x^n \pm a^n}$

Para este tipo de binomios, aplicamos los siguientes productos notables:

a)	$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots\ldots\ldots + b^{n-1}\right)$	;	$\forall n \in Z^+$
b)	$a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots\ldots\ldots + b^{n-1}\right)$	;	$\forall n \in Z^+$ impares

Ejemplos:

1) $x^7 - y^7 = (x-y)\left(x^6 + x^5y + x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 + xy^5 + y^6\right)$

2) $32x^5 + y^5 = (2x+y)\left(16x^4 - 8x^3y + 4x^2y^2 - 2xy^3 + y^4\right)$

3) $x^{10} - a^5 = \left(x^2\right)^5 - a^5$
$= \left(x^2 - a\right)\left[\left(x^2\right)^4 + \left(x^2\right)^3 a + \left(x^2\right)^2 a^2 + \left(x^2\right)a^3 + a^4\right]$
$= \left(x^2 - a\right)\left(x^8 + ax^6 + a^2x^4 + a^3x^2 + a^4\right)$

2.3.2. FACTORIZACIÓN DE TRINOMIOS

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO: $\boxed{a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2}$

Cuando en un trinomio después de haberlo ordenado el primer y tercer término son cuadrados y el segundo término es el doble producto de las bases de dichos términos, esta clase de términos se llaman trinomios cuadrados perfectos.

Ejemplos:

1) $4a^2 - 12ac + 9c^2 = (2a - 3c)^2$

$2\,(2a)(3c) = 12ac$

2) $\frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{3}xy + 4y^2 = \left(\frac{2}{3}x - 2y\right)^2$

$2\left(\frac{2}{3}x\right)(2y) = \frac{8}{3}xy$

TRINOMIOS CUADRADOS INCOMPLETOS

En este caso de trinomios se extrae las raíces de los extremos y se calcula el doble producto de los mismos, sí éste valor no es igual al término medio, se suma y se resta una misma cantidad para obtener el término medio.

Agrupando términos adecuadamente se obtiene una diferencia de cuadrados.

Ejemplos:

1) $9x^4 + 26x^2 + 25 = 9x^4 + 26x^2 + 25 + 4x^2 - 4x^2$

$= (9x^4 + 30x^2 + 25) - 4x^2$

$= (3x^2 + 5)^2 - 4x^2$

$= [(3x^2 + 5) + 2x][(3x^2 + 5) - 2x]$

$= (3x^2 + 2x + 5)(3x^2 - 2x + 5)$

$2(3x^2)(5) = 30x^2$

2) $\frac{1}{9}a^8 - 3a^4b^4 + 9b^8 = \frac{1}{9}a^8 - 3a^4b^4 + 9b^8 + a^4b^4 - a^4b^4$

$= \left(\frac{1}{9}a^8 - 2a^4b^4 + 9b^8\right) - a^4b^4$

$= \left(\frac{1}{3}a^4 - 3b^4\right)^2 - a^4b^4$

$= \left[\left(\frac{1}{3}a^4 - 3b^4\right) + a^2b^2\right]\left[\left(\frac{1}{3}a^4 - 3b^4\right) - a^2b^2\right]$

$= \left(\frac{1}{3}a^4 + a^2b^2 - 3b^4\right)\left(\frac{1}{3}a^4 - a^2b^2 - 3b^4\right)$

$2\left(\frac{1}{3}a^4\right)(3b^4) = 2a^4b^4$

TRINOMIO DE LA FORMA: $\boxed{x^2+bx+c=(x+p)(x+q)}$

Un trinomio de esta forma se descompone en un producto de dos factores binomios $(x+p)(x+q)$, en los cuales el primer término "x" es la raíz cuadrada del primer término del trinomio (ya ordenado) y los segundos términos "p" y "q" son aquellos cuya suma sea igual al coeficiente del segundo término y el producto de ellos, o sea, "pq" sea el último término independiente "c".

En resumen: $x^2+bx+c=(x+p)(x+q)$, siendo: $p+q=b$ y $pq=c$

Ejemplos:

1) $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$; 2) $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$
3) $x^2+8x+12=(x+6)(x+2)$; 4) $x^2-3yx-4y^2=(x-4y)(x+y)$
5) $a^6b^2+2a^3bc-15c^2=(a^3b+5c)(a^3b-3c)$

TRINOMIO DE LA FORMA: $\boxed{ax^2+bx+c=\dfrac{(ax)^2+b(ax)+ac}{a} \quad , \quad a\neq 1}$

Cuando el coeficiente del primer término de un trinomio no es la unidad, para factorizar dichos trinomio se emplea el siguiente desarrollo.

Ejemplo: Factorizar: $2x^2+7x+6$ Para factorizar se hará como sigue:

a) Se multiplica y divide todo el trinomio por el coeficiente del primer término indicando multiplicación en el segundo término, para conservar su coeficiente, o sea:

$$2x^2+7x+6=\frac{4x^2+7(2x)+12}{2}$$

b) Se extrae la raíz cuadrada del primer término de esta última expresión, lo cual nos servirá como primer término de los dos factores binomios. Luego se buscan dos números tales que multiplicados den el tercer término y cuya suma sea el coeficiente no multiplicado del segundo miembro, o sea:

$$\frac{4x^2+7(2x)+12}{2}=\frac{(2x+3)(2x+4)}{2}$$

c) Se extrae factor común en uno o en los dos factores binomios, según el caso, para la simplificación, o sea:

$$\frac{(2x+3)(2x+4)}{2}=\frac{2(2x+3)(x+2)}{2}=(2x+3)(x+2)$$

Ejemplos:

1) $$6x^2-7x-3=\frac{(6x)^2-7(6x)-18}{6}$$
$$=\frac{(6x-9)(6x+2)}{6}=\frac{3(2x-3)2(3x+1)}{6}=(2x-3)(3x+1)$$

2) $$18a^2+17ay-15y^2=\frac{(18a)^2+17y(18a)-270y^2}{18}$$
$$=\frac{(18a+27y)(18a-10y)}{18}=\frac{9(2a+3y)2(9a-5y)}{18}$$
$$=(2a+3y)(9a-5y)$$

MÉTODO DEL ASPA SIMPLE

Se utiliza para factorizar trinomios de la forma: $\boxed{ax^{2n}+bx^{n}+c \quad ó \quad ax^{2n}+bx^{n}y^{n}+cy^{2n}}$

El método consiste en descomponer los términos extremos en factores y que la suma del producto en aspa compruebe el término central. Los factores se toman en forma horizontal para el resultado. En caso que la suma sea diferente al segundo término del trinomio, se ensaya con otros factores.

Ejemplos:

Factorar los siguientes trinomios:

1) $3x^2+7x+2 = (3x+1)(x+2)$

$$\begin{array}{lcl} 3x & 1 = & x \\ x & 2 = & 6x \\ \hline & & 7x \end{array}$$

2) $x^2-7xy+12y^2 = (x-4y)(x-3y)$

$$\begin{array}{lcl} x & -4y = & -4xy \\ x & -3y = & -3xy \\ \hline & & -7xy \end{array}$$

3) $36x^{2n}+9x^{n}-10 = (12x^{n}-5)(3x^{n}+2)$

$$\begin{array}{lcl} 12x^{n} & -5 = & -15x^{n} \\ 3x^{n} & 2 = & 24x^{n} \\ \hline & & 9x^{n} \end{array}$$

2.3.3. FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

MÉTODOS:

FACTOR COMÚN

Llámese **factor común** a la expresión que está contenida en cada uno de los términos del polinomio dado. Generalmente el factor común es el máximo común divisor, pero no siempre.

Ejemplos:

1) $4x^2z^3-6xz^2-6xyz^4+8x^3z^2 = 2xz^2(2xz)-2xz^2(3)-2xz^2(3yz^2)+2xz^2(4x^2)$
$= 2xz^2(2xz-3-3yz^2+4x)$

2) $2x^{m+2}y^{n-3}-8x^{m+3}y^{n-1}+4x^{m}y^{-n} = 2x^{m}x^2y^{n}y^{-3}-4\times 2x^{m}x^3y^{n}y^{-1}+2\times 2x^{m}y^{-n}$
$= 2x^{m}y^{n}(x^2y^{-3}-4x^3y^{-1}+2y^{-2n})$

AGRUPACIÓN

El proceso para factorizar por **agrupación de términos** consiste en agrupar convenientemente los términos de un polinomio, a fin de obtener, en cada grupo formado, un factor que sea común a todos los términos, luego se procede como en el caso anterior.

Ejemplos:

1) $(a+b)x+ax^2-ay+bx^2-by = (a+b)x+(a+b)x^2-(a+b)y = (a+b)(x+x^2-y)$

2) $a^{n+2}-a^2b^{n}-a^{n+1}b+ab^{n+1}+3a^{n}b^2-3b^{n+2} = a^{n}a^2-a^2b^{n}-a^{n}ab+ab^{n}b+3a^{n}b^2-3b^{n}b^2$
$= a^{n}(a^2-ab+3b^2)-b^{n}(a^2-ab+3b^2) = (a^2-ab+3b^2)(a^{n}-b^{n})$

3) $25x^2+4y^2-12yz+20xy+9z^2-30xz$
$= (25x^2+20xy+4y^2)-(30xz+12yz)+9z^2$
$= (5x+2y)^2-6z(5x+2y)+9z^2 = [(5x+2y)-3z]^2$

POR EVALUACIÓN

Sirve solo para encontrar factores de primer grado y se fundamenta en el método de la división utilizando la regla de Ruffini.

Se debe tomar en cuenta además las siguientes condiciones.

a) Si la suma de los coeficientes es cero, necesariamente $x-1$ es factor del polinomio.
b) Un posible factor puede que lo sea otra vez.

Para aplicar este método es necesario que el polinomio tenga un término independiente.

Se presentan dos posibilidades:

a) Cuando el primer coeficiente es la unidad.
Obtenemos los divisores del término independiente, y con ello los posibles factores lineales.

Ejemplos:

1) x^3-3x+2 $\qquad P.F=\pm 1,2$

Además la suma de los coeficientes es cero por lo tanto $x-1$ es factor

	1	0	-3	2		
1		1	1	-2		
	1	1	-2	$\boxed{0}$	$\Rightarrow (x-1)$	**es factor**
1		1	2			
	1	2	$\boxed{0}$		$\Rightarrow (x-1)$	**es factor**
-2		-2				
	1	$\boxed{0}$			$\Rightarrow (x+2)$	**es factor**

$$x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$$

2) $x^4+x^3-5x^2+x-6$ $\qquad P.F=\pm 1,2,3,6$

	1	1	-5	1	-6		
2		2	6	2	6		
	1	3	1	3	$\boxed{0}$	$\Rightarrow (x-2)$	es factor
-3		-3	0	-3			
	1	0	1	$\boxed{0}$		$\Rightarrow (x+3)$	es factor

(x^2+1) es el otro factor

$$x^4+x^3-5x^2+x-6=(x-2)(x+3)(x^2+1)$$

b) Cuando el primer coeficiente es diferente de la unidad.

En éste caso los posibles factores se obtienen dividiendo los divisores del término independiente para los divisores del coeficiente del primer término.

Ejemplo:

Factorar el siguiente polinomio:

1) $6x^3+23x^2+16x+3$ $\qquad P.F=\pm\dfrac{1,3}{1,2,3,6}=1,3,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{6},\dfrac{3}{2}$

	6	23	16	3		
-3		-18	-15	-3		
$-\frac{1}{2}$	6	5	1	$\boxed{0}$	$\Rightarrow(x+3)$	es factor
		-3	-1			
$-\frac{1}{3}$	6	2	$\boxed{0}$		$\Rightarrow\left(x+\frac{1}{2}\right)$	es factor
		-2				
	6	$\boxed{0}$			$\Rightarrow\left(x+\frac{1}{3}\right)$	es factor

$$6x^3+23x^2+16x+3=6(x+3)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$$
$$=6(x+3)\left(\frac{2x+1}{2}\right)\left(\frac{3x+1}{3}\right)=(x+3)(2x+1)(3x+1)$$

CRITERIO DE ARTIFICIOS DE CÁLCULO

Se utiliza para descomponer una expresión en una diferencia de cuadrados o en suma o diferencia de cubos aumentando y restando una cantidad para obtener un producto notable.

En otros casos consiste en identificar expresiones iguales directa o indirectamente mediante ciertas transformaciones, para luego hacer un cambio de variable adecuado que permita transformar una expresión aparentemente complicada en otra expresión sencilla.

Ejemplos:

Factorar los siguientes polinomios:

1) x^4+x^2+1 Sumando y restando x^2 tenemos:
$x^4+x^2+1=(x^4+2x^2+1)-x^2=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+1+x)(x^2+1-x)$

2) $4x^6-29x^4+31x^2-1$
Descomponiendo: $-29x^4=-20x^4-9x^4$, y $31x^2=25x^2+6x^2$, agrupando tenemos:
$4x^6-29x^4+31x^2-1=(4x^6-20x^4+25x^2)-(9x^4-6x^2+1)$
$=(2x^3-5x)^2-(3x-1)^2=(2x^3-2x-1)(2x^3-8x+1)$

3) $(x^2+7x+5)^2+3x^2+21x+5$ Agrupando adecuadamente tenemos:
$(x^2+7x+5)^2+3(x^2+7x)+5$, haciendo un cambio de variable $y=(x^2+7x)$ tenemos:
$(y+5)^2+3y+5=y^2+13y+30=(y+10)(y+3)$, reemplazando el valor de y tenemos:
$=(x^2+7x+10)(x^2+7x+3)$
$=(x+5)(x+2)(x^2+7x+3)$

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

FACTORIZACIÓN DE BINOMIOS

1) $4a^2x^2-25x^2$ 2) $x^{5m}-9x^{3m}y^{4n}$ 3) $Cos^4\theta-4Sen^2\theta$ 4) $x^{12}+y^6$

5) $(x+y)^9(x-y)^5-(x^2-y^2)^7$ 6) $x^6y^9+z^{12}$

7) $(a^2-b^2)(x-y)-(x-y)^2(a-b)$ 8) $8m^3-27n^6$

Respuestas:

1) $x^2(2a+5)(2a-5)$ 2) $x^{3m}(x^m+3y^{2n})(x^m-3y^{2n})$ 3) $(Cos^2\theta+2Sen\theta)(Cos^2\theta-2Sen\theta)$

4) $(x^4+y^2)(x^8-x^4y^2+y^4)$ 5) $4xy(x+y)^7(x-y)^5$ 6) $(x^2y^3+z^4)(x^4y^6-x^2y^3z^4+z^8)$

7) $(a-b)(x-y)(a+b-x+y)$ 8) $(2m-3n^2)(4m^2+6mn^2+9n^4)$

FACTORIZACIÓN DE TRINOMIO

1) $x^2+(a-b)x-ab$ 2) $m^3+(m+n)mx+nx^2$ 3) $30x^2+13x-10$

4) $x^{10}+x^5-20$ 5) $6m^2-13am-15a^2$ 6) $Sen^2x+2Sen\,xCos\,y-3Cos^2y$

7) $ln^2x-lnx\,lny-2ln^2y$ 8) $2Sen^2x+3Sen\,x+1$ 9) $6Tan^2\theta-7Cot\theta Tan\theta-3Cot^2\theta$

10) $15a^2+8x^2-26ax$ 11) $16-8(x-z)+(x-z)^2$ 12) x^5+x+1

13) $6a^2+5ab-6b^2$ 14) $8a^{5m}-13a^{3m}-6a^m$ 15) $8x^4y^4+24x^3y^4-32x^2y^4$

16) $ac(a+c)+ab(a-b)-bc(b+c)$ 17) $4x^4+3x^2y^2+y^4$

18) $4-4(3^n)+3^{2n}$ 19) $x^{4n}+16+4x^{2n}$ 20) $9a^3-12a^2b+4ab^2$

21) $15+14Sec\theta-8Sec^2\theta$ 22) x^3-3x+2

Respuestas:

1) $(x+a)(x-b)$ 2) $(m+x)(m^2+nx)$ 3) $(6x+5)(5x-2)$

4) $(x^5-4)(x^5+5)$ 5) $-(5a+6m)(3a-m)$ 6) $(Sen\,x+3Cos\,y)(Sen\,x-Cos\,y)$

7) $(lnx+lny)(lnx-2lny)$ 8) $(Senh\,x+1)(2Senh\,x+1)$

9) $(2Tan\theta-3Cot\theta)(3Tan\theta+Cot\theta)$ 10) $(2x-5a)(4x-3a)$

11) $(4-x+z)^2$ 12) $(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$ 13) $(2a+3b)(3a-2b)$

14) $a^m(a^{2m}-2)(8a^{2m}+3)$ 15) $8x^2y^4(x+4)(x-1)$ 16) $(a-b)(a+c)(b+c)$

17) $(2x^2+y^2-xy)(2x^2+y^2+xy)$ 18) $(2-3^n)^2$ 19) $(x^{2n}+2x^n+4)(x^{2n}-2x^n+4)$

20) $a(3a-2b)^2$ 21) $(4Sec\theta+3)(5-2Sec\theta)$ 22) $(x-1)^2(x+2)$

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

1) x^3+2x^2-4x-8 2) $25-x^2-16y^2+8xy$ 3) $6ax-3x-2a+1$

4) $x^4-3x^3+4x^2-6x+4$ 5) $x^2+xy+ax+ay$ 6) $x^5-4x^3+x^2-4$

7) $25x^4+12x^3+10a^2x^2-9x^6+a^4-4$ 8) x^3-4x^2+x+6

9) $x^2-6xy+9y^2-8x+24y+15$ 10) $4x^2y^2+4y^4-x^8-x^4-1$

11) $m^2-b^2-2mn+n^2$ 12) $x^2-2xy+y^2+6x-6y+8$ 13) $2x^5-x^4-10x^3+5x^2+8x-4$

14) $x^4+2x^3-3x^2-4x+4$ 15) $a^4+a^3-a^2-a$ 16) $x^4+2x^3-7x^2-8x+12$

17) $a^4 - a^2 - 9 + b^4 - 2a^2b^2 + 6a$

18) $9a^2 - 6ab + b^2 - 21x^2 + 12ax - 4bx$

19) $2x^4 + 2x^3 + 11x^2 + x + 5$

20) $(x-2)(x-1)(x+2)(x+3)+3$

21) $12x^6 + 16x^5 - 7x^4 + 12x^3 - 15x^2 - 4x + 4$

Respuestas:

1) $(x-2)(x+2)^2$ 2) $-(4y-x+5)(4y-x-5)$ 3) $(2a-1)(3x-1)$

4) $(x-1)(x-2)(x^2+2)$ 5) $(x+a)(x+y)$ 6) $(x-2)(x+2)(x+1)(x^2-x+1)$

7) $(5x^2+a^2+3x^3-2)(5x^2+a^2-3x^3+2)$ 8) $(x+1)(x-2)(x-3)$

9) $(x-3y-5)(x-3y-3)$ 10) $(x^2+2y^2+x^4+1)(x^2+2y^2-x^4-1)$

11) $(m-n+b)(m-n-b)$ 12) $(x-y+4)(x-y+2)$ 13) $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(2x-1)$

14) $(x-1)^2(x+2)^2$ 15) $a(a-1)(a+1)^2$ 16) $(x-1)(x+2)(x-2)(x+3)$

17) $(a^2-b^2+a-3)(a^2-b^2-a+3)$ 18) $(3a-b+7x)(3a-b-3x)$

19) $(x^2+x+5)(2x^2+1)$ 20) $(x^2+x-5)(x^2+x-3)$ 21) $(x+2)(2x-1)(2x+1)(3x-2)(x^2+1)$

EJERCICIOS DE REFUERZO

Si $2a = p+q+r$, demostrar que: $4(a-q)(a-r)+(q-r)^2 = p^2$

Descomponer en factores los siguientes polinomios:

1) $3a^5 - 12a^3b^4$ 2) $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2 + 2c^4\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+c^8$ 3) $2a^nb^n + a^{2n} + b^{2n}$

4) $y^{2n+4} + 2y^{n+2} - 15$ 5) $x^{2n} - (a+b)x^n + ab$ 6) $Log^2 m - 3\,Log\,m + 2$

7) $Sen^2\theta - 2\,Sen\theta - 15$ 8) $6\,Tan^2\theta - 7\,Tan\theta - 3$ 9) $Sen^2\theta + Sen\theta\,Cos\theta - 6\,Cos^2\theta$

10) $x^8 - 256$ 11) $x^{5m} - 9x^{3m}y^{4m}$ 12) $4^{2m} - 7\times 4^m + 12$

13) $2a^2y^5 + aby^5 - aby^3 - 2a^2y^3$ 14) $25x^2 + 4y^2 - 12yz + 20xy + 9z^2 - 30xz$

15) $a^8 + b^8 - 7a^4b^4$ 16) $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$

17) $x^2 + x - y^2 + y - z^2 - z + 2yz$ 18) $ax^4 + 3ax^3 + bx^3 + 3bx^2 - ax^2 - 3ax - bx - 3b$

19) $x^3 - 27 - 3ax^2 - a^3 + 3a^2x$ 20) $\frac{x^3}{ab} + \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)x^2 + \left(1-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)x - \frac{1}{ab}x^2 - 1$

Respuestas:

1) $3a^3(a-2b^2)(a+2b^2)$ 2) $\left[\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+c^4\right]^2$ 3) $(a^n+b^n)^2$ 4) $(y^{n+2}-3)(y^{n+2}+5)$

5) $(x^n-a)(x^n-b)$ 6) $(Log\,m-1)(Log\,m-2)$ 7) $(Sen\theta-5)(Sen\theta+3)$

8) $(2\,Tan\theta-3)(3\,Tan\theta+1)$ 9) $(Sen\theta+3\,Cos\theta)(Sen\theta-2\,Cos\theta)$

10) $(x+2)(x-2)(x^2+4)(x^4+16)$ 11) $x^{3m}(x^m+3y^{2m})(x^m-3y^{2m})$

12) $(2^m+2)(2^m-2)(2^{2m}-3)$ 13) $ay^3(y+1)(y-1)(2a+b)$

14) $(5x+2y-3z)(5x+2y-3z)$ 15) $(a^4+b^4-3a^2b^2)(a^4+b^4+3a^2b^2)$

16) $(b-c)(a-c)(a-b)$ 17) $(x+y-z)(x-y+z+1)$

18) $(ax+b)(x+3)(x+1)(x-1)$ 19) $(x-a-3)\left[(x-a)^2+3(x-a)+9\right]$

20) $\frac{1}{ab}(x+a)(x+b)(x-1)$

2.4. MÁXIMO COMÚN DIVISOR (M.C.D)

Se llama Máximo Común Divisor de dos o más expresiones algebraicas, a la expresión algebraica entera de mayor grado y coeficiente numérico contenida exactamente en cada una de las expresiones mencionadas.

Ejemplo: $5a^3b^2$; $10a^4b$; $20a^2b^5$; $M.C.D = 5a^2b$

En el caso de polinomios el $M.C.D$ se determina considerando solo los factores comunes elevados a su menor exponente.

Ejemplo: $P1(x) = (x+1)(x+2)^3(x-3)$; $P2(x) = (x+1)^3(x+2)^2$; $M.C.D = (x+1)(x+2)^2$

2.4.1. MÉTODOS PARA DETERMINAR EL M.C.D

2.4.1.1. POR FACTORIZACIÓN

Se factora los polinomios y se determina los factores comunes con el menor exponente.

Ejemplos:

Determine el $M.C.D$ de los siguientes polinomios.

a) $4ax^2 - 28ax$, $a^2x^3 - 49a^2x$, $ax^4 - 15ax^3 + 56ax^2$

$4ax^2 - 28ax = 4ax(x-7)$; $a^2x^3 - 49a^2x = a^2x(x^2-49) = a^2x(x+7)(x-7)$

$ax^4 - 15ax^3 + 56ax^2 = ax^2(x^2 - 15x + 56) = ax^2(x-8)(x-7)$, $M.C.D = ax(x-7)$

b) $6x^2 + 7x - 3$, $4x^2 - 4x - 15$

$6x^2 + 7x - 3 = (2x+3)(3x-1)$, $4x^2 - 4x - 15 = (2x-5)(2x+3)$, $M.C.D = 2x+3$

c) $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$, $x^3 + 3x^2 - 4$, $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

	1	5	8	4
-1		-1	-4	-4
	1	4	4	$\boxed{0}$

;

	1	3	0	-4
1		1	4	4
	1	4	4	$\boxed{0}$

;

	1	6	12	8
-2		-2	-8	-8
	1	4	4	$\boxed{0}$

$(x+1)(x^2+4x+4)$
$(x+1)(x+2)^2$

;

$(x-1)(x^2+4x+4)$
$(x-1)(x+2)^2$

;

$(x+2)(x^2+4x+4)$
$(x+2)(x+2)^2$

$$M.C.D = (x+2)^2$$

2.4.1.2. POR DIVISIONES SUCESIVAS

Cuando no se puede descomponer fácilmente en factores (generalmente para polinomios de grado mayor que 3), el $M.C.D$ se halla por este método.

Consiste en dividir el polinomio de mayor grado para el de menor grado, hasta obtener residuo igual a cero, de no ser así, el residuo pasa a constituir en el próximo divisor del polinomio de menor grado y así sucesivamente hasta obtener residuo igual a cero, en cuyo caso el último divisor es el $M.C.D$.

ALGORITMO DE EUCLIDES

	$Q1(x)$	$Q2(x)$	$Q3(x)$	$Q4(x)$
$P(x)$	$D(x)$	$R1(x)$	$R2(x)$	$R3(x)$
$R1(x)$	$R2(x)$	$R3(x)$	$R4(x)=0$	

Si $R4(x)=0$, entonces el $M.C.D = R3(x)$

Ejemplos:

1) Determinar el $M.C.D$. entre 8745 y 742

	11	1	3	1	2
8745	742	583	159	106	53
-8162	-583	-477	-106	-106	
583	159	106	53	0	

$M.C.D = 53$

2) Determinar el $M.C.D$. de los polinomios:

$P1(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 3x - 6$ y $P2(x) = x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 5$

	$x-2$	$x+2$	$x-2$
$x^5 - x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 3x - 6$	$x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 5$	$x^3 - x^2 - x - 2$	$x^2 + x + 1$
$-x^5 - x^4 - 6x^3 - 5x^2 - 5x$	$-x^4 + x^3 + x^2 + 2x$	$-x^3 - x^2 - x$	
$-2x^4 - 4x^3 - 10x^2 - 8x - 6$	$2x^3 + 7x^2 + 7x + 5$	$-2x^2 - 2x - 2$	
$2x^4 + 2x^3 + 12x^2 + 10x + 10$	$-2x^3 + 2x^2 + 2x + 4$	$2x^2 + 2x + 2$	
$-2x^3 + 2x^2 + 2x + 4$	$9x^2 + 9x + 9$	0	
$-2(x^3 - x^2 - x - 2)$	$9(x^2 + x + 1)$		

$$M.C.D = x^2 + x + 1$$

En los residuos obtenidos tanto -2 como 9 se puede ignorar ya que no son factores comunes de los polinomios y por lo tanto no van a ser parte del $M.C.D$.

2.5. MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (m.c.m.)

Se llama Mínimo Común Múltiplo de dos o más expresiones algebraicas, a la mínima expresión algebraica entera y de menor coeficiente numérico que contiene exactamente un número entero de veces a las expresiones mencionadas.

Ejemplo:

$4x^5y^2$; $16x^2y^4$; $64xy^3$ $m.c.m = 64x^5y^4$

En el caso de polinomios el $m.c.m$ se determina considerando los factores comunes y no comunes con el mayor exponente.

Ejemplos:

Dados: $P1(x) = x^2(x+3)(x-2)^2$ y $P2(x) = x(x+1)^3(x-2)^4$, determinar el $m.c.m$

$m.c.m = x^2(x+3)(x+1)^3(x-2)^4$

Expresiones Algebraicas

EJERCICIOS RESUELTOS

Determinar el $M.C.D.$ y el $m.c.m.$ de los siguientes polinomios:

1) $P1(x)=x^5-ax^4-a^4x+a^5$; $P2(x)=x^4-ax^3-a^2x^2+a^3x$

Factorando los polinomios tenemos:

$P1(x)=x^5-ax^4-a^4x+a^5$, $P1(x)=x^4(x-a)-a^4(x-a)$, $P1(x)=(x-a)(x^4-a^4)$

$P1(x)=(x-a)(x^2+a^2)(x^2-a^2)$, $P1(x)=(x-a)(x^2+a^2)(x+a)(x-a)$

$P1(x)=(x-a)^2(x+a)(x^2+a^2)$

$P2(x)=x^4-ax^3-a^2x^2+a^3x$, $P2(x)=x^3(x-a)-a^2x(x-a)$

$P2(x)=(x-a)(x^3-a^2x)$, $P2(x)=(x-a)x(x^2-a^2)$, $P2(x)=(x-a)x(x+a)(x-a)$

$P2(x)=x(x-a)^2(x+a)$

$M.C.D=(x-a)^2(x+a)$; $m.c.m=x(x-a)^2(x+a)(x^2+a^2)$

2) $P1(x)=2x^3-9x^2+7x+6$, $P2(x)=2x^3+3x^2-11x-6$, $P3(x)=x^3+2x^2-x-2$

$2x^3-9x^2+7x+6$, $2x^3+3x^2-11x-6$, x^3+2x^2-x-2

	2	-9	7	6
3		6	-9	-6
	2	-3	-2	0
2		4	2	
	2	1	0	

	2	3	-11	-6
2		4	14	6
	2	7	3	0
-3		-6	-3	
	2	1	0	

	1	2	-1	-2
1		1	3	2
	1	3	2	0
-1		-1	-2	
	1	2	0	

$P1(x)=(x-3)(x-2)(2x+1)$, $P2(x)=(x-2)(x+3)(2x+1)$, $P3(x)=(x-1)(x+1)(x+2)$

$M.C.D=1$

$m.c.m=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)(2x+1)$

$m.c.m=(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)(2x+1)$

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

Determinar el $M.C.D.$ y el $m.c.m.$

1) $9x^4y^2$; $12x^3y^3$

2) $48r^3t^4$; $54r^2t^6$; $60r^4t^2$

3) $6x-6y$; $4x^2-4y^2$

4) y^4-16 ; y^2-4 ; y^2-3y+2

5) $6y^3+12y^2z$; $6y^2-24z^2$; $4y^2-4yz-24z^2$

6) x^2+x-6 ; x^2-x-12 ; x^2+2x-3

7) x^3+x+1 ; x^3-x^2+1

8) x^5-xy^4 ; x^9+x^8y ; $x^4+y^4-2x^2y^2$

9) $2x^3-7x^2+2$; x^3-2x^2-6x+4

Respuestas:

1) $M.C.D.=3x^3y^2$, $m.c.m.=36x^4y^3$

2) $M.C.D.=6r^2t^2$, $m.c.m.=2160r^4t^6$

3) $M.C.D.=2(x-y)$, $m.c.m.=12(x+y)(x-y)$

4) $M.C.D.=y-2$, $m.c.m.=(y^2+4)(y+2)(y-2)(y-1)$

5) $M.C.D. = 2(y+2z)$, $m.c.m. = 12y^2(y+2z)(y-2z)(y-3z)$
6) $M.C.D. = x+3$, $m.c.m. = (x-1)(x-2)(x+3)(x-4)$
7) $M.C.D. = 1$, $m.c.m. = (x^3+x+1)(x^3-x^2+1)$
8) $M.C.D. = x+y$, $m.c.m. = x^8(x^2+y^2)(x+y)^2(x-y)^2$
9) $M.C.D. = x^2-4x+2$, $m.c.m. = (2x+1)(x+2)(x^2-4x+2)$

EJERCICIOS DE REFUERZO

Determine el $M.C.D$ de los siguientes polinomios.

1) $24a^2b$, $18a^3bx$, $30a^4bx^2$
2) $72x^3y^4z^4$, $96x^2y^2z^3$, $120x^4y^5z^7$
3) x^2-xy , $3x^2-3y^2$, $xy-y^2$
4) x^2+x-12 , x^2-9 , x^2-4x+3

Determine el $m.c.m$ de los siguientes polinomios.

5) $72x^3y^4z^4$, $96x^2y^2z^3$, $120x^4y^5z^7$
6) $2x-4$, $3x+6$, x^2-4

Determinar el $M.C.D$ y el $m.c.m$ entre los siguientes polinomios:

7) $x^3+x^2y+xy^2+y^3$, $x^3-x^2y+xy^2-y^3$, x^4-y^4

8) $x^3-10x^2+31x-30$, $x^3-5x^2-4x+20$

9) $x^3-x^2-8x+12$, $x^3+4x^2-3x-18$

10) x^3-3x^2+7x-5 , $2x^3-9x^2+20x-25$, $x^4-x^3-3x^2+17x-30$

11) x^3-2x^2+x-2 , $2x^3-3x^2+2x-3$, $2x^4-7x^3+8x^2-7x+6$

12) Determinar el $M.C.D$ entre: x^3+5x^2+8x+4 , x^3+3x^2-4 , $x^3+6x^2+12x+8$

13) Determinar el $M.C.D$ entre: $x^4-7x^3+8x^2+28x-48$, $x^3-8x^2+19x-14$

14) Determinar el $M.C.D$ entre: $x^5+3x^4+6x^3+4x^2+8x+5$, $x^4+2x^3+3x^2-2x+5$

15) Hallar el polinomio de mayor grado que divida exactamente a: $3x^4-4x^3-4x^2+9x-6$ y $2x^4+x^3-6x^2+6x-9$

16) Hallar el polinomio de menor grado que sea divisible entre: x^3-3x^2+4 y $2x^3-5x^2-4x+12$

17) Determinar $P_2(x)$ si se conoce que: $M.C.D. = (2x+3)(x-5)$; $P_1(x) = (2x+3)(x^2-12x+35)$
$m.c.m. = (x^2-12x+35)(2x^2-7x-15)$

18) Hallar el $M.C.D$ y el $m.c.m$ de: $P_1(x) = ax^3+(5a-b)x^2-(5b-a)x-b$ y
$P_2(x) = ax^3+(-3a-b)x^2+(3a+3b)x-3b$

19) Hallar dos polinomios de cuarto grado si se conoce: $M.C.D. = 2x^3-2x^2+2x-2$ y
$m.c.m. = 2x^5-4x^4-2x+4$

Respuestas:

1) $M.C.D. = 6a^2b$ 2) $M.C.D. = 24x^2y^2z^3$ 3) $M.C.D = x - y$ 4) $M.C.D. = x - 3$

5) $m.c.m. = 1440x^4y^5z^7$ 6) $m.c.m. = 6(x^2 - 4)$ 7) $M.C.D. = x^2 + y^2$, $m.c.m. = x^4 - y^4$

8) $M.C.D. = (x-2)(x-5)$, $m.c.m. = (x-2)(x-5)(x-3)(x+2)$

9) $M.C.D. = x^2 + x - 6$, $m.c.m. = (x+3)^2(x-2)^2$

10) $M.C.D. = x^2 - 2x + 5$, $m.c.m. = (x^2 - 2x + 5)(x-1)(2x-5)(x+3)(x-2)$

11) $M.C.D. = (x^2 + 1)$, $m.c.m. = (x^2+1)(x-2)(2x-3)$

12) $m.c.m. = (x+2)^2$ 13) $M.C.D. = x - 2$ 14) $M.C.D. = x^2 + 3x + 5$ 15) $M.C.D. = 1$

16) $m.c.m. = (x-2)^2(x+1)(2x+3)$ 17) $P_2(x) = (2x+3)(x-5)^2$

18) $M.C.D. = (ax - b)$; $m.c.m. = (ax-b)(x^2+5x+1)(x^2-3x+3)$

19) $P_1(x) = 2(x-1)(x^2+1)(x+1)$; $P_2(x) = 2(x-1)(x^2+1)(x-2)$

2.6. RAÍCES DE UN POLINOMIO

Dado un $P(x)$, se denomina raíz o cero del mismo a cualquier solución de la ecuación $P(x) = 0$.

Geométricamente, la raíz de un polinomio representa la abscisa del punto donde la gráfica de $y = P(x)$ interseca con el eje de las x.

2.6.1. NÚMERO DE RAÍCES

Un polinomio $P(x)$ de grado $n > 0$ tiene a lo sumo n raíces reales (No necesariamente diferentes).

Ejemplos:

Calcular las raíces de los siguientes polinomios:

1) $P(x) = x^2 - 5x + 6$; las raíces serán las soluciones de la ecuación:
$x^2 - 5x + 6 = 0$, $(x-3)(x-2) = 0$, $x_1 = 3 \wedge x_2 = 2$ Tiene dos raíces reales y distintas

2) $P(x) = x^4 - 1$; las raíces serán las soluciones de la ecuación:
$x^4 - 1 = 0$, $(x^2-1)(x^2+1) = 0$, $(x+1)(x-1)(x^2+1) = 0$
$x_1 = 1$; $x_2 = -1$; $x_3 = i$; $x_4 = -i$ Tiene dos raíces reales diferentes y dos raíces Imaginarias

3) $P(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$; las raíces serán las soluciones de la ecuación:
$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$, $(x-1)^4 = 0$, $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$
Tiene una sola raíz de multiplicidad 4

4) $P(x) = x^2 - 6x + 10$; las raíces serán las soluciones de la ecuación:
$x^2 - 6x + 10 = 0$, $x = \dfrac{6 + \sqrt{36-40}}{2}$, $x = \dfrac{6 + \sqrt{-4}}{2}$, $x = \dfrac{6 \pm 2i}{2}$
$x_1 = 3 + i \wedge x_2 = 3 - i$ Tiene dos raíces imaginarias

2.6.2. CEROS COMPLEJOS

Si $a + bi$ es un cero de $P(x)$; su conjugada $a - bi$ también es un cero de $P(x)$, es decir los ceros complejos están dados por parejas.

2.6.3. REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES

En un polinomio $P(x)$ con coeficientes reales y un término constante distinto a cero se tiene que:

1) El número de raíces positivas de $P(x)$ es igual al número de variaciones de signo en $P(x)$, o bien, es éste número disminuido en un entero par.
2) El número de raíces negativas de $P(x)$ es igual al número de variaciones de signo en $P(-x)$, o bien, es este número disminuido en un número par.

Ejemplos:
Analizar el número de soluciones posibles positivas, negativas y soluciones complejas no reales en las ecuaciones:

1) $P(x) = 2x^5 - 7x^4 + 3x^2 + 6x - 5$; 3 variaciones de signo, entonces tenemos: 3 o 1 raíz positiva
$P(-x) = -2x^5 - 7x^4 + 3x^2 - 6x - 5$; 2 variaciones de signo, entonces tenemos: 2 o 0 raíces negativas

Número total de soluciones	5	5	5	5
Soluciones reales positivas	3	3	1	1
Soluciones reales negativas	2	0	2	0
Soluciones complejas no reales	0	2	2	4

2) $P(x) = 2x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 3x + 5$; 2 variaciones de signo, entonces tenemos: 2 o 0 raíces positivas
$P(-x) = -2x^5 + 3x^3 + 2x^2 - 3x + 5$; 3 variaciones de signo, entonces tenemos: 3 o 1 raíz negativa

Número total de soluciones	5	5	5	5
Soluciones reales positivas	2	2	0	0
Soluciones reales negativas	3	1	3	1
Soluciones complejas no reales	0	2	2	4

2.6.4. COTAS PARA LOS CEROS REALES

Son los extremos entre los cuales están comprendidos los ceros o raíces del polinomio.

Cualquier número que sea igual o mayor que el mayor cero de $P(x)$ se denomina cota superior para los ceros reales, cualquier número que sea igual o menor que el menor cero de $P(x)$ se denomina cota inferior para los ceros reales.

La cota superior se localiza con un número positivo mediante la división sintética, cuando todos los términos del cociente y el residuo son positivos.
La cota inferior se localiza con un número negativo mediante la división sintética cuando los términos del cociente y del residuo son alternativamente positivos y negativos.

Ejemplos:
Hallar las raíces de los siguientes polinomios:

1) $P(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6$; 2 variaciones de signo, entonces tenemos: 2 o 0 raíces positivas
$P(-x) = -x^3 - 3x^2 + 2x + 6$; 1 variación de signo, entonces tenemos: 1 raíz negativa

Número total de soluciones	3	3
Soluciones reales positivas	2	0
Soluciones reales negativas	1	1
Soluciones complejas no reales	0	2

COTAS PARA LOS CEROS REALES

1	-3	-2	6		
1	-2	-4	2	1	
1	-1	-4	-2	2	
1	0	-2	0	3	
1	1	2	14	4	C. S.
1	-4	2	4	-1	
1	-5	8	-10	-2	C. I.

Las raíces serán la solución de la ecuación $P(x)=0$

$x^3-3x^2-2x+6=0$, $(x-3)(x^2-2)=0$; igualando a cero cada factor tenemos y despejando x tenemos:

$x-3=0$, $x_1=3$ y $x^2-2=0$, $x_2=\sqrt{2}$, $x_3=-\sqrt{2}$

2) $P(x)=x^4+x^3-5x^2+x-6$; 3 variaciones de signo, entonces tenemos: 3 o 1 raíz positiva

$P(-x)=x^4-x^3-5x^2-x-6$; 1 variación de signo, entonces tenemos: 1 raíz negativa

Número total de soluciones	4	4
Soluciones reales positivas	3	1
Soluciones reales negativas	1	1
Soluciones complejas no reales	0	2

COTAS PARA LOS CEROS REALES

1	1	-5	1	-6		
1	2	-3	-2	-8	1	
1	3	1	3	0	2	C. S.
1	0	-5	6	-12	-1	
1	-1	-3	7	-20	-2	
1	-2	1	-2	0	-3	C. I.

Las raíces serán la solución de la ecuación $P(x)=0$

$x^4+x^3-5x^2+x-6=0$

$(x-2)\ (x+3)(x^2+1)=0$

$x-2=0$; $x+3=0$; $x^2+1=0$

$x_1=2$; $x_2=-3$; $x_3=\pm\sqrt{-1}$

$x_1=2$; $x_2=-3$; $x_3=i$; $x_4=-i$

2.6.5. CEROS RACIONALES (FRACCIONARIOS)

Se tiene los posibles ceros racionales cuando el coeficiente del término de mayor grado es diferente a uno.

Ejemplo:

Determinar las raíces del siguiente polinomio

$P(x)=12x^7-16x^6-7x^5-12x^4-15x^3+4x^2+4x$; sacando factor común x tenemos

$P(x)=x(12x^6-16x^5-7x^4-12x^3-15x^2+4x+4)$

Si igualamos a cero el polinomio tendríamos una raíz $x_1=0$

$P(x) = 12x^6 - 16x^5 - 7x^4 - 12x^3 - 15x^2 + 4x + 4$; 2 variaciones de signo, entonces tenemos: 2 o $0\,R^+$

$P(-x) = 12x^6 + 16x^5 - 7x^4 + 12x^3 - 15x^2 - 4x + 4$; 4 variaciones de signo, entonces tenemos: 4 , 2 o $0\,R^+$

Número total de soluciones	6	6	6	6	6	6
Soluciones reales positivas	2	2	2	0	0	0
Soluciones reales negativas	4	2	0	4	2	0
Soluciones complejas no reales	0	2	4	2	4	6

COTAS PARA LOS CEROS REALES

12	-16	-7	-12	-15	4	4		
12	-4	-11	-23	-38	-34	-30	1	
12	8	9	6	-3	-2	0	2	
12	20	53	147	426	1282	3850	3	C. S.
12	-28	21	-33	18	-14	18	-1	C. I.

Factorando el polinomio tenemos:

	12	-16	-7	-12	-15	4	4
X=2		24	16	18	12	-6	-4
	12	8	9	6	-3	-2	0
X=1/2		6	7	8	7	2	
	12	14	16	14	4	0	
X=-1/2		-6	-4	-6	-4		
	12	8	12	8	0		
X=-2/3		-8	0	-8			
	12	0	12	0			

$$P(x) = \left(12x^2 + 12\right)(x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right)$$

$$P(x) = 12\left(x^2 + 1\right)(x-2)\left(\frac{2x-1}{2}\right)\left(\frac{2x+1}{2}\right)\left(\frac{3x+2}{3}\right)$$

$$P(x) = \left(x^2 + 1\right)(x-2)\,(2x-1)\,(2x+1)\,(3x+2)$$

Las raíces serán la solución de la ecuación $P(x) = 0$

$$\left(x^2 + 1\right)(x-2)\,(2x-1)\,(2x+1)\,(3x+2) = 0:$$

$$x_2 = i \;,\; x_3 = -i \;,\; x_4 = -2 \;,\; x_5 = -\frac{1}{2} \;;\; x_6 = \frac{1}{2} \;;\; x_7 = -\frac{2}{3}$$

2.6.6. CEROS DECIMALES

MÉTODO: APROXIMACIONES SUCESIVAS

Ejemplo:

Determinar la raíz positiva con tres cifras decimales del siguiente polinomio: $P(x) = x^3 - 3x - 5$

$P(x) = x^3 - 3x - 5 \quad \Rightarrow \quad P(-x) = -x^3 + 3x - 5$

Tiene tres ceros reales

$P(x) \rightarrow 1$ variación $\Rightarrow 1R^+$

$P(-x) \rightarrow 2$ variaciones $\Rightarrow 2 \acute{o} 0 R^-$

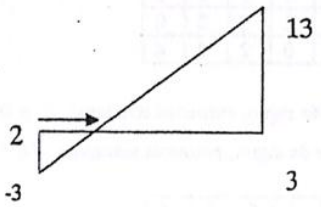
TOTAL	3	3
R^+	1	1
R^-	2	0
COMPLEJAS	0	2

Error admisible: $e = 1 \times 10^{-3}$

COTAS

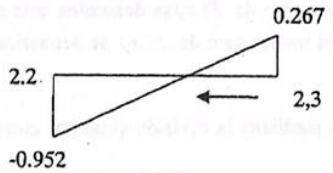
1	0	-3	-5	0	
1	1	-2	-7	1	
1	2	1	-3	2	Posible cero
1	3	6	13	3	C.S.
1	-1	-2	-3	-1	
1	-2	1	-7	-2	C.I.

Cuando se produce un cambio de signo al calcular las cotas entre valores continuos se tiene una raíz, en este caso se tiene entre 2 y 3



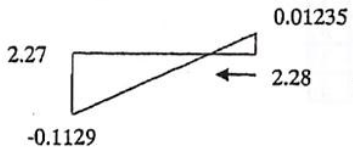
Como 2 está más cerca del punto de intersección (raíz), tenemos que ir incrementando su valor de esta manera:

1	0	-3	-5	0	
1	2.1	1.41	-2.039	2.1	
1	2.2	1.84	-0.952	2.2	Posible cero
1	2.3	2.29	0.267	2.3	



Como 2.3 está más cerca de la raíz, disminuimos su valor de la siguiente manera:

1	0	-3	-5		
1	2.25	2.0625	-0.35938	2.25	
1	2.26	2.1076	-0.23682	2.26	
1	2.27	2.1529	-0.11292	2.27	Posible cero
1	2.28	2.1984	0.01235	2.28	



Como 2.28 está más cerca de la raíz, disminuimos su valor de la siguiente manera:

1	0	-3	-5	
1	2.275	2.17563	-0.05045	2.275
1	2.276	2.18018	-0.0379	2.276
1	2.277	2.18473	-0.02537	2.277
1	2.278	2.18928	-0.01281	2.278
1	2.279	2.19384	-0.000236	**2.279**

$(x-2.279)(x^2+2.279x+2.194)\approx 0$

$x_1 = 2.279$

$P(2.279) = -0.00024$ tiende a cero, por lo tanto se considera como raíz al valor de 2.279

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

1) Encontrar las raíces reales del siguiente polinomio: $P(x) = 4x^3 - 4x^2 - 11x + 6$

2) Encontrar con aproximación de dos cifras decimales la menor raíz positiva de:

   a) $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

   b) $P(x) = x^3 - 3x - 1$

3) Resolver la ecuación $3x^4 + 2x^3 - x^2 + x - 1 = 0$, encontrar la R^+ y la R^- con aproximación de 3 cifras.

Respuestas:

1) $\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 2$ 2) a) $x = 0.43$ b) $x = 1.88$ 3) $R^+ = 0.586$, $R^- = -1.285$

EJERCICIOS DE REFUERZO

1) Encontrar con aproximación de tres cifras decimales el valor de la raíz negativa de la ecuación $3x^3 - x^2 - 5x + 2 = 0$

2) Encuentre el valor de las raíces de la ecuación: $x^3 - 6x^2 + 6x + 2 = 0$

Respuestas:

1) -1.317 2) $x_1 = 1.6602$, $x_2 = 4.602$, $x_3 = -0.262$

CAPÍTULO III
FRACCIONES ALGEBRAICAS

3.1. FRACCIÓN ALGEBRAICA

Es toda expresión algebraica de la forma $\frac{a}{b}$; donde $b \neq 0$.

Ejemplos: $\frac{1}{x}$; $\frac{5x^2-3y}{x+y}$; $4x^{-2}yz^{-3}$; $\frac{x^2-1}{y^2-1}$

3.2. CLASES DE FRACCIONES

3.2.1. FRACCIONES PROPIAS: Cuando el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

Ejemplos: $\frac{x}{x^3+5}$; $\frac{2x-1}{x^4+3x^2-x+5}$

3.2.2. FRACCIONES IMPROPIAS: Cuando el grado del numerador es mayor que el grado del denominador.

Ejemplos: $\frac{x^5-3}{x^2+4}$; $\frac{2x^2+3x}{x-1}$

3.2.3. FRACCIONES HOMOGÉNEAS: Cuando las fracciones tienen iguales los denominadores.

Ejemplos: $\frac{5x}{x-2}$; $\frac{8}{x-2}$; $\frac{-3}{x-2}$

3.2.4. FRACCIONES HETEROGÉNEAS: Cuando las fracciones tienen diferente denominador.

Ejemplos: $\frac{x^2-3x+1}{x+2}$; $\frac{x-5}{2x-1}$; $\frac{3}{x^2-1}$

3.2.5. FRACCIONES IRREDUCIBLES: Cuando el numerador y denominador son primos entre si.

Ejemplos: $\frac{x+1}{x-5}$; $\frac{x^2+y}{x+y}$; $\frac{x^2+y^2+z^2}{x^3-y^3-z^3}$

3.2.6. FRACCIONES EQUIVALENTES: Dos fracciones diremos que son equivalentes cuando tienen el mismo valor numérico para todo sistema de valores asignados a sus variables, excepto en aquellos que haga cero el denominador.

3.3. PROPIEDADES

1) $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$; $b \neq 0$ y $m \neq 0$

2) $\frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{m}}$; $b \neq 0$ y $m \neq 0$

3.4. SIGNOS DE UNA FRACCIÓN

Tres signos están asociados a una fracción: el correspondiente al numerador, el del denominador y el de la fracción. Se pueden alterar dos cualesquiera de ellos, simultáneamente, sin que varíe el valor de la fracción. Si a una fracción no se le antepone signo alguno, se sobrentiende que éste es positivo.

3.5. CAMBIOS DE SIGNO DE UNA FRACCIÓN

3.5.1. Cuando no hay factores.

En toda fracción se puede cambiar dos de sus tres signos y la fracción no se altera, así:

$$F=+\frac{+a}{+b}=-\frac{-a}{b}=-\frac{+a}{-b}=+\frac{-a}{-b}$$

Ejemplo: $F=\frac{x-2y}{2y-x}=-\frac{x-2y}{x-2y}=-1$

3.5.2. Cuando la fracción tiene factores.

En toda fracción si se cambia de signo a un número par de factores, la fracción no se altera. Si se cambia de signo a un número impar de factores la fracción cambia de signo, para que no altere se cambia el signo de la fracción.

$$F=\frac{MN}{TSQ}=\frac{M(-N)}{T(-S)Q}=\frac{(-M)(-N)}{(-T)S(-Q)}=\frac{(-M)N}{(-T)(-S)(-Q)}=-\frac{M(-N)}{T(-S)(-Q)}$$

Ejemplos:

1) $F=\frac{(a-b)(a-c)}{(b-a)(c-a)}=\frac{(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)}=1$

2) $F=\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(a-b)(c-a)}=\frac{1}{(a-b)(a-c)}-\frac{1}{(a-b)(a-c)}=0$

3.6. ÁLGEBRA DE FRACCIONES

OPERACIÓN	REGLA
Adición Homogénea :	$\frac{x}{y}+\frac{m}{y}=\frac{x+m}{y}$
Sustracción Homogénea:	$\frac{x}{y}-\frac{m}{y}=\frac{x-m}{y}$
Combinaciones Homogéneas:	$\frac{x}{y}+\frac{m}{y}-\frac{n}{y}=\frac{x+m-n}{y}$
Adición Heterogénea:	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{bx+ay}{ab}$
Sustracción Heterogénea:	$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{bx-ay}{ab}$
Multiplicación:	$\left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{m}{y}\right)=\frac{mx}{ay}$
División:	$\frac{x}{a}\div\frac{p}{q}=\left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=\frac{qx}{ap}$
Simplificación:	$\frac{abc}{abx}=\frac{c}{x}$; $a\neq 0$ $b\neq 0$

3.7. SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES

Simplificar una fracción algebraica es convertirla en una fracción equivalente cuyos términos sean primos entre sí, esto es cuando no tiene factores comunes algunos.

Ejemplos:

Simplificar las siguientes fracciones:

1) $$\frac{6x^2-3xy}{-4x^2y+2xy^2}=\frac{3x\,(2x-y)}{-2xy\,(2x-y)}=-\frac{3}{2y}$$

2) $$\frac{x^3y+3x^2y+9xy}{x^3-27}=\frac{xy\,\left(x^2+3x+9\right)}{(x-3)\left(x^2+3x+9\right)}=\frac{xy}{x-3}$$

3) $$\frac{(1+ab)^2-(a+b)^2}{1-a^2}=\frac{(1+ab+a+b)(1+ab-a-b)}{(1+a)(1-a)}=\frac{[(1+b)+a\,(1+b)][(1-b)-a\,(1-b)]}{(1+a)(1-a)}$$
$$=\frac{(1+b)(1+a)(1-b)(1-a)}{(1+a)(1-a)}=(1+b)(1-b)=1-b^2$$

4) $$\frac{a(a+c)+b(c-b)}{c(a+c)+b(a-b)}=\frac{a^2+ac+bc-b^2}{ac+c^2+ab-b^2}=\frac{\left(a^2-b^2\right)+c(a+b)}{\left(c^2-b^2\right)+a(c+b)}$$
$$=\frac{(a+b)(a-b)+c\,(a+b)}{(c+b)(c-b)+a\,(c+b)}=\frac{(a+b)[(a-b)+c]}{(c+b)[(c-b)+a]}=\frac{(a+b)(a-b+c)}{(c+b)(a-b+c)}=\frac{a+b}{b+c}$$

3.8. FRACCIONES COMPLEJAS

Son aquellas en las que el numerador, denominador, o ambos, son expresiones fraccionarias.

Ejemplos:

Simplificar:

1) $$\frac{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}{1+-\dfrac{a-b}{a+b}}=\frac{\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)\,(a+b)}}{\dfrac{(a+b)+(a-b)}{a+b}}=\frac{\dfrac{4ab}{(a-b)\,(a+b)}}{\dfrac{2a}{a+b}}=\frac{4ab\,(a+b)}{2a\,(a-b)\,(a+b)}=\frac{2b}{a-b}$$

2) $$\frac{\dfrac{x+2}{x}+\dfrac{x-2}{2}}{\dfrac{x+2}{2}-\dfrac{x-2}{x}}=\frac{\dfrac{2\,(x+2)+x\,(x-2)}{2x}}{\dfrac{x\,(x+2)-2\,(x-2)}{2x}}=\frac{2x+4+x^2-2x}{x^2+2x-2x+4}=\frac{x^2+4}{x^2+4}=1$$

3.9. FRACCIONES CONTINUAS

Estas fracciones se simplifican efectuando las operaciones indicadas empezando de abajo hacia arriba.

Ejemplos:

Simplificar:

1) $$\frac{9x^2-64}{x-1-\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{4+x}}}=\frac{9x^2-64}{x-1-\dfrac{1}{\dfrac{4+x-x}{4+x}}}=\frac{9x^2-64}{x-1-\dfrac{4+x}{4}}=\frac{9x^2-64}{\dfrac{4x-4-4-x}{4}}=\frac{9x^2-64}{\dfrac{3x-8}{4}}$$

$$=\frac{4(3x+8)(3x-8)}{(3x-8)}=4(3x+8)$$

2) $$\frac{x}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{y}}}=\frac{x}{1-\dfrac{1}{\dfrac{y+x}{y}}}=\frac{x}{1-\dfrac{y}{y+x}}=\frac{x}{\dfrac{y+x-y}{y+x}}=\frac{x}{\dfrac{x}{x+y}}=\frac{x(x+y)}{x}=x+y$$

3.10. OPERACIONES CON FRACCIONES.

3.10.1. ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

Efectuar las siguientes operaciones:

1) $$\frac{2x-y}{x^2y}+\frac{3x-4y}{2xy^2}-\frac{x^2-3y^2}{3x^2y^2}=\frac{6y(2x-y)+3x(3x-4y)-2(x^2-3y^2)}{6x^2y^2}$$

$$=\frac{12xy-6y^2+9x^2-12xy-2x^2+6y^2}{6x^2y^2}=\frac{7x^2}{6x^2y^2}=\frac{7}{6y^2}$$

2) $$\frac{x-2y}{x+2y}+\frac{x-2y}{y-x}+\frac{2x^2-5y^2}{x^2+xy-2y^2}=\frac{x-2y}{x+2y}-\frac{x-2y}{x-y}+\frac{2x^2-5y^2}{(x+2y)(x-y)}$$

$$=\frac{(x-y)(x-2y)-(x+2y)(x-2y)+2x^2-5y^2}{(x+2y)(x-y)}$$

$$=\frac{x^2-3xy+2y^2-x^2+4y^2+2x^2-5y^2}{(x+2y)(x-y)}=\frac{2x^2-3xy+y^2}{(x+2y)(x-y)}$$

$$=\frac{(x-y)(2x-y)}{(x+2y)(x-y)}=\frac{2x-y}{x+2y}$$

3.10.2. MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

Simplificar:

1) $$\frac{2x-4y}{6x+3y}\cdot\frac{2x^2+xy}{4x+8y}=\frac{2(x-2y)}{3(2x+y)}\cdot\frac{x(2x+y)}{4(x+2y)}=\frac{x(x-2y)}{6(x+2y)}$$

2) $$\left(a+\frac{ab}{a-b}\right)\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$=\left(\frac{a^2-ab+ab}{a-b}\right)\left(\frac{(a+b)(a-b)}{a^2}\right)=\left(\frac{a^2}{a-b}\right)\left[\frac{(a+b)(a-b)}{a^2}\right]=a+b$$

3) $$\frac{a^3-x^3}{a^3+x^3}\div\frac{a-x}{a^2-ax+x^2}=\frac{(a-x)(a^2+ax+x^2)}{(a+x)(a^2-ax+x^2)}\cdot\frac{(a^2-ax+x^2)}{(a-x)}=\frac{a^2+ax+x^2}{a+x}$$

4) $$\frac{a^2-2bc-b^2-c^2}{a^2-c^2-b^2+2bc}\div\frac{a+b+c}{a-b+c}$$

$$=\frac{a^2-(b^2+2bc+c^2)}{a^2-(b^2-2bc+c^2)}\div\frac{a+b+c}{a-b+c}=\frac{a^2-(b+c)^2}{a^2-(b-c)^2}\div\frac{a+b+c}{a-b+c}$$

$$=\frac{[a+(b+c)][a-(b+c)]}{[a+(b-c)][a-(b-c)]}\div\frac{a+b+c}{a-b+c}=\frac{(a+b+c)(a-b-c)}{(a+b-c)(a-b+c)}\times\frac{a-b+c}{a+b+c}=\frac{a-b-c}{a+b-c}$$

3.10.3. COMBINACIÓN DE LAS OPERACIONES.

Simplificar:

1) $$\frac{a^2-ab}{a^3-b^3}\times\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}+\left(\frac{2a^3}{a^3+b^3}-1\right)\div\left(\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}\right)$$

$$\frac{a(a-b)}{(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)}\times\frac{\left(a^2+ab+b^2\right)}{(a+b)}+\left[\frac{2a^3-a^3-b^3}{a^3+b^3}\right]\times\left[\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}\right]$$

$$\frac{a}{a+b}+\frac{(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)}{(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)}\times\frac{\left(a^2-ab+b^2\right)}{\left(a^2+ab+b^2\right)}=\frac{a}{a+b}+\frac{a-b}{a+b}=\frac{2a-b}{a+b}$$

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

Simplificar las siguientes fracciones:

1) $\dfrac{12\,a^3x^4+2\,a^2x^5}{18ab^2x+3\,b^2x^2}$ 2) $\dfrac{3ax^3+3a^3x-6a^2x^2}{ax^3-a^3x}$ 3) $\dfrac{x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz}{x^2-y^2-z^2-2yz}$

4) $\dfrac{x^2-1}{(1+ax)^2-(x+a)^2}$ 5) $\dfrac{\frac{a^2}{x}-x}{\frac{a}{x}+1}$ 6) $\dfrac{x-\frac{4x-3}{2x-1}}{2x-\frac{x-3}{x-2}}$

7) $\dfrac{\frac{x}{2}-\frac{1}{x+1}}{\frac{x}{2}+\frac{2x+3}{x+1}}$ 8) $\dfrac{1}{x+\frac{1}{1+\frac{1+x}{1-x}}}$ 9) $\dfrac{1}{1+\frac{a}{1+a+\frac{2a^2}{1-a}}}$

10) $\dfrac{3+2a}{2-a}+\dfrac{3a-2}{a+2}-\dfrac{1}{2+a}+\dfrac{\frac{8}{a}-4}{a^2-4}+\dfrac{56}{a\left(a^2-4\right)}+\dfrac{16-a}{a}$

Respuestas:

1) $\dfrac{2a^2x^3}{3b^2}$ 2) $\dfrac{3(x-a)}{x+a}$ 3) $\dfrac{x+y+z}{x-y-z}$ 4) $\dfrac{1}{a^2-1}$

5) $a-x$ 6) $\dfrac{x-2}{2x-1}$ 7) $\dfrac{x-1}{x+3}$ 8) $\dfrac{2}{x+1}$

9) $\dfrac{a^2+1}{a+1}$ 10) 0

Efectuar la suma algebraica y simplificar:

1) $\dfrac{2x}{x^2-y^2}-\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{y}{xy-x^2}$ 2) $\dfrac{3a}{a^2+ab-2b^2}+\dfrac{2b}{a^2+3ab+2b^2}-\dfrac{2}{a+b}$

3) $\dfrac{x+1}{2x-2}-\dfrac{x-1}{2x+2}+\dfrac{4x}{1-x^2}+\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ 4) $\dfrac{x^{2n}}{x^n-1}-\dfrac{x^{2n}}{x^n+1}-\dfrac{1}{x^n-1}+\dfrac{1}{x^n+1}$

5) $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

6) $\dfrac{bc}{(c-a)(a-b)}+\dfrac{ac}{(a-b)(b-c)}+\dfrac{ab}{(b-c)(c-a)}$

7) $\dfrac{x+2+\sqrt{x^2-4}}{x+2-\sqrt{x^2-4}}+\dfrac{x+2-\sqrt{x^2-4}}{x+2+\sqrt{x^2-4}}$

Respuestas:

1) $\dfrac{1}{x}$ 2) $\dfrac{1}{a-b}$ 3) $\dfrac{x-1}{x+1}$ 4) 2

5) 1 6) -1 7) x

Efectuar las operaciones indicadas y simplificar:

1) $\left(1-\dfrac{x-y}{x+y}\right)\left(2+\dfrac{2y}{x-y}\right)$

2) $\dfrac{x(a-x)}{a^2+2ax+x^2}\cdot\dfrac{a(a+x)}{a^2-2ax+x^2}$

3) $\left[3-\dfrac{4b+20a}{2b+5a}\right]\div\left[4-\dfrac{16a}{b}+\dfrac{15a^2}{b^2}\right]\left[\dfrac{4a}{b}+4-\dfrac{15a^2}{b^2}\right]$

4) $\dfrac{a^2b^2}{c}\div\left[\dfrac{a^2c^2}{b}\div\left(\dfrac{b^2c^2}{a}\times\dfrac{ac}{b^2}\right)\div\left(\dfrac{ab}{c^2}\div\dfrac{bc}{a^2}\right)\right]$

5) $\dfrac{x^2+xy-xz}{(x+y)^2-z^2}\div\dfrac{x}{(x+z)^2-y^2}\cdot\dfrac{xy-y^2-yz}{(x-y)^2-z^2}$

6) $-\dfrac{x}{2a^2-ax}-\dfrac{2}{x^2+x-2ax-2a}\left(1+\dfrac{3x+x^2}{3+x}\right)$

Respuestas:

1) $\dfrac{4xy}{x^2-y^2}$ 2) $\dfrac{ax}{a^2-x^2}$ 3) 1 4) $\dfrac{a^3b^3}{c^3}$

5) y 6) $\dfrac{1}{a}$

Simplificar:

1) $\dfrac{\left(x^2-\dfrac{1}{y^2}\right)^x\left(x-\dfrac{1}{y}\right)^{y-x}}{\left(y^2-\dfrac{1}{x^2}\right)^y\left(y+\dfrac{1}{x}\right)^{x-y}}$

2) $\dfrac{\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{x^2}{y^3}\right)\div\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{x}{y^2}\right)}{\left(\dfrac{x+2y}{x+y}+\dfrac{x}{y}\right)\div\left(\dfrac{x+2y}{y}-\dfrac{x}{x+y}\right)}$

3) $\left(x-\dfrac{xy^3+y^4}{x^3+y^3}\right)\left(1-\dfrac{y^2}{x^2+y^2}\right)\div\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2-xy+y^2}\right)$

Respuestas:

1) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{x+y}$ 2) $\dfrac{x+y}{y}$ 3) $\dfrac{x^2}{x+y}$

Hallar el valor de a para el cual la fracción admita simplificación $\dfrac{x^3-ax^2+23x-a-6}{x^3-(a-2)x^2+11x-a+4}$

Respuesta: $a=9$

Fracciones Algebraicas

EJERCICIOS DE REFUERZO

Simplificar las siguientes fracciones:

1) $\dfrac{ac+bc+ad+bd}{a^2+ab}$

2) $\dfrac{x^5-ax^4-a^4x+a^5}{x^4-ax^3-a^2x^2+a^3x}$

3) $\dfrac{\left(a^2+b^2-c^2\right)^2-\left(a^2-b^2+c^2\right)^2}{4ab^2-4abc}$

4) $\dfrac{\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-6}}{\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-9}}$

5) $\dfrac{a-\dfrac{2}{a-1}}{\dfrac{1}{a-1}+\dfrac{2}{(a-1)^2}}$

6) $\dfrac{\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x^3+y^3}{x^3-y^3}}{\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}$

7) $\dfrac{3x^4y^3+9a^2x^2y^3}{4x^5y^2+12a^2x^3y^2}$

8) $\dfrac{\left(a^8+2a^4x^2+x^4\right)\left(a^4-x^2\right)}{\left(a^2+x\right)\left(a^6-a^4x+a^2x^2-x^3\right)}$

9) $1-\dfrac{x}{x+\dfrac{4}{x+\dfrac{6}{x}}}$

10) $\dfrac{\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x-1}}}{1+\dfrac{x}{x^2-\dfrac{1}{1-\dfrac{x-1}{x}}}}$

11) $\dfrac{xy+z^2}{(x-z)(y-z)}+\dfrac{xz+y^2}{(x-y)(z-y)}+\dfrac{yz+x^2}{(y-x)(z-x)}$

12) $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+2x-3}-\dfrac{x-1}{x+2}\left[\dfrac{\left[6-x+\dfrac{2}{3-x}\right]\div x^2}{\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-3x}+\dfrac{5}{x^3-3x^2}}\right]+(x-4)-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}}$

Respuestas:

1) $\dfrac{c+d}{a}$ 2) $\dfrac{x^2+a^2}{x}$ 3) $\dfrac{ab+ac}{b}$ 4) $\dfrac{x-1}{x+2}$

5) $(a-2)(a-1)$ 6) $\dfrac{(x+y)^2}{x^2+xy+y^2}$ 7) $\dfrac{3y}{4x}$ 8) a^4+x^2

9) $\dfrac{4}{x^2+10}$ 10) $\dfrac{(x-1)^2}{x}$ 11) 2 12) $\dfrac{x+2}{x-1}$

Efectuar las operaciones indicadas y simplificar:

1) $\dfrac{a^2-ab}{a^3-b^3}\cdot\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}+\left(\dfrac{2a^3}{a^3+b^3}-1\right)\div\left(\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}\right)$

2) $\dfrac{\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{x^2}{y^3}\right)\div\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{x}{y^2}\right)}{\left(\dfrac{x+2y}{x+y}+\dfrac{x}{y}\right)\div\left(\dfrac{x+2y}{y}-\dfrac{x}{x+y}\right)}$

3) $\dfrac{\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{x}{ab}\right)\cdot(a+b+x)}{\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{2}{ab}-\dfrac{x^2}{a^2b^2}\right)}$

Fracciones Algebraicas

4) $\dfrac{1-x}{x+1}+\dfrac{x^2+1}{x^2-1}+\dfrac{4x}{x^2-1}+\dfrac{x+1}{2x-2}-\dfrac{x-1}{2x+2}$

5) $\dfrac{x^3+(2a+b)x^2+(a^2+2ab)x+a^2b}{x^3+(a+2b)x^2+(2ab+b^2)x+ab^2}$

6) $\dfrac{x+y}{(y-z)(z-x)}+\dfrac{y+z}{(z-x)(x-y)}+\dfrac{z+x}{(x-y)(y-z)}$

7) $\dfrac{1}{a(a-b)(a-c)}-\dfrac{1}{b(a-b)(b-c)}-\dfrac{1}{abc}$

8) $\dfrac{(a^2+b^2+a^2b^2)^2-(a^2+b^2-a^2b^2)^2}{(a+b)^4-(a-b)^4}$

9) $\dfrac{a^2-(b-c)^2}{(a+c)^2-b^2}+\dfrac{b^2-(a-c)^2}{(a+b)^2-c^2}+\dfrac{c^2-(a-b)^2}{(b+c)^2-a^2}$

10) $\dfrac{x^3}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y^3}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{z^3}{(z-x)(z-y)}$

11) $\dfrac{a^2-2ax+x^2}{2(a^2-x^2)}-\dfrac{2ax(a+x)}{(a-x)(a^2+2ax+x^2)}+\dfrac{a^2-x^2}{2(x-a)^2}$

12) $\dfrac{a^2-16b^2}{a^2+7ab+12b^2}\times\dfrac{a^2-9b^2}{a^2-2ab-8b^2}\times\dfrac{a^2-4b^2}{a^2-6ab+9b^2}$

13) $\left[\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{x^{-1}-y^{-1}}\right]^{-1}+\left[\dfrac{y^{-2}+x^{-2}}{y^{-2}-x^{-2}}\right]^{-1}+\left(x^{-3}+y^{-3}\right)^0$

14) $\dfrac{4a^2-1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{4b^2-1}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{4c^2-1}{(c-a)(c-b)}$

15) Si $a+b+c=0$, simplificar:

a) $\dfrac{a^2}{bc}+\dfrac{b^2}{ac}+\dfrac{c^2}{ab}$

b) $\dfrac{2(a^4+b^4+c^4)}{(a^2+b^2+c^2)^2}$

c) $\dfrac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2)+\dfrac{c+a}{ac}(c^2+a^2-b^2)+\dfrac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2)$

d) $\left[\dfrac{b-c}{a}+\dfrac{c-a}{b}+\dfrac{a-b}{c}\right]\left[\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b}{c-a}+\dfrac{c}{a-b}\right]$

Respuestas:

1) $\dfrac{2a-b}{a+b}$ 2) $\dfrac{y+x}{y}$ 3) ab 4) $\dfrac{8x}{x^2-1}$

5) $\dfrac{x+a}{x+b}$ 6) 0 7) $-\dfrac{1}{c(a-c)(b-c)}$

8) $\dfrac{ab}{2}$ 9) 1 10) $x+y+z$

11) $\dfrac{a-x}{a+x}$ 12) $\dfrac{a-2b}{a-3b}$ 13) $\dfrac{2xy}{(x+y)^2}$ 14) 4

15) a) 3 b) 1 c) 0 d) 9

CAPÍTULO IV
RACIONALIZACIÓN

4.1. RACIONALIZACIÓN

Es la operación que consiste en transformar un denominador irracional en otro equivalente que sea racional.

4.2. FACTOR RACIONALIZANTE

El factor racionalizante de una expresión irracional, es también otra expresión irracional que multiplicada por la primera, la convierte en una expresión racional.

4.3. CASOS QUE SE PRESENTAN

4.3.1. Cuando el denominador es un monomio

El factor racionalizante del denominador es un radical de igual índice, el radicando está elevado a un exponente igual a la diferencia entre el índice de la raíz y el exponente inicial del radicando.

Para racionalizar se multiplica y divide la fracción por el factor racionalizante $F.R.$

Ejemplos:

Racionalizar las siguientes expresiones:

1) $\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^q}}$; $F.R. = \sqrt[n]{a^{n-q}}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^q}} \times \dfrac{F.R.}{F.R.} = \dfrac{F.R}{\sqrt[n]{a^{q+n-q}}} = \dfrac{F.R}{\sqrt[n]{a^n}} = \dfrac{F.R}{a}$

2) $\dfrac{3}{\sqrt[5]{2^2}}$; $F.R. = \sqrt[5]{2^3}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{3}{\sqrt[5]{2^2}} \times \dfrac{F.R.}{F.R.} = \dfrac{3\sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[5]{2^5}} = \dfrac{3\sqrt[5]{2^3}}{2}$

3) $\dfrac{4xy}{\sqrt[4]{2x^2y^3}}$; $F.R. = \sqrt[4]{2^3x^2y}$

$$\frac{4xy}{\sqrt[4]{2x^2y^3}} \times \frac{F.R.}{F.R.} = \frac{4xy\sqrt[4]{2^3x^2y}}{\sqrt[4]{2^4x^4y^4}} = \frac{4xy\sqrt[4]{8x^2y}}{2xy} = 2\sqrt[4]{8x^2y}$$

4.3.2. Cuando el denominador es un binomio

Si el denominador presenta radicales de índice par, se racionaliza multiplicando y dividiendo por la conjugada de denominador. Se denomina "expresión conjugada" a dos expresiones que están formadas, una por la suma y otra por la resta de términos iguales: $(a+b)(a-b)$.

Como $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ podemos concluir que cuando el denominador es un binomio con radicales de índice par, tiene una relación directa con la diferencia de cuadrados (producto notable).

Racionalización

Ejemplos:

Racionalizar las siguientes expresiones:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

$$Si:\ \left.\begin{array}{l}\sqrt{5}=a\\ \sqrt{3}=b\end{array}\right\}\Rightarrow (a+b)\times F.R.=a^2-b^2\ ;\ F.R.=\frac{a^2-b^2}{a+b}=a-b\,,\ F.R.=\sqrt{5}-\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\times\frac{F.R.}{F.R.}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$$

2) $\dfrac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$

$$Si:\ \left.\begin{array}{l}3=a\\ \sqrt{2}=b\end{array}\right\}\Rightarrow (a-b)\times F.R.=a^2-b^2\ ;\ F.R.=\frac{a^2-b^2}{a-b}=a+b\,;\ F.R.=3+\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}\times\frac{F.R.}{F.R.}=\frac{\sqrt{2}\left(3+\sqrt{2}\right)}{(3)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}+2}{7}$$

3) $\dfrac{5}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{2}}$; $F.R._1=\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{2}$

$$\frac{5}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{2}}\times\frac{F.R._1}{F.R._1}=\frac{5\times F.R._1}{\left(\sqrt[4]{5}\right)^2-\left(\sqrt[4]{2}\right)^2}=\frac{5\times F.R._1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\ ;\qquad F.R._2=\sqrt{5}+\sqrt{2}$$

$$\frac{5\times F.R._1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\times\frac{F.R._2}{F.R._2}=\frac{5\times F.R._1\times F.R._2}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{5\times F.R._1\times F.R._2}{3}$$

NOTA:

Si los índices de los radicales son impares o distintos se debe determinar el factor racionalizante mediante un análisis de correspondencia con algún producto notable conocido.

Ejemplos:

4) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}$

$$Si:\ \left.\begin{array}{l}\sqrt[3]{5}=a\\ \sqrt[3]{2}=b\end{array}\right\}\Rightarrow (a-b)\times F.R.=a^3-b^3\ ;\ F.R.=\frac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2$$

$$F.R.=\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}\times\frac{F.R.}{F.R.}=\frac{F.R.}{\left(\sqrt[3]{5}\right)^3-\left(\sqrt[3]{2}\right)^3}=\frac{F.R.}{3}$$

5) $$\frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt[3]{3}\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt[3]{3}\sqrt{2}}{\sqrt[6]{2^3}-\sqrt[6]{3^2}}=\frac{\sqrt[3]{3}\sqrt{2}}{\sqrt[6]{8}-\sqrt[6]{9}}$$

Si:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[6]{8}=a\\ \sqrt[6]{9}=b\end{array}\right\}\Rightarrow (a-b)\times F.R.=a^6-b^6\ ;\ F.R.=\frac{a^6-b^6}{a-b}=a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5$$

$$F.R.=\sqrt[6]{8^5}+\sqrt[6]{8^4\cdot 9}+\sqrt[6]{8^3\cdot 9^2}+\sqrt[6]{8^2\cdot 9^3}+\sqrt[6]{8\cdot 9^4}+\sqrt[6]{9^5}$$

$$\frac{\sqrt[3]{3}\sqrt{2}}{\sqrt[6]{8}-\sqrt[6]{9}}\times\frac{F.R.}{F.R.}=\frac{\left(\sqrt[3]{3}\sqrt{2}\right)\times F.R.}{8-9}=-\left(\sqrt[3]{3}\sqrt{2}\right)\times F.R.$$

4.3.3. Cuando el denominador es un trinomio.

Si los índices de los radicales son pares se puede agrupar los términos de tal manera que se transforme en un binomio en cuyo caso el factor racionalizante es la conjugada de la expresión agrupada.

Si los índices de los radicales no son pares, habrá que analizar y determinar el factor racionalizante.

Ejemplos:

Racionalizar las siguientes expresiones:

1) $$\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{\left[\left(2-\sqrt{2}\right)+\sqrt{3}\right]}\times\frac{\left[\left(2-\sqrt{2}\right)-\sqrt{3}\right]}{\left[\left(2-\sqrt{2}\right)-\sqrt{3}\right]} \quad ; \quad F.R._1 = \left[\left(2-\sqrt{2}\right)-\sqrt{3}\right]$$

$$= \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\times F.R._1}{\left(2-\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\times F.R._1}{4-4\sqrt{2}+2-3} = \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\times F.R._1}{3-4\sqrt{2}} \quad ; \quad F.R._2 = 3+4\sqrt{2}$$

$$= \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\times F.R._1}{3-4\sqrt{2}}\times\frac{3+4\sqrt{2}}{3+4\sqrt{2}} = \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\times F.R._1\times F.R._2}{9-\left(4\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\times F.R._1\times F.R._2}{-23} = -\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\times F.R._1\times F.R._2}{23}$$

2) $$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}}$$

$$Si: \left.\begin{array}{l} \sqrt[3]{a} = x \Rightarrow \sqrt[3]{a^2} = x^2 \\ \sqrt[3]{b} = y \Rightarrow \sqrt[3]{b^2} = y^2 \\ \sqrt[3]{ab} = xy \end{array}\right\} \Rightarrow \left(x^2+xy+y^2\right)\times F.R. = x^3-y^3$$

$$F.R. = \frac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2} = x-y \quad ; \quad F.R. = \sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}\times\frac{F.R.}{F.R.} = \frac{F.R.}{a-b}$$

4.3.4. Cuando el denominador es un polinomio.

Utilizando cambios de variable, el denominador se puede expresar de la forma de uno de los factores de algún producto notable conocido.

Ejemplos:

Determinar el factor racionalizante de las siguientes expresiones:

1) $$\frac{1}{\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}+1}$$

$$Si: \left.\begin{array}{l} \sqrt[4]{2} = a \\ 1 = b \end{array}\right\} \Rightarrow \left(a^3+a^2b+ab^2+b^3\right)\times F.R. = a^4-b^4$$

$$F.R. = \frac{a^4-b^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3} = a-b \quad ; \quad F.R. = \sqrt[4]{2}-1$$

Racionalización

$$\frac{1}{\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}+1}\times\frac{F.R.}{F.R.}=\frac{F.R}{\left(\sqrt[4]{2}\right)^4-1^4}=F.R$$

2) $$\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}-x^{\frac{3}{5}}+\sqrt[5]{x^2}-\sqrt[5]{x}+1}$$

$$Si:\ \left.\begin{array}{l}\sqrt[5]{x}=a\\ \sqrt[5]{x^2}=a^2\\ \sqrt[5]{x^3}=a^3\\ \sqrt[5]{x^4}=a^4\\ 1=b\end{array}\right\}\Rightarrow\left(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4\right)\times F.R.=a^5+b^5$$

$$F.R.=\frac{a^5+b^5}{a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4}=\frac{(a+b)\left(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4\right)}{a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4}=a+b$$

$$F.R.=\sqrt[5]{x}+1$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}-x^{\frac{3}{5}}+\sqrt[5]{x^2}-\sqrt[5]{x}+1}\times\frac{F.R.}{F.R.}=\frac{F.R.}{x+1}$$

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

Racionalizar el denominador y simplificar las siguientes expresiones:

1) $\dfrac{2}{3\sqrt[7]{2^4}}$ 2) $\dfrac{6a^3bc^2}{\sqrt[6]{324\,a^3b^5c}}$ 3) $\dfrac{12}{5-\sqrt{21}}$ 4) $\dfrac{2\sqrt{14}}{4\sqrt{7}+3\sqrt{2}}$

5) $\dfrac{1}{\sqrt{2-\sqrt[3]{3}}}$ 6) $\dfrac{2}{x^2-\sqrt{x^4+2x^2+1}}$ 7) $\dfrac{12}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}$ 8) $\dfrac{a-b}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}$

9) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}$ 10) $\dfrac{3+4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ 11) $\dfrac{14}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25}}$ 12) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}$

13) $\dfrac{a}{\sqrt{2a-\sqrt[3]{a}}+\sqrt{a}}$ 14) $\dfrac{5}{\sqrt[5]{3}+\sqrt[5]{2}}$

Respuestas:

1) $\dfrac{\sqrt[7]{8}}{3}$ 2) $a^2c\,\sqrt[6]{2^4\cdot 3^2\,a^3bc^5}$ 3) $15+3\sqrt{21}$

4) $\dfrac{28\sqrt{2}-6\sqrt{7}}{47}$ 5) $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt[3]{3}}\,\left(4+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\right)}{5}$ 6) -2

7) $4\sqrt[3]{2}-4+2\sqrt[3]{4}$ 8) $\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{a^2b}+\sqrt[4]{ab^2}+\sqrt[4]{b^3}$

9) $\dfrac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x^2y}+\sqrt[4]{xy^2}-\sqrt[4]{y^3}}{x-y}$ 10) $\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{5}$ 11) $2\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{5}$

12) $\dfrac{\sqrt[3]{3}-1}{2}$ 13) $\dfrac{F.R.1\times F.R.2}{a^2-1}$ 14) $\sqrt[5]{81}-\sqrt[5]{54}+\sqrt[5]{36}-\sqrt[5]{24}+\sqrt[5]{16}$

Racionalización

EJERCICIOS DE REFUERZO

Racionalizar el denominador de las siguientes fracciones y simplificar:

1) $\dfrac{bc}{\sqrt[5]{16a^3bc^2}}$

2) $\dfrac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{\sqrt[3]{a^2+2ab+b^2}}$

3) $\dfrac{x^2+x-6}{\sqrt[5]{x^2+6x+9}}$

4) $\dfrac{b-c}{\sqrt{ab}-\sqrt{ac}}$

5) $\dfrac{mn}{m\sqrt{n}-n\sqrt{m}}$

6) $\dfrac{6\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{\sqrt{14-4\sqrt{6}}}$

7) $\dfrac{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2-\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

8) $\dfrac{1+2\sqrt{35}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}-\sqrt{11}}$

9) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+2}$

10) $\dfrac{x^2-26x-27}{\sqrt[3]{x}-3}$

11) $\dfrac{a^2-2a+1}{\sqrt[6]{a}+1}$

12) $\dfrac{a^2-1}{\sqrt{2a-\sqrt[3]{a}}+\sqrt{a}}$

13) $\dfrac{48}{\sqrt[3]{21}-\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{35}-\sqrt[3]{5}}$

14) $\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}-2}$

15) $(x-y)\left[x^{-\frac{1}{3}}-y^{-\frac{1}{3}}\right]^{-1}\sqrt[-3]{xy}$

16) $\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}$

17) $\dfrac{12}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}$

18) $\dfrac{a-b}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$

19) $\dfrac{-10}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}$

20) $\left[3x^{\frac{1}{5}}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\right]^{-1}$

21) $\dfrac{1}{\sqrt[\frac{1}{2}]{a}+\sqrt[\frac{1}{3}]{b^{\frac{1}{2}}}}$

22) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}$

23) $\dfrac{x-16}{\sqrt[3]{4^2}\cdot\sqrt[5]{x}-\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^{-0,2}}}$

24) $\dfrac{8x-27y}{4x^{\frac{2}{3}}+6\sqrt[3]{xy}+9\sqrt[3]{y^2}}$

25) $\dfrac{15}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}$

26) $\dfrac{1}{1-2^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{2}}-8^{\frac{1}{4}}}$

27) $\dfrac{x^2-x}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[6]{x^5}}$

28) $\dfrac{x^2-14x-32}{\sqrt[4]{x}+2}$

29) $\dfrac{3}{\sqrt[4]{125}-\sqrt[4]{50}+\sqrt[4]{20}-\sqrt[4]{8}}$

30) $\dfrac{x^3-y^3}{\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{x^3y}+\sqrt[5]{x^2y^2}-\sqrt[5]{xy^3}+\sqrt[5]{y^4}}$

31) $\dfrac{a-b}{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a^2b}}$

32) $\dfrac{x^2-x}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[6]{x^5}}$

33) $\left[\left(\sqrt[3]{x^2}\right)\left(x^{-\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}\right)\right]^{-1}\left(x^2-xy\right)$

34) $\dfrac{x^2-x}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}$

Racionalización

Respuestas:

1) $\dfrac{\sqrt[5]{2a^2b^4c^3}}{2a}$

2) $(a+b)^2\ \sqrt[3]{a+b}$

3) $(x-2)\sqrt[5]{(x+3)^3}$

4) $\dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{ac}}{a}$

5) $\dfrac{m\sqrt{n}+n\sqrt{m}}{m-n}$

6) 3

7) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

8) $\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11}$

9) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4}{x+8}$

10) $(x+1)\left(\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}+9\right)$

11) $(a-1)\left(\sqrt[6]{a^5}-\sqrt[3]{a^2}+\sqrt{a}-\sqrt[3]{a}+\sqrt[6]{a}-1\right)$

12) $\dfrac{\left(\sqrt{2a-\sqrt[3]{a}}-\sqrt{a}\right)\left(a^2+a\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}\right)}{a}$

13) $\left(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{7}+1\right)\left(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}\right)$

14) $-\sqrt[3]{2}-1$

15) $-\left(\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{x^2}\right)$

16) $\sqrt{x^2-1}-x$

17) $4\sqrt[3]{2}-4+2\sqrt[3]{4}$

18) $\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$

19) $-2\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{6}-2\sqrt[3]{9}$

20) $\dfrac{\sqrt[5]{x^4}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{3x(x-y)}$

21) $\dfrac{a^2-b\sqrt{b}}{a^4-b^3}$

22) $\sqrt[3]{3}+1$

23) $-\dfrac{\sqrt[5]{x^4}\left(4\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{x}$

24) $2\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{y}$

25) $3\left[\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}\right]$

26) $-\left(1+\sqrt[4]{2}\right)$

27) $-\sqrt[3]{x}\left[1+\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x^5}\right]$

28) $(x+2)\left(\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}+4\sqrt[4]{x}-8\right)$

29) $\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{2}$

30) $\left(x^2+xy+y^2\right)\left(\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{y}\right)$

31) $\dfrac{\sqrt{a}\left[\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{a^2b}+\sqrt[4]{ab^2}+\sqrt[4]{b^3}\right]}{a}$

32) $-\sqrt[3]{x}\left[1+\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x^5}\right]$

33) $\sqrt{xy}\ \sqrt[3]{x}\ \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)$

34) $\sqrt[6]{x^5}\ \left(\sqrt{x}-1\right)$

CAPÍTULO V
ECUACIÓN DE PRIMER GRADO Y SISTEMAS LINEALES

5.1. CONCEPTOS BÁSICOS

5.1.1. IDENTIDAD.- Es toda igualdad que se cumple para cualquier valor de las variables.

Ejemplos:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $log(a \times b) = log\, a + log\, b$; $Sen^2 x + Cos^2 x = 1$

5.1.2. ECUACIÓN.- Es toda igualdad que se verifica para determinados valores de la variable (soluciones o raíces de la ecuación).

Ejemplos:

1) $x^2 + 2x - 3 = 0$; Se verifica solamente para $x_1 = -3$ y $x_2 = 1$
2) $5x + 2 = 17$; Se verifica solo para $x = 3$ (solución única)

A la variable x se le llama también incógnita, y a la ecuación se le conoce también como igualdad condicional.

5.1.3. ECUACIONES EQUIVALENTES.- Son aquellas que tienen la misma solución.

Ejemplo:

$4x - 5 = 2x + 13$ y $x + 3 = 12$; tiene como solución $x = 9$

5.2. CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES:

5.2.1. Por su estructura:
- *Algebraicas*
  - *Polinomiales*
  - *Racionales*
  - *Irracionales*
- *Trascendentes*
  - *Exponenciales*
  - *Logarítmicas*
  - *Trigonométricas*
  - *Hiperbólicas*

5.2.2. Por sus coeficientes: Pueden ser numéricas o literales
5.2.3. Por sus incógnitas: Pueden ser de 1, 2,3,..... etc. Incógnitas
5.2.4. Por su grado: Pueden ser de primer grado, segundo grado, ...etc grado
5.2.5. Por el número de soluciones: Pueden ser compatibles o incompatibles
a) Compatibles o consistentes (tienen un número limitado de soluciones)
Determinadas (1,2,3... soluciones)
✓ Indeterminadas (infinitas soluciones)
b) Incompatibles, inconsistentes o absurdas (no tienen solución)

5.3. PRINCIPIOS FUNDAMENTALES PARA LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

1) Si a los dos miembros de una ecuación se le suma o resta una misma expresión numérica o algebraica definida, se obtendrá otra ecuación equivalente a la primera.

$$5x - 5 = 2x$$
$$5x - 5 + 5 = 2x + 5 \quad ; \quad 5x = 2x + 5$$

Consecuencias prácticas:

a) Se puede suprimir términos idénticos que están en miembros diferentes

$$2x+4=-3x+4 \quad \Rightarrow \quad 2x=-3x$$

b) Todo miembro puede pasar de un miembro a otro cambiándole el signo

$$2x+4=-3x+5 \quad \Rightarrow \quad 2x+4+3x-5=0$$

$$5x-1=0$$

2) Si se multiplican o dividen ambos miembros de una ecuación por una misma cantidad conocida diferente de cero, resulta una ecuación equivalente.

$$x-2=0 \quad \Rightarrow \quad 2x-4=0$$

$$2x+6=0 \quad \Rightarrow \quad x+3=0$$

3) Si ambos miembros de una ecuación tienen factores comunes, no es recomendable simplificarlos porque se pueden perder posibles soluciones.

Incorrecto: $(x-2)[x+4]=5(x-2)$, simplificando $(x-2)$ tememos: $x+4=5$, $x=1$ *Solución*

Correcto: $(x-2)[x+4]-5(x-2)=0$

$(x-2)[x+4-5]=0$; $(x-2)(x-1)=0$; $x=2 \vee x=1$ *Solución*

4) Si a ambos miembros de una ecuación se les eleva a una misma potencia, la nueva ecuación conserva las soluciones de las anteriores, pudiendo darse el caso que lleve otra solución más llamada solución extraña.

$$x+\sqrt{x+5}=7$$

$$\sqrt{x+5}=7-x$$

$$x+5=(7-x)^2$$

$$x+5=49-14x+x^2$$

$$x^2-15x+44=0$$

$$(x-11)(x-4)=0$$

$$x_1=11 \vee x_2=4$$

Si $x=11 \Rightarrow 11+\sqrt{11+5}=7$; $11+4=7$ Falso

Si $x=4 \Rightarrow 4+\sqrt{4+5}=7$; $4+3=7$ Verdadero

$x=11$ Es la solución extraña

5) Si a ambos miembros de una ecuación se les extrae una misma raíz, la nueva ecuación tiene menos soluciones que la primera.

$(2x-1)^2=9$; sacando la raíz a ambos miembros

$\sqrt{(2x-1)^2}=\sqrt{3^2}$; aquí se está cancelando una solución ya que la ecuación es de segundo grado

$$2x-1=3$$

$$2x=4$$

$$x=2$$

La forma correcta es:

$$(2x-1)^2=9$$

$$4x^2-4x+1-9=0$$

$$4x^2-4x-8=0$$

$$x^2-x-2=0$$

$$(x-2)(x+1)=0$$

$$x_1=2 \vee x_2=-1$$

Siendo la solución $x_1=2$ ó $x_2=-1$

5.4. ECUACIÓN DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Son aquellas que pueden reducirse a la forma $ax \pm b = 0$; donde $a \neq 0$ (siempre)

a y b = coeficientes (numéricos o literales) ; x = variable (incógnita) ; Solución es: $x = \mp \frac{b}{a}$

5.4.1. DISCUSIÓN DE LA SOLUCIÓN

5.3.1.1. Si a $\neq 0$ $\wedge$ b $\neq 0$; se tendrá $x = -\frac{b}{a}$ ó $x = \frac{b}{a}$

5.3.1.2. Si a $\neq 0$ $\wedge$ b = 0; se tendrá $x = 0$ (solución nula)

5.3.1.3. Si a = 0 $\wedge$ b = 0; se tendrá $x = \frac{0}{0}$ (indeterminación)

5.3.1.4. Si a = 0 $\wedge$ b $\neq$ 0; se tendrá $x = \frac{b}{0}$ lo que significa que no hay solución o es una ecuación incompatible o absurda.

EJERCICIOS RESUELTOS

Resolver las siguientes ecuaciones:

1) $$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x-1\right)-1\right]-1\right\}-1\right)-1=0$$

$$\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left[\frac{1}{9}x-\frac{1}{3}-1\right]-1\right)-1\right\}-1=0 \quad ; \quad \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{27}x-\frac{4}{9}-1\right)-1\right\}-1=0$$

$$\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{81}x-\frac{13}{27}-1\right\}-1=0 \quad ; \quad \frac{1}{243}x-\frac{40}{81}-1=0 \quad ; \quad \frac{x}{243}-\frac{121}{81}=0 \quad ; \quad x=363$$

2) $$\left(x-2+\frac{5}{x}\right)\left(x+2+\frac{5}{x}\right)-\frac{5}{x} = x^2+6$$; Debemos condicionar $x \neq 0$

$$\left[\left(x+\frac{5}{x}\right)-2\right]\left[\left(x+\frac{5}{x}\right)+2\right]-\frac{5}{x} = x^2+6$$

$$\left[\left(x+\frac{5}{x}\right)^2-4\right]-\frac{5}{x} = x^2+6 \quad ; \quad \left[\left(\frac{x^2+5}{x}\right)^2-4\right]-\frac{5}{x} = x^2+6 \quad ;$$

$$\frac{x^4+10x^2+25-4x^2}{x^2}-\frac{5}{x} = x^2+6 \quad ; \quad x^4+10x^2+25-4x^2-5x = x^4+6x^2$$

$$x^4+6x^2-5x+25 = x^4+6x^2 \quad ; \quad -5x=-25 \quad \Rightarrow \quad x=5$$

3) $$\frac{1}{1+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{2x+1}{2}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3+1}{3}}} \quad ; \quad \frac{1}{1+\frac{2}{2x+1}} = \frac{1}{1+\frac{3}{4}} \quad ; \quad \frac{1}{\frac{2x+1+2}{2x+1}} = \frac{1}{\frac{4+3}{4}} \quad ; \quad \frac{2x+1}{2x+3} = \frac{4}{7}$$

$$14x+7 = 8x+12 \quad ; \quad 6x=5 \quad ; \quad x=\frac{5}{6}$$

4) $\frac{(a+b)x}{a-b}+\frac{1}{a+b}=\frac{2}{b^2-a^2}-\frac{1}{b-a}-\frac{(a-b)x}{-(b-a)}$

$\frac{(a+b)x}{a-b}+\frac{1}{a+b}=-\frac{2}{a^2-b^2}+\frac{1}{a-b}-\frac{(a-b)x}{a-b}$; $\frac{(a+b)x}{a-b}+x=-\frac{2}{(a+b)(a-b)}+\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}$

$\frac{ax+bx+ax-bx}{(a-b)}=\frac{-2+a+b-(a-b)}{(a+b)(a-b)}$; $\frac{ax+bx+ax-bx}{(a-b)}=\frac{-2+a+b-(a-b)}{(a+b)(a-b)}$

$2ax=\frac{-2+a+b-a+b}{a+b}$; $2ax=\frac{-2+2b}{a+b}$; $x=\frac{-2(1-b)}{2a(a+b)}$; $x=\frac{b-1}{a^2+ab}$

5) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}=1$

$\left(\sqrt{x+4}\right)^2=\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2$; $x+4=x-1+2\sqrt{x-1}+1$

$(4)^2=\left(2\sqrt{x-1}\right)^2$; $16=4(x-1)$; $4=x-1$; $x=5$

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

Resolver las siguientes ecuaciones:

1) $\frac{1}{9}\left[3x-6-5\left(\frac{7x}{2}-5\right)\right]+13(x-5)+\frac{1}{4}=0$

2) $\frac{2}{y^2-y-2}+\frac{1}{y^2-3y+2}=\frac{8}{y^2-1}$

3) $\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}=\frac{a-b}{x^2-ab}$

4) $\frac{x-1}{x+a-b}=\frac{1-x}{x-a+b}+2$

5) $\frac{\sqrt[n]{2+x}}{2}=\sqrt[n]{2x}-\frac{\sqrt[n]{2+x}}{x}$

6) $(a+x)(b+x)-a(b+c)=\frac{a^2c}{b}+x^2$

7) $\frac{a}{b}\left(1-\frac{a}{x}\right)+\frac{b}{a}\left(1-\frac{b}{x}\right)=1$

8) $\frac{x+a^2}{(a+b-c)(a-b+c)}-1=\frac{b^2+c^2-x}{(c-a-b)(b-a-c)}$

9) $\sqrt{2a+x}=x^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}$

10) $\frac{x}{a^{m-1}b^m}-\frac{x}{a^m b^{m-1}}=\frac{1}{b^m}-\frac{1}{a^m}$

11) $\frac{a+x}{a^2+ax+x^2}-\frac{a-x}{ax-x^2-a^2}=\frac{3a}{x\left(a^4+a^2x^2+x^4\right)}$

12) $\frac{x-a}{x-a-1}+\frac{x-b-1}{x-b-2}=\frac{x-b}{x-b-1}+\frac{x-a-1}{x-a-2}$

13) $\frac{x+m}{a+b}-\frac{ax}{(a+b)^2}=\frac{am}{a^2-b^2}-\frac{b^2x}{a^3-ab^2+a^2b-b^3}$

14) $\frac{(a+b)x}{a-b}+\frac{ax}{a+b}-\frac{a-b}{a+b}=\frac{ax}{a-b}+\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}$

Respuestas:

1) $x=\frac{11}{2}$ 2) $y=3$ 3) $x=\frac{2ab}{a+b}$ 4) $x=(a-b)^2$

5) $x=2$ 6) $x=\frac{ac}{b}$ 7) $x=a+b$ 8) $x=bc$

9) $x = \frac{1}{4}a$ 10) $x = \frac{a^m - b^m}{a - b}$ 11) $x = \frac{3}{2a^2}$ 12) $x = \frac{a+b+3}{2}$

13) $x = \frac{am + bm}{a}$ 14) $x = 2$

5.5. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON ECUACIONES

Reglas a seguir:

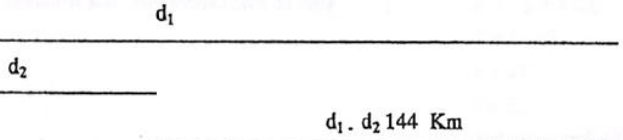
1. **Identificar la variable:** reemplazar la cantidad que se pide determinar. Generalmente se identifica mediante una lectura cuidadosa de la pregunta planteada al final del problema. Introduzca una notación para la variable (denótela con x o cualquier otra letra) asegúrese de escribir correctamente lo que representa la variable.
2. **Exprese todas las incógnitas en términos de la variable:** lea de nuevo cada una de las frases del problema y exprese todas las cantidades mediante la variable definida. para organizar esta información, algunas veces resulta útil dibujar un diagrama o elaborar una tabla.
3. **Relacione las cantidades:** identifique la condición del problema que relaciona las expresiones establecidas en el paso anterior. Un enunciado que dice que la cantidad "es igual a" o "es lo mismo que " otra, generalmente señala el tipo de relación que estamos buscando.
4. **Establezca una ecuación:** plantee una ecuación que exprese la condición de problema identificada en el paso anterior. Aquí necesitara la expresión algebraica.
5. **Resuelva el problema y verifique su respuesta:** resuelva la ecuación, verifique que su resolución satisface el problema original, que responda a la pregunta planteada en el problema.

EJERCICIOS RESUELTOS

1) El precio de una casa se redujo en 11% para alcanzar un valor de \$48 950. ¿Cuál es el precio original?

Sea "x"= precio original
Nuevo precio = Precio original – 11% del precio original.
$x - 11\%\,(x) = 48\,950$
$x - 0.11x = 48\,950$; $0.89x = 48\,950$; $x = 55\,000$ $\Rightarrow$ $Sol: \$\,55\,000$

2) Dos trenes parten de Riobamba al mismo tiempo viajando en la misma dirección en vías paralelas. Un tren viaja a $80\ Km/h$, el otro viaja a $60\ Km/h$. ¿En cuántas horas estarán a $144\ Km$ de distancia entre si?



Tren	Velocidad	Tiempo	Distancia
1	80	t	80 t
2	60	t	60 t

Condición: $d_1 - d_2 = 144\ Km$

$$80t - 60t = 144 \quad ; \quad 20t = 144 \quad ; \quad t = \frac{36}{5}\ horas \quad ; \quad t = 7{,}2\ horas$$

3) Se dispone de dos bombas a fin de llenar un tanque para almacenar gasolina. La bomba A, sola, puede hacerlo en 3 horas y la bomba B, en 4 horas. Si se usan al mismo tiempo, ¿Cuánto tardaran en llenar el tanque?

Sea: x = número de horas que se demora en llenar el tanque usando las dos bombas.

$\frac{1}{3}$ = parte del tanque llenada por A en 1 hora. ; $\frac{1}{4}$ = parte del tanque llenada por A en 1 hora.

$\frac{1}{x}$ = parte del tanque llenada por A y B en 1 hora.

$$\left(\begin{array}{c}\text{Parte llenada por}\\ \text{A en 1 hora}\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}\text{Parte llenada por}\\ \text{B en 1 hora}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{Parte llenada por}\\ \text{A y B en 1 hora}\end{array}\right)$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1}{x} \quad ; \quad \frac{7}{12}=\frac{1}{x} \quad ; \quad 7x=12 \quad ; \quad x=\frac{12}{7}\,horas$$

El tanque se llenará en $\frac{12}{7}$ horas, o sea alrededor de 1 hora 43 minutos

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

1) Hallar tres números enteros consecutivos cuya suma sea 24.

2) Hace 10 años la edad de Carlos era cuatro veces mayor que la de Xavier y, hoy en día, es solamente el doble. Hallar las edades actuales de ambos.

3) Hallar un número de dos cifras sabiendo que las correspondientes a las decenas excede en cuatro a la cifra de las unidades y, por otra parte, es igual al doble de esta menos uno.

4) Dos automóviles, A y B, parten desde un mismo punto y recorren un trayecto rectilíneo con velocidades medias de 30 y 50 $\frac{km}{h}$ respectivamente. Sabiendo que B parte tres h después que A, hallar a) el tiempo y b) la distancia recorrida hasta que se encuentran.

5) Tres grifos llenan un depósito en 20, 30 y 60 minutos, respectivamente. Calcular el tiempo que tarda en llenarse dicho depósito cuando se utilizan los tres tubos simultáneamente.

6) Un vendedor vende la mitad de las naranjas, más la mitad de una naranja; una segunda vez, vende la mitad del resto, más media naranja y así sucesivamente; después de tres ventas no le queda ninguna. Determinar cuántas naranjas tenía el vendedor.

7) David viajó en autobús a una ciudad a 54 Km de distancia y regresó a casa en su bicicleta. El autobús viaja al doble de la velocidad de la bicicleta y el viaje de ida y vuelta duró $\frac{15}{4}$ horas. Calcular a qué velocidad viajó David en su bicicleta.

8) Un fabricante de refrescos produce jugo de naranja que es anunciado como de "sabor natural" aunque sólo contiene 5 % de jugo. Una nueva regulación municipal estipula que para que una bebida se anuncie como "natural" deberá contener por lo menos 10 % de jugo de fruta. Determinar cuánto jugo de naranja debe agregar el fabricante a 900 litros de refresco de naranja, para cumplir con la nueva reglamentación.

Ecuación de Primer Grado y Sistemas Lineales

Respuestas:

1) 7 , 8 , 9 2) Carlos 30 años y Xavier 15 años 3) 95

4) *a)* *A viaja durante* $= 7\frac{1}{2}\,h$; *B viaja* $= 4\frac{1}{2}\,h$
b) 225 *km*

5) 10 min.

6) 7 naranjas 7) 21,6 Km 8) 50 litros

EJERCICIOS DE REFUERZO

Resolver las siguientes ecuaciones:

1) $\frac{2-x}{3}+\frac{3-x}{4}+\frac{4-x}{5}+\frac{5-x}{6}+\frac{3}{4}=0$

2) $\frac{bx-a}{bx+a}+\frac{2a}{a-bx}=\frac{b^2x^2+a^2}{b^2x^2-a^2}$

3) $\frac{a}{b-\frac{c}{2}}\left(\frac{b}{3}-\frac{c}{6}\right)x-\frac{\frac{1}{a}-a}{\frac{1}{a}+1}\cdot\frac{a}{1-a}=0$

4) $\left(\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}}{1+\frac{1}{ab}}+x-1\right)\div\left(\frac{1+\frac{1}{a}}{b+\frac{1}{a}}-x+1\right)=0$

5) $\frac{x-1}{n-1}+\frac{2n^2(1-x)}{n^4-1}=\frac{2x-1}{1-n^4}-\frac{1-x}{1+n}$

6) $a\left(\sqrt{x}-a\right)-b\left(\sqrt{x}-b\right)+a+b=\sqrt{x}$

7) $\frac{\frac{a+x}{a-x}-(b+x)(b-x)^{-1}}{2(a-x)^{-1}-2(b-x)^{-1}}=1$

8) $\frac{x+m}{a+b}-\frac{ax}{(a+b)^2}=\frac{am}{a^2-b^2}-\frac{b^2x}{a^3-ab^2+a^2b-b^3}$

9) $\frac{ax^{m+1}-x^m}{x-1}+\frac{bx^m}{x+1}=\frac{ax^m\left(x^2+1\right)}{x^2-1}$

10) $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$

11) $\frac{(a+b)^2(x+1)-(a+b)(x+1)+(x+1)}{a+b+1}=(a+b)^2-(a+b)+1$

12) $\frac{an}{a-x}+\frac{(a+n)\left(anx+nx^2+x^3\right)}{x^3+nx^2-a^2x-a^2n}=\frac{ax}{n+x}+\frac{nx^2}{x^2-a^2}$

13) $a\left(\frac{x-6c}{3b}\right)-b\left(\frac{x-4a}{2c}\right)=\frac{(2a-3c)x}{6b}$

14) $\frac{b^2x(b+2a)}{a(a+b)^2}-\frac{bx}{a}=3cx-3abc-\frac{(ab)^2}{(a+b)^2}$

15) $\frac{x+a}{3}=\frac{3ab-3b^2}{9x-3a}-\frac{(x-b)^2}{a-3x}$

16) $\frac{(ab+c)x}{b-\frac{c}{a}}-\frac{ab-c}{b+\frac{c}{a}}=\frac{(ab-c)x}{b+\frac{c}{a}}-\frac{ab+c}{b-\frac{c}{a}}$

17) $\frac{9(7x-3)^2}{2x+1}=\frac{125}{3}\sqrt{14x^2+x-3}$

18) $\frac{a^2+x}{b^2-x}-\frac{a^2-x}{b^2+x}=\frac{4abx+2a^2-2b^2}{b^4-x^2}$

Ecuación de Primer Grado y Sistemas Lineales

19) $\frac{(a+b)x}{a-b}+\frac{1}{a+b}=\frac{2}{b^2-a^2}-\frac{1}{b-a}-\frac{(a-b)x}{a+b}$

20) $\frac{x-a}{b+c}+\frac{x-b}{a+c}+\frac{x-c}{a+b}=3$

21) $ax\left(\frac{1-a^n}{1-a}\right)-a^n x+x=1$

22) $\sqrt{3m\sqrt{24m\sqrt{18m\sqrt{mx}}}}=6m$

23) $\sqrt{x^2+\sqrt{4x^2+x+\sqrt{9x^2+12x}}}=1+x$

24) $\frac{1}{\frac{3(m+n)^2}{p^2x}-\frac{m+n}{p}}=\frac{p}{2(m+n)}$

Respuestas:

1) $x=4$ 2) $x=-\frac{a}{2b}$ 3) $x=3$ 4) $x=\frac{ab-a}{ab+1}$ 5) $x=\frac{3}{4}$

6) $x=(a+b)^2$ 7) $x=1$ 8) $x=\frac{(a+b)m}{a}$ 9) $x=\frac{a+b+1}{a+b-1}$ 10) $x=\frac{25}{16}$

11) $x=a+b$ 12) $x=\frac{n^2}{a}$ 13) $x=4a$ 14) $x=ab$ 15) $x=\frac{a}{2}$

16) $x=-1$ 17) $x=4$ 18) $x=\frac{a+b}{a-b}$ 19) $x=\frac{b-1}{a^2+ab}$ 20) $x=a+b+c$

21) $x=\frac{1-a}{1-a^n}$ 22) $x=4m$ 23) $x=\frac{1}{6}$ 24) $x=\frac{m+n}{p}$

Resolver los siguientes problemas de aplicación de ecuaciones lineales:

1) En una reunión se encuentran tantos caballeros como tres veces el número de damas, si luego se retiran 8 parejas, el número de caballeros que aún quedan es igual a 5 veces el número de damas. ¿Cuántos caballeros había al inicio?

2) Una llave puede llenar un depósito en 4 minutos, otra llave en 8 minutos y un desagüe puede vaciarlo, estando lleno, en 20 minutos, ¿En cuánto tiempo se llenará el depósito, si estando vacío y abierto el desagüe se abren las dos llaves?

3) Un hombre gasta la mitad de su sueldo mensual en el alquiler de la casa y alimentación de su familia y 3/8 del sueldo en otros gastos. Al cabo de 15 meses ha ahorrado $ 300. Determinar su sueldo mensual.

4) Compré cierto número de libros a 2 por $ 5 y los vendí a 2 por $ 7, ganando en esta operación $ 8 ¿Cuántos libros compré?

5) Un hombre que está en una ciudad dispone de 12 horas libres. ¿Qué distancia podrá recorrer hacia el campo en un auto que va a 50 Km por hora si el viaje de vuelta debe hacerlo en un caballo que anda 10 Km por hora?

6) Un corredor que parte de A da una ventaja de 30 m a otro que parte de B. El primero hace 8 m por seg. y el segundo 5 m por seg. ¿A qué distancia de A se encontrarán?

7) Un auto que va a 90 Km por hora pasa por A en el mismo instante en que otro auto que va a 70 Km por hora pasa por B y ambos van en el mismo sentido. ¿Qué tiempo tardarán en encontrarse si B dista de A 80 Km?

8) Un tren que va a 100 Km por hora pasa por A en el mismo instante que otro tren que va a 120 Km por hora pasa por B y van uno hacia el otro. A dista de B 550 Km. ¿A qué distancia de A se encontrarán y a qué hora si los trenes pasan por A y B a las 8 am?

Ecuación de Primer Grado y Sistemas Lineales

9) Juan entrenó para una carrera de bicicletas pedaleando a 12 Km/h al subir la montaña y a 30 Km/h al bajar. El entrenamiento duró 7,5 horas, éste empezó y terminó en el mismo punto. ¿Cuánto tiempo tardó Juan en subir la montaña y cuántos Kilómetros recorrió?

10) Un autobús entró en la autopista y se mueve a 90 Km/h hacia el norte. Al mismo tiempo se encuentra una patrulla a 40 Km de distancia al sur de donde entró el autobús; la patrulla viaja hacia el norte a 110 Km/h. ¿Cuánto tiempo tardará la patrulla en alcanzar al autobús?

11) A las 12 del día sale un avión de una ciudad A hacia una ciudad B. A las 13 h otro avión sale de la ciudad B hacia la A. La distancia de A a B es de 4000 Km. La velocidad del avión que sale a las 13 h es de 10 Km/h más rápida que la del otro. Los aviones se encuentran a las 15 h. Encuentre las velocidades de los aviones.

12) Un tanque de agua puede vaciarse con una bomba en 5 horas, pero otra bomba más pequeña puede vaciarlo en 8 horas. Si se pone a funcionar la bomba grande a las 08:00. ¿A qué hora debe encenderse la bomba pequeña para que el tanque quede vacío a las 12:00?

13) Un almacén de ropa tiene venta de liquidación, y anuncia que todos los precios tienen 20% de descuento. Si el precio de oferta de una camisa es $ 28, ¿cuál es su precio normal?

14) El puesto de hot dogs de la Sra María vende hot dogs a $ 2 cada uno y fundas de papas a $ 2,25 cada una. Si las ventas del día totalizan $ 585,50 y se vendieron 278 productos. ¿Cuántos productos de cada tipo se vendieron?

15) Se pide a un estudiante que multiplique 78 por un número de dos cifras en el que la cifra de las decenas es tres veces mayor que la de las unidades, por error intercambia los dígitos en el segundo factor y obtiene un número que es inferior en 2808 al producto buscado. ¿Cuál era este producto?

16) María hereda $ 100 000 y los invierte en dos certificados de depósito. Un certificado paga 6 % y el otro $4\frac{1}{2}\%$ anual de interés simple. Si el interés total es de $ 5 025 al año. ¿Cuánto dinero está invertido a cada una de las tasas?

17) La señora Anita y su hija Teresa trotan regularmente. La señora Anita trota a 5 Km/h., Teresa a 4Km/h. Teresa comienza a trotara medio día. La señora Anita comienza a las 12:30 pm y recorren la misma ruta en línea recta.

a) Determine el tiempo en que la madre y la hija se encuentran.
b) ¿Qué tan lejos del punto de partida estarán ellas cuando se encuentren?

18) El precio de un radio se aumenta en el 35 % y se hace un descuento de 20 % y se vende en $ 80. ¿Cuál es el precio inicial del radio?

19) Un agricultor puede arar un campo en 4 días empleando un tractor. Su peón puede arar el mismo campo en 6 días utilizando un tractor más pequeño. ¿ Cuántos días se requiere para el arado si ellos trabajan juntos?

20) En una fiesta el número de hombres duplica al número de mujeres y la cuarta parte de estas no saben bailar. Si hay 42 mujeres, ¿ cuántas personas hay en la fiesta?

21) ¿Cuántos litros de una solución de ácido nítrico al 60 % deben añadirse a 10 litros de una solución al 30 % para obtener una solución al 50 %?

22) Un farmacéutico, tiene soluciones de fenobarbital al 6 % y al 15 %. Recibe una prescripción para 0.5 litros de una solución al 8 %. Cuánto de cada solución debe mezclar para llenar la prescripción?

Respuestas:

1) 48 **2)** $\frac{40}{13}$ minutos **3)** $160 **4)** 8 libros **5)** 100 *Km*

6) Se encontrarán a 80 m de A **7)** 4 horas

8) Se encontrarán a 300 Km y a las 10 h 30 min. 9) $t = 2\frac{1}{2}$ horas. Recorrió 30 Km

10) 2 horas 11) $v_A = 796$ km/h , $v_B = 806$ Km/h 12) $\frac{40}{13}$ minutos

13) $35 14) 160 hot dogs y 118 fundas de papas 15) 4836

16) $35 000 al 6 % y $65 000 al $4\frac{1}{2}$% 17) a) 14:30 pm b) Se encontrarán a 10 Km del punto inicial

18) $75 19) $2\frac{2}{5}$ días 20) 168 personas 21) Deben añadirse 20 litros al 60 %

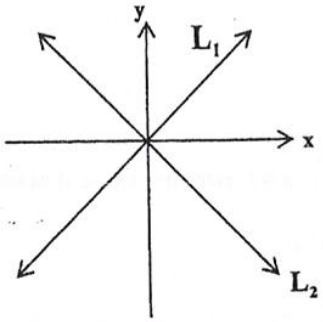
22) Debe mezclar 0.39 litros al 6 % y 0.11 litros de solución al 15 %

5.6. SISTEMAS DE ECUACIONES

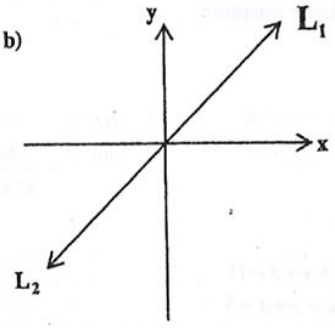
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & ; \ (L_1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & ; \ (L_2) \end{cases};$$ Representan dos rectas en el plano

5.6.1. SISTEMAS CONSISTENTES E INCONSISTENTES (3 casos posibles)

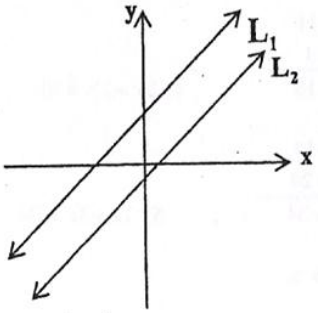
a)



b)



c)



En estos casos decimos respectivamente:

a) El sistema es **Consistente** y las ecuaciones son **Independientes.**
Tiene exactamente una solución.
b) El sistema es **Consistente** pero las ecuaciones son **Dependientes.**
Tienen **Infinitas Soluciones.** (Todos los pares ordenados correspondientes a los puntos de la recta)
c) El sistema es **Inconsistente.** No hay solución.

En general un sistema de ecuaciones pueden tener soluciones **(Compatible)** o no tenerlo **(Incompatible)**
Los sistemas compatibles pueden tener una solución **(Determinados)** o infinitas soluciones **(Indeterminados)**

5.6.2. SISTEMAS EQUIVALENTES.- Dos sistemas de ecuaciones son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones.

$$\begin{cases} 2x-5y=16 \\ x+3y=-3 \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} 5x+3y=9 \\ x+y=1 \end{cases}$$; tienen como solución:

Sol: $x=3$; $y=-2$

Dos sistemas pueden ser equivalentes sin que lo sean las ecuaciones que las forman.

5.6.3. SISTEMAS HOMOGÉNEOS.- Son de la forma:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=0 \\ a_2x+b_2y=0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$$

- Los sistemas homogéneos siempre tienen las soluciones triviales **(0, 0)** y **(0, 0, 0)** respectivamente.
- Son siempre consistentes.
- Además de la solución trivial; sin embargo pueden existir **infinitas soluciones** no triviales.

5.7. MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

1) Igualación
2) Sustitución
3) Reducción (Suma o Resta)

5.7.1. MÉTODO POR IGUALACIÓN:

Despejamos una misma variable de las dos ecuaciones e igualamos sus valores, encontrando de esta forma el valor de la una variable con la cual sustituiremos su valor en cualesquiera de las ecuaciones para hallar el valor de la otra variable.

Ejemplo 1.

$$\begin{cases} 1)\quad 4x+5y=13 \quad ; \quad x=\dfrac{13-5y}{4} \\ 2)\quad 3x+y=-4 \quad ; \quad x=\dfrac{-4-y}{3} \end{cases}$$

1) = 2)

$$\frac{13-5y}{4}=\frac{-4-y}{3} \;;\; 39-15y=-16-4y \;;\; -11y=-55 \;;\; y=5 \;;\; \text{reemplazamos en 2)} \quad x=3$$

Ejemplo 2.

$$\begin{cases} 1)\quad 2x+3y+4z=20 \\ 2)\quad 3x+4y+2z=17 \\ 3)\quad 4x+2y+3z=17 \end{cases}$$

Despejando x en las tres ecuaciones tenemos:

$$1)\ x=\frac{20-3y-4z}{2} \quad ; \quad 2)\ x=\frac{17-4y-2z}{3} \quad ; \quad 3)\ x=\frac{17-2y-3z}{4}$$

Igualando 1) y 2)

$$\frac{20-3y-4z}{2}=\frac{17-4y-2z}{3}$$

$$60-9y-12z=34-8y-4z \quad ; \quad 4)\ y+8z=26$$

Igualando 1) y 3)

$$\frac{20-3y-4z}{2}=\frac{17-2y-3z}{4}$$

$$80-12y-16z=34-4y-6z \quad ; \quad 5)\ 8y+10z=46$$

Despejando y de la ecuaciones 4) y 5) tenemos:

$$4)\ y=26-8z \quad ; \quad 5)\ y=\frac{46-10z}{8} \quad \text{Igualando valores}$$

$$26-8z=\frac{46-10z}{8} \quad ; \quad 208-64z=46-10z \quad 54z=162 \quad ; \quad z=3 \quad \text{en } 4)$$

$$y+8(3)=26 \quad ; \quad y=2 \quad \text{reemplazando los valores de } y, z \text{ en } 1)$$

$$2x+3(2)+4(3)=20 \quad ; \quad x=1$$

5.7.2. MÉTODO POR SUSTITUCIÓN:

Despejamos una variable cualquiera de una de las ecuaciones y sustituimos su valor en la otra ecuación.

Ejemplo 1.

$$\begin{cases} 1)\ 2x+5y=16 \\ 2)\ 3x-7y=24 \end{cases} \quad ; \quad x=\frac{16-5y}{2} \quad \text{en } 2)$$

$$2)\ 3x-7y=24$$

$$3\left(\frac{16-5y}{2}\right)-7y=24 \ ; \ 24-\frac{15y}{2}-7y=24 \ ; \ \frac{-29y}{2}=0 \ ; \ y=0 \quad \text{reemplazando en 1) tenemos: } x=8$$

Ejemplo 2.

$$\begin{cases} 1)\ 5x-y+2z=2 \\ 2)\ -x+3y+z=15 \\ 3)\ 3x+2y-z=-2 \end{cases}$$

Despejando x en 1) $x=\frac{2+y-2z}{5}$ y sustituyendo este valor en 2) y 3) tenemos:

$$2) \quad -\left(\frac{2+y-2z}{5}\right)+3y+z=15 \ ; \ \frac{-2-y+2z+15y+5z}{5}=15$$

$$14y+7z-2=75 \quad ; \quad 4)\ 2y+z=11$$

3) $3\left(\frac{2+y-2z}{5}\right)+2y-z=-2$; $\frac{6+3y-6z+10y-5z}{5}=-2$

$13y-11z+6=-10$; 5) $13y-11z=-16$

Despejando y en 4) y sustituyendo este valor en 5) tenemos: $y=\frac{11-z}{2}$

5) $13\left(\frac{11-z}{2}\right)-11z=-16$

$\frac{143-13z-22z}{2}=-16$; $-35z+143=-32$; $35z=175$; $z=5$ en 4)

$2y+5=11 \Rightarrow y=\frac{6}{2}$; $y=3$ reemplazando los valores de y, z en 1)

$5x-3+2(5)=2$; $5x-7=2$; $5x=-5$; $x=-1$

5.7.3 MÉTODO POR REDUCCIÓN (SUMA O RESTA):

Eliminamos cualesquiera de las variables mediante la igualación de sus coeficientes al multiplicar las ecuaciones por algún factor necesario.

Ejemplo 1.

$$\begin{cases} 1)\ 2x+5y=26 \\ 2)\ 3x-4y=-7 \end{cases}$$

1) (por 4) $8x+20y=104$

2) (por 5) $15x-20y=-35$

$23x \quad =69$; $x=3$ reemplazando en 1) tenemos: $y=4$

Ejemplo 2.

$$\begin{cases} 1)\ x+y+z=11 \\ 2)\ 2x-y+z=5 \\ 3)\ 3x+2y+z=24 \end{cases}$$

; Eliminamos la variable y por tener signos contrarios, entonces tenemos:

1) + 2)

$x+y+z=11$

$2x-y+z=5$

$3x \quad +2z=16$; 4) $3x+2z=16$

2) por 2 + 3)

$4x-2y+2z=10$

$3x+2y+\ z=24$

$7x \quad +3z=34$; 5) $7x+3z=34$

De las ecuaciones 4) y 5) eliminamos z.

4) por -3 + 5) por 2

$-9x-6z=-48$

$14x+6z=\ 68$

$5x \quad =\ 20$; $x=4$

x en 4) y x y z en 1)

$3(4)+2z=16$; $12+2z=16$ $4+y+2=11$

$2z=4$; $z=2$ $6+y=11$; $y=5$

Ecuación de Primer Grado y Sistemas Lineales

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

Resolver los siguientes sistemas:

1) $\begin{cases} x-\dfrac{4x+1}{9}=\dfrac{2y-5}{3} \\ y-\dfrac{3y+2}{7}=\dfrac{x+18}{10} \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x-y=4 \\ 6x-3y=10 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x=2y+3 \\ x-\dfrac{2y}{3}=1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{5}{2x+y}+\dfrac{4}{2x-3y}=5 \\ \dfrac{15}{2x+y}+\dfrac{2}{2x-3y}=5 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{4} \\ \dfrac{x-1}{y+2}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{a-b}=2a \\ x-y=4ab \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{a-b}=2a \\ \dfrac{x-y}{2ab}=\dfrac{x+y}{a^2+b^2} \end{cases}$

8) $\begin{cases} x-y=1 \\ 3x-2y=5 \\ 5x-3y=9 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x+2y=7 \\ 3x-y=14 \\ 2x+y=12 \end{cases}$

10) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=5 \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}-\dfrac{4}{z}=-11 \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}-\dfrac{1}{z}=-6 \end{cases}$

11) $\begin{cases} 5x-y+2z=2 \\ -x+3y+z=15 \\ 3x+2y-z=-2 \end{cases}$

12) $\begin{cases} 5x+y+3z=6 \\ 4x+3y-z=4 \\ x-2y+4z=5 \end{cases}$

13) $\begin{cases} 6x-4y+2z=15 \\ 4x+y+z=8 \\ 2x-5y+z=7 \end{cases}$

14) $\begin{cases} x+2y-3z=6 \\ 7x+2y+z=4 \end{cases}$

15) $\begin{cases} x+y+z=a+b \\ \dfrac{1}{x-y}=\dfrac{1}{2b} \\ \dfrac{x}{y-z}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{b}{a-b} \end{cases}$

16) Determinar el valor de m para que el sistema:

$\begin{cases} 3x+my=5+m \\ 2x+5y=8 \end{cases}$; tenga solución única

17) Determinar el valor de m para que el sistema:

$\begin{cases} (1+2m)x+5y=7 \\ (2+m)x+4y=8 \end{cases}$; no tenga solución

18) Determinar el valor de m para que el sistema:

$\begin{cases} (2m-1)x+my=6 \\ \dfrac{15}{2}x+4y=3 \end{cases}$; tenga infinitas soluciones

19) Determinar la dependencia de a y b para que el sistema:

$\begin{cases} x+y=3 \\ 5x-3y=7 \\ ax+by=5b \end{cases}$; tenga solución única

Respuestas:

1) $(2,4)$ 2) Incompatible 3) Indeterminado 4) $(2,1)$ 5) $(6,8)$ 6) $x=(a+b)^2$, $y=(a-b)^2$

7) $x=(a+b)^2$, $y=(a-b)^2$ 8) $(3,2)$ 9) Incompatible 10) $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right)$ 11) $(-1,3,5)$

12) Incompatible 13) Indeterminado 14) Indeterminado 15) $x=a+b\,,\,y=a-b\,,\,z=b-a$

16) $m\neq\frac{15}{2}$ 17) $m=2$ 18) $m=8$ 19) $a=2b$

5.8. APLICACIONES SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

EJERCICIOS RESUELTOS

1) La suma de un número más el triple de otro es igual a 17, si el triple del primero se resta del duplo del segundo se obtiene 7. ¿Cuáles son los números?

Sean: x e y los números

1) $x+3y=17$; 1) por (-3) + 2)
2) $3x-2y=7$

$$\begin{array}{r} -3x-9y=-51 \\ 3x-2y=7 \\ \hline -11y=-44 \end{array}$$

$y=4$ En 1) $x=5$

Los números son 5 y 4

2) La diferencia de dos números es $-\frac{9}{4}$ y su cociente 0.1. ¿Cuáles son los números?

Sean: x e y los números

1) $x-y=-\frac{9}{4}$

2) $\frac{x}{y}=0{,}1$; $x=\frac{y}{10}$; Reemplazando 2) en 1)

$\frac{y}{10}-y=-\frac{9}{4}$; $\frac{y-10y}{10}=-\frac{9}{4}$; $2x-20y=-45$; $-18y=-45$; $y=\frac{5}{2}$ En 1)

$x-\frac{5}{2}=-\frac{9}{4}$; $x=-\frac{9}{4}+\frac{5}{2}$; $x=\frac{1}{4}$; Los números son $\frac{1}{4}$ y $\frac{5}{2}$

3) Un número de dos cifras es tal que la cifra de las decenas es igual a los $\frac{3}{4}$ de la cifra de las unidades, si se permutan las cifras se obtiene un número 9 unidades mayor que el primero. ¿Cuál es el número?

Sea el número de 2 cifras: $N=10d+u$; Cifras = du

1) $d=\frac{3}{4}u$

2) $10u+d=10d+u+9$; Reemplazando 1) en 2)

$10u+\frac{3}{4}u=10\left(\frac{3}{4}u\right)+u+9$; $\frac{43}{4}u=\frac{30}{4}u+u+9$; $\frac{43}{4}u=\frac{34}{4}u+9$; $\frac{9}{4}u=9$

$u=4$ reemplazando en 1) $d=\frac{3}{4}u$; $d=\frac{3}{4}(4)$; $d=3$

Número = $N=10d+u$; $N=10(3)+4$; $N=34$

4) Un ciclista empleó cierto tiempo para ir de un pueblo a otro, distante entre sí 160 km, si la velocidad media hubiera sido 8km más por hora, hubiera empleado una hora menos en recorrer la misma distancia. ¿Cuál fue la velocidad y qué tiempo empleo?

Sea: t = tiempo empleado en recorrer los 160km.
v = velocidad empleada en recorrer los 160km. ; Sabemos que espacio = velocidad × tiempo

1) $160=vt$
2) $160=(v+8)(t-1)$
Igualar 1) con 2) $vt=(v+8)(t-1)$
$vt=vt-v+8t-8$; 3) $v=8t-8$ reemplazar en 1)

$160=vt$; $160=(8t-8)t$; $160=8t^2-8t$; $8t^2-8t-160=0$; $t^2-t-20=0$
$(t-5)(t+4)=0$; $t_1=5 \vee t_2=-4$ no cumple

Reemplazando t_1 en 3)
$v=8t-8$; $v=8(5)-8$; $v=32\,km/h$

La velocidad fue de $v=32\,km/h$ en un tiempo de $t=5\,horas$

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

1) Una empresa agrícola tiene una granja de 100 ha. En los que cultiva lechuga y col. Cada ha. de col necesita 600 horas de trabajo y cada ha. De lechuga, 400 horas. Si se dispone de un total 45 000 , y si deben usar todos los recursos de terreno y mano de obra, calcular el número de has. que se deben cultivar de cada verdura.

2) El boleto para ingresar a un encuentro deportivo entre estudiantes secundarios era de $ 1.50 para estudiantes y $ 2.25 para público en general. Si se vendió un total de 450 boletos y se obtuvo un ingreso de $ 777.75, determinar cuántos boletos de cada tipo se vendieron.

3) Un platero tiene dos aleaciones, una con 35 % de plata y la otra con 60 % ¿Cuánto de cada una debe fundir y combinar para obtener 100 g de una aleación que contenga 50 % de plata?

4) El señor Aguirre, un vendedor, recibe un salario semanal más una comisión, que es un porcentaje de sus ventas. Una semana, por ventas de $ 3 000, su paga total fue de $ 760. La semana siguiente, por venta de $ 4 000, su paga total fue de $ 880. Determinar su salario y su porcentaje de comisión.

5) Determinar la velocidad de un bote, en aguas en reposo, y la velocidad de la corriente del río, sabiendo que emplea 2 h en navegar 9 Km. a favor de la corriente y 6 h en recorrer dicha distancia en sentido contrario.

6) A y B pueden hacer un cierto trabajo en 9 días, A y C son capaces de hacerlo en 8 días y B y C lo hacen en 12 días. Determinar cuánto se tarda cada persona en hacer el trabajo, trabajando por si sola.

Respuestas:

1) 25 ha. De col y 75 ha. De lechuga
2) 313 de estudiantes y 137 para público en general
3) 40 g. con 35 % de aleación, 60 g con 60% de aleación
4) $ 400, comisión del 12 %
4) velocidad en agua en reposo= 3 Km/h, velocidad de la corriente=1,5 Km/h

6) $A = 13\frac{1}{11}$ *día* ; $B = 28\frac{4}{5}$ *días* ; $C = 20\frac{4}{7}$ *días*

EJERCICIOS DE REFUERZO

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones con dos variables.

1) $\begin{cases} \dfrac{30}{x+y} + \dfrac{54}{x-y} = 8 \\ -\dfrac{3}{x+y} + \dfrac{54}{x-y} = \dfrac{55}{8} \end{cases}$

2) $\begin{cases} (a+b)x - (a-b)y = 4ab \\ \dfrac{x}{a+b} + \dfrac{y}{a-b} = 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{3}{4}x + \dfrac{3}{15}y = 2 \\ \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{15}y = 6 \end{cases}$

4) $\begin{cases} (a-c)x + by = ab \\ (b+c)x + (c-b)y = b^2 + c^2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x + \left(\dfrac{y - \frac{3}{4}}{5}\right)^2 = \left(\dfrac{y - \frac{1}{4}}{5}\right)^2 - \dfrac{3}{50} \\ \left(\dfrac{2x + \frac{3}{2}}{6}\right)^2 - y = \left(\dfrac{x + \frac{3}{2}}{3}\right)^2 - \dfrac{35}{16} \end{cases}$

6) $\begin{cases} x - y + \dfrac{y-z}{2} = 3 \\ \dfrac{x-y}{2} - \dfrac{x-z}{4} = 0 \\ \dfrac{y-z}{2} - x = -5 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{ax}{a^2+b^2} + \dfrac{by}{a^2+b^2} = 1 \\ \dfrac{bx}{a+b} - \dfrac{ay}{a-b} = \dfrac{2ab^2}{b^2-a^2} \end{cases}$

8) $\begin{cases} a\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) + b\left(1 - \dfrac{1}{y}\right) = a + b \\ a\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) - b\left(1 + \dfrac{1}{y}\right) = a - b - 2ab \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} - z = 7 \\ \dfrac{x}{4} - \dfrac{3y}{2} + \dfrac{z}{2} = -6 \\ \dfrac{x}{6} - \dfrac{y}{4} - \dfrac{z}{3} = 1 \end{cases}$

10) $\begin{cases} \dfrac{x - 2[(x+3)2 - 5y]}{y - 5[(y-2)3 - 4x]} = \dfrac{1}{20} \\ \dfrac{4 - 3[(x-y)2 - 2x]}{1 + 2[(x+y)3 - 4y]} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

11) $\begin{cases} m^{\sqrt{x+y^2}} = \sqrt{m^{2y+1}} \\ p^{\frac{x-3}{2}} = \sqrt{p^{\sqrt{x^2+2y}}} \end{cases}$

12) $\begin{cases} \sqrt{x + y - 2\sqrt{xy}} = \sqrt{y} \\ \sqrt{a^2x + b^2y + 2ab\sqrt{xy}} = 2a + b \end{cases}$

13) $\begin{cases} \sqrt{b^{x+y}} \cdot \sqrt[3]{b^{2x}} \cdot \sqrt[3]{b^{y}} = b^{12} \\ \sqrt[4]{b^{2x-y}} \cdot \sqrt[3]{b^{3x}} \cdot \sqrt{b^{y}} = \sqrt{b^{21}} \end{cases}$

14) $\begin{cases} \dfrac{x-2a}{x-3a} + \dfrac{y-4b}{y-3b} = 2 \\ \dfrac{x+2a}{x+a} = \dfrac{y+5b}{y+3b} \end{cases}$

15) $\begin{cases} \dfrac{2}{3x+y-2} + \dfrac{3}{x+4y+1} = -\dfrac{7}{24} \\ \dfrac{1}{3x+y-2} - \dfrac{2}{x+4y+1} = -\dfrac{7}{12} \end{cases}$

16) $\begin{cases} \dfrac{1}{a^{x}} \cdot \dfrac{a^{y}}{a^{z}} = 1 \\ \sqrt{a^{y+1}} \cdot \sqrt[3]{a^{z}} = \sqrt[3]{a^{11}} \\ x+y+z=10 \end{cases}$

17) $\begin{cases} \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{x}{4} - \frac{2y}{5} + \frac{175}{12}} = \dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{x}{2} + \frac{1,5}{3}y} \\ \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{2x}{3} - \frac{y}{4}} = \dfrac{2}{\frac{x}{5} + \frac{y}{6} + \frac{16}{15}} \end{cases}$

18) $\begin{cases} 2x+8y+7z=0 \\ x+2y+4z=0 \end{cases}$

19) $\begin{cases} x-y+3z=2 \\ 2x+2y-z=5 \\ 5x \quad +2z=7 \end{cases}$

20) $\begin{cases} x+2y-z=-1 \\ 2x-y+z=9 \\ x+3y+3z=6 \end{cases}$

21) $\begin{cases} 2x-3y-5z=4 \\ x+7y+6z=-7 \\ 7x-2y-9z=6 \end{cases}$

22) $\begin{cases} 2x+3y-4z=4 \\ x+2y-5z=6 \\ 4x+5y-2z=0 \end{cases}$

23) $\begin{cases} x+y+z=a+b+c \\ bx-ay+cz=b^2 \\ ax-ay+cz=ab \end{cases}$

24) $\begin{cases} 2x+3y+4z=1 \\ 3x+4y+5z=3 \end{cases}$

25) $\begin{cases} \dfrac{x+b-c}{a+y} + \dfrac{a}{b+c} = \dfrac{2\left(a^2+b^2-c^2\right)}{(b+c)y+(b+c)a} \\ \dfrac{a^2 y}{(b-c)x} = \dfrac{(b+c)^2}{a} \end{cases}$

26) Determinar el valor de a para q el sistema $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-y-z=2 \\ x+ay-3z=0 \end{cases}$, sea:

a) Inconsistente

b) Consistente determinado.

27) Determinar el valor de m para q el sistema $\begin{cases} x+y+z=5 \\ x-y+z=3 \\ 2x+2y+2z=m \end{cases}$, tenga:

a) infinitas soluciones b) no tenga solución.

Respuestas:

1) $(16,8)$ 2) $x=a+b\ ;\ y=a-b$ 3) Incompatible

4) $x=b\ ;\ y=c$ 5) $(0,2)$ 6) $(6,4,2)$

7) $x=a\ ;\ y=b$ 8) $x=\frac{1}{b}\ ;\ y=\frac{1}{a}$ 9) $(6,4,-3)$

10) $(10,5)$ 11) $x=\frac{19}{16}\ ;\ y=\frac{15}{16}$ 12) $x=4\ ;\ y=1$

13) $x=6\ ;\ y=6$ 14) $x=a\ ;\ y=b$ 15) $x=-1\ ;\ y=2$

16) $x=3\ ;\ y=5\ ;\ z=2$ 17) $(3,5)$ 18) $(-18t;t;4t)$

19) $(1,2,1)$ 20) $(3,-1,2)$ 21) Inconsistente

22) $(-10-7t\ ;\ 8+6t\ ;\ t)$ 23) $x=b\ ;\ y=c\ ;\ z=a$ 24) $(t+5\ ;\ -2t-3\ ;\ t)$

25) $x=\frac{a^2}{b+c}\ ;\ y=\frac{b^2-c^2}{a}$

26) *Si* $a=7 \Rightarrow$ *Sist. Inconsistente* , *Si* $a\neq 7 \Rightarrow$ *Sist. Consistente Deter min ado*

27) *Si :* $m=10 \Rightarrow$ *Sist. Consistente In det er min ado* , *Si :* $m\neq 10 \Rightarrow$ *Sist. Inconsistente*

EJERCICIOS DE REFUERZO

1) La suma de dos números es 55; y uno de ellos es 9 unidades menor que el otro. Determinar los números.

2) Hallar dos números cuya suma es 196, si el mayor excede al menor en 8.

3) La suma de los dígitos de un número es 11. Si el orden de los dígitos se invierte, el número resultante excede al número original en 45. Hallar el número original.

4) La suma de dos números es 74, su diferencia dividida entre el menor da 2 por cociente y 10 por residuo. Determinar los números

5) Hallar las edades de dos personas, sabiendo que si la primera tuviese 10 años menos, su edad seria los $4/3$ de la edad de la segunda, y si la segunda tuviese 20 años más ambas tendrían la misma edad.

6) La suma de los dígitos de un número es 15; si el dígito de las unidades excede en 3 al dígito de las decenas. Hallar el número.

7) Si se resta 2 al numerador de una fracción, ella se hace igual a 4; y si se suma4 a su denominador, ella se hace igual a 2. ¿Cual es la fracción?

8) La suma, el producto y la diferencia de dos números son entre sí como 6, 16, y 2 ¿Cuales son los números?

9) Si se agrega 3 a los dos términos de una fracción, se obtiene otra equivalente a 7/10; y al restar 2 a los dos términos, se obtiene una fracción equivalente a 3/5. Hallar la fracción.

10) Los 2/5 del largo de un rectángulo sumados con los 3/4 del ancho dan 27 cm, si el perímetro es 100 cm, hallar sus dimensiones.

11) Marco tiene 8 animales entre pollos y conejos. Si cuenta en total 22 patas, ¿cuántos animales hay de cada especie?

12) Una lancha que navega por un río recorre 30 km/h a favor de la corriente y 16 km/h contra la corriente. ¿Cuál es la velocidad de la lancha y del río?

13) Hace 4 años la edad de Juan era 4 veces la de su hijo y dentro de 9 años excederá en 1 año al doble de la de este último. ¿Qué edad tiene cada uno?

14) Un número de dos cifras es igual a 8 veces la suma de sus cifras, si las cifras se invierten, el número resultante es 45 unidades menor que el número original. Hallar el número.

15) La sume de las 3 cifras de un número es 16. La suma de las cifras de las centenas y la cifra de las decenas es el triple de las cifras de las unidades y si al número se le resta 99 la cifras se invierten. Hallar el número.

16) Dos campos de aterrizar A y B están separados por una distancia de 400 Km; B se encuentra al este de A. Un avión voló de A a B en 2 horas y regreso nuevamente a A en $2\frac{1}{2}$ horas. Si el viento soplaba con una velocidad constante desde el oeste durante todo el trayecto, encuentre la velocidad del avión con respecto al aire en reposo así como la velocidad del viento.

Respuestas:

1) 32 y 23 2) 102 y 94 3) 38

4) 58 y 16 5) 30 y 50 años 6) 69

7) $\frac{14}{3}$ 8) 8 y 4 9) $\frac{11}{17}$

10) Largo 30 cm y Ancho 20 cm 11) 5 pollos y 3 conejos

12) Velocidad de la lancha 23 km/h y velocidad del río 7 km/h 13) Juan 32 años e hijo 11 años

14) 72 15) 574

16) Velocidad del avión relativa al aire en reposo = 180 Km/h ; velocidad del viento = 20 Km/h

CAPÍTULO VI
ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

6.1. ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA

Son aquellas que pueden reducirse a la forma: $ax^2 \pm bx \pm c = 0$; donde $a \neq 0$ (siempre), donde:

a, b y c = Coeficientes (Numéricos o literales) y

x = Variable (Incógnita)

Si: b y c $\neq 0 \Longrightarrow$ Ecuación Completa , Si: b y/o $c = 0 \Longrightarrow$ Ecuación Incompleta

6.1.1. ECUACIONES INCOMPLETAS

La ecuación de segundo grado se presenta bajo una de las formas $ax^2 \pm c = 0$ o $ax^2 \pm bx = 0$.

1) Si b = 0 $\Rightarrow$ $ax^2 \pm c = 0$; $x^2 + 25 = 0$; $3x^2 - 2 = 0$

$x^2 = -25$ $\quad$ $3x^2 = 2$

Sol: $x = \pm\sqrt{\pm\frac{c}{a}}$ $\quad$ $x = \pm\sqrt{-25}$ $\quad$ $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

$x = \pm 5i$

Una ecuación de segundo grado tiene dos **raíces iguales pero de signos contrarios** cuando no tiene términos en x.

2) Si c = 0 $\Rightarrow$ $ax^2 \pm bx = 0$; $3x^2 + 7x = 0$

$x(ax \pm b) = 0$ $\quad$ $x(3x + 7) = 0$

Sol: $x_1 = 0 \vee x_2 = \pm\frac{b}{a}$ $\quad$ $x_1 = 0 \vee x_2 = -\frac{7}{3}$

Una ecuación de segundo grado tiene una **raíz nula** cuando el **término independiente es cero.**

EJERCICIOS RESUELTOS

Resolver las siguientes ecuaciones:

1) $3(2x-3)^2 = 4x(2x-9) + 43$

$3(4x^2 - 12x + 9) = 8x^2 - 36x + 43$, $12x^2 - 36x + 27 - 8x^2 + 36x - 43 = 0$

$4x^2 - 16 = 0$, $4x^2 = 16$, $x^2 = 4$, $x = \pm 2$

2) $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x-2} = \frac{2x+1}{x+1}$ Debemos condicionar ; $x \neq \pm 2 \wedge x \neq -1$

$$\frac{(x+1)(x-2) + (x-1)(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{2x+1}{x+1}$$

$$\frac{x^2 - x - 2 + x^2 + x - 2}{x^2 - 4} = \frac{2x+1}{x+1} \quad ; \quad (2x^2 - 4)(x+1) = (2x+1)(x^2 - 4)$$

$2x^3 + 2x^2 - 4x - 4 = 2x^3 - 8x + x^2 - 4$

$x^2 + 4x = 0$; $x(x+4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = -4$

6.1.2. ECUACIÓN COMPLETA

6.1.2.1. MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

1) POR FACTORIZACIÓN

a) $x^2-5x+6=0$;

$(x-3)(x-2)=0$

$x_1=3 \quad \vee \quad x_2=2$

b) $3x^2+2x-5=0$

$\frac{(3x+5)(3x-3)}{3}=0$

$(3x+5)(x-1)=0$

$x_1=-\frac{5}{3} \quad \vee \quad x_2=1$

2) FORMANDO UN CUADRADO PERFECTO (FÓRMULA GENERAL)

Para aplicar este método el coeficiente de x^2 debe ser la unidad y el número que hay que sumar a los dos miembros a de ser el **"cuadrado de la mitad del coeficiente de x".**

$$a x^2+b x+c=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a} \quad ; \quad \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}$$ (Cuadro de la mitad del coeficiente de x)

$$\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$; extrayendo la raíz cuadrada a ambos miembros tenemos:

$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; despejando x tenemos: $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Ejemplos:

Resolver las siguientes ecuaciones:

1) $5x^2-6x+5=0$; donde: $a=5$, $b=-6$, $c=5$

$$x=\frac{6\pm\sqrt{36-4(5)(5)}}{10}=\frac{6\pm\sqrt{36-100}}{10}=\frac{6\pm\sqrt{-64}}{10}=\frac{6\pm 8i}{10} \Rightarrow x_1=\frac{3+4i}{5} \vee x_2=\frac{3-4i}{5}$$

Completando un cuadrado perfecto se desarrollaría de la siguiente forma:

$5x^2-6x+5=0 \quad \div \quad 5$

$$x^2-\frac{6}{5}x=-1 \quad ; \quad \left(\frac{\frac{6}{5}}{2}\right)^2=\left(\frac{6}{10}\right)^2=\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$$ (Cuadrado de la mitad del coeficiente de x)

$$\left(x^2-\frac{6}{5}x+\frac{9}{25}\right)=\frac{9}{25}-1 \;;\; \left(x-\frac{3}{5}\right)^2=-\frac{16}{5} \;;\; \sqrt{\left(x-\frac{3}{5}\right)^2}=\pm\sqrt{-\frac{16}{25}} \;;\; x=\frac{3}{5}\pm\sqrt{-\frac{16}{25}}$$

$$x=\frac{3}{5}\pm\frac{4}{5}i \;\Rightarrow\; x_1=\frac{3+4i}{5} \;\vee\; x_2=\frac{3-4i}{5}$$

2) $-x^2-6x+8=0$

$$x^2-6x=-8 \;;\; \left(\frac{6}{2}\right)^2=9 \;;\; x^2-6x+9=9-8 \;;\; (x-3)^2=1 \;;\; \sqrt{(x-3)^2}=\pm\sqrt{1}$$

$$x-3=\pm 1 \;;\; x=3\pm 1 \;\Rightarrow\; x_1=4 \;\vee\; x_2=2$$

6.1.3. CARÁCTER DE LAS RAÍCES

$$ax^2+bx+c=0 \;\Rightarrow\; Sol: x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\,ac}}{2\,a} \;;\; \Delta=b^2-4\,ac \;\left(Discriminante\right)$$

1) Si $b^2-4ac>0$ $\Rightarrow$ *Raíces reales y distintas*

2) Si $b^2-4ac=0$ $\Rightarrow$ *Raíces reales e iguales :* $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$

3) Si $b^2-4ac<0$ $\Rightarrow$ *Raíces complejas y conjugadas*

4) Si b^2-4ac *es un cuadrado perfecto* $\Rightarrow$ *Raíces reales, distintas y racionales*

Ejemplos:

Determinar el carácter de las raíces de las siguientes ecuaciones:

ECUACIÓN	DISCRIMINANTE $\Delta=b^2-4ac$	ANÁLISIS DE LAS RAÍCES	RAÍCES
$2x^2-3x-1=0$	$\Delta=(3)^2-4(2)(-1)=17$	Porque $\Delta>0$, las raíces son reales diferentes	$r_1=\frac{3+\sqrt{17}}{4}$ $r_2=\frac{3-\sqrt{17}}{4}$
$9x^2-6x+1=0$	$\Delta=(-6)^2-4(9)(1)=0$	Porque $\Delta=0$, tiene sólo una raíz	$r=\frac{6\pm\sqrt{0}}{2(9)}=\frac{1}{3}$
$x^2+x+1=0$	$\Delta=(1)^2-4(1)(1)=-3$	Porque $\Delta<0$, tiene raíces complejas conjugadas	$r_1=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ $r_2=\frac{-1-\sqrt{0}}{2}$

6.1.4. PROPIEDADES DE LAS RAÍCES

En toda ecuación cuadrática en la que el coeficiente del primer término es la unidad se cumple:

$$ax^2+bx+c=0 \;\div\; a \;\Rightarrow\; x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

Ecuación de Segundo Grado

1. La suma de las raíces es igual al coeficiente de x con el signo cambiado:

2. El producto de la raíces es igual al término independiente: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

$$x^2 - (suma\ de\ las\ raices)x + (producto\ de\ las\ raíces) = 0 \quad ó \quad x^2 - Sx + P = 0$$

RAÍCES:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

SUMA DE LAS RAÍCES

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{2b}{2a} \quad ; \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

PRODUCTO DE LAS RAÍCES

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Ejemplos:

Hallar las ecuaciones que tienen por raíces:

a) $-8 \quad y \quad 6$

$$S = (-8)+(6) = -2 \quad ; \quad P = (-8)(6) = -48 \quad \Rightarrow \quad Ec: x^2 + 2x - 48 = 0$$

b) $\frac{3}{5} \quad y \quad \frac{8}{9}$

$$S = \frac{3}{5} + \frac{8}{9} = \frac{27+40}{45} = \frac{67}{45}$$

$$P = \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{8}{9}\right) = \frac{8}{15} \quad \Rightarrow \quad Ec: x^2 - \frac{67}{45}x + \frac{8}{15} = 0 \quad ; \quad Ec: 45x^2 - 67x + 24 = 0$$

c) $-3+2i \quad y \quad -3-2i$

$$S = -3+2i-3-2i = -6 \quad ; \quad P = (-3+2i)(-3-2i) = 9-4i^2 = 13 \quad \Rightarrow \quad Ec: x^2 + 6x + 13 = 0$$

6.1.4.1. RAÍCES DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA

Las raíces de la ecuación cuadrática reducida son iguales a la mitad del segundo coeficiente, con signo contrario, más – menos la raíz cuadrada de esta mitad menos el término independiente.

$$x_1, x_2 = \frac{S}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - P}$$

Ecuación de Segundo Grado

Ejemplos:

Hallar las raíces de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2+4x-21=0$

$S=-4$; $\frac{S}{2}=-2$ $\wedge$ $P=-21$

$x_1,x_2=-2\pm\sqrt{(-2)^2-(-21)}$; $x_1,x_2=-2\pm\sqrt{4+21}$; $x_1,x_2=-2\pm\sqrt{25}$; $x_1,x_2=-2\pm5$

$x_1=3$; $x_2=-7$

b) $5x^2-8x-4=0 \Rightarrow x^2-\frac{8}{5}x-\frac{4}{5}=0$

$S=\frac{8}{5}$; $\frac{S}{2}=\frac{\frac{8}{5}}{2}=\frac{4}{5}$ $\wedge$ $P=-\frac{4}{5}$

$x_1,x_2=\frac{4}{5}\pm\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2-\left(-\frac{4}{5}\right)}$; $x_1,x_2=\frac{4}{5}\pm\sqrt{\frac{16}{25}+\frac{4}{5}}$; $x_1,x_2=\frac{4}{5}\pm\sqrt{\frac{36}{25}}$; $x_1,x_2=\frac{4}{5}\pm\frac{6}{5}$

$x_1=2$; $x_2=-\frac{2}{5}$

6.2. ECUACIONES IRRACIONALES

Son aquellas que contienen radicales y para su resolución se exige la elevación a potencias de uno o de sus dos miembros.

Ejemplos:

Resolver las siguientes ecuaciones:

1) $x+\sqrt{25-x^2}=7$

$\sqrt{25-x^2}=7-x$; elevando al cuadrado tenemos ; $25-x^2=49-14x+x^2$

$-2x^2+14x-24=0$; $2x^2-14x+24=0$; $x^2-7x+12=0$

$(x-4)(x-3)=0 \Rightarrow x_1=4 \vee x_2=3$

Las dos raíces obtenidas satisfacen la ecuación

2) $x-\sqrt{169-x^2}=17$

$x-17=\sqrt{169-x^2}$; elevando al cuadrado tenemos ; $x^2-34x+289=169-x^2$

$2x^2-34x+120=0$; $x^2-17x+60=0$; $(x-12)(x-5)=0 \Rightarrow x=12 \vee x=5$

Ninguna de las dos raíces satisface la ecuación.

Ambas soluciones extrañas introducidas por la elevación al cuadrado, no satisfacen la ecuación.

3) $\sqrt{1+\sqrt{x^4-x^2}}=x-1$, elevando al cuadrado tenemos: $1+\sqrt{x^4-x^2}=x^2-2x+1$

$\sqrt{x^4-x^2}=x^2-2x$; $\sqrt{x^2(x^2-1)}=x(x-2)$; $x\sqrt{x^2-1}=x(x-2)$

Simplificando x se pierde la solución $x=0$; elevando al cuadrado tenemos:

$x^2-1=x^2-4x+4$; $4x=5$; $x=\frac{5}{4}$

La solución $x=0$, no satisface a la ecuación, es solución extraña fruto de la primera elevación al cuadrado y satisface a la ecuación $\sqrt{1+\sqrt{x^4-x^2}}=1-x$

La segunda raíz $x=\frac{5}{4}$, tampoco satisface a la ecuación; es solución extraña al elevar al cuadrado por segunda vez y satisface a la ecuación $\sqrt{x^4-x^2}=2x-x^2$

4) $\sqrt{x+6}+\sqrt{x+1}=\sqrt{7x+4}$, elevando al cuadrado tenemos:

$x+6+2\sqrt{x^2+7x+6}+x+1=7x+4$

$2x+7+2\sqrt{x^2+7x+6}=7x+4$

$2\sqrt{x^2+7x+6}=5x-3$, elevando al cuadrado tenemos:

$2\sqrt{x^2+7x+6}=5x-3$, elevando al cuadrado tenemos:

$4x^2+28x+24=25x^2-30x+9$; $21x^2-58x-15=0$

Aplicando la fórmula general se obtienen las raíces: $x_1=3 \quad \vee \quad x_2=-\frac{5}{21}$

La raíz x=3, satisface la ecuación; no así la raíz $x=-\frac{5}{21}$, es una raíz extraña introducida en la segunda elevación al cuadrado y satisface a la ecuación $2\sqrt{x^2+7x+6}=3-5x$

6.3. ECUACIONES REDUCIBLES A ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

6.3.1. ECUACIONES BICUADRADAS

Son ecuaciones de cuarto grado incompletas de la forma: $ax^4+bx^2+c=0$. Se resuelve los siguientes pasos:

a) Factorizando como las de segundo grado (tomando como incógnita x^2), así: $a(x^2)^2+b(x^2)+c=0$

b) Haciendo $x^2=y$, se transforma a la ecuación bicuadrada en una ecuación de segundo de la forma: $ay^2+by+c=0$, cuyas raíces son y_1 y y_2

Pero $x^2=y \Rightarrow x=\pm\sqrt{y}$ $\begin{cases} \pm\sqrt{y_1} \\ \pm\sqrt{y_2} \end{cases}$

Se observa que las raíces son dos a dos iguales pero de signo contrario.

Ejemplos:

Resolver las siguientes ecuaciones:

1) x^4-10x^2+9

Si $x^2=y$ entonces $x^4=y^2$; reemplazando tenemos:

$y^2-10y+9=0$; $(y-9)(y-1)=0 \Rightarrow y_1=9 \vee y_2=1$

Como $x^2=y$ reemplazando los valores de y_1 y y_2 tenemos:

$x^2=9$; $x=\pm3 \quad \vee \quad x^2=1$; $x=\pm1$

2) $a^2b^2x^4-(a^4+b^4)x^2+a^2b^2=0$

$$x^2=\frac{(a^4+b^4)\pm\sqrt{(a^4+b^4)^2-4(a^2b^2)(a^2b^2)}}{2a^2b^2}=\frac{(a^4+b^4)\pm\sqrt{a^8+2a^4b^4+b^8-4a^4b^4}}{2a^2b^2}$$

$$x^2=\frac{(a^4+b^4)\pm\sqrt{a^8-2a^4b^4+b^8}}{2a^2b^2}=\frac{(a^4+b^4)\pm\sqrt{(a^4-b^4)^2}}{2a^2b^2}=\frac{(a^4+b^4)\pm(a^4-b^4)}{2a^2b^2}$$

$$x^2=\frac{2a^4}{2a^2b^2}=\frac{a^2}{b^2}\quad\Rightarrow x=\pm\frac{a}{b}\qquad\vee\qquad x^2=\frac{2b^4}{2a^2b^2}=\frac{b^2}{a^2}\quad\Rightarrow x=\pm\frac{b}{a}$$

6.3.2. ECUACIONES BINOMIAS

Se llaman así las ecuaciones enteras que solamente tienen 2 términos y son de la forma: $x^n\pm a=0$

Ejemplos:

Resolver las siguientes ecuaciones

1) $x^4=16$

$x^4-16=0\ ;\ (x^2+4)(x^2-4)=0\ ;\ (x^2+4)(x-2)(x+2)=0$

$x^2+4=0\ ;\ x=\pm\sqrt{-4}\quad\vee\quad x-2=0\ ;\ x=-2\quad\vee\quad x+2=0\ ;\ x=\pm 2i$

2) $x^3+27=0$

$(x+3)(x^2-3x+9)=0$

$x=-3\ \vee\quad x^2-3x+9=0\ ;\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-4(1)(9)}}{2}\ ;\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{-27}}{2}\ ;\ x=\dfrac{3\pm3\sqrt{-3}}{2}$

6.3.3. ECUACIONES TRINOMIAS

Se llaman así las ecuaciones enteras que tienen solamente 3 términos de los cuales 2 tienen incógnitas y en ellos los exponentes de la incógnita son el uno duplo del otro, es decir, son de la forma: $x^{2n}+px^n+q=0$

Para resolver sustituimos $x^n=y$ y tendremos $y^2+py+q=0$, que nos dará los valores para y; estos valores sustituidos en $x^n=y$, nos darán los valores de x.

Ejemplos:

Resolver las siguientes ecuaciones

1) $x^6-28x^3+27=0$

Si $x^3=y\quad\Rightarrow\quad x^6=y^2$

$y^2-28y+27=0\ ;\ (y-27)(y-1)=0\quad;\quad y_1=27\quad\vee\quad y_2=1$

Como $x^3=y$, sustituimos los valores de y_1 y y_2

Si; $y=27\Rightarrow x^3=27$

$x^3-27=0$

$(x-3)(x^2+3x+9)=0\quad\Rightarrow\quad x=3\ \vee\ x=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-4(9)}}{2}=\dfrac{3}{2}\left(-1\pm\sqrt{-3}\right)$

Si; $y=1\Rightarrow x^3=1$

$x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1=0)\quad\Rightarrow\quad x=1\ \vee\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4(1)}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{3}\,i\right)$

6.3.4. ECUACIONES QUE SE RESUELVEN CON CAMBIO DE VARIABLE

Resolver las siguientes ecuaciones:

1) $\left(x^2+x\right)^2-8\left(x^2+x\right)+12=0$

Si $x^2+x=m \Rightarrow m^2-8m+12=0$; $(m-6)(m-2)=0 \Rightarrow m_1=6 \vee m_2=2$

Con $m=6$: $x^2+x=6$; $x^2+x-6=0$; $(x+3)(x-2)=0$; $x_1=-3 \vee x_2=2$

Con $m=2$: $x^2+x=2$; $x^2+x-2=0$; $(x+2)(x-1)=0$; $x_3=-2 \vee x_4=1$

2) $2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-9\left(x+\frac{1}{x}\right)+10=0$

Si $x+\frac{1}{x}=m$; $2m^2-9m+10=0$; $(m-2)(2m-5)=0$; $m_1=2 \vee m_2=\frac{5}{2}$

Con $m=2$: $x+\frac{1}{x}=2$; $x^2-2x+1=0$; $(x-1)^2=0$; $x=1$

Con $m=\frac{5}{2}$: $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$; $2x^2-5x+2=0$; $(x-2)(2x-1)=0$; $x_3=2 \vee x_4=\frac{1}{2}$

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas:

1) $4x^2-9=0$ 2) $x^2+16=0$ 3) $\frac{2x^2-1}{x-3}=x+3+\frac{17}{x-3}$

4) $x^2+5x-6=0$ 5) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-4}=\frac{5}{4}$ 6) $\frac{x}{2a}=\frac{3a}{6x-5a}$

7) Determinar k en la ecuación $x^2-5kx+2k^2=0$, sabiendo que la suma de las raíces es igual a la mitad del producto de las raíces

8) Determinar m en la ecuación $2x^2+mx+9=0$, para que una raíz sea el doble de la otra.

9) Si α y β son las raíces de la ecuación : $x^2-px+q=0$, calcular $\alpha^3+\beta^3$

10) Si la diferencia de las raíces de la ecuación $x^2-3mx+2m+1=0$ es 4 , determinar m

11) En la ecuación $8x^2-(m-1)x+(m-7)=0$ determinar el valor de m para que las raíces sean reales e Iguales.

12) Demostrar que la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ es igual a $\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}$

Respuestas:

1) $x=\pm\frac{3}{2}$ 2) $x=\pm 4i$ 3) $x=-3$ 4) $x=-6\,;1$

5) $x=5\,;\frac{8}{5}$ 6) $x=-\frac{2a}{3}\,;\frac{3a}{2}$ 7) $k_1=0\,;\,k_2=5$ 8) $m=\pm 9$

9) $\alpha^3+\beta^3=p^3-3pq$ 10) $m_1=-\frac{10}{9}$; $m_2=2$ 11) $m=9 \vee m=25$

Resolver las siguientes ecuaciones completando un cuadrado perfecto:

1) $x^2-6x=-8$ 2) $3x^2+8x+5=0$ 3) $5x^2-6x+5=0$ 4) $\frac{5x^2-2a^2}{x}=\frac{a}{3}$

Ecuación de Segundo Grado

Respuestas:

1) $x = 2; 4$ 2) $x = -1; -\frac{5}{3}$ 3) $x = \frac{3}{5} \pm \frac{4}{5}i$ 4) $x = \frac{2a}{3}; -\frac{3a}{5}$

Resolver las siguientes ecuaciones:

1) $\frac{3(x-1)}{x+1} - \frac{2(x+1)}{x-1} = 5$ 2) $x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) = 0$ 3) $x^2 - \frac{a^2+b^2}{ab}x + 1 = 0$

4) $abc\,x^2 - (a^2b^2 + c^2)x + abc = 0$ 5) $\frac{1+a}{a} + \frac{1+b}{b} + \frac{1+x}{x} = \frac{1}{a+b+x} + 3$

6) $\frac{x+b}{a^2-9b^2} - \frac{x+7b}{ax+3bx} + \frac{x+b}{ax-3bx} = \frac{1}{a+3b}$ 7) $\sqrt{5+2x} = x+1$ 8) $\sqrt[3]{x^2-x+6} - 2 = 0$

9) $x^2 - 6x - \sqrt{x^2-6x-3} = 5$ 10) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ 11) $\sqrt{\frac{x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{x}} = 2\frac{1}{6}$

12) $\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} - 2 = 0$ 13) $9(x+2)^4 + 17(x+2)^2 - 2 = 0$ 14) $(x^2+3x+2)^2 - 8(x^2+3x) = 4$

15) $x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} - 10 = 0$ 16) $(x+9)(x-3)(x-7)(x+5) = 385$

17) $8x^{\frac{3}{2n}} - 8x^{-\frac{3}{2n}} = 63$ 18) $\sqrt[3]{6(5x+6)} - \sqrt[3]{5(6x-11)} = 1$

Respuestas:

1) $x = -3; \frac{1}{2}$ 2) $x = a \pm bi$ 3) $x = \frac{a}{b}; \frac{b}{a}$ 4) $x = \frac{ab}{c}; \frac{c}{ab}$

5) $x = -a; -b$ 6) $x = (a-4b); -6b$ 7) $x = 2$ 8) $x = 2; -1$

9) $x = 7; -1$ 10) $x = \pm 1; \pm 3$ 11) $x = \frac{9}{13}; \frac{4}{13}$ 12) $x = 16$

13) $x = -\frac{5}{3}; -\frac{7}{3}; -2 \pm \sqrt{2}\,i$ 14) $x = 0; 1; -3; -4$ 15) $x = -8; 125$

16) $x = -4; 2; -1 \pm \sqrt{71}$ 17) $x = 4^n; \frac{1}{4^n}$ 18) $x = 6; -\frac{161}{30}$

Resolver las siguientes ecuaciones polinómicas:

1) $27x^3 + 21x + 8 = 0$ 2) $6x^4 - 25x^3 + 12x^2 + 25x + 6 = 0$

Respuestas:

1) $x = -\frac{1}{3}; \frac{3 \pm \sqrt{279}\,i}{18}$ 2) $x = 2; 3; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}$

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

EJERCICIOS RESUELTOS

1) La suma de los cuadrados tres números naturales consecutivos es 149. ¿Cuáles son los números?

Sean los números naturales consecutivos: x, $x+1$, $x+2$. Entonces la ecuación sería:

$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 149$

$x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = 149$; $3x^2 + 6x = 144 \div 3$; $x^2 + 2x = 48$;

$x^2 + 2x - 48 = 0$; $(x-6)(x+8) = 0$

$x_1 = 6$; $x_2 = -8$ (*no solución*)

El primer número pedido es 6, su sucesor es 7 y el tercer número es 8.

Ecuación de Segundo Grado

2) El producto de la edad de una persona por 9 tiene 90 unidades menos que el cuadrado de su edad. ¿Cuántos años tiene la persona?

Si consideramos como x la edad de la persona, entonces la ecuación es:

$9x = x^2 - 90 \quad ; \quad x^2 - 9x - 90 = 0 \quad ; \quad (x-15)(x+6) = 0$

$x_1 = 15 \quad ; \quad x_2 = -6 \; (no\ solución)$

La edad de esa persona es 15 años.

3) Si al denominador de una fracción cuyo numerador es 12, se le agrega 3 unidades, la fracción queda disminuida en 2 unidades. ¿Cuál es ese quebrado?

Sea: $\frac{x}{y}$ = fracción inicial, donde el numerador: $x = 12$

Luego $\frac{12}{y}$ = fracción inicial

Cuando se le agregue 3 unidades al denominador la nueva fracción será: $\frac{12}{y+3}$

Del enunciado obtenemos que: $\frac{12}{y} - \frac{12}{y+3} = 2$

Damos el común denominador en el primer miembro:

$\frac{12(y+3) - 12y}{y(y+3)} = 2 \quad ; \quad \frac{12y + 36 - 12y}{y(y+3)} = 2$

$36 = 2y(y+3) \quad ; \quad 18 = y^2 + 3y$

$18 = y^2 + 3y \quad ; \quad y^2 + 3y - 18 = 0$

$(y+6)(y-3) = 0$

$y_1 = -6 \quad ; \quad y_2 = 3$

De los dos valores que toma y sólo tomaremos el valor positivo; entonces el quebrado es igual a: $\frac{12}{y} = \frac{12}{3}$

4) La suma de dos cifras de un número es 12. Si al producto de ellas se le suma 66, se obtiene el primer número con sus cifras invertidas. ¿Cuál es el número?

Sea: $N = 10d + u$ número de dos cifras. Las cifras = $d\,u$.

Del enunciado planteamos las siguientes ecuaciones:

$d + u = 12 \quad ; \quad d = 12 - u \qquad (1) \qquad ; \qquad d \cdot u + 66 = 10u + d \qquad (2)$

Reemplazamos la expresión (1) en (2):

$(12-u) \cdot u + 66 = 10u + 12 - u \quad ; \quad 12u - u^2 + 66 = 9u + 12 \quad ; \quad u^2 - 3u - 54$

$(u-9)(u+6) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad u_1 = 9 \quad ; \quad u_2 = -6$

De los valores que toma u solo tomaremos el número positivo; reemplazando en (1), obtenemos:

$d = 12 - 9 = 3 \quad ; \quad d = 3$. El número de dos cifras es 39.

5) ¿En qué tiempo llenarían los caños A; B y C un depósito, si "A" solo puede hacerlo en 6 horas más; "B" solo en 1 horas más y "C" en el doble de tiempo?

Sea t= tiempo de demora A, B y C en llenar el depósito.

En 1 hora los tres caños A,B y C llenarían: $\frac{1}{t}$ del depósito.

"A" solo puede hacerlo en 6 horas más, o sea: $(t+6)$ horas. En una hora "A" solo llenará: $\frac{1}{t+6}$ del depósito.

"B" solo puede hacerlo en 1 hora más, o sea: $(t+1)$ horas. En una hora "B" solo llenaría: $\frac{1}{(t+1)}$ del depósito.

"C" solo puede hacerlo en el doble de tiempo, o sea $2t$ horas. En una hora "C" solo llenará: $\frac{1}{2t}$ del depósito.

Luego, planteamos la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{(t+6)}+\frac{1}{(t+1)}+\frac{1}{2t}=\frac{1}{t} \quad ; \quad \frac{1}{(t+6)}+\frac{1}{(t+1)}=\frac{1}{t}-\frac{1}{2t} \quad ; \quad \frac{(t+1)+(t+6)}{(t+1)(t+6)}=\frac{2-1}{2t}$$

$$\frac{2t+7}{(t+6)(t+1)}=\frac{1}{2t} \quad ; \quad 2t(2t+7)=(t+1)(t+6) \quad ; \quad 4t^2+14t=t^2+7t+6 \quad ; \quad 3t^2+7t-6=0$$

$$(3t-2)(t+3)=0 \quad ; \quad t_1=\frac{2}{3} \quad ; \quad t_2=-3$$

De los dos valores que toma x solo tomamos el valor positivo, puesto que el tiempo no puede ser negativo. El tiempo en que llenarían los caños A; B y C el depósito es de $\frac{2}{3}$ de hora que convertido a minutos equivale a: $\frac{2}{3}h=\frac{2}{3}\cdot 60\text{ min}=40\text{ min}$

6) En una división el dividendo es 438. El divisor es el triple que el cociente y el residuo es la mitad del cociente. Hallar el cociente

Sea: El cociente: x ; el divisor será: $3x$ y el residuo será: $\frac{x}{2}$

Luego:

Dividendo = divisor × cociente + residuo

$$438 = (3x) \times (x) + \frac{x}{2}$$

$$876 = 6x^2+x \quad ; \quad 6x^2+x-876=0 \quad ; \quad (6x+73)(x-12)=0$$

$$x_1=-\frac{73}{6} \quad ; \quad x_2=12$$

De los dos valores que toma x , sólo tomaremos el valor positivo. El valor del cociente es: $x=12$

7) ¿Qué edad tengo si hace 14 años era la raíz cuadrada de la edad que tendré dentro de 16años?

Sea: Mi edad actual x ; Edad hace 14 años = $x-14$

Edad que tendré dentro de 16 años = $x+16$.

Del enunciado, planteamos la ecuación:

$$(x-14)=\sqrt{x+16} \quad ; \quad (x-14)^2=(\sqrt{x+16})^2 \quad ;$$

$$x^2-28x+196=x+16 \quad ; \quad (x-20)(x-9)=0$$

$x_1 = 20$; $x_2 = 9$

De los dos valores que toma x , sólo tomamos $x_1 = 20$; ya que al reemplazar $x_2 = 9$, en la ecuación: $(x-14) = \sqrt{x+16}$, no satisface dicha ecuación. La edad que tengo es de 20 años.

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

1) Determinar las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su longitud es igual al triplo de su altura, y que si se disminuye en 1 m la altura y se aumenta en 3 m la longitud, el área vale $72m^2$.

2) Un comerciante compra un cierto número de lapiceros por \$ 180 y los vende todos menos 6 con una ganancia de \$ 2 en cada lapicero. Sabiendo que con el dinero recaudado en la venta podría haber comprado 30 lapiceros más que antes, determinar el precio de cada lapicero.

3) Un piloto realiza un vuelo de 600 km. Sabiendo que si aumenta la velocidad en $40\frac{km}{h}$ podría recorrer dicha distancia empleando 30 minutos menos, determinar su velocidad.

4) El operario B tarda 6 h más que el A en efectuar un trabajo. Hallar cuanto tiempo tardaría en realizarlo cada uno de ellos sabiendo que, juntos, invierten 4 h en terminarlo.

5) Hallar un número de dos cifras sabiendo que las cifras de las decenas excede en tres a las cifras de las unidades, y que el número es igual a la suma de los cuadrados de sus cifras menos 4.

6) Se debe construir una bodega de municiones en un espacio de terreno que mide 6 metros de ancho y 8 metros de largo. Una regulación de construcción especifica que la bodega debe estar rodeada por un césped de ancho e igual en área a la de la bodega. ¿Cuál debe ser el ancho de este césped y cuales son las dimensiones de la bodega?

7) Un automóvil viaja 10 Km/h más rápido que un camión. El automóvil recorre 600 Km en 2 h menos de lo que tardaría el camión para recorrer esa misma distancia. Encuentre la velocidad de cada vehículo por hora.

8) En un concurso nacional de matemática, frente a la resolución de una ecuación cuadrática ocurre lo siguiente:
   a) Un alumno se equivocó en el término independiente y obtuvo como solución a 8 y 2
   b) Otro alumno se equivocó en el coeficiente del término lineal y obtuvo como soluciones -9 y -1
   Determinar cuál fue la ecuación correcta.

9) Los miembros de un club van a pagar una cuenta de \$ 600 en partes iguales. Si hubiera habido 20 miembros más; el costo para cada miembro hubiera sido \$ 1 menos. Calcular el número de miembros del club.

Respuestas:

1) $5 ; 15\ m$ 2) $\$3$ 3) $200\frac{km}{h}$ 4) $A = 6h$; $B = 12h$ 5) 85

6) Ancho del césped: $1\ m.$
Dimensiones de la bodega: $4\ m. \times 6\ m.$

7) $v.\ camión = 50Km/h$; $v.\ automóvil = 60Km/h$

8) $x^2 - 10x + 9 = 0$

9) 100 miembros

EJERCICIOS DE REFUERZO

Resolver las siguientes ecuaciones numéricas:

1) $(a^2 - b^2)x^2 - 2a^2bx + a^2b^2 = 0$

2) $\frac{x}{b(a+b)} + \frac{a}{(a+b)x} = \frac{1}{b}$

3) $16\left(\frac{x}{x+1}\right)^4 - 25\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + 9 = 0$

4) $6x^{\frac{3}{4}} = 7x^{\frac{1}{4}} - 2x^{-\frac{1}{4}}$

Ecuación de Segundo Grado

5) $2\sqrt{\frac{x}{a}}+3\sqrt{\frac{a}{x}}=\frac{b}{a}+\frac{6a}{b}$

6) $\sqrt{2bx+3b^2}=\sqrt{bx+b^2}+b$

7) $\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}+\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=4\sqrt{x^2-1}$

8) $\sqrt{ax+2a^2}=\sqrt{3ax+3a^2}-a$

9) $\frac{1}{2n+nx}-\frac{1}{2x-x^2}=\frac{2(n+3)}{x^3-4x}$

10) $\frac{x^2}{ab-2b^2}=\frac{a-b}{ac^2-2bc^2}+\frac{x}{bc}$

11) $\frac{(a-x)\sqrt{a-x}+(x-b)\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}}=a-b$

12) $x^4-3x^3-3x^2+11x-6=0$

13) $4x^5-29x^3-24x^2+7x+6=0$

14) $\frac{1+x^{-1}}{1-x^{-1}}+\frac{1+2x^{-1}}{1-2x^{-1}}=\frac{2+13x^{-1}}{1+x^{-1}}$

15) $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\frac{3a^2+b^2}{a^2+3b^2}$

16) $\frac{x-p}{x-q}+\frac{x-q}{x-p}=\frac{p^2+q^2}{pq}$

17) $\frac{3}{\sqrt[3]{x-3}}-\frac{5}{\sqrt[3]{x^2-6x+9}}+2=0$

18) Hallar el valor de m en la ecuación $x^2+(2m+5)x+m=0$, si una raíz excede a la otra en 3 unidades.

19) Hallar el valor de m en la ecuación $(m+4)x^2-1=(2m+2)x-m$, tenga raíces iguales.

20) Si α y β son las raíces de la ecuación $x^2-\alpha x+1=0$. Calcular el valor de la expresión: $E=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}-1$

21) ¿Qué condición deben cumplir "a" y "b" para que la siguiente ecuación tenga: a) raíces iguales y b) raíces de igual magnitud pero de signos contrarios? $\frac{x+b}{a^2-9b^2}-\frac{x+7b}{ax+3bx}+\frac{x+b}{ax-3bx}=\frac{1}{a+3b}$

Respuestas:

1) $x_1=\frac{ab}{a-b}$; $x_2=\frac{ab}{a+b}$

2) $x_1=a$; $x_2=b$

3) $x=-\frac{1}{2};-\frac{3}{7};3$

4) $x=\frac{1}{4};\frac{4}{9}$

5) $x=\frac{b^2}{4a};\frac{9a^3}{b^2}$

6) $x_1=3b$; $x_2=-b$

7) $x_1=\sqrt{2}$; $x_2=-\sqrt{2}$

8) $x=-a\,;\,2a$

9) $x_1=n+2$; $x_2=-2n$

10) $x_1=\frac{a-b}{c}$; $x_2=-\frac{b}{c}$

11) $x=a\,;\,b$

12) $x=1\,;\,1\,;\,-2\,;\,3$

13) $x=-1\,;\,-2\,;\,3\,;\,\frac{1}{2}\,;\,-\frac{1}{2}$

14) $x=5\,;\,\frac{6}{5}$

15) $x_1=\frac{a+b}{a-b}$; $x_2=\frac{a-b}{a+b}$

16) $x_1=0$; $x_2=p+q$

17) $x=4\,;\,-\frac{101}{8}$

18) $m=-2$

19) $m=5$

20) $E=a^2-3$

20) a) $a=-2b$; b) $a=10b$

EJERCICIOS DE REFUERZO

Resolver los siguientes problemas de aplicación de ecuaciones cuadráticas:

1) A tiene 3 años más que B y el cuadrado de la edad de A aumentado en el cuadrado de la edad de B equivale a 317 años. Hallar ambas edades.

2) Un tren emplea cierto tiempo en recorrer 240 Km. Si la velocidad hubiera sido 20 Km/h más que la que llevaba hubiera tardado 2 horas menos en recorrer dicha distancia. ¿En qué tiempo recorrió los 240 Km?

Ecuación de Segundo Grado

3) Un hombre ha ganado $ 84 trabajando cierto número de días. Si su jornal diario hubiera sido $ 1 menos, tendrá que haber trabajado 2 días más para ganar $ 84. ¿Cuántos días trabajó y cuál es su jornal?

4) Un tren a recorrido 200 Km en cierto tiempo. Para haber recorrido esa distancia en 1 hora menos, la velocidad debía haber sido 10 Km por hora más. Hallar la velocidad del tren.

5) Dos operarios A y B juntos, realizan una tarea en 10 días. Trabajando por separado, A tardaría 5 días más que B. Hallar el número de días que tardarían en hacer la tarea trabajando cada uno por sí solo.

6) Un piloto realiza un vuelo de 600 Km. Sabiendo que si aumenta la velocidad en 40 Km/h podría recorrer dicha distancia empleando 30 minutos menos, hallar su velocidad.

7) Por medio de un grifo A se llena un depósito en 4 horas. Por medio de otro B se llena en 3 horas más que empleando los dos grifos A y B simultáneamente. Hallar en cuánto tiempo se llena utilizando solo el grifo B.

8) Para formar una caja abierta de 60 cm cuadrados de base a partir de una placa rectangular de estaño de 9×12 cm se cortan de sus esquinas unas piezas cuadradas y se doblan después las aristas. Hallar la longitud del lado del cuadrado que se corta en cada esquina.

9) Para iniciar una microempresa, varios amigos deben aportar en partes iguales un total de $ 12 000. A última hora dos de ellos deciden no participar en el proyecto, provocando que los restantes deban aportar cada uno $ 500 adicionales. Determinar el número de individuos que iniciaron la empresa.

10) Cuando dos bombas actúan a la vez, tardan en agotar un pozo en 15 horas. Si actuara sólo la menor, tardaría en agotarle 16 horas más que si actuara solo la mayor. ¿Cuánto tardaría esta?

11) Dos máquinas de imprenta trabajando juntas pueden imprimir un libro en 20 horas. A las 15 horas una de ellas se rompe, y entonces tarda las otras 9 horas más en terminar el trabajo. ¿Cuántas horas necesitaría cada máquina para imprimir ella sola el libro?

12) Un tonel tiene capacidad para 50 galones y está lleno de vino puro. Se saca cierta cantidad de vino y se reemplaza con agua. Se saca ahora de la mezcla una cantidad igual a la extraída primeramente. Si la mezcla que queda en el tonel contiene 32 galones de vino puro, determinar cuántos galones se extrajeron cada vez.

13) Juan compró cierto número de sacos de maíz por $ 240. Si hubiera comprado 3 sacos más por el mismo dinero, cada saco le habría costado $ 4 menos. ¿Cuántos sacos compro y a qué precio?

14) Un hombre compró cierto número de caballos por $ 2 000. Se le murieron 2 y vendiendo cada uno de los restantes a $ 60 más de lo que costó cada uno , gano en total $ 80. ¿Cuántos caballos y cuánto le costo cada uno?

15) Dos campesinas llevan al mercado 100 manzanas, una de ellas tenía mayor número de manzanas que la otra, no obstante ambas obtuvieron iguales sumas de dinero, una de ellas dice a la otra: "si yo hubiese tenido la cantidad de manzanas que tu tuviste, y tú la cantidad que yo tuve, hubiésemos recibido respectivamente 15 y 20/3 dólares". ¿Cuántas manzanas tenía cada una?

16) En que tiempo tardarán A, B, C un trabajo juntos, si A sólo puede hacerlo en 6 horas más, B en 1 hora más y C en el doble del tiempo.

Respuestas:

1) $A = 14$ años , $B = 11$ años 2) 6 horas 3) 12 días , jornal = $ 7

4) 40 Km/h 5) $A = 22{,}8$ días , $B = 17{,}8$ días 6) 200 Km/h
7) 5,3 h aproximadamente 8) 1,3 cm 9) 6 personas
10) 24 horas 11) A emplea 36 horas y B emplea 45 horas 12) 10 galones
13) 12 sacos a $ 20 cada uno 14) 10 caballos a $ 200 cada uno

15) La una campesina tenía 40 manzanas y la otra 60 16) $\frac{2}{3}$ hoars

6.4. SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejercicio N° 1

$$\begin{cases} 1)\ x^2+xy-y^2=-5 \\ 2)\ y-x=3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y=x+3 \quad En\ 1)$$

$$x^2+(x+3)x-(x+3)^2=-5 \quad , \quad 2x^2+3x-x^2-6x-9=-5 \quad , \quad x^2-3x-4=0$$

$$(x-4)(x+1)=0 \quad , \quad x_1=4 \quad \Rightarrow \quad y_1=7$$

$$x_2=-1 \quad \Rightarrow \quad y_2=2 \qquad Sol:(4;7),(-1;2)$$

Ejercicio N° 2

$$\begin{cases} 1)\ 3x^2+4xy+y^2=-8 \\ 2)\ 7x^2+2xy-y^2=-28 \end{cases}$$

Eliminamos el término independiente: 1) por (7) + 2) por (–2)

$$\begin{array}{r} 21x^2+28xy+7y^2=-56 \\ -14x^2-4xy+2y^2 \ = \ 56 \\ \hline 7x^2+24xy+9y^2=0 \end{array}$$

Resolviendo la ecuación cuadrática $7x^2+24xy+9y^2=0$ considerando a "x" como la variable principal tenemos:

$$x=\frac{-24y\pm\sqrt{(24y)^2-4\,(7)(9y^2)}}{14}=\frac{-24y\pm 18y}{14} \quad ; \quad x_1=-\frac{3}{7}y \quad \wedge \quad x_2=-3y$$

Reemplazando x_1 y x_2 en 1) tenemos:

$$Si: x_1=-\frac{3}{7}y \quad \Rightarrow \quad 3\left(-\frac{3}{7}y\right)^2+4\left(-\frac{3}{7}y\right)y+y^2=-8$$

$$\frac{27}{49}y^2-\frac{12}{7}y^2+y^2=-8 \quad ; \quad -\frac{8}{49}y^2=-8 \quad ; \quad y^2=49$$

$$y_1=\pm 7 \quad \Rightarrow \quad x_1=\mp 3 \qquad Sol:(3,-7);(-3,7)$$

$$Si: x_2=-3y \quad \Rightarrow \quad 3(-3y)^2+4(-3y)y+y^2=-8$$

$$27y^2-12y^2+y^2=-8 \quad ; \quad 16y^2=-8 \quad ; \quad y^2=-\frac{1}{2}$$

$$y_2=\pm\sqrt{-\frac{1}{2}} \quad ; \quad y_2=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i \quad \Rightarrow \quad x_2=\mp\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$Sol:\left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}i\,;\frac{\sqrt{2}}{2}i\right);\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}i\,;\frac{-\sqrt{2}}{2}i\right)$$

Ejercicio N° 3

$$\begin{cases} 1)\ x^2+y^2-(x+y)=48 \\ 2)\ x+y+xy=31 \end{cases}$$

Haciendo que: $x+y=z \quad \wedge \quad xy=u$ tenemos:

$$(x+y)^2=(z)^2 \quad , \quad x^2+2xy+y^2=z^2 \quad ; \quad x^2+y^2=z^2-2u$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones iníciales tenemos:

1) $z^2 - 2u - z = 48$
2) $u + z = 31$; $u = 31 - z$

1) + 2) por (2)

$$\begin{array}{l} z^2 - 2u - z = 48 \\ \quad 2u + 2z = 62 \\ \hline z^2 \quad + z = 110 \end{array} \quad ; \quad z^2 + z - 110 = 0 \quad ; \quad (z+11)(z-10) = 0$$

$$z_1 = -11 \quad \Rightarrow \quad u_1 = 42 \qquad \wedge \qquad z_2 = 10 \quad \Rightarrow \quad u_2 = 21$$

Como $x + y = z$ y $xy = u$, reemplazamos valores y resolvemos los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} 1)\ x + y = z \\ 2)\ xy = u \end{cases} \quad ; \quad \begin{array}{l} x + y = -11 \\ xy = 42 \end{array} \quad ; \quad y = \frac{42}{x} \quad \text{en 1)}$$

$$x + \frac{42}{x} = -11 \ ; \quad x^2 + 11x + 42 = 0 \quad ; \quad \Delta = (11)^2 - 4\,(1)\,(42) = 0$$

$\Delta = 121 - 168 = -47$ Raíces imaginarias

$$\begin{cases} 1)\ x + y = z \\ 2)\ xy = u \end{cases} \quad ; \quad \begin{array}{l} x + y = 10 \\ xy = 21 \end{array} \quad ; \quad y = \frac{21}{x} \quad \text{en 1)}$$

$$x + \frac{21}{x} = 10 \ ; \quad x^2 - 10x + 21 = 0 \quad ; \quad (x-7)\,(x-3) = 0$$

$$x_1 = 7 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 3$$
$$x_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 7 \qquad \textit{Sol: } (7,3);(3,7)$$

Ejercicio N° 4

$$\begin{cases} 1)\ x + y - \sqrt{xy} = 7 \\ 2)\ x^2 + xy + y^2 = 133 \end{cases}$$

De 2) tenemos:

$$\left(x^2 + 2xy + y^2\right) - xy = 133 \quad ; \quad (x+y)^2 - \left(\sqrt{xy}\right)^2 = 133$$

3) $\left[(x+y) - \sqrt{xy}\right]\left[(x+y) - \sqrt{xy}\right] = 133$

Dividiendo 3) para 1) tenemos:

$$\frac{\left[(x+y) + \sqrt{xy}\right]\left[(x+y) - \sqrt{xy}\right]}{\left[(x+y) - \sqrt{xy}\right]} = \frac{133}{7} \quad ; \quad 4)\ (x+y) + \sqrt{xy} = 19$$

Sumando 1) con 4) tenemos:

$$\begin{array}{l} x + y - \sqrt{xy} = 7 \\ x + y + \sqrt{xy} = 19 \\ \hline 2x + 2y \quad = 26 \end{array}$$

5) $x + y = 13$

Restando 1) de 4) tenemos:

$$\begin{array}{l} x + y + \sqrt{xy} = 19 \\ -x - y + \sqrt{xy} = -7 \\ \hline 2\sqrt{xy} = 12 \end{array}$$

$xy = 36$, $x = \frac{36}{y}$ *Re emplazando en 5)*

$$\frac{36}{y}+y=13 \quad ; \quad y^2-13y+36=0 \quad ; \quad (y-9)(y-4)=0$$

$$y_1=9 \Rightarrow x_1=4 \quad y \quad y_2=4 \Rightarrow x_2=9 \quad ; \quad Sol:(4,9);(9,4)$$

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

Resolver los siguientes sistemas:

1) $\begin{cases} x+y=7 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5(x-y)=4y \\ x^2+4y^2=181 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x^2-y^2=7 \\ 3x^2+2y^2=14 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+xy=6 \\ x^2+5xy-4y^2=10 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5x^2+4y^2=48 \\ x^2+2xy=16 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2+y^2=40 \\ xy=12 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x^2+y^2+2x-y=14 \\ x^2+y^2+x-2y=9 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x^3+y^3=35 \\ x+y=5 \end{cases}$

9) $\begin{cases} xy(x+y)=30 \\ x^3+y^3=35 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x+y=72 \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=6 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} y+\sqrt{x^2-1}=2 \\ \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{y} \end{cases}$ 12) $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4 \\ x^2-y^2=9 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x^2+y^2=61 \\ x^3-y^3=91 \end{cases}$ 14) $\begin{cases} x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{5}}=5 \\ x^{\frac{3}{4}}+y^{\frac{3}{5}}=35 \end{cases}$ 15) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=65 \\ x+y+z=13 \\ yz=12 \end{cases}$

Respuestas:

1) $(3,4);(4,3)$ 2) $(9,5);(-9,-5)$ 3) $(2,1);(-2,1);(2,-1);(-2,-1)$

4) $(2,1);(-2,-1);\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right);\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

5) $(2\sqrt{2},\sqrt{2});(-2\sqrt{2},-\sqrt{2});\left(\frac{4}{3}\sqrt{3},\frac{4}{3}\sqrt{3}\right);\left(-\frac{4}{3}\sqrt{3},-\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)$

6) $(6,2);(-6,-2);(2,6);(-2,-6)$ 7) $\left(\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right);(2,3)$ 8) $(3,2);(2,3)$

9) $(3,2);(2,3)$ 10) $(8,64);(64,8)$ 11) $\left(\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right);(1,2)$ 12) $(5,4);(5,-4)$

13) $(6,5)$ 14) $(16,243),(81,32)$ 15) $(5,2,6)\ ;\ (5,6,2)$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1) El lado mayor de un triangulo rectángulo mide 41 cm y su área es de 180 cm^2. Hallar la longitud de los otros dos lados.

2) El área de un terreno rectangular es de 20 000 m^2 y la cerca que lo rodea tiene 660 m de largo. Determine las dimensiones del terreno.

3) Un avión vuela cierta distancia a velocidad constante. Si la velocidad hubiera sido 50 Km por hora mayor, en el viaje se habrían invertido 40 minutos menos. Si la velocidad hubiera sido 50 Km por hora menor, el viaje hubiese tardado 1 hora más. Hallar la velocidad del avión y la distancia que voló.

4) Un hombre y su hijo trabajando juntos pueden hacer una obra en 12 días. Trabajando separadamente el hijo tardaría 7 días más que el padre en hacer el solo la obra. Determine el tiempo que se tardara cada uno trabajando individualmente.

Respuestas:

1) 9 y 40 cm 2) 80 m y 250 m 3) $250\frac{Km}{h}$ y 1 000 Km 4) Padre: 28 días ; Hijo: 21 días

Ecuación de Segundo Grado

EJERCICIOS DE REFUERZO

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

1) $\begin{cases} x+xy+y=11 \\ x^2y+xy^2=30 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=16+\sqrt{4xy} \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=8 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=91 \\ x+\sqrt{xy}+y=13 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=2{,}5 \\ x+y=10 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x^2+3xy+y^2=70 \\ 6x^2+xy-y^2=50 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2+3xy=-8 \\ xy+y^2=-4 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=3 \\ x^2+5xy+6y^2=15 \end{cases}$

8) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{7}{\sqrt{xy}}+1 \\ \sqrt{x^3y}+\sqrt{y^3x}=78 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} \sqrt{\frac{3x}{x+y}}-2+\sqrt{\frac{x+y}{3x}}=0 \\ xy-54=x+y \end{cases}$ 10) $\begin{cases} 3x^2-3xy-y^2+8x+7y=4 \\ \sqrt{2x-y}=2 \end{cases}$

11) $\begin{cases} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{17}{4} \\ x^2+y^2=706 \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=20 \\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=65 \end{cases}$ 13) $\begin{cases} x^2+xy+y^2-3x-3y-6=0 \\ xy+4x+4y=0 \end{cases}$

14) $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4 \\ x^2-y^2=9 \end{cases}$ 15) $\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{y}{3}=3 \\ \frac{x}{2}+\frac{3}{y}=\frac{3}{2} \end{cases}$

Respuestas:

1) $(2,3);(3,2);(1,5);(5,1)$ 2) $(4,36);(36,4)$ 3) $(9,1);(1,9)$
4) $(8,2);(2,8)$ 5) $(3,4)$ 6) $(-4,2);(4,-2);(\sqrt{2}\,i,\sqrt{2}\,i);(-\sqrt{2}\,i,-\sqrt{2}\,i)$
7) $(1,-2);(-1,2)$ 8) $(4,9);(9,4)$ 9) $(6,12);\left(-\frac{9}{2},-9\right)$
10) $(6,8);\left(\frac{8}{7},-\frac{12}{7}\right)$ 11) $(25,9)$ 12) $(1,16);(16,1)$
13) $(-2,4);(4,-2)$ 14) $(5,-4);(5,4)$ 15) $(2,6);(1,3)$

Resolver los siguientes problemas de aplicación de sistemas de ecuaciones no lineales:

1) Hallar las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro es $60\,cm$ y su área $216\,cm^2$.
2) La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide $41\,cm$ y su área es $180\,cm^2$. Hallar las longitudes de los dos catetos.
3) Hallar dos números sabiendo que el cuadrado de uno de ellos excede en 16 al doble del otro, y que la suma de sus cuadrados es 208.
4) La diagonal de un rectángulo mide 85 cm. Sabiendo que si el lado menor se aumenta en 11cm y el mayor se disminuye en 7 cm, la longitud de la diagonal no varía, hallar las dimensiones del rectángulo original.

Respuestas:

1) 12 y 18 cm 2) 9 y 40 cm
3) $12, 8$; $12, -8$; $-12, 8$; $-12, -8$ 4) $40\,cm$ y 75 cm

CAPÍTULO VII
FRACCIONES PARCIALES

7.1. FRACCIONES PARCIALES (F. P.)

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-1}+\frac{2x-1}{x^2+1}=\frac{5x^2+x+2}{(x^2-1)(x^2+1)}$$

$\longrightarrow$ Suma de Fracciones

$\longleftarrow$ Descomponer en Fracciones Parciales

Para descomponer una fracción en Fracciones Parciales el grado del denominador debe de ser mayor que el grado del numerador.

7.2. PROCEDIMIENTO PARA DESCOMPONER UNA FRACCIÓN EN FRACCIONES PARCIALES

1) Comparar el grado del Numerador y del Denominador.

Si $N^o \geq D^o$ Transformamos la fracción en una expresión mixta aplicando el algoritmo de la división.

Si $N^o < D^o$ Continuamos al siguiente paso

2) Factorar el denominador.

3) Formar tantas fracciones parciales como factores tenga en denominador y cada factor es el denominador de cada fracción.

FACTORES NO REPETIDOS

$$\frac{N}{(x+a)(x-b)(x^2+c)}=\frac{\quad}{x+a}+\frac{\quad}{x-b}+\frac{\quad}{x^2+c}$$

FACTORES REPETIDOS

$$\frac{N}{(x+a)^3(x^2-b)^2}=\frac{\quad}{(x+a)}+\frac{\quad}{(x+a)^2}+\frac{\quad}{(x+a)^3}+\frac{\quad}{(x^2-b)}+\frac{\quad}{(x^2-b)^2}$$

4) Determinar el numerador, el mismo que se caracteriza por ser un grado menor que el denominador

FACTORES NO REPETIDOS

$$\frac{N}{(x+a)(x-b)(x^2+c)}=\frac{A}{x+a}+\frac{B}{x-b}+\frac{Cx+D}{x^2+c}$$

FACTORES REPETIDOS

$$\frac{N}{(x+a)^3(x^2-b)^2}=\frac{A}{(x+a)}+\frac{B}{(x+a)^2}+\frac{C}{(x+a)^3}+\frac{Dx+E}{(x^2-b)}+\frac{Fx+G}{(x^2-b)^2}$$

5) Sumar las fracciones e igualar los numeradores.

Ejemplos:

Formar las fracciones parciales de las siguientes fracciones:

Fracciones Parciales

$$a)\ \frac{N}{x^2(x+3)(x^3+5)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+3}+\frac{Dx^2+Ex+F}{x^3+5}$$

$$b)\ \frac{N}{(x+1)(x^2-1)}=\frac{N}{(x+1)^2(x-1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-1}$$

$$c)\ \frac{N}{(x-1)(x^3-1)}=\frac{N}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

Descomponer en Fracciones Parciales las siguientes fracciones.

1) $\dfrac{x-5}{x^2-1}$

$$F.P.=\frac{x-5}{(x+1)(x-1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}$$

$x-5=(x-1)A+(x+1)B$ (1) Podemos resolver por 2 métodos :

a) Método por eliminación :

$Si\quad x+1=0$, $Si\quad x-1=0$

$x=-1\quad en\ (1)$ $\qquad$ $x=1\quad en\ (1)$

$-6=-2A$ $\qquad$ $-4=2B$

$A=3$ $\qquad$ $B=-2$

$$F.P.=\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x-1}$$

b) Método por igualación de coeficientes (Sistema de ecuaciones) **:**

$x-5=(x-1)A+(x+1)B$

$x-5=Ax-A+Bx+B$

$x-5=(A+B)x-(A+B)$

$x:\quad 1=A+B$

$x^0:-5=-A+B$

Resolviendo el sistema tenemos: $A=3$ y $B=-2$ por consiguiente el resultado es:

Reemplazando los valores de A y B en las fracciones parciales tenemos;

$$F.P.=\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x-1}$$

2) $\dfrac{2x+4}{x^3-1}$

$$F.P.=\frac{2x+4}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$\frac{2x+4}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{(x^2+x+1)A+(x-1)(Bx+C)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

Igualando numeradores tenemos:

$$2x+4 = Ax^2 + Ax + A + Bx^2 + Cx - Bx - C$$
$$2x+4 = (A+B)x^2 + (A+C-B)x + A - C$$

Igualando coeficientes tenemos:

$$x^2: \quad 0 = A+B$$
$$x: \quad 2 = A+C-B$$
$$x^0: \quad 4 = A-C$$

Resolviendo el sistema tenemos: $A=2$, $B=-2$ y $C=-2$

Reemplazando los valores de A, B y C en las fracciones parciales tenemos;

$$F.P. = \frac{2}{x-1} - \frac{2x+2}{x^2+x+1}$$

3) $\dfrac{3}{4x^3+8x^2+3x}$

$$F.P. = \frac{3}{x\left(4x^2+8x+3\right)} = \frac{3}{x(2x+3)(2x+1)}$$

$$\frac{3}{x(2x+3)(2x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x+3} + \frac{C}{2x+1}$$

$$\frac{3}{x(2x+3)(2x+1)} = \frac{(2x+3)(2x+1)A + (2x+1)Bx + (2x+3)Cx}{x(2x+3)(2x+1)}$$

Igualando numeradores:

$$3 = \left(4x^2+8x+3\right)A + 2Bx^2 + Bx + 2Cx^2 + 3Cx$$

$$3 = 4Ax^2 + 8Ax + 3A + 2Bx^2 + Bx + 2Cx^2 + 3Cx$$

$$3 = (4A+2B+2C)x^2 + (8A+B+3C)x + 3A$$

Igualando coeficientes tenemos:

$$x^2: \quad 0 = 4A+2B+2C$$
$$x: \quad 0 = 8A+B+3C$$
$$x^0: \quad 3 = 3A$$

Resolviendo el sistema tenemos: $A=1$, $B=1$ y $C=-3$

Reemplazando los valores de A, B y C en las fracciones parciales tenemos;

$$F.P. = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x+3} - \frac{3}{2x+1}$$

4) $\dfrac{x^4+1}{x^3+8}$

Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, primero debemos dividir para obtener la parte entera y transformar la fracción en una expresión en mixta.

$$\begin{array}{l|l} x^4 \quad\quad +1 & x^3+8 \\ \hline \underline{-x^4 \quad -8x} & x \\ \quad -8x+1 & \end{array}$$

$$\boxed{\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}} \rightarrow \text{Algoritmo De La División}$$

$$\frac{x^4+1}{x^3+8} = x - \frac{8x-1}{x^3+8} \longrightarrow \text{descomponemos en fracciones parciales}$$

$$F.P. = \frac{8x-1}{x^3+8} = \frac{8x-1}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

$$F.P. = \frac{8x-1}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+4}$$

$$\frac{8x-1}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{(x^2-2x+4)A+(x+2)(Bx+C)}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

Igualando numeradores tenemos:

$$8x-1 = (x^2-2x+4)\,A + (x+2)\,(Bx+C)$$

$$8x-1 = Ax^2 - 2Ax + 4A + Bx^2 + 2Bx + Cx + 2C$$

$$8x-1 = (A+B)x^2 - (2A-2B-C)x + 4A + 2C$$

Igualando coeficientes tenemos:

$x^2: \quad 0 = A+B$

$x \;: \quad 8 = -2A+2B+C$

$x^0: -1 = 4A+2C$

Resolviendo el sistema tenemos: $A = -\dfrac{17}{12}$, $B = \dfrac{17}{12}$ y $C = \dfrac{7}{3}$

Reemplazando los valores de A, B y C en las fracciones parciales tenemos:

$$F.P. = \frac{8x-1}{x^3+8} = -\frac{17}{12\,(x+2)} + \frac{17x+28}{12\,(x^2-2x+4)}$$

La solución de la fracción expresada en forma mixta es:

$$\frac{x^4+1}{x^3+8} = x - \left[-\frac{17}{12\,(x+2)} + \frac{17x+28}{12\,(x^2-2x+4)}\right] \quad \rightarrow \quad F.P. = x + \frac{17}{12\,(x+2)} - \frac{17x+28}{12\,(x^2-2x+4)}$$

5) $\dfrac{x^5+1}{(x^2+4)^2}$, haciendo un cambio de variable tenemos: $y = x^2+4 \Rightarrow x^2 = y-4$

$$F.P. = \frac{x^5+1}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2x^2x+1}{y^2} = \frac{(y-4)(y-4)x+1}{y^2}$$

$$= \frac{(y-4)^2x+1}{y^2} = \frac{(y^2-8y+16)x+1}{y^2} = \frac{xy^2-8xy+16x+1}{y^2}$$

$$= \frac{xy^2}{y^2} - \frac{8xy}{y^2} + \frac{16x+1}{y^2} = x - \frac{8x}{y} + \frac{16x+1}{y^2}$$

Como $y = x^2+4$, sustituimos este valor en los denominadores de las fracciones anteriores

$$F.P. = x - \frac{8x}{x^2+4} + \frac{16x+1}{(x^2+4)^2}$$

6) $\dfrac{x^5+x^4+2x^3-3x^2+x-1}{\left(x^3+3x+2\right)^2}$, haciendo un cambio de variable tenemos: $y=x^3+3x+2$, $x^3=y-3x-2$

$$\frac{x^3x^2+x^4+2x^3-3x^2+x-1}{(x^3+3x+2)^2}=\frac{x^3x^2+x^3x+2x^3-3x^2+x-1}{y^2}$$

$$=\frac{(y-3x-2)x^2+(y-3x-2)x+2(y-3x-2)-3x^2+x-1}{y^2}$$

$$=\frac{x^2y-3x^3-2x^2+xy-3x^2-2x+2y-6x-4-3x^2+x-1}{y^2}$$

$$=\frac{x^2y-3(y-3x-2)+xy+2y-8x^2-7x-5}{y^2}$$

$$=\frac{x^2y-3y+9x+6+xy+2y-8x^2-7x-5}{y^2}=\frac{(x^2+x-1)y-8x^2+2x+1}{y^2}$$

$$=\frac{(x^2+x-1)y}{y^2}-\frac{8x^2-2x-1}{y^2}=\frac{x^2+x-1}{y}-\frac{8x^2-2x-1}{y^2}$$

Como: $y=x^3+3x+2$, $F.P.=\dfrac{x^2+x-1}{x^3+3x+2}-\dfrac{8x^2-2x-1}{\left(x^3+3x+2\right)^2}$

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

Descomponer en fracciones más simples las siguientes fracciones

1) $\dfrac{5x+7}{x^2+2x-3}$ 2) $\dfrac{x^3+2x^2-1}{x^2+x-6}$ 3) $\dfrac{9x^3+16x^2+3x-10}{x^3\left(x+5\right)}$

4) $\dfrac{(x-3)^2}{\left(x^2+4x+5\right)^2}$ 5) $\dfrac{2x^4-4x^2-x+2}{\left(x^2-x\right)^2}$ 6) $\dfrac{4x^3-10x^2-2x-9}{\left(2x^2-x+3\right)\left(3x^2+x+1\right)}$

7) $\dfrac{ax^2\left(2x+3\right)+a\left(6x+1\right)}{2x^2+5x+3}$ 8) $\dfrac{x^2+1}{x^3-x}$ 9) $\left[\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1}\right]^2$

Respuestas:

1) $\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{2}{x+3}$ 2) $x+1+\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{2}{x+3}$ 3) $\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{6}{x+5}$

4) $\dfrac{1}{x^2+4x+5}-\dfrac{10x-4}{\left(x^2+4x+5\right)^2}$ 5) $2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{(x-1)^2}$ 6) $\dfrac{2x-3}{2x^2-x+3}-\dfrac{x+2}{3x^2+x+1}$

7) $ax-a+\dfrac{16a}{2x+3}-\dfrac{4a}{x+1}$ 8) $-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x-1}$ 9) $1-\dfrac{8}{x+1}+\dfrac{24}{(x+1)^2}-\dfrac{32}{(x+1)^3}+\dfrac{16}{(x+1)^4}$

EJERCICIOS DE REFUERZO

Descomponer en fracciones más simples las siguientes fracciones:

1) $\dfrac{3x^2-1}{x^3-x}$ 2) $\dfrac{6x^2-7x-2}{x^3-x^2-4x+4}$ 3) $\dfrac{e^{2x}-4e^x+1}{e^{3x}-2e^{2x}-e^x+2}$ 4) $\dfrac{5x^2+2x-1}{x^3+3x^2+3x+2}$

5) $\dfrac{x^4+1}{x^5+x^3}$ 6) $\dfrac{x^3+3x^2+5x+4}{x^4+5x^3+10x^2+9x+3}$ 7) $\dfrac{4x^4-2x^3+2x^2-7}{\left(x-2\right)\left(x^2+x+1\right)^2}$

Fracciones Parciales

8) $\dfrac{x^4-2x^3-4x^2+x+4}{x^5+3x^4+2x^3+6x^2+x+3}$

9) $\left[\dfrac{x^2+5}{x^2-5}\right]^3$

10) $\dfrac{x^3-x^2+5x+1}{x^2-3x+2}$

11) $\dfrac{x^5-x^3-x^2}{x^2-1}$

12) $\dfrac{-2x^2+14x+18}{(x-3)(2x^2-x-1)}$

13) $\dfrac{x^3-1}{(x+1)^4}$

14) $\dfrac{4x^3+4x^2-4x+2}{(x-1)(2x+1)}$

15) $\dfrac{x^4-3}{x^3-x^2+x-1}$

16) $\dfrac{2x^3+3x^2-15x-8}{(x+2)(x^3-3x+2)}$

17) $\dfrac{2x^3+2x^2+2x+4}{x^3+x^2+x+1}$

18) $\dfrac{x^2}{a^4-x^4}$

19) $\dfrac{x(x^3-3x^2+x)}{(x-5)^5}$

20) $\dfrac{x^4+4x^2-x+3}{(x^2+1)^3}$

21) $\dfrac{x-10}{x^3-2x^2+5x}$

22) $\dfrac{2x^4+4x^3+4x^2+x-6}{x^4+x^3+3x^2}$

23) $\dfrac{2x^4-x^3-5x^2+2x+4}{(x^2-4)(2x-1)}$

24) $\dfrac{(x+1)(x^2+a^2)}{x^3-ax^2-a^2x+a^3}$

25) $\dfrac{b}{y}\left[\dfrac{y^3+xy+xy^2}{(y^2-8-2y)x}\right]$

26) $\dfrac{-x^3+x^2+a}{x^3+ax}$

27) $\dfrac{1}{x}\left[\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{x^3-3x+5}{3x^3-3x}\right]$

28) $b\left[\dfrac{x+3}{bx-3b}\right]^3$

Respuestas:

1) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}$

2) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{x+2}$

3) $\dfrac{1}{e^x-1}+\dfrac{1}{e^x+1}-\dfrac{1}{e^x-2}$

4) $\dfrac{5}{x+2}-\dfrac{3}{x^2+x+1}$

5) $\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2x}{x^2+1}$

6) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{2}{x^2+3x+3}$

7) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{3x-1}{x^2+x+1}+\dfrac{x+5}{(x^2+x+1)^2}$

8) $\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{2}{x^2+1}+\dfrac{3}{(x^2+1)^2}$

9) $1+\dfrac{30}{x^2-5}+\dfrac{300}{(x^2-5)^2}+\dfrac{1000}{(x^2-5)^3}$

10) $x+2-\dfrac{6}{x-1}+\dfrac{15}{x-2}$

11) $x^3-1-\dfrac{1}{2(x-1)}+\dfrac{1}{2(x+1)}$

12) $\dfrac{3}{x-3}-\dfrac{5}{x-1}+\dfrac{2}{2x+1}$

13) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{(x+1)^2}+\dfrac{3}{(x+1)^3}-\dfrac{2}{(x+1)^4}$

14) $2x+3+\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{3}{2x+1}$

15) $x+1-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{x+1}{x^2+1}$

16) $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2}{(x+2)^2}+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{(x-1)^2}$

17) $2+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{x-1}{x^2+1}$

18) $\dfrac{1}{4a(a-x)}+\dfrac{1}{4a(a+x)}-\dfrac{1}{2(a^2+x^2)}$

19) $\dfrac{1}{x-5}+\dfrac{17}{(x-5)^2}+\dfrac{106}{(x-5)^3}+\dfrac{285}{(x-5)^4}+\dfrac{275}{(x-5)^5}$

20) $\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{2}{(x^2+1)^2}-\dfrac{x}{(x^2+1)^3}$

21) $-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2x-3}{x^2-2x+5}$

22) $2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{x-1}{x^2+x+3}$

23) $x+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{2x-1}$

24) $1+\dfrac{1-a}{2(x+a)}+\dfrac{3a+1}{2(x-a)}+\dfrac{a^2+a}{(x-a)^2}$

25) $\dfrac{b}{x}+\dfrac{5x+16}{6x(y-4)}+\dfrac{4-x}{6x(y+2)}$

26) $-1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{x^2+a}$

27) $\dfrac{a}{3b}\left[\dfrac{3}{x}-\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{7}{2(x+1)}+\dfrac{3}{2(x-1)}\right]$

28) $\dfrac{1}{b^2}\left[1+\dfrac{18}{x-3}+\dfrac{108}{(x-3)^2}+\dfrac{216}{(x-3)^3}\right]$

CAPÍTULO VIII
DESIGUALDADES E INECUACIONES

8.1. DESIGUALDAD.- Es la relación que establece que dos cantidades tienen diferente valor.

Los signos que se utiliza para designar desigualdades, son:

$>$ que se lee : " mayor que " ; $<$ que se lee : " menor que "
$\geq$ que se lee : " mayor o igual que " ; $\leq$ que se lee : " menor o igual que "

Las desigualdades que no incluyen el signo igual se determinan **estrictas** y las que lo incluyen se denominan **no estrictas.**

Por lo tanto una desigualdad es una expresión que indica que un número es mayor o menor que otro.

8.1.1. PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES

Axiomas de orden

1) $\forall a, b \, y \, c \in \Re$ se cumple una y solo una de las siguientes proposiciones:
$a = b \;,\; a > b \;,\; a < b$ Ley de tricotomía

2) Si $a > b \Rightarrow b < a$

3) Si $a > b$ y $b > c \Rightarrow a > c$

4) Si $a > b \Rightarrow a \pm c > b \pm c$; Si $a > b \wedge c > d \Rightarrow a + c > b + d$

5) Número positivo: $a > 0$; Número negativo: $a < 0$

6) $\forall a \in \Re \Rightarrow a^2 > 0$

7) Si $a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$ ó $a < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < 0$

8) Si $a < b < 0 \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$ ó $a < b < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

9) Si $0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ ó $0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

10) Si $a > b$ y $c > 0 \Rightarrow ac > bc$ ó $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

11) Si $a > b$ y $c < 0 \Rightarrow ac < bc$ ó $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

12) Si $0 < a < b \wedge 0 < c < d \Rightarrow 0 < ac < bd$

8.1.2. DESIGUALDADES ABSOLUTAS.- Son aquellas que se verifican para cualquier valor que se den a la variable.

$(x-5)^2 \geq 0$, desigualdad absoluta verdadera $\Rightarrow$ Solución: $\forall x \in \Re$

$(x-5)^2 > 0$, desigualdad absoluta verdadera $\Rightarrow$ Solución: $\forall x \in \Re - \{5\}$

$(x-5)^2 < 0$, desigualdad absoluta falsa $\Rightarrow$ Solución: ϕ

En los tres casos el resultado del paréntesis siempre va a ser un número positivo para cualquier valor que le asignemos a la variable x.

8.2. INECUACIÓN O DESIGUALDAD CONDICIONAL.- Es una desigualdad que se verifica para determinados valores que se den a la variable.

Ejemplo:

$2x-7>1$; $2x>8$; $x>4$; se verifica para todos los valores mayores que 4

Al resolver inecuaciones, a veces se pueden simplificar los términos que contienen la variable y quedar como resultado una inecuación absoluta verdadera o falsa en cuyo caso la solución será por ejemplo:

1) $2x+3>\frac{1}{2}(4x-8)+4$; $2x+3>2x$; $3>0$ (V) $Sol: \forall x \in \Re$

2) $x+2>3x-\frac{1}{2}(4x-20)$; $x+2>3x-2x+10$; $2>10$ (F) $Sol: \phi$

El objeto de estudiar inecuaciones, es porque se aplican: para acotar funciones; para hallar el dominio y rango de relaciones de $\Re$ en $\Re$ y de funciones.

8.3. CONJUNTO SOLUCIÓN DE UNA INECUACIÓN

Resolver una inecuación significa encontrar su conjunto solución C.S.; es decir, hallar el intervalo o intervalos donde están los valores que puede tomar la incógnita para que verifique la inecuación.

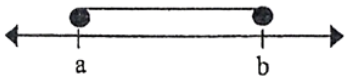
8.4. INTERVALOS

Un intervalo se define como el subconjunto de números reales que está comprendido entre dos números a y b llamados extremos.

8.4.1. TIPOS DE INTERVALO.

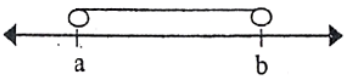
- ✓ **INTERVALO CERRADO.** Incluyen a los extremos

  $a \leq x \leq b$, se denota por: $x \in [a,b]$



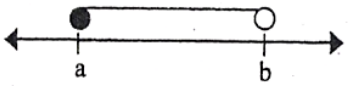
- ✓ **INTERVALO ABIERTO.** Excluye a los extremos

  $a < x < b$, se denota por: $x \in (a,b)$ ó $x \in]a,b[$

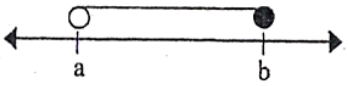


✓ **INTERVALO SEMIABIERTO.** Combinación de los anteriores

$a \le x < b$, se denota por: $x \in [a, b)$

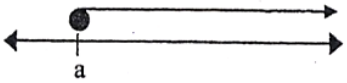


$a < x \le b$, se denota por: $x \in (a, b]$

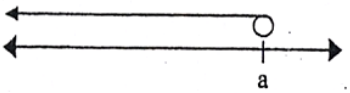


✓ **INTERVALOS INFINITOS**

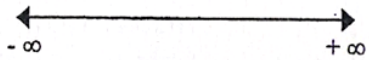
$x \ge a$, se denota por: $x \in [a, +\infty)$



$x < a$, se denota por: $x \in (-\infty, a)$



$-\infty < x < +\infty$, se denota por: $x \in \Re$

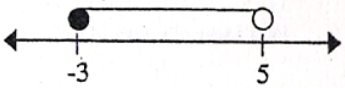


8.5. OPERACIONES CON INTERVALOS

Como los intervalos representan un conjunto de números, se pueden realizar las mismas operaciones que existen entre conjuntos numéricos.

Ejemplos:

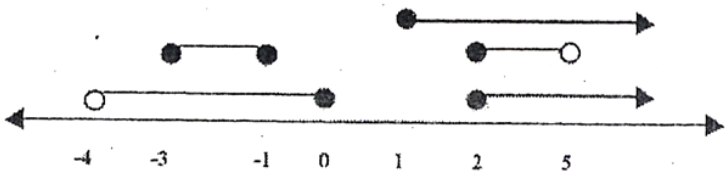
1) Determine el complemento del intervalo $[-3; 5[$



Complemento: $x \in (-\infty, -3) \cup [5, +\infty)$

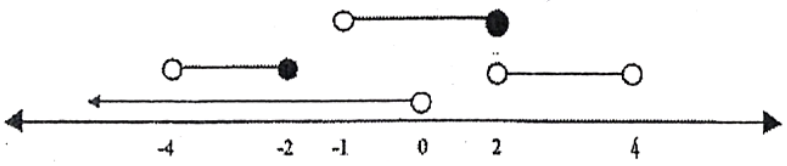
2) Hallar la unión e intersección de los siguientes intervalos

a) $(-4, 0] \cup [2, +\infty)$; $[-3, -1] \cup [2, 5)$; $x \ge 1$



Unión = $x \in (-4, 0] \cup [1, +\infty)$; Intersección = $x \in [2, 5)$

b) $x<0$; $-4<x\leq -2 \cup 2<x<4$; $-1<x\leq 2$



Unión = $x\in(-\infty,4)$; Intersección = ϕ

8.5.1. APLICACIONES DEL BUEN USO DE LOS INTERVALOS

Los siguientes ejemplos ilustran la manera correcta de aplicar las definiciones de los intervalos y de las propiedades de las desigualdades.

1) Si $x\in]-2,5[$, ¿ a qué intervalo pertenece la expresión $(3-2x)$?

Si $x\in]-2,5[$ entonces a partir de $-2<x<5$ formamos el término $(3-2x)$

Multiplicar por -2: $4>-2x>-10$

Sumar 3 : $7>3-2x>-7$

Ordenar : $-7<3-2x<7$

Conclusión $(3-2x)\in]-7,7[$

2) Si $(2-4x)\in]-7,-2]$, a qué intervalo pertenece la expresión $\dfrac{2x-1}{3x+2}$?

Para hacer más sencillo el cálculo se divide:

$$\begin{array}{r|l} 2x-1 & 3x+2 \\ \hline -2x-\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline -\frac{7}{3} & \end{array}$$

$$\frac{2x-1}{3x+2}=\frac{2}{3}-\frac{\frac{7}{3}}{3x+2} \qquad (1)$$

Si $(2-4x)\in]-7,-2]$ entonces a partir de $-7<2-4x\leq -2$, hallamos una desigualdad para " x "

Sumar -2 : $-9<-4x\leq -4$

Multiplicar por $-\frac{1}{4}$: $\frac{9}{4}>x\geq 1$

Ordenar : $1\leq x<\frac{9}{4}$, a partir de la desigualdad formamos (1)

Multiplicar por 3 : $3\leq 3x<\frac{27}{4}$

Sumar 2 : $5\leq 3x+2<\frac{35}{4}$

Invertir : $\frac{4}{35}<\frac{1}{3x+2}\leq\frac{1}{5}$

Multiplicar por $-\frac{7}{3}$: $-\frac{7}{15}\leq -\frac{\frac{7}{3}}{3x+2}<-\frac{4}{15}$

Sumar $\frac{2}{3}$: $\frac{3}{15} \le \frac{2}{3} - \frac{\frac{7}{3}}{3x+2} < \frac{6}{15}$

Simplificar : $\frac{1}{5} \le \frac{2}{3} - \frac{\frac{7}{3}}{3x+2} < \frac{2}{5}$

Conclusión $\frac{2x-1}{3x+2} \in \left[\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right[$

3) Si $\frac{2x+1}{x-1} \in [8, 16]$, hallar el mayor valor m y el menor valor n, tal que $x \in [m, n]$

Si $\frac{2x+1}{x-1} \in [8, 16]$ entonces $8 \le \frac{2x+1}{x-1} \le 16$

$8 \le 2 + \frac{3}{x-1} \le 16$

Sumar -2 : $6 \le \frac{3}{x-1} \le 14$

Invertir : $\frac{1}{14} \le \frac{x-1}{3} \le \frac{1}{6}$

Multiplicar por 3 : $\frac{3}{14} \le x-1 \le \frac{1}{2}$

Sumar 1 : $\frac{17}{14} \le x \le \frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ $m \le x \le n$

Conclusión : $m = \frac{17}{14}$; $n = \frac{3}{2}$

4) Si $\frac{3}{x-2} \in \left[-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right]$, ¿ a qué intervalo pertenece " x " ?

Si $\frac{3}{x-2} \in \left[-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right]$ entonces $-\frac{5}{2} \le \frac{3}{x-2} \le -\frac{1}{2}$

Invertir : $-2 \le \frac{x-2}{3} \le -\frac{2}{5}$

Multiplicar por 3 : $-6 \le x-2 \le -\frac{6}{5}$

Sumar 2 : $-4 \le x \le \frac{4}{5}$

Conclusión $x \in \left[-4, \frac{4}{5}\right]$

NOTA: Sólo se invierte cuando los extremos de una desigualdad son negativos o positivos

5) Si $-3 \le x \le 0$, ¿ a qué intervalo pertenece la expresión $\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$?

Si $-3 \le x \le 0$

Multiplicar por -1	:	$3 \ge -x \ge 0$	(1)
Elevar al cuadrado	:	$9 \ge x^2 \ge 0$	
Multiplicar por -1	:	$-9 \le -x^2 \le 0$	
Sumar 9	:	$0 \le 9-x^2 \le 9$	
Extraer raíz cuadrada	:	$0 \le \sqrt{9-x^2} \le 3$	
Multiplicar por $\frac{2}{3}$	:	$0 \le \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2} \le 2$	
Conclusión	:	$\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2} \in [0,2]$	

6) Si $x \in]-4,-2]$, ¿ a qué intervalo pertenece la expresión algebraica $\frac{2}{\sqrt{x^2-3}}$?

Si $x \in]-4,-2]$ entonces $-4 < x \le -2$

Multiplicar por -1	:	$4 > -x \ge 2$	(1)
Elevar al cuadrado	:	$16 > x^2 \ge 4$	
Sumar -3	:	$13 > x^2 - 3 \ge 1$	(2)
Extraer raíz cuadrada	:	$\sqrt{13} > \sqrt{x^2-3} \ge 1$	
Invertir	:	$\frac{1}{\sqrt{13}} < \frac{1}{\sqrt{x^2-3}} \le 1$	
Multiplicar por 2	:	$\frac{2}{\sqrt{13}} < \frac{2}{\sqrt{x^2-3}} \le 2$	
Conclusión	:	$\frac{2}{\sqrt{x^2-3}} \in \left]\frac{2}{\sqrt{13}}, 2\right]$	

NOTA: Sólo se puede elevar al cuadrado, cuando los extremos son positivos o cero	**(1)**
NOTA: Sólo se extrae la raíz cuadrada cuando los extremos son positivos	**(2)**

7) Si $x \in]-2,5[$, ¿ a qué intervalo pertenece la expresión x^2+4x-2 ?

x^2+4x-2 completando cuadrados equivale a $(x+2)^2-6$

Si $x \in]-2,5[$, entonces a partir de $-2 < x < 5$ formamos el término $(x+2)^2-6$

Sumar 2	:	$0 < x+2 < 7$
Elevar al cuadrado	:	$0 < (x+2)^2 < 49$
Sumar -6	:	$-6 < (x+2)^2 - 6 < 43$
Conclusión	:	$x^2+4x-2 \in]-6,43[$

8) Si $x \in \Re$, ¿ a qué intervalo pertenece la expresión algebraica $\dfrac{3}{2x^2+5}$?

$$\forall x \in \Re \;\Rightarrow\; x^2 \geq 0 \;;\; 2x^2 \geq 0 \;;\; 2x^2+5 \geq 5 \;;\; 0 < \frac{1}{2x^2+5} \leq \frac{1}{5} \;;\; 0 < \frac{3}{2x^2+5} \leq \frac{3}{5}$$

Conclusión : $\dfrac{3}{2x^2+5} \in \left]0, \dfrac{3}{5}\right]$

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

Exprese la desigualdad como un intervalo y dibuje su gráfica:

1) $3 > x$ **2)** $x \geq -4$ **3)** $-4 \leq x < 7$

4) $-5 \geq x \geq -10$ **5)** $-3x \geq -\dfrac{6}{2}$ **6)** $0 \leq x \leq 5$

Utilice desigualdades para describir los siguientes conjuntos:

1) $]0,5[$ **2)** $]-3,1]$ **3)** $[8,+\infty[$ **4)** $]-\infty,1]\cup[3,5[$

Efectúe las siguientes operaciones entre intervalos:

1) $]-1,2[\cap\{\,]-\infty,0]\cup[2,+\infty[\,\}$ **2)** $\{\,]-\infty,-1]\cup[0,+\infty[\,\}\cap[-1,0]$

3) $]-4,0[\cap]-1,3]$ **4)** $\{[-2,1]\cup[2,4[\,\}\cap\left[-\dfrac{3}{2},3\right]$ **5)** $]-\infty,5[\cap[5,8[$

EJERCICIOS DE REFUERZO

1) Si $(1-3x) \in [-1,2]$, a qué intervalo pertenece la expresión $(3x+2)$?

2) Si $\dfrac{2}{x} \in]3,5[$, a qué intervalo pertenece la expresión $(3x-1)$?

3) Si $x \in [5,10]$, hallar el menor valor n y el mayor valor m, tal que $m \leq \dfrac{2x-1}{3x+2} \leq n$

4) Si $(2x^2-1) \in]7,31[$, a qué intervalo pertenece x ?

5) Si $\dfrac{4}{x-1} \in]5,8[$, a qué intervalo pertenece la expresión $2x-1$?

6) Si $\dfrac{3x+2}{x-2} \in [10,20]$, hallar los valores de m y n tal que $m < x < n$

7) Si $x \in \Re$, ¿ a qué intervalo pertenece la expresión algebraica $\dfrac{5}{x^2+4}$?

8) Si se sabe que $x > -3$ y además que: $a < \sqrt{\dfrac{9x+46}{x+5}} < \sqrt{b}$, hallar el valor de $a+b$.

Respuestas:

1) $x \in [1,4]$ **2)** $x \in \left]\dfrac{1}{5},1\right[$ **3)** $m = \dfrac{9}{17}$; $n = \dfrac{19}{32}$ **4)** $x \in]-4,-2[\cup]2,4[$

5) $x \in \left]2,\dfrac{13}{5}\right[$ **6)** $m = \dfrac{42}{17}$; $n = \dfrac{22}{7}$ **7)** $x \in \left]0,\dfrac{5}{4}\right]$ **8)** $\dfrac{25}{2}$

8.6. INECUACIONES DE PRIMER GRADO O LINEALES

Son de la forma: $ax \pm b > 0$ ó $ax \pm b < 0$ ó $ax \pm b \geq 0$ ó $ax \pm b \leq 0$, donde a y b son constantes y $a \neq 0$

Para su resolución se considera si la desigualdad es estricta o no estricta para determinar el tipo de intervalos en la solución de la siguiente manera:

$> \vee <$ significa intervalos abiertos ; $\geq \vee \leq$ significa intervalos cerrados

EJERCICIOS RESUELTOS

Resolver las siguientes inecuaciones:

1) $\frac{2x-1}{3} < 1 - \frac{x-2}{5}$

$\frac{2x-1}{3} < \frac{5-x+2}{5}$, $10x-5 < 21-3x$, $13x < 26$, $x < 2$: $C.S. = x \in \left]-\infty, 2\right[$

2) $2(3x+3) - 10 < 6(x-2)$

$6x+6-10 < 6x-12$, $-4 < -12$, $0 < -8$ (F) $C.S. = \phi$

3) $x - \frac{1}{2}(x+3) \leq 2x - x\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{x}\right)$

$x - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \leq 2x - \frac{3}{2}x + 3$, $\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \leq \frac{1}{2}x + 3$, $-\frac{3}{2} \leq 3$, $-\frac{9}{2} \leq 0$ (V) $C.S. = x \in \Re$

4) $\frac{1}{2} + [(x^2-1)x + 2]\frac{1}{4} > \frac{7}{2}x + \frac{x^3-1}{4}$

$\frac{1}{2} + [x^3 - x + 2]\frac{1}{4} > \frac{7}{2}x + \frac{x^3}{4} - \frac{1}{4}$, $\frac{1}{2} + \frac{x^3}{4} - \frac{x}{4} + \frac{1}{2} > \frac{7}{2}x + \frac{x^3}{4} - \frac{1}{4}$, $1 - \frac{x}{4} > \frac{7}{2}x - \frac{1}{4}$

$-\frac{7}{2}x - \frac{x}{4} > -1 - \frac{1}{4}$, $-15x > -5$, $15x < 5$, $x < \frac{1}{3}$ $C.S. = x \in \left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

Resuelva las siguientes inecuaciones lineales:

1) $2x + 1 \geq \frac{x+2}{3}$

2) $\frac{2(-3x+1)-1}{2} - 3x \geq \frac{1}{4}$

3) $\frac{2+x}{3} - \frac{2(x-1)}{7} \geq \frac{-5x+7}{3} - \frac{3(x+1)}{7}$

4) $\frac{1}{3}(2-6x) + 4x \geq -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(2-8x)$

Respuestas:

1) $x \geq -\frac{1}{5}$ 2) $x \leq \frac{1}{24}$ 3) $x \geq \frac{4}{9}$ 4) $x \in \Re$

8.7. SISTEMA DE INECUACIONES LINEALES CON UNA VARIABLE

$$\begin{cases} a_1x + b_1 > 0 & \Rightarrow \quad Sol\ 1 \\ a_2x + b_2 \leq 0 & \Rightarrow \quad Sol\ 2 \end{cases}$$

La solución de un sistema de inecuaciones está dada por: $\boxed{Sol = Sol\,1 \cap Sol\,2}$

Ejemplos:

Resolver los siguientes sistemas:

1) $\begin{cases} 2x-4>6 \\ 3x+5>14 \end{cases}$

$2x-4>6 \quad \wedge \quad 3x+5>14$

$x>5 \quad \cap \quad x>3$, entonces: $C.S. = x \in]5, +\infty[$

2) $\begin{cases} \dfrac{3x}{4}-5>7 \\ \dfrac{x}{2}+3>x-9 \end{cases}$

$3x-20>28 \quad \wedge \quad x+6>2x-18$

$x>16 \quad \cap \quad x<24$, entonces: $C.S. = x \in]16, 24[$

8.7.1. INECUACIONES SIMULTÁNEAS

Representan un sistema de inecuaciones que pueden ser resueltas simultáneamente aislando la variable en la mitad cuando es posible, caso contrario se resuelve el sistema:

Ejemplos:

Resolver las siguientes inecuaciones:

1) $-6<2x-4\leq 2$

$-6+4<2x-4+4\leq 2+4$, $-2<2x\leq 6$

$\frac{1}{2}(-2)<\frac{1}{2}(2x)\leq\frac{1}{2}(6)$, $-1<x\leq 3$, $C.S. = x \in]-1\,;\,3]$

2) $-5\leq\dfrac{4-3x}{2}<1$

$2(-5)\leq 2\left(\dfrac{4-3x}{2}\right)<2(1)$, $-10\leq 4-3x<2$, $-10-4\leq 4-4-3x<2-4$

$-14\leq -3x<-2$, $\left(-\frac{1}{3}\right)(-14)\leq\left(-\frac{1}{3}\right)(-3x)<\left(-\frac{1}{3}\right)(-2)$, $\frac{14}{3}\geq x>\frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}<x\leq\frac{14}{3}$, $C.S. = x \in \left]\frac{2}{3}, \frac{14}{3}\right]$

3) $3\leq x-2<1$, $3+2\leq x-2+2<1+2$, $5\leq x<3$; absurdo : $Sol: \phi$

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

Resuelva los siguientes sistemas lineales:

1) $-1\leq -3+3x\leq 2$

2) $5<x-2\leq 2$

3) $3\leq\dfrac{-2x+3}{2}<4$

4) $5x-2<10x+8<2x-8$

5) $2x-3\leq 5x+4\leq 8x-8$

Respuestas:

1) $x \in \left[\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right]$ 2) ϕ 3) $x \in \left]-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right]$ 4) ϕ 5) $x \in [4, +\infty[$

8.8. INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO O CUADRÁTICAS

Son de la forma: $ax^2 \pm bx \pm c > 0$ ó $ax^2 \pm bx \pm c < 0$

$ax^2 \pm bx \pm c \geq 0$ ó $ax^2 \pm bx \pm c \leq 0$

Donde $a \neq 0$ y $a, b, c \in \Re$

Para su resolución se aplica el método del diagrama de signos o de los puntos referenciales.

8.8.1. MÉTODO DEL DIAGRAMA DE SIGNOS O PUNTOS REFERENCIALES

1) Factorizar el polinomio.

2) Igualar a cero cada factor, para obtener los puntos referenciales y ubicarlos en la recta real.

3) Determinar el signo de cada factor en los distintos intervalos que se originan mediante la siguiente regla:
   - ✓ Si la variable es positiva, "del punto referencial a la derecha se pone signo positivo, sentido contrario negativo".
   - ✓ Si la variable es negativa, "del punto referencial a la derecha se pone signo negativo, sentido contrario positivo".

4) Determinar que signo le corresponde el producto de los factores en cada uno de los intervalos anteriores mediante la ley de los signos de la multiplicación.

5) Seleccionar los intervalos donde el signo del producto satisfaga la desigualdad.
   - ✓ Signo (+) tiene relación con el sentido de la desigualdad $>$ ó $\geq$
   - ✓ Signo (-) tiene relación con el sentido de la desigualdad $<$ ó $\leq$
   - ✓ Si la desigualdad es estricta, los intervalos de la solución son cerrados $[a, b]$
   - ✓ Si la desigualdad es no estricta, los intervalos de la solución son abiertos $]a, b[$

El conjunto solución es la unión de todos los intervalos con el mismo signo.

Ejemplos:

Resolver las siguientes inecuaciones:

1) $2x^2 - x - 3 < 0$, $(x+1)(2x-3) < 0$

Puntos referenciales: $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \quad \wedge \quad 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

Se elabora el diagrama de signos.

INTERVALO	$-\infty$	-1		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$x+1$	-	0	+		+
$2x-3$	-		-	0	+
$(x+1)(2x-3)$	+		-		+

Como el sentido de la desigualdad es " < ", seleccionamos el intervalo con signo negativo, siendo entonces el conjunto solución de la inecuación el intervalo:

$$C.S. = x \in \left]-1\ ;\ \frac{3}{2}\right[$$

2) $\dfrac{(x-1)^2}{2} - \dfrac{(x-1)^2}{3} \geq \dfrac{8}{3}$

$$\frac{x^2-2x+1}{2} - \frac{(x^2-2x+1)}{3} - \frac{8}{3} \geq 0 \quad , \quad \frac{3(x^2-2x+1)-2(x^2-2x+1)-16}{6} \geq 0$$

$$3x^2-6x+3-2x^2+4x-2-16 \geq 0 \quad , \quad x^2-2x-15 \geq 0 \quad , \quad (x-5)(x+3) \geq 0$$

Puntos referenciales: $x-5=0 \Rightarrow x=5 \quad \wedge \quad x+3=0 \Rightarrow x=-3$

Elaboramos el diagrama de signos.

INTERVALO	-3	5	$+\infty$
$x-5$	-	O -	+
$x+3$	O -	+	+
$(x-5)(2x+3)$	+	-	+

Como el sentido de la desigualdad es " ≥ " se seleccionan los intervalos con signo positivo.

$$C.S. = x \in \left]-\infty;-3\right] \cup \left[5;+\infty\right[$$

3) $-2x^2+3x-8 \leq 0 \quad ; \quad 2x^2-3x+8 \geq 0$

El polinomio de segundo grado no admite raíces reales, lo cual se comprueba calculando su discriminante cuyo valor es negativo.

$$\Delta = b^2-4ac = (-3)^2-4\,(2)\,(8) = -55$$

Por lo tanto la inecuación dada es de la forma $ax^2+bx+c \geq 0$, siendo $a>0$; lo que significa que para cualquier valor que demos a " x " en el polinomio, este dará como resultado siempre una cantidad positiva ,

$$\forall x \in \Re,\ 2x^2+3x+8 \geq 0 \quad (V) \Rightarrow \quad C.S. = x \in \Re$$

8.8.2. MÉTODO DE LOS INTERVALOS

Sirve para resolver inecuaciones polinómicas de cualquier grado y lo que se debe hacer es lo siguiente:

1) Descomponer en factores el polinomio.
2) Determinar las raíces o puntos referenciales y ubicar en la recta numérica.
3) Aplicar la siguiente regla: " De la raíz mayor a la derecha signo positivo, luego van alternados", esto siempre y cuando en todos los factores la variable " x " tenga signo positivo.
4) Si existe un número impar de factores donde la variable " x " tiene signo negativo, en ese caso se aplica la siguiente regla: " De la raíz mayor a la derecha signo menos y luego van alternados"

Por ejemplo si la desigualdad polinomial fuese: $(x+a)(x-b)(x-c) \geq 0$, la solución sería:

Raíces o puntos referenciales: $x_1 = -a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$ Asumamos que $c < b$

$C.S. = [-a;c] \cup [b;+\infty[$

Ejemplos:

Resolver las siguientes inecuaciones:

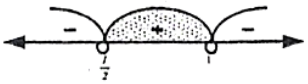
1) $x^2 + x - 6 \geq 0$, $(x+3)(x-2) \geq 0$

Puntos referenciales: $x+3=0 \Rightarrow x=-3 \quad \wedge \quad x-2=0 \Rightarrow x=2$

$C.S. = x \in]-\infty,-3] \cup [2,+\infty[$

2) $-2x^2 + 3x - 1 > 0$, $(-x+1)(2x-1) > 0$

Puntos referenciales: $-x+1=0 \Rightarrow x=1 \quad \wedge \quad 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

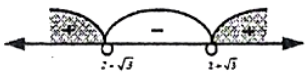


$C.S. = x \in \left]\frac{1}{2},1\right[$

3) $x^2 - 4x + 1 > 0$ No es fácil factorar, en este caso completamos cuadrados

$x^2 - 4x + 4 - 4 + 1 > 0$, $(x-2)^2 - 3 > 0$, $\left[(x-2)+\sqrt{3}\right]\left[(x-2)-\sqrt{3}\right] > 0$

Puntos referenciales: $x = 2-\sqrt{3} \quad \wedge \quad x = 2+\sqrt{3}$



$C.S. = x \in]-\infty, 2-\sqrt{3}[\cup]2+\sqrt{3}, +\infty[$

8.8.3. PRINCIPIO DE ABSORCIÓN

Para todo factor positivo:

1) $\underbrace{(ax+b)^2}_{+\,\geq 0} \geq 0 \quad \vee \quad \underbrace{(ax+b)^{2n}}_{+\,\geq 0} \geq 0$, $n \in Z^+$

$C.S. = x \in \Re$

2) $ax^2 + bx + c \geq 0 \quad \vee \quad ax^2 + bx + c > 0$; Para ambos casos se tiene qué:

$Si: \quad a > 0 \quad \wedge \quad b^2 - 4ac < 0$

$\forall x \in \Re$, $ax^2 + bx + c \geq 0$ o $ax^2 + bx + c > 0$ siempre va hacer positivo, por lo tanto tenemos una desigualdad absoluta verdadera y la solución será : $C.S. = x \in \Re$

Ejemplos:

1) $(x-5)^2(x+3) \geq 0$ Por principio de absorción se reduce a:

$(x+3) \geq 0$, $x \geq -3$, $C.S. = x \in [-3,+\infty[$

El punto referencial $x = 5$ si satisface la desigualdad.

2) $(x-5)^2(x+3) > 0$ Por principio de absorción se reduce a:

$$(x+3) > 0 \quad ; \quad C.S. = x \in [-3, +\infty[- \{5\}$$

El punto referencial $x = 5$ no satisface la desigualdad.

Nota: Cuando se absorbe algún factor, hay que verificar si el punto referencial de ese factor satisface o no la desigualdad.

3) $(x^2 - x + 1)(x-5) < 0$ Por principio de absorción se reduce a:

$(x-5) < 0$, ya que para $\forall x \in \Re$, $x^2 - x + 1 > 0$

$x < 5$; $C.S. = x \in]-\infty, 5[$

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

Resuelva las siguientes inecuaciones cuadráticas:

1) $x^2 \le 4$ 2) $(x-3)^2 \ge 0$ 3) $(x-3)^2 > 0$ 4) $(x-3)^2 < 0$

5) $(x-3)^2 \le 0$ 6) $x^2 + 2 < 0$ 7) $x^2 + 7 \ge 0$ 8) $x^2 - 13x + 30 > 0$

9) $-x^2 + 6x - 10 > 0$ 10) $-6x^2 - x + 12 \ge 0$ 11) $x^2 + 6x + 12 > 0$

12) $x^2 - x + 1 < 0$ 13) $x^2 - 8x + 8 > 4 - 4x$

Respuestas:

1) $-2 \le x \le 2$ 2) $x \in \Re$ 3) $x \in \Re - \{3\}$
4) ϕ 5) $x = 3$ 6) ϕ
7) $x \in \Re$ 8) $x < 3 \ \vee \ x > 10$ 9) ϕ
10) $-\frac{3}{2} \le x \le \frac{4}{3}$ 11) $x \in \Re$ 12) ϕ 13) $x \in \Re - \{2\}$

8.9. INECUACIONES POLINÓMICAS

Para resolver una inecuación polinómicas a más del método del diagrama de signos se puede utilizar el método de los intervalos.

Ejemplos:

Resolver las siguientes inecuaciones:

1) $(x+3)(2-x)(3-5x) \ge 0$

$(x+3)(x-2)(5x-3) \ge 0$

$$C.S. = x \in \left[-3, \frac{3}{5}\right] \cup [2, +\infty[$$

2) $(x+1)(5-x)(3-x)(7-x)(x-2) > 0$
$(x+1)(x-5)(x-3)(x-7)(x-2) < 0$

Desigualdades e Inecuaciones

$C.S. = x \in]-\infty, -1[\cup]2, 3[\cup]5, 7[$

Regla:

a) Si se cambia el signo a un número par de factores, no cambia el sentido de la desigualdad.

b) Si se cambia el signo a un número impar de factores, cambia el sentido de la desigualdad.

8.9.1. RAÍCES DE MULTIPLICIDAD PAR O IMPAR

Al descomponer en factores el polinomio puede darse el caso de que algunos factores se repitan (raíz múltiple), en cuyo caso se debe considerar la siguiente regla:

a) Si se repite un número par de veces (**multiplicidad par**), los signos en los intervalos situados a ambos de la raíz o puntos críticos son iguales.

b) Si se repite un número impar de veces (**multiplicidad impar**) los signos en los intervalos situados a ambos lados de la raíz son diferentes.

Ejemplos:

Resolver las siguientes inecuaciones:

1) $(x-5)^2(x+3) \geq 0$

Raíces o puntos referenciales: $x_1 = 5$ de multiplicidad par y, $x = -3$ de multiplicidad impar

Sol: $x \in [-3, +\infty[$

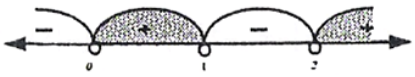
2) $(x-2)^2 \geq 0$; $x = 2$ es una raíz de multipliciad par

Se podría haber considerado también que $(x-2)^2$ para cualquier valor asignado a "x"el resultado es siempre positivo y como un cantidad positiva es mayor que cero se concluye que la solución es todos los valores.

$(x-2)^2 \geq 0$; $+ \geq 0$ (verdad) $\Rightarrow$ Sol: $x \in \Re$

3) $x^3 - 3x^2 + 2x > 0$

$x(x^2 - 3x + 2) > 0$; $x(x-2)(x-1) > 0$; Raíces: $x = 0, 1, 2$ de multiplicidad impar

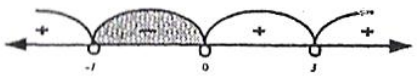


Sol: $x \in]0, 1[\cup]2, +\infty[$

4) $x^6 - 5x^5 + 3x^4 + 9x^3 < 0$

$x^3(x^3 - 5x^2 + 3x + 9) < 0$; $x^3(x+1)(x-3)^2 < 0$

Raíces: $x = 0$ multiplicidad impar , $x = -1$ multiplicidad impar , $x = 3$ multiplicidad par



Sol: $x \in]-1,\ 0[$

Si la inecuación hubiese sido de la forma $P(x) \leq 0$ la solución sería: Sol: $x \in [-1, 0] \cup \{3\}$

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

Resuelva las siguientes inecuaciones polinómicas:

1) $x^3 - 7x + 6 \geq 0$
2) $x^4 + 5x^2 \geq 36$
3) $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \geq 0$
4) $-x^4 + 4x \geq 12 - 9x^2$
5) $x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 3x + 6 < 0$
6) $-x^4 + 10x^3 - 35x^2 + 50x - 24 > 0$
7) $x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 10x^2 - 12x + 16 > 0$
8) $(x^3 + 1)(x^3 - 1)(1 - 2x)x \leq 0$
9) $(-x+2)^2 (x-1)(3-x)^4 (x+5)^3 \leq 0$

Respuestas:

1) $x \in [-3,1] \cup [2,+\infty[$
2) $x \in]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[$
3) $x \in [2,+\infty[\cup \{-2\}$
4) $x \in [1,3] \cup \{-2\}$
5) $x \in]-\infty,-1[\cup]1,2[$
6) $x \in]1,2[\cup]3,4[$
7) $x \in]-1,1[\cup]4,+\infty[$
8) $x \in]-\infty,-1] \cup \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup [1,+\infty[$
9) $x \in [-5,1] \cup \{2,3\}$

EJERCICIOS DE REFUERZO

Resolver las siguientes inecuaciones:

1) $\frac{2}{3}(4x+2) - (x-2) \leq \frac{4}{3}(4x+5)$
2) $\frac{x-3}{3} + \frac{5}{4} < \frac{x}{12} + \frac{2x+9}{15}$
3) $x^2 - 2x \leq 0$
4) $6x^2 - x - 1 > 0$
5) $4x^2 + 9x + 9 < 0$
6) $4x^2 - x - 5 \leq 0$
7) $3x^2 - 10x + 3 < 0$
8) $x^4 < x^2$
9) $(x-1)^2 (x-2)(x-3)^4 > 0$
10) $(x - 2 - x^2)(x^2 + 2x - 8) < 0$
11) $x^4 - 9x^2 - 4x + 12 \geq 0$
12) $-x^4 + 4x \geq 12 - 9x^2$
13) $x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30 < 0$
14) $x^5 - 7x^3 - 2x^2 + 12x + 8 \geq 0$
15) $x^6 - x^5 - 4x^4 + 6x^3 + x^2 - 5x + 2 \leq 0$

Respuestas:

1) $x \geq -\frac{10}{11}$
2) $x < 3$
3) $x \in [0, 2]$
4) $x < -\frac{1}{3} \cup x > \frac{1}{2}$
5) ϕ
6) $x \in \left[-1, \frac{5}{4}\right]$
7) $x \in \left]\frac{1}{3}, 3\right[$
8) $x \in]-1,1[- \{0\}$
9) $x \in]2, +\infty[- \{3\}$

10) $x \in]-\infty, -4[\cup]2, +\infty[$ 11) $x \in]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$ 12) $x \in [1, 3] \cup \{-2\}$
13) $x \in]-3, -1[\cup]2, 5[$ 14) $x \geq -2$ 15) $-2 \leq x \leq -1 \cup \{1\}$

Resolver las siguientes inecuaciones continuas:

1) $3 \leq \frac{-2x+3}{2} < 4$ 2) $4 \leq \frac{-x-2}{3} \leq 0$ 3) $2x-1 < \frac{3x}{2} \leq x+1$

4) $4x+5 < -x+10 \leq 2x+4$ 5) $18 \leq x^2 - 7 \leq 114$

6) Hallar el conjunto de enteros que satisfacen la inecuación: $\frac{2x-15}{2} < \frac{5}{3}(2-x) > \frac{2}{3}(8-5x)$

7) Si $2x+3 \in [4, 11]$ hallar el menor valor de m que satisface la siguiente desigualdad: $\frac{x+4}{x+2} \leq m$

8) Para todo $x \in \Re$, halle el valor de k en la siguiente inecuación: $-3 < \frac{x^2+kx-2}{x^2-x+1} < 2$

Respuestas:

1) $-\frac{5}{2} < x \leq -\frac{3}{2}$ 2) ϕ 3) $x < 2$ 4) ϕ

5) $x \in [-11, -5] \cup [5, 11]$ 6) $\{2, 3, 4\}$ 7) $m = \frac{9}{5}$ 8) $k \in]-1, 2[$

8.10. INECUACIONES RACIONALES (FRACCIONARIAS)

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios. Son inecuaciones racionales:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \quad , \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0 \quad , \quad \frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \quad y \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$$

Para su resolución se puede aplicar el método de diagrama de signos ó el método de los intervalos.

RECOMENDACIONES

1) $\frac{3x-2}{5} < \frac{-2x+3}{2}$, $2(3x-2) < 5(-2x+3)$ correcto

2) En la inecuación $\frac{2}{x+3} < 5$, no hacer $2 < 5(x+3)$; porque el signo de $(x+3)$ no se conoce, puede ser positive o negativo.

3) En la inecuación $\frac{2}{x-1} \leq \frac{x}{4}$, no hacer $8 \leq x(x-1)$; porque el signo de $(x-1)$ no se conoce.

4) En $-3 \leq \frac{2}{x+1} \leq 5$, no invertir; porque los extremos -3 y 5 tienen signos opuestos.

5) En $-3 \leq \frac{2}{x+1} \leq 5$, no multiplicar así: $-3(x+1) \leq 2 \leq 5(x+1)$; porque el signo de $(x+1)$ no se conoce.

6) $\frac{5}{3x-2} < \frac{2}{-2x+3}$, $5(-2x+3) < 2(3x-2)$ incorrecto

7) $\frac{5}{3x-2} < \frac{2}{-2x+3}$, $\frac{5}{3x-2} - \frac{2}{-2x+3} < 0$ correcto

8) Si hacemos: $x^2 > 4 \Rightarrow x > \pm 2$ es incorrecto. Lo correcto es: $x^2 > 4 \Rightarrow x^2 - 4 > 0$

9) Hacer: $4 \le x^2 \le 9 \quad \Rightarrow \quad 2 \le x \le 3$ es incorrecto.

Lo correcto es: $4 \le x^2 \le 9 \quad \Rightarrow \quad 4 \le x^2 \quad \wedge \quad x^2 \le 9$

$$4 - x^2 \le 0 \quad \wedge \quad x^2 - 9 \le 0$$

8.10.1. RESTRICCIÓN DEL DENOMINADOR:

En las inecuaciones racionales no estrictas deben excluirse en la solución, los valores referenciales correspondientes al denominador para evitar de esta manera al sustituir dichos valores en la inecuación, esta se transforme en una indeterminación. En las inecuaciones estrictas, los extremos de los intervalos de la solución son abiertos, por lo tanto no es necesario hacer la restricción de los puntos referenciales del denominador.

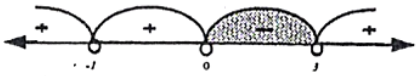
Ejemplos:

Resolver las siguientes inecuaciones:

1) $\dfrac{x-5}{(x-2)(x+3)} \ge 0 \quad ; \quad x \ne 2 \quad \wedge \quad x \ne -3$

$C.S. = x \in \left]-3,\ 2\right[\cup \left[5,\ +\infty\right[$

2) $\dfrac{3}{x(x+1)^2(x-3)} < 0 \quad ; \quad x \ne 0 \quad ; \quad x \ne -1 \quad ; \quad x \ne 3$

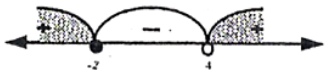


$C.S. = x \in \left]\ 0,\ 3\right[$

3) $\dfrac{(x+2)}{5(x-4)\left(x^2+3\right)} \ge 0$

El factor $\left(x^2+3\right)$ no tiene raíces reales, para cualquier valor asignado a x el resultado va a ser siempre una cantidad positiva, al omitir dicho factor no se altera el comportamiento de la inecuación.

$\dfrac{x+2}{x-4} \ge 0 \quad ; \quad x \ne 4$



$C.S. = x \in \left]-\infty,\ -2\right] \cup \left]4,\ +\infty\right[$

4) $\dfrac{4(x+2)(x-5)}{(x-5)(x-2)} \ge 0 \quad ; \quad x \ne 2 \quad \wedge \quad x \ne 5$

El factor $(x-5)$ se puede simplificar, pero se debe tomar en cuenta que dicha raíz o punto referencial, no debe considerarse en la solución.

$\dfrac{x+2}{x-2} \ge 0 \quad ; \quad x \ne 5$

$C.S. = x \in \left]-\infty,\ -2\right] \cup \left]\ 2,\ +\infty\right[- \{5\}$

Desigualdades e Inecuaciones

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

Resuelva las siguientes inecuaciones racionales:

1) $\frac{8}{3-x}>0$ 2) $\frac{5}{(7-x)^2}>0$ 3) $\frac{-8}{x^2+1}\geq 0$ 4) $\frac{x+3}{x-2}\geq 0$ 5) $\left(\frac{2x+1}{x-5}\right)^2>0$

6) $2x-\frac{9}{x-3}>x-\frac{5}{x-3}$ 7) $\frac{(2x+1)^2(2x-1)^3}{(x-1)^4}>0$ 8) $\frac{1}{3(x-2)}+\frac{1}{(x+1)(2-x)}>0$

9) $x+1\geq\frac{1}{1-x}$ 10) $\frac{(x+2)^2}{(x-1)(x+5)}\geq 0$ 11) $1+\frac{1-8x}{x^2+4x+3}\leq 0$

12) $\frac{x+1}{x^2+2}>\frac{x-1}{x^2+1}$ 13) $1+\frac{15-7x}{x^2+x-6}>0$ 14) $\frac{3x^2-3x+8}{x^2+x+1}\geq 2$

15) $\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+1}<\frac{8}{x^2-1}$ 16) $1+\frac{24-4x}{x^2-2x-15}\geq 0$ 17) $\frac{2x^2-2}{x^3-1}\geq\frac{x+1}{x-1}$

18) $\frac{x^5-1}{x^4+1}<\frac{x^5-2}{x^4+2}$

Respuestas:

1) $x<3$ 2) $x\in\Re-\{7\}$ 3) ϕ 4) $x\leq -3 \cup x>2$ 5) $x\in\Re-\left\{-\frac{1}{2},5\right\}$

6) $x\in\left]-1,3\right[\cup\left]4,+\infty\right[$ 7) $x\in\left]\frac{1}{2},+\infty\right[-\{1\}$ 8) $x\in\left]-1,+\infty\right[-\{2\}$

9) $x\in\left]1,+\infty\right[\cup\{0\}$ 10) $x\in\left]-\infty,-5\right[\cup\left]1,+\infty\right[\cup\{-2\}$

11) $x\in\left]-3,-1\right[\cup\{2\}$ 12) $x\in\Re$ 13) $x<-3 \cup x>2-\{3\}$

14) $x\in\left]-\infty,2\right]\cup\left[3,+\infty\right[$ 15) $x\in\left]-2,-1\right[\cup\left]1,3\right[$ 16) $x\in\left]-\infty,-3\right[\cup\left]5,+\infty\right[\cup\{3\}$

17) $x\in\left[-1,1\right[$ 18) $x\in\left]-\infty,-1\right[$

EJERCICIOS DE REFUERZO

Resolver las siguientes inecuaciones racionales:

1) $\frac{x}{2-x}>0$ 2) $\frac{4-x}{3x-1}<\frac{1}{2}$ 3) $\frac{2}{2x-1}>\frac{3}{3x-4}$ 4) $\frac{1}{3(x-3)}+\frac{1}{(x+1)(2-x)}>0$

5) $x+1\geq\frac{1}{1-x}$ 6) $\frac{x+3}{x-3}\leq\frac{x-1}{x+1}$ 7) $\frac{x}{x-a}-\frac{2a}{x+a}\geq\frac{8a^2}{x^2-a^2}$

8) $\frac{x}{(3x-5)(2x-7)}+1<\frac{1}{(2x-7)(5-3x)}$ 9) $\frac{x}{x^2-5x+6}-\frac{2}{2-x}\geq\frac{2x}{(3-x)(1-x)}$

10) $\frac{x+4}{x^2+4x+4}>\frac{x-2}{x^2-4}$

11) Un padre dispone de \$ 300 para ir al estadio con sus hijos. Si compra entradas de \$ 50 le falta dinero, si compra entradas de \$ 40 le sobra dinero. ¿Cuántos hijos tiene?

12) En un gallinero había cierto número de gallinas. Se duplicó el número y se vendieron 27 queda dando menos de 54. Después se triplicó el número de gallinas que había al principio y se vendieron 78quedando más de 39. ¿Cuántas gallinas había al principio?

13) Se compra igual cantidad de lapiceros de dos colores: al venderse la cuarta parte quedan menos de 118 por vender; si se vendiera la sexta parte quedarían más de 129 por vender. ¿Cuántos lapiceros se compraron?

14) Un comerciante disponía de una cantidad de dinero para comprar un cierto número de objetos iguales entre sí. Pensaba comprarlos al precio de \$ 50 cada uno y la faltaban más de \$ 48, y después pensó comprar los de \$ 40 y le sobraban más de \$ 152; y por último los compro al precio de \$ 30 cada uno y le sobraron menos de \$ 372. ¿Cuál fue el número de objetos comprados?

Respuestas:

1) $x \in]0,2[$ 2) $x<\frac{1}{3} \cup x>\frac{9}{5}$ 3) $\frac{1}{2}<x<\frac{4}{3}$ 4) $x \in]-1,2[\cup]3,+\infty[$

5) $x \in]1,+\infty[\cup\{0\}$ 6) $x \in]-\infty,-1[\cup[0,3[$

7) $x \in]-\infty,-2a]\cup]-a,a[\cup[3a,+\infty[$ 8) $x \in \left]\frac{5}{3},2\right[\cup\left[3,\frac{7}{2}\right[$

9) $x \in]1,+\infty[-\{2,3\}$ 10) $x \in \Re-\{\pm 2\}$ 11) 6 hijos

12) Habían 40 gallinas 13) Total 156 lapiceros 14) 21 objetos

8.11. VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto del número real "x" que se denota por $|x|$, se define por la siguiente regla:

$$|x|=\begin{cases} x & ; \ si \ \ x \geq 0 \\ -x & ; \ si \ \ x<0 \end{cases}$$

Ejemplos:

$|3|=3$, $|-2|=-(-2)=2$, $|0|=0$ El valor absoluto de cualquier número real x será siempre positivo.

8.11.1. PROPIEDADES:

1) $\forall \ x \in \Re$, se cumple: $|x| \geq 0$

2) $|x|=0 \Leftrightarrow x=0$

3) $\forall \ x \in \Re$, $|x|^2=x^2$ ó $|x^2|=x^2$

4) $\forall \ x \in \Re$, $\sqrt{a^2}=|a|$

5) $\forall \ x \in \Re$, $|-x|=|x|$

6) $|a-b|=|b-a|$; $\forall \ a \wedge b \in \Re$

7) $|a\,b|=|a||b|$; $\forall \ a \wedge b \in \Re$

8) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$; $b \neq 0$

9) $Si \ |x|=|a| \Leftrightarrow x=a \vee x=-a$ ó $Si \ |x|=|a| \Rightarrow |x|^2=|a|^2 \Rightarrow x^2=a^2$

10) $|x|=a \Leftrightarrow a \geq 0 \wedge [x=a \vee x=-a]$

11) $|x+y| \leq |x|+|y|$; $\forall \ x,y \in \Re$ Desigualdad triangular

12) $|x| \leq a \Leftrightarrow a \geq 0 \wedge [-a \leq x \leq a]$

13) $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \vee x \leq -a$, $\forall a \in \Re$

14) $|x|<|a| \Leftrightarrow |x|^2<|a|^2 = x^2<a^2$

EJERCICIOS RESUELTOS

Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto:

1) $\left|x-x^2\right|=0$

Por propiedad 2): $\left|x-x^2\right|=0 \quad \Leftrightarrow \quad x-x^2=0$

$$x(1-x)=0 \quad , \quad x=0 \ \vee \ 1-x=0$$

$$x=0 \ \vee \ x=1 \quad , \quad C.S.=\{0,1\}$$

2) $|4-3x|=8$

Por propiedad 10) tenemos que: $8\geq 0 \quad \wedge \quad [4-3x=8 \ \vee \ 4-3x=-8]$

$$\Re \ \wedge \ \left[x=-\frac{4}{3} \quad \vee \quad x=4\right] \ , \ C.S.=\left\{-\frac{4}{3},4\right\}$$

3) $\left||x^2-4|-9\right|=0$

Por propiedad 2): $|x^2-4|-9=0$, $|x^2-4|=9$ Por propiedad 10) :

$$9\geq 0 \quad \wedge \quad [x^2-4=9 \ \vee \ x^2-4=-9]$$

$$\Re \ \wedge \quad [x^2=13 \ \vee \ x^2=-5]$$

$$\left[x=\sqrt{13} \ \vee \ x=-\sqrt{13}\right] \ \vee \ \phi \ , \ C.S.=\left\{-\sqrt{13},\sqrt{13}\right\}$$

4) $|x-1|-|x+2|=0$

$|x-1|=|x+2|$ Por propiedad 9): $x-1=x+2 \ \vee \ x-1=-(x+2)$

$$-1=2 \ \vee \ x-1=-x-2$$

$$Falso \ \vee \ x=-\frac{1}{2}$$

$$\phi \ \cup \ x=-\frac{1}{2} \quad , \quad C.S.=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

Igual resultado obtenemos si aplicamos: $|x|^2=|a|^2 \Rightarrow x^2=a^2$

5) $|x-2|=|2x+3|$ Por propiedad 9) tenemos:

$$x-2=2x+3 \ \vee \ x-2=-2x-3$$

$$x=-5 \ \vee \ 3x=-1$$

$$x=-5 \ \vee \ x=-\frac{1}{3} \quad ; \quad C.S.=x\in\left\{-5,-\frac{1}{3}\right\}$$

Otra manera de resolver, aplicando la otra equivalencia de la propiedad 9) tenemos:

$$|x-2|^2=|2x+3|^2$$

$$(x-2)^2=(2x+3)^2 \quad ; \quad x^2-4x+16=4x^2+12x+9(x-2) \quad ; \quad 3x^2+16x+5=0$$

$$(3x+1)=(x+5) \ ; \ 3x+1=0 \ \vee \ x+5=0 \ ; \ x=-\frac{1}{3} \ \vee \ x=-5 \ ; \ C.S.=x\in\left\{-5,-\frac{1}{3}\right\}$$

6) $|x-9|<0$

Por definición del valor absoluto este es siempre positivo y para cualquier valor que asignamos a x al efectuar el valor absoluto nos dará una cantidad positiva con lo que concluiremos siempre en un absurdo, consecuentemente no tendrá solución la desigualdad.

Por lo tanto la desigualdad no tiene solución , $C.S.=\phi$

7) $|x^2-9|\leq 0$, Por la condición de la desigualdad, los únicos valores que satisfacen la condición son 3 y -3 . $C.S.=\{-3;3\}$

Si la desigualdad fuera $|x^2-9|\geq 0$, se cumpliría para cualquier valor que demos a x, en cuyo caso diremos que la solución está dada por: $C.S.=x\in\Re$

8) $|x+3|\leq -x+1$ Por propiedad 12) tenemos:

$$-x+1\geq 0 \quad\wedge\quad [-(-x+1)\leq x+3\leq -x+1]$$
$$-x\geq -1 \quad\wedge\quad x-1\leq x+3 \quad\wedge\quad x+3\leq -x+1$$
$$x\leq 1 \quad\wedge\quad -1\leq 3 \quad\wedge\quad 2x\leq -2$$
$$x\leq 1 \quad\wedge\quad \Re \quad\wedge\quad x\leq -1$$

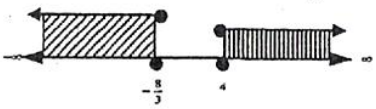
Intersecando los intervalos tenemos como solución:

$$C.S.=x\in\left]-\infty,-1\right]$$

9) $\left|\dfrac{2-3x}{5}\right|\geq 2$

$\dfrac{|2-3x|}{5}\geq 2$; $|2-3x|\geq 10$ Por propiedad 13) tenemos:

$$2-3x\leq -10 \quad\vee\quad 2-3x\geq 10$$
$$-3x\leq -12 \quad\vee\quad -3x\geq 8$$
$$3x\geq 12 \quad\vee\quad 3x\leq -8$$
$$x\geq 4 \quad\vee\quad x\leq -\frac{8}{3}$$



$$C.S.=x\in\left]-\infty;-\frac{8}{3}\right]\cup[4;+\infty[$$

10) $|x-2|^2-2|x-2|-15>0$

$(x-2)^2-2|x-2|-15>0$, $x^2-4x+4-2|x-2|-15>0$

$x^2-4x-11>2|x-2|$, $\dfrac{x^2-4x-11}{2}>|x-2|$

$|x-2|<\dfrac{x^2-4x-11}{2}$ Por propiedad 12) tenemos:

$$\frac{x^2-4x-11}{2}\geq 0 \quad \wedge \quad \left[-\frac{x^2-4x-11}{2}<x-2<\frac{x^2-4x-11}{2}\right]$$

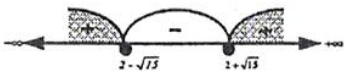
$$x^2-4x-11\geq 0 \quad \wedge \quad \left[\frac{-x^2+4x+11}{2}-x+2<0 \quad \wedge \quad x-2-\frac{x^2-4x-11}{2}<0\right]$$

$$x^2-4x+4-15 \quad \wedge \quad \left[\frac{-x^2+4x+11-2x+4}{2}<0 \quad \wedge \quad \frac{2x-4-x^2+4x+11}{2}<0\right]$$

$$(x-2)^2-15\geq 0 \quad \wedge \quad \left[x^2-2x-15>0 \quad \wedge \quad x^2-6x-7>0\right]$$

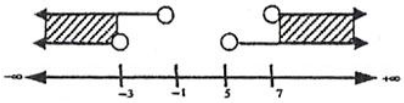
$$\underbrace{\left[(x-2)+\sqrt{15}\right]\left[(x-2)-\sqrt{15}\right]\geq 0}_{A} \quad \wedge \quad \underbrace{\left[(x-5)(x+3)>0 \quad \wedge \quad (x-7)(x+1)>0\right]}_{B}$$

A)

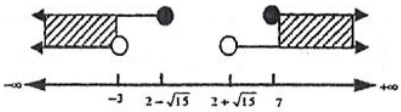


Sol A: $x\in\left]-\infty, 2-\sqrt{15}\right]\cup\left[2+\sqrt{15}, +\infty\right[$

B)



Sol B $=x\in\left]-\infty ; -3\right[\cup\left]7 ; +\infty\right[$

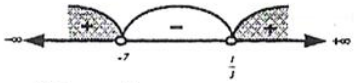


Sol: Sol A $\cap$ Sol B $=\left]-\infty, -3\right[\cup\left]7, +\infty\right[$

11) $|4-x|<|3+2x|$ Por propiedad 15) tenemos:

$$(4-x)^2<(3+2x)^2 \quad ; \quad 16-8x+x^2<9+12x+4x^2 \quad ; \quad -3x^2-20x+7<0$$

$$(3x-1)(x+7)>0$$



$$C.S.=x\in\left]-\infty;-7\right[\ \cup\ \left]\frac{1}{3};+\infty\right[$$

12) Resolver $|x-2|-2x=4$ por definición.

$$|x-2|=\begin{cases} x-2\ ;\ Si\ x-2\geq 0 & ;\quad x\geq 2 \\ -x+2\ ;\ Si\ x-2<0 & ;\quad x<2 \end{cases}$$

$$[Si\, x-2\geq 0,\ \Rightarrow\ (x-2)-2x=4]\ \vee\ [Si\, x-2<0,\ \Rightarrow\ -(x-2)-2x=4]$$

$$[\,x\geq 2,\ \Rightarrow\ -x=6\,]\ \vee\ [\,x<2,\ \Rightarrow\ -3x=2\,]$$

$$[\,x\geq 2,\ \Rightarrow\ x=-6\,]\ \vee\ \left[\,x<2,\ \Rightarrow\ x=-\frac{2}{3}\right]$$

$$[\,\phi\,]\ \vee\ \left[\,x=-\frac{2}{3}\right]$$

$$\phi\ \cup\ x=-\frac{2}{3}\quad\Rightarrow\quad C.S.=\left\{-\frac{2}{3}\right\}$$

13) Resolver $\dfrac{|2x-1|}{x}\leq 3$ por definición.

$$\left[Si\, 2x-1\geq 0,\ \Rightarrow\ \frac{2x-1}{x}\leq 3\right]\ \vee\ \left[Si\, 2x-1<0,\ \Rightarrow\ \frac{-2x+1}{x}\leq 3\right]$$

$$\left[\,x\geq\frac{1}{2}\ \wedge\ \frac{2x-1}{x}-3\leq 0\right]\ \vee\ \left[\,x<\frac{1}{2}\ \wedge\ \frac{-2x+1}{x}-3\leq 0\right]$$

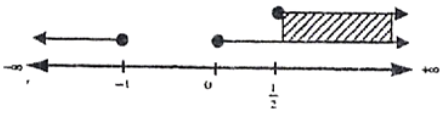
$$\left[\,x\geq\frac{1}{2}\ \wedge\ \frac{2x-1-3x}{x}\leq 0\right]\ \vee\ \left[\,x<\frac{1}{2}\ \wedge\ \frac{-2x+1-3x}{x}\leq 0\right]$$

$$\left[\,x\geq\frac{1}{2}\ \wedge\ \frac{-x-1}{x}\leq 0\right]\ \vee\ \left[\,x<\frac{1}{2}\ \wedge\ \frac{-5x+1}{x}\leq 0\right]$$

$$\left[\underbrace{x\geq\frac{1}{2}\ \wedge\ \frac{x+1}{x}\geq 0}_{A}\right]\ \vee\ \left[\underbrace{x<\frac{1}{2}\ \wedge\ \frac{5x-1}{x}\geq 0}_{B}\right]$$

A)

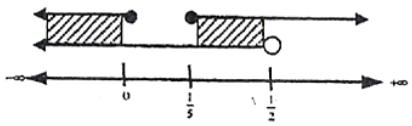
$x\geq\frac{1}{2}\quad\wedge$



$Sol.\ A=x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$

B)

$x<\frac{1}{2}\quad\wedge$



$Sol.\ B=x\in\,]-\infty;0[\ \cup\ \left[\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right[$

$C.S.=\ Sol.\ A\ \cup\ Sol.\ B\qquad,\qquad C.S.=\ x\in\,]-\infty,0[\cup\left[\frac{1}{5},+\infty\right[$

8.11.2. MÉTODO DE LAS REGIONES

Este método es útil cuando se tiene dos o más valores absolutos lineales y no se puede aplicar propiedades:

PROCEDIMIENTO:

1) Se determina las raíces o puntos referenciales de cada valor absoluto.

2) Se coloca los puntos referenciales en una recta, la misma que queda dividida en regiones o partes.

3) Se determinan los signos de cada valor absoluto en las respectivas regiones con los mismos criterios del método del "Diagrama de Signos" para resolver inecuaciones.

4) Se resuelve la ecuación o inecuación tomando en cuenta los signos de cada región:

   Signo + ; se elimina el valor absoluto y se conservan los signos de la expresión algebraica.

   Signo - ; se elimina el valor absoluto y se cambian los signos de la expresión algebraica.

5) La solución de la inecuación se obtiene realizando la **"unión"** de las soluciones de cada una de las regiones.

$$Sol = Sol_1 \cup Sol_2 \cup Sol_3 \cup \ldots$$

Ejemplos:

Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto:

1) $|x+4|+|x-3|-|3x+8|=-1$

Puntos referenciales: $x=-4$, $x=3$ $\wedge$ $x=-\frac{8}{3}$

	I		II		III		IV
	$-\infty$	-4		$-\frac{8}{3}$		3	$+\infty$
$x+4$	-	○	+		+		+
$x-3$	-		-		-	○	+
$3x+8$	-		-	○	+		+

$\lvert x+4\rvert=-x-4$	$\lvert x+4\rvert=x+4$	$\lvert x+4\rvert=x+4$	$\lvert x+4\rvert=x+4$
$\lvert x-3\rvert=-x+3$	$\lvert x-3\rvert=-x+3$	$\lvert x-3\rvert=-x+3$	$\lvert x-3\rvert=x-3$
$\lvert 3x+8\rvert=-3x-8$	$\lvert 3x+8\rvert=-3x+8$	$\lvert 3x+8\rvert=3x+8$	$\lvert 3x+8\rvert=3x+8$

Región I : $x \in \left]-\infty,-4\right]$

$|x+4|+|x-3|-|3x+8|=-1$

$(-x-4)+(-x+3)-(-3x-8)=-1$, $-x-4-x+3+3x+8=-1$

$x=-8$ Este valor se encuentra en el intervalo $x \in \left]-\infty,-4\right]$, por lo tanto $Sol\,1: x=-8$

Región II : $x \in \left[-4, -\frac{8}{3}\right[$

$|x+4|+|x-3|-|3x+8|=-1$

$(x+4)+(-x+3)-(-3x-8)=-1 \quad , \quad x+4-x+3+3x+8=-1 \quad , \quad 3x=16$

$x=-\frac{16}{3}$ Este valor no se encuentra en el intervalo $x \in \left[-4, -\frac{8}{3}\right[$, por lo tanto $Sol\,2: \phi$

Región III : $x \in \left[-\frac{8}{3}, 3\right[$

$|x+4|+|x-3|-|3x+8|=-1$

$(x+4)+(-x+3)-(3x+8)=-1 \quad , \quad x+4-x+3-3x-8=-1$

$x=0$ Este valor se encuentra en el intervalo $x \in \left[-\frac{8}{3}, 3\right[$, por lo tanto $Sol\,3: x=0$

Región IV : $x \in [3, +\infty[$

$|x+4|+|x-3|-|3x+8|=-1$

$(x+4)+(x-3)-(3x+8)=-1 \quad , \quad x+4+x-3-3x-8=-1$

$x=-6$ Este valor no se encuentra en el intervalo $x \in [3, +\infty[$, por lo tanto $Sol\,4: \phi$

$C.S. = Sol\,1 \cup Sol\,2 \cup Sol\,3 \cup Sol\,4 \quad ; \quad C.S.: x = \{-8, 0\}$

2) $3|x|+|x-2| \le 6$

Puntos referenciales: $x=0 \ \wedge \ x=2$

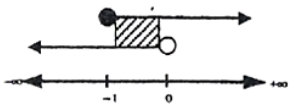
	I	II	III
	$-\infty$	0	2	$+\infty$
x	-	+	+
$x-2$	-	-	+

$\lvert x\rvert = -x$	$\lvert x\rvert = x$	$\lvert x\rvert = x$
$\lvert x-2\rvert = -x+2$	$\lvert x-2\rvert = -x+2$	$\lvert x-2\rvert = x-2$

Región I : $x \in]-\infty, 0[$

$3|x|+|x-2| \le 6$

$3(-x)+(-x+2) \le 6 \quad , \quad -3x-x+2 \le 6 \quad , \quad -4x \le 4 \quad , \quad x \ge -1$

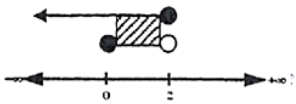


$Sol\,1 = x \in [-1, 0[$

Región II : $x \in [0, 2[$

$3|x|+|x-2| \le 6$

$3x+(-x+2) \le 6 \quad , \quad 3x-x+2 \le 6 \quad , \quad 2x \le 4 \quad , \quad x \le 2$



$Sol\,2: x \in [0, 2[$

Región III : $x \in [2, +\infty[$

$3|x|+|x-2| \leq 6$

$3x+x-2 \leq 6 \quad , \quad 4x \leq 8 \quad , \quad x \leq 2$

$Sol\ 3: x = 2$

$C.S. = Sol\,1 \cup Sol\,2 \cup Sol\,3 \quad ; \quad C.S. = x \in [-1\ ,2]$

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

Resuelva las siguientes inecuaciones con valor absoluto:

1) $|x-5| \geq 3$

2) $|x+2| \leq 3$

3) $\left|\dfrac{3x-1}{x+1}\right| < 2$

4) $\left|\dfrac{4x+9}{1-2x}\right| \geq 3$

5) $|x-5| < |x+1|$

6) $|5x-2| \leq 3x+4$

7) $|3x-2| < |6-x|$

8) $|x-1|+x-2 \leq 1$

9) $||x-2|-3| > 2$

10) $\dfrac{|x|-4}{|x-2|} \geq 1$

11) $|x^2+1| \geq 0$

12) $|x^3-1| \leq x^2+x+1$

13) $\dfrac{|6x-x^2|-4}{4-|x|} > -1$

14) $\dfrac{x-2}{|x^2+4|} \leq \dfrac{x}{x^2+2}$

15) $|x+1|+|-x+2| > 3$

16) $2|x+5|-|x+2| \geq 5|x|$

17) $|x-4|+|x+3|-3 \geq |x|$

18) $2x^2-7|x|+3 \geq 0$

19) $\dfrac{|x-1|-x}{1-|x|} \geq 0$

20) $|2x-1| < \sqrt{x^2-x+\dfrac{1}{|-4|}}+1$

21) $-2 < |x| < 4$

Respuestas:

1) $x \leq 2 \ \cup \ x \geq 8$

2) $x \in [-5,1]$

3) $x \in \left]-\frac{1}{5},3\right[$

4) $x \in \left[-\frac{3}{5},6\right]-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

5) $x > 2$

6) $x \in \left[-\frac{1}{4},3\right]$

7) $x \in]-2,2[$

8) $x \leq 2$

9) $x \in]-\infty,-3[\cup]1,3[\cup]7,+\infty[$

10) ϕ

11) $x \in \Re$

12) $x \in [0,2]$

13) $x \in]-4,4[\cup]5,7[-\{0\}$

14) $x \in \Re$

15) $x < -1 \ \cup \ x > 2$

16) $x \in \left[-\frac{4}{3},2\right]$

17) $x \in \Re$

18) $x \in]-\infty,-3]\cup\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\cup[3,+\infty[$

19) $x \in \left]-1,\frac{1}{2}\right]\cup]1,+\infty[$

20) $-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$

21) $x \in]-4,4[$

EJERCICIOS DE REFUERZO

Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto.

1) $|x|=5$ 2) $|x-2|=|x^2+2x+4|$ 3) $|2x-7|=x-5$

4) $|3x-1|-|x-2|=1$ 5) $|2x+|x-1||=5$ 6) $|x+3|-|2x-5|=7$

7) $|x-5|\geq 3$ 8) $|x-5|<|x+1|$ 9) $||2-x|-3|\geq -2$

10) $\dfrac{|x+3|(5-2x)}{x(x-4)}\leq 0$ 11) $|x^2+2x+3|\geq|x-1|$ 12) $|3x-1|-3\leq\left|\dfrac{x}{2}+1\right|$

13) $|x+4|+|x-3|-|3x+8|=-1$ 14) $|4x^2+4x-11|\geq 9-2x-4x^2$

15) $\dfrac{x^2-x+3}{x}\leq\left|\dfrac{x^2-2x+8}{x}\right|$ 16) $|x^2+2|-|x^2+1|>|x-1|$ 17) $|2x+1|\leq 3+|x-3|$

18) $|x-3|\geq\left|x+\dfrac{1}{x}\right|$ 19) $\left|\dfrac{|x-4|}{x^2+1}\right|\leq 1$ 20) $\dfrac{2|x|}{|2x+1|}>\dfrac{|2x+1|}{|3x|}$

21) $(|x-1|+|x-2|)(|1-x|-|2-x|)\leq x^2-6$ 22) $|2x-6|-|x-2|\leq|2x-4|-|x-3|$

23) $|x^2+1|-|x^2-x+1|\geq|x-1|$ 24) $|x+|x||\leq 6$

25) $\dfrac{|x-10|-x+|x+4|}{x+1}<2$ 26) $2+|x+7|+\dfrac{x}{2}<0$ 27) $\left|\dfrac{x^2+3x+11}{x-2}\right|\leq 3$

28) $||x|-3|\geq||x|-1|$ 29) $|x-2|^2-2|x-2|-15>0$ 30) $x^2-5|x|+6=0$

31) $||x-1|-|x+2||=0$ 32) $\dfrac{|x|}{x-1}\leq\dfrac{2}{|x+2|}$ 33) $|2x^2-19|\leq x+2$

34) $|x-1|<\dfrac{3-x}{x}$ 35) $\dfrac{|4x-x^2|-5}{1-\sqrt{x^2}}\geq 0$ 36) $\dfrac{|3x-1|+2x}{|x+1|-3x}\geq 0$

37) $\sqrt{\dfrac{16x^2-40x+|25|}{|-16|}}\geq|4x-5|-|2x+8|$ 38) $1<|x-2|<4$

Respuestas:

1) $\{-5,5\}$ 2) $\{-1,-2\}$ 3) ϕ 4) $\{-1,1\}$

5) $\{-6,2\}$ 6) ϕ 7) $]-\infty,2]\cup[8,+\infty[$

8) $x\in]2,+\infty[$ 9) $x\in\Re$ 10) $x\in\left]0,\dfrac{5}{2}\right]\cup]4,+\infty[\cup\{-3\}$

11) $x\in]-\infty,-2]\cup[-1,+\infty[$ 12) $x\in\left[-\dfrac{6}{7},2\right]$ 13) $x\in\{-8,0\}$

14) $x \in \left]-\infty, 1\right] \cup \left[\frac{5}{4}, +\infty\right[$ 15) $x \in \left]-\infty, 5\right] - \{0\}$ 16) $x \in \left]0, 2\right[$

17) $x \in \left[-7, \frac{5}{3}\right]$ 18) ϕ 19) $x \in \left]-\infty, \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{13}}{2}, +\infty\right[$

20) $x \in \left]-\infty, -\frac{2-\sqrt{6}}{2}\right[\cup \left]\frac{2+\sqrt{6}}{2}, +\infty\right[- \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ 21) $x \in \left]-\infty, -1\right] \cup \left[3, +\infty\right[$

22) $x \in \left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$ 23) $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ 24) $x \leq 3$ 25) $x < -1 \vee x > 4$

26) $x \in \left]-10, -6\right[$ 27) $x \in \left[-5, -1\right]$ 28) $x \in \left[-2, 2\right]$ 29) $x < -3 \cup x > 7$

30) $\{-3, -2, 2, 3\}$ 31) $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ 32) $x \in \left]-\infty, 1\right[- \{-2\}$

33) $x \in \left[\frac{-1+\sqrt{137}}{4}, \frac{7}{2}\right]$ 34) $x \in \left]0, \sqrt{3}\right[$ 35) $x \in \left]1, 5\right]$

36) $x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ 37) $x \in \left[-\frac{17}{20}, \frac{47}{4}\right]$ 38) $x \in \left]-2, 1\right[\cup \left]3, 6\right[$

8.12. INECUACIONES IRRACIONALES

Para su resolución debe tomarse en cuenta las siguientes consideraciohes:

1) Si n es un entero positivo par

i) $\forall\ P(x) \geq 0\ ,\ \sqrt[n]{P(x)} \geq 0 \Leftrightarrow P(x) \geq 0$

ii) $\sqrt[n]{P(x)} \leq \sqrt[n]{Q(x)} \Leftrightarrow 0 \leq P(x) \leq Q(x)$

2) Si n es un entero positivo impar

i) $\sqrt[n]{P(x)} \geq 0 \Leftrightarrow P(x) \geq 0$

ii) $\sqrt[n]{P(x)} < 0 \Leftrightarrow P(x) < 0$

iii) $\sqrt[n]{P(x)} \leq \sqrt[n]{Q(x)} \Leftrightarrow P(x) \leq Q(x)$

PARA INECUACIONES IRRACIONALES DE LAS FORMAS:

1) $\sqrt{P(x)} \geq Q(x)$

a) $P(x) \geq 0 \quad \wedge \quad Q(x) \geq 0 \quad \wedge \quad P(x) \geq Q^2(x)$

b) $P(x) \geq 0 \quad \wedge \quad Q(x) < 0 \quad ; \quad$ **Sol**: Sol $a) \cup$ Sol $b)$

2) $\sqrt{P(x)} \leq Q(x)\ ,\ $ **Sol**: $P(x) \geq 0 \quad \wedge \quad Q(x) \geq 0 \quad \wedge \quad P(x) \leq Q^2(x)$

3) $\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} \geq 0\ ,\ $ **Sol**: $P(x) \geq 0 \quad \wedge \quad Q(x) \geq 0^2$

4) $\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} \leq 0\ ,\ $ **Sol**: $P(x) = 0 \quad \wedge \quad Q(x) = 0$

5) $\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} \geq k\ ,\ k > 0\ ;\ $ **Sol**: $P(x) \geq 0 \wedge Q(x) \geq 0 \wedge P(x) \geq \left[k - \sqrt{Q(x)}\right]^2$

6) Si n es un entero par positivo:

$$\sqrt[n]{P(x)\,Q(x)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(x) \geq 0 \quad \wedge \quad Q(x) \geq 0$$
$$\sqrt[n]{P(x)\,Q(x)} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(x) \geq 0 \quad \wedge \quad Q(x) \leq 0$$
$$\frac{P(x)}{\sqrt[n]{Q(x)\,R(x)}} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q(x) > 0 \quad \wedge \quad \frac{P(x)}{R(x)} \geq 0$$
$$\frac{P(x)}{\sqrt[n]{Q(x)\,R(x)}} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q(x) > 0 \quad \wedge \quad \frac{P(x)}{R(x)} \leq 0$$

7) Si n es un entero impar positivo:

$$\frac{P(x)\sqrt[n]{Q(x)}}{R(x)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{P(x)\,Q(x)}{R(x)} \geq 0$$
$$\frac{P(x)}{R(x)\sqrt[n]{Q(x)}} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{P(x)}{R(x)\,Q(x)} \leq 0$$
$$\sqrt[n]{P(x)} \leq \sqrt[n]{Q(x)} \quad \Leftrightarrow \quad P(x) \leq Q(x)$$

OBSERVACIÓN

Cuando en una expresión existan n radicales se deben calcular los intervalos de existencia para cada radical $C.E.$ (condición de existencia).

Para poder elevar al cuadrado debemos garantizar que los dos miembros de la desigualdad sean positivos.

EJERCICIOS RESUELTOS

Resolver las siguientes inecuaciones:

1) $\sqrt{x+7} > -3$

$C.E:\ x+7 \geq 0\ ,\ x \geq -7\ ,$ **Sol**: $x \in [-7, +\infty)$

Para todo el intervalo se cumple la desigualdad.

2) $\sqrt{x-4} \leq 0$

$C.E:\ x-4 \geq 0\ ;\ x \geq 4\ ,\ \forall x > 4$ no se cumple la desigualad ya que $+ \leq 0\ \ (F)$

Si $x = 4$, se cumple la desigualdad $0 \leq 0$; por lo tanto la solución es: **Sol:** $x = 4$

3) $\sqrt{x-10} < 0$

$C.E:\ x-10 \geq 0\ ,\ x \geq 10\ ,\ \forall x \geq 10$ no se cumple la desigualdad

$+ < 0\ \ (F)$ entonces **Sol**: ϕ

4) $\sqrt{4-5x} < \sqrt{29}$

$C.E:\ 4-5x \geq 0\ ,\ -5x \geq -4\ ,\ x \leq \frac{4}{5}$, podemos elevar al cuadrado ya que ambos miembros son positivos, entonces: $4-5x < 29\ ;\ -5x < 25\ ,\ x > -5$

La solución se obtiene: $x \leq \frac{4}{5} \ \cap\ x > -5 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{Sol}: x \in \left(-5, \frac{4}{5}\right]$

5) $\sqrt{x+6}+\sqrt{4-x}>-5$

$C.E:\ x+6\geq 0 \quad \cap \quad 4-x\geq 0 \ ; \ x\geq -6 \quad \cap \quad x\leq 4 \Rightarrow Sol: x\in[-6,4]$

La suma de dos cantidades positivas va hacer siempre mayor que un número negativo.

6) $-\sqrt{x-3}>0$

$C.E:\ x-3\geq 0 \ , \ x\geq 3$ Como la raíz tiene signo negativo entonces para cualquier valor de la condición de existencia el resultados será siempre un número negativo es decir:

$(-)>0 \ , \ (F) \quad \Rightarrow$ **Sol**: ϕ

7) $\sqrt{x^2-x-12}\leq\sqrt{x^2-5x+6}$

$x^2-x-12\geq 0 \quad \wedge \quad x^2-5x+6\geq 0 \quad \wedge \quad x^2-x-12\leq x^2-5x+6$

$(x-4)(x+3)\geq 0 \quad \wedge \quad (x-3)(x-2)\geq 0 \quad \wedge \quad 4x\leq 18$

$[x\leq -3 \ \cup \ x\geq 4] \ \cap \ [x\leq 2 \ \cup \ x\geq 3] \ \cap \ x\leq \frac{9}{2}$

Teniendo como resultado: **Sol**: $x\in]-\infty;-3]\cup\left[4;\frac{9}{2}\right]$

8) $\sqrt{x^2-11x+28}\geq x-2$ Es de la forma $\sqrt{P(x)}\geq Q(x)$ ó $+\geq\begin{cases}+ & a)\\ - & b)\end{cases}$

a) $P(x)\geq 0 \quad \wedge \quad Q(x)\geq 0 \quad \wedge \quad P(x)\geq Q^2(x)$

$x^2-11x+28\geq 0 \quad \wedge \quad x-2\geq 0 \quad \wedge \quad x^2-11x+28\geq(x-2)^2$

$(x-7)(x-4)\geq 0 \quad \wedge \quad x\geq 2 \quad \wedge \quad x^2-11x+28\geq x^2-4x+4$

$[x\leq 4\cup x\geq 7] \quad \cap \quad x\geq 2 \quad \cap \quad x\leq\frac{24}{7}$

Teniendo como resultado: **Sol a)**: $x\in\left[2,\frac{24}{7}\right]$

b) $P(x)\geq 0 \quad \wedge \quad Q(x)<0$

$x^2-11x+28\geq 0 \quad \wedge \quad x-2<0$

$(x-7)(x-4)\geq 0 \quad \wedge \quad x<2$

$[x\leq 4 \ \cup \ x\geq 7] \quad \cap \quad x<2$

Teniendo como resultado: **Sol b)**: $x\in(-\infty,2)$

Sol Total = *Sol a)* $\cup$ *Sol b)* ; **Sol. Total** = $x\in\left]-\infty;\frac{24}{7}\right]$

9) $\sqrt{x^2-x-6}<x+1$ Es de la forma $\sqrt{P(x)}<Q(x)$ ó $+<\begin{cases}+ & a)\\ - & b)\end{cases}$

a) $P(x)\geq 0 \quad \wedge \quad Q(x)>0 \quad \wedge \quad P(x)<Q^2(x)$

$x^2-x-6\geq 0 \quad \wedge \quad x+1>0 \quad \wedge \quad x^2-x-6<(x+1)^2$

$(x-3)(x+2)\geq 0 \quad \wedge \quad x>-1 \quad \wedge \quad x^2-x-6<x^2+2x+1$

$x\leq -2 \ \cup \ x\geq 3 \quad \cap \quad x>-1 \quad \cap \quad x>-\frac{2}{3}$

Teniendo como resultado: **Sol a)**: $x\in[3,+\infty)$

El literal b) no existe ya que un número positivo nunca es menor que un número negativo.

10) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-x}\le 0$

$2x-3=0 \quad \wedge \quad 5-x=0 \quad , \quad x=\frac{3}{2} \quad \cap \quad x=5 \quad \Rightarrow \text{Sol}: \phi$

11) $\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+6}\le 0$

$x+3=0 \quad \wedge \quad 2x+6=0 \quad , \quad x=-3 \quad \cap \quad x=-3 \quad \Rightarrow \text{Sol}: \{3\}$

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

Resolver las siguientes inecuaciones irracionales:

1) $\sqrt{3x+2}\le 7$ 2) $\sqrt{-x+3}>-2$ 3) $\sqrt{2x-1}>x-2$

4) $\sqrt{x-3}<\sqrt{5-x}$ 5) $x+4>6\sqrt{x-4}$ 6) $\sqrt{1-x}\le\sqrt[4]{x+5}$

7) $\sqrt{x^2-2x-15}>-3$ 8) $\sqrt{3x-x^2}<4-x$ 9) $\sqrt{1-6x}+1\ge -3x$

10) $\sqrt[3]{x+1}\times\sqrt{x-1}\le 0$ 11) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}<5$ 12) $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x-2}>3$

13) $\sqrt{25-x^2}<|x-1|$ 14) $\dfrac{\sqrt{x^2-4}\,\sqrt[3]{x+4}}{\sqrt[5]{x^2-4x+3}}<0$ 15) $\sqrt{(3-x)(2+x)}\ge -x$

Respuestas:

1) $x\in\left[-\frac{2}{3},\frac{47}{3}\right]$ 2) $x\le 3$ 3) $x\in\left[\frac{1}{2},5\right[$

4) $x\in[3,4[$ 5) $x\in[4,8[\cup]20,+\infty[$ 6) $x\in[-1,1]$

7) $x\in]-\infty,-3]\cup[5,+\infty[$ 8) $x\in[0,3]$ 9) $x\in\left[-\frac{4}{3},\frac{1}{6}\right]$

10) ϕ 11) $x\in[0,4[$ 12) $x\in[2,3[\cup]6,+\infty[$

13) $x\in[-5,-3[\cup]4,5]$ 14) $x\in]-\infty,-4[\cup]2,3[$ 15) $x\in\left[-\frac{3}{2},3\right]$

EJERCICIOS DE REFUERZO

Resolver las siguientes inecuaciones irracionales:

1) $\sqrt{3x-1}\ge 2$ 2) $\sqrt{2x-5}\ge -7$ 3) $\sqrt{x-3}<x-1$

4) $\sqrt{2x-9}\le 3-x$ 5) $\sqrt{x-1}<\sqrt{x+2}$ 6) $\sqrt[4]{2x-8}>-5$

7) $\sqrt{3-3x}\le\sqrt{21+4x-x^2}$ 8) $\sqrt{x^2-2x-15}\ge x+1$ 9) $\sqrt{24-2x-x^2}<x$

10) $\sqrt{-x+2}\le\sqrt{-4x+2}+\sqrt{-9x+6}$ 11) $(2x^2-3x-9)\sqrt{6-x^2-5x}\ge 0$

12) $\sqrt{3+\sqrt{x-2}}<\sqrt{7-x}$ 13) $\sqrt{3x^2+x-9}>\sqrt{-3x-5}$ 14) $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x-1}}\le 0$

15) $\sqrt{\dfrac{x+4}{x-2}} \geq \sqrt{x}$

16) $\sqrt{24-2x-x^2} < x$

17) $\sqrt{\dfrac{3x-9}{x+2}} + \sqrt{\dfrac{5-x}{x+1}} > 0$

18) $\dfrac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x} < 1$

19) $\dfrac{\sqrt[3]{3-x}}{\sqrt[4]{x^2-1}\,\sqrt[5]{x+5}} > 0$

20) $\sqrt{-x^2+3x-2} \geq \sqrt{x-1}.\sqrt{2-x}$

21) $|x|-1 \leq \sqrt{x^2-1}$

22) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} \geq \dfrac{x+1}{x-1}$

23) $\sqrt{1-x} \leq \sqrt{|x^2-1|}$

24) $\sqrt{4-|x|} \leq \sqrt{|x-4|}$

25) $\sqrt{x^2+2x-3} \leq 2x-1$

26) $\sqrt{6-|x|} \leq x$

27) $\sqrt{2x-1} \geq |x|$

28) $\sqrt{|x|-1} \geq x-1$

29) $\sqrt{\dfrac{x^2-x-2}{3-\sqrt{4-x^2}}} \geq x^2-4x-26$

30) $\dfrac{x-2-\sqrt{2x+1}}{|x|+3} < 0$

31) $\sqrt{4-\sqrt{x+13}} \leq \sqrt{x+5}$

32) $\dfrac{x^2-16}{\sqrt{|x-4|-|x-1|}} > 0$

33) $\dfrac{x.\sqrt{x-1}}{|x|} > x-1$

34) $\dfrac{\sqrt{x^2-4}\,.\sqrt[3]{x+4}}{\sqrt[5]{x^2-4x+3}} < 0$

35) $\sqrt{\dfrac{2x-8}{x-1}} + \sqrt{\dfrac{5-x}{x+3}} \geq 0$

36) $\sqrt{x^2-x-12} \leq \sqrt{x^2-6x+5}$

37) $\sqrt{3x} - \sqrt{2x+1} \geq 1$

38) $\sqrt{\left|\dfrac{x+2}{x-2}\right|} \geq 3$

39) $\left[\dfrac{20-4x}{|5x+2|} - 4\right]\left(\sqrt{x^2-x-2} + x - 5\right) < 0$

40) $6\left|\dfrac{x+2}{x-3}\right|^{\frac{1}{2}} < 4\left|\dfrac{x-3}{x+2}\right|^{\frac{1}{2}} - 5$

Respuestas:

1) $x \geq \dfrac{5}{3}$

2) $x \geq \dfrac{5}{2}$

3) $x \geq 3$

4) ϕ

5) $x \geq 1$

6) $x \geq 4$

7) $x \in [-2, 1]$

8) $x \leq -3$

9) $x \in]3, 4]$

10) $x \leq \dfrac{1}{2}$

11) $x \in \left[-6, -\dfrac{3}{2}\right] \cup \{1, 3\}$

12) $x \in [2, 3[$

13) $x < -2$

14) $x \in [-1; 1[$

15) $x \in]2, 4]$

16) $x \in]3, 4]$

17) $x \in [3, 5]$

18) $x \in [-6, 0[\cup]3, 4]$

19) $x \in (-5, -1) \cup (1, 3)$

20) $x \in [1, 2]$

21) $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

22) $x \in (-\infty, -1]$

23) $x \in]-\infty, -2] \cup [0, 1]$

24) $x \in [-4, 4]$

25) $x \in [1, +\infty[$

26) $x \in [2, 6]$

27) $x = 1$

28) $x \in]-\infty, -1] \cup [1, 2]$

29) $x \in]-2, -1] \cup \{2\}$

30) $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, 3+\sqrt{6}\right[$

31) $x \in [-4, 3]$

32) $x \in]-\infty, -4[$

33) $x \in]1, 2[$

34) $x \in]-\infty, -4[\cup]2, 3[$

35) $x \in]-3, 1[\cup [4, 5]$

36) $x \leq -3$

37) $x \geq 12$

38) $x \in \left[\dfrac{8}{5}, \dfrac{5}{2}\right] - \{2\}$

39) $x \in \left]-\dfrac{7}{4}, -1\right] \cup]3, +\infty[$

40) $x \in \left]-\dfrac{11}{3}, -1\right[$

Desigualdades e Inecuaciones

Resolver los siguientes sistemas de inecuaciones:

1) $\begin{cases} x-1>\sqrt{25-x^2} \\ 2x^2-9|x|-18<0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-2}>0 \\ 4x^2-19|x|-5<0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} |2x^2-3x-9|<2|x^2-2x-3| \\ \dfrac{|x^2-1|}{4-|1-x|}\leq 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} |2-x|<4 \\ \dfrac{x+4}{x^2+4x+4}>\dfrac{x-2}{x^2-4} \\ (x^2-3x-4)\sqrt{13x-2x^2-6}\leq 0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} |x^2-4|<-2x+4 \\ (-x+2)^2(x-1)(3-x)^4(x+5)^3\leq 0 \\ \dfrac{\sqrt{|x-3|-|x-1|}}{x^2-9}\leq 0 \end{cases}$

Respuestas:

1) $x\in\,]4,5]$ 2) $x\in[0,2[$ 3) $x\in\left[\dfrac{1-\sqrt{17}}{2},-\dfrac{5}{4}\right[$

4) $x\in\left[\dfrac{1}{2},4\right]-\{2\}$ 5) $x\in\,]-3,0[$

8.13. SISTEMA DE INECUACIONES CON DOS VARIABLES

Una solución de una desigualdad en "x" y "y" es un par ordenado (a,b), que produce una aseveración cierta si se sustituye en x y y por a y b respectivamente. Resolver una desigualdad en x y y quiere decir determinar todas las soluciones. La solución de un sistema con dos variables se determina en forma gráfica, determinando el conjunto de todos los puntos (a,b) en el plano xy que corresponden a las soluciones. Geométricamente, cada uno de estos conjuntos describe un **semiplano R.**

8.13.1. PROCEDIMIENTO PARA TRAZAR LA GRÁFICA DE UNA DESIGUALDAD EN x y y

1) Reemplazar el signo de desigualdad por el signo igual, y trazar la gráfica de la ecuación resultante. Si el signo de la desigualdad es $<$ o bien $>$, usar línea discontinua para indicar que ningún punto de la gráfica produce una solución. Si el símbolo es $\leq$ o bien $\geq$, use una línea continua para indicar que las soluciones de la ecuación son soluciones de la desigualdad.

2) Si R es una región del plano xy determinada por la gráfica del paso 1) , y si un punto de prueba (p,q) en R produce una solución de la desigualdad, entonces todo punto en R produce una solución, no sombrear R para indicarlo. Si (p,q)no es solución, entonces ningún punto en R produce una solución, en este caso sombreamos R. Por lo general se realiza la prueba con el punto de coordenadas $(0,0)$.

3) La gráfica de la solución del sistema de inecuaciones está determinada por la parte no sombreada de la intersección de las gráficas de cada una de las desigualdades.

Desigualdades e Inecuaciones

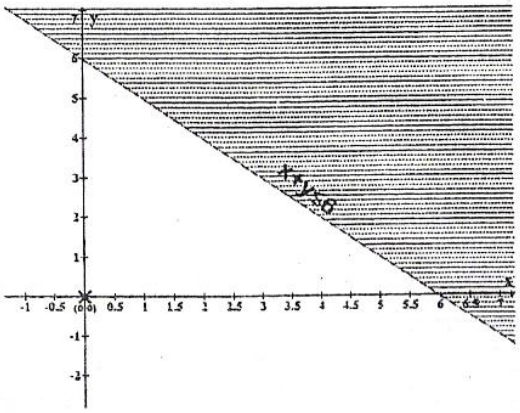
EJERCICIOS RESUELTOS

Determine la solución de los siguientes sistemas de desigualdades:

1) $\begin{cases} x+y\leq 6 \\ y>2x-3 \end{cases}$

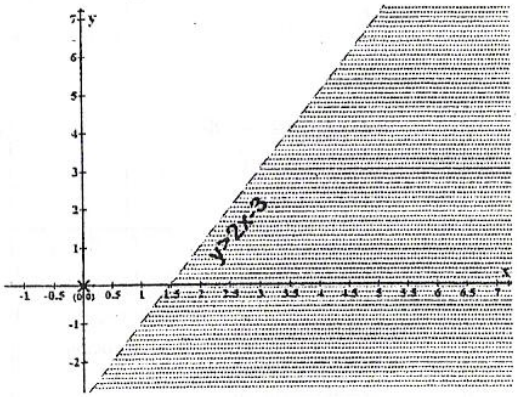
Primero graficamos la desigualdad $x+y\leq 6$ mediante la ecuación $x+y=6$

x	y
0	6
6	0

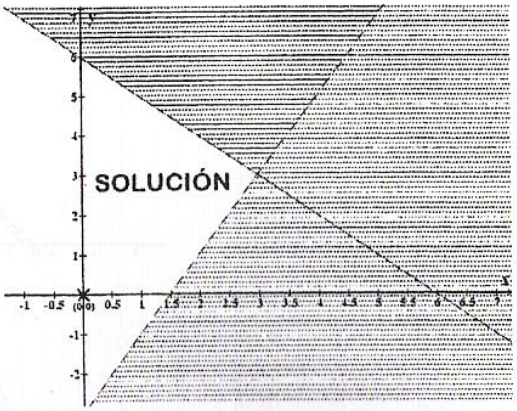


Tomando el punto $(0,0)$ del plano de la región que se encuentra bajo la recta y reemplazando éstos valores en la desigualdad tenemos: $x+y\leq 6$; $0+0\leq 6$, $0\leq 6$ (V) ; lo que significa que todos los puntos que se encuentra en la región inferior de la recta satisfacen la desigualdad, por lo tanto no sombreamos dicha región

Procediendo de manera igual en la desigualdad $y>2x-3$, el gráfico resultante luego de realizar la prueba del $(0,0)$ es decir: $0>0-3$, $0>-3$, (V) es:

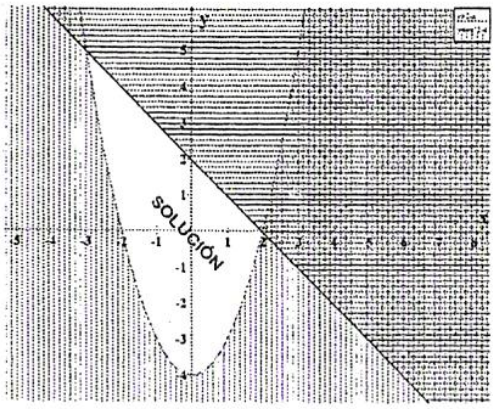


La solución está determinada por la parte sin sombrear. Al intersecar los gráficos anteriores tenemos la solución del sistema.



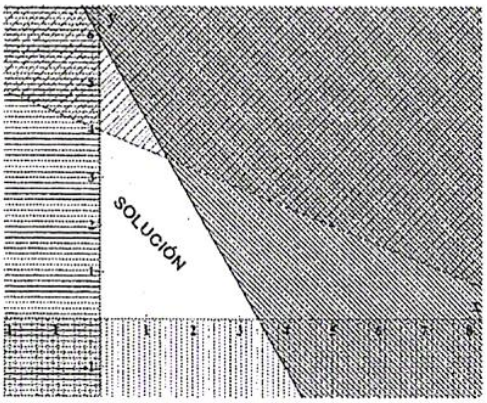
2) $\begin{cases} y < 2 - x \\ y \geq x^2 - 4 \end{cases}$

Siguiendo los pasos del ejercicio anterior, el gráfico resultante es:



3) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 7x + 4y < 24 \\ 2x + 5y \leq 20 \end{cases}$

El gráfico resultante es:



EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

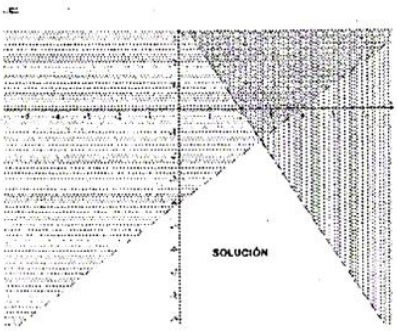
Trace la gráfica de los siguientes sistemas de desigualdades:

1) $\begin{cases} y \leq x - 4 \\ y < -2x + 4 \end{cases}$

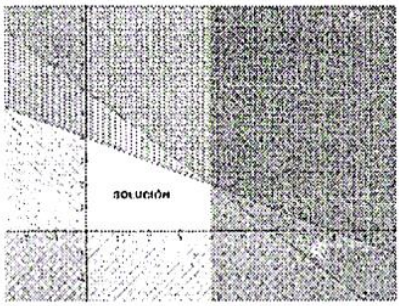
2) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 4 \\ x + y \leq 6 \\ x + 2y \leq 8 \end{cases}$

Respuestas:

1)



2)



EJERCICIOS DE REFUERZO

Trace la gráfica de los siguientes sistemas de desigualdades:

1) $\begin{cases} x \geq 4 \\ y \geq -2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} -4x + 5y < 20 \\ x \geq -3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 2 > y \\ y > x^2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y \geq 2x^2 \\ y \leq 2x + 4 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 \leq 1 - y \\ x \geq 1 + y \end{cases}$

6) $\begin{cases} |x| \geq 2 \\ |y| < 3 \end{cases}$

7) $\begin{cases} |x| \leq 2 \\ |y| > 1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} |x - 2| > 1 \\ y < -2 \end{cases}$

9) $\begin{cases} |x + 2| \leq 1 \\ |y - 3| < 5 \end{cases}$

10) $\begin{cases} y \geq 2x \\ y < -x + 3 \end{cases}$

11) $\begin{cases} x + y \geq 4 \\ x \geq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$

12) $\begin{cases} 3x - y < 4 \\ x + y > 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$

13) $\begin{cases} 4x + y \geq 7 \\ 2x + 3y \geq 6 \\ x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

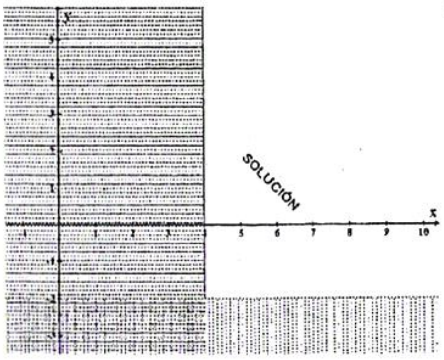
14) $\begin{cases} x - y \geq -1 \\ x - 2y \leq 5 \\ 3x + y \geq 10 \\ y \geq 0 \end{cases}$

15) $\begin{cases} 4x + 2y \leq 24 \\ x + y \geq 6 \\ x \geq 2 \\ y \geq 2 \end{cases}$

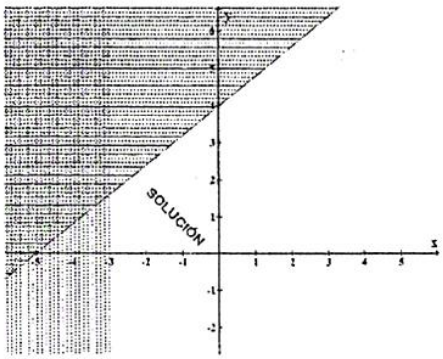
16) $\begin{cases} y \leq 4x - x^2 \\ y \leq x \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Respuestas:

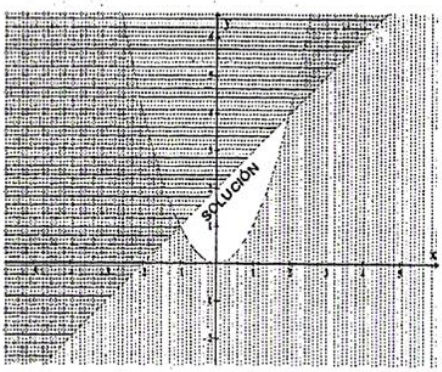
1)



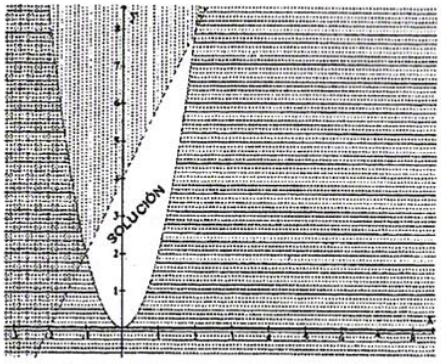
2)



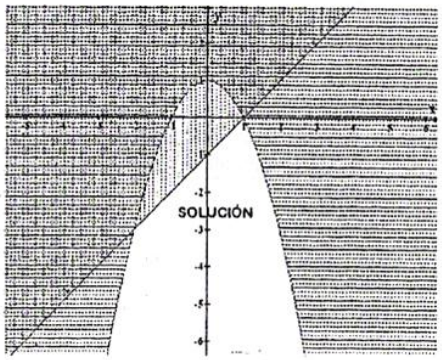
3)


SOLUCIÓN

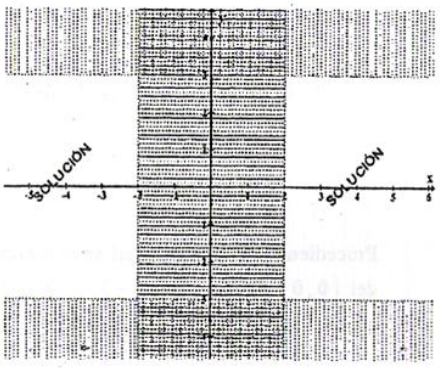
4)


SOLUCIÓN

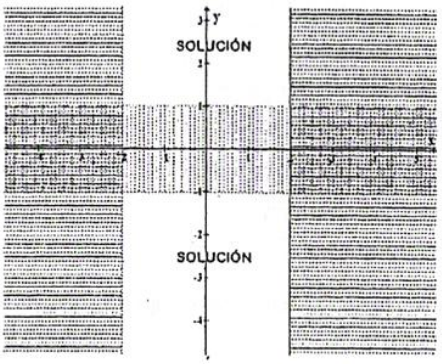
5)


SOLUCIÓN

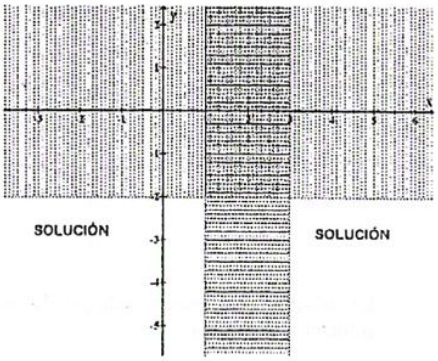
6)


SOLUCIÓN
SOLUCIÓN

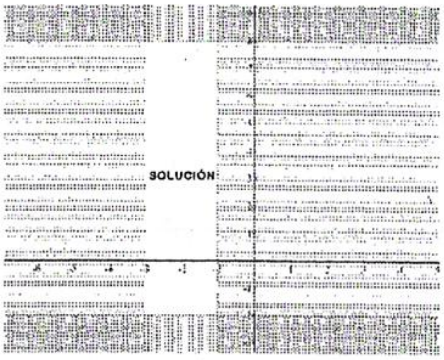
7)


SOLUCIÓN
SOLUCIÓN

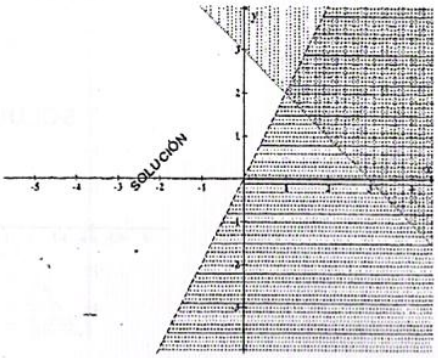
8)


SOLUCIÓN
SOLUCIÓN

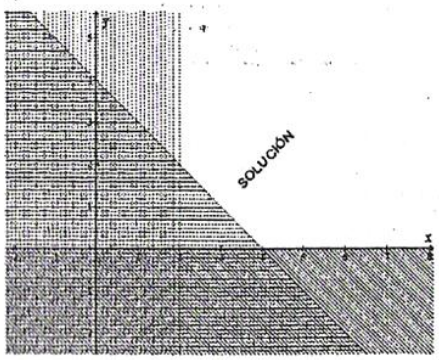
9)


SOLUCIÓN

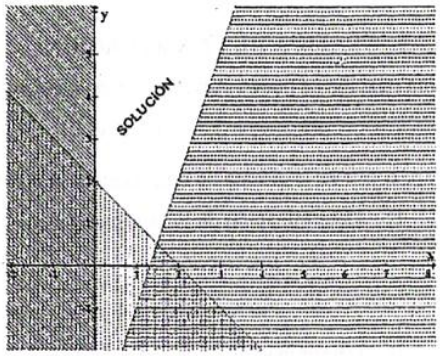
10)


SOLUCIÓN

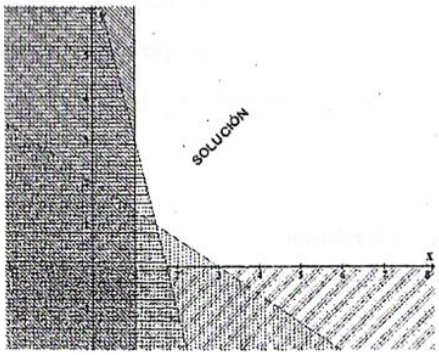
11)



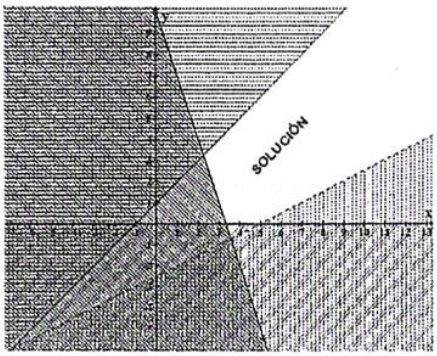
12)



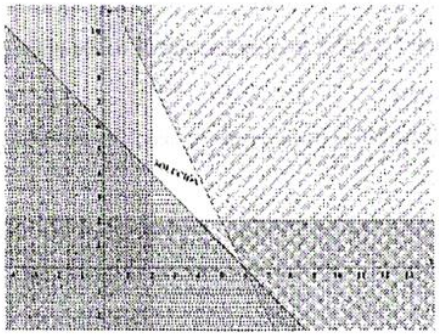
13)



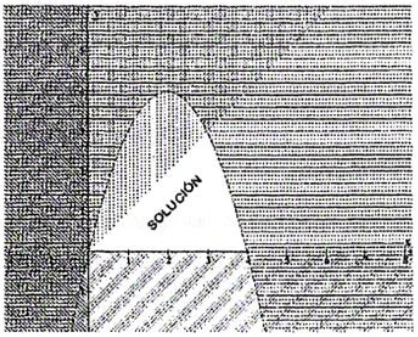
14)



15)



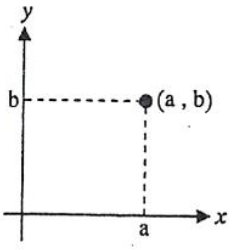
16)



CAPÍTULO IX
RELACIONES Y FUNCIONES

9.1. PAR ORDENADO (a , b)

Constituyen dos elementos que guardan cierto orden entre si y representan un punto en el plano cartesiano.



$a = 1^{era}$ componente del par

$b = 2^{da}$ componente del par

$$(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow a=c \wedge b=d$$

9.1.1. PRODUCTO CARTESIANO

Dados los conjuntos no vacíos A y B, el producto cartesiano de ambos que se denota por $A \times B$ y se define como el conjunto de pares ordenados, cuyo primer elemento pertenece al primer conjunto y el segundo elemento al segundo conjunto, así: $A \times B = \{(x,y) / x \in A \wedge y \in B\}$

Ejemplo:

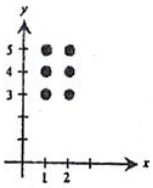
1) Sean los conjuntos $A = \{1,2\}$ y $B = \{3,4,5\}$, el producto cartesiano $A \times B$ será:

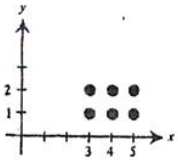
$$A \times B = \{(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5)\}$$

También puede establecerse el producto cartesiano $B \times A$ y éste será:

$$B \times A = \{(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(5,1),(5,2)\}$$

Graficando se tendrá:



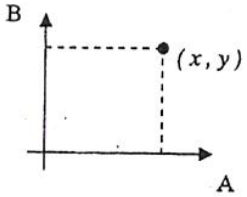


Nótese que: $A \times B \neq B \times A$

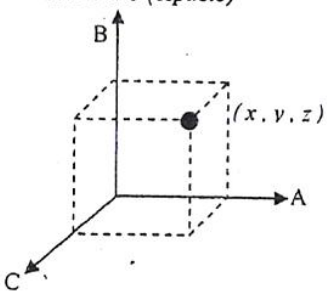
Si: $m =$ número de elementos del conjunto A
$n =$ número de elementos del conjunto B, entonces
$m \times n =$ número de pares ordenados del producto cartesiano $A \times B$

$$A \times B \times C = \{(x,y,z) / x \in A, y \in B \wedge z \in C\}$$

A x B (plano)



A x B x C (espacio)



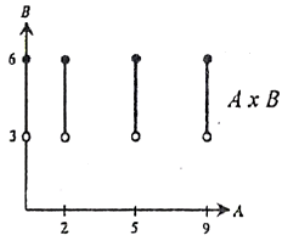
2) Sean: $A=\{2,5\}$; $B=\{1,3,6\}$; $C=\{4,7\}$; hallar $A\times B\times C$

Diagrama del árbol

$A\times B\times C=\{(2,1,4),(2,1,7),(2,3,4),(2,3,7),(2,6,4),(2,6,7),(5,1,4),(5,1,7),(5,3,4),(5,3,7),(5,6,4),(5,6,7)\}$

3) Sea: $A=\{2,5,9\}$; $B=\{3<x\leq 6\}$; hallar $A\times B$

Como los elementos del conjunto B están representados por un intervalo, la única forma de hallar o representar el producto cartesiano es gráficamente.



9.2. RELACIÓN BINARIA

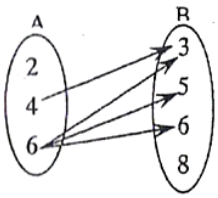
Dados dos conjuntos no vacíos A y B, decimos que una relación de A en B, $(R:A\rightarrow B)$ es cualquier propiedad que asocia algún elemento del conjunto A (conjunto de partida) con uno o más elementos del conjunto B (conjunto de llegada).

Una relación entre dos conjuntos pueden ser representada en **forma sagital**, asignando una flecha entre cada elemento y su imagen ; en **forma tabular**, asignado un punto en un sistema de ejes a cada par relacionado y en **forma de par ordenado**, especificando los pares que la constituyen.

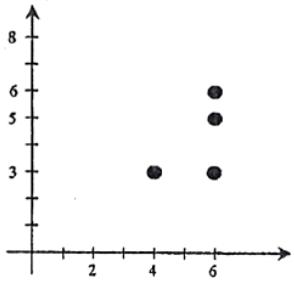
Ejemplo:

Dados los conjuntos $A=\{2,4,6\}$ y $B=\{3,5,6,8\}$, construir la relación $R:A\rightarrow B/aRb:\ a\geq b$

Representación sagital



Representación tabular



Representación en pares ordenados

$R=\{(4,3),(6,3),(6,5),(6,6)\}$

9.2.1. DOMINIO Y RANGO DE UNA RELACIÓN

Se llama dominio de la relación $R:A\rightarrow B$ al conjunto de todas las primeras componentes de los pares ordenados de la relación. En el ejemplo anterior $Dom\,R=\{4\ ,\ 6\}$

Se llama rango de la relación $R:A \to B$ al conjunto de todas las segundas componentes de los pares ordenados de la relación En el ejemplo anterior $RgoR = \{3, 5, 6\}$

9.2.2. GRÁFICA DE UNA RELACIÓN

Una relación se puede presentar de las siguientes formas:

$$R(x,y)=0 \;;\; R(x,y)>0 \;;\; R(x,y)<0 \;;\; R(x,y)\geq 0 \;;\; R(x,y)\leq 0$$

Para construir la gráfica de una relación se deben seguir los siguientes pasos:

1) Determinación de la intersección con los ejes coordenados
   a) **Intersección con el eje** x : Hacer $y=0$
   b) **Intersección con el eje** y : Hacer $x=0$
2) Determinación de la simetría de la curva respecto a los ejes y el origen
   a) **Simetría respecto al eje** x : Si al reemplazar $(y \to -y)$ se cumple que $R(x,-y)=R(x,y)$
   b) **Simetría respecto al eje** y : Si al reemplazar $(x \to -x)$ se cumple que: $R(-x,y)=R(x,y)$
   c) **Simetría respecto al origen:** Si al reemplazar $(x \to -x)$ y $(y \to -y)$ se cumpla que: $R(-x,-y)=R(x,y)$
3) Determinación de la extensión de la curva

   Se deberá hacer el cálculo del dominio y rango de la relación:
   a) **Dominio (x)** : Se despeja "y" para analizar los valores de x; $y=f(x)$
   b) **Rango (y)** : Se despeja "x" para analizar los valores de y; $x=f(y)$
4) Determinación de las ecuaciones de las asíntotas

   Las asíntotas son rectas (verticales, horizontales u oblicuas), tal que, la grafica de la ecuación $F=(x,y)=0$ tiende a acercarse a ellas, cuando existen, facilitan el trazado de los gráficos por cuanto permiten visualizar el comportamiento de la curva.

   Estas se presentan cuando al despejar y en la ecuación mencionada se tiene una expresión racional.

   Vertical:

   La ecuación de las asíntotas verticales está dada por los valores para los cuales la relación no está definida, es decir aquellos valores que hacen que el denominador tome el valor de cero. Las asíntotas verticales representan los valores que no toma el dominio, es decir donde la función es discontinua.

   Ejemplos:

   1) $y=\dfrac{1}{x-2}$, $x-2=0 \Rightarrow x=2$ *A.V.*
   2) $y=\dfrac{x+3}{x^2-16}$, $x^2-16=0$, $(x+4)(x-4)=0$, $\Rightarrow x=4$ y $x=-4$ *A.V.*
   3) $y=\dfrac{5x}{x(-x+1)}$, $x=0$ y $-x+1=0 \Rightarrow x=0 \wedge x=1$ *A.V.*
   4) $y=\dfrac{2x+3}{x^2+1}$, No existen asíntotas verticales

Horizontal:

Se determinan comparando los grados de la expresión del numerador con la del denominador de la siguiente manera:

$$y=\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_1 x + b_0}; \quad \text{donde} \quad a_n \neq 0 \ \text{ y } \ b_m \neq 0$$

n = Grado de la expresión polinomial del numerador
m = Grado de la expresión polinomial del denominador

1) Si $n < m$ entonces la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal (eje x)

2) Si $n = m$ la recta $y = \frac{a_n}{b_m}$ (la relación de los coeficientes iniciales) es una asíntota horizontal

3) Si $n > m$ la gráfica de la relación no tiene asíntota horizontal.

Ejemplos:

1) $y = \frac{3x-1}{x^2-x-6}$, $n < m \Rightarrow y = 0$ $A.H.$

2) $y = \frac{5x^2+1}{3x^2-4}$, $n = m \Rightarrow y = \frac{5}{3}$ $A.H.$

3) $y = \frac{2x^4-3x^2+5}{x^2+x-1}$, $n > m \Rightarrow$ No tiene asíntota horizontal

Las ecuaciones de las asíntotas horizontales representan los valores que no toma el rango.

Oblicua:

Si el grado de la expresión polinomial del numerador es un grado mayor que el grado de la expresión polinomial del denominador $(n-m=1)$, la gráfica tiene una asíntota oblicua cuya ecuación es igual al cociente que se obtiene al dividir el numerador para el denominador.

Ejemplo:

$y = \frac{x^2+x-12}{x-4}$;

$$\begin{array}{r|l} x^2+x-12 & x-4 \\ \cline{2-2} -x^2+4x & x+5 \\ \hline 5x-12 & \\ -5x+20 & \\ \hline 8 & \end{array}$$

Ecuación de la asíntota oblicua: $y=x+5$

5) Intervalos de positividad.

Consiste en determinar para qué intervalos del dominio la gráfica es positiva ó negativa.

Cuando no sea posible determinar los intervalos de positividad se procederá a evaluar un número de puntos (Tabulación) para obtener la gráfica.

6) Trazado de la curva.

9.2.2.1. TÉCNICAS PARA HALLAR EL DOMINIO.

Para hallar el dominio de una R expresada mediante una ecuación con dos variables $F=(x,y)=0$, requiere de una técnica algebraica, que tiene dos pasos:

PASO 1 Despejar "y" en términos de "x", si esto es posible.

PASO 2 Analizar ¿qué valores reales debe tener "x" para que la variable "y" sea un número real?

Ejemplos:

Determinar el dominio de las siguientes relaciones:

1) $R=\{(x,y)\in\Re\times\Re / y+3x^2-2x+4=0\}$

$y=-3x^2+2x-4$ Como $-3x^2+2x-4$ es un polinomio en x, entonces x toma cualquier valor real para que "y" sea un número real.

$Dom\,R=x\in\Re$ ó $Dom\,R=x\in(-\infty,+\infty)$

2) $R=\{(x,y)\in\Re\times\Re / y^2-y^2x^3-x=0\}$

$$y^2-y^2x^3-x=0 \quad , \quad y^2(1-x^3)=x \quad , \quad y^2=\frac{x}{1-x^3} \quad , \quad y=\pm\sqrt{\frac{x}{1-x^3}}$$

Para que "y" sea un número real, debe cumplirse que $\frac{x}{1-x^3}\geq 0$, puesto que la cantidad subradical no puede ser jamás negativa, de serlo sería un número complejo

Al resolver la inecuación: $\frac{x}{1-x^3}\geq 0$, $\frac{x}{x^3-1}\leq 0$, $\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}\leq 0$

$\frac{x}{(x-1)}\leq 0$,

$C.S.=x\in[0,1[$, entonces: $Dom\,R=x\in[0,1[$

3) $R=\{(x,y)\in\Re\times\Re / 4x^2-y^2-8x-4y-4=0\}$

En este caso asociamos los términos "y^2" e "y"; para completar cuadrados y luego despejar la variable y.

Así: $-y^2-4y=-4x^2+8x+4$, $y^2+4y=4x^2-8x-4$

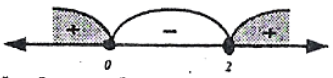
$$y^2+4y+4=4x^2-8x-4+4 \quad ; \quad (y+2)^2=4x^2-8x$$

$$y+2=\pm\sqrt{4x^2-8x} \quad ; \quad y=-2\pm 2\sqrt{x^2-2x}$$

Igual resultado se obtiene aplicando la fórmula de la ecuación cuadrática para despejar y.

Para que "y" sea un número real debe cumplir que: $x^2-2x\geq 0$

$x(x-2)\geq 0$,



$Dom\,R=x\in]-\infty,0]\cup[2,+\infty[$

4) $R=\{(x,y)\in\Re\times\Re / y^3-x+2=0\}$

$y^3-x+2=0$, $y=\sqrt[3]{x-2}$,

En este caso $y\in\Re$, si y sólo $x\in\Re$, porque la raíz cúbica de un número real positivo, del cero o de un número negativo es un número real.

Conclusión: $Dom\,R=x\in\Re$

5) $R=\{(x,y)\in\Re\times\Re / x^2+yx^2-4y=0\}$

Despejar " y " de la ecuación $x^2+yx^2-4y=0$

$y(x^2-4)=-x^2$, $y=\dfrac{-x^2}{x^2-4}$, $y=\dfrac{-x^2}{(x+2)(x-2)}$

En este caso el denominador no puede ser cero, porque la división entre cero no existe.

$x+2\neq 0 \;\wedge\; x-2\neq 0$; $x\neq -2 \;\wedge\; x\neq 2$, $Dom\,R=x\in R-\{\pm 2\}$

9.2.2.2. TÉCNICAS PARA HALLAR EL RANGO.

Si $F=(x,y)=0$ es una ecuación algebraica y $R=\{(x,y)\in\Re\times\Re / F(x,y)=0\}$ es una relación de $\Re$ en $\Re$, la técnica para hallar el rango de la relación R consiste en los pasos:

PASO 1 Despejar " x " en términos de " y ", si esto es posible.

PASO 2 Analizar ¿qué valores reales debe tener " y " para que la variable " x " sea un número real?

Ejemplos:

La relación R	DESPEJAR x	ANÁLIZAR	EL RANGO DE R ES:
$x^2-4y+1=0$	$x=\pm\sqrt{4y-1}$	$4y-1\geq 0$ $y\geq\frac{1}{4}$	$y\in\left[\frac{1}{4},+\infty\right[$
$x^2-4x^2y^2-4=0$	$x=\pm\dfrac{2}{\sqrt{1-4y^2}}$	$1-4y^2>0$ $(1+2y)(1-2y)>0$	$y\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$
$xy^2-y-4x=0$	$x=\dfrac{y}{y^2-4}$	$y^2-4\neq 0$ $(y+2)(y-2)\neq 0$	$y\in\Re-\{-2,2\}$
$x-2y^2+y-3=0$	$x=2y^2-y+3$	$y\in\Re$ No existe restricción para y	$y\in\Re$
$x^2-x^2y-4y=0$	$x=\pm\,2\sqrt{\dfrac{y}{1-y}}$	$\dfrac{y}{1-y}\geq 0$	$y\in[0,1[$

Relaciones y Funciones

EJERCICIOS RESUELTOS:

1) Esbozar el gráfico de la relación $R = \{(x, y) \in \Re \times \Re / y \leq x + 1\}$

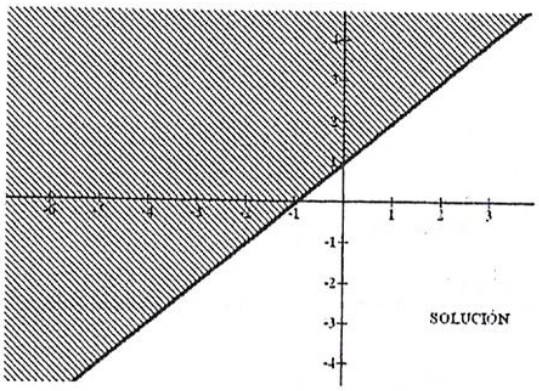
Cuando la relación esta planteada como una desigualdad, para graficar la relación cambiamos el signo de la desigualdad por el signo igual, realizamos una tabulación y trazamos la curva. Si el sentido de la desigualdad es $\leq$ ó $\geq$, la curva se traza con línea continua, y si la desigualdad es de la forma $<$ ó $>$ la curva irá trazada con línea entrecortada.

Pare determinar cuales son los puntos que satisfacen la condición (región sombreada) realizamos la prueba del $(0,0)$ para verificar si el punto de coordenadas $(0,0)$ es elemento de la relación, para esto se sustituyen los valores de las variables "x" e "y" por los valores de cero y se analiza si cumple o no la desigualdad.

Gráfico:

$y = x + 1$

x	y
0	1
-1	0



Prueba del $(0,0)$; $y \leq x+1$; $0 \leq 0+1$; $0 \leq 1$ $(Verdadero)$

Lo que significa que todos los puntos que se encuentran bajo la línea recta satisfacen la condición, incluidos los de la recta, ya que el punto (0,0) también se encuentra bajo la línea recta.

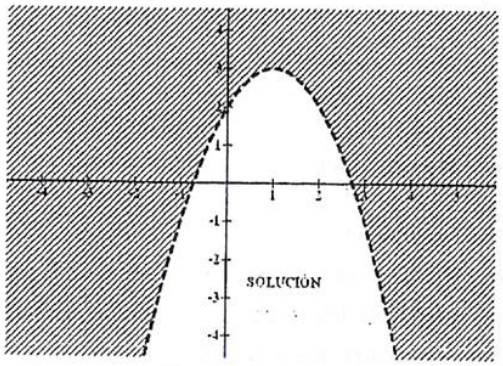
$Dom\,R = x \in \Re$; $Rgo\,R = y \in \Re$

2) Esbozar el gráfico de la relación $R = \{(x, y) \in \Re \times \Re / y < 3 - (x-1)^2\}$

Gráfico:

$y = 3 - (x\text{-}1)^2$

x	y
-2	-6
-1	-1
0	2
1	3
2	2
3	-1
4	-6



Prueba del $(0,0)$; $y < 3-(x-1)^2$; $0 < 3-(0-1)^2$; $0 < 2$ (Verdadero)

Por lo tanto todos los puntos que se encuentran bajo la curva de la parábola cumple con la condición: excepto los de la curva de la parábola.

$$Dom\,R = x \in \Re \quad ; \quad Rgo\,R = y \in \left(-\infty\ ,\ 3\right]$$

3) Analizar la gráfica de la relación $R = \{(x, y) \in \Re \times \Re / xy - 2y - 3 = 0\}$

Intersectos:

a) Con el eje x : $y = 0 \Rightarrow x = \text{no}$

b) Con el eje y : $x = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{3}{2}$

Simetría:

a) Con respecto al eje x debe cumplirse que: $R(x, -y) = R(x, y)$

$x(-y) - 2(-y) - 3 = xy - 2y - 3$
$-xy + 2y - 3 \neq xy - 2y - 3$ Cambia la igualdad. No existe simetría con el eje $x \exists SM\,x$

b) Con respecto al eje y debe cumplirse que: $R(-x, y) = R(x, y)$

$(-x)y - 2y - 3 = xy - 2y - 3$
$-xy - 2y - 3 \neq xy - 2y - 3$ Cambia la igualdad. No existe simetría con el eje $y \exists SM\,y$

c) Con respecto al origen debe cumplirse que: $R(-x, -y) = R(x, y)$

$(-x)(-y) - 2(-y) - 3 = xy - 2y - 3$
$xy + 2y - 3 \neq xy - 2y - 3$ Cambia la igualdad. No existe simetría respecto al origen $\nexists SM\,0$

Extensión:

a) Dominio: $xy - 2y - 3 = 0$; $y(x-2) = 3$; $y = \dfrac{3}{x-2}$; $x - 2 \neq 0$, $x \neq 2$

$Dom\,R = x \in \Re - \{2\}$

b) Rango: $xy - 2y - 3 = 0$; $xy = 2y + 3$; $x = \dfrac{2y+3}{y}$; $y \neq 0$

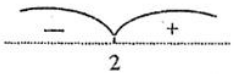
$Rgo\,R = y \in \Re - \{0\}$

Asíntotas: $x = 2$ $A.V$, $y = 0$ $A.H$

Positividad: $y = \dfrac{3}{x-2}$, $\dfrac{3}{x-2} > 0$

I: $x \in (-\infty, 2)$ la gráfica se encuentra bajo el eje "x'

I: $x \in (2, +\infty)$ la gráfica se encuentra sobre el eje "x'



$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\left(y^2\right)\left(-y^2\right)}}{2y^2}=\frac{2\pm\sqrt{4+4y^4}}{2y^2}=\frac{2\pm2\sqrt{1+y^4}}{2y^2}$$

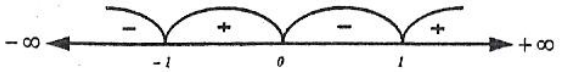
$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+y^4}}{y^2} \quad , \quad y\neq 0$$

Como $1+y^4$ es positivo para todo $y\in\Re$; entonces el rango queda definido como:

$Rgo\,R=y\in\Re-\{0\}$

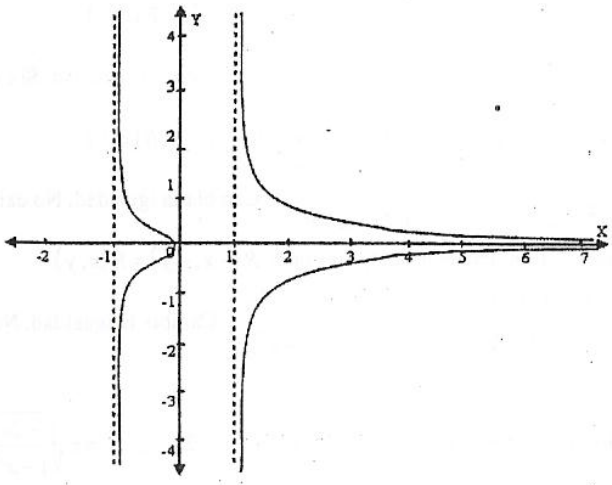
Asíntotas: $x=\pm1$ $A.V$, $y=0$ $A.H$

Positividad: $y=\pm\sqrt{\frac{-2x}{1-x^2}}$, $\frac{-2x}{1-x^2}>0$, $\frac{-2x}{(1+x)(1-x)}>0$



I: $x\in(-1,0]$ la gráfica se encuentra sobre el eje "x'

I: $x\in(1,+\infty)$ la gráfica se encuentra sobre el eje "x'



La gráfica se refleja respecto al eje x porque existe simetría respecto a este eje.

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

1) Dados los siguientes conjuntos: $A=\{-3,-1,2,4\}$ y $B=\{-1,2,3\}$, determinar $A\times B$; $B\times A$ y representar gráficamente

2) Dados: $A=\{3,5,7\}$ y $B=\{y\,/\,y\in\Re\,;2\leq y<5\}$, hallar $A\times B$

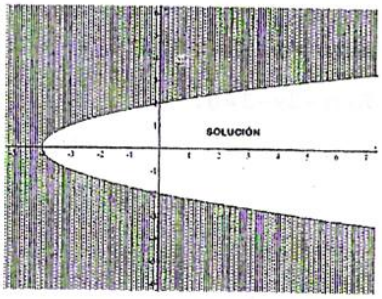
3) Dadas las siguientes relaciones: determinar dominio, rango y trazar su gráfica.

a) $R=\{(x,y)/\,x\wedge y\in\Re;x\leq y^2-4\}$

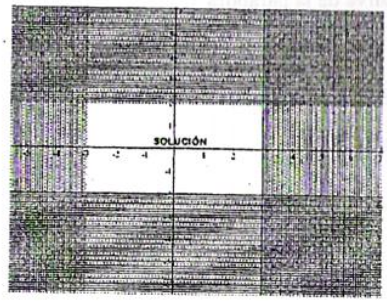
b) $R=\{(x,y)/\,x\wedge y\in\Re;|x|\leq3;|y|\leq2\}$

Respuestas:

a)



b)



4) Dadas las siguientes relaciones determinar: intersección con los ejes, análisis de simetría, dominio y rango, ecuación de las asíntotas, intervalos de positividad y trazar su gráfica.

a) $R=\{(x,y)/x\wedge y\in\Re; x^2y-9y-3x^2=0\}$

b) $R=\{(x,y)/x\wedge y\in\Re; x^2y^2-4x^2-4y^2=0\}$

c) $R=\left\{(x,y)/x\wedge y\in\Re; y=\dfrac{|x-2|}{2-x}\right\}$

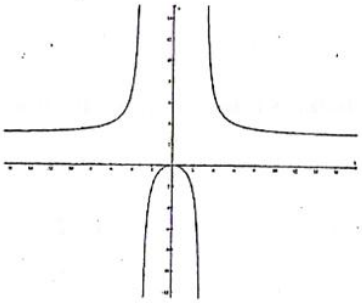
d) $R=\{(x,y)/x\wedge y\in\Re; y=|3+2x-x^2|\}$

e) $R=\{(x,y)/x\wedge y\in\Re; yx^2-4xy-4y-1=0\}$

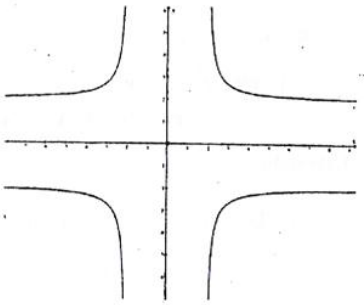
f) $R=\{(x,y)/x\wedge y\in\Re; xy^2-3y^2-1=0\}$

Respuestas:

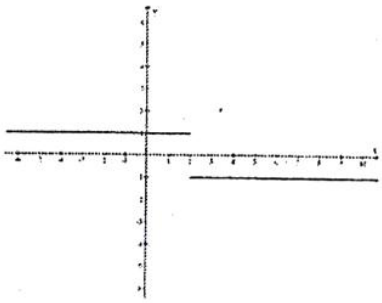
a)



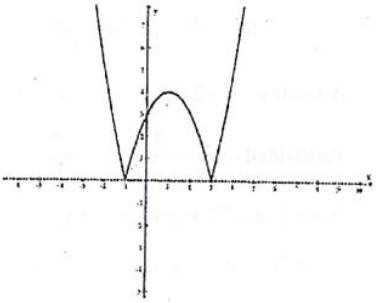
b)



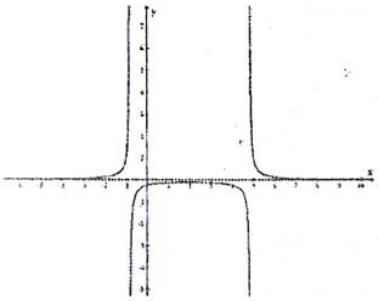
c)



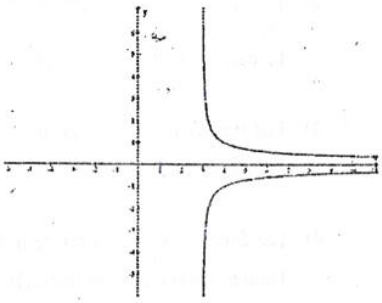
d)



e)



f)



EJERCICIOS DE REFUERZO

En las siguientes relaciones determinar la intersección con los ejes coordenados, análisis de simetría, dominio y recorrido, ecuaciones de las asíntotas, intervalos de positividad y la respectiva gráfica.

a) $2yx^2 - 4x - y + 4 = 0$

b) $x^2y^2 - 4y^2 + x^2 - 1 = 0$

c) $x^3 - x^2y + y = 0$

d) $xy^2 + xy - 6x - 3 = 0$

e) $xy^2 - x - 2y^2 + 1 = 0$

f) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{(x+1)^2}$

g) $y = \dfrac{x(x+3)}{(x+2)(x-2)}$

h) $y = -x^4 + 4x^2 - 4$

i) $x^3 + xy^2 - y^2 = 0$

j) $x^3y + x - 4xy - 1 = 0$

k) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{(x-1)^2}$

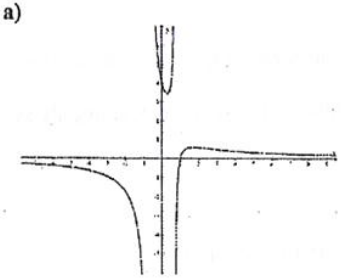
l) $y = \dfrac{(x-2) + |x-1|}{|x-2| + (x-1)}$

m) $y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 1}$

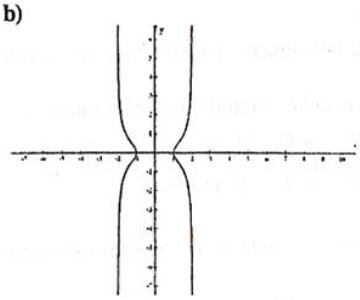
n) $(5 - x)y^2 = x^3$

Respuestas:

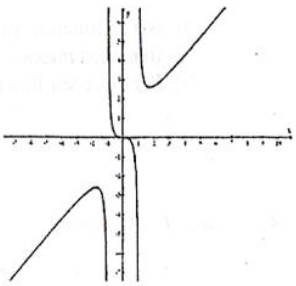
a)



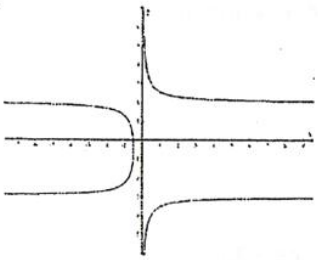
b)



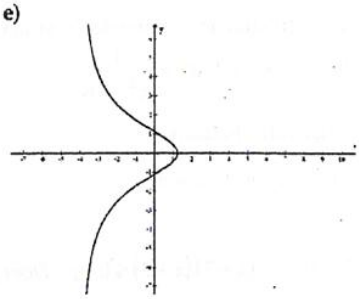
c)



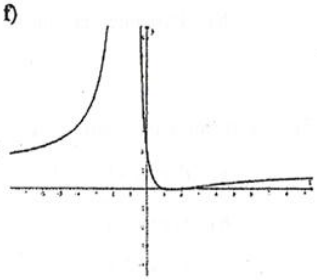
d)



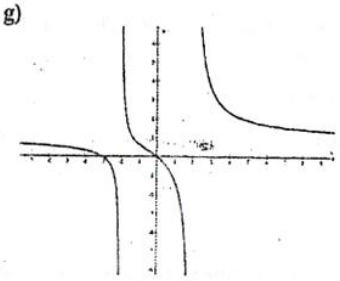
e)



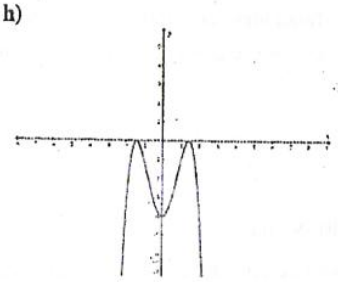
f)



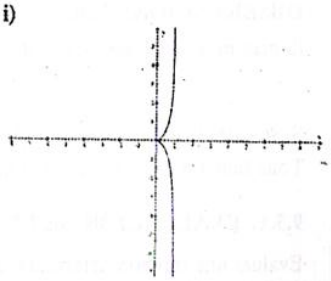
g)



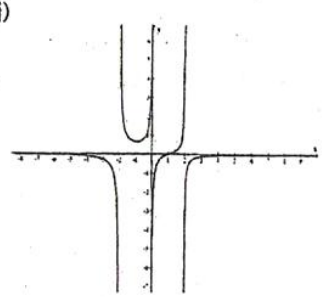
h)



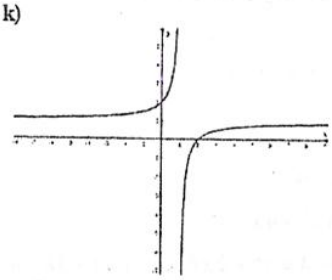
i)



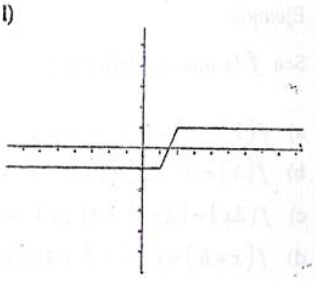
j)



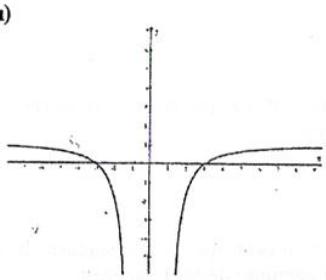
k)



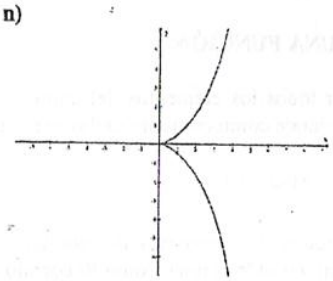
l)



m)



n)

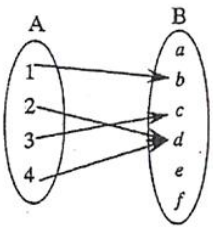


9.3. FUNCIÓN O APLICACIÓN

Una función es una regla que describe la forma en que una cantidad depende de otra. Por ejemplo, al estudiar el movimiento, la distancia recorrida es una función del tiempo.

Si en la relación $R: A \to B$, la regla asigna a todos y a cada uno de los elementos del conjunto A **"uno y sólo un"** elemento de B, dicha relación se llama relación funcional o simplemente función y se representa por:

$$\boxed{\begin{array}{l} f: A \to B \\ \quad x \mapsto y = f(x) \end{array}}$$



$Dom\ f = \{1, 2, 3, 4\}$

$Rgo\ f = \{b, c, d\}$

f es una función de A en $B \Leftrightarrow$ para un $x \in A, \exists!\, y \in B / (x, y) \in f$

OBSERVACIÓN: Estudiaremos funciones de tipo $f: A \to B$ donde $A \subseteq \Re$ y $B \subseteq \Re$, a las que llamaremos funciones reales de variable real y denotaremos por: $f: \Re \to \Re$

$$x \mapsto y = f(x)$$

Si se cumple que $CS = Dom\, f$, entonces es función

Toda función es relación, pero no toda relación es función.

9.3.1. EVALUACIÓN DE UNA FUNCIÓN

Evaluar una función determinada por una ecuación, es determinar el valor que se obtiene al sustituir la variable de la ecuación por un valor numérico o expresión algebraica:

Ejemplo:

Sea f la función definida por $f(x) = x^2 + 3x - 4$, encuentre $f(2), f(h), f(2x)$ y $f(x+h)$

a) $f(2) = 2^2 + 3(2) - 4 = 6$

b) $f(h) = h^2 + 3(h) - 4 = h^2 + 3h - 4$

c) $f(2x) = (2x)^2 + 3(2x) - 4 = 4x^2 + 6x - 4$

d) $f(x+h) = (x+h)^2 + 3(x+h) - 4 = x^2 + 2xh + h^2 + 3x + 3h - 4$

$= x^2 + (2h+3)x + h^2 + 3h - 4$

9.3.2. DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN

DOMINIO.- Conjunto formado por todos los elementos del conjunto de partida que posee una imagen en el conjunto de llegada. También se le conoce como conjunto de las preimágenes.

$$Dom\, f = \{x \in A \ / \ \exists!\, y \in B \ , \quad y = f(x)\} = A$$

RANGO.- Conjunto formado por todos los elementos del conjunto de llegada que son imágenes de algún elemento del conjunto de salida. También se le conoce como Recorrido o conjunto de las imágenes.

$$Rgo\, f = \{y \in B \,/\, \exists x \in A \wedge y = f(x)\} \quad ó \quad Rgo\, f = \{y / y = f(x) \ \wedge \ x \in Dom\, f\}$$

De acuerdo a la definición, **toda función es una relación pero no toda relación es una función.**

9.3.3. DETERMINACIÓN DEL DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

Cuando una función viene dada por una fórmula o regla de correspondencia, se suele sobrentender que el dominio consiste de todos los números para los que la regla de correspondencia está bien definida. Ahora bien, el dominio de una función puede describirse explícitamente junto con la función o estar implícito en la fórmula que define a la función.

Forma Explícita:

1) $f: A \to B \ ; \ A \subseteq \Re \ ; \ B \subseteq \Re$

2) $g(x) = \sqrt{x+2} \ ; \ 2 \le x \le 7$

Forma Implícita:

1) Las funciones polinómicas

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots a_1 x + a_0; \quad a_n \neq 0$

Tienen por dominio implícito $\Re$

2) Las funciones racionales de la forma: $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$

Tienen como dominio implícito a: $\Re-\{x\in\Re/q(x)=0\}$

3) Las funciones con raíces de índice par: $f(x)=\sqrt[2n]{g(x)}$, $n\in Z^+$

Tienen como dominio implícito al conjunto $\{x\in\Re/g(x)\geq 0\}$

4) Las funciones con raíces de índice impar: $f(x)=\sqrt[2n+1]{g(x)}$, $n\in Z^+$

Tienen como dominio implícito al dominio de $g(x)$, esto es, $Dom\, f = Dom\, g$

EJERCICIOS RESUELTOS

1) Sea $f:\Re\to\Re/f(x)=3x-5$; determinar las imágenes de 0 y -2

Las imágenes de 0 y -2 son respectivamente:

$f(0)=3(0)-5$; $f(0)=-5$

$f(-2)=3(-2)-5$; $f(-2)=-11$

2) Sea $f:\Re\to\Re/f(x)=\dfrac{2}{5}x+\dfrac{5}{133}$ hallar: $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h^2}$; $h\neq 0$

Si $f(x)=\dfrac{2}{5}x+\dfrac{5}{133}$ entonces: $f(x+h)=\dfrac{2}{5}(x+h)+\dfrac{5}{133}$, por lo tanto tenemos:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h^2}=\frac{\frac{2}{5}(x+h)+\frac{5}{133}-\frac{2}{5}x-\frac{5}{133}}{h^2}=\frac{\frac{2}{5}x+\frac{2}{5}h+\frac{5}{133}-\frac{2}{5}x-\frac{5}{133}}{h^2}=\frac{\frac{2}{5}h}{h^2}=\frac{2}{5h}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h^2}=\frac{2}{5h} \quad ; \quad h\neq 0$$

3) *Sea* $f:\Re\to\Re/f(x)=\pm\sqrt{x}$; determinar si es función, caso contrario redefinirla

a) No es función, ya que los números negativos no tienen raíz y además por que los números positivos tiene dos raíces.

b) Para que sea función se debe redefinir tanto el conjunto de salida como el conjunto de llegada así:

$f:\Re^+\to\Re^+/f(x)=\sqrt{x}$ *ó*

$f:\Re^+\to\Re^-/f(x)=-\sqrt{x}$

4) *Sea* $f:\Re\to\Re/f(x)=\dfrac{1}{x^2-16}$; determinar si es función caso contrario redefinirla

a) No es función ya que no está definida para los valores de 4 y -4

b) Para que sea función debe redefinirse el conjunto de salida de la siguiente manera

$$f:\Re-\{-4,4\}\to\Re/f(x)=\frac{1}{x^2-16}$$

5) Determinar el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^3-3x^2+2x-1$; $Dom\, f: x\in\Re$

b) $f(x)=\sqrt[4]{9-x^2}$

$9-x^2\geq 0$, $x^2-9\leq 0$, $(x+3)(x-3)\leq 0$; $Dom\, f: x\in[-3;3]$

c) $f(x)=\sqrt{4-\sqrt{24-2x-x^2}}$

$24-2x-x^2\geq 0 \quad \wedge \quad 4-\sqrt{24-2x-x^2}\geq 0$

$x^2+2x-24\leq 0 \quad \wedge \quad \sqrt{-x^2-2x+24}\leq 4$

$(x+6)(x-4)\leq 0 \quad \wedge \quad -x^2-2x+24\leq 16$

$x^2+2x-8\geq 0$

$(x+4)(x-2)\geq 0$

$-6\leq x\leq 4 \quad \cap \quad [x\leq -4 \quad \cup \quad x\geq 2]$

$Dom\ f: x\in[-6\,;-4]\cup[2\,;4]$

d) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-x-6}}$

$x^2-x-6>0 \;;\; (x-3)(x+2)>0 \;;\; Dom\, f: x\in\,]-\infty\,;-2[\,\cup\,]3\,;+\infty[$

e) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x+4}}$; $Dom\, f = Dom\, g$; donde $g(x)=\dfrac{x-2}{x+4}$; $x\neq -4$;

$Df: x\in\Re-\{-4\}$

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

1) Considere $f: A\rightarrow B$ en donde $A=\{-1,0,2,3\}$ y $B=\{2,4,6,8,10\}$. Considere si el conjunto f representa o no una función. ¿Por qué?

a) $f=\{(3;2),(0;4),(-1;8)\}$

b) $f=\{(-1;10),(3;8),(0;6),(2,6)\}$

c) $f=\{(3;2),(-1;4),(2;8),(0,10)(-1,8)\}$

Respuestas:

a) Relación

b) Función

c) Relación

2) Dada las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sqrt{\dfrac{4x-2}{x-2}}$, calcule $f(0)$, $f(-1)$

b) $f(x)=\dfrac{3x}{x-2}$, calcule $f(a+2)$, $f(2h-3)$

c) $f(x+2)=x^2+x$; calcule: $\dfrac{f(a+3)-f(a-3)}{2a-3}$; $a\neq\dfrac{3}{2}$

Respuestas:

a) $f(0)=1$, $f(-1)=\sqrt{2}$

b) $f(a+2)=\dfrac{3a+6}{a}$, $f(2h-3)=\dfrac{6h-9}{2h-5}$

c) $\dfrac{f(a+2)-f(a-3)}{2a-3}=6$

3) Diga cuales de las siguientes relaciones son funciones:

a) $f:\Re\rightarrow\Re\,/\,y=\pm\sqrt{x^2-3}$

b) $f:\Re\rightarrow\Re\,/\,y=-2x+5$

c) $f:\Re\rightarrow\Re\,/\,y=\dfrac{x-3}{x-2}$

d) $f:\Re\rightarrow\Re\,/\,y=\dfrac{x+2}{x^2+1}$

e) $f:\Re\rightarrow\Re\,/\,y=x^2-3x+4$

f) $f:\Re\rightarrow\Re\,/\,y=x^3$

g) $f:\Re-\{5\}\to\Re\,/\,y=\dfrac{1}{x-5}$ h) $f:x\in\Re\to\Re\,/\,y=\sqrt{-x+3}$

Respuestas:

a) Relación b) Función c) Relación d) Función
e) Función f) Función g) Función h) Relación

4) Sea $f:\Re-\{1\}\to\Re\,/\,y=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ es función? En caso de no serlo redefina para que lo sea.

Respuesta: No es función. Para que sea: $f:]-\infty;-1]\cup]1;+\infty[\to\Re\,/\,y=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

5) Determine el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ b) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-3}$ c) $f(x)=x-x^2$ d) $f(x)=\dfrac{x-5}{x^2+1}$

e) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+x-6}$ f) $f(x)=\sqrt{x-5}$ g) $f(x)=\sqrt{-x+3}$ h) $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$

i) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2+x}}{x-5}$ j) $f(x)=\dfrac{x-4}{\sqrt{x+2}}$ k) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+3}}$ l) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$

m) $f(x)=\sqrt{1-|x|}$ n) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-|x|}{2-|x|}}$ o) $f(x)=\sqrt{x-1}\,\sqrt{1-x}$ p) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{\sqrt{|4x^2-9|}}}$

q) $f(x)=\dfrac{2x^3-\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+4}-2x}$ r) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ s) $f(x)=\dfrac{x^2+5}{x^2+x}$ t) $f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt[3]{x-3}}$

Respuestas:

a) $x\in\Re-\{2\}$ b) $x\in\Re-\{\pm\sqrt{3}\}$ c) $x\in\Re$ d) $x\in\Re$

e) $x\in\Re-\{-3,2\}$ f) $x\in[5,+\infty[$ g) $x\in]-\infty,3]$ h) $x\in\Re$

i) $x\in[-2,+\infty[-\{5\}$ j) $x\in]-2,+\infty[$ k) $x\in]-\infty,-3[\cup[2,+\infty[$ l) $x\in\Re$

m) $x\in[-1,1]$ n) $x\in]-\infty,-2[\cup]-1,1[\cup]2,+\infty[$ o) $x=1$

p) $x\in[0,+\infty[-\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$ q) $x\in[4,+\infty[$ r) $x\in\Re-\{0\}$ s) $x\in\Re-\{-1,0\}$ t) $x\in\Re-\{3\}$

EJERCICIOS DE REFUERZO

1) Graficar las siguientes relaciones e indicar cuáles son funciones:

a) $f=\{(-2;-1),(0;0),(-1;-1),(2;1),(1;1)\}$ b) $g=\{(-3;0),(0;3),(3;0)\}$
c) $h=\{(-4;5),(-2;0),(0;4),(-2;3),(-4;0)\}$ d) $i=\{(1;1),(1;4),(1;-3),(0;0),(2;0)\}$

Respuestas:

a) Función b) Función c) Relación d) Relación

2) Hallar los valores de a y b para que el conjunto de pares ordenados sea una función.

$$f=\{(4,3),\ (-5,-3),\ (4,a^2-b^2),\ (-5,a+b),\ (a^2+b,a)\}$$

Respuesta: $a=-2$, $b=-1$; $f=\{(4,3),\ (-5,-3),\ (3,-2)\}$

3) Sea la función $f=\{(2,a+3),\ (b,b-1),\ (2,a^2-3),\ (b,a),\ (4,5)\}$
Hallar $f(2)$ y $f(-1)$

Respuesta: $f(2)=1$, $f(-1)=-2$ $\qquad f=\{(4,3),\ (-5,-3),\ (3,-2)\}$

5) Determine el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{2+3x}{4-x}$ b) $f(x)=\sqrt{x+2}$ c) $f(x)=\sqrt{3-2x-x^2}$ d) $f(x)=\dfrac{x^2}{2|x|-3}$

e) $f(x)=\dfrac{\sqrt[6]{x^2-1}}{x}$ f) $f(x)=\sqrt[3]{-x+3}$ g) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}$ h) $f(x)=\sqrt{\sqrt{4-x}-\sqrt{2-x}}$

i) $f(x)=\dfrac{\sqrt[4]{x^3-1}}{\left|1-\dfrac{1}{x}\right|}$ j) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x^2-8}}{5x^5-5x^3}$ k) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-|x|}{1+|x|}}$ l) $f(x)=\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-|x|-2}}$

m) $f(x)=\sqrt[5]{\dfrac{x}{|x|-1}}-\sqrt{\dfrac{1+|x|}{x^2-3x-1}}$ n) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-5x}+\dfrac{x-4}{x^2-5x+4}$

Respuestas:

a) $x\in\Re-\{4\}$ b) $x\in[-2,+\infty[$ c) $x\in[-3,1]$ d) $x\in\Re-\left\{\pm\dfrac{3}{2}\right\}$

e) $x\in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$ f) $x\in\Re$ g) $x\in\Re-\{2\}$ h) $x\in]-\infty,2]$

i) $x\in]1,+\infty[$ j) $x\le-2\ \vee\ x\ge2$ k) $x\in[-1,1]$ l) $x<-2\ \vee\ x>2$

m) $x\in\left]-\infty,\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}\right[-\{-1\}\cup\left]\dfrac{3+\sqrt{13}}{2},+\infty\right[$ n) $x\in\Re-\{0,1,4,5\}$

9.3.4. DETERMINACIÓN DEL RANGO DE UNA FUNCIÓN

En la determinación del rango de una función se presentan dos casos:

CASO I: Cuando el dominio está implícito en la regla de correspondencia que define a la función.

En este caso se despeja" x" en función de" y", luego se analiza para que valores reales de" y"," x" es real.

Ejemplo:

1) Hallar el rango de la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$:

$$y=\frac{x^2}{x^2-4}\ ;\ yx^2-x^2-4y=0\ ;\ (y-1)x^2=4y\ ;\ x=\pm2\sqrt{\frac{y}{y-1}}$$

$$\frac{y}{y-1}\ge0\ \Rightarrow\ Rgo\ f: y\in(-\infty,0]\cup(1,+\infty)$$

CASO II: Cuando el dominio está descrito explícitamente junto con la fórmula que define a la función.

Ejemplos:

1) Hallar el rango de la función $f(x)=4+2x-x^2 \quad , \quad x\in[-2;4]$:

Como: $A=[-2;4] \Rightarrow Rgo\, f = f([-2;4])$

Luego, *si* $f(x)=-x^2+2x+4$ es equivalente a $f(x)=5-(x-1)^2$ entonces hallaremos el rango a partir del dominio de la función.

$$Rgo\, f=\{y \;/\; y=f(x) \;\wedge\; x\in Dom\, f\}$$

$$y=5-(x-1)^2 \quad \wedge \quad -2\le x\le 4$$

$$-3\le x-1\le 3$$

$$-3\le x-1<0 \quad \vee \quad 0\le x-1\le 3$$

$$9\ge (x-1)^2>0 \quad \vee \quad 0\le (x-1)^2\le 9$$

$$0<(x-1)^2\le 9 \quad \vee \quad 0\le (x-1)^2\le 9$$

$$0>-(x-1)^2\ge -9 \quad \vee \quad 0\ge -(x-1)^2\ge -9$$

$$-9\le -(x-1)^2<0 \quad \vee \quad -9\le -(x-1)^2\le 0$$

$$-4\le 5-(x-1)^2<5 \quad \vee \quad -4\le 5-(x-1)^2\le 5$$

$$-4\le y<5 \quad \vee \quad -4\le y\le 5$$

$$Rgo\, f: y\in[-4;5]$$

2) Hallar el rango de la función $f(x)=\dfrac{3x-16}{x-5} \quad , \quad x>6$

$$f(x)=\frac{3x-16}{x-5} \quad es\ equivalente\ a: \quad f(x)=3-\frac{1}{x-5}$$

$$Si\ A=]6;+\infty[\;\Rightarrow\; Rgo\, f=f(A)=f(\,]6;+\infty[\,)$$

$$Rgo\, f=\{y/ \;\; y=f(x) \;\wedge\; x\in Dom\, f\}$$

$$y=3-\frac{1}{x-5} \quad \wedge \quad x>6$$

$$x-5>1 \;,\; 0<\frac{1}{x-5}<1 \;,\; -1<-\frac{1}{x-5}<0$$

$$2<3-\frac{1}{x-5}<3 \;\Rightarrow\; 2<y<3 \quad \Rightarrow \quad Rgo\, f: y\in(2,3)$$

3) Hallar el rango de la función: $f(x)=\dfrac{x+7}{x-3} \quad , \quad x\le -1$

$$f(x)=\frac{x+7}{x-3} \quad \text{es equivalente a:} \quad f(x)=1+\frac{10}{x-3}$$

$$Rgo\, f=\{y \;/\; y=f(x) \;\wedge\; x\in Dom\, f\}$$

$$y=1+\frac{10}{x-3} \quad \wedge \quad x\le -1$$

$$x-3\le -4 \;,\; -\frac{1}{4}\le \frac{1}{x-3}<0 \;,$$

$$-\frac{5}{2}\le \frac{10}{x-3}<0,\; -\frac{3}{2}\le 1+\frac{10}{x-3}<1,\; -\frac{3}{2}\le y<1 \Rightarrow \quad Rgo\, f: y\in\left[-\frac{3}{2},1\right)$$

4) Hallar el rango de la función $f(x)=\sqrt{2x-6}$, $x \geq 5$:

$$Rgo\, f = \{y \;/\; y = f(x) \;\wedge\; x \in Dom\, f\}$$
$$y = \sqrt{2x-6} \quad \wedge \quad x \geq 5$$
$$2x \geq 10\,,\; 2x-6 \geq 4\,,\; \sqrt{2x-6} \geq 2\,,\; y \geq 2 \Rightarrow Rgo\, f : y \in [2\,,+\infty)$$

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

1) Determinar analíticamente el recorrido de las siguientes funciones con dominio predeterminado.

a) $f(x)=2x+3;\quad -1 \leq x \leq 5$

b) $f(x)=\dfrac{3x-7}{2};\quad x \in]-5,3]$

c) $f(x)=x^2+1;\quad 0 \leq x \leq 5$

d) $f(x)=4+2x-x^2;\quad -2 \leq x \leq 4$

e) $f:[0,+\infty[\rightarrow \Re \;/\; f(x)=\dfrac{x-1}{x+3}$

f) $f:[-1,2[\rightarrow \Re \;/\; f(x)=1+\sqrt{3+2x-x^2}$

Respuestas:

a) $y \in [1,13]$ b) $y \in]-4,1]$ c) $y \in [1,26]$ d) $y \in [-4,5]$ e) $y \in \left[-\frac{1}{3},1\right[$ f) $y \in [1,3]$

EJERCICIOS DE REFUERZO

1) Determine analíticamente el recorrido de las siguientes funciones con dominio predeterminado.

a) $f:(-\infty,2)\rightarrow \Re / f(x)=\dfrac{x+6}{2x-4}$

b) $f:[-1,5)\rightarrow \Re / f(x)=x^2-4x+3$

c) $f(x)=\dfrac{x+6}{2x-4}$, $x>6$

d) $f:[0,+\infty)\rightarrow \Re / f(x)=\dfrac{x-1}{x+3}$

e) $f(x)=x^2-5x+6$, $x \in [-2,6]$

f) $f(x)=\dfrac{x-5}{x+2}$, $x \in]-4,6]$

g) $f(x)=\dfrac{x-3}{2x+3}$, $x \in [0,4]$

h) $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+2}$, $x \in [-4,1]$

i) $f(x)=\sqrt{-x+3}+4$, $x<2$

Respuestas:

a) $y \in \left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$ b) $y \in [1,8]$ c) $y \in \left]\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right[$ d) $y \in \left[-\frac{1}{3},1\right[$ e) $y \in \left]-\frac{1}{4},20\right]$

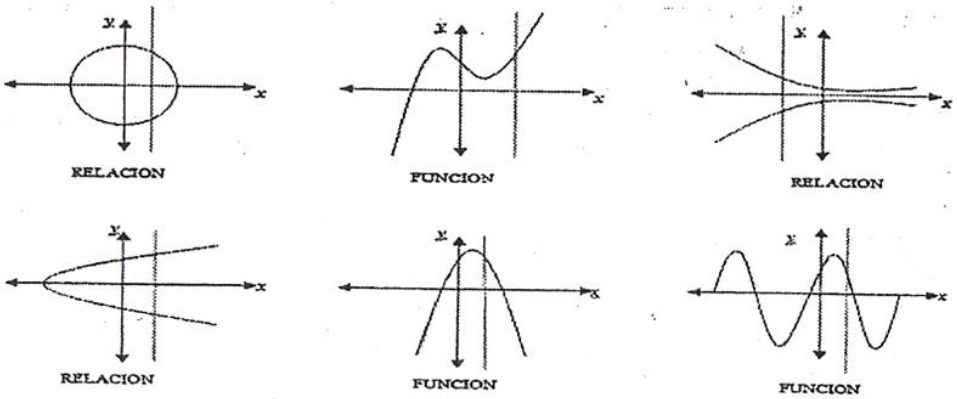
f) $y \leq \frac{1}{8} \cup y > \frac{9}{2}$ g) $y \in \left[-1,\frac{1}{11}\right]$ h) $y \leq -\frac{1}{3} \cup y > \frac{11}{2}$ i) $y>5$

9.3.5. PRUEBA DE LA RECTA VERTICAL

Sirve para determinar si un gráfico representa una función. Si al trazar una recta vertical al eje de las X, ésta corta en un solo punto a la curva es función, si le corta en dos puntos o más puntos es relación.

En caso de existir una recta vertical que no corte a la gráfica, siempre será posible redefinir el conjunto de partida (extrayendo los elementos que no posean imágenes de manera que la curva si corresponda a una función.

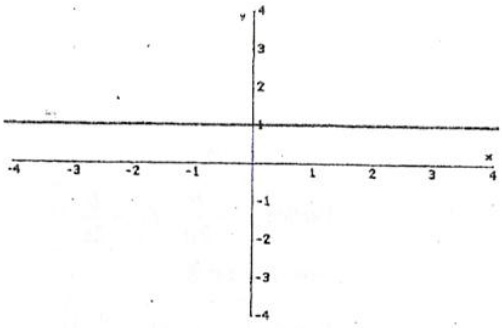
Ejemplos: Consideremos que los siguientes gráficos corresponden a los $\Re \rightarrow \Re$



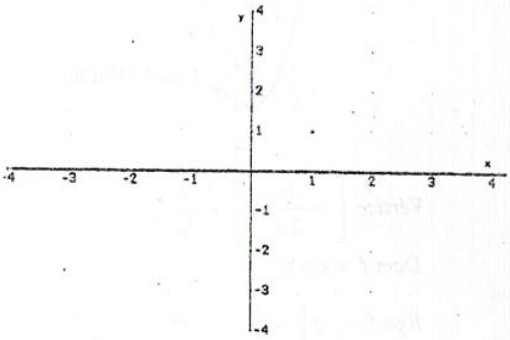
9.3.6. GRÁFICAS DE FUNCIONES ESPECIALES

FUNCIÓN CONSTANTE: $f(x) = k$

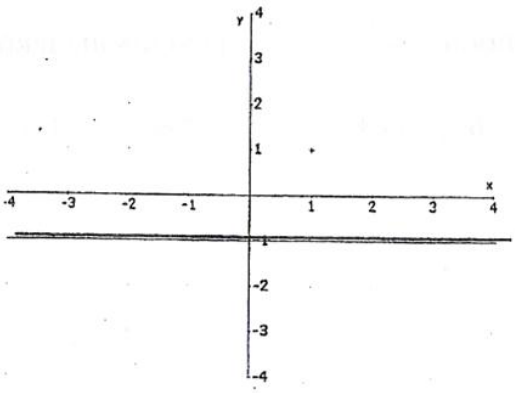
$f(x) > k$



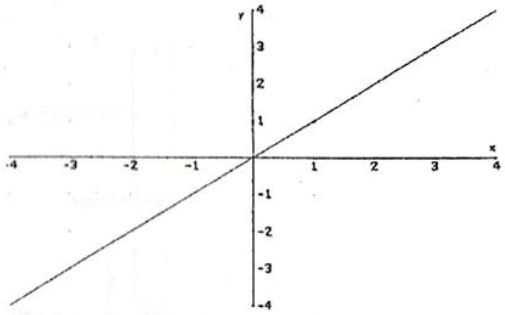
$f(x) = k$



$f(x) < k$

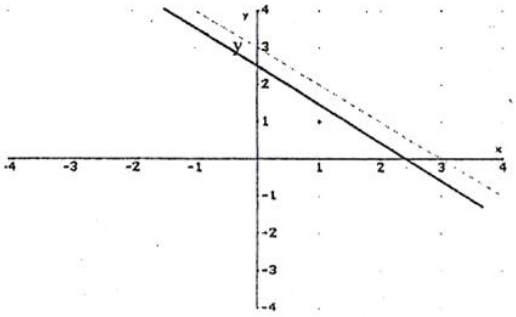


FUNCIÓN IDENTIDAD: $y = x$



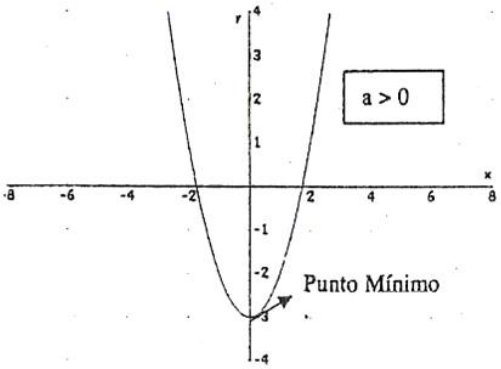
$Dom\ f = x \in \Re \quad ; \quad Rgo\ f = y \in \Re$

FUNCIÓN LINEAL: $y = mx + b$



$Dom\ f = x \in \Re \quad ; \quad Rgo\ f = y \in \Re$

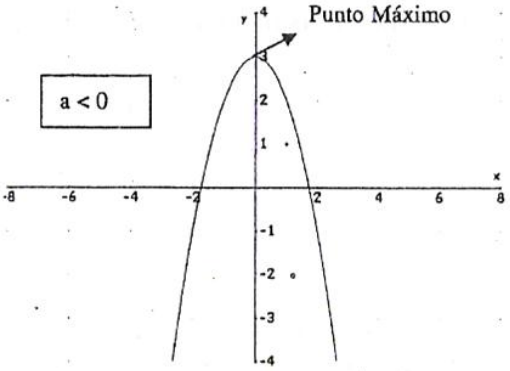
FUNCIÓN CUADRÁTICA $y = ax^2 + bx + c$



$Vértice \left[-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right) \right]$

$Dom\ f = x \in \Re$

$Rgo\ f = \left[f\left(-\frac{b}{2a}\right), +\infty \right]$



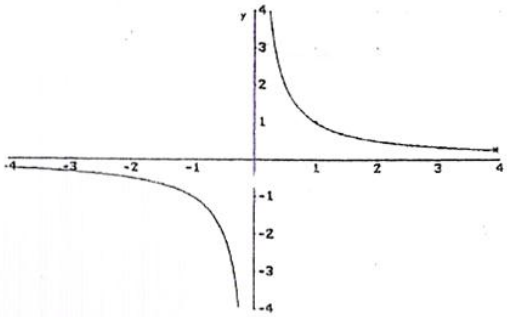
$Vértice \left[-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right) \right]$

$Dom\ f = x \in \Re$

$Rgo\ f = \left[-\infty, f\left(-\frac{b}{2a}\right) \right]$

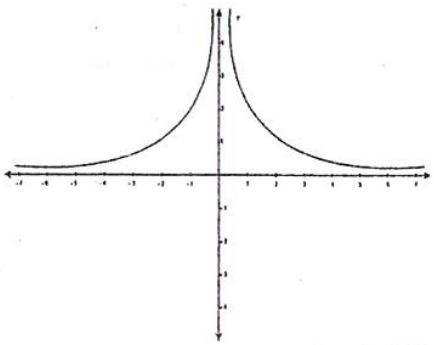
FUNCIÓN RECÍPROCO: $y = \frac{1}{x}$

$Dom\ f = x \in \Re - \{0\} \quad ; \quad Rgo\ f = y \in \Re - \{0\}$

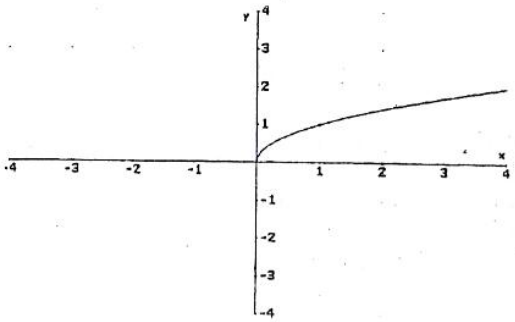


FUNCIÓN RECÍPROCO DE x^2: $y = \frac{1}{x^2}$

$Dom\ f = x \in \Re - \{0\} \quad ; \quad Rgo\ f = y \in (0, +\infty)$

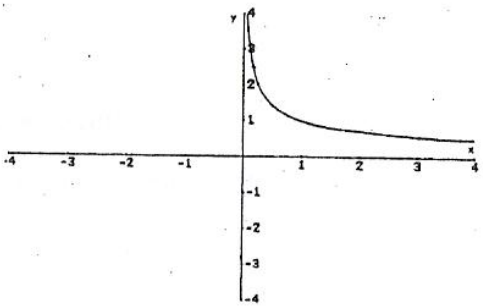


FUNCIÓN RAÍZ CUADRADA: $y=\sqrt{x}$



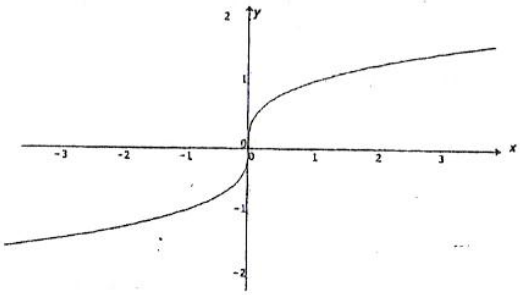
$Dom\ f = x \in [0,+\infty)$; $Rgo\ f = y \in [0,+\infty)$

FUNCIÓN RECÍPROCA DE LA RAÍZ: $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$



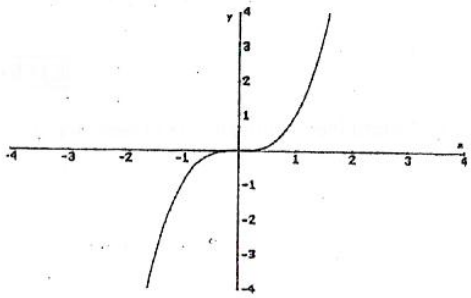
$Dom\ f = x \in (0,+\infty)$; $Rgo\ f = y \in (0,+\infty)$

FUNCIÓN RAÍZ CÚBICA: $y=\sqrt[3]{x}$



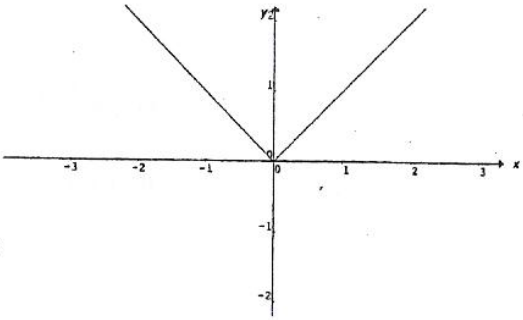
$Dom\ f = x \in \Re$; $Rgo\ f = y \in \Re$

FUNCIÓN CÚBICA: x^3



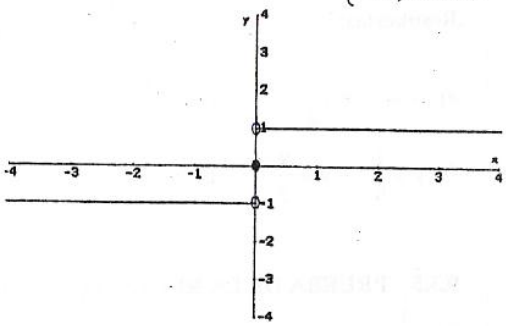
$Dom\ f = x \in \Re$; $Rgo\ f = y \in \Re$

FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO: $y=|x|$



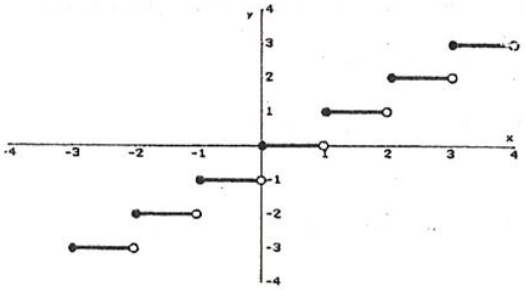
$Dom\ f = x \in \Re$; $Rgo\ f = y \in [0,+\infty)$

FUNCIÓN SIGNO: $y = Sgn(x) = \begin{cases} 1 & , si\ x>0 \\ 0 & , si\ x=0 \\ -1 & , si\ x<0 \end{cases}$



$Dom\ f = x \in \Re$; $Rgo\ f = y \in \{-1,0,1\}$

FUNCIÓN MÁXIMO ENTERO: $y = [\![x]\!]$



$Dom\, f = x \in \Re$

$Rgo\, f = y \in Z$

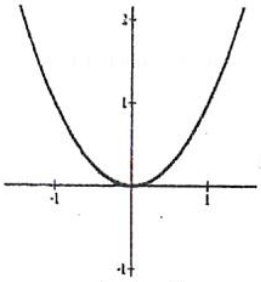
9.3.7. CAMBIOS ESTRUCTURALES EN UNA FUNCIÓN

Traslación vertical

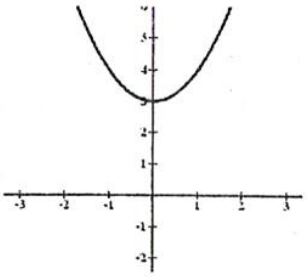
$y = f(x) + c$; Desplazar la gráfica de f, c unidades hacia arriba

$y = f(x) - c$; Desplazar la gráfica de f, c unidades hacia abajo

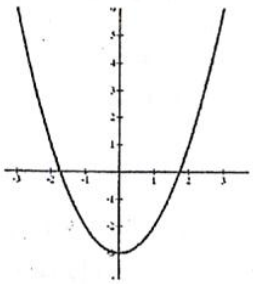
Ejemplos:



$f(x) = x^2$



$f(x) = x^2 + 3$



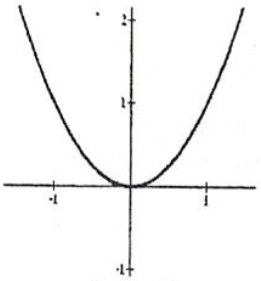
$f(x) = x^2 - 3$

Traslación Horizontal

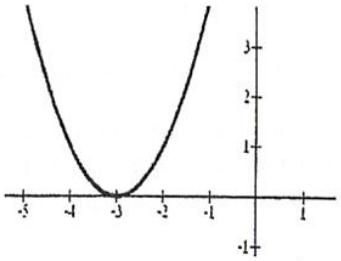
$y = f(x + c)$; Desplazar la gráfica de f, c unidades a la izquierda

$y = f(x - c)$; Desplazar la gráfica de f, c unidades a la derecha

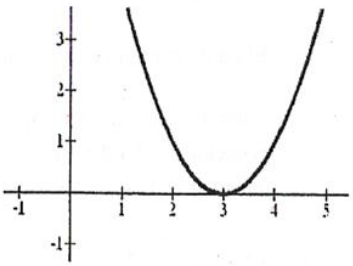
Ejemplos:



$f(x) = x^2$



$f(x) = (x+3)^2$



$f(x) = (x-3)^2$

Reflexión

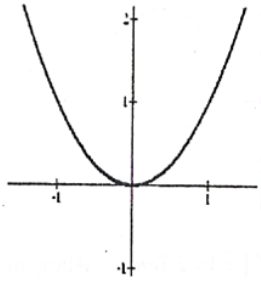
$y=-f(x)$; Reflejar la gráfica de f con respecto al eje x

$y=f(-x)$; Reflejar la gráfica de f con respecto al eje y

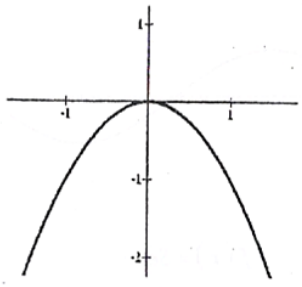
Ejemplos:

Reflexión respecto al eje x

a)

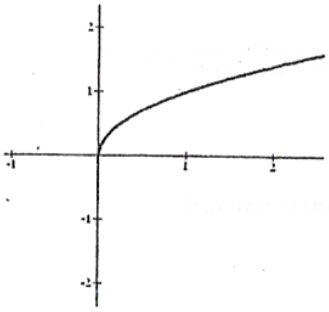


$f(x)=x^2$

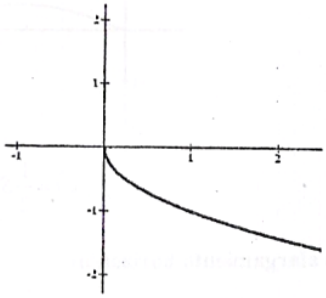


$f(x)=-x^2$

b)

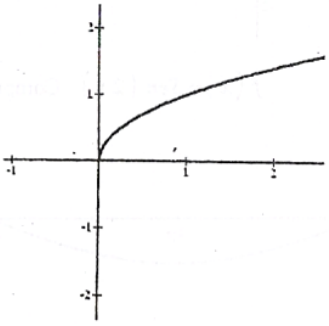


$f(x)=\sqrt{x}$

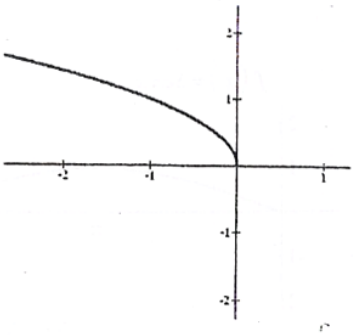


$f(x)=-\sqrt{x}$

Reflexión respecto al eje y



$f(x)=\sqrt{x}$



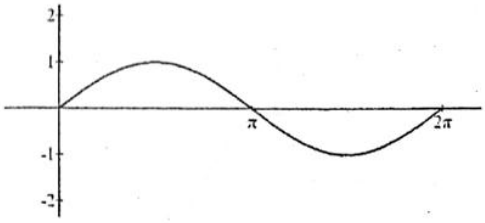
$f(x)=\sqrt{-x}$

Compresión o Alargamiento [Ampliación o Reducción]

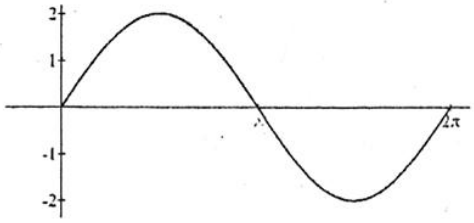
$$y = c\,f(x)\begin{cases} Si\ \ c>1 & \textit{Alargamiento vertical} \\ Si\ \ 0<c<1 & \textit{Compresión vertical} \end{cases} \qquad y = f(cx)\begin{cases} 1)\ \ c>1 & \textit{Compresión horizontal} \\ 2)\ \ 0<c<1 & \textit{Alargamiento horizontal} \end{cases}$$

Ejemplos:

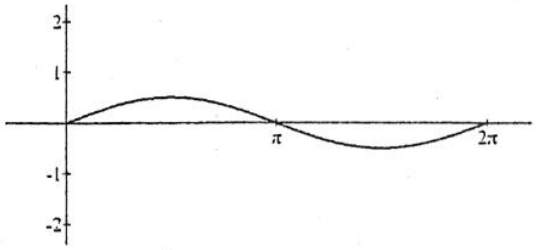
Compresión o alargamiento vertical



$f(x) = Sen\,x$

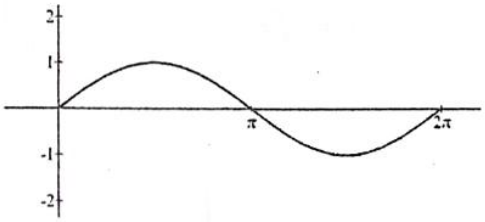


$f(x) = 2\,Sen\,x$ Alargamiento vertical

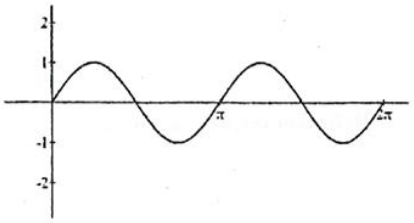


$f(x) = \frac{1}{2}Sen\,x$ Compresión vertical

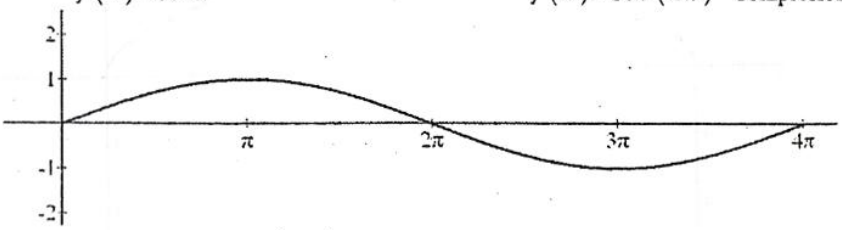
Compresión o alargamiento horizontal



$f(x) = Sen\,x$



$f(x) = Sen\,(2x)$ Compresión horizontal



$f(x) = Sen\left(\frac{1}{2}x\right)$ Alargamiento horizontal

En este caso hemos considerado la gráfica de una función trigonométrica ya que nos permite visualizar mejor los cambios estructurales que se producen en la función básica.

9.4. PUNTOS DE RETORNO EN UNA FUNCIÓN

Para la determinación de los puntos de retorno en una función se aplica el teorema del Ing. Joe García

Sea $y = f(x)$, *planteamos la siguiente igualdad*

$f(x) = f(a)$

$f(x) - f(a) = 0$, *efectuamos operacione s hasta obtener*

$(x-a)f(x,a) = 0$

$x = a \quad \wedge \quad f(x,a) = 0$

$x = a$ *sustituímo s en* $f(x,a) = 0$ *y resolvemos la ecuación obtenida*

Ejemplos:

Determinar los puntos de máximo o mínimo en las siguientes funciones:

1) $f(x) = -2x^2 + 4x - 2$

$f(x) = f(a)$

$-2x^2 + 4x - 2 = -2a^2 + 4a - 2$

$-2x^2 + 2a^2 + 4x - 4a = 0$, $-2(x-a)(x+a) + 4(x-a) = 0$, $(x-a)[-2x - 2a + 4] = 0$

$x = a \Rightarrow [-2x - 2a + 4] = 0$, $-4x = -4$, $x = 1$

Si $x = 1$, evaluamos la función para ese valor para determinar el valor correspondiente a y

$f(1) = -2(1)^2 + 4 - 2(1) - 2$, $f(1) = -2 + 4 - 2$, $f(1) = 0$

Como la parábola se abre hacia abajo tenemos un punto máximo en $(1,0)$

2) $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

$f(x) = f(a)$

$x^3 + x^2 - 4x - 4 = a^3 + a^2 - 4a - 4$

$x^3 - a^3 + x^2 - a^2 - 4x + 4a = 0$, $(x-a)(x^2 + ax + a^2) + (x-a)(x+a) - 4(x-a) = 0$

$(x-a)[x^2 + ax + a^2 + x + a - 4] = 0$, $x = a \Rightarrow [x^2 + x^2 + x^2 + x + x - 4] = 0$, $3x^2 + 2x - 4 = 0$

Resolviendo la ecuación se obtienen los siguientes valores: $x_1 = 0{,}82$ y $x_2 = -1{,}54$

Evaluando la función para estos dos valores tenemos:

$f(0.82) = (0.82)^3 + (0.82)^2 - 4(0.82) - 4$, $f(0.82) = -6.06$

$f(-1.54) = (-1.54)^3 + (-1.54)^2 - 4(-1.54) - 4$, $f(-1.54) = 1.21$

El punto máximo alcanza en $(-1.54 , 1.21)$ y un punto mínimo en $(0.82 , -6.06)$

Cabe señalar que los valores de punto máximo y mínimo son aproximados por cuanto las raíces de la ecuación $3x^2 + 2x - 4 = 0$ no son exactas. La gráfica de la función $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$ se puede observar en **el ejemplo 1** del ejercicio resuelto de la página 192.

3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2}$; $x \neq 0$

$f(x) = f(a)$

$$\frac{x^2-4}{x^2}=\frac{a^2-4}{a^2}$$

$a^2\left(x^2-4\right)-x^2\left(a^2-4\right)=0$, $a^2x^2-4a^2-a^2x^2+4x^2=0$

$4(x-a)(x+a)=0$, $x=a$ Este valor reemplazamos en el otro factor $x+x=0$ y se obtiene $2x=0$, $x=0$

Como la función no está definida para $x=0$, entonces no existe punto máximo ni punto mínimo.

9.5 TIPOS DE FUNCIONES

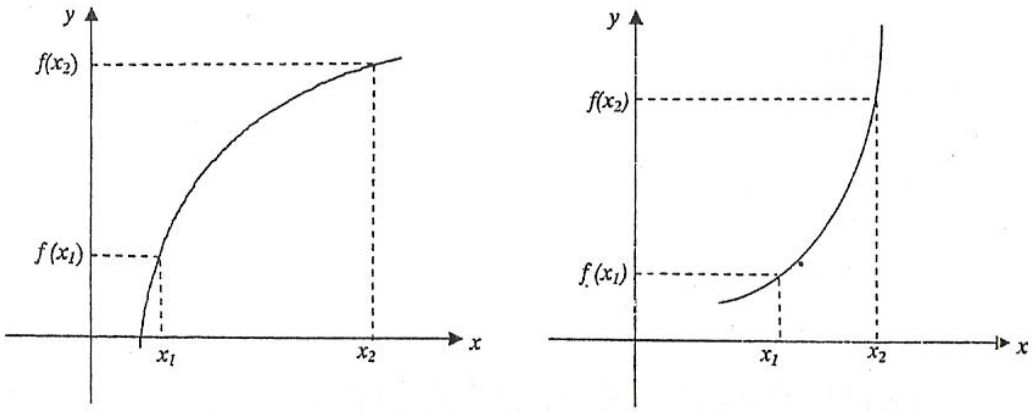
9.5.1. FUNCIONES MONOTONAS

La función f se llama monótona si la función f es creciente o decreciente en un intervalo I.

FUNCIÓN CRECIENTE

Si $\forall x_1, x_2 \in$ *Dom* f se tiene:

$$\boxed{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)}$$

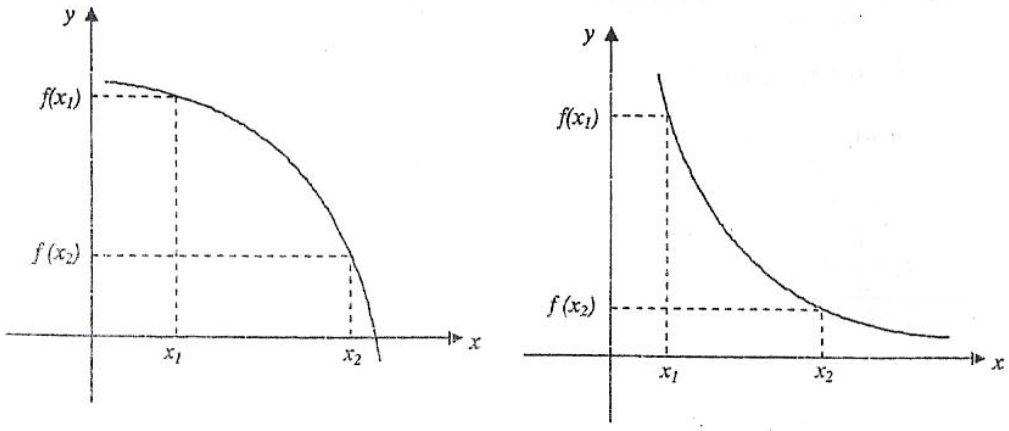


f es estrictamente creciente

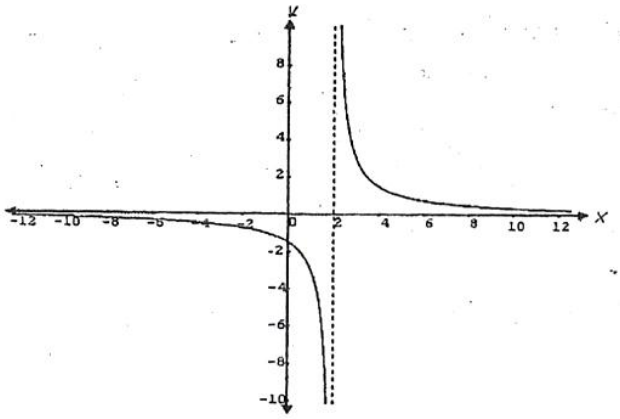
FUNCIÓN DECRECIENTE

Si $\forall x_1, x_2 \in$ *Dom* f se tiene:

$$\boxed{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)}$$



f es estrictamente decreciente



4) Analizar la gráfica de la relación: $R=\{(x,y)\in\Re\times\Re\,/\,y^2+2x-x^2y^2=0\}$

Intersectos:

a) Con el eje x : $y=0 \Rightarrow x=0$

b) Con el eje y : $x=0 \Rightarrow y=0$

Simetría:

a) Con respecto al eje x debe cumplirse que: $R(x,-y)=R(x,y)$

$$(-y)^2+2x-x^2(-y)^2=y^2+2x-x^2y^2$$
$$y^2+2x-x^2y^2=y^2+2x-x^2y^2$$

No cambia la igualdad. Si existe simetría con el eje x

b) Con respecto al eje y debe cumplirse que: $R(-x,y)=R(x,y)$

$$y^2+2(-x)-(-x)^2y^2=y^2+2x-x^2y^2$$
$$y^2-2x-x^2y^2\neq y^2+2x-x^2y^2$$

Cambia la igualdad. No existe simetría con el eje y

c) Con respecto al origen debe cumplirse que: $R(-x,-y)=R(x,y)$

$$(-y)^2+2(-x)-(-x)^2(-y)^2=y^2+2x-x^2y^2$$
$$y^2-2x-x^2y^2\neq y^2+2x-x^2y^2$$

Cambia la igualdad. No existe simetría

Extensión:

a) Dominio: $y^2+2x-x^2y^2=0$; $(1-x^2)y^2=-2x$; $y=\pm\sqrt{\dfrac{-2x}{1-x^2}}$

Condición de existencia de la raíz: $\dfrac{-2x}{1-x^2}\geq 0$; $\dfrac{2x}{(x-1)(x+1)}\geq 0$; $x\neq\pm 1$

$DomR=x\in(-1,0]\cup(1,+\infty)$

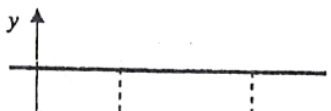
b) Rango: $y^2+2x-x^2y^2=0$

Como no se puede despejar "x", resolvemos la ecuación cuadrática con la formula general para ecuaciones cuadráticas:

$y^2+2x-x^2y^2=0$; $y^2x^2-2x-y^2=0$

FUNCIÓN CONSTANTE

Si $\forall\ x_1\neq x_2\in Dom\ f$ se tiene: $\boxed{x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)}$



$x_1 < x_2 < 1$ (hipótesis)

$-x_1 > -x_2 > -1$; $x_1 + 1 > -x_2 + 1 > 0$; $f(x_1) > f(x_2) > 0$; $\forall\, x \in I_1$, f es $\searrow$

$I_2 : \forall\, x_1 , x_2 \in [1, +\infty[$; $f(x) = x - 1$

$1 < x_1 < x_2$ (hipótesis)

$0 < x_1 - 1 < x_2 - 1$; $f(x_1) < f(x_2)$; $\forall\, x \in I_2$, f es $\nearrow$

II Método (coeficiente de monotonía)

$$I_1 : \alpha = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\alpha = \frac{(-x_2 + 1) - (-x_1 + 1)}{x_2 - x_1} = \frac{-(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)} \quad ; \alpha = -1 \; ; \; \alpha < 0 \quad \Rightarrow f \text{ es } \searrow$$

$$I_2 : \alpha = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\alpha = \frac{(x_2 - 1) - (x_1 - 1)}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)} \quad ; \alpha = 1 ; \; \alpha > 0 \Rightarrow f \text{ es } \nearrow$$

3) Sea $f : \Re \to \Re$

$$x \mapsto y = x^2 + x - 6$$

$$f(x) = x^2 + x - 6$$

$$f(x) = \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} - 6 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \quad , \quad P\min\left(-\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$$

$$I_1 : \forall\, x_1 , x_2 \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\quad ; \quad f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \quad ; \quad x_1 < x_2 < -\frac{1}{2}$$

$$x_1 + \frac{1}{2} < x_2 + \frac{1}{2} < 0 \quad , \quad 0 < \left(x_2 + \frac{1}{2}\right)^2 < \left(x_1 + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$-\frac{25}{4} < \left(x_2 + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} < \left(x_1 + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \quad , \quad -\frac{25}{4} < f(x_2) < f(x_1) \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$$

$$\forall\, x \in I_1 \; ; \; f \text{ es } \searrow$$

$$I_2 : \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[\quad ; \quad f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

$$-\frac{1}{2} \le x_1 < x_2$$

$$0 \le x_1 + \frac{1}{2} < x_2 + \frac{1}{2} \; , \; 0 \le \left(x_1 + \frac{1}{2}\right)^2 < \left(x_2 + \frac{1}{2}\right)^2 \; , \; -\frac{25}{4} \le \left(x_1 + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} < \left(x_2 + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

$$-\frac{25}{4} \le f(x_1) < f(x_2) \to f(x_1) < f(x_2) \quad , \quad \forall\, x \in I_2 \; ; \; f \text{ es } \nearrow$$

II Método (coeficiente de monotonía)

$$I_1: \quad \alpha = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\alpha = \frac{\left(x_2 + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - \left(x_1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}}{x_2 - x_1} = \frac{\left(x_2 + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(x_1 + \frac{1}{2}\right)^2}{x_2 - x_1} = \frac{\left(x_2 + \frac{1}{2} + x_1 + \frac{1}{2}\right)\left(x_2 + \frac{1}{2} - x_1 - \frac{1}{2}\right)}{x_2 - x_1}$$

$$\alpha = \frac{(x_2 + x_1 + 1)(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)} = x_2 + x_1 + 1$$

$x_1 < x_2 < -\frac{1}{2}$ (hipótesis)

$$x_1 + \frac{1}{2} < x_2 + \frac{1}{2} < 0$$

$$x_1 + \frac{1}{2} < 0$$

$$x_2 + \frac{1}{2} < 0$$

$$x_1 + x_2 + 1 < 0$$

$\alpha < 0 \quad \Rightarrow f$ es $\searrow$

$$I_2: \quad \alpha = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\alpha = \frac{\left(x_2 + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - \left(x_1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}}{x_2 - x_1} = \frac{\left(x_2 + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(x_1 + \frac{1}{2}\right)^2}{x_2 - x_1} = \frac{\left(x_2 + \frac{1}{2} + x_1 + \frac{1}{2}\right)\left(x_2 + \frac{1}{2} - x_1 - \frac{1}{2}\right)}{x_2 - x_1}$$

$$\alpha = \frac{(x_2 + x_1 + 1)(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)} = x_2 + x_1 + 1$$

$-\frac{1}{2} < x_1 < x_2$ (hipótesis)

$$0 \le x_1 + \frac{1}{2} < x_2 + \frac{1}{2}$$

$$x_1 + \frac{1}{2} > 0$$

$$x_2 + \frac{1}{2} > 0$$

$$x_1 + x_2 + 1 > 0$$

$\alpha > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ es $\nearrow$

4) Sea $f : A \to \Re$

$$x \mapsto y = \sqrt{x-2}$$

$$Dom\, f: \ x-2 \geq 0 \ , \ x \geq 2$$

$I : \forall\, x_1, x_2 \in \ [2, +\infty)$

$2 \leq x_1 < x_2$ (hipótesis)

$0 \leq x_1 - 2 < x_2 - 2 \ , \ 0 \leq \sqrt{x_1-2} < \sqrt{x_2-2} \ , \ f(x_1) < f(x_2) \ , \ \therefore f$ es $\nearrow$

II Método (coeficiente de monotonía)

$$\alpha = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{x_2-2} - \sqrt{x_1-2}}{x_2 - x_1} \times \frac{\sqrt{x_2-2} + \sqrt{x\ -2}}{\sqrt{x_2-2} + \sqrt{x_1-2}} = \frac{(x_2-2)-(x_1-2)}{(x_2-x_1)\left(\sqrt{x_2-2}+\sqrt{x_1-2}\right)} \ ,$$

$$\alpha = \frac{(x_2-x_1)}{(x_2-x_1)\left(\sqrt{x_2-2}+\sqrt{x_1-2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x_2-2}+\sqrt{x_1-2}} \ ,$$

$$\alpha = \frac{1}{+}; \ \alpha > 0 \ \Rightarrow \ f \text{ es } \nearrow$$

5) Sea $f : A \to \Re$

$$x \mapsto y = \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$$

$Dom\, f : x \in \Re - \{1\}$

$I_1 : \forall\, x_1, x_2 \in \ ]-\infty, 1[$

$x_1 < x_2 < 1$ (hipótesis)

$$x_1 - 1 < x_2 - 1 < 0 \ , \ \frac{1}{x_2-1} < \frac{1}{x_1-1} < 0 \ , \ \frac{2}{x_2-1} < \frac{2}{x_1-1} < 0$$

$$1 + \frac{2}{x_2-1} < 1 + \frac{2}{x_1-1} < 1 \ , \ f(x_2) < f(x_1) < 1 \ \Rightarrow \ f(x_1) > f(x_2) \ , \ f \text{ es } \searrow$$

$I_2 : \forall\, x_1, x_2 \in \ ]1, +\infty[$

$1 < x_1 < x_2$ (hipótesis)

$$0 < x_1 - 1 < x_2 - 1 \ , \ 0 < \frac{1}{x_2-1} < \frac{1}{x_1-1} \ , \ 0 < \frac{2}{x_2-1} < \frac{2}{x_1-1}$$

$$1 < 1 + \frac{2}{x_2-1} < 1 + \frac{2}{x_1-1} \ , \ 1 < f(x_2) < f(x_1) \ \rightarrow \ f(x_1) > f(x_2) \ , \ f \text{ es } \searrow$$

II Método (coeficiente de monotonía)

$$\alpha = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\alpha = \frac{\left(1+\frac{2}{x_2-1}\right)-\left(1+\frac{2}{x_1-1}\right)}{x_2-x_1} = \frac{\frac{2}{x_2-1}-\frac{2}{x_1-1}}{x_2-x_1} = \frac{\frac{2x_1-2-2x_2+2}{(x_2-1)(x_1-1)}}{x_2-x_1}$$

$$\alpha = \frac{\frac{-2(x_2-x_1)}{(x_2-1)(x_1-1)}}{(x_2-x_1)} = \frac{-2}{(x_2-1)(x_1-1)} \quad ,$$

$I_1 : \forall\, x_1, x_2 \in \left]-\infty, 1\right[$

$x_1 < x_2 < 1$ (hipótesis)

$x_1 - 1 < x_2 - 1 < 0$

$\ominus \quad x_1 - 1 < 0$

$\ominus \quad x_2 - 1 < 0$

$\oplus \quad (x_1-1)(x_2-1) > 0$

$\frac{1}{(x_1-1)(x_2-1)} > 0$, $\frac{-2}{(x_1-1)(x_2-1)} < 0$, $\alpha < 0$; f es $\searrow$

$I_2 : \forall\, x_1, x_2 \in \left]1, +\infty\right[$

$1 < x_1 < x_2$

$0 < x_1 - 1 < x_2 - 1$,

$\oplus \quad x_1 - 1 > 0$

$\oplus \quad x_2 - 1 > 0$

$\oplus \quad (x_1-1)(x_2-1) > 0$

$\frac{1}{(x_1-1)(x_2-1)} > 0$, $\frac{-2}{(x_1-1)(x_2-1)} < 0$, $\alpha < 0$; f es $\searrow$

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

1) Analice la monotonía de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{-1}{x-2}$ b) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ c) $f(x) = |2-x|$

d) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ e) $f(x) = \sqrt{x-2}$ f) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

Respuestas:

a) $x<2$ ↗ $x>2$ ↗ b) $x<0$ ↘ $x>0$ ↗ c) $x<2$ ↘ $x>2$ ↗

d) $x<\frac{5}{2}$ ↘ $x\geq\frac{5}{2}$ ↗ e) $x\geq 2$ ↗ f) $-3<x<0$ ↗ $0\leq x<3$ ↘

EJERCICIOS DE REFUERZO

1) Analice la monotonía de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x+1}{x+3}$ b) $f(x)=x^2+6x+8$ c) $f(x)=\sqrt{x^2-3x-4}$ d) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

e) $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$ f) $f(x)=\left|-x^2-2\right|$ g) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ h) $f(x)=-x^2+3$

i) $f(x)=-\sqrt{x+1}$ j) $f(x)=-\left|x-3\right|$ k) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ l) $f(x)=\dfrac{x-3}{3x+9}$

Respuestas:

a) $x<-3$ ↗ $x>-3$ ↗ b) $x<-3$ ↘ $x>-3$ ↗ c) $x\leq -1$ ↘ $x\geq 4$ ↗

d) $x\leq -1$ ↘ $x>1$ ↘ e) $x<2$ ↗ $x>2$ ↘ f) $x<0$ ↘ $x\geq 0$ ↗

g) $x\leq -2$ ↘ $x\geq 2$ ↗ h) $x<0$ ↗ $x\geq 0$ ↘ i) $x\geq -1$ ↘

j) $x<3$ ↗ $x\geq 3$ ↘ k) $x<-2$ ↘ $x>-2$ ↘ l) $x<-3$ ↗ $x>-3$ ↗

2) Dada la función f definida por $f(x)=ax+b$; $a\neq 0$, demostrar que

a) Si $a>0$, entonces f es una función estrictamente creciente en $\Re$

b) S i $a<0$, entonces f es una función estrictamente decreciente en $\Re$

9.5.2. PARIDAD DE UNA FUNCIÓN

Función Par

Una función se denomina par cuando la imagen de cualquier elemento del dominio es igual a la imagen de su elemento opuesto, es decir sí se cumple que:

$$f(x)=f(-x)$$

La grafica de una función par siempre es "simétrica respecto al eje y"

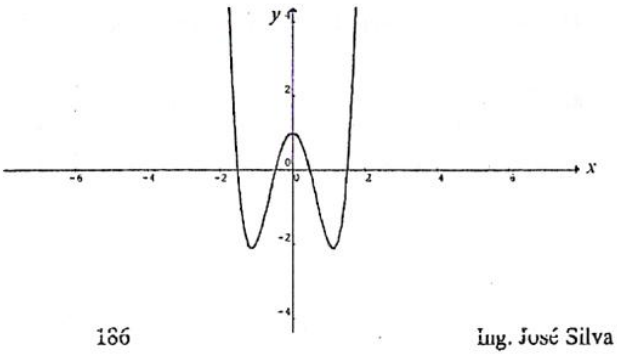
Ejemplos:

1) $f(x)=2x^4-5x^2+1$

$f(-x)=2(-x)^4-5(-x)^2+1$

$f(-x)=2x^4-5x^2+1$

$f(x)=f(-x)$



Función Impar

Una función se denomina impar cuando la imagen de cualquier elemento de dominio es igual al opuesto de la imagen de su elemento opuesto, es decir si se cumple que:

$$f(x) = -f(-x) \qquad \text{o} \qquad f(-x) = -f(x)$$

La gráfica de una función impar siempre es "simétrica respecto al origen".

Ejemplos:

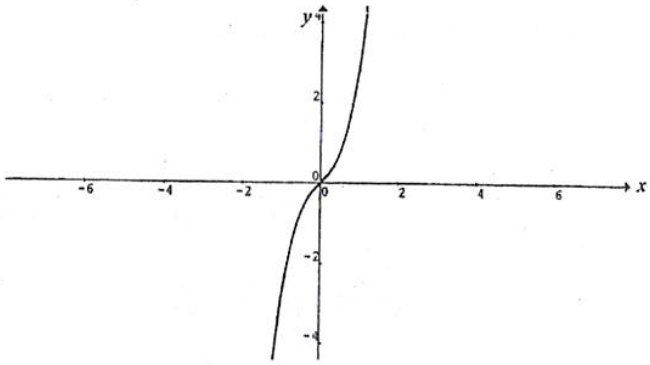
1) $f(x) = 2x^3 + x$

$f(-x) = 2(-x)^3 + (-x)$

$f(-x) = -2x^3 - x$

$f(-x) = -(2x^3 + x)$

$f(x) = -f(x)$



EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

1) Determinar si la función dada es par, impar o ninguna

a) $f(x) = 2x^2 - 3x^4 + 5$

b) $f(x) = 5x^3 - 2x + 1$

c) $f(x) = \dfrac{x}{(x+3)(x-3)}$

d) $f(x) = |x+2| + |x-2|$

e) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$

f) $f(x) = \sqrt{a^2 + ax + x^2} - \sqrt{a^2 - ax + x^2}$

Respuestas:

a) Par b) Ninguna c) Iimpar d) Par e) Impar f) Impar

EJERCICIOS DE REFUERZO

1) Analice la paridad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = -x^4 + 2x^2 - 1$

b) $f(x) = 3x^4 - 2x^2$

c) $f(x) = -x^3 + x - 1$

d) $f(x) = 2x^3 - 5x$

e) $f(x) = 5x^3 + 3x^2 + x - 1$

f) $f(x) = \dfrac{x-4}{x+1}$

g) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{2+x-x^2}$

h) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+1}$

i) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{-x+5}}$

j) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$

Respuestas:

a) Par b) Par c) Ninguna d) Iimpar e) Nninguna
f) Ninguna g) Ninguna h) Par i) Ninguna j) Ninguna

9.6. FUNCIÓN LINEAL

Una función lineal se define como:

$f : \Re \to \Re$

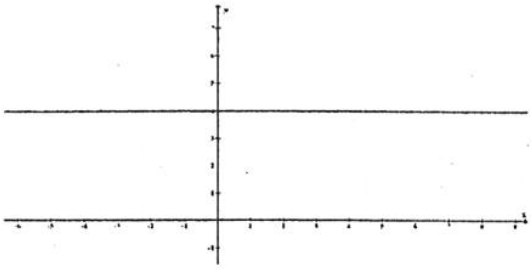
$x \mapsto y = mx + b \quad ; \quad m \wedge b \quad \in \Re$

Su gráfica es una línea recta de pendiente m y ordenada en el origen b

Si $m \neq 0$, la única raíz de $f(x) = mx + b$ *es* $x = -\dfrac{b}{m}$

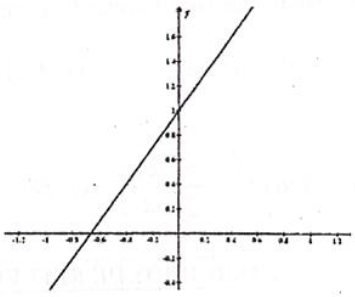
1) Si $m = 0$, diremos que $f(x) = b$ es constante, su rango consta de un solo numero $\{b\}$. Su grafico es una recta paralela al eje de las x que pasa por el punto $(0, b)$

Ejemplo: Si $f(x) = 4 \Rightarrow Domf = x \in \Re \wedge Rgof = \{4\}$



2) Si $m > 0$, $f(x) = mx + b$ es creciente.

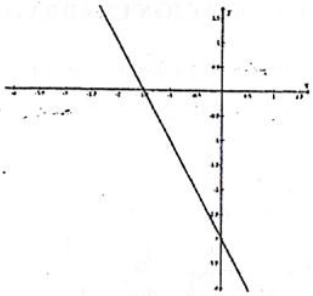
Ejemplo: $f(x) = \dfrac{3}{2}x + 1 \Rightarrow Domf = x \in \Re \wedge Rgof = y \in \Re$



Su única raíz es cuando $f(x) = \dfrac{3}{2}x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{2}{3}$

3) Si $m < 0$, $f(x) = mx + b$ es decreciente.

Ejemplo: $f(x) = -2x - 3 \Rightarrow Domf = x \in \Re \wedge Rgof = y \in \Re$



Su única raíz es cuando $f(x) = -2x - 3 = 0 \;\Rightarrow\; x = -\dfrac{3}{2}$

EJERCICIOS DE REFUERZO

Hallar el rango de las siguientes funciones y trazar su gráfica:

a) $f(x) = -3x + 5 \;\; ; \;\; x \in [-2, 4[$

b) $f(x) = 3x + 1 \;\; \wedge \;\; 2 \le x < 5x$

Respuestas:

a) $y \in]-7, 11]$

b) $y \in [7, 16[$

9.7. FUNCIÓN CUADRÁTICA

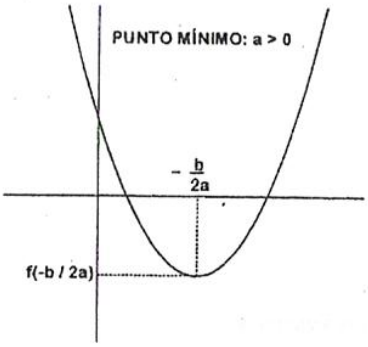
La función cuadrática se define como:

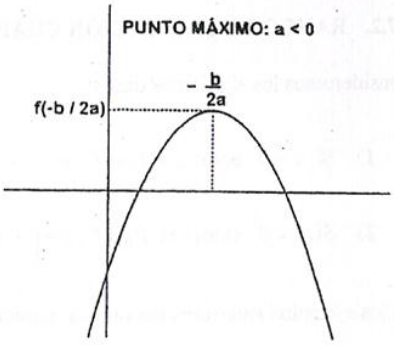
$$f : \Re \to \Re$$

$$x \mapsto y = ax^2 + bx + c \;\; ; \;\; a \neq 0 \;\; , \;\; a, b, c \in \Re \;\; \wedge \;\; \text{Dom } f = x \in \Re$$

El rango depende del signo del coeficiente cuadrático " a " y del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.

Su gráfico corresponde a una parábola que se abre hacia arriba si $a > 0$, o hacia abajo si $a < 0$ y cuyo vértice viene dado por $V\left(-\dfrac{b}{2a}, f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$





Vértice

$$V\left[-\frac{b}{2a} \; ; \; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right] \qquad \text{ó} \qquad V\left[-\frac{b}{2a} \; ; \; -\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

9.7.1. FORMA CANÓNICA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Mediante el método de completar cuadrados podemos obtener una expresión equivalente a $f(x) = ax^2 + bx + c$, la misma que será de gran utilidad para el análisis y estudio de ciertas propiedades de esta función.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad = a\left[x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \qquad (*)$$

$$= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

El punto de coordenadas $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a^2}\right)$ es el vértice de la parábola, justo en el cual la gráfica de f alcanza valor máximo o mínimo en y.

(*) Sumamos y restamos "el cuadrado de la mitad del coeficiente de x"

Ejemplos:

Determinar la forma canónica y el vértice de las siguientes funciones:

1) $f(x) = x^2 - x + 4 \quad ; \quad \forall x \in \Re$

$$= x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 4 \quad ; \quad = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} \quad ; \quad V\left(\frac{1}{2}; \frac{15}{4}\right)$$

2) $f(x) = -2x^2 + 4x - 2 \quad ; \quad \forall x \in \Re$

$$= -2\left(x^2 - 2x + 1\right) = -2\left(x^2 - 2x + 1 - 1 + 1\right) = -2\left(x^2 - 2x + 1\right) = -2(x-1)^2 \quad ; \quad V(1;0)$$

3) $f(x) = 5x^2 - 30x + 49 \quad ; \quad \forall x \in \Re$

$$= 5\left(x^2 - 6x + \frac{49}{5}\right) = 5\left(x^2 - 6x + 9 - 9 + \frac{49}{5}\right) = 5\left[(x-3)^2 + \frac{4}{5}\right] = 5(x-3)^2 + 4 \quad ; \quad V(3;4)$$

9.7.2. RANGO DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Consideremos los siguientes casos:

1) Si $a > 0$ entonces $Rgo\, f : y \in \left[-\frac{\Delta}{4a}; +\infty\right)$

2) Si $a < 0$ entonces $Rgo\, f : y \in \left(-\infty; -\frac{\Delta}{4a}\right]$

En los ejemplos anteriores los rangos respectivamente serian los siguientes:

1) $f(x) = x^2 - x + 4 \quad \Rightarrow \quad Rgo\, f : y \in \left[\frac{15}{4}; +\infty\right)$

2) $f(x) = -2x^2 + 4x - 2 \quad \Rightarrow \quad Rgo\, f : y \in (-\infty; 0]$

3) $f(x) = 5x^2 - 30x + 49 \quad \Rightarrow \quad Rgo\, f : y \in [4; +\infty)$

9.7.3. EJE DE SIMETRÍA

El valor de $-\dfrac{b}{2a}$ representa el eje de simetría. En los ejemplos anteriores tenemos:

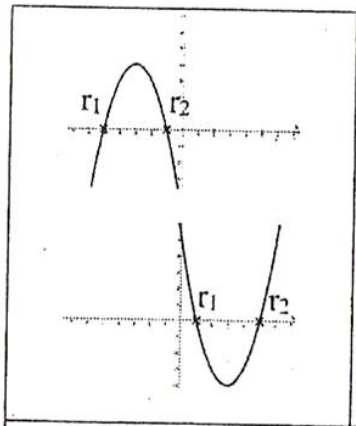
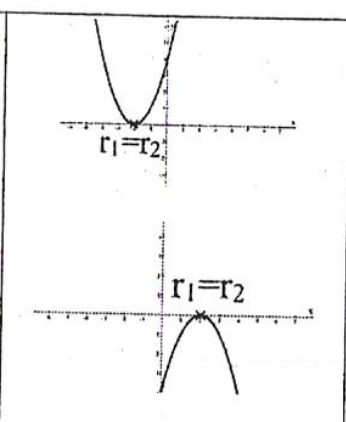
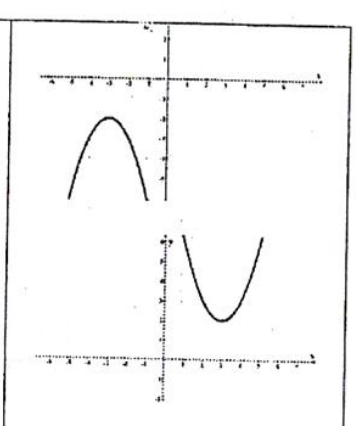
1) $f(x)=x^2-x+4 \quad ; \quad x=\dfrac{1}{2}$

2) $f(x)=-2x^2+4x-2 \quad ; \quad x=1$

3) $f(x)=5x^2-30x+49 \quad ; \quad x=3$

9.7.4. RAÍCES DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Son los puntos de corte con el eje x, depende del valor del discriminante Δ ; $x_1, x_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

		
Si: $\Delta > 0$, entonces r_1 y r_2 son *raíces reales diferentes* La parábola corta al eje x en r_1 y r_2	Si: $\Delta = 0$, entonces r_1 y r_2 son *raíces iguales* La parábola corta al eje x en un sólo punto	Si: $\Delta < 0$, entonces r_1 y r_2 no son números reales La parábola no corta al eje x

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

1) Determinar el valor máximo o mínimo de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^2-8$ b) $f(x)=-x^2-3x+3$ c) $f(x)=2x^2+4x+3$ d) $f(x)=-x^2+x+2$

Respuestas:

a) $Pmín:(0,8)$ b) $Pmáx:\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{21}{4}\right)$ c) $Pmín:(-1,1)$ d) $Pmáx:\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{9}{4}\right)$

EJERCICIOS DE REFUERZO

1) Determinar el valor del punto máximo o mínimo de las siguientes funciones:

a) $f(x)=3x^2-6x+5$ b) $f(x)=x^2+10x+19$ c) $f(x)=-2x^2-10x+13$ d) $f(x)=-x^2+x+1$

Respuestas:

a) $Pmín:(1,2)$ b) $Pmím:(-5,-6)$ c) $Pmáx:(-1,-4)$ d) $Pmáx:\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{4}\right)$

9.8. FUNCIÓN POLINOMIAL

La función polinomial se define como:

$$f:\Re \to \Re$$

$$x \mapsto y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_1 x + a_0 \quad ; \quad a_n \neq 0$$

$$a_n, a_{n-1}, \ldots\ldots\ldots\ldots a_1, a_0 \in \Re \quad ; \quad n \in Z^+ \cup \{0\} \quad ; \quad Dom\, f = x \in \Re$$

Si $n = 1$ se obtiene $y = ax + b$, la función lineal o función polinomial de primer grado, su gráfica es una recta

Si $n = 2$ se obtiene $y = ax^2 + bx + c$, la función cuadrática o función polinomial de segundo grado, su gráfica es una parábola.

Si $n \geq 3$ se consideran las gráficas de las funciones polinomiales.

9.8.1. GRÁFICA DE FUNCIONES POLINOMIALES

Si el polinomio es factorable se procede de la siguiente forma:

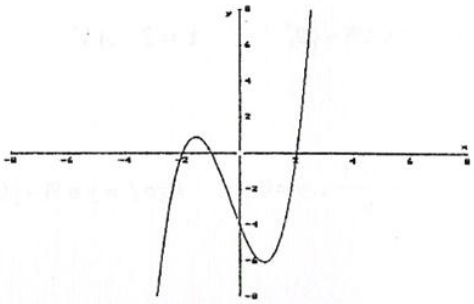
1) Calcular $f(-x)$ para determinar si la gráfica tiene alguna simetría
2) Calcular el intersecto $f(0)$ en y.
3) Factorizar el polinomio.
4) Determinamos los intervalos de positividad o posición de la gráfica $f(x) > 0$ y donde $f(x) < 0$.

- SIGNO + (La gráfica se encuentra sobre el eje x)
- SIGNO – (La gráfica se encuentra bajo el eje y)

EJERCICIOS RESUELTOS

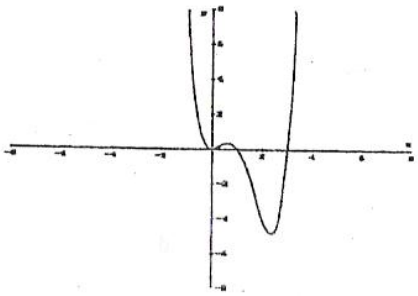
1) Trace la gráfica: $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

1) $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$ $f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 - 4(-x) - 4$ $f(-x) = -x^3 + x^2 + 4x - 4$ $f(x) \neq f(-x)$ La función no es par , tampoco impar 2) $f(0) = -4$	3) $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$ $f(x) = (x^3 + x^2) - (4x + 4)$ $f(x) = x^2(x+1) - 4(x+1)$ $f(x) = (x+1)(x^2 - 4)$ $f(x) = (x+1)(x-2)(x+2)$ 4) $(x+1)(x-2)(x+2) > 0$ – + – + -2 -1 2



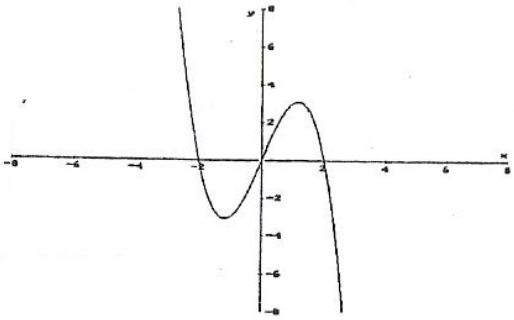
2) Trace la gráfica: $f(x)=x^4-4x^3+3x^2$

1) $f(x)=x^4-4x^3+3x^2$ $f(-x)=(-x)^4-4(-x)^3+3(-x)^2$ $f(-x)=x^4+4x^3+3x^2$ La función no es par , tampoco impar $f(x)\neq f(-x)$ 2) $f(0)=0$	3) $f(x)=x^4-4x^3+3x^2$ $f(x)=x^2(x^2-4x+3)$ $f(x)=x^2(x-1)(x-3)$ 4) $x^2(x-1)(x-3)>0$ + + − + 0 1 3



3) Trace la gráfica: $f(x)=4x-x^3$

1) $f(x)=4x-x^3$ $f(-x)=4(-x)-(-x)^3$ $f(-x)=-4x+x^3$ $f(-x)=-(4x-x^3)$ $f(-x)=-f(x)$ La función es impar , simétrica al origen 2) $f(0)=0$	3) $f(x)=4x-x^3$ $f(x)=x(4-x^2)$ $f(x)=x(2+x)(2-x)$ $f(x)=-x(x+2)(x-2)$ 4) $-x(x+2)(x-2)>0$ + − + − -2 0 2



EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

1) Trace un bosquejo de la gráfica de las siguientes funciones polinomiales:

a) $f(x) = x^4 - 4x^2$

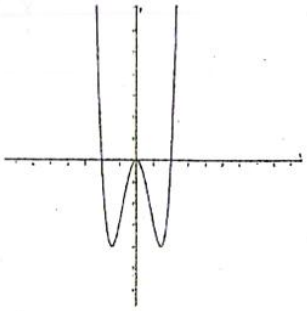
b) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 10x$

c) $f(x) = -2x(x-1)^2$

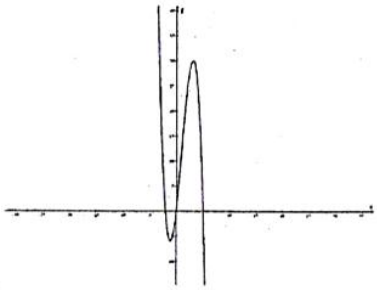
d) $f(x) = x^2(x+1)(x-3)$

Respuestas:

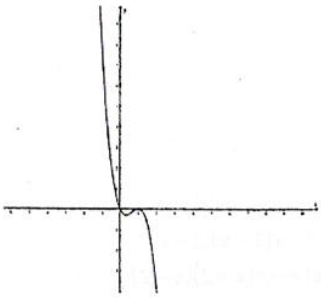
a)



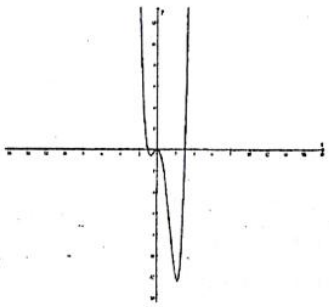
b)



c)



d)



EJERCICIOS DE REFUERZO

1) Trace un bosquejo de la gráfica de las siguientes funciones polinomiales:

a) $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 1$

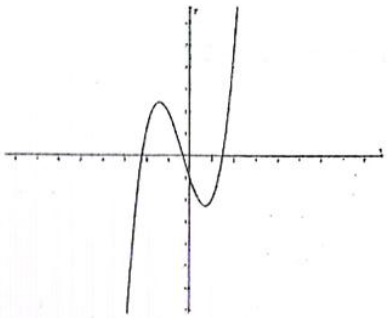
b) $f(x) = -x^3 + 3x$

c) $f(x) = -x^4 + 6x^2$

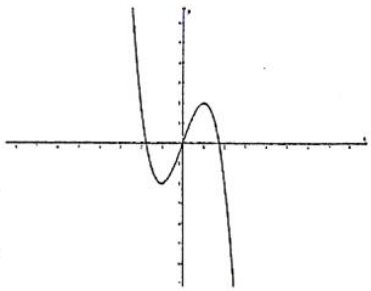
d) $f(x) = (x+2)^2(x-3)^2$

Respuestas:

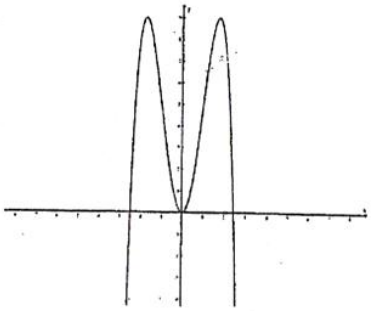
a)



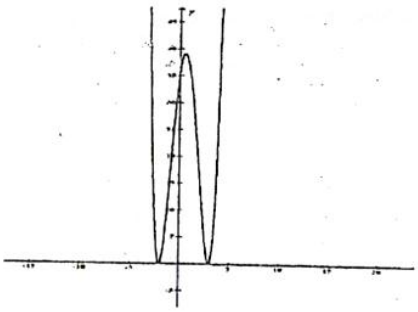
b)



c)



d)



9.9. FUNCIONES RACIONALES

Una función f se llama racional si tiene la forma:

$f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$; donde $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios; $h(x)\neq 0$; $Dom\ f = x\in\Re-\{\,x/h(x)=0\}$

Ejemplos: 1) $f(x)=\dfrac{5x^3-2}{x+3}$; $Domf=\Re-\{-3\}$, 2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-16}$; $Domf=\Re-\{-4,4\}$

3) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+3}$; $Domf=\Re$

Las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de las funciones racionales, se determinarán de la misma manera que en las relaciones racionales. Es importante observar que las funciones:

$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ y $g(x)=x+1$ que resulta de simplificar $f(x)$ no son iguales ya que

$Dom\ f = x\in\Re-\{\,1\,\}$ y $Dom\ g = x\in\Re$

En las funciones racionales donde se puede simplificar ciertos factores, debe considerarse que en el dominio de la función simplificada se excluyan las raíces de los factores simplificados.

Las raíces de los factores simplificados ya no representan asíntotas verticales. La función en ese valor no está definida y la gráfica es discontinua en ese valor y se representa con un agujero.

EJERCICIO RESUELTOS

1) Trace la gráfica $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$

Dominio:

$y=\dfrac{1}{x-2}$, $x\neq 2$, $Dom\ f = x\in\Re-\{2\}$, $x=2$ $A.V.$

Rango:

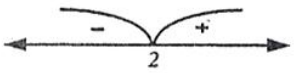
$y=\dfrac{1}{x-2}$, $yx-2y=1$, $x=\dfrac{1+2y}{y}$, $y\neq 0$, $Rgo\ f = y\in\Re-\{\,0\,\}$; $y=0$ $A.H.$

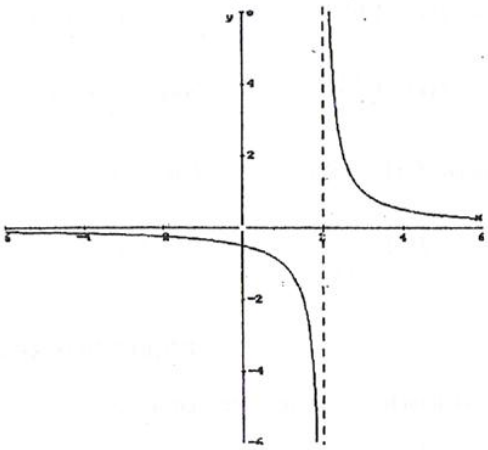
Puntos de corte

x	y
0	-1/2

Intervalos de positividad

$$\frac{1}{x-2} > 0$$





2) Trace la gráfica $f(x) = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x^2+1}$

Dominio:

$$y = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2+1} > 0$$

$Dom\ f = x \in \Re$

Rango:

$$y = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2+1}$$

$$y x^2 + y = x^2 - 4 \quad ; \quad y x^2 - x^2 = -4 - y \quad ; \quad (y-1)x^2 = -4 - y$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{-4-y}{y-1}} \quad , \quad \frac{-4-y}{y-1} \geq 0 \quad , \quad \frac{y+4}{y-1} \leq 0$$

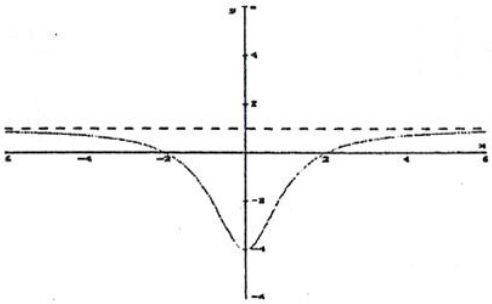
Puntos de Corte

x	y
0	-4
± 2	0

$Rgo\ f = y \in [-4\,;1)$; $y = 1$ $A.H.$

Intervalos de positividad:

$$\frac{(x-2)(x+2)}{x^2+1} > 0$$



3) Trace la gráfica $f(x)=\dfrac{2x^2+2x}{x^2-4x+4}$

Dominio:

$$y=\frac{2x^2+2x}{(x-2)^2} \quad , \quad Dom\, f = x\in\Re-\{2\} \quad , \quad x=2 \quad A.V.$$

Rango:

$$y=\frac{2x^2+2x}{(x-2)^2}$$

$$y\left(x^2-4x+4\right)=2x^2+2x \quad ; \quad yx^2-4yx+4y=2x^2+2x$$

$$(y-2)x^2-(4y+2)x+4y=0$$

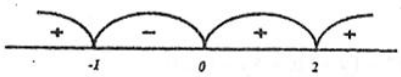
$$x=\frac{(4y+2)\pm\sqrt{(4y+2)^2-4(y-2)4y}}{2(y-2)} \quad , \quad x=\frac{(4y+2)\pm\sqrt{16y^2+16y+4-16y^2+32y}}{2(y-2)}$$

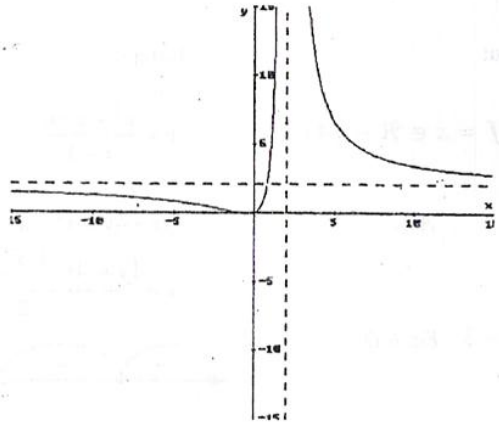
$$x=\frac{(4y+2)\pm\sqrt{48y+4}}{2(y-2)} \quad , \quad y\neq 2 \quad \wedge \quad 48y+4\geq 0 \quad , \quad y\geq -\frac{1}{12} \quad , \quad Rgo\ f = y\in\left[-\frac{1}{12},+\infty\right)$$

$$y=2 \quad A.H$$

Intervalos de Positividad

$$\frac{2x(x+1)}{(x-2)^2}>0$$





4) Trace la gráfica $f(x)=\dfrac{x-1}{1-x^2}$

$$f(x)=\frac{x-1}{(1+x)(1-x)} \quad ; \quad f(x)=-\frac{x-1}{(x+1)(x-1)} \quad ; \quad f(x)=-\frac{1}{(x+1)} \quad , \quad x\neq -1$$

En $x=1$ tenemos un agujero en el gráfico

Dominio:

$$Dom\ f = x\in\Re-\{-1\,;\,1\} \quad ; \quad x=-1 \quad A.V.$$

Rango:

$$y = -\frac{1}{(x+1)}$$

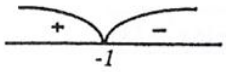
$$yx + y = -1 \;;\; x = \frac{-1-y}{y} \;,\; y \neq 0 \qquad ; \qquad Rgo\ f = y \in \Re - \{0\} \;,\; y = 0 \;\; A.H$$

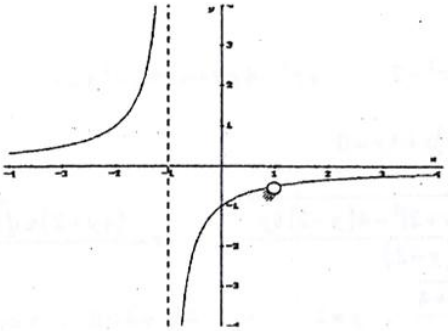
$$Si\ x = 1 \;\Rightarrow\; y = -\frac{1}{1+1};\; y = -\frac{1}{2}$$

$$Rgo\ f : y \in \Re - \left\{-\frac{1}{2}, 0\right\}, Rango\ redefinido$$

Intervalos de Positividad

$$-\frac{1}{x+1} > 0$$





5) Trace la gráfica $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 4}$

Dominio:

$$Dom\ f = x \in \Re - \{4\}$$

$x = 4$ *A.V.*

$y = x + 3$ *Ec. A.O.*

Rango:

$$y = \frac{x^2 - x - 6}{x - 4}$$

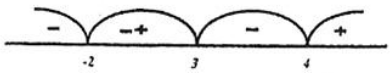
$$yx - 4y = x^2 - x - 6 \;;\; x^2 - (y+1)x + 4y - 6 = 0$$

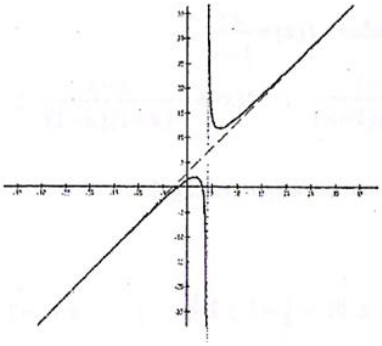
$$x = \frac{(y+1) \pm \sqrt{y^2 - 14y + 25}}{2} \;;\; y^2 - 14y + 25 \geq 0$$

$$Rgo\ f : y \in (-\infty, 2{,}10] \cup [11{,}89, +\infty)$$

Intervalos de Positividad

$$\frac{(x-3)(x+2)}{x-4} > 0$$





9.10. FUNCIÓN IRRACIONAL

Una función f se llama irracional si tiene la forma: $f(x)=\sqrt[n]{P(x)}$

Si n es par: $f(x)=\sqrt[n]{P(x)}$; $Dom\ f = P(x) \geq 0$

$$f(x)=\sqrt[n]{\frac{P(x)}{Q(x)}} \quad ; \quad Dom\ f = \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \quad \wedge \quad Q(x) \neq 0$$

Si n es impar: $f(x)=\sqrt[n]{P(x)}$; $Dom\ f : x \in \Re$

$$f(x)=\sqrt[n]{\frac{P(x)}{Q(x)}} \quad ; \quad Dom\ f = x \in \Re - \{ x / Q(x) = 0 \}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

Determinar el dominio de las siguientes funciones:

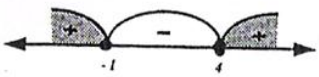
1) $f\ (x) = \sqrt{2x-4}$

$Dom\ \ f : 2x - 4 \geq 0$, $2x \geq 4$, $x \geq 2$, $Dom\ f = x \in [2 ; +\infty)$

2) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$

$Dom\ f : x^2 - 3x - 4 \geq 0$, $(x-4)(x+1) \geq 0$,

$Dom\ f = x \in (-\infty ; -1] \cup [4 ; +\infty)$



3) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$; $Dom\ f : x \in \Re - \{1\}$

4) Analizar y trazar la gráfica de $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+3}}{x-2}$

Dominio:

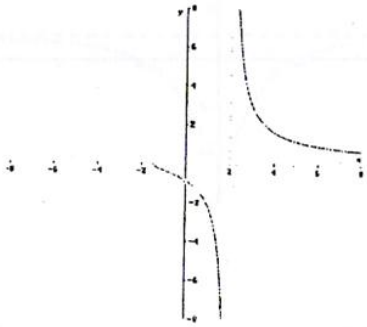
$$y = \frac{\sqrt{2x+3}}{x-2}$$

$2x + 3 \geq 0 \ \wedge \ x - 2 \neq 0$

$x \geq -\dfrac{3}{2} \ \wedge \ x \neq 2$

$Dom\ f = x \in \left[-\dfrac{3}{2}, +\infty \right) - \{2\}$

$x = 2$ *A.V.*



Rango:

$$y = \frac{\sqrt{2x+3}}{x-2}$$

$y^2 = \dfrac{2x+3}{x^2 - 4x + 4}$; $y^2x^2 - 4y^2x + 4y^2 - 2x - 3 = 0$

$y^2x^2 - (4y^2 + 2)x + 4y^2 - 3 = 0$

$$x = \frac{(4y^2+2) \pm \sqrt{(4y^2+2)^2 - 4y^2(4y^2-3)}}{2y^2}$$

$x = \dfrac{(4y^2+2) \pm \sqrt{28y^2+4}}{2y^2}$; $28y^2 + 4 \geq 0 \ \wedge \ y \neq 0$

$7y^2 + 1 \geq 0$; $\forall\ y \in \Re > 0$

$Rgo\ f = y \in \Re - (0)$; $y = 0$ *A.H*

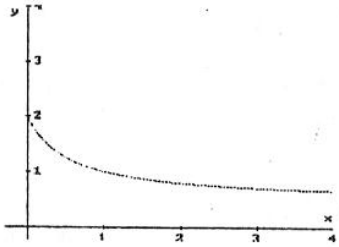
9.11. FUNCIONES CON VALOR ABSOLUTO

1) Trace la gráfica $f(x)=\dfrac{x+2}{2|x|+1}$

$$|x|=\begin{cases} x \ , \ Si \ x\geq 0 & a) \\ -x \ , \ Si \ x<0 & b) \end{cases}$$

a) $y=\dfrac{x+2}{2x+1}$; $Si \ x\geq 0$, $x=-\dfrac{1}{2}$ $A.V.$, $y=\dfrac{1}{2}$ $A.H.$

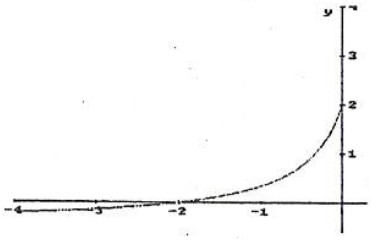
X	0	1	2	3	4
Y	2	1	0.8	0.78	0.66



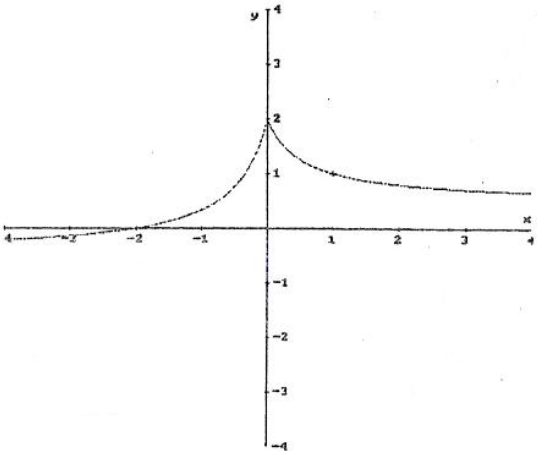
b) $y=-\dfrac{x+2}{2x-1}$; $Si \ x<0$, $x=\dfrac{1}{2}$ $A.V.$, $y=-\dfrac{1}{2}$ $A.H.$

X	0	-1	-2	-3
Y	2	0.36	0	0.14

excluido



Sol: $Sol\,a \cup Sol\,b$



$Dom\ f = x \in \Re$; $Rgo\ f = y \in \left(-\dfrac{1}{2}, 2\right]$

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

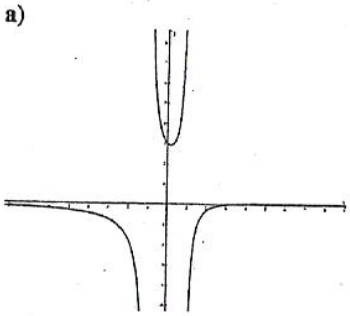
1) Analice y trace la gráfica de las siguientes funciones:

a) $y=\dfrac{x-3}{x^2-1}$ b) $f(x)=\dfrac{-x^2}{x+1}$ c) $f(x)=\dfrac{-x^2-x+6}{x^2+3x-4}$

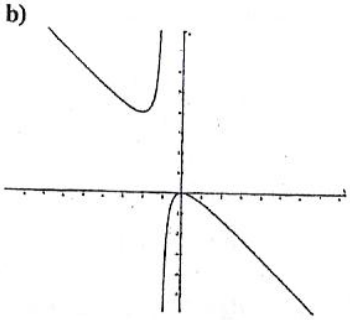
d) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^3-4x}$ e) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-5}-2}$ f) $f(x)=\sqrt{x^2+x-6}$

Respuestas:

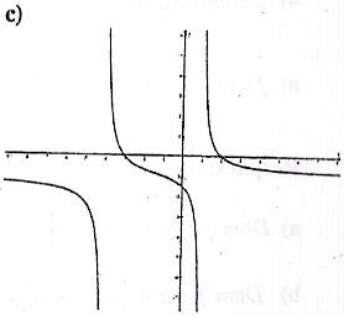
a)



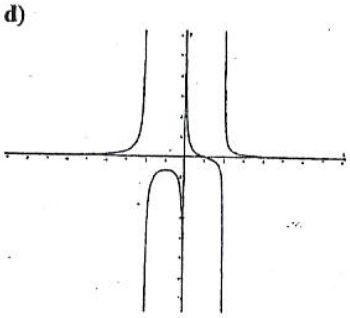
b)



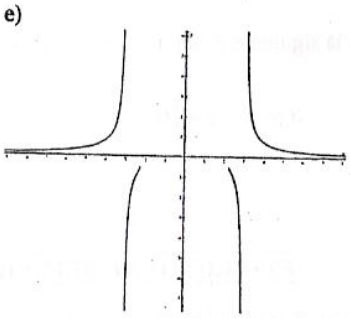
c)



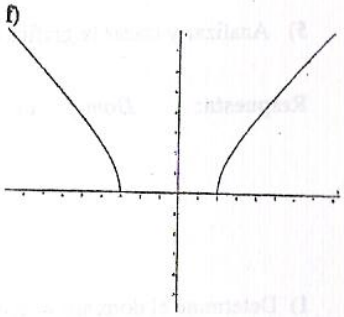
d)



e)



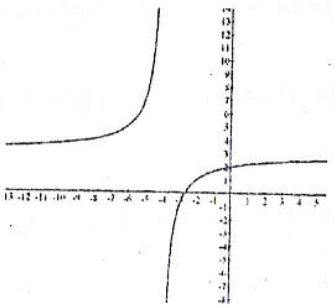
f)



2) Determinar los valores de a, b y c en la función $y=\dfrac{ax+8}{bx+c}$ si los puntos de corte con los ejes son $x=-\dfrac{8}{3}$ y $y=2$. Además sabemos que la asíntota horizontal tiene por ecuación $y=3$.

Trace su gráfica

Respuesta: $a=3$; $b=1$; $c=4$



3) Determine el dominio de las siguientes funciones irracionales:

a) $f(x)=\sqrt{-x+2}$ b) $f(x)=-\sqrt{x+1}$ c) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-x+1}{x+4}}$

d) $f(x)=\sqrt{2-\dfrac{3}{x}}$ e) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x-5}$ f) $f(x)=\dfrac{x-4}{\sqrt{x+3}}$

g) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-\sqrt{x}}}$ h) $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{-\dfrac{1}{x}}}$ g) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}-2}$

Respuestas:

a) $Dom\ f:\ x\le 2$ b) $Dom\ f:\ x\ge -1$ c) $Dom\ f:\ x\in\left]-4;1\right]$

d) $Dom\ f:\ x<0\ \vee\ x\ge\dfrac{3}{2}$ e) $Dom\ f:\ x\ge -3\ \wedge\ x\ne 5$ f) $Dom\ f:\ x\in\left]-3;+\infty\right[$

g) $Dom\ f:\ x\in\left]0,+\infty\right[-\{1\}$ h) $Dom\ f:\ x\in\left[-1,0\right[$ g) $Dom\ f:\ x\in\left[-1,+\infty\right[-\{3\}$

4) Determinar dominio y rango de las siguientes funciones irracionales:

a) $f(x)=\sqrt{2+\dfrac{2+2x}{3-x}}$ b) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-4}}-2$

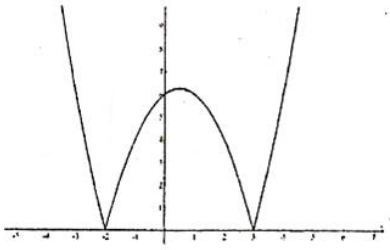
Respuestas:

a) $Dom\ f:\ x\in\left]-\infty,3\right[$; $Rgo\ f:\ y\in\left]0,+\infty\right[$

b) $Dom\ f:\ x\in\left]-2,+\infty\right[-\{2\}$; $Rgo\ f:\ y\in\left]-2,+\infty\right[$

5) Analizar y trazar la grafica de la siguiente función $f(x)=\left|\ 6+x-x^2\ \right|$

Respuesta: $Dom\ f:\ x\in\Re$; $Rgo\ f:\ y\in\left[0,+\infty\right)$



EJERCICIOS DE REFUERZO

1) Determine el dominio y recorrido de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{3x-1}{1-x}$ b) $f(x)=x^2-3x+2$ c) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$ d) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+9}{x^2-2x+8}$

e) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ f) $f(x)=-\sqrt{-x+3}$ g) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ h) $f(x)=5-\left|2x-1\right|$

i) $f(x)=\left|x^2-4x\right|-1$ j) $f(x)=3-\sqrt{15-2x-x^2}$ k) $f(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-4}}$ l) $f(x)=\sqrt{\dfrac{16+x^2}{16-x^2}}$

Respuestas:

a) $x\in\Re-\{1\}$; $y\in\Re-\{-3\}$ b) $x\in\Re$; $y\ge-\dfrac{1}{4}$ c) $x\in\Re-\{2,3\}$; $y\in\Re-\{0\}$

d) $x\in\Re$; $y\in$ e) $x\le-2\vee x\ge 2$; $y\ge 0$ f) $x\le 3$; $y<0$

g) $-1\le x$; $y\le-1\vee y\ge 1$ h) $x\in\Re$; $y\le 5$ i) $x\in\Re-\{3\}$; $y\in\Re$

j) $x\in\Re-\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$; $y\ge-2$ k) $x<-2\vee x>2$; y l) $-4<x<4$; $y>0$

2) Analizar las siguientes funciones, determinar dominio, rango, ecuación de asíntotas, puntos de corte, intervalos de positividad y trazar su gráfica.

a) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 10x$

b) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x$

c) $f(x) = x^3 - 3x + 1$

d) $f(x) = \frac{2}{x} - 3$

e) $f(x) = \frac{9x}{16 - x^2}$

f) $y = \frac{1}{(x-2)^2}$

g) $f(x) = \frac{x-1}{1-x^2}$

h) $y = \frac{8 - x^3}{2x^2}$

i) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$

j) $y = \frac{x}{x^2 + x + 1}$

k) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$

l) $y = \frac{x^2}{x+1}$

m) $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 3}$

n) $y = \frac{x-1}{2x^2 - 2}$

o) $y = \sqrt{-x+4}$

p) $y = -\sqrt{x+2}$

q) $y = \sqrt{x-3} + 4$

r) $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$

s) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 4}$

t) $y = \sqrt[3]{x+1}$

u) $y = \frac{x}{\sqrt{3x^3 - 3x}}$

v) $y = \frac{x - \sqrt{x+5}}{x-2}$

w) $f(x) = |x+1| + |x-2|$

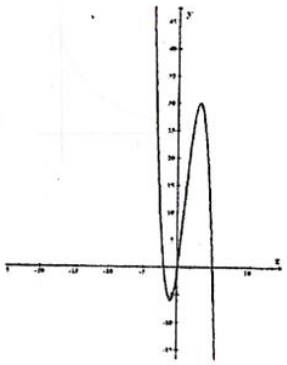
x) $f(x) = \frac{x-1}{2|x-3|}$

y) $f(x) = \left|\frac{x+2}{x-2}\right|$

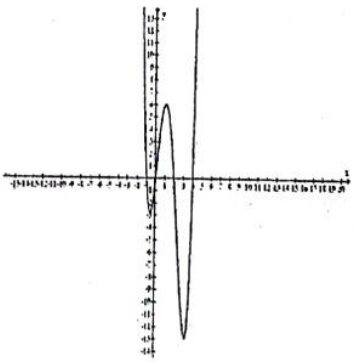
z) $f(x) = \frac{4x^2 - 1}{|2x+1|}$

Respuestas:

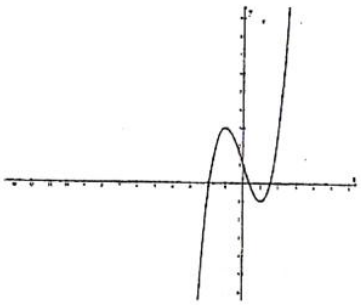
a)



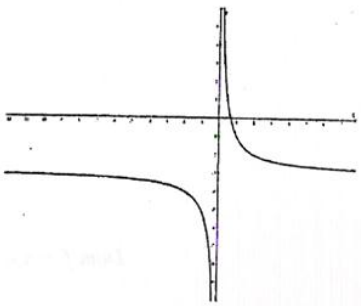
b)



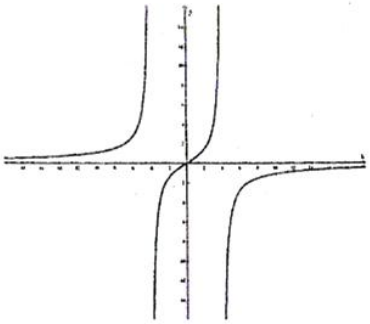
c)



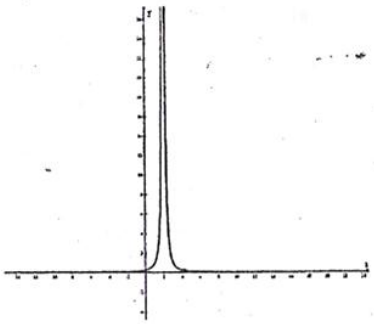
d)



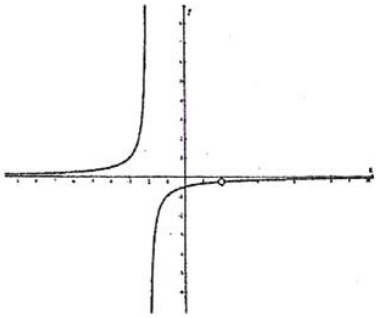
e)



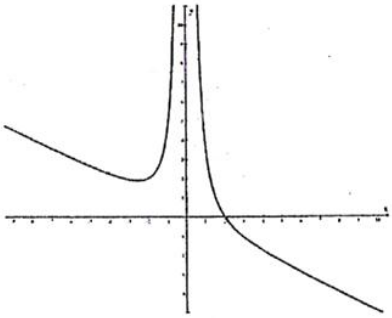
f)



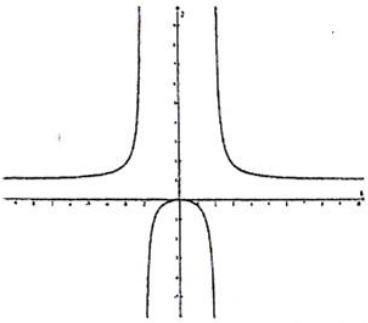
g)



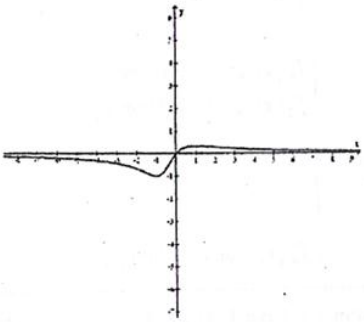
h)



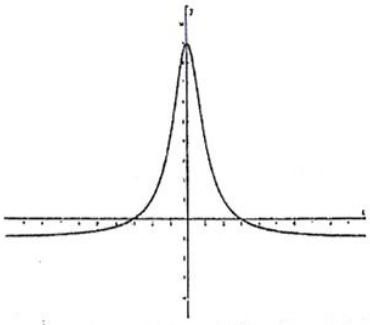
i)



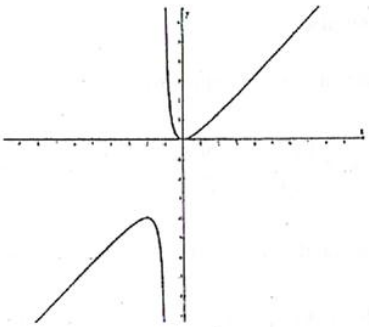
j)



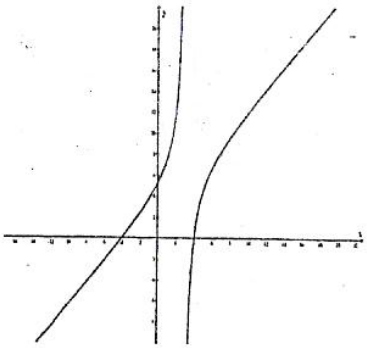
k)



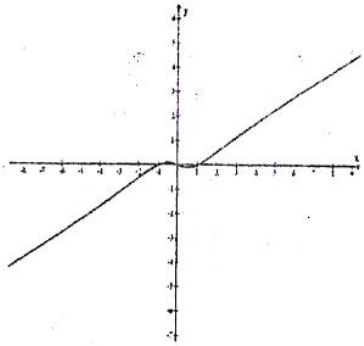
l)



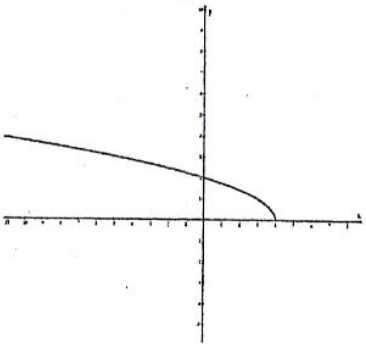
m)



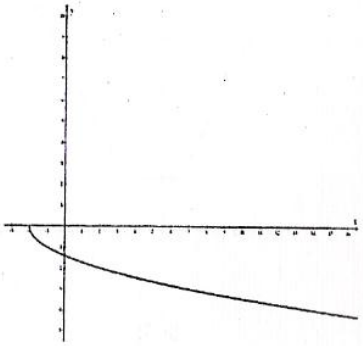
n)



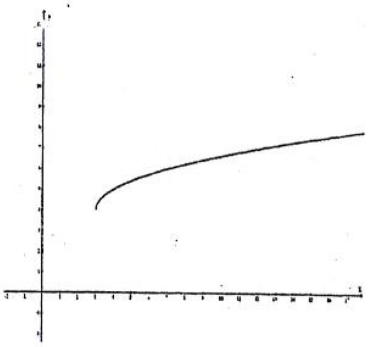
o)



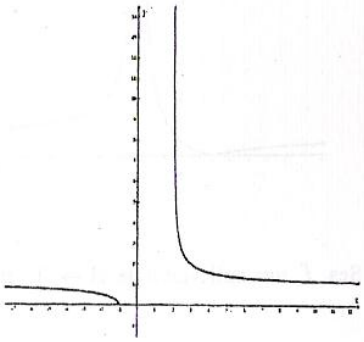
p)



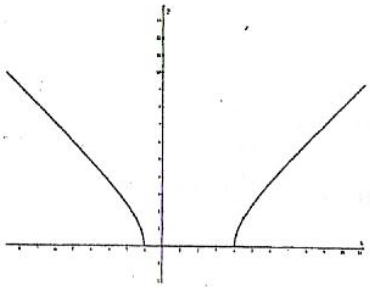
q)



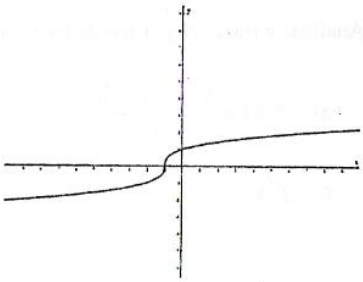
r)



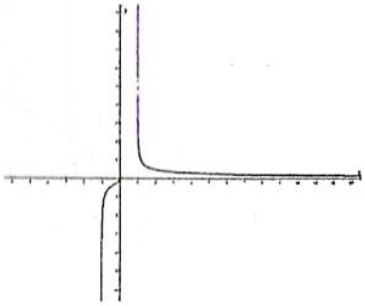
s)



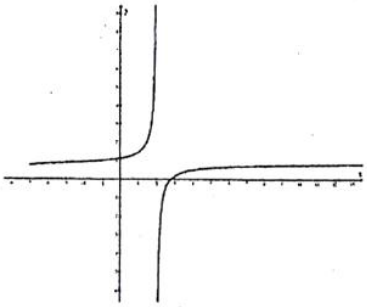
t)



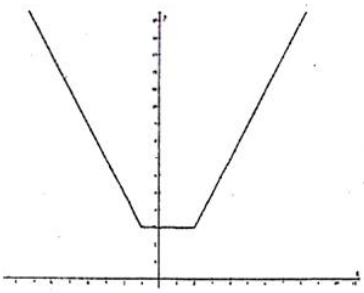
u)



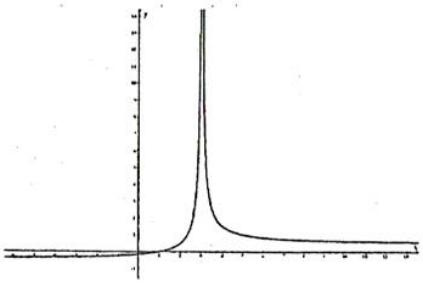
v)



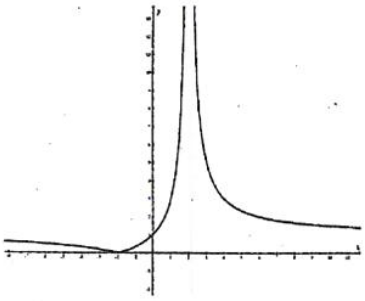
w)



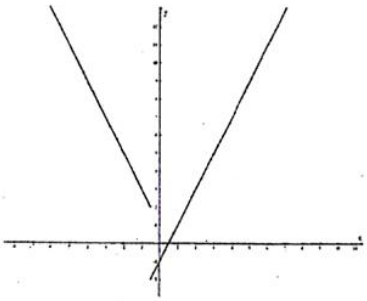
x)



y)



z)



3) Sea f una aplicación de $\Re \rightarrow \Re$, realizar el análisis y trazar su respectiva gráfica de:

a) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+x+1}$ b) $f(x)=\dfrac{x^3-x}{2x^2+3}$ c) $f(x)=\dfrac{-2x^3-2x-4}{x^2-2}$

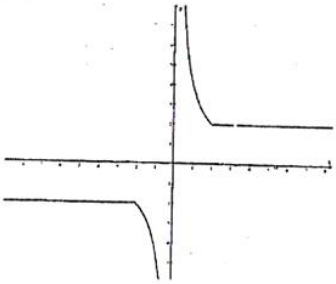
4) Analizar y trazar el gráfico de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{|x-2|+|x+2|}{x}$ b) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-4}}$

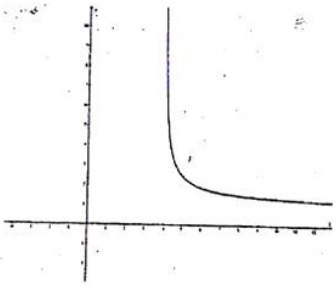
c) $f(x)=\dfrac{x}{1-|x|}$ d) $f(x)=\dfrac{x^3+1+x^2+x}{|x+1|}$

Respuestas:

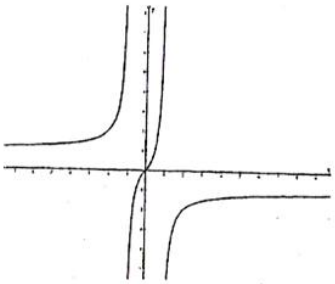
a)



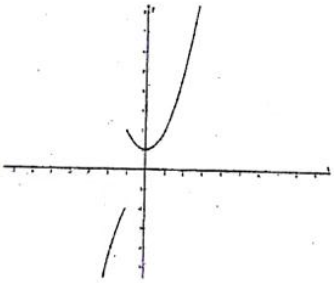
b)



c)



d)



9.12. FUNCIÓN SECCIONADA

Es una función definida por varias reglas de correspondencia.

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) \ ; \ si\ x \in Dom\ f_1 \\ f_2(x) \ ; \ si\ x \in Dom\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(x) \ ; si\ x \in Dom\ f_n \end{cases}$$

$$\boxed{Dom\ f = Dom\ f_1(x) \cup Dom\ f_2(x) \cup .....Dom\ f_n(x)}$$

$$\boxed{Rgo\ f = Rgo\ f_1(x) \cup Rgo\ f_2(x) \cup .....Rgo\ f_n(x)}$$

Ejemplo:

Determinar el dominio y el rango de la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & ; \ Si\ x \le 0 \\ x+2 & ; \ Si\ x > 0 \end{cases} \qquad Dom\ f = x \in (-\infty, 0] \cup x \in (0, +\infty] \quad ; \quad Dom\ f = x \in \Re$$

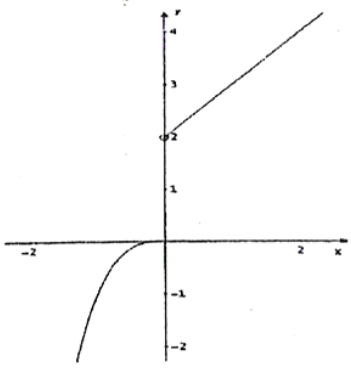
Calculando sus respectivos rangos tenemos:

$$Rgo\ f_1(x) : y = x^3 \qquad \wedge \qquad x \le 0 \ ; \ x^3 \le 0 \ ; \ y \le 0 \ \Rightarrow \ Rgo\ f_1(x) = y \in (-\infty, 0]$$

$Rgo\, f_2(x): y = x+2 \quad \wedge \quad x > 0 \;\; ; \;\; x+2 > 2 \;\; ; \;\; y > 2 \;\; \Rightarrow \;\; Rgo\, f_2(x) = y \in (2, +\infty)$

$Rgo\, f = Rgo\, f_1(x) \cup Rgo\, f_2(x) \;\; , \;\; Rgo\, f = y \in (-\infty, 0] \cup y \in (2, +\infty)$

La gráfica de la función es la siguiente:



9.13. FUNCIÓN MÁXIMO ENTERO O ENTERO MAYOR

La función máximo entero se puede describir para un número real x como el mayor entero menor o igual a x.

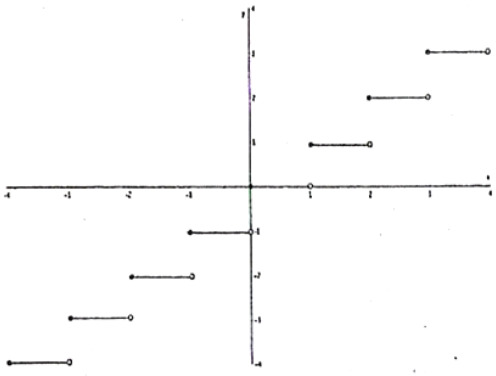
$f: \Re \to \Re$

$x \mapsto y = f(x) = [[x]]$

$Dom\, f: x \in \Re$

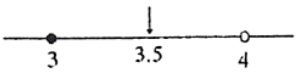
$Rgo\, f: y \in Z$

$f(x) = [[x]] = n \;\; , \;\; n \le x < n+1$

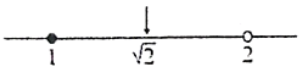


Para cada x hay un entero tal que $n \le x < n+1$

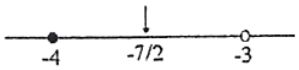
$[[3,5]] = 3$



$[[\sqrt{2}]] = 1$

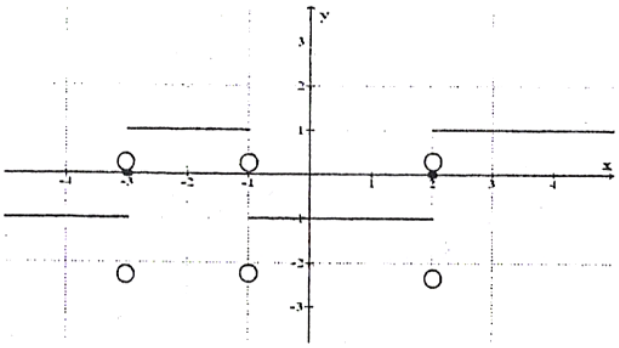


$[[3,5]] = 3$



9.14. FUNCIÓN SIGNO

$$Sgn\left(\frac{x^2+x-6}{x+1}\right)=\begin{cases} 1 \;;\; Si \;\; \dfrac{x^2+x-6}{x+1}>0 \;;\; \dfrac{(x+3)(x-2)}{x+1}>0 \;;\; -3<x<1 \;\cup\; x>2 \\ 0 \;;\; Si \;\; \dfrac{x^2+x-6}{x+1}=0 \,;\, x^2+x-6=0 \,;\, (x+3)(x-2)=0 \,;\, x=-3 \;\vee\; x=2 \\ -1 \;;\; Si \;\; \dfrac{x^2+x-6}{x+1}<0 \;;\; \dfrac{(x+3)(x-2)}{x+1}<0 \;;\; x<-3 \;\vee\; -1<x<2 \end{cases}$$



EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

1) Determine el dominio, rango y trace la gráfica de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\begin{cases} x^2-4, & x<3 \\ 2x-1, & x\geq 3 \end{cases}$

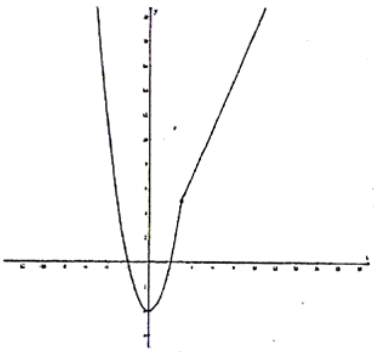
b) $f(x)=\begin{cases} x^2-2 \;, & x\in[-3,0[\\ x-|x-2| \;, & x\in[0,4[\\ 2+\sqrt{x-4} \;, & x\in[4,8[\end{cases}$

c) $f(x)=Sgn\left(\dfrac{x-3}{x+4}\right)$

d) $f(x)=\left[\left[\dfrac{x}{2}\right]\right]$

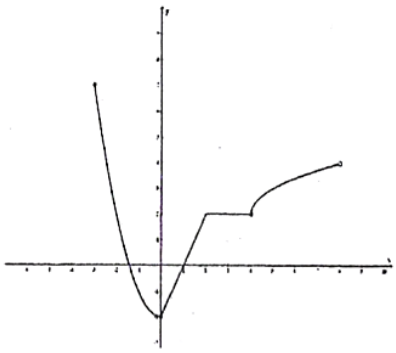
Respuestas:

a)



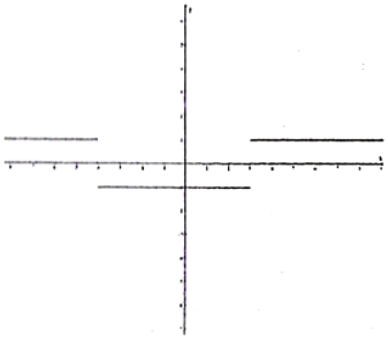
$Dom\ f:\ x\in\Re \;\;;\;\; Rgo\ f:\ y\in[-4,+\infty)$

b)



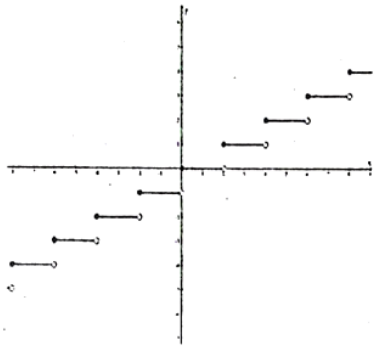
$Dom\ f:\ x\in[-3,8) \;\;;\;\; Rgo\ f:\ y\in(-2,7]$

c)



$Dom\ f:\ x \in \Re \quad ; \quad Rgo\ f:\ y \in \{-1, 0, 1\}$

d)



$Dom\ f:\ x \in \Re \quad ; \quad Rgo\ f:\ y \in Z$

EJERCICIOS DE REFUERZO

1) Trace la gráfica de las siguientes funciones, determine el dominio y rango:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & , \ x \neq 2 \\ 0 & , \ x = 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x+2 & , \ x \leq -1 \\ x^3 & , \ |x| < 1 \\ -x+3, & x \geq 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x+5 & , \ x < -3 \\ \sqrt{9-x^2} & , \ -3 \leq x \leq 3 \\ 5-x & , \ 3 < x \end{cases}$

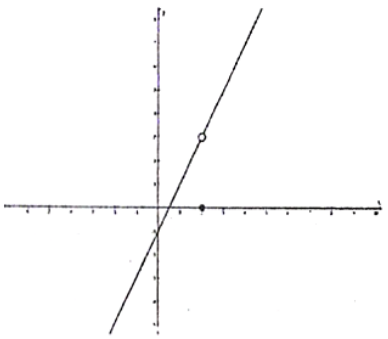
d) $f(x) = \begin{cases} |x+3| & , \ -5 < x \leq -1 \\ 2x^2 & , \ -1 < x \leq 2 \\ 12-2x & , \ x > 2 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2-2 & , \ -3 < x < 0 \\ x-|x-2| & , \ 0 \leq x < 4 \\ 2+\sqrt{x-4} & , \ 4 \leq x < 8 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} 3 & , \ x < -2 \\ -x+1 & , \ |x| \leq 2 \\ -3 & , \ x > 2 \end{cases}$

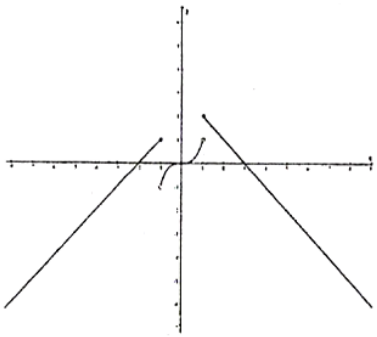
Respuestas:

a)



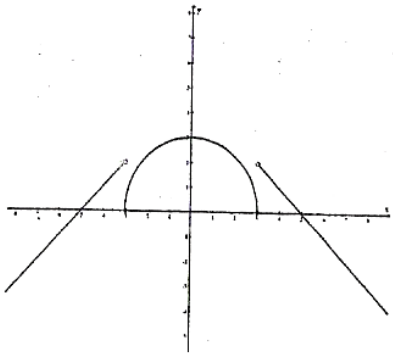
$Dom\ f:\ x \in \Re \quad ; \quad Rgo\ f:\ y \in \Re - \{3\}$

b)



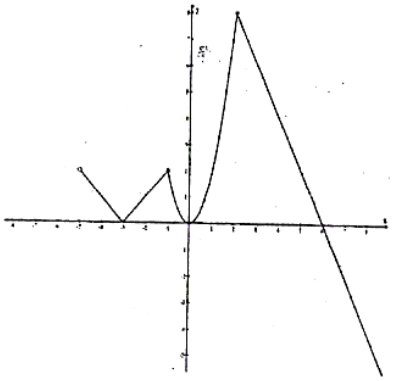
$Dom\ f:\ x \in \Re \quad ; \quad Rgo\ f:\ y \in]-\infty, 2]$

c)



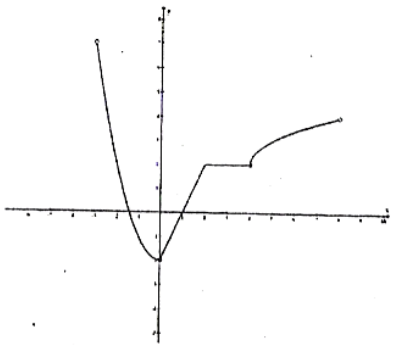
$Dom\ f:\ x \in \Re \quad ; \quad Rgo\ f:\ y \in \left]-\infty, 3\right]$

d)



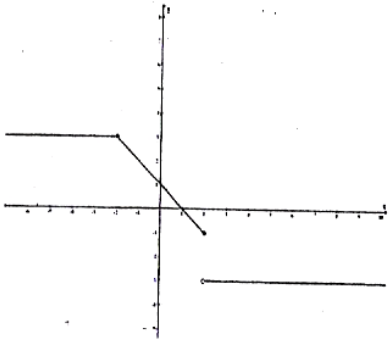
$Dom\ f:\ x \in \left]-5, +\infty\right[\quad ; \quad Rgo\ f:\ y \in \left]-\infty, 8\right]$

e)



$Dom\ f:\ x \in \left]-3, 8\right[\quad ; \quad Rgo\ f:\ y \in \left[-2, 7\right[$

f)



$Dom\ f:\ x \in \Re \quad ; \quad Rgo\ f:\ y \in \left[-1, 3\right] \cup \left\{-3\right\}$

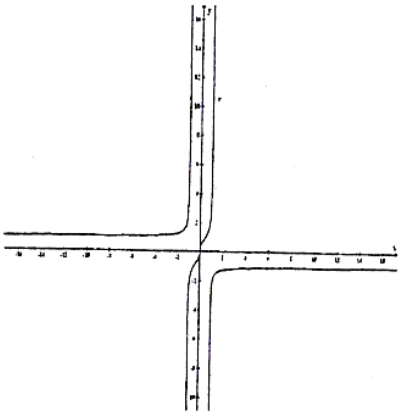
2) Sea $f : A \rightarrow \Re$

$$x \mapsto y = \sqrt[3]{\frac{x}{1-|x|}}$$

Determine: dominio, rango, asuntotas y trace su gráfica

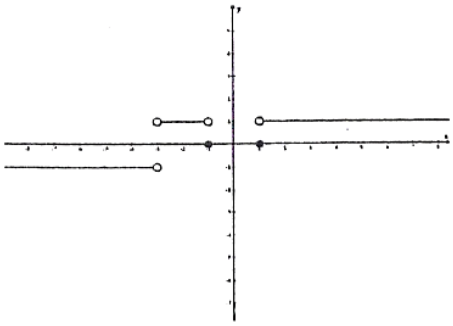
Respuesta:

$Dom\ f:\ x \in \Re - \left\{\pm 1\right\} \quad ; \quad Rgo\ f:\ y \in \Re$



3) Determine el dominio, rango y trace la gráfica de la siguiente función: $f(x)=Sgn\left(\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+3}\right)$

Respuesta:



9.15. OPERACIONES CON FUNCIONES

$$(f+g)_{(x)} = f(x)+g(x)$$
$$(f-g)_{(x)} = f(x)-g(x)$$
$$(f\times g)_{(x)} = f(x)\times g(x)$$
$$(f/g)_{(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \quad ; \quad g(x)\neq 0$$
$$(f.g)_{(x)} = f(x)\,g(x)$$

$$\boxed{Dom\,(f+g\,;\,f-g\,;\,f\times g) = Dom\,f\cap Dom\,g} \qquad \boxed{Dom\,(f/g) = (Dom\,f\cap Dom\,g)-g(x)=0}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1) Sea $f(x)=\sqrt{x}$; $g(x)=3x-5$; hallar: $f-g$; f/g, y dar sus dominios.

$Dom\,f=[0;+\infty)$; $Dom\,g=\Re \rightarrow Dom\,f\cap Dom\,g=[0;+\infty)$

a) $f-g=\sqrt{x}-3x+5$; $D(f-g)=[0;+\infty)$

b) $f/g=\dfrac{\sqrt{x}}{3x-5}$; $Dom(f/g)=[0;+\infty)-\left\{\dfrac{5}{3}\right\}$

2) Sea $f(x)=\dfrac{2x+3}{3x-2}$; $g(x)=\dfrac{4x}{3x-2}$; hallar: $f+g$; $f\times g$; f/g y dar sus dominios

$Dom\,f=\Re-\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$; $Dom\,g=\Re-\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$; $Dom\,f\cap Dom\,g=\Re-\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$

a) $f+g=\dfrac{6x+3}{3x-2}$; $Dom\,(f+g)=x/x\in\Re-\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$

b) $f\times g=\dfrac{8x^2+12x}{(3x-2)^2}$; $Dom\,(f\times g)=x/x\in\Re-\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$

c) $f/g=\dfrac{2x+3}{4x}$; $Dom(f/g)=x/x\in\Re-\left\{0\,,\,\dfrac{2}{3}\right\}$

3) Sea $f(x)=2\sqrt{1-x}$; $g(x)=\sqrt{1-9x^2}$; hallar: $f-g$; f/g y dar sus dominios

$Dom\, f=(-\infty;1]$; $Dom\, g=x\in\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]$; $Dom\ f\cap Dom\ g=x\in\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]$

a) $f-g=2\sqrt{1-x}-\sqrt{1-9x^2}$; $Dom\,(f-g)=x\in\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$

b) $f/g=\dfrac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-9x^2}}$; $Dom\,(f/g)=x\in\left]-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right[$

4) Sea $f(x)=\sqrt{x-1}$; $g(x)=\sqrt{-x+5}$; hallar: $f+g$; f/g y dar sus dominios

$Dom\, f=x\in[1;+\infty[$, $Dom\, g=x\in]-\infty;5]$; $Dom\, f\cap Dom\, g=[1;5]$

a) $f+g=\sqrt{x-1}+\sqrt{-x+5}$; $Dom\,(f+g)=x\in[1;5]$

b) $f/g=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{-x+5}}$; $Dom\,(f/g)=x\in[1;5[$

5) Sea $f(x)=3x+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$; $g(x)=3x-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$; hallar: $f+g$; $f\times g$; f/g y dar sus dominios

$Dom\, f=x\in]1;+\infty[$; $Dom\, g=x\in]1;+\infty[$; $Dom\, f\cap Dom\, g=x\in]1;+\infty[$

a) $f+g=6x$; $Dom\,(f+g)=x\in]1;+\infty[$

b) $f\times g=9x^2-\dfrac{1}{x-1}$; $Dom(f\times g)=x\in]1;+\infty[$

c) $f/g=\dfrac{3x\sqrt{x-1}+1}{3x\sqrt{x-1}-1}$; $Dom(f/g)=x\in]1;+\infty[$

6) Si $f=\{(-3,2),(0,0),(2,4),(3,-1),(4,3)\}$ y
$g=\{(2,0),(3,4),(4,7),(6,2)\}$, hallar: $f+g$; $f-g$; $f\cdot g$ y f/g

Solución:

$Dom\, f=\{-3,0,2,3,4\}$; $Dom\, g=\{2,3,4,6\}$; $Dom\, f\cap Dom\, g=\{2,3,4,\}$

a) $(f+g)_{(2)}=f(2)+g(2)=4+0=4$, $\Rightarrow(2,4)$
$(f+g)_{(3)}=f(3)+g(3)=-1+4=3$, $\Rightarrow(3,3)$
$(f+g)_{(4)}=f(4)+g(4)=3+7=10$, $\Rightarrow(4,10)$;
$f+g=\{(2,4),(3,3),(4,10)\}$

b) $(f-g)_{(2)}=f(2)-g(2)=4-0=4$, $\Rightarrow(2,4)$
$(f-g)_{(3)}=f(3)-g(3)=-1-4=-5$, $\Rightarrow(3,-5)$
$(f-g)_{(4)}=f(4)-g(4)=3-7=-4$, $\Rightarrow(4,-4)$;
$f-g=\{(2,4),(3,-5),(4,-4)\}$

c) $(f\cdot g)_{(2)} = f(2)\cdot g(2) = 4\cdot 0 = 0 \quad , \Rightarrow (2,0)$

$(f\cdot g)_{(3)} = f(3)\cdot g(3) = -1\cdot 4 = -4 \quad , \Rightarrow (3,-4)$

$(f\cdot g)_{(4)} = f(4)\cdot g(4) = 3\cdot 7 = 21 \quad , \Rightarrow (4,21) \quad ;$

$f\cdot g = \{(2,0),(3,-4),(4,21)\}$

d) $\left(\frac{f}{g}\right)_{(2)} = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{2}{0} \quad , \quad f \Rightarrow$ No existe

$\left(\frac{f}{g}\right)_{(3)} = \frac{f(3)}{g(3)} = -\frac{1}{4} \quad , \quad f \Rightarrow \left(3,-\frac{1}{4}\right)$

$\left(\frac{f}{g}\right)_{(4)} = \frac{f(4)}{g(4)} = \frac{3}{7} \quad , f \Rightarrow \left(4,\frac{3}{7}\right) \quad ; \quad \left(\frac{f}{g}\right) = \left\{\left(3,-\frac{1}{4}\right),\left(4,\frac{3}{7}\right)\right\}$

7) Hallar el dominio de la función:

$$f(x) = \sqrt{4x-x^2} + \frac{x+2}{x-3} - \frac{x-1}{\sqrt{x^2-4}}$$

Solución:

Si $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) \rightarrow Dom\, f(x) = Dom\, f_1(x) \cap Df_2(x) \cap Df_3(x)$

Dominio $f_1(x)$

$f_1(x) = \sqrt{4x-x^2} \rightarrow \exists \; f_1(x) \Leftrightarrow 4x - x^2 \geq 0$

$x^2 - 4x \leq 0$

$x(x-4) \leq 0$

$Dom\, f_1(x) = x \in [0;4]$

Dominio $f_2(x)$

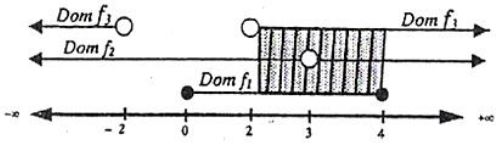
$Dom\, f_2(x) = \frac{x+2}{x-3} \rightarrow \exists \quad f_2(x) \Leftrightarrow x \neq 3 \quad , \quad Dom\, f_2(x) = x \in \Re - \{3\}$

Dominio $f_3(x)$

$Dom\, f_3(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-4}} \quad \rightarrow \exists \; Dom\, f_3(x) \Leftrightarrow x^2 - 4 > 0$

$(x+2)(x-2) > 0$

$Dom\, f_3(x) = x \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$



$Dom\, f = (2,4] - \{3\}$

8) Sean las funciones f y g cuyas reglas de correspondencia son:

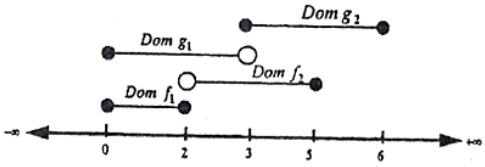
$$f(x)=\begin{cases} 3x-2 & \text{si } x\in[0,2] \\ 1-x & \text{si } x\in\,]2,5] \end{cases} \quad ; \quad g(x)=\begin{cases} x^2, & \text{si } 0\le x<3 \\ 4\ , & \text{si } 3\le x\le 6 \end{cases}$$

Hallar $f+g$ y su rango

Solución:

Tanto f como g son funciones seccionadas:

$$f_1(x)=3x-2 \quad \text{si} \quad 0\le x\le 2 \quad ; \quad g_1(x)=x^2, \quad \text{si } 0\le x<3$$
$$f_2(x)=1-x \quad \text{si} \quad 2<x\le 5 \quad ; \quad g_2(x)=4\ , \quad \text{si } 3\le x\le 6$$



$$f+g=\begin{cases} x^2+3x-2\ , & x\in[0,2] \\ x^2-x+1\ , & x\in(2,3) \\ 5-x\ , & x\in[3,5] \end{cases}$$

$Rgo\, f = y\in[-2,8]$

9) Sean las funciones f y g definidas de la siguiente manera:

$$f(x)=\sqrt{x^2-16} \qquad \text{y} \qquad g(x)=2-|x-4| \ ; \ x\in\,]-6,8]$$

Hallar $f+g$ y f/g

Solución:

Determinemos los dominios de cada función:

$$f(x)=\sqrt{x^2-16} \rightarrow \exists \quad f(x)\Leftrightarrow x^2-16\ge 0$$
$$(x+4)(x-4)\ge 0$$

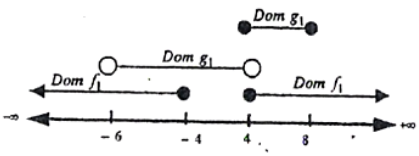
$$Dom\, f = x\in\,]-\infty,-4]\cup[4,+\infty[$$

$$|x-4|=\begin{cases} x-4 & \text{si } x-4\ge 0\ ,\ x\ge 4 \\ -x+4 & \text{si } x-4<0\ ,\ x<4 \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} 2-(x-4) & \text{si } x\ge 4 \\ 2-(-x+4) & \text{si } x<4 \end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases} -x+6 & \text{si } x\ge 4 \\ (x-2) & \text{si } x<4 \end{cases}$$

Dado que en la función g, el punto $x=4\in(-6,8]$, debemos desdoblar su dominio en: $(-6,4]\cup[4,8)$ y volver a definir la función del modo siguiente

$$g(x)=\begin{cases} x-2 & \text{si } -6<x<4 \\ -x+6 & \text{si } 4\le x\le 8 \end{cases}$$



$$(f+g)(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-16}+x-2\ , & \text{si } -6<x<-4\\ \sqrt{x^2-16}-x+6, & \text{si } 4\le x\le 8\end{cases}$$

$$(f/g)(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{x-2}, & \text{si } x\in\,]-6,-4[\\ \dfrac{\sqrt{x^2-16}}{-x+6}\ , & \text{si } x\in[4,\,8]-\{6\}\end{cases}$$

10) Sean las funciones reales definidas por:

$$f(x)=|x-3|+|x+1| \quad \text{y} \quad g(x)=\begin{cases}3x-1\ , & \text{si } x<1\\ 2-x\ , & \text{si } x\ge 1\end{cases},\ \textit{hallar}\ (f+g)(x)$$

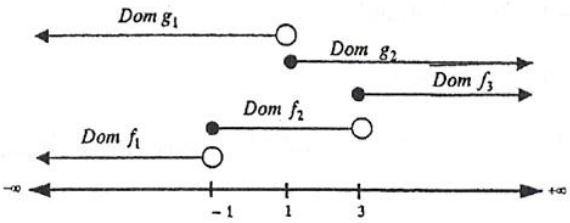
Solución:

Determinemos los signos de $f(x)$ para los puntos críticos $x=-1$ y $x=3$

	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$x-3$	-		-	0	+
$x+1$	-	0	+		+

	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$\lvert x-3\rvert$	$-x+3$	$-x+3$	$x-3$	
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$	
$f(x)=\lvert x-3\rvert+\lvert x+1\rvert$	$-2x+2$	4	$2x-2$	

$$f(x)=\begin{cases}-2x+2\ , & \text{si } x<-1\\ 4\ , & \text{si } -1\le x<3\\ 2x-2\ , & \text{si } x\ge 3\end{cases}\quad ;\quad g(x)=\begin{cases}3x-1\ , & \text{si } x<1\\ 2-x\ , & \text{si } x\ge 1\end{cases}$$



$$(f+g)_{(x)}=\begin{cases}x+1\ , & si\quad x<-1\\ 3x+3\ , & si\quad -1\le x<1\\ -x+6\ , & si\quad 1\le x<3\\ x\ , & si\quad x\ge 3\end{cases}$$

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

1) Sean $f=\{(4,1);(6,5);(5,4);(8,3);(9,2)\}$ y $g=\{(8,-5);(2,2);(5,-4)\}$

Calcular $f+g,\ f-g,\ f\times g,\ f/g$ con sus respectivos dominios y recorridos.

2) Calcular $f+g$ y f/g dadas las funciones:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1; & Si\ \ |x|\le 2 \\ x; & Si\ \ x>2 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} x-1; & Si\ \ 0\le x\le 3 \\ x+1; & Si\ \ x<0 \end{cases}$$

EJERCICIOS DE REFUERZO

1) Sea $f(x)=\sqrt{-x+3}$ y $g(x)=\sqrt{x+5}$, hallar $f+g$ y su dominio.

2) Si $f=\{(1,4),(2,5),(3,6),(4,-6),(5,-5)\}$ y
$g=\{(0,8),(1,3),(2,0),(3,7),(4,6),(5,10)\}$, hallar: f/g

3) Dadas las funciones:

$$f(x)=\begin{cases} x-3, & si\ \ x\in(-4;8] \\ x^2+2x, & si\ \ x\in(8;15] \end{cases} \quad ; \quad g(x)=\begin{cases} -x+4, & si\ x\in[4;12) \\ 1, & si\ x\in[12;16) \end{cases}$$

Calcular $(f+g)_{(10)}$

4) Sea $f(x)=\begin{cases} |x^2-4| & ;\ -6\le x\le 0 \\ 2 & ;\ x\le 2 \end{cases}$ $\quad g(x)=\begin{cases} x+2 & ;\ x\ge 2 \\ 1 & ;\ x<-2 \end{cases}$, hallar f/g

5) Analizar y graficar $y=\dfrac{2x}{x-4}-\dfrac{x}{x+5}$. A partir del gráfico de $y=f(x)$, graficar $y=|f(x)|$

Respuestas:

1) $f+g=\sqrt{-x+3}+\sqrt{x+5}$; $Dom(f+g): x\in[-5,3]$

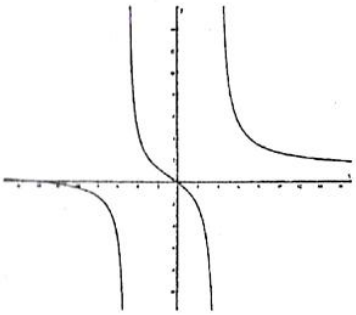
2) $f/g=\{(1,4/3),(3,6/7),(4,-1),(5,-1/2)\}$

3) $f+g=\begin{cases} 1 & ;\ 4\le x\le 8 \\ 114 & ;\ 8<x<12 \\ 121 & ;\ 12\le x\le 15 \end{cases}$ $\qquad (f+g)_{(10)}=114$

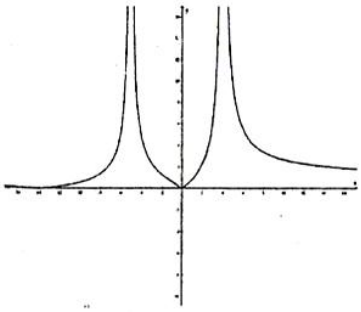
4) $(f/g)=\begin{cases} x^2-4 & ;\ -6\le x\le -2 \\ 2-x & ;\ -2<x\le 0 \\ \dfrac{2}{x+2} & ;\ x\ge 2 \end{cases}$

5)

$y = f(x)$



$y = |f(x)|$

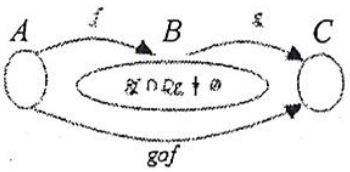


9.16. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

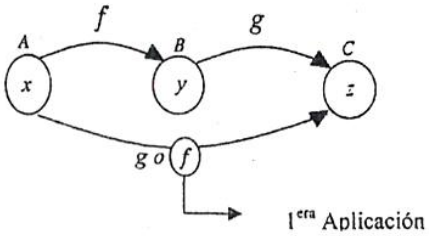
Dadas las funciones f y g, definidas como:

$f: A \to B$ y $g: B \to C$, tales que verifique que $Rgo\, f \cap Dom\, g \neq \phi$, diremos que la función compuesta de f y g, que se denotará "gof", es una nueva función que relaciona A y C, es decir que, a partir de un elemento x de A se obtiene un elemento $g[f(x)]$ de C.

$$(gof): A \to C / (gof)_{(x)} = g[f(x)]$$



$f: A \to B$; $g: B \to C$; $gof: A \to C$



$f(x) = y$
$g(y) = z$
$(gof)_{(x)} = g[f(x)] = g(y) = z$

$$Dom(gof) = \{x / x \in Dom\, f \ \wedge \ f(x) \in Dom\, g\}$$

Dadas dos funciones f y g:

gof es el conjunto de parejas de la forma $(x, g[f(x)])$. Considerando el gráfico anterior si f y g son procesos o aplicaciones entonces $h = gof$ es el resultado del proceso siguiente:

1) h recibe un elemento x y lo introduce en el proceso f para obtener $y = f(x)$

2) h introduce a y en el proceso g para obtener $g(y) = g[f(x)]$

3) En resumen, h a transformado a x en $h(x) = g[f(x)]$

$$Dom(gof) = \{x / x \in Dom\, f \ \wedge \ f(x) \in Dom\, g\} \quad ; \quad Rgo\, f \subseteq Dom\, g$$
$$Dom(fog) = \{x / x \in Dom\, g \ \wedge \ g(x) \in Dom\, f\} \quad ; \quad Rgo\, g \subseteq Dom\, f$$

9.16.1. PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN COMPUESTA

1) $hogof = (hog)of = ho(gof)$
2) $fog \neq gof$
3) $(fog)^{-1} = g^{-1} o f^{-1}$
4) $fof^{-1} = f^{-1} o f = I = x$
5) $I o f = f o I = f$
6) $(f^{-1})^{-1} = f$
7) $fohog = f[g(h)] = f[goh]$

EJERCICIOS RESUELTOS

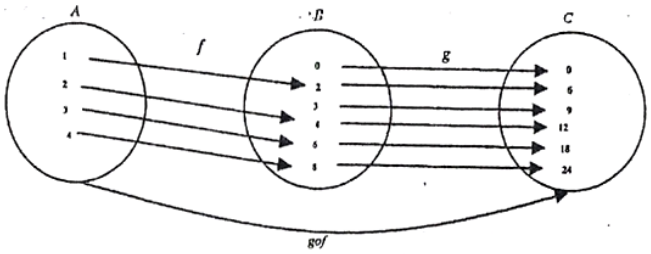
1) Sean los conjuntos $A = \{1,2,3,4\}$; $B = \{0,2,3,4,6,8\}$; $C = \{0,6,9,12,18,24\}$ y las funciones: $f: A \to B \,/\, f(x) = 2x$, $g: B \to C \,/\, g(x) = 3x$, determinar gof y fog

Solución:

$f = \{(1,2),(2,4),(3,6),(4,8)\}$; $g = \{(0,0),(2,6),(3,9),(4,12),(6,18),(8,24)\}$

a) Para determinar gof tenemos:

$Rgo\, f = \{2,4,6,8\}$; $Dom\, g = \{0,2,3,4,6,8\}$; $Rgo\, f \cap Dom\, g \neq \phi \Rightarrow$ Si existe la función "gof"



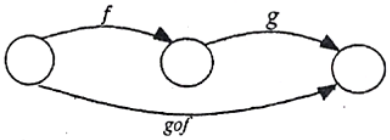
$gof = \{(1,6),(2,12),(3,18),(4,24)\}$

b) Para determinar fog tenemos:

$Rgog = \{0,6,9,12,18,24\}$; $Dom\, f = \{1,2,3,4\}$; Como: $Rgo\, g \cap Dom\, f = \phi \Rightarrow$ No existe la función "fog"

2) Sean: $f(x) = \sqrt{x+2} - 1$ y $g(x) = \dfrac{2}{x+3}$

Hallar: $(gof)_{(x)}$ y $(gof)_{(2)}$



$Dom\, f = x \in [-2;+\infty)$ $\qquad$ $Dom\, g = x \in \Re - \{-3\}$

$Rgo\, f = y \in [-1;+\infty)$

Para que exista la función $(gof)(x)$ debe cumplirse que: $Rgo\, f \cap Dom\, g \neq \phi$; condición que si se cumple.

$$(gof)_{(x)} = g[f(x)]$$
$$= g\left[\sqrt{x+2}-1\right] = \frac{2}{(\sqrt{x+2}-1)+3} = \frac{2}{\sqrt{x+2}+2}$$
$$(gof)_{(2)} = \frac{2}{\sqrt{2+2}+2} = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}$$

3) Sea $f\left(x+\frac{2}{5}\right) = 3x-2$, determinar $f(-5)$

Para poder determinar $f(-5)$ debemos conocer $f(x)$ para lo cual en estos casos se procede de la siguiente forma:

$$f\left(x+\frac{2}{5}\right) = 3x-2$$

Si: $x+\frac{2}{5} = m \Rightarrow x = m-\frac{2}{5}$, reemplazando valores tenemos:

$$f(m) = 3\left(m-\frac{2}{5}\right)-2 = 3m-\frac{6}{5}-2 = 3m-\frac{16}{5}$$
$$\therefore \quad f(x) = 3x-\frac{16}{5} \quad \Rightarrow \quad f(-5) = 3(-5)-\frac{16}{5} = -\frac{91}{5}$$

4) Si $(fog)_{(x)} = 2x^2-6x+7$ y $f(x) = 2x+3$, determinar $g(x)$

$(fog)_{(x)} = 2x^2-6x+7$

$f[g(x)] = 2x^2-6x+7$; Si $m = g(x)$

(1) $f(m) = 2x^2-6x+7$ Como: $f(x) = 2x+3 \Rightarrow$ (2) $f(m) = 2m+3$

$$(1) = (2)$$

$2x^2-6x+7 = 2m+3$; $2m = 2x^2-6x+7-3$

$m = \frac{2x^2-6x+4}{2} = x^2-3x+2$; Como $m = g(x)$, remplazando tenemos: $g(x) = x^2-3x+2$

5) Sean las funciones: $f(x) = \sqrt{3-x}$ y $g(x) = x^2+16$, hallar $(fog)_{(x)}$

Solución:

$\exists (fog)_{(x)} \Leftrightarrow Rgo\, g \cap Dom\, f \neq \phi$

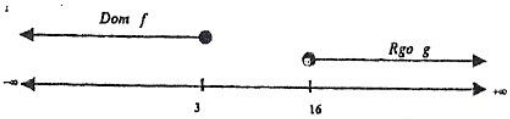
$f_{(x)} = \sqrt{3-x} \rightarrow \exists\, f_{(x)} \Leftrightarrow 3-x \geq 0$

$x-3 \leq 0$; $x \leq 3$; $Dom\, f = x \in]-\infty; 3]$

Rango de $g(x)$

$y = x^2 + 16$

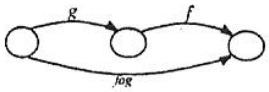
$x^2 = y - 16 \quad , \quad x = \sqrt{y-16} \rightarrow y - 16 \geq 0 \quad ; \quad y \geq 16 \quad ; \quad Rgog = y \in [16; +\infty[$



Como $Rgo\,g \cap Dom\,f = \phi$ entonces no existe $(fog)_{(x)}$

6) Sean las funciones: $f(x) = x\sqrt{x-1}$ y $g(x) = x^2$, *hallar* "*fog*" y su dominio

Solución:



$Rgo\,g \cap Dom\,f = \phi \quad \Rightarrow \exists$ "*fog*"

Rango de $g_{(x)}$: $y = x^2 \quad ; \quad x = \sqrt{y} \quad ; \quad y \geq 0 \quad \Rightarrow \quad Rgo\,g = y \in [0, +\infty)$

$Domf_{(x)} = x\sqrt{x-1} \rightarrow \exists f_{(x)} \Leftrightarrow x - 1 \geq 0$

$x \geq 1 \; ; \quad Domf = x \in [1, +\infty[$

$Rgo\,g \cap Dom\,f \neq \phi \qquad \therefore$ Si existe "*fog*"

$(fog)_{(x)} = f[g_{(x)}] = = f[x^2]$

$(fog)_{(x)} = x^2\sqrt{x^2 - 1}$

$Dom(fog)_{(x)} = \{x / x \in Dom\,g \wedge g(x) \in Dom\,f\}$

$x \in \Re \cap x^2 \in [1, +\infty[$

$x \in \Re \cap x^2 \geq 1$

$x \in \Re \cap x^2 - 1 \geq 0$

$x \in \Re \cap (x+1)(x-1) \geq 0$

$x \in \Re \cap [x \leq -1 \;\cup\; x \geq 1]$

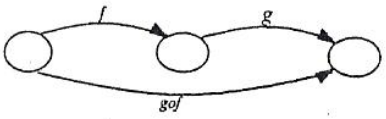
$Dom(fog)_{(x)} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

7) Sean:

$$f_{(x)} = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{si } x > 1 \\ x \;, & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \;, & \text{si } x < -1 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g_{(x)} = 2x^3$$

Hallar "*gof*" y su dominio

Solución:



$g_{(x)} = 2x^3 \qquad Dom\,g = x \in \Re$

$Dom\,(gof)_{(x)} = \{x / x \in Dom\, f \;\wedge\; f(x) \in Dom\, g\}$

a) $Dom(gof_1)_{(x)} = \{x > 1 \;\wedge\; x^2 - 1 \in \Re\}$

$x > 1 \;\cap\; x < -1 \cup x > 1 \quad ; \quad Dom(gof_1)_{(x)} = x > 1 \quad \Rightarrow \quad$ *si existe "* gof_1 *"*

$(gof_1)_{(x)} = g[f_{1(x)}] = g[x^2 - 1] = 2(x^2 - 1)^3$

b) $Dom(gof_2)_{(x)} = \{-1 \le x \le 1 \;\wedge\; x \in \Re\}$

$[-1, 1] \;\cap\; x \in \Re \quad ; \quad Dom(gof_2)_{(x)} = [-1, 1] \quad \Rightarrow \quad$ *si existe "* gof_2 *"*

$(gof_2)_{(x)} = g[f_{2(x)}] = g[x] = 2x^3$

c) $Dom(gof_3)_{(x)} = \{x < -1 \;\wedge\; -1 \in \Re\}$

$x < -1 \;\cap\; x \in \Re \quad ; \quad Dom(gof_3)_{(x)} = x < -1 \quad \Rightarrow \quad$ *si existe "* gof_3 *"*

$(gof_3)_{(x)} = g[f_{3(x)}] = g[-1] = -2$

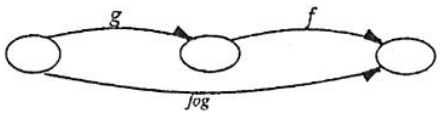
$$(gof)_{(x)} = \begin{cases} 2(x^2 - 1)^3 & , si\; x > 1 \\ 2x^3 & , -1 \le x \le 1 \\ -2 & , si\; x < -1 \end{cases} \qquad Dom(gof) = x \in \Re$$

8) Sean:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , x < -1 \\ x + 1 & , x \ge 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2x - 1 & , si\; x < 0 \\ \sqrt{x} & , si\; x \ge 0 \end{cases}$$

Hallar " *fog* " y su dominio.

Solución:



$Dom(fog)_{(x)} = \{x / x \in Dom\, g \wedge g_{(x)} \in Dom\, f\}$

a) $Dom\,(f_1 o g_1)_{(x)} = \{\, x < 0 \;\cap\; 2x - 1 < -1 \}$

$x < 0 \;\cap\; 2x < 0$

$x < 0 \;\cap\; x < 0 \quad ; \quad Dom(f_1 o g_1)_{(x)} = x < 0 \quad \Rightarrow \quad$ *Si existe "* $f_1 o g_1$ *"*

$(f_1 o g_1)(x) = f_1[g_{1(x)}] = f_1[2x - 1] = (2x - 1)^2 - 1 = 4x^2 - 4x$

b) $Dom(f_1 o g_2)_{(x)} = \{x \ge 0 \cap \sqrt{x} < -1\}$

$x \ge 0 \quad \cap \quad \phi$

$\phi \quad \Rightarrow \quad$ *No existe "* $f_1 o g_2$ *"*

c) $Dom(f_2 o g_1)_{(x)} = \{x < 0 \cap 2x - 1 \ge 1\}$

$x < 0 \cap x \ge 1$

$\phi \quad \Rightarrow \quad$ *No existe "* $f_2 o g_1$ *"*

d) $Dom(f_2 o g_2)_{(x)} = \left\{ x \geq 0 \cap \sqrt{x} \geq 1 \right\}$

$$x \geq 0 \ \cap \ x \geq 1 \quad ; \quad Dom(f_2 o g_2): x \geq 1 \quad \Rightarrow \quad Si\ existe\ "f_2 o g_2"$$

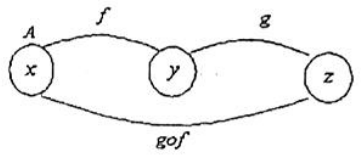
$$(f_2 o g_2)(x) = f_2\left[g_{2(x)}\right] = f_2\left[\sqrt{x}\right] = \sqrt{x} + 1$$

$$(fog)_{(x)} = \begin{cases} 4x^2 - 4x & , si \ \ x < 0 \\ \sqrt{x} + 1 & , si \ \ x \geq 1 \end{cases}$$

$$Dom(fog)_{(x)} = \left]-\infty\,;0\right[\cup \left[1\,;+\infty\right[$$

9.17. DESCOMPONER EN LAS DOS FUNCIONES SIMPLES:

Sea: $h(x) = (gof)(x)$



$y = f(x) \quad \wedge \quad z = g(x)$

$(gof)(x) \quad = \quad g[f(x)]$

$f(x)$ interna ; $g(x)$ externa

Ejemplos:

1) $h(x) = Sen^2 x$

$y = f(x) = Sen\, x \quad \wedge \quad z = g(y) = y^2$

$(gof)(x) \ = \ g[Senx] \ = \ [Senx]^2 \ = \ Sen^2 x$

2) $h(x) = \sqrt{x+2}$

$y = f(x) = x + 2 \quad \wedge \quad z = g(y) = \sqrt{y}$

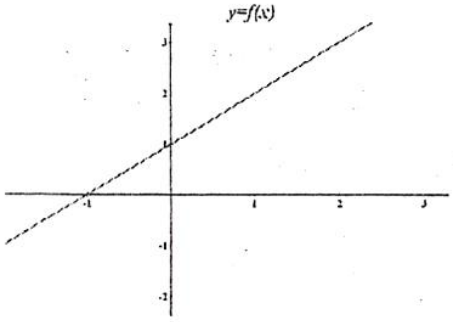
$(gof)(x) \ = \ g[x+2] \ = \ \sqrt{x+2}$

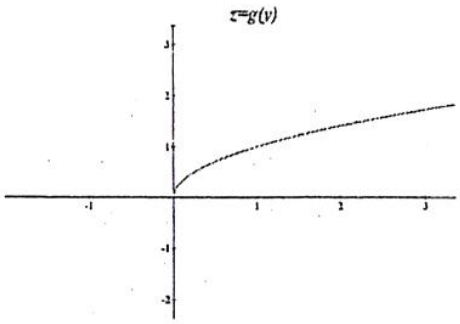
9.17.1 MONOTONÍA DE FUNCIONES COMPUESTAS

Determinar la monotonía de las siguientes funciones si $h(x) = (gof)_{(x)}$

1) $h(x) = \sqrt{x+1}$

$(gof)_{(x)} = g[f(x)]$ $\rightarrow$ $y = f(x) = x + 1$; $z = g(y) = \sqrt{y}$





$\forall x \in \Re$; f *es* ↗

$\forall y \geq 0$; g *es* ↗

Pero $y = x+1 \Rightarrow x+1 \geq 0$

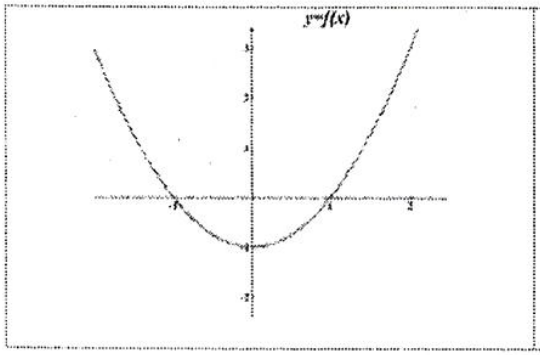
$x \geq -1$; g *es* ↗

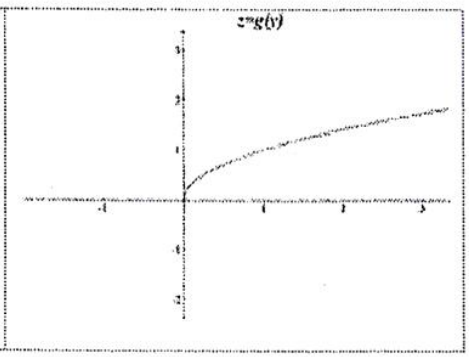
	$-\infty$	-1	$+\infty$
f		↗	
g		↗	
gof		↗	

$\forall x \geq -1$; h *es* ↗

2) $h(x) = \sqrt{x^2-1}$

$(gof)_{(x)} = g[f(x)]$ → $y = f(x) = x^2 - 1$; $z = g(y) = \sqrt{y}$





$f(x) = x^2 - 1$

$Pmin: \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow Pmin: (0, -1)$

$\forall\, x < 0$; f *es* ↘ ; $\forall\, x \geq 0$; f *es* ↗

$\forall y \geq 0$; g *es* ↗

Pero $x^2 \geq 1$, $|x| \geq 1$

$y = x^2 - 1 \Rightarrow x^2 - 1 \geq 0$

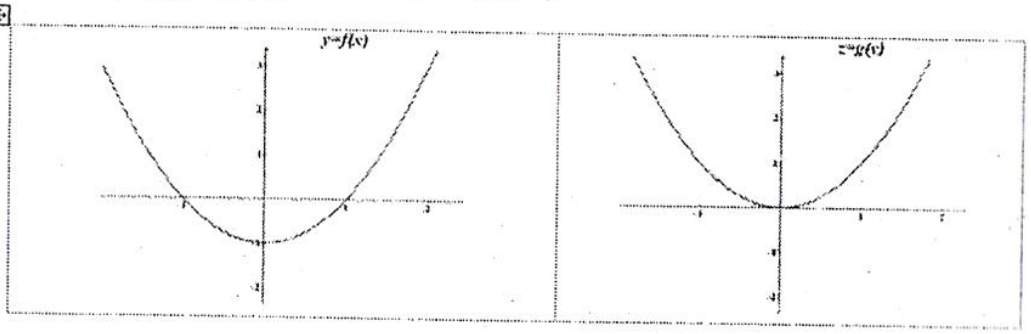
$\forall$: $x \geq 1 \vee x \leq -1$ g *es* ↗

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f	↘		↗	
g	↗		↗	
gof	↘		↗	

$\forall\, x \le -1$; h es ↘ ; $\forall\, x \ge 1$; h es ↗

3) $h(x) = |x^2 - 1|^2$

$(gof)_{(x)} = g[f(x)]$ → $y = f(x) = x^2 - 1$; $z = g(y) = y^2$



$\forall\, x < 0$; f es ↘
$\forall\, x \ge 0$; f es ↗

$\forall\, y < 0$; g es ↘
$\forall\, y \ge 0$; g es ↗

$y < 0$; g es ↘ $\qquad$ $y \ge 0$; g es ↗

$x^2 - 1 < 0$ $\qquad$ $x^2 - 1 \ge 0$

$x^2 < 1$ $\qquad$ $x^2 \ge 1$

$|x| < 1$ $\qquad$ $|x| \ge 1$

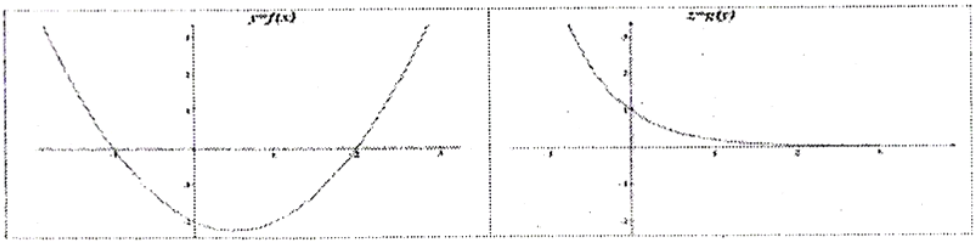
$\forall : -1 < x < 1$ g es ↘ $\qquad$ $\forall : x \ge 1 \vee x \le -1$ g es ↗

	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f	↘	↘	↗	↗	
g	↗	↘	↘	↗	
gof	↘	↗	↘	↗	

$\forall\, x \in]-\infty, -1[\cup [0, 1[$ h es ↘ $\qquad$ $\forall \in [-1, 0[\cup [1, +\infty[$ h es ↗

4) $h(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-x-2}$

$(gof)_{(x)} = g[f(x)]$ $\rightarrow$ $y = f(x) = x^2 - x - 2$; $z = g(y) = \left(\frac{1}{5}\right)^y$



$\forall\, y \in \Re$; g es $\searrow$

$\forall\, x \in \Re$; g es $\searrow$

$f(x) = x^2 - x - 2$

$Pmin: \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow Pmin: \left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$

$\forall\, x < \frac{1}{2}$; f es $\searrow$ $\qquad$ $\forall\, x \geq \frac{1}{2}$; f es $\nearrow$

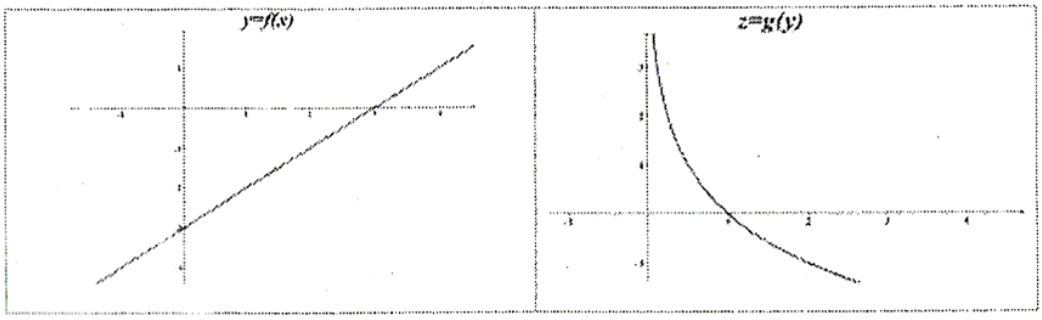
	$-\infty$	$\frac{1}{2}$ $\quad$ $+\infty$
f	$\searrow$	$\nearrow$
g	$\searrow$	$\searrow$
gof	$\nearrow$	$\searrow$

$\forall\, x < \frac{1}{2}$; h es $\searrow$ $\qquad$ $\forall\, x \geq \frac{1}{2}$; h es $\nearrow$

;

5) $h(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-3)$

$(gof)_{(x)} = g[f(x)]$ $\rightarrow$ $y = f(x) = x - 3$; $z = g(y) = \log_{\frac{1}{2}} y$



$\forall x \in \Re$; f es $\nearrow$ $\qquad$ $\forall y > 0$; g es $\searrow$

$y = x - 3 \Rightarrow x > 3$, g es $\searrow$

Pero

	$-\infty$	3	$+\infty$
f		$\nearrow$	
g		$\searrow$	
gof		$\searrow$	

$\forall x > 3$; h es $\searrow$

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

1) Determine el dominio y el recorrido de $(f\ o\ g)$ y $(g\ o\ f)$ si:

$f = \{(0,1);(1,2);(2,3);(4,3);(5,2)\}$; $g = \{(6,7);(5,4);(4,3);(2,4);(1,4);(0,7)\}$

2) Sabiendo que $g(x+2) = 6x+1$ y además $g[f(x)] = 12x - 17$ .Calcular $f(15)$

3) Dadas las funciones:

$$g(x) = \begin{cases} x^2; & Si\ \ x<0 \\ 1-x; & Si\ \ x \geq 0 \end{cases} \ ; \ f(x) = \begin{cases} x+2; & Si\ \ x \leq 1 \\ x-1; & Si\ \ x>1 \end{cases} \quad \text{hallar } f\,o\,g$$

4) Si $g(2-x) = \sqrt{x-1}$ y $(g\ o\ f)_{(x)} = 2x-1$; hallar $f(x)$

Respuestas:

1) $fog = \{(5,3),(2,3),(1,3)\}$ $\qquad$ $gof = \{(0,4),(1,4),(5,4)\}$

2) 29 $\qquad$ 3) $fog = \begin{cases} x^2+2 & , \ si \ \ -1 \leq x < 0 \\ x^2-1 & , \ si \ \ x < -1 \\ 3-x & , \ si \ \ x \geq 0 \end{cases}$ $\qquad$ 4) $f(x) = 4x - 4x^2$

EJERCICIOS DE REFUERZO

1) Sean $f = \{(2,7),(3,6),(4,8),(5,9)\}$; $g = \{(6,5),(7,3),(8,4),(9,2)\}$. Hallar fog y gof

2) Sean: $f(x) = \sqrt{x^2-4}$ y $g = \{(-1,-2\sqrt{2});(2,-1);(4,\sqrt{5});(3,4);(7,\sqrt{5})\}$, hallar $f\,o\,g$

3) Si $f(x) = 3x+2$; $x \in (-\infty\,;3)$ y $g(x) = \begin{cases} 2x; & Si\ x<0 \\ -3x; & Si\ x \geq 1 \end{cases}$. Determinar $(fog)_{(x)}$, dominio y rango.

4) Sean: $f(x) = 3x-2$; $x>0$ y $g(x) = x^2$; $x \in]-3,5[$, hallar $f\,o\,g$ y $g\,o\,f$ y sus dominios.

5) Sean: $f(x)=3x+2$; $x<3$ y $g(x)=\begin{cases} 2x & , \ si \ \ x<0 \\ -3x & , \ si \ \ x\geq 1 \end{cases}$, hallar $f\,o\,g$

6) Dadas las funciones:

$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & , \ si \ \ x\leq -1 \\ x+2 & , \ si \ \ x\geq 2 \end{cases}$; $g(x)=\begin{cases} x & , \ si \ \ x\leq 0 \\ 2x & , \ si \ \ x>0 \end{cases}$, hallar $(gof)_{(x)}$ y su dominio.

7) Dadas las funciones:

$f(x)=\begin{cases} x \ , & si \ \ x\leq 1 \\ -1 \ , & si \ \ x>1 \end{cases}$; $g(x)=\begin{cases} x^2-4 \ , & si \ \ x\in[0;4] \\ 0 \ , & si \ \ x\in[4;7] \end{cases}$, hallar $(fog)_{(x)}$ y su dominio.

8) Dadas las funciones:

$f(x)=\begin{cases} 1 & , \ si \ \ |x|\leq 1 \\ 0 & , \ si \ \ |x|>1 \end{cases}$; $g(x)=\begin{cases} 2-x & , \ si \ \ |x|\leq 2 \\ 2 & , \ si \ \ |x|>2 \end{cases}$, hallar $(gof)_{(x)}$ y su dominio.

9) Dadas las funciones:

$f(x)=\begin{cases} x & , \ si \ \ x<-1 \\ x^3 & , \ si \ \ -1\leq x\leq 1 \\ 2x-1 \ , & si \ \ x>1 \end{cases}$; $g(x)=\begin{cases} 1-x^2 \ , & si \ \ x<0 \\ x^2-1 \ , & si \ \ x\geq 0 \end{cases}$, hallar $(gof)_{(x)}$ y su dominio.

10) Sean las funciones f y g definidas por:

$f(x)=\begin{cases} \left|\dfrac{x}{1-x}\right| & , \ si \ \ x<-2 \\ (x+2)^2 & , \ si \ \ -2\leq x\leq -1 \end{cases}$; $g(x)=\begin{cases} \dfrac{|x+6|}{|x+3|-3} & , \ si \ \ -4<x<-1 \\ \sqrt{5-x}-2 & , \ si \ \ -1<x<5 \end{cases}$, hallar $(fog)_{(x)}$

11) Dadas las funciones:

$f(x)=\begin{cases} x^2 & , \ si \ \ x<1 \\ -x^3 & , \ si \ \ x\geq 2 \end{cases}$; $g(x)=\begin{cases} -x \ , & si \ \ x<2 \\ 2x \ , & si \ \ x\geq 4 \end{cases}$, hallar $(g\,o\,f)_{(x)}$

12) Sean las funciones: $f(x)=3x^2+10x-a-2$ y $g(x-2)=3-|x-6|$, hallar el valor de "a" tal que: $f[g(-1)]=-3a$

Respuestas:

1) $fog=\{(6,9),(7,6),(8,8),(9,7)\}$ $\quad gof=\{(2,3),(3,5),(4,4),(5,2)\}$

2) $fog=\{(-1,2),(4,1),(3,2\sqrt{3}),(7,1)\}$

3) $(fog)(x)=\begin{cases} 6x+2 \ , & si \ \ x<0 \\ -9x+2 \ , & si \ \ x\geq 1 \end{cases}$

4) $fog=3x^2-2$, $Dom(fog)(x): x\in\,]-3,5[-\{0\}$

$gof=9x^2-12x+4$, $Dom(gof)(x): x\in\left]0,\dfrac{7}{3}\right[$

5) $(fog)(x)=\begin{cases} 6x+2 & , \ si \ \ x<0 \\ -9x+2 \ , & si \ \ x\geq 1 \end{cases}$

6) $(fog)(x)=\begin{cases} 2x-1 \ , & si \ \ x\leq -1 \\ 2x+4 \ , & si \ \ x>-2 \end{cases}$ $\quad Dom(gof)_{(x)}: x\in\Re$

7) $(fog)(x)=\begin{cases} x^2-4 & , \ si \ \ 0\le x\le\sqrt{5} \\ 0 & , \ si \ \ 4<x\le 7 \\ 1 & , \ si \ \ \sqrt{5}<x\le 4 \end{cases}$

8) $(gof)(x)=\begin{cases} 1 \ , & si \ \ -1\le x\le 1 \\ 2 \ , & si \ \ x<-1 \ \vee \ x>1 \end{cases}$

9) $(gof)(x)=\begin{cases} 1-x^2 & , \ x<-1 \\ 1-x^6 & , \ -1\le x<0 \\ x^6-1 & , \ 0\le x\le 1 \\ 4x^2-4x & , \ x>1 \end{cases}$

10) $fog=\begin{cases} 1 & , \ -4<x<-3 \\ \dfrac{x+6}{6} & , \ -2<x\le -1 \\ \left(\dfrac{3x+6}{x}\right)^2 & , \ -3\le x\le -1 \\ 5-x & , \ 1\le x\le 5 \end{cases}$

11) $(gof)(x)=\begin{cases} -x^2 & , \ si \ \ -\sqrt{2}<x<1 \\ x^3 & , \ si \ \ 2\le x<\infty \\ 2x^2 & , \ si \ \ x\le -2 \end{cases}$

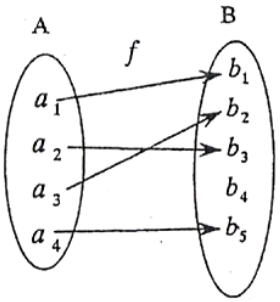
12) $a=5$

9.18. FUNCIÓN INYECTIVA

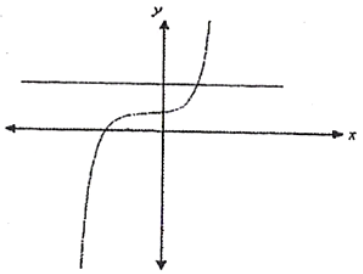
Una función es inyectiva si **"para elementos diferentes del dominio siempre le corresponde imágenes diferentes".**

Desde el punto de vista matemático (como una forma de evadir el símbolo $\neq$ en la definición) esta afirmación es equivalente a lo siguiente:

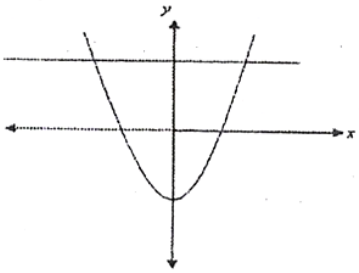
$$\boxed{f \ es \ inyectiva \Leftrightarrow (\forall x\in Dom\, f)\left[f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow(x_1)=(x_2)\right]}$$



GRÁFICAMENTE.- Cualquier recta horizontal que corte a la gráfica lo deberá hacer en un solo punto



Inyectiva



No es inyectiva

ANALÍTICAMENTE.- Partimos de dos imágenes que sean iguales $f(x_1)=f(x_2)$ y si logramos establecer que $x_1=x_2$ habremos demostrado que es inyectiva; o también $\boxed{Si: \ f(a)=f(b) \ \Rightarrow \ a=b}$

Ejemplos:

1) Determinar si la función $f:\Re \to \Re / f(x) = \dfrac{x-2}{3}$, es inyectiva

Partimos de: $f(x_1) = f(x_2)$

$\dfrac{x_1-2}{3} = \dfrac{x_2-2}{3}$; $x_1 - 2 = x_2 - 2$; $x_1 = x_2$ Es inyectiva.

2) Determinar si la función $f:\Re \to \Re / f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$, es inyectiva

La función $y = \dfrac{2x+1}{x-3}$ es equivalente a: $y = 2 + \dfrac{7}{x-3}$

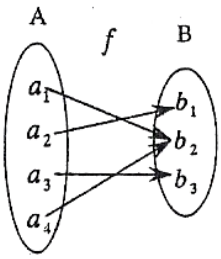
Partimos de: $f(x_1) = f(x_2)$

$2 + \dfrac{7}{x_1-3} = 2 + \dfrac{7}{x_2-3}$; $\dfrac{7}{x_1-3} = \dfrac{7}{x_2-3}$; $x_1 - 3 = x_2 - 3$; $x_1 = x_2$ Es inyectiva

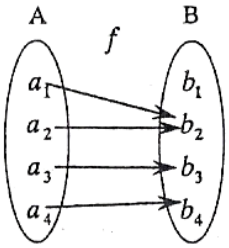
9.19. FUNCIÓN SOBREYECTIVA

Una función es sobreyectiva cuando **"todos los elementos del conjunto de llegada (B) son imagen de algún elemento del conjunto de partida (A)"**. Esto equivale a establecer que son sobreyectivas las funciones cuyo rango es igual al conjunto de llegada .por lo tanto:

f es sobreyectiva $\Leftrightarrow$ $\forall y \in B, \exists x \in A / f(x) = y$

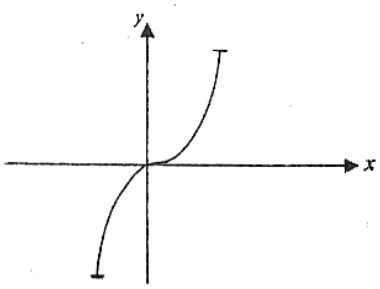


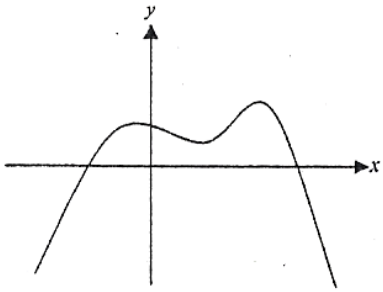
SOBREYECTIVA



NO ES SOBREYECTIVA

GRÁFICAMENTE.- Se puede afirmar que todas las funciones cuya gráfica abarque la totalidad del eje *y* corresponde a funciones sobreyectivas.





ANALÍTICAMENTE.- Si se cumple que: $\boxed{CLL = Rgo\ f}$

No es sobreyectiva

Ejemplos:

1) Determinar si la función $f:\Re \to \Re \,/\, f(x)=x^3$ es sobreyectiva.

Primero colocamos la imagen en función de la preimagen.

$$y=x^3$$

$$x=\sqrt[3]{y} \qquad , \qquad Rgof: y\in\Re$$

Como la raíz es de índice impar, no existe restricción para cualquier valor de y, lo que significa que el rango de esta función es igual al conjunto de los números reales $\Re$, por lo tanto: **Rango = Conjunto de llegada**, es sobreyectiva.

2) Determinar si la función $f:\Re \to \Re \,/\, f(x)=x^2$ es sobreyectiva.

Al colocar la imagen en la función de la preimagen tenemos:

$$y=x^2$$

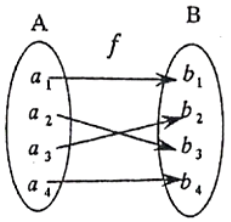
$$x=\sqrt{y} \qquad , \quad \text{C.E:} \quad y\geq 0 \qquad , \qquad Rgof: y\in[0;+\infty[$$

Como la raíz es de índice par, los únicos valores que puede tomar " y " son valores positivos o nulos, lo que significa que el rango de esta función es: $Rgo\, f=\Re^+\cup\{0\}$, por lo que el conjunto de llegada no es igual al rango y la función no es sobreyectiva.

9.20. FUNCIÓN BIYECTIVA

Una función es biyectiva cuando cumple con ser inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo.

$$\boxed{f \text{ es biyectiva} \Leftrightarrow f \text{ es inyectiva} \wedge f \text{ es sobreyectiva}}$$



f es biyectiva ya que cumple las dos condiciones

GRÁFICAMENTE.- Se reconocen porque su gráfica es cortada por cualquier recta paralela al eje x en un y sólo en un punto.

Ejemplo:

Determinar si la relación $f:\Re \to \Re \,/\, f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ es:

a) Una función de $\Re$ en $\Re^+$
b) Inyectiva .
c) Sobreyectiva.
d) Biyectiva

Solución

a) La función f esta definida por todo valor $x\in\Re$, por lo tanto si es una función.

$Dom\, f=x\in\Re$; $C.S.=x\in\Re$; Como $Dom\, f=C.S.$ .es función

b) Para que sea inyectiva debe cumplir que: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$\frac{1}{x_1^2+1} = \frac{1}{x_2^2+1}; x_1^2+1 = x_2^2+1; x_1^2 = x_2^2; \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2}; |x_1| = |x_2|$$

Por propiedades tenemos: $x_1 = x_2 \quad \vee \quad x_1 = -x_2$, en consecuencia no es inyectiva

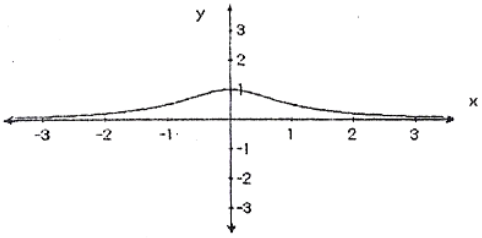
c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, $y = \dfrac{1}{x^2+1}$, $x^2+1 = \dfrac{1}{y}$; $x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{y}-1}$

$\dfrac{1}{y}-1 \geq 0$, $\dfrac{1-y}{y} \geq 0$, $\dfrac{y-1}{y} \leq 0$

$Rgo\ f = y \in (0,1]$; $C.LL. = y \in \Re$; Como $Rgo\ f \neq C.LL \Rightarrow f.$ no es sobreyectiva.

d) Como f no es inyectiva ni sobreyectiva, tampoco es biyectiva.

GRÁFICO



OBSERVACIÓN

a) Para que una función sea sobreyectiva, si no lo fuera, se restringe el conjunto de llegada.

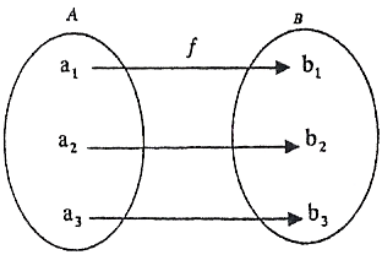
b) Para que una función sea inyectiva, si no lo es, se restringe el conjunto de salida.

Para que $f:\Re \to \Re \ / \ f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ sea biyectiva deberíamos restringir tanto el conjunto de salida como el conjunto de llegada de la siguiente manera:

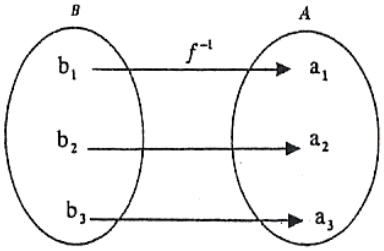
Sea: $f:\Re^+ \cup \{0\} \to (0,1] \ / \ x \mapsto y = \dfrac{1}{x^2+1}$

9.21. FUNCIÓN INVERSA

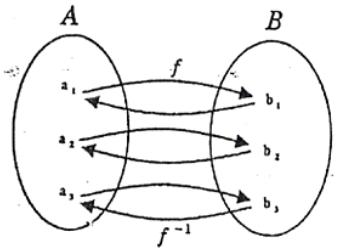
Si $f: A \to B$ es biyectiva , entonces se puede encontrar $f^{-1}: B \to A$ f^{-1} que también es biyectiva



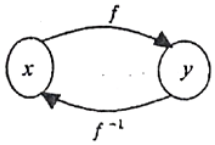
f es Biyectiva



f^{-1} es Biyectiva



$f(a_1)=b_1$, $f(b_1)=a_1$
$f(a_2)=b_2$, $f(b_2)=a_2$
$f(a_3)=b_3$, $f(b_3)=a_3$



$y=f(x)$ $\qquad$ $x=Dom\,f=Rgo\,f^{-1}$
$x=f^{-1}(y)$ $\qquad$ $y=Rgo\,f=Dom\,f^{-1}$

Sólo en funciones $\boxed{f^{-1}(x)\neq\dfrac{1}{f(x)}}$

Función Directa: $x\mapsto y=f(x)$
Función Inversa: $y\mapsto x=f^{-1}(y)$

Ejemplo:

Sean ; $A=\{2,3,4,5,6\}$; $B=\{a,b,c,d,e\}$
$f=A\to B\,/\,f=\{(2,a),(3,b),(4,c),(5,d),(6,e)\}$, determinar f^{-1}.
$f^{-1}=B\to A\,/\,f^{-1}=\{(a,2),(b,3),(c,4),(d,5),(e,6)\}$

9.21.1. DETERMINACIÓN DE LA FUNCIÓN INVERSA

Para establecer cual es la expresión que define a la función inversa es necesario verificar que la función sea biyectiva y seguir los siguientes pasos:

1) Igualar a " y " la función
2) Despejar x
3) La expresión obtenida es $f^{-1}(y)$
4) Haciendo un cambio de variable tenemos : $f^{-1}(x)$

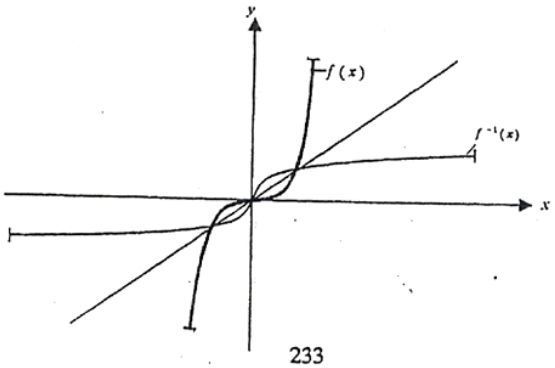
Ejemplos:

1) Dada la función biyectiva $f:\Re\to\Re\,/\,f(x)=x^3$, hallar $f^{-1}(x)$ y trazar la gráfica de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$.

$f(x)=x^3$; $y=x^3$; $x=\sqrt[3]{y}$ $\Rightarrow$ $f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y}$

Haciendo un cambio de variable tenemos: $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$

Gràfico:



Desde el punto de vista gráfico la función inversa $f^{-1}(x)$ corresponde a una curva que es simétrica a la grafica de la función $f(x)$ cuando se toma al eje de simetría a la bisectriz del primer y tercer cuadrante o la función identidad.

2) Determinar la función inversa de la función biyectiva: $f:\Re-\{2\}\to\Re-\{1\}\,/\,y=\dfrac{x+1}{x+2}$

$$y=\frac{x+1}{x+2}\quad;\quad xy+2y=x+1\quad;\quad xy-x=1-2y\quad;\quad (y-1)x=1-2y$$

$$x=\frac{1-2y}{y-1}\qquad\Rightarrow\qquad f^{-1}(y)=\frac{1-2y}{y-1}$$

$$f^{-1}:\Re-\{1\}\to\Re-\{2\}\,/\,x=\frac{1-2y}{y-1}$$

3) Sea $f:[3\,;5)\to(2\,;4]\,/\,y=\dfrac{x+1}{x-2}$, hallar si existe la función inversa de f

Para hallar la inversa debemos probar si es inyectiva y sobreyectiva

a) **Inyectiva:** $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$ es equivalente a: $f(x)=1+\dfrac{3}{x-2}$

Sean $x_1,x_2\in[3\,;5)$ entonces:

$$f(x_1)=f(x_2)$$

$$1+\frac{3}{x_1-2}=1+\frac{3}{x_2-2}\quad;\quad \frac{3}{x_1-2}=\frac{3}{x_2-2}\quad;\quad x_1-2=x_2-2\quad;\quad x_1=x_2\Rightarrow f\ es\ inyectiva$$

b) **Sobreyectiva:** Calculamos el rango para el dominio predeterminado

$$Rgo\,f=\{y\,/\;y=f(x)\quad\wedge\quad x\in Dom\,f\}$$

$$y=1+\frac{3}{x-2}\quad\wedge\quad 3\le x<5$$

$$1\le x-2<3\quad;\quad \frac{1}{3}<\frac{1}{x-2}\le 1\quad;\quad 1<\frac{3}{x-2}\le 3$$

$$2<1+\frac{3}{x-2}\le 4\quad;\quad 2<y\le 4\quad\Rightarrow\quad Rgo\,f:y\in(2\,;4]$$

Como $C.L.L=Rgo\,f\quad\Rightarrow\quad f$ es sobreyectiva

Como la función es biyectiva, encontramos su inversa.

c) **Inversa:**

$$y=\frac{x+1}{x-2}\quad;\quad yx-2y=x+1\quad;\quad yx-x=2y+1;\quad (y-1)x=2y+1$$

$$x=\frac{2y+1}{y-1}\Rightarrow f^{-1}(y)=\frac{2y+1}{y-1}\qquad\qquad f^{-1}:(2\,;4]\to[3\,;5)\quad y\mapsto x=\frac{2y+1}{y-1}$$

NOTA: Las asíntotas verticales en la gráfica de la función inversa se transforman en asíntotas horizontales y de la misma forma las asíntotas horizontales se transforman en verticales.

La asíntota oblicua en la gráfica de la función inversa sigue siendo oblicua, para graficarla se intercambian los valores de de "x" por los de "y" y visceversa.

EJERCICIO RESUELTO

1) Sea $f:\Re-\{-2,0,2\}\to\Re\ /\ f(x)=\dfrac{x-1}{x^3-4x}$

a) Indicar si es función
b) Dar dominio, rango
c) Indicar ecuaciones de las asíntotas
d) Trazar su gráfica
e) En el intervalo $x>0$, indicar si es biyectiva, caso contrario transformarla y graficar su inversa.

Dominio:

$$y=\frac{x-1}{x\,(x^2-4)}\ ;\qquad y=\frac{x-1}{x\,(x+2)\,(x-2)}\ ;\quad Dom\,f=x\in\Re-\{-2,0,2\}$$

Como $C.S.=Dom\,f$ es función.

$$A.V.:\ x=-2\ ,\ x=0\ ,\ x=2\ ;\qquad A.H:\ y=0\ ,\ (n<m)$$

Puntos de intersección:

a) Con el eje x: $(y=0)$

$$0=\frac{x-1}{x^3-4x};\qquad 0=x-1\ ;\quad x=1\ ;\Rightarrow\ (1,0)$$

b) Con el eje y: $(x=0)$

$$y=\frac{0-1}{0-4(0)};\qquad y=\frac{-1}{0};\qquad \text{No existe}$$

Simetría:

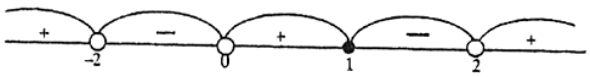
a) Respecto al eje y: $(x)\to-x$

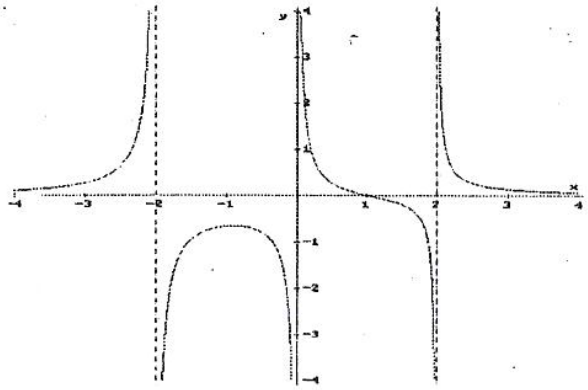
$$y=\frac{(-x)-1}{(-x)^3-4(-x)};\quad y=\frac{-x-1}{-x^3+4x}\ \neq\ y=\frac{x-1}{x^3-4x}\qquad \text{No es simétrica respecto al eje } y$$

b) Respecto al origen: $(x\to-x\ \wedge\ y\to-y)$

$$-y=\frac{-x-1}{(-x)^3-4(-x)}\ ;\quad y=-\frac{-x-1}{x^3+4x}\ \neq\ y=\frac{x-1}{x^3-4x}\qquad \text{No es simétrica respecto al origen.}$$

Positividad: $y=\dfrac{x-1}{x\left(x^2-4\right)}\ \Rightarrow\ \dfrac{x-1}{x\left(x^2-4\right)}>0\ ;\ \dfrac{x-1}{x\,(x+2)\,(x-2)}>0$

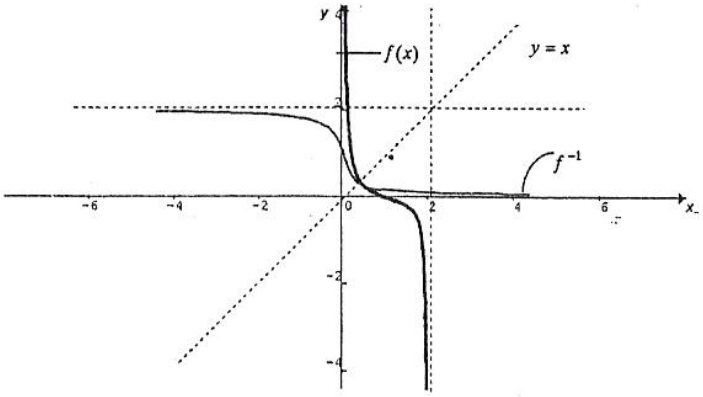




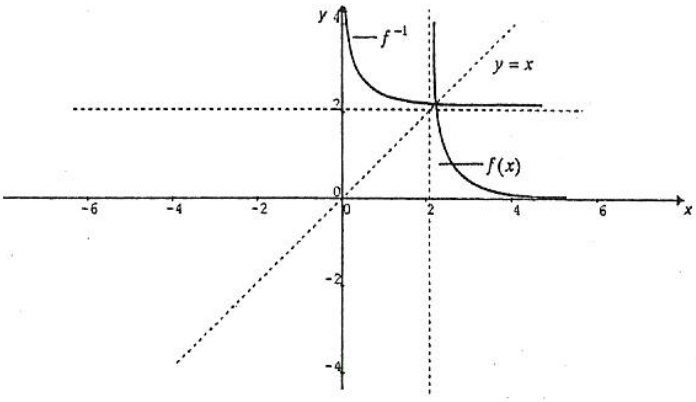
Rango: Determinamos del gráfico , $Rgo\ f : y \in \Re$

No es inyectiva en el intervalo $x > 0$ (Prueba de la recta horizontal por lo tanto no es biyectiva)

Para que sea biyectiva en el intervalo $x > 0$, una alternativa sería la gráfica de $f(x)$ en el intervalo (0,2)



Otra alternativa sería la gráfica de $f(x)$ en el intervalo $(0, +\infty)$



9.21.2. FUNCIÓN INVERSA DE UNA FUNCIÓN SECCIONADA

Sea $f(x)$ una función seccionada definida por:

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x)\ ;\ si\ x\in Dom\ f_1 \\ f_2(x)\ ;\ si\ x\in Dom\ f_2 \\ \ .\\ \ .\\ f_n(x)\ ;\ si\ x\in Dom\ f_n \end{cases}$$

Entonces se dice que $f(x)$ tiene inversa, si y sólo si:

a) Las funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$,.....$f_n(x)$, son inyectivas.
b) $Rgo\ f_1(x)\cap Rgo\ f_2(x)\cap$.....$Rgo\ f_n=\phi$, es decir los rangos de las funciones no deben intersecarse entre si.

Ejemplos:

1) Hallar si existe la función inversa de:

$$f(x)=\begin{cases} x-5 & ,\ x\geq 5 \\ x^2+4x-5 & ,\ x\in[-2,1) \end{cases}$$

i) Analicemos la inyectividad de $f(x)$

a) $f_1(x)=x-5 \Rightarrow f_1(a)=f_1(b)\ ;\ a-5=b-5\ ;\ a=b \quad \therefore \quad f_1(x)$ es inyectiva

b) $f_2(x)=x^2+4x-5$

$$f_2(x)=(x+2)^2-9 \Rightarrow f_1(a)=f_2(b)\ ;\ (a+2)^2-9=(b+2)^2-9\ ;\ (a+2)^2=(b+2)^2$$

$$\sqrt{(a+2)^2}=\sqrt{(b+2)^2}\ ;\ |a+2|=|b+2|$$

Como: $|x+2|=\begin{cases} x+2 & ;\ Si\ x+2\geq 0\ ;\ x\geq -2 \\ -(x+2)\ ; & Si\ x+2<0\ ;\ x<-2 \end{cases}$

Para $x\in[-2,1)$ entonces tenemos: $(a+2)=(b+2)\ ;\ a=b \quad \therefore \quad f_2(x)$ es inyectiva

ii) Determinación de los rangos de $f_1(x)$ y $f_2(x)$

a) $Rgo\ f_1(x): y=x-5\ \wedge\ x\geq 5$

$x-5\geq 0\ ;\ y\geq 0 \Rightarrow Rgo\ f_1(x): y\in[0,+\infty)$

b) $Rgo\ f_2(x): y=(x+2)^2-9\ \wedge\ -2\leq x<1$

$$0\leq x+2<3\ ;\ 0\leq(x+2)^2<9\ ;\ -9\leq(x+2)^2-9<0$$

$$-9\leq y<0 \Rightarrow Rgo\ f_2(x): y\in[-9,0)$$

Siendo $f_1(x)$ y $f_2(x)$ inyectivas y $Rgo\ f_1(x)\cap Rgo\ f_2(x)=\phi$, entonces existe $f^{-1}(x)$.

iii) Obtención de la función inversa.

a) $y = x - 5$

$x = y + 5 \;;\; f^{-1}(y) = y + 5 \;;\; y \geq 0$

b) $y = x^2 + 4x - 5$

$x^2 + 4x - 5 - y = 0 \;;\; x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(-5 - y)}}{2} \;;\; x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{36 + 4y}}{2}$

$x = \dfrac{-4 \pm 2\sqrt{9 + y}}{2} \;;\; x = -2 \pm \sqrt{y + 9} \quad ; \quad -9 \leq y < 0$

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y + 5 & , \quad y \geq 0 \\ -2 + \sqrt{y + 9} & , \quad -9 \leq y < 0 \end{cases}$$

Haciendo un cambio de variable tenemos:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x + 5 & , \quad x \geq 0 \\ -2 + \sqrt{x + 9} & , \quad -9 \leq x < 0 \end{cases}$$

2) Hallar si existe la función inversa de:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 7 & , \quad x \in (-3, -1) \cup (4, 7] \\ \sqrt{7 - 2x} & , \quad x \in [-1, 3) \end{cases}$$

i) Analicemos la inyectividad de $f(x)$

a) $f_1(x) = x^2 - 8x + 7 = (x - 4)^2 - 9$

$f_1(x) = (x - 4)^2 - 9 \Rightarrow f_1(a) = f_2(b) \;;\; (a - 4)^2 - 9 = (b - 4)^2 - 9 \;;\; (a - 4)^2 = (b - 4)^2$

$\sqrt{(a - 4)^2} = \sqrt{(b - 4)^2} \;;\; |a - 4| = |b - 4|$

Como: $|x - 4| = \begin{cases} x - 4 & ; \; Si \;\; x - 4 \geq 0 \;;\; x \geq 4 \\ -(x - 4) & ; \; Si \;\; x - 4 < 0 \;;\; x < 4 \end{cases}$

Para $x \in (-3, -1)$ entonces tenemos: $-(a - 4) = -(b - 4) \;;\; a - 4 = b - 4 \;;\; a = b$

$\therefore \quad f_1(x)$ es inyectiva

Para $x \in (4, 7)$ entonces tenemos: $(a - 4) = (b - 4) \;;\; a = b$

$\therefore \quad f_1(x)$ es inyectiva

b) $f_2(x) = \sqrt{7 - 2x}$

$f_2(a) = f_2(b) \;;\; \sqrt{7 - 2a} = \sqrt{7 - 2b} \;;\; 7 - 2a = 7 - 2b \;;\; -2a = -2b \;;\; a = b$

$\therefore \quad f_2(x)$ es inyectiva

ii) Determinación de los rangos de $f_1(x)$ y $f_2(x)$

a) $Rgo\ f_1(x) : y = (x - 4)^2 - 9 \quad \wedge \quad -3 < x < -1 \quad \vee \quad 4 < x \leq 7$

$$\begin{array}{lcl} -7 < x-4 < -5 & \vee & 0 < x-4 \le 3 \\ 25 < (x-4)^2 < 49 & \vee & 0 < (x-4)^2 \le 9 \\ 16 < (x-4)^2 - 9 < 40 & \vee & -9 < (x-4)^2 - 9 \le 0 \\ 16 < y < 40 & \vee & -9 < y \le 0 \end{array}$$

$Rgo\ f_1(x): y \in (-9,0] \cup (16,40)$

b) $Rgo\ f_2(x): y = \sqrt{7-2x} \quad \wedge \quad -1 \le x < 3$

$$-6 < -2x \le 2 \ ; \ 1 < 7-2x \le 9 \ ; \ 1 < \sqrt{7-2x} \le 3$$

$$1 < y \le 3 \ \Rightarrow \ Rgo\ f_2(x): y \in (1,3]$$

Siendo $f_1(x)$ y $f_2(x)$ inyectivas y $Rgo\ f_1(x) \cap Rgo\ f_2(x) = \phi$, $f(x)$ es inyectiva, entonces existe $f^{-1}(x)$.

iii) Obtención de la función inversa.

a) $y = x^2 - 8x + 7$

$$x^2 - 8x + 7 - y = 0 \ ; \ x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4(7-y)}}{2} \ ; \ x = \frac{8 \pm \sqrt{36+4y}}{2}$$

$$x = \frac{8 \pm 2\sqrt{9+y}}{2} \ ; \ x = 4 \pm \sqrt{y+9} \ \Rightarrow \ f^{-1}(y) = 4 \pm \sqrt{y+9}$$

$$f^{-1}(y) = 4 + \sqrt{y+9} \ ; \ -9 < y \le 0 \quad ó \quad f^{-1}(y) = 4 - \sqrt{y+9} \ ; \ 16 < y < 40$$

b) $y = \sqrt{7-2x}$

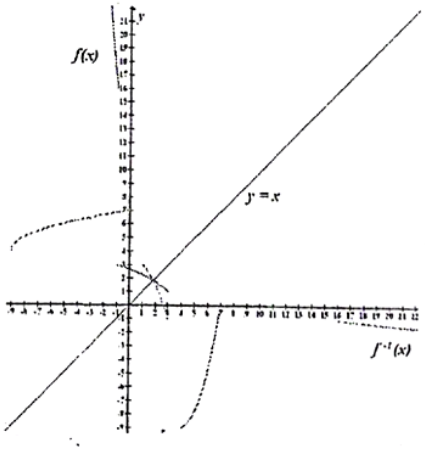
$$y^2 = 7 - 2x \ ; \ 2x = 7 - y^2 \ ; \ x = \frac{7-y^2}{2} \ \Rightarrow \ f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(7-y^2) \ ; \ 1 < y \le 3$$

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} 4 + \sqrt{y+9} & , \ -9 < y \le 0 \\ 4 - \sqrt{y+9} & , \ 16 < y < 40 \\ \frac{1}{2}(7-y^2) & , \ 1 < y \le 3 \end{cases}$$

Haciendo un cambio de variable tenemos:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 4 + \sqrt{x+9} & , \ -9 < x \le 0 \\ 4 - \sqrt{x+9} & , \ 16 < x < 40 \\ \frac{1}{2}(7-x^2) & , \ 1 < x \le 3 \end{cases}$$

iv) Gráfica de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$



3) Hallar si existe la función inversa analítica y gráficamente de:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-3}+4 & Si \quad x\geq 3\\ 2x-2 & Si \quad 1\leq x<3\\ x^2+2x-3 & Si \quad 0\leq x<1\end{cases}$$

i) Analicemos la inyectividad de $f(x)$

a) $f_1(x)=\sqrt{x-3}+4$

$$f_1(a)=f_2(b) \Rightarrow \sqrt{a-3}+4=\sqrt{b-3}+4 \quad , \quad \sqrt{a-3}=\sqrt{b-3}$$
$$f_1(a)=f_2(b) \Rightarrow \sqrt{a-3}+4=\sqrt{b-3}+4 \quad , \quad \sqrt{a-3}=\sqrt{b-3} \qquad \therefore \quad f_1(x) \text{ es inyectiva}$$

b) $f_2(x)=2x-2$

$$f_2(a)=f_2(b) \Rightarrow 2a-2=2b-2 \quad , \quad 2a=2b \quad , \quad a=b \qquad \therefore \quad f_2(x) \text{ es inyectiva}$$

c) $f_3(x)=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$

$$f_3(a)=f_3(b) \Rightarrow (a+1)^2-4=(b+1)^2-4 \quad , \quad (a+1)^2=(b+1)^2$$
$$\sqrt{(a+1)^2}=\sqrt{(a+1)^2} \quad , \quad |a+1|=|b+1|$$

Como: $|x+1|=\begin{cases}x+1 & ; \; Si \; x+1\geq 0 \; ; \; x\geq -1\\ -(x+1) & ; \; Si \; x+1<0 \; ; \; x<-1\end{cases}$

Para $x\in[0,1)$ entonces tenemos: $|a+1|=|b+1| \quad , \quad a+1=b+1 \; ; \; a=b \; \therefore \; f_1(x)$ es inyectiva

ii) Determinación de los rangos de $f_1(x)$ y $f_2(x)$

a) $Rgo \; f_1(x): y=\sqrt{x-3}+4 \quad \wedge \quad x\geq 3$

$$x-3\geq 0 \quad , \quad \sqrt{x-3}\geq 0 \quad , \quad \sqrt{x-3}+4\geq 4$$
$$y\geq 4 \quad \Rightarrow \quad Rgo\, f_1(x): y\in[4,+\infty[$$

b) $Rgo \; f_2(x): y=2x-2 \quad \wedge \quad 1\leq x<3$

$$2\leq 2x<6 \; ; \; 0\leq 2x-2<4$$
$$0\leq y<4 \quad \Rightarrow \quad R\, f_2(x): y\in[0,4)$$

c) $Rgo \; f_3(x): y=x^2+2x-3=(x+1)^2-4 \quad \wedge \quad 0\leq x<1$

$$1\leq x+1<2 \; ; \; 1\leq (x+1)^2<4 \quad , \quad -3\leq (x+1)^2-4<0$$
$$3\leq y<0 \quad \Rightarrow \quad R\, f_3(x): y\in[-3,0)$$

Siendo $f_1(x)$, $f_2(x)$ y $f_3(x)$ inyectivas y $Rgo\, f_1(x)\cap Rgo\; f_2\cap Rgo\; f_3(x)=\phi$, entonces existe $f^{-1}(x)$.

iii) Obtención de la función inversa.

a) $y=\sqrt{x-3}+4$

$y-4=\sqrt{x-3}$; $y^2-8y+16=x-3$; $x=y^2-8y+19$

$f^{-1}(y)=y^2-8y+19$; $y\geq 4$

b) $y=2x-2$

$x=\dfrac{y+2}{2} \Rightarrow f^{-1}(y)=\dfrac{y+2}{2}$; $0\leq y<4$

c) $y=x^2+2x-3$

$x^2+2x-y-3=0$, $x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-4(-y-3)}}{2}$, $x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4y+16}}{2}$

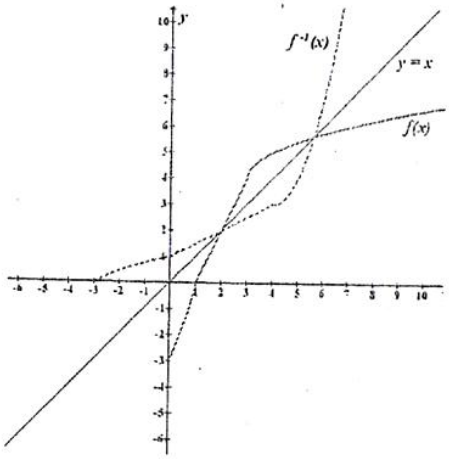
$x=-1\pm\sqrt{y+4} \Rightarrow f^{-1}(y)=-1+\sqrt{y+4}$; $-3\leq y<0$

$$f^{-1}(y)=\begin{cases} y^2-8y+19 & , \quad y\geq 4 \\ \dfrac{y+2}{2} & , \quad 0\leq y<4 \\ -1+\sqrt{y+4} & , \quad -3\leq y<0 \end{cases}$$

Haciendo un cambio de variable tenemos:

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} x^2-8x+19 & , \quad x\geq 4 \\ \dfrac{x+2}{2} & , \quad 0\leq x<4 \\ -1+\sqrt{x+4} & , \quad -3\leq x<0 \end{cases}$$

iv) Gráfica de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$



EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

1) Sea la función $f:[1;4]\to[a;b]$ tal que $f(x)=x^2-2x+3$, demostrar que f es inyectiva y hallar los valores de a y b para que f sea biyectiva.

2) Sea $f:A\to(1;10]$ dada por $f(x)=\dfrac{4-11x}{4-2x}$. Determinar A y demostrar que f es inyectiva

3) Sea $f:A\to[-9,-1)$ dada por $f(x)=\dfrac{3+4x}{3-x}$. Determinar A y demostrar que f es sobreyectiva

4) Demostrar que $f(x)=\dfrac{x-1}{x+2};\quad x\neq 2$, es inyectiva

5) ¿La función $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ es sobreyectiva?

6) Determinar si la función $f(x)=6x-x^2-5$ es inyectiva, si no lo es, restrinja su dominio para que sea inyectiva.

7) Hallar la función inversa si existe para la función $f(x)=x^2-2x-1\quad;\quad x\geq 2$

8) Si $f:\Re\to\Re$ tal que $f(x)=\begin{cases}|2-x| & ;\ Si\quad x\geq 2\\ -x^2 & ;\ Si\quad x<0\end{cases}$ Determinar la función inversa, si existe.

9) Sea la función f biyectiva definida como:

$$f:]-\infty;-3]\to[0;+\infty[$$
$$x\mapsto f(x)=\sqrt{x^2-9}$$
, encuentre f^{-1}

Respuestas:

1) $a=2\quad;\quad b=11$ 2) $A\in]0,4]$ 3) $A\in]-2,6]$ 5) Si es sobreyectiva

6) No es inyectiva. En el intervalo $x\in]-\infty,3]$ o en intervalo $x\in[3,+\infty[$, la función es inyectiva

7) $f^{-1}:[-1,+\infty[\to[2,+\infty[\ /\ f^{-1}(x)=\left((x+2)^2+1\right)$ 8) $f^{-1}(x)=\begin{cases}x+2 & ;\ Si\quad x\geq 0\\ -\sqrt{x} & ;\ Si\quad x<0\end{cases}$

9) $f^{-1}:[0,+\infty[\to]-\infty,-3]\ /\ f^{-1}(x)=-\sqrt{x+9}$

EJERCICIOS DE REFUERZO

1) Sea $f:A\to(-4,1]/\ f(x)=\dfrac{10+3x}{10-2x}$

a) Determinar el conjunto A para que sea función. , b) Determinar si f es inyectiva

2) Determine la función inversa y trace la gráfica de f y f^{-1} de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} 3x-2 & Si\ x\le 0 \\ x^2 & Si\ 0<x\le 2 \\ 2x+1 & Si\ x>3 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} -x^2+10x-16 & Si\ x\le 5 \\ \sqrt{x-5}+9 & Si\ x>5 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} -x+8 & Si\ x<-1 \\ x^2-4x+4 & Si\ -1\le x\le 2 \\ -\sqrt{2x-4} & Si\ x>2 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} \left|x^2-4\right| & Si\ 0\le x<2 \\ -\dfrac{x^2}{4}+x-1 & Si\ x\ge 2 \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} -x^2-2 & Si\ x<0 \\ x-2 & Si\ 0\le x\le 3 \\ \sqrt{2x-5} & Si\ x>3 \end{cases}$

3) Determine la función inversa y trace la gráfica de f y f^{-1} de la función:

$$f:[0,+\infty)\to\Re$$
$$x\mapsto y=\left|x^2+x\right|-2$$

4) Sea $f:A\to B$

$$x\mapsto y=\sqrt{\frac{1}{2-x}}\ ,$$

a) Determinar A y B para que sea biyectiva ; b) Calcular f^{-1} y graficar f y f^{-1}

5) Dadas las funciones $f(x)=R(x)-2$ y $h^{-1}(x)=2x+2$; cumplen que $\left(foh^{-1}\right)_{(x)}=10x+8$
Determinar $R(x)$ y $f(x)$.

6) Dadas las funciones:

$f=\{(1,2),(2,2),(3,7),(5,6)\}$; $g=\{(-2,0),(0,0),(4,1),(8,3),(9,5)\}$
Hallar $(fog)^{-1}$

7) Dadas las funciones:

$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & ,\ si\ x<-1 \\ x+1 & ,\ si\ x\ge -1 \end{cases}$; $g(x)=\begin{cases} 2x-1 & ,\ si\ x<0 \\ \sqrt{x} & ,\ si\ x\ge 0 \end{cases}$

Hallar, si existe $f\,o\,g^{-1}$ y su dominio.

8) Dada la ecuación $x^2y^2-4y^2+x^2-1=0$, trazar su gráfica e indicar si es función, caso contrario redefinirla en su mayor dominio, hallar y graficar su inversa.

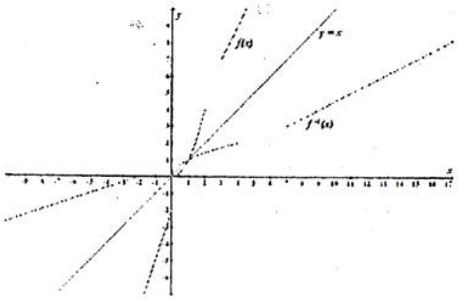
Respuestas:

1) $f=[0,10[\to]-4,1]/\ f(x)=\dfrac{10+3x}{10-2x}$

2)

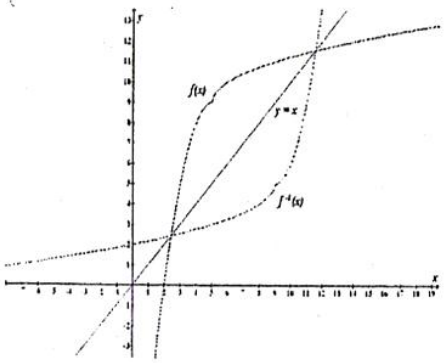
a)

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{3} & Si\ \ x\le -2\\ \sqrt{x} & Si\ \ 0\le x\le 4\\ \dfrac{x-1}{2} & Si\ x>7\end{cases}$$



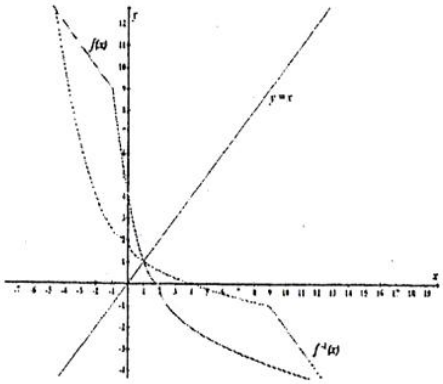
b)

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}5-\sqrt{9-x} & Si\ \ x\le 9\\ (x-9)^2+5 & Si\ x>9\end{cases}$$



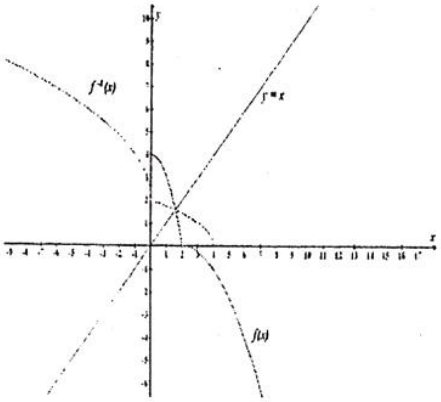
c)

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}8-x & Si\ \ x>9\\ 2-\sqrt{x} & Si\ \ 0\le x\le 9\\ \dfrac{x^2+4}{2} & Si\ x<0\end{cases}$$



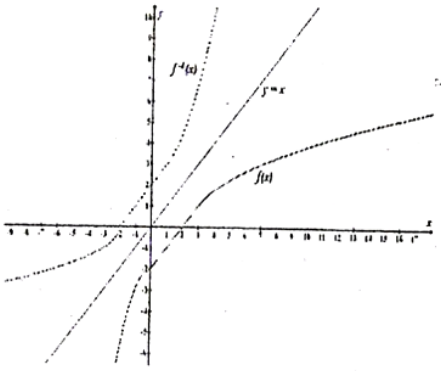
d)

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x} & Si\ \ 0<x\le 4\\ 2+\sqrt{-4x} & Si\ x\le 0\end{cases}$$



e)

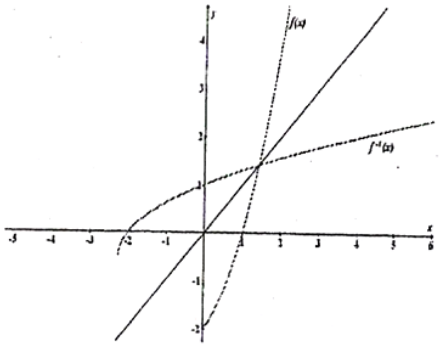
$$f^{-1}(x)=\begin{cases} -\sqrt{-x-2} & Si\ \ x<-2 \\ x+2 & Si\ \ -2\le x\le 1 \\ \dfrac{x^2+5}{2} & Si\ x>1 \end{cases}$$



3)

$$f^{-1}(x):\ [2,+\infty[\ \rightarrow [0,+\infty[$$

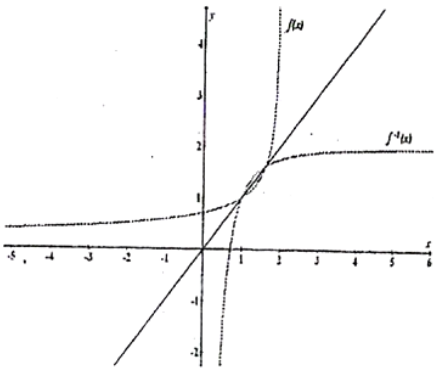
$$x \rightarrow y=-\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{9}{4}}$$



4)

$$f:\ ]-\infty,2[\ \rightarrow\ ]0,+\infty[\ /\ y=\sqrt{\frac{1}{2-x}}$$

$$f^{-1}:\ ]0,+\infty[\ \rightarrow\ ]-\infty,2[\ /\ y=\frac{2x^2-1}{x^2}$$



5)

$$R(x)=5x\ \ ;\ \ f(x)=5x-2$$

6)

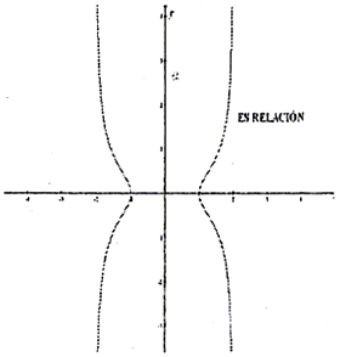
$$(fog)^{-1}=\{(2,4),(7,8),(6,9)\}$$

7)

$$(fog^{-1})_{(x)}=\begin{cases} \dfrac{1}{4}(x^2+2x-3) & Si\ \ x<-3 \\ \dfrac{x+3}{2} & Si\ \ -3\le x<1 \\ x^2+1 & Si\ x\ge 0 \end{cases}$$

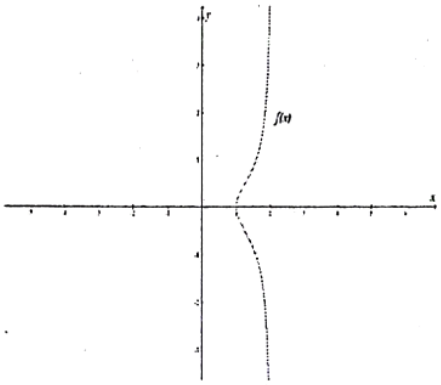
8)

No es funciòn



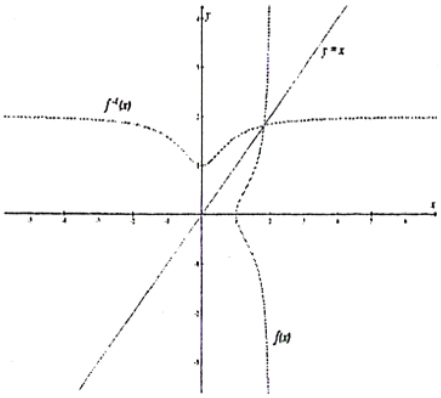
Para que sea funciòn:

$$f:[1,2[\rightarrow \Re \,/\, y=\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2-4}}$$



Función Inversa:

$$f^{-1}:\Re \rightarrow [1,2[\,/\, y=\sqrt{\frac{4x^2+1}{x^2+1}}$$



CAPÍTULO X
FUNCIONES TRASCENDENTES

10.1. FUNCIÓN EXPONENCIAL

La función exponencial es de la forma: $f:\Re \to \Re^{+}$; $y = a^{x}$, $a > 0$ y $a \neq 1$, donde:

x = Exponente ; a = Base de la potencia ; y = Potencia (resultado)

Donde: a es un número real positivo y $a \neq 1$

Ejemplos:

$y = 5^{x}$; $y = 0,4^{x}$; $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$

10.1.1. ANÁLISIS DE LA BASE a

1. Si $a < 0$ y x es fraccionario de denominador par; entonces y no tiene valor real. Ejemplo:
   Sí $a = -2$; $x = \frac{1}{2}$; entonces: $y = (-2)^{\frac{1}{2}}$ o $y = \sqrt{-2}$ (no existe).

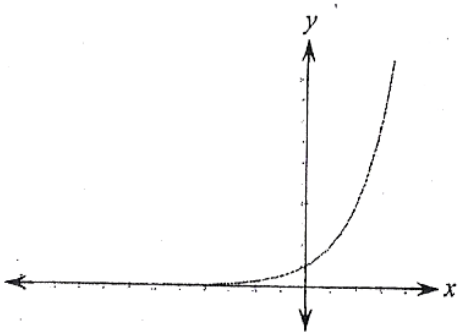
2. Sí $a = 1$; la función se convierte en la constante 1.

3. Sí $a > 0$ la función tiene valor real para cualquier valor del exponente x.

10.2. GRÁFICAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES

1) Sí $a > 1$; consideremos: $a = 2$ entonces tenemos: $y = 2^{x}$

x	y
0	1
1	2
2	4
3	8
⋮	⋮
∞	∞
-1	$1/2$
-2	$1/4$
-3	$1/8$
⋮	⋮
$-\infty$	0

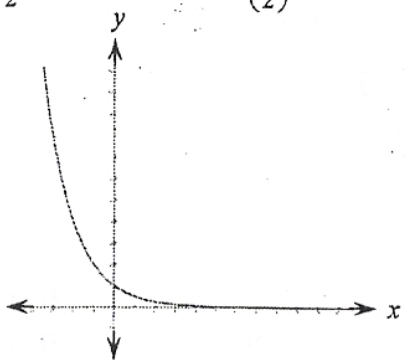


Análisis de la función:

$Dom\, f : x \in \Re$; $Rgo\, f : y \in]0;+\infty[$; $y = 0$ $A.H$; Punto de corte $(0,1)$. La función es creciente

2) Si $0 < a < 1$; consideremos $a = \frac{1}{2}$, entonces tenemos $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

x	y
0	1
1	1/2
2	1/4
3	1/8
⋮	⋮
∞	0
-1	2
-2	4
-3	8
⋮	⋮
$-\infty$	∞



Análisis de la función

$Dom\, f : x \in \Re$; $Rgo\, f : y \in]0;+\infty[$; $y = 0$ $A.H$; Punto de corte $(0,1)$. La función es decreciente

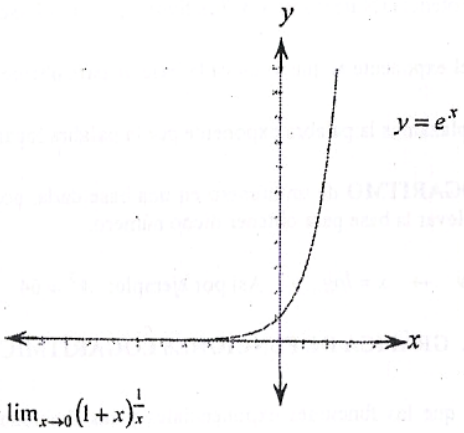
10.2.1. LA BASE e

El número e surge del estudio de la función $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ o de la función $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$, donde x es un número positivo.

Se puede probar que los valores de $f(x)$ se acercan al número e a medida que:

$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \to e$, cuando $x \to \infty$ ó $(1+x)^{\frac{1}{x}} \to e$, cuando $x \to 0$

x	$f(x)$
1	2,0000000
10	2,5937425
100	2,704813829
1000	2,716923932
10000	2,718145926
100000	2,718268237
1000000	2,718280469
⋮	⋮
1000000000	2,718281824



$e = \lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ ó $e = \lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

EJERCICIOS RESUELTOS

Resuelva las siguientes ecuaciones exponenciales:

1) $\frac{1}{2^{x^2}} = 8^{3-2x}$

$\frac{1}{2^{x^2}} = \left(2^3\right)^{3-2x}$; $2^{-x^2} = 2^{9-6x}$; $x^2 - 6x + 9 = 0$; $(x-3)^2 = 0$; $x = 3$

2) $2^{-100x} = (0{,}5)^{x-4}$

$2^{-100x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$; $2^{-100x} = \left(2^{-1}\right)^{x-4}$; $2^{-100x} = 2^{-x+4}$; $99x = -4$; $x = -\frac{4}{99}$

3) $100 \times 10^x = \sqrt[x]{1000^5}$

$100 \times 10^x = 1000^{\frac{5}{x}}$; $10^2 \times 10^x = \left(10^3\right)^{\frac{5}{x}}$; $10^{x+2} = 10^{\frac{15}{x}}$; $x + 2 = \frac{15}{x}$; $x^2 + 2x - 15 = 0$

$(x+5)(x-3) = 0 \Rightarrow$; $x_1 = 3 \vee x_2 = -5$

4) $2^{x+1} + 4^x = 80$

$2^x 2 + 2^{2x} - 80 = 0$; $2^{2x} + 2 \times 2^x - 80 = 0$

Sí: $y = 2^x$; entonces: $y^2 = 2^{2x}$, se tiene la ecuación:

$y^2 + 2y - 80 = 0$; $(y+10)(y-8) = 0$

$y_1 = -10 \vee y_2 = 8$ reemplazamos en $y = 2^x$

$y = 2^x$ $\qquad$ $y = 2^x$

$-10 = 2^x$; no existe $\qquad$ $8 = 2^x$; $2^3 = 2^x$; $x = 3$

5) $7^x + 7^{x+2} = -2051 + 7^{x+3}$

$7^x + 7^x.7^2 = -2051 + 7^x.7^3$; $7^x(1+49) = -2051 + 7^x.343$; $7^x(50) - 7^x(343) = -2051$;

$7^x[50-343] = -2051$; $7^x(-293) = -2051$; $7^x = \frac{2051}{293}$; $7^x = 7 \Rightarrow x = 1$

6) $2^{2x+2} - 6^x - 2.3^{2x+2} = 0$

$2^{2x}.2^2 - 2^x.3^x - 2.3^{2x}.3^2 = 0$

$4.2^{2x} - 2^x.3^x - 18.3^{2x} = 0$; $Si: 2^x = a \Rightarrow 2^{2x} = a^2 \quad \wedge \quad Si: 3^x = b \Rightarrow 3^{2x} = b^2$

$4a^2 - ab - 18b^2 = 0$; $(4a - 9b)(a + 2b) = 0$

$4a = 9b \quad \vee \quad a = -2b$

$4.2^x = 9.3^x \qquad 2^x = -2.3^x$; No existe x

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$; $x = -2$

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

1) $2^{2x-1} = 8$

2) $\sqrt[x]{16} = \sqrt{4^x}$

3) $\left(\frac{5}{4}\right)^{0.8x} = \frac{64}{125}$

4) $9^{-3x} = \left(\frac{1}{27}\right)^{x+3}$

5) $\sqrt[7]{2^{3x-1}} = 32$

6) $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}$

7) $\sqrt[x+2]{1296} - 6 = 0$

8) $16^{x^2-16} - 1 = 0$

9) $2^{\sqrt{x+4}} \cdot 8 = 2^{x+1}$

10) $\dfrac{\sqrt[3]{2^{2x+1}}}{\sqrt[5]{4^{2x-3}}} = 2$

11) $4^{3x^2+x-9} = 1024$

12) $2^{x+3} \cdot 4^{x+6} = 8^{2x+7}$

13) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

14) $2 \cdot 4^{x+1} + 31 \cdot 2^x - 4 = 0$

15) $9^{x-\frac{1}{2}} + 3^x = 36$

16) $5^x + 5^{5-x} = 150$

17) $9^x - 4\sqrt{3} \cdot 3^{x-1} + 1 = 0$

18) $49^{\sqrt{x}} - 8 \cdot 7^{\sqrt{x}} + 7 = 0$

19) $3^{x-2} + 3^{x-1} + 3^x + 3^{x+2} = 846$

20) $5^{x-5} - 5^{x-3} - 5^x + 5^{x+1} = 62\,380$

21) $x^x - x^{-x} = 3\left(1 + x^{-x}\right)$

22) $3^{3x+1} - 4 \cdot 27^{x-1} + 9^{1,5x-1} - 80 = 0$

23) $4^x + 9^{x+1} = 2.4^{x+1} - \dfrac{3}{2}.9^x$

24) $2^{3x}.3^x - 2^{3x-1}.3^{x+1} = -288$

25) $2^{2x}.9^x - 2.6^{3x-1} + 4^{2x-1}.3^{4x-2} = 0$

26) $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

27) $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0.25 \times 128^{\frac{x+17}{x-3}}$

28) $\left[2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = 4$

Respuestas:

1) $x = 2$ 2) $x = \pm 2$ 3) $x = -\dfrac{15}{4}$ 4) $x = 3$ 5) $x = 5$

6) $x = 2$ 7) $x = 2$ 8) $x = \pm 4$ 9) $x = 5$ 10) $x = 4$

11) $x = 2$ 12) $x = -2$ 13) $x = 2$; $x = 0$ 14) $x = -3$ 15) $x = 2$

16) $x = 2$; $x = 3$ 17) $x = \dfrac{1}{2}$; $x = -\dfrac{1}{2}$ 18) $x = 0$; $x = 1$ 19) $x = 4$ 20) $x = 6$

21) $x = 2$ 22) $x = 1$ 23) $x = -\dfrac{1}{2}$ 24) $x = 2$ 25) $x = 1$

26) $x = \dfrac{3}{2}$ 27) $x = 10$ 28) $x = 9$

EJERCICIOS DE REFUERZO

Resolver las siguientes ecuaciones:

1) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\dfrac{7}{3}\right)^{7x-3}$

2) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{x-1} \sqrt{\dfrac{4}{3}} = \dfrac{9}{16}$

3) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{3x} = 27^{-(x+3)}$

4) $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

5) $25^{\sqrt{x}} - 124 \times 5^{\sqrt{x}} = 125$

6) $0,5^{x^2} \times 2^{2x+2} = 64^{-1}$

7) $3^{x+1} + 3^{x-2} - \dfrac{15}{3^{x-1}} = \dfrac{247}{3^{x-2}}$

8) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 112$

9) $7 \times 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$

10) $3^{3x+1} - 4 \times 27^{x-1} + 9^{1,5x-1} - 80 = 0$

11) $3\sqrt[x]{81} - 10\sqrt[x]{9} + 3 = 0$

12) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x \left(\dfrac{9}{8}\right)^x = \dfrac{27}{64}$

13) $2^{x^2} \cdot 5^{x^2} = 0,001\left(10^{3-x}\right)^2$

14) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{x-1} \left(\dfrac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = \dfrac{9}{16}$

15) $(0,6)^x \left(\dfrac{25}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\dfrac{27}{125}\right)^3$

16) $2\left[2^{\sqrt{x}+3}\right]^{2^{-1}x^{-\frac{1}{2}}} - \sqrt{x}\sqrt[1]{4^2} = 0$

17) $10^x - 5^{x-1} \cdot 2^{x-2} = 950$

18) $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$

19) $2^{x+\sqrt{x^2-4}} - 5\left(\sqrt{2}\right)^{x-2+\sqrt{x^2-4}} - 6 = 0$

20) $27 \cdot 2^{-3x} + 9 \cdot 2^{x} - 2^{3x} - 27 \cdot 2^{-x} = 8$

21) $\sqrt{2^x \sqrt[3]{4^x \times 0.125^{\frac{1}{x}}}} = 4\sqrt[3]{2}$

22) $4x^n - \frac{3}{8}x^{n+1} = \frac{7}{2}x^n + \frac{1}{8}x^{n+1}$

23) $5^{1+2x} + 6^{1+x} = 30 + 150^x$

24) $\sqrt[n]{\frac{x^n + 9^n}{81^n + x^n}} = \frac{1}{3}$

Respuestas:

1) $x = 1$ 2) $x = \frac{7}{2}$ 3) $x = -1$ 4) $x = \frac{3}{2}$ 5) $x = 9$

6) $x = 4 ; x - 2$ 7) $x = 3$ 8) $x = 7$ 9) $x = -1$ 10) $x = 1$

11) $x = \pm 2$ 12) $x = 3$ 13) $x = 1$ 14) $x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$ 15) $x = -\frac{5}{2} ; x = 3$

16) $x = 9$ 17) $x = 3$ 18) $x = \pm\sqrt{2}$; $x = \pm 1$ 19) $x = 2$

20) $x = 0$ 21) $x = 3 , -\frac{1}{5}$ 22) $x = 0 , 1$ 23) $x = \log_5 \sqrt{6} , \log_6 5$ 24) $x = 27$

10.3. FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Como: $y = a^x$; $a > 0 ; a \neq 1$ es una función uno a uno, tiene en consecuencia una función inversa.

La función logarítmica es una función de la forma: $f : \Re^+ \to \Re$; $x = \log_a y \Leftrightarrow y = a^x$

y = Potencia (Número Real y Positivo) ; a = Base del Logaritmo ; x = Logaritmo (resultado)

x es el exponente al que se eleva la base a para obtener y.

Reemplazamos la palabra exponente por la palabra logaritmo y diremos x es el **logaritmo de** y **en base** a.

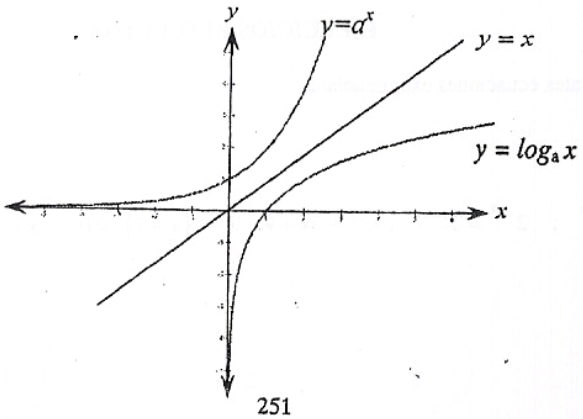
El **LOGARITMO** de un número en una base dada, positiva y distinta de la unidad, es el exponente al cual se debe elevar la base para obtener dicho número.

$a^x = y \rightarrow x = log_a y$ Así por ejemplo: $4^3 = 64 \rightarrow 3 = log_4 64$

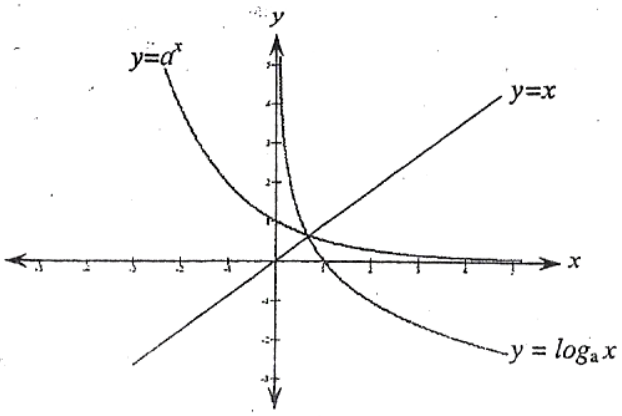
10.3.1. GRÁFICA DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Puesto que las funciones exponenciales y las funciones logarítmicas son inversas entre si, la gráfica de una función logarítmica es la reflexión de la gráfica de la función exponencial respecto de la línea $y = x$ como se muestra en las figuras:

1) Si : $a > 1$



2) **Si:** $0 < a < 1$



10.4. SISTEMAS DE LOGARITMOS

El número de sistemas de logaritmos es infinito; pero solo se estudian dos como los más notables: el decimal y neperiano.

SISTEMA DE LOGARITMOS DECIMALES

El sistema de logaritmos decimales; vulgares o de **Briggs,** utiliza como base el número "10".
$log_{10} N = log\, N$

SISTEMA DE LOGARITMOS NEPERIANOS

El sistema de logaritmos neperianos, naturales o hiperbólicos tiene como base el número trascendente "**e**", donde e = 2,71828..... ; $log_e N = ln\, N$

PROPIEDADES GENERALES:

1) No existe logaritmo de un número negativo: $log_3(-7)$ = no existe
2) No existe logaritmo de base negativa: $log_{(-3)} 9$ = no existe
3) No existe logaritmo si la base es la unidad: $log_1 8$ = no existe

PROPIEDADES PARTICULARES ($base: b > 1$)

1) Si un número real es mayor que 1; su logaritmo es positivo: $\log 5 = 0{,}698970$
2) Si un número real es menor que 1; pero mayor que cero, su logaritmo es negativo $\log 0{,}5 = -0{,}301029$
3) Logaritmos de base: b = 10

$log\, 10 = 1$

$log\, 100 = log\, 10^2 = 2$

$log\, 1000 = 10^3 = 3$

$log\, 10000 = 10^4 = 4$

etc.

$log\, 0{,}1 = log\, 10^{-1} = -1$

$log\, 0{,}01 = log\, 10^{-2} = -2$

$log\, 0{,}001 = log\, 10^{-3} = -3$

$log\, 0{,}0001 = lg\, 10^{-4} = -4$

etc.

PROPIEDADES PARTICULARES ($base: 0 < b < 1$)

1) Si un número real es mayor que 1 su logaritmo es negativo.
2) Si un número real es menor que 1; pero mayor que cero, su logaritmo es positivo.

10.4.1. PROPIEDADES OPERATIVAS

1) Logaritmo de un producto: $log_b(A \cdot B) = log_b A + log_b B$	9) $log_b a \cdot log_a b = 1$
2) Logaritmo de un cociente: $log_b\left(\frac{A}{B}\right) = log_b A - log_b B$	10) Cambio de base: $log_b A = \frac{log_a A}{log_a b}$
3) Logaritmo de una potencia: $log_b A^n = n log_b A$	11) $log_{b^\beta} A^\alpha = \frac{\alpha}{\beta} log_b A$
4) Logaritmo de una raíz: $log_b \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} log_b A$	12) $log_b a . log_c b = log_c a$
5) Logaritmo de la base: $log_b b = 1$	13) $\frac{log\, a}{log\, b} = log_b a$
6) Logaritmo de la unidad: $log_b 1 = 0$	14) $a^{log_b c} = c^{log_b a}$
7) Potencia logarítmica: $b^{log_b N} = N$	15) $log_b b^n = n$
8) $log_b a = log_{b^n}\left(a^n\right) = log_{\sqrt[n]{b}}\left(\sqrt[n]{a}\right)$	16) Definición logarítmica: $log_b N = x \Rightarrow b^x = N$

OBSERVACIÓN:

$log_b(A+B) \neq log_b A + log_b B$; $log_b(A-B) \neq log_b A - log_b B$

COLOGARITMO

El cologaritmo de un número es igual al logaritmo de la inversa del número.

$$Colog_b N = log_b \frac{1}{N}$$

$Colog_b N = log_b 1 - log_b N$, $Colog_b N = 0 - log_b N$, $Colog_b N = -log_b N$

Ejemplos:

Calcular las siguientes expresiones:

a) $Colog_2 8 = log_2 \frac{1}{8} = -3$

b) $Colog\, 10\,000 = log \frac{1}{10\,000} = -4$

c) $Colog_{64} 128 = -log_{64} 128 = -log_{2^6} 2^7 = -\frac{7}{6} log_2 2 = -\frac{7}{6}$

Funciones Trascendentes

ANTILOGARITMO

Es la operación contraria a la logaritmación, cuando actúa sobre un logaritmo lo elimina siempre que estén en la misma base.

$$Anti\log_b(\log_b N) = N \qquad ó \qquad \log_b(Anti\log_b N) = N$$

Se denomina **antilogaritmo** al número correspondiente al logaritmo dado, esto es, si x es el logaritmo de N en base b, entonces:

$$Anti\log_b x = N \quad \Rightarrow \quad Anti\log_b x = N = b^x$$

Ejemplos:

a) $Anti\log_2 4 = 2^4 = 16$ b) $Anti\ \log_8 3 = 8^3 = 512$

EJERCICIOS RESUELTOS

1) Calcular el valor de las siguientes expresiones:

a) $$\left[\log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right) + 6\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}\right) - 2\log_{\frac{1}{16}}\left(\frac{1}{4}\right)\right] \div \log_{\sqrt{2}}\sqrt[5]{8}$$

$$= \left[\log_{2^{-1}} 2^{-1} + 6\log_{2^{-2}} 2^{-1} - 2\log_{2^{-4}} 2^{-2}\right] \div \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^{\frac{3}{5}} = (1+3-1) \div \frac{6}{5} = \frac{5}{2}$$

b) $$\left[\log_{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{5}\right)\right]\sqrt{\log_{\frac{1}{5}}\left(5\sqrt{5}\right) + \log_{\sqrt{5}}\left(5\sqrt{5}\right)}$$

$$= \left[\log_{5^{\frac{1}{2}}}\left(5^{-1}\right)\right]\sqrt{\log_{5^{-1}}\left(5\times 5^{\frac{1}{2}}\right) + \log_{5^{\frac{1}{2}}}\left(5\times 5^{\frac{1}{2}}\right)} = (-2)\sqrt{\log_{5^{-1}} 5^{\frac{3}{2}} + \log_{5^{\frac{1}{2}}} 5^{\frac{3}{2}}}$$

$$= (-2)\sqrt{-\frac{3}{2}+3} = (-2)\sqrt{\frac{3}{2}} = (-2)\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = (-2)\frac{\sqrt{6}}{2} = -\sqrt{6}$$

2) Exprese en forma exponencial:

a) $\log_3\left(\frac{1}{243}\right) = -5 \quad \Longrightarrow \quad 3^{-5} = \frac{1}{243}$ b) $\log_2 32 = 3x+4 \quad \Longrightarrow \quad 2^{3x+4} = 32$

3) Exprese en forma logarítmica:

a) $3^{-4} = \frac{1}{81} \quad \Longrightarrow \quad \log_3\left(\frac{1}{81}\right) = -4$ b) $(0{,}9)^t = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \log_{0,9}\left(\frac{1}{2}\right) = t$

4) Calcule los siguientes números:

a) $\log_4\left(\frac{1}{16}\right) = \log_4 4^{-2} = -2\log_4 4 = -2$ b) $5^{\log_5 4} = 4$; por propiedad.

c) $\log_4(-2) =$ No existe. d) $e^{2+\ln 3} = e^2 . e^{\ln 3} = 3.e^2 = 3e^2 = 22{,}1672$

e) $\ln e^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\ln e = \frac{2}{3}$

5) Expresar el logaritmo dado en términos de logaritmos más sencillos:

a) $log_a\left(\frac{y^5w^2}{x^4z^3}\right)=log_a\, y^5w^2-log_a\, x^4z^3=log_a\, y^5+log_a\, w^2-\left[log_a\, x^4+log_a\, z^3\right]$

$=5\,log_a\, y+2\,log_a\, w-4\,log_a\, x-3\,log_a\, z$

b) $ln\sqrt[4]{\frac{x^7}{y^5z}}=\frac{1}{4}ln\left(\frac{x^7}{y^5z}\right)=\frac{1}{4}\left[ln\,x^7-ln\,y^5z\right]=\frac{1}{4}\left[ln\,x^7-\left(ln\,y^5+ln\,z\right)\right]=\frac{1}{4}\left[7\,ln\,x-5\,ln\,y-ln\,z\right]$

$=\frac{7}{4}ln\,x-\frac{5}{4}ln\,y-\frac{1}{4}ln\,z$

6) Escriba la expresión como un solo logaritmo

a) $log_a\, x+\frac{1}{3}log_a(x-2)-5\,log_a(2x+3)$

$=log_a\, x+log_a\sqrt[3]{x-2}-log_a(2x+3)^5=log_a\left[\frac{x\left(\sqrt[3]{x-2}\right)}{(2x+3)^5}\right]$

b) $ln\,y^3+\frac{1}{3}ln\left(x^3y^6\right)+5\,ln\,y$

$=ln\,y^3+ln\sqrt[3]{x^3y^6}+ln\,y^5=ln(y^3)\left[\sqrt[3]{x^3y^6}\left(y^5\right)\right]=ln\left(\sqrt[3]{x^3y^6}.y^8\right)=ln\,x\,y^{10}$

7) Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $3^{x+4}=2^{1-3x}$; Como las bases son diferentes tomamos logaritmo en ambos miembros

$log\,3^{x+4}=log\,2^{1-3x}$; $(x+4)log\,3=(1-3x)log\,2$; $x\,log\,3+4\,log\,3=log\,2-3\,x\,log\,2$

$x\,log\,3+3x\,log\,2=log\,2-4\,log\,3$; $x(log\,3+log\,8)=log\,2-log\,81$

$x=\frac{log\,2-log\,81}{log\,3+log\,8}$; $x=-1{,}16464$

b) $log_x\,\frac{x^{4x-6}+1}{2}=2x-3$

$x^{2x-3}=\frac{x^{4x-6}+1}{2}$; $2x^{2x-3}=x^{2(2x-3)}+1$; Si: $x^{2x-3}=a \Rightarrow x^{2(2x-3)}=a^2$

$2a=a^2+1$; $a^2-2a+1=0$; $(a-1)(a-1)=0$; $a_1=a_2=1$

Como $a=x^{2x-3}$: reemplazamos el valor en a

$x^{2x-3}=1$; $x^{2x-3}=x^0$; $2x-3=0$; $x=\frac{3}{2}$

c) $log\sqrt{x^3-9}=2$; Por definición tenemos:

$10^2=\sqrt{x^3-9}$

$\left(10^2\right)^2=\left(\sqrt{x^3-9}\right)^2$; $10^4=x^3-9$; $10000+9=x^3$; $x^3=10009$; $x=21{,}6$

d) $x^{\sqrt{log\,x}}=10^8$; tomando: logaritmos en ambos miembros

$\sqrt{log\,x}\;log\,x=8\,log\,10$

$\sqrt{\log x}\,\log x=8$; $\log^3 x=64$; $10^4=x$; $x=10^4$

e) $log(x^3)=(log\,x)^3$

$3\log x=\log^3 x$; $\log^3 x-3\log x=0$

$log\,x\left(log^2 x-3\right)=0$; $\log x=0\Rightarrow 10^0=x;$; $x=1$

$\log^2 x-3=0$; $\left(log\,x+\sqrt{3}\right)\left(log\,x-\sqrt{3}\right)=0$

$\log x=-\sqrt{3}\Rightarrow 10^{-\sqrt{3}}=x$; $x=0{,}0185$

$\log x=\sqrt{3}\Rightarrow 10^{\sqrt{3}}=x$; $x=53{,}9574$

f) $log_2\left(4^x+4\right)=x+log_2\left(2^{x+1}-3\right)$

$log_2\left(4^x+4\right)=log_2\,2^x+log_2\left(2^{x+1}-3\right)$

$log_2\left(4^x+4\right)=log_2\left[2^x\left(2^{x+1}-3\right)\right]$

$4^x+4=2^{2x+1}-3(2^x)$

$2^{2x}+4-2^{2x+1}+3\times 2^x=0$; $2^{2x}-2.2^{2x}+3.2^x+4=0$; $-2^{2x}+3.2^x+4=0$

$2^{2x}-3.2^x-4=0$

Si: $2^x=a$, entonces $2^{2x}=a^2$; $a^2-3a-4=0$; $(a-4)(a+1)=0$

$a_1=4 \quad \vee \quad a_2=-1$; Como $a=2^x$, reemplazamos los valores de a_1 y a_2

$4=2^x \quad \vee \quad -1=2^x$; no existe

$2^2=2^x$

$x=2$

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

Simplificar:

1) $e^{ln5}+2^{log_2 4}+10^{log3}-3^{log_3 10}$

2) $49^{log_7 5}+10^{1-log2}-3^{log_9 36}$

3) $3^{1+log_3 4}+2^{log_2 3-2}$

4) $\left(\sqrt{5}^{\log_5 4}+\log_2\left(\frac{1}{4}\right)-\log_4 2\right)\log_{\sqrt{3}} 9$

5) $log_4\,log_2\,log_3\,81$

6) $-log_2\,log_2\sqrt{\sqrt[4]{2}}$

7) $2\,log_5\sqrt[4]{5}+\frac{1}{2}log_{\sqrt{5}}\,25-log_5^2\sqrt{5}-2$

Respuestas:

1) 2 2) 24 3) $\frac{51}{4}$ 4) -2 5) $\frac{1}{2}$ 6) 3 7) $\frac{1}{4}$

Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

1) $log_{10}(2x+50)=2$

2) $log_6(2x-3)=log_6\,12-log_6\,3$

3) $ln(-4-x)+ln3=ln(2-x)$

4) $log\left(4^{-1}\cdot 2^{\sqrt{x}}-1\right)-1=log\left(\sqrt{2^{\sqrt{x}-2}}+2\right)-2\,log\,2$

5) $log_2(16x)-log_2(x+1)=3\,log_2\,4$

6) $log_8\left(\frac{8}{x^2}\right)=3(log_8\,x)^2$

7) $log_2\left(9^{x-1}+7\right)=2+log_2\left(3^{x-1}+1\right)$

8) $2\,log(log\,x)=log(7-2\,log\,x)-log\,5$

9) $log_x\,2.\,log_{\frac{x}{16}}\,2=log_{\frac{x}{64}}\,2$

10) $\log_{\sqrt{2x-1}}(2x-3)=2\log_8 4+\log_2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$

11) $\dfrac{log\left(35-x^3\right)}{log(5-x)}=3$

12) $log\,2+log\left(4^{x-2}+9\right)=1+log\left(2^{x-2}+1\right)$

13) $log_4\,log_2\,log_3(2x-1)=\dfrac{1}{2}$

14) $2\,log\,2+\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)log\,3=log\left(3^{\frac{1}{x}}+27\right)$

15) $\dfrac{1}{5-4\,log(x+1)}=3-\dfrac{1}{1+log(x+1)}$

16) $log\,(x-5)-\dfrac{1}{2}log\,(3x-20)=log\,2$

17) $\sqrt{log_2\,x^4}+4\,log_2\left(\sqrt[4]{\dfrac{2}{x}}\right)=2$

18) $3^x=2^{x+1}$

19) $\left(\sqrt[3]{x}\right)^{\log_x\left(x^2+2\right)}=2\,\log_3 27$

20) $\log_x\left(5x^2\right)\left[\log_5 x\right]^2=1$

21) $\log_{1-2x}\left(6x^2-5x+1\right)-\log_{1-3x}\left(4x^2-4x+1\right)=2$

22) $\log_x 5\sqrt{5}-\dfrac{5}{4}=\left(\log_x\sqrt{5}\right)^2$

Respuestas:

1) 25 2) $\dfrac{7}{2}$ 3) -7 4) 36 5) ϕ

6) $2;\dfrac{1}{8}$ 7) 1 ; 2 8) 10 9) 4 ; 8 10) $\dfrac{5}{2}$

11) 2 ; 3 12) 2 ; 4 13) 41 14) $\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4}$

15) 13.17 ; −0.78 16) 7 , 15 17) 2 18) 1.7095 19) 5

20) $\sqrt{5};\dfrac{1}{5}$ 21) $\dfrac{1}{4}$ 20) $5,\sqrt[5]{5}$

EJERCICIOS DE REFUERZO

Calcular el valor de las siguientes expresiones:

1) $\left[log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\dfrac{1}{4}}\right)+6\,log_{\frac{1}{4}}\left(\dfrac{1}{2}\right)-2\,log_{\frac{1}{16}}\left(\dfrac{1}{4}\right)\right]\div log_{\sqrt{2}}\sqrt[5]{8}$

2) $\left[log_{\sqrt{5}}\left(5^{-1}\right)\right]\sqrt{log_{\frac{1}{5}}\left(5\sqrt{5}\right)+log_{\sqrt{5}}\left(5\sqrt{5}\right)}$

3) $log_{64}\,log_{\frac{4}{9}}\,log_{\sqrt{8}}\,log_{\sqrt{3}}\,3$

4) $9^{2log_3 2+4log_{81}2}\cdot\sqrt{3^{log_3 9+log_3\sqrt{16}}}$

5) $log_{0.4}\left(\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{50}\right)+log\,0.6\left(\dfrac{\sqrt{15}}{5}\right)+log_{0.32}\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{5}\right)$

6) $\left[log_7\left(\dfrac{\sqrt[3]{7}}{49}\right)\right]\left[log_4\,0.25\right]$

7) $2\,log_{\frac{1}{4}}32-3\,log_{\frac{1}{8}}\sqrt[3]{16}+\dfrac{5}{2}log_{343}49-\dfrac{2}{3}log_4\,8^{-\frac{3}{2}}$

8) $log_{0.4}\left(\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{50}\right)+log_{0.6}\left(\dfrac{\sqrt{15}}{5}\right)+log_{0.32}\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{5}\right)$

Respuestas:

1) $\dfrac{5}{2}$ 2) $-\sqrt{6}$ 3) $-\dfrac{1}{6}$ 4) 384 5) $\dfrac{4}{3}$ 6) $\dfrac{5}{3}$ 7) $-\dfrac{1}{2}$ 8) $\dfrac{4}{3}$

Funciones Trascendentes

Resolver las siguientes ecuaciones:

1) $log_4\left(\frac{2}{x-1}\right)=log_4(4-x)$

2) $log_{\sqrt{2}}\left(\frac{x^2-4x+3}{4}\right)=-2$

3) $log(4{,}5-x)=log\,4{,}5-log\,x$

4) $log\sqrt{x-5}+log\sqrt{2x-3}+1=log\,30$

5) $log\left(x^3+27\right)-0{,}5\,log\left(x^2+6x+9\right)=3\,log\sqrt[3]{7}$

6) $x^{\frac{log\,x+7}{4}}=10^{log\,x+1}$

7) $\frac{log\,2+log\left(4-5x-6x^2\right)}{log\sqrt[3]{2x-1}}=3$

8) $log_{\frac{1}{2}}\,log_8\,\frac{x^2-2x}{x-3}=0$

9) $\sqrt{log_2\left(x^4\right)}+4\,log_2\left(\sqrt[4]{\frac{2}{x}}\right)=2$

10) $1+2\,log_x\,2\times log_4(10-x)=\frac{2}{log_4\,x}$

11) $3+\left[log_x\left(log_3\,x\right)\right]=0$

12) $log^2(100x)+log^2(10x)=14\,log\,x+15$

13) $log^2_{\frac{1}{2}}(4x)+log_2\left(\frac{x^2}{8}\right)=8$

14) $log_2\left[log_3\left(x^2-16\right)\right]-log_{\frac{1}{2}}\left[log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{x^2-16}\right)\right]=2$

15) $\left(\sqrt{x}\right)^{log_5\,x-1}=5$

16) $log_x\left(2x^{x-2}-1\right)+4=2x$

17) $x^{(log_3\,x)^2-3log_3\,x}=3^{8-3log_{\sqrt{7}}(4)}$

18) $log\left(3^x-2^{4-x}\right)=2+0.25\,log\,16-0.5x\,log\,4$

19) $3\,log\,2+log\left(2^{\sqrt{x-1}-1}-1\right)=log\left(0.4\sqrt{2^{\sqrt{x-1}}}+4\right)+1$

20) $x^2\,log_2\left(\frac{3+x}{10}\right)-x^2\,log_{\frac{1}{2}}(2+3x)=x^2-4+2\,log_{\sqrt{2}}\left(\frac{3x^2+11x+6}{10}\right)$

21) $log_4(x+12)\cdot log_x\,2=1$

22) $8+log_3\left(4^{log_3\,x}\right)=log_3\left(36^{log_3\,x}\right)$

23) $\left(log_{\frac{1}{2}}\,x\right)^2+2\,log_2\left(\frac{1}{x}\right)-8=0$

24) $log_x(ax)\,log_a\,x=1+log_x\sqrt{a}$

25) $log_{3\sqrt{x}}(x)+log_{3x}\sqrt{x}=0$

26) $3\,log_{a^2x}(x)+\frac{1}{2}log_{\frac{x}{\sqrt{a}}}(x)=2$

27) $\frac{2\,log\,2+log(x-3)}{log(7x+1)+log(x-6)+log\,3}=\frac{1}{2}$

28) $(0{,}4)^{1+(log\,x)^2}=(6{,}25)^{2-log\,x^3}$

29) $log_9(2x)\cdot log_2\,9=6$

30) $\log_9 125+\log_{\sqrt{3}}\left(\sqrt[4]{27}\right)=x\log_9 225$

31) $log_{19}\,8x+log_4\,19=4$

32) $log_4\left\{2\,log_3\left[1+log_2\left(1+3\,log_2\,x\right)\right]\right\}=\frac{1}{2}$

33) $log_2\,log_4\,log_2\,x+log_4\,log_2\,log_2\,x=2$

34) $x=\left[log\;27-log_{0.5}\left(\frac{1}{3}\right)\right]+\left[\frac{log_3\,12}{log_{36}\,3}-\frac{log_3\,4}{log_{108}\,3}\right]$

35) $log\left(x^{log\,x}\right)-log\,x-6=0$

36) $log_a(ax)\,log_x(ax)=log_{a^2}\left(\frac{1}{a}\right)$

37) $2\,log_{25}\left(5^{2\,Sen\,x}-4\right)=2\,Sen\,x+Sen\,\frac{3\pi}{2}$

38) $4^x=2\times14^x+3\times49^x$

39) $log_4(x+12)\,log_x\,2=1$

40) $\frac{log_8\left(\frac{8}{x^2}\right)}{(log_8\,x)^2}=3$

Respuestas:

1) $x=2$; $x=3$ 2) $x=2\pm\sqrt{3}$ 3) $x=\frac{3}{2}$; $x=3$ 4) $x=6$

5) $x=1$; $x=2$ 6) $x=10$; $x=\frac{1}{10^4}$ 7) ϕ 8) $x=4$; $x=6$

9) $x=2$ 10) $x=2$; $x=8$ 11) $x=\sqrt[3]{3}$ 12) $x=10^{-1}$; $x=10^5$

13) $x=2^{-7}$; $x=2$ 14) $x=5$; $x=-5$ 15) $x=\frac{1}{5}$; $x=25$ 16) $x=2$

17) $x=\frac{1}{9}$; $x=9$ 18) $x=3$ 19) $x=17$ 20) $x=1$; $x=2$

21) $x=4$ 22) $x=81$ 23) $x=16$; $x=\frac{1}{4}$

24) $x=a^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$; $x=a^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ 25) $x=1$; $x=0.267$ 26) $x=a$; $x=a\sqrt[3]{a}$

27) $x=9$ 28) $x=10$; $x=10^5$ 29) 32 30) $\frac{3}{2}$

31) 32 32) $x=2$ 33) $x=2^{16}$ 34) $x=2$

35) $x=10^3$; $x=\frac{1}{10^2}$ 36) $x=a^{\frac{1}{2}}$; $x=\frac{1}{a^2}$ 37) $x=30°$; $x=150°$

38) $x=-0.877$ 39) $x=4$ 40) $x=\frac{1}{8}$; $x=2$

10.5. SISTEMAS DE ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

EJERCICIOS RESUELTOS

Resolver los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} 1) & \log x+3\log y=2 \\ 2) & 2\log x+5\log y=1 \end{cases}$$

Aplicando propiedades en 1) se obtiene: $\log x+3\log y=2$, $\log xy^3=2$, $10^2=xy^3$

3) $x=\frac{10^2}{y^3}$

Aplicando propiedades en 2) se obtiene: $2\log x+5\log y=1$, $\log x^2y^5=1$

4) $10=x^2y^5$

Sustituyendo 3) en 4)

$10=\left(\frac{10^2}{y^3}\right)^2\times y^5$, $10=\frac{10^4}{y^6}\times y^5$, $10=\frac{10^4}{y}$, 5) $y=10^3$

Sustituyendo 5) en 3)

$x=\frac{10^2}{(10^3)^3}$; $x=\frac{1}{10^7}$; $x=10^{-7}$

Solución: $(10^{-7}, 10^3)$

$$\begin{cases} 1) & \log_a x + \log_a y + \log_a 4 = 2\log_a 3a \\ 2) & x + y - 5a = 0 \end{cases}$$

Aplicando propiedades en 1) se obtiene:

$\log_a x + \log_a y + \log_a 4 = 2\log_a 3a$, $\log_a 4xy = \log_a 9a^2$, $4xy = 9a^2$

3) $x = \dfrac{9a^2}{4y}$; sustituyendo en 2) tenemos:

$$x + y - 5a = 0$$
$$\frac{9a^2}{4y} + y - 5a = 0$$
$$\frac{9a^2 + 4y^2 - 20ay}{4y} = 0$$
$$4y^2 - 20ay + 9a^2 = 0$$

$$y = \frac{20a \pm \sqrt{400a^2 - 4(4)(9a^2)}}{8} \quad , \quad y = \frac{20a \pm \sqrt{400a^2 - 144a^2}}{8}$$

$$y = \frac{20a \pm 16a}{8} \quad ,$$

$$y_1 = \frac{20a + 16a}{8} \qquad y_2 = \frac{20a - 16a}{8}$$

$$y_1 = \frac{36a}{8} \qquad y_2 = \frac{4a}{8}$$

$$y_1 = \frac{9}{2}a \qquad y_2 = \frac{1}{2}a$$

y_1 en 3) ^ y_2 en 3)

$$x = \frac{9a^2}{18a} \qquad x = \frac{9a^2}{2a}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}a \qquad x_2 = \frac{9}{2}a$$

Solución: $\left(\frac{1}{2}a, \frac{9}{2}a\right), \left(\frac{9}{2}a, \frac{1}{2}a\right)$

$$\begin{cases} 1) & \log^2 x + \log^2 y = 10\log^2 a \\ 2) & x \cdot y = a^2 \end{cases}$$

Aplicando logaritmos en la ecuación 2) se obtiene:

$$\log(x \cdot y) = \log a^2$$
$$\log x + \log y = 2\log a$$
$$\log x = 2\log a - \log y \quad ; \text{ reemplazando en 1)}$$

$$\Rightarrow (2\log a - \log y)^2 + \log^2 y = 10\log^2 a$$
$$4\log^2 a - 4\log a \log y + \log^2 y + \log^2 y = 10\log^2 a$$
$$-6\log^2 a - 4\log a \log y + 2\log^2 y = 0$$
$$\log^2 y - 2\log a \log y - 3\log^2 a = 0$$

$(\log y - 3\log a)\ (\log y + \log a) = 0$

$\log y = 3\log a$ $\qquad$ $\log y = -\log a$

$\log y = \log a^3$ $\qquad$ $\log y = \log a^{-1}$

$y_1 = a^3$ $\qquad$ $y_2 = \dfrac{1}{a}$

Sustituyendo los valores de y en 2) tenemos:

$x \cdot y = a^2$ $\qquad$ $x \cdot y = a^2$

$x \cdot a^3 = a^2$ $\qquad$ $x \cdot \dfrac{1}{a} = a^2$

$x_1 = \dfrac{1}{a}$ $\qquad$ $x_2 = a^3$

Solución: $\left(\dfrac{1}{a}, a^3\right), \left(a^3, \dfrac{1}{a}\right)$

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

Resolver los siguientes sistemas:

1) $\begin{cases} 3^x.2^y = 576 \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_2(x+y) - \log_2(x-y) = 1 \\ x^2 - y^2 = 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log(x^2+y^2) - 1 = \log 13 \\ \log(x+y) - \log(x-y) = 3\log 2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \log^2(xy) - \log^2 \dfrac{x}{y} = 8 \\ 2^{\log x} = 4^{\log y} \end{cases}$

5) $\begin{cases} \sqrt[x-y]{x+y} = 2\sqrt{3} \\ (x+y)2^{y-x} = 3 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2^{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 512 \\ \log\sqrt{xy} = 1 + \log 2 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 9^{-1}\sqrt[y]{9^x} - 27\sqrt[x]{27^y} = 0 \\ \log(x-1) - \log(1-y) = 0 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 10^{2-\log(x-y)} = 25 \\ \log(x-y) + \log(x+y) = 1 + 2\log 2 \end{cases}$

Respuestas:

1) $(2\,;6)$ $\qquad$ 2) $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ $\qquad$ 3) $(9\,.7)$ $\qquad$ 4) $\left(\dfrac{1}{100}, \dfrac{1}{10}\right);(100, 10)$

5) $(7\,;5)$ $\qquad$ 6) $(16, 25);(25\,, 16)$ $\qquad$ 7) $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ $\qquad$ 8) $(7\,;3)$

EJERCICIOS DE REFUERZO

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

1) $\begin{cases} 2^x = 16 \\ \log(x^2 - 5x + 5) = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3^{x^2+x-2} = 1 \\ \log(2-x) + \log x = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2^{\log x} = 4 \\ (\log x)^2 - \log x^3 + 2 = 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 10^{1+\log(x+y)} = 50 \\ \log(x-y) + \log(x+y) = 2 - \log 5 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log(x^2+y^2) = 2 - \log 5 \\ \log(x+y) + \log(x-y) = \log 1{,}2 + 1 \end{cases}$

Funciones Trascendentes

6) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = \dfrac{5}{2} \\ xy = 27 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \log(x^2 + y^2) = 2 \\ \log_2 x - 4 = \log_2 3 - \log_2 y \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2^{x+y} = 8 \\ 4^{3x-2y} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

9) $\begin{cases} \sqrt[y]{x-y} = 3 \\ 5^y = 225(x-y)^{-1} \end{cases}$

10) $\begin{cases} 2^x(x+y) = 36 \\ \sqrt[x]{x+y} = 3 \end{cases}$

11) $\begin{cases} \log_x 27 = \log_y 216 \\ xy = 18 \end{cases}$

12) $\begin{cases} \sqrt[xy]{a^{3x-2y}} = 1 \\ \sqrt[y]{a} = \sqrt[6x]{a^{5x-6}} \end{cases}$

13) $\begin{cases} \ln x + \ln y = 0 \\ x + \dfrac{1}{y} = 2e \end{cases}$

14) $\begin{cases} \log_2^2(xy) - \log_2^2\left(\dfrac{x}{y}\right) = 8 \\ 3^{\log_4 x} = \sqrt{3}^{\log_4 y} \end{cases}$

15) $\begin{cases} \sqrt[x-y]{x+y} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} \\ (x+y)2^{y-x} = 48 \end{cases}$

16) $\begin{cases} (x+y)3^{y-x} = \dfrac{5}{27} \\ 3\log_5(x+y) = x-y \end{cases}$

17) $\begin{cases} \log_2 \log_3(x+y) = 1 \\ \log x + \log y = 3\log 2 \end{cases}$

18) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}\log x + \dfrac{1}{2}\log y - \log\left(4 - \sqrt{x}\right) = 0 \\ \left(25^{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{y}} - 125 \times 5^{\sqrt{y}} = 0 \end{cases}$

19) $\begin{cases} x^2 = 1 + 6\log_4 y \\ y^2 = 2^x y + 2^{2x+1} \end{cases}$

20) $\begin{cases} x^y = a^c \\ c\log_a x + y = 2c \end{cases}$

21) $\begin{cases} 11\log_5\left(\dfrac{x}{y}\right) - 5\log_{25}\left(\dfrac{x}{y}\right)^4 + \dfrac{\log\left(\dfrac{x}{y}\right)}{\log 5} = 4 \\ \log_{15}\left(\dfrac{x}{9y+48}\right) = 0 \end{cases}$

22) $\begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 77 \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^y = 7 \end{cases}$

23) $\begin{cases} x^{y+1} = 27 \\ x^{2y-5} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

24) $\begin{cases} \left(\dfrac{3}{2}\right)^{x-y} - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-y} = \dfrac{65}{36} \\ xy - x + y = 118 \end{cases}$

25) $\begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 12 \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2} \end{cases}$

26) $\begin{cases} 10^{2-\log(x-y)} = 25 \\ \log(x-y) + \log(x+y) = 1 + 2\log 2 \end{cases}$

27) $\begin{cases} \log_4 xy + 3\dfrac{\log_4 x}{\log_4 y} = 0 \\ \log_4\left(\dfrac{x}{y}\right) - \log_4 x \cdot \log_4 y = 0 \end{cases}$

28) $\begin{cases} 8^{2x+1} = 32 \cdot 2^{4y-1} \\ 5 \cdot 5^{x-y} = \sqrt{25^{2y+1}} \end{cases}$

29) $\begin{cases} \log_a x + \log_a y = 2 \\ \log_b x - \log_b y = 4 \end{cases}$

30) $\begin{cases} \sqrt[10]{2^x}\,\sqrt{\sqrt[5]{2^y}} = \sqrt[x]{128} \\ \log(x+y) = \log 40 - \log(x-y) \end{cases}$

Respuestas:

1) $x = 4$ 2) $x = 1$ 3) $x = 100$ 4) $\left(\dfrac{9}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$

5) $(4;2), (4,-2)$ 6) $(9;3), (3,9)$ 7) $(6;8), (8,6)$ 8) $(1;2)$

9) $(11;2)$ 10) $(2;7)$ 11) $(3;6)$ 12) $(2;3)$

13) $\left(e, \dfrac{1}{e}\right)$ 14) $(2;4), \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}\right)$ 15) $(5;7)$ 16) $(4;1)$

17) $(8;1),(1;8)$ 18) $(1;9),(4;1)$ 19) $(4;32),(-1;1)$ 20) $x=a\ ,\ y=c$

21) $(75;3)$ 22) $(4;1)$ 23) $(3;2)$ 24) $(-10;-12);\ (12;10)$

25) $\left(\frac{1}{6};\frac{1}{4}\right);\left(\frac{1}{4};\frac{1}{6}\right)$ 26) $(7;3)$ 27) $\left(\frac{1}{8};64\right);\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$

28) $\left(\frac{3}{14};\frac{1}{14}\right)$ 29) $\left(ab^2;\frac{a}{b^2}\right)$ 30) $(7;3)$

10.6 ANÁLISIS DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Analizar y graficar las siguientes funciones:

1) $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}-2$

a) Puntos de corte:

Si: $x=0 \Rightarrow y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}-2$; $y=6$; $P(0,6)$

Si: $y=0 \Rightarrow 0=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}-2$; $2=2^{3-x}$; $1=3-x$; $x=2$; $P(2,0)$

b) Dominio:

Como el exponente es un polinomio no existe restricción, $Dom\,f=x\in\Re$

c) Rango:

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}-2$; $y+2=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$, Tomando logaritmos en base $\frac{1}{2}$ en ambos miembros tenemos:

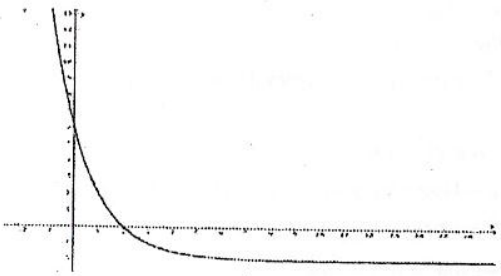
$log_{\frac{1}{2}}(y+2)=log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$; $log_{\frac{1}{2}}(y+2)=x-3$; $x=log_{\frac{1}{2}}(y+2)+3$

C.E: $y+2>0$; $y>-2$; $Rgo\,f=y\in\,]-2,+\infty[$

d) Asíntotas:

No existe $A.V.$; $y=-2$ $A.H.$

e) Gráfico:



2) $f(x)=4^{\frac{x+1}{x-2}}$

a) **Puntos de corte:**

Si: $x=0 \quad \Rightarrow \quad y=4^{-\frac{1}{2}} \quad ; \quad y=\frac{1}{\sqrt{4}} \quad ; \quad y=\frac{1}{2} \quad ; \quad P\left(0,\frac{1}{2}\right)$

Si: $y=0 \quad \Rightarrow \quad 0=4^{\frac{x+1}{x-2}} \quad ; \quad log_4\, 0=log_4\, 4^{\frac{x+1}{x-2}}$; Como no existe $\log_4 0$, la curva no corta al eje x

b) **Dominio:**

Como el exponente es una fracción, debemos restringir el denominador $x \neq 2$

$Dom\, f = x \in \Re - \{2\}$

c) **Rango:**

$y=4^{\frac{x+1}{x-2}}$, Tomando logaritmos en base 4 en ambos miembros tenemos:

$log_4\, y = log_4\, 4^{\frac{x+1}{x-2}} \; ; \; log_4\, y=\frac{x+1}{x-2} \quad ; \quad x\, log_4\, y - 2\, log_4\, y = x+1 \quad ; \quad (log_4\, y-1)x = 2\, log_4\, y+1$

$x=\frac{2\, log_4\, y+1}{log_4\, y-1} \quad \Rightarrow \quad$ C.E: $y>0 \quad \wedge \quad log_4\, y-1 \neq 0$

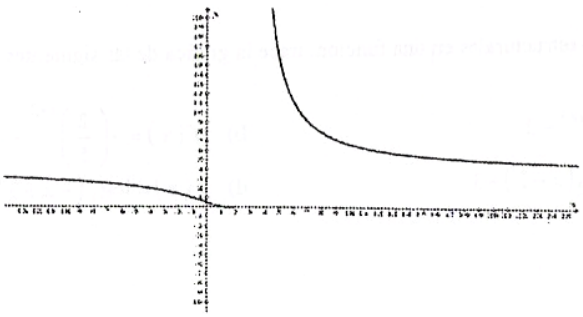
$log_4\, y \neq 1 \quad ; \quad log_4\, y \neq log_4\, 4 \quad ; \quad y \neq 4$

$Rgo\, f = y \in \left]0,+\infty\right[- \{4\}$

d) **Asíntotas:**

$x=2 \quad A.V. \quad ; \quad y=4 \quad A.H.$

e) **Gráfico:**



3) $f(x)=e^{3x-x^2}$

a) **Puntos de corte:**

Si: $x=0 \quad \Rightarrow \quad y=e^0 \quad ; \quad y=1 \quad ; \quad P(0,1)$

Si: $y=0 \quad \Rightarrow \quad 0=e^{3x-x^2} \quad ; \quad ln\, 0 = ln\, e^{3x-x^2}$ Como no existe $ln\ 0$, la curva no corta al eje x

b) **Dominio:**

Como el exponente es un polinomio no existe restricción , $Dom\, f = x \in \Re$

c) Rango:

$y = e^{3x-x^2}$; $ln\, y = ln\, e^{3x-x^2}$; $ln\, y = 3x - x^2$; $x^2 - 3x + ln\, y = 0$

$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 4\, ln\, y}}{2}$; C.E: $y > 0$; $9 - 4\, ln\, y \geq 0$, $4 \ln y \leq 9$; $\ln y \leq \dfrac{9}{4}$

$ln\, y \leq ln\, e^{\frac{9}{4}}$; $y \leq e^{\frac{9}{4}}$; $Rgo\, f = y \in \left]0, e^{\frac{9}{4}}\right]$

d) Asíntotas:

No existe $A.V.$; $y = 0$ $A.H.$

e) Intervalos de positividad:

Como no existe puntos de corte con el eje x ni asíntotas verticales, la gráfica solo toma valores positivos para y hasta el valor de $e^{\frac{9}{4}}$

f) Puntos de retorno:

$f(x) - f(a) = 0$

$e^{3x-x^2} - e^{3a-a^2} = 0$; $e^{3x-x^2} = e^{3a-a^2}$; $3x - x^2 - 3a + a^2 = 0$; $3(x-a) - (x^2 - a^2) = 0$

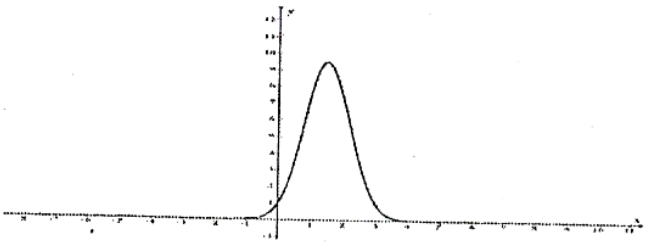
$(x-a)[3-(x+a)] = 0$; $x = a$ reemplazamos en $[3-(x+a)] = 0$, obteniendo:

$3 - 2x = 0$; $x = \dfrac{3}{2}$

Con el valor $x = \dfrac{3}{2}$ determinamos el valor de y

$y = e^{3\left(\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^2}$; $y = e^{\frac{9}{4}}$, Entonces: $Pmáx = \left(\dfrac{3}{2}, e^{\frac{9}{4}}\right)$

e) Gráfico:



4) $f(x) = log_{\frac{1}{2}}(-x+2)$

a) Puntos de corte:

Si: $x = 0$ $\Rightarrow$ $y = log_{\frac{1}{2}} 2$; $y = log_{2^{-1}} 2$; $y = -1$; $P(0, -1)$

Si: $y = 0$ $\Rightarrow$ $0 = log_{\frac{1}{2}}(-x+2)$; $\left(\dfrac{1}{2}\right)^0 = -x + 2$; $x = 1$; $P(1, 0)$

b) Dominio:

$y = log_{\frac{1}{2}}(-x+2)$; **C.E:** $-x+2>0$; $x<2$; $Dom\, f =]-\infty, 2[$

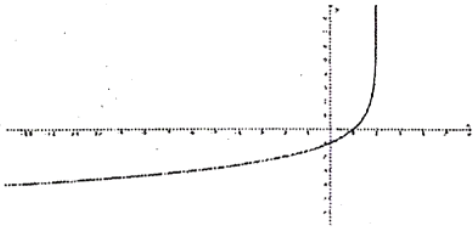
c) Rango:

$y = log_{\frac{1}{2}}(-x+2)$; $\left(\frac{1}{2}\right)^y = -x+2$; $x = 2-\left(\frac{1}{2}\right)^y$, Como y es exponente polinomial no existe restricción: $Rgo\, f = y \in \Re$

d) Asíntotas:

$x = 2$ $A.V.$; No existe $A.H.$

e) Gráfico:



5) $f(x) = log_2\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$

a) Puntos de corte:

Si: $x=0 \Rightarrow y = log_2\left(-\frac{1}{4}\right)$; No existe el logaritmo de un número negativo por lo tanto no existe punto de corte con el eje y

Si: $y=0 \Rightarrow 0 = log_2\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$; $2^0 = \frac{x+1}{x-4}$; $x-4 = x+1$; $-4 = 1$ Absurdo, por lo tanto no existe punto de corte con el eje x

b) Dominio:

$y = log_2\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$; **C.E:** $\frac{x+1}{x-4} > 0$;

$Dom\, f = x \in]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[$

c) Rango:

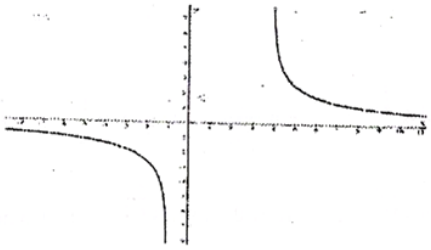
$y = log_2\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$; $2^y = \frac{x+1}{x-4}$; $2^y x - 4.2^y = x+1$, $2^y x - x = 4.2^y + 1$

$(2^y - 1)x = 4.2^y + 1$, $x = \frac{4.2^y+1}{2^y-1}$, $2^y - 1 \neq 0$, $2^y \neq 2^0$, $y \neq 0$, $Rgo\, f = y \in \Re - \{0\}$

d) Asíntotas:

$x = -1 \wedge x = 4$ $A.V.$ $y = 0$ $A.H.$

e) Gráfico:



EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

1) Determine el dominio y rango de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\log_3(x+2)$ **b)** $f(x)=\log\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$ **c)** $f(x)=2^{(-x+5)}$

d) $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+2x+1}$ **e)** $f(x)=3^{\frac{x-2}{1-x}}$ **f)** $f(x)=3^{\ln(2x+1)}$

Respuestas:

a) $Dom\, f: x\in\,]-2,+\infty[$
$Rgo\, f: y\in\Re$

b) $Dom\, f:\ x<-2\ \cup\ x>2$
$Rgo\, f: y\in\Re-\{0\}$

c) $Dom\, f: x\in\Re$
$Rgo\, f: y\in\,]0,+\infty[$

d) $Dom\, f: x\in\Re$
$Rgo\, f: y\in\,]0,1]$

e) $Dom\, f: x\in\Re-\{1\}$
$Rgo\, f: y\in\,]0,+\infty[-\left\{\frac{1}{3}\right\}$

f) $Dom\, f: x\in\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$
$Rgo\, f: y\in\,]0,+\infty[$

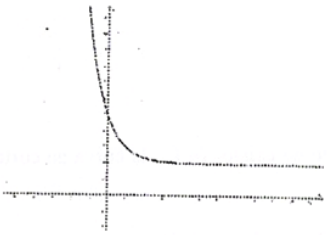
2) Aplicando cambios estructurales en una función, trace la gráfica de las siguientes funciones:

a) $f(x)=3^{(-x+1)}+2$ **b)** $f(x)=-\left(\frac{2}{5}\right)^{x+2}-1$

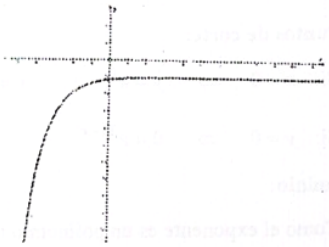
c) $f(x)=-\log_3(x-2)+3$ **d)** $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(-x+3)-2$

Respuestas:

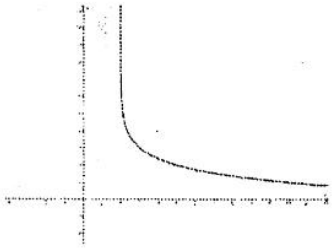
a)



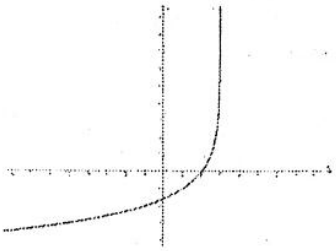
b)



c)



d)



3) Determinar el dominio y rango de la función $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}$

Respuesta: $Dom\, f: x\in\Re-\{0\}$; $Rgo\, f: y\in\left]-\infty,0\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

4) Sea $f: A\to B$

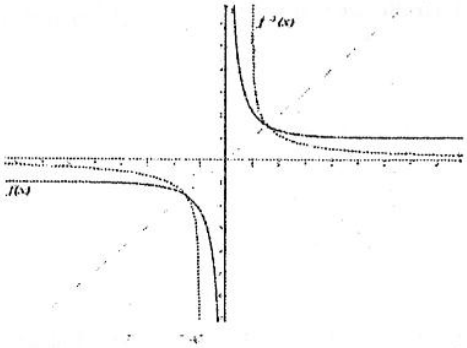
$$x\mapsto y=f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$$

a) Determinar A y B para que f sea biyectiva

b) Calcular f^{-1}, graficar f y f^{-1}

Respuesta: $A=x\in\Re-\{0\}$

$B=y\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$



EJERCICIOS DE REFUERZO

1) Determine el dominio y rango de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{3x-2}$

b) $f(x)=(2)^{-3x+1}$

d) $f(x)=e^{\frac{x+1}{x-2}}$

d) $f(x)=log_5(3-2x)$

e) $f(x)=log_{\frac{1}{2}}(x+2)+3$

f) $f(x)=log\left(\dfrac{x+1}{3-x}\right)$

Respuestas:

a) $Dom\, f: x\in\Re$
$Rgo\, f: y\in\left]0,+\infty\right[$

b) $Dom\, f: x\in\Re$
$Rgo\, f: y\in\left]0,+\infty\right[$

c) $Dom\, f: x\in\Re-\{2\}$
$Rgo\, f: y\in\left]0,+\infty\right[-\{e\}$

d) $Dom\, f: x\in\left]-\infty,\dfrac{3}{2}\right[$
$Rgo\, f: y\in\Re$

e) $Dom\, f: x\in\left]-2,+\infty\right[$
$Rgo\, f: y\in\Re$

f) $Dom\, f: x\in\left]-1,3\right[$
$Rgo\, f: y\in\Re-\{0\}$

Funciones Trascendentes

2) Aplicando cambios estructurales en una función, trace la gráfica de las siguientes funciones:

a) $f(x)=-2^{(-x+3)}-2$

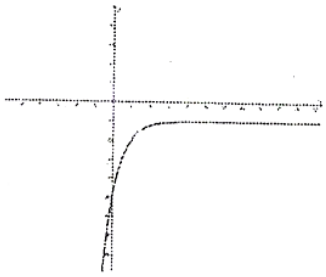
b) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}+4$

c) $f(x)=-log_5(x+3)-4$

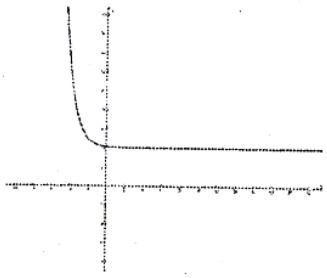
d) $f(x)=log_{\frac{1}{2}}(-x+2)+5$

Respuestas:

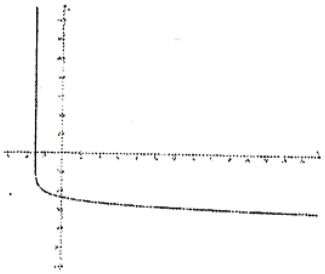
a)



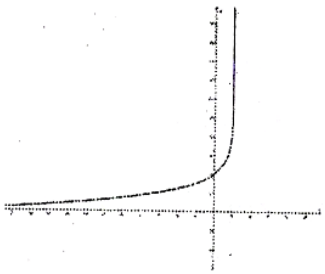
b)



c)



d)



3) Determinar el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^x}}$

b) $f(x)=e^{\frac{x+1}{x-1}}+\dfrac{1}{x}$

c) $f(x)=\dfrac{e^{x+1}}{e^{2x}-1}$

d) $f(x)=\dfrac{5^{x+1}-2^{x+1}}{5^{x-1}+2^{x-1}}$

e) $f(x)=\dfrac{x^2e^{-x}}{2^{x^2-1}-1}$

f) $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x-\sqrt{x+1}}$

g) $f(x)=\dfrac{(1-x)e^{3x+1}}{(1+x)e^{3x-1}}$

h) $f(x)=\dfrac{e^{2x-x^2}}{3^{3x+x^2}}$

i) $f(x)=ln\left(\dfrac{x+4}{x^2-5x+6}\right)$

j) $f(x)=ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

k) $f(x)=ln\sqrt[4]{\dfrac{x-2}{5-x}}$

l) $f(x)=\dfrac{ln\left(x^2-7x+12\right)}{x^2-4}$

m) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\,ln\left(\dfrac{x}{1-|x|}\right)$

n) $f(x)=\dfrac{ln(2x+1)}{e^x-1}$

o) $f(x)=\sqrt{1+ln^2 x}$

p) $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-\sqrt{x}+1}}$

q) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}\ ln x}{\sqrt{x}}$

r) $f(x)=\sqrt{-\left[\dfrac{\log(-x)-2}{\log(-x)-1}+1\right]}$

Respuestas:

a) $x\in\left]-\infty,0\right[$

b) $x\in\Re-\{0,1\}$

c) $x\in\Re-\{0\}$

d) $x\in\Re$

e) $x\in\Re-\{\pm1\}$

f) $x\in\left[-1,+\infty\right[-\left\{\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2},0\right\}$

g) $x\in\Re-\{-1\}$

h) $x\in\Re$

i) $x\in\left]-4,2\right[\cup\left]3,+\infty\right[$

j) $x\in\Re$

k) $x\in\left]2,5\right[$

l) $x\in\left]-\infty,3\right[\cup\left]4,+\infty\right[-\{\pm2\}$

m) $x\in\left]-\infty,-1\right[$

n) $x\in\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[-\{0\}$

o) $x\in\left]0,+\infty\right[$

p) $x\in\left]0,+\infty\right[$

q) $x\in\left]0,+\infty\right[$

r) $x\in\left[-10^{\frac{3}{2}},-10\right[$

4) Sea $f(x)=\ln\left(\dfrac{-x+2}{x+2}\right)$, determinar $f^{-1}(x)$, trazar la gráfica de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$

5) Sea $f(x)=\log\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$, determinar $f^{-1}(x)$, trazar la gráfica de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$

6) Sea $f(x)=\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, si $|x|<1$, transforme a f en biyectiva y encuentre su inversa. Trace su gráfica.

7) Determinar el dominio de $f(x)=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-2^x}$

8) Determinar el dominio y rango de $f(x)=\sqrt{\dfrac{2^{-x}}{2^{-x}-2}}$

9) Sea $f(x)=ln|x-5|$, determinar $f^{-1}(x)$, trazar la gráfica de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$

10) Hallar si existe la función inversa de $f(x)=\begin{cases}\log_2(x-1) & , \ 3\le x\le 9\\ \dfrac{1}{4}(x-1) & , \ 1\le x<3\end{cases}$

Respuestas:

4) $f^{-1}(x)=\dfrac{2-e^x}{e^x+1}$

5) $f^{-1}(x)=\dfrac{10^x+1}{10^x-1}$

6) $f^{-1}(x)=\dfrac{10^x-1}{10^x+1}$

7) $x\in\left]-\infty,0\right]$

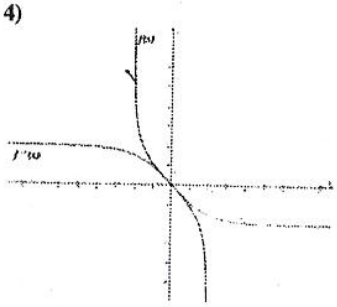
8) $x\in\left]-\infty,-1\right[$; $y\in\left]1,+\infty\right[$

9) $x\in\Re-\{5\}$; $y\in\Re$, Opción 1: $f^{-1}(x)=e^x+5$, Opción 2 : $f^{-1}(x)=5-e^x$

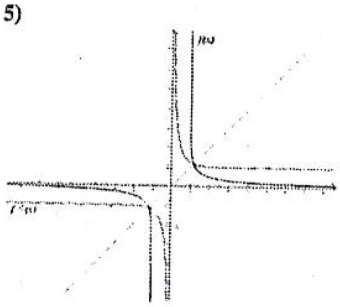
10) $f^{-1}(x)=\begin{cases} 2^x+1 & , \ 1\le x\le 3 \\ 1+2\sqrt{x} & , \ 0\le x<1 \end{cases}$

Gráficas

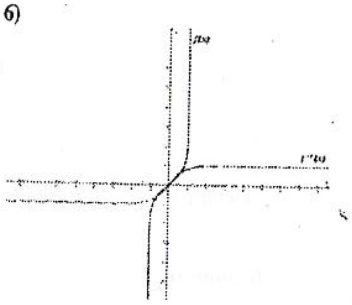
4)



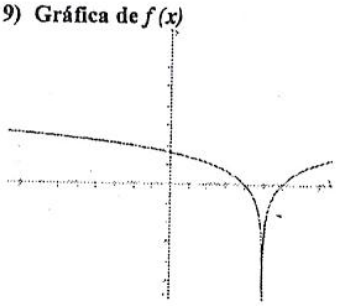
5)



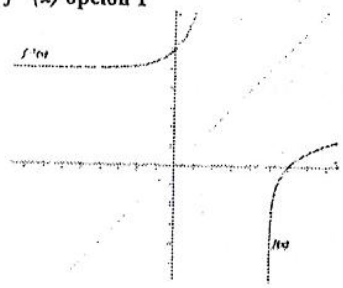
6)



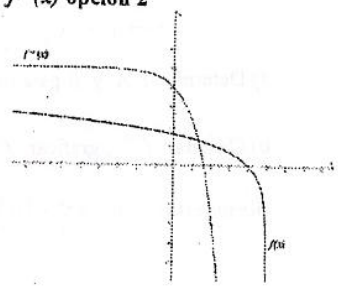
9) Gráfica de $f(x)$



$f^{-1}(x)$ opción 1



$f^{-1}(x)$ opción 2



10) Analizar la monotonía y paridad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\log\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

b) $f(x)=\ln\left(\dfrac{-x+2}{x+2}\right)$

c) $f(x)=\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

d) $f(x)=ln|x-5|$

10.7. INECUACIONES EXPONENCIALES

Para su resolución se deben considerar las siguientes condiciones:

CASO 1. Cuando $a>1$ se cumple:

$$a^{f(x)}>a^{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad f(x)>g(x)$$
$$a^{f(x)}<a^{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad f(x)<g(x)$$

Ejemplos:

1) $2^{3x+5}>4^{2x+4}$

$2^{3x+5}>(2^2)^{2x+4}$; $2^{3x+5}>2^{4x+8}$, $3x+5>4x+8$, $-x>3$, $x<-3$

2) $\sqrt[5]{3^{\frac{6x+3}{2}}}>\sqrt[3]{27^{\frac{x+2}{2}}}$

$3^{\frac{6x+3}{10}}>27^{\frac{x+2}{6}}$; $3^{\frac{6x+3}{10}}>(3^3)^{\frac{x+2}{6}}$

$$3^{\frac{6x+3}{10}} > 3^{\frac{x+2}{2}} \quad , \quad \frac{6x+3}{10} > \frac{x+2}{2} \quad , \quad 6x+3 > 5x+10 \quad , \quad x > 7$$

CASO 2. Cuando $0 < a < 1$ se cumple:

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$$
$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$$

Ejemplo:

1) $(0{,}5)^{\frac{4x-3}{2}} > (0{,}0625)^{\frac{3x-2}{5}}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4x-3}{2}} > \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\right]^{\frac{3x-2}{5}} \quad ; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4x-3}{2}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{12x-8}{5}} \quad ; \quad \frac{4x-3}{2} < \frac{12x-8}{5}$$

$$20x-15 < 24x-16 \ ; \ 20x-24x < -16+15 \ ; \ -4x < -1 \ ; \ 4x > 1 \ ; \ x > \frac{1}{4}$$

10.8. INECUACIONES LOGARÍTMICAS

Los casos que se presentan son los siguientes:

CASO 1. Cuando: $a > 1$

a) Si $x > 0$; $a > 1$ y $n \in \Re \Rightarrow \log_a x > n \Leftrightarrow x > a^n$

b) Si $x > 0$; $a > 1$ y $n \in \Re \Rightarrow \log_a x < n \Leftrightarrow x < a^n$

c) $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ es equivalente a : $f(x) < g(x)$

$$\text{Sol:} = \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

d) $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ es equivalente a : $f(x) > g(x)$

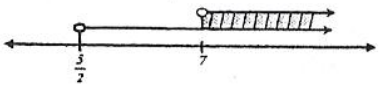
$$\text{Sol:} = \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

Ejemplos:

1) $\log_3 (2x-5) > 2$

$\log_3 (2x-5) > 2 \Leftrightarrow 2x-5 > 0 \wedge 2x-5 > 3^2$

$x > \frac{5}{2} \cap x > 7 \Rightarrow x > 7$



2) $\log_5 (x+2) < \log_5 (x^2+5x+6)$

La solución está dada por la solución del sistema:

$$x+2 > 0 \quad \wedge \quad x^2+5x+6 > 0 \quad \wedge \quad x+2 < x^2+5x+6$$

a) $x+2 > 0$, $x > -2$; **Sol 1:** $]-2\,;+\infty[$

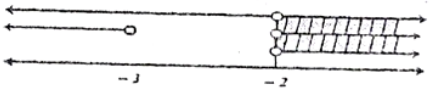
b) $x^2+5x+6>0$, $(x+3)(x+2) > 0$

Sol 2: $]-\infty\,;-3[\ \cup\ ]-2\,;+\infty[$

c) $x+2<x^2+5x+6$

$-x^2-4x-4<0$, $x^2+4x+4>0$, $(x+2)^2>0$ (V)

Sol 3: $\Re-\{-2\}$, **Sol: Sol 1** $\cap$ **Sol 2** $\cap$ **Sol 3**



Sol: $x\in(-2,+\infty)$ ó $x>-2$

CASO 2. Cuando : $0<a<1$

a) Si $x>0$; $0<a<1$ y $n\in\Re \Rightarrow \log_a x>n \Leftrightarrow x<a^n$

b) Si $x>0$; $0<a<1$ y $n\in\Re \Rightarrow \log_a x<n \Leftrightarrow x>a^n$

c) $\log_a f(x)<\log_a g(x)$ es equivalente a: $f(x)>g(x)$

$$\textbf{Sol:}=\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)>g(x) \end{cases}$$

d). $\log_a f(x)>\log_a g(x)$ es equivalente a: $f(x)<g(x)$

$$\textbf{Sol:}=\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)<g(x) \end{cases}$$

Ejemplos:

1) $\log_{0.5}(5x+10)<\log_{0.5}(x^2+6x+8)$

La solución está dada por la solución del sistema:

$5x+10>0 \quad\wedge\quad x^2+6x+8>0 \quad\wedge\quad 5x+10>x^2+6x+8$

a) $5x+10>0$, $x>-2$; **Sol 1:** $]-2\,;+\infty[$

b) $x^2+6x+8>0$, $(x+4)(x+2)>0$

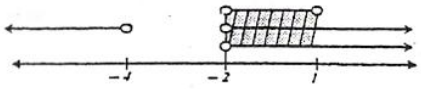
Sol 2: $]-\infty\,;-4[\ \cup\ ]-2;+\infty[$

c) $5x+10>x^2+6x+8$, $-x^2-x+2>0$, $x^2+x-2<0$

$(x+2)(x-1)<0$, **Sol 3:** $]-2\,;1[$

Funciones Trascendentes

Sol: Sol 1 $\cap$ Sol 2 $\cap$ Sol 3



Sol: $x \in (-2,1)$ [ó $-2 < x < 1$

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

Resolver las siguientes inecuaciones exponenciales:

1) $2^x > \sqrt{2}$ 2) $\left(\frac{7}{8}\right)^x < 1$ 3) $(0.2)^x \le 0.04$

4) $\frac{1}{2^x} < 8$ 5) $3^x \le 81$ 6) $\frac{1}{4^x} \ge 16$

7) $0.5^x \le 0.25^{x^2}$ 8) $5^{x+1} < 125$ 9) $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 6\left(\frac{1}{2}\right)^x + 8 < 0$

10) $27^{x-1} < 9^{x+3}$ 11) $\left(\sqrt{2}\right)^{8x-1} > 4^{x^2 - \frac{33}{4}}$ 12) $3^{|3x-4|} \le 9^{2x-2}$

13) $\sqrt[x+1]{8^{x+3}} < \sqrt[x-1]{32^{2x+5}}$ 14) $\sqrt[x-5]{4^{x-4}} \ge \sqrt[x+1]{2^{2x}}$ 15) $x^{\frac{2x-1}{3-x}} > 1$

16) $4 \cdot 3^x - 9 \cdot 2^x \le 5 \cdot 6^{\frac{x}{2}}$ 17) $25^x - 4 \cdot 5^x - 5 > 0$

18) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$ 19) $\frac{1}{(0.5)^x - 1} - \frac{1}{1-(0.5)^{x+1}} \ge 0$

Respuestas:

1) $x \in \left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ 2) $x \in (0;+\infty)$ 3) $x \in [2;+\infty)$ 4) $x \in (-3;+\infty)$ 5) $x \in (-\infty,4]$

6) $x \le -2$ 7) $x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$ 8) $x < 2$ 9) $x \in (-2;-1)$ 10) $x < 9$ 11) $x \in (-2;4)$

12) $x \in \left[\frac{8}{7};+\infty\right)$ 13) $x < -1 \ \cup \ x > 1$ 14) $x \in (-1,2] \cup (5,+\infty)$ 15) $x \in \left(0,\frac{1}{2}\right) \cup (1,3)$

16) $x > 4$ 17) $x > 1$ 18) $x > 0$ 19) $x < -1 \cup \left[\log_{0.5}\left(\frac{4}{3}\right),0\right[$

Resolver las siguientes inecuaciones logarítmicas:

1) $\log_7 x < 1$ 2) $\log_{\frac{2}{3}} x \le -1$ 3) $\log_{0.2} x < \log_{0.2} 3$

4) $\log_5 x \ge \log_{25} 36$ 5) $\log_2 x < \log_2 4$ 6) $\log_2(3x+2) - \log_2(1-2x) > 2$

7) $\left[\log_{\frac{1}{2}}(x)\right]^2 - \log_{\frac{1}{2}}(x) < 0$ 8) $\log_x(x-1) + \log_x(2x+2) > 2$ 9) $\log_{0.3}\left(x^2 - 5x + 7\right) > 0$

10) $\log_{1.5}\left(\frac{2x-8}{x-2}\right) < 0$ 11) $5^{\log_x\left(\frac{x-2}{x}\right)} < 1$ 12) $\log_2|3-4x| > 3$

13) $2\log_2(x-1)-\log_2(2x-4)>1$ 14) $\log_2 x \le \log_4 9+\log_2 3$ 15) $\log_x\left(\frac{x+3}{x-1}\right)>1$

Respuestas:

1) $x\in(0,7)$ 2) $x\in\left[\frac{3}{2}+\infty\right)$ 3) $x>3$ 4) $x\ge 6$ 5) $x\in(0,4)$

6) $x\in\left(\frac{2}{11},\frac{1}{2}\right)$ 7) $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 8) $x\in\left(\sqrt{2},+\infty\right)$ 9) $x\in(2,3)$ 10) $x\in(4,6)$

11) $x>2$ 12) $x\in\left(-\infty,-\frac{5}{4}\right)\cup\left(\frac{11}{4},+\infty\right)$ 13) $x\in(2,+\infty)-\{3\}$

14) $x\in(0,9]$ 15) $x\in(1,3)$

EJERCICIOS DE REFUERZO

Resolver las siguientes inecuaciones exponenciales y logarítmicas:

1) $\left(\frac{1}{32}\right)^{x-2}<4$ 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+2x-3}}>\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ 3) $\sqrt[x+1]{8^{x+3}}<\sqrt[x-1]{32^{2x+1}}$

4) $5^{2x+1}>5^x+4$ 5) $8\cdot 7^x-49^x>7$ 6) $5^{2x+1}>5^x+4$

7) $8\times 7^x-49^x>7$ 8) $4^{\sqrt{9-x^2}}-6\times 2^{\sqrt{9-x^2}}<-8$ 9) $25^x<6\times 5^x-5$

10) $(0{,}25)^{\frac{6x-4}{3}}(0{,}5)^{\frac{2x-3}{4}}<(0{,}0625)^{\frac{3x-4}{6}}(0{,}125)^{\frac{4x-2}{9}}$ 11) $4-\left(\frac{5}{2}\right)^x-\left|\left(\frac{5}{2}\right)^x-1\right|\ge 0$

12) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-4x+3)\ge -1$ 13) $\log_{\frac{1}{3}}|2x-3|>-1$ 14) $\log_2(|x-2|-1)>1$

15) $\log(2-\log_2 x)>0$ 16) $\log_3(3x+4)-\log_3(2x-1)>1$ 17) $\log_{0,1}(3-x)>1+\log_{0,1}20$

18) $\log_{0,5}(x^2-x-\frac{3}{4})>2-\log_2 5$ 19) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}\left(6^{x+1}-36^x\right)\ge -2$ 20) $\dfrac{2-\left[\log_{\frac{1}{2}}(x)\right]^2}{\log_{\frac{1}{2}}(x)}>1+\log_2 x$

21) $\log^2_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right)+\log_2\left(\frac{1}{x}\right)\le 6$ 22) $\dfrac{2-\log(-x)}{\log(-x)+1}\ge 1$ 23) $11^{3x-2}+13^{3x-2}\ge 13^{3x-1}-11^{3x-1}$

24) $2^{\log_{\frac{1}{2}}(x^{-2})-1}\le\log_2\left(\dfrac{2^{3x}}{2^{\frac{5}{2}}}\right)$ 25) $\log_{x-\frac{1}{2}}(2x-3)>\log_{x-2}(24-6x)$ 26) $\log_{x+\frac{5}{2}}\left(\frac{x-5}{2x-3}\right)^2<0$

Respuestas:

1) $x>\frac{8}{5}$ 2) $x\in\left[1,\frac{3}{2}\right)$ 3) $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 4) $x>0$ 5) $x\in]0,1[$

6) $x>0$ 7) $x\in(0,1)$ 8) $x\in\left(-\sqrt{8};-\sqrt{5}\right)\cup\left(\sqrt{5};\sqrt{8}\right)$ 9) $x\in(0,1)$ 10) $x>\frac{1}{14}$

11) $x\le 1$ 12) $[0;1)\cup(3;4]$ 13) $\left(0;\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};3\right)$ 14) $x<-1\cup x>5$ 15) $(0;2)$

16) $\left(\frac{1}{2};\frac{7}{3}\right)$ 17) $(1;3)$ 18) $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};2\right)$ 19) $x\in[0,1[$ 20) $x\in\left(\frac{1}{4};1\right)$ 21) $x\in\left[\frac{1}{4};8\right]$

22) $x\in\left[-\sqrt{10}\right),-\frac{1}{10}$ 23) $x\leq\frac{2}{3}$ 24) $x\in[1,5]$ 25) $x\in]2,3[\cup\left]\frac{27}{8},4\right[$

26) $x\in\left]-2,-\frac{3}{2}\right[\cup\left]\frac{8}{3},+\infty\right[-\{5\}$

10.9. FUNCIÓN PERIÓDICA

Toda función de variable x, $f(x)$, que repite sus valores en ciclos definidos recibe el nombre de función periódica, es decir sí y sólo si:

$$\exists\, x\in\Re-\{0\},\ \forall\, x\in Df\,/\,f(x+T)=f(x)$$

El menor conjunto de valores de x correspondiente a un ciclo completo de valores de la función se denomina período de la función y se representa por T.

10.9.1. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las funciones trigonométricas son funciones periódicas y para su estudio, se debe determinar su dominio y su periocidad.

Si f es periódica de período T, su estudio puede hacerse únicamente en el intervalo $[0\,,T]$.

Si f es periódica de período T, y es par o impar, su estudio puede hacerse únicamente en el intervalo $\left[0\,,\frac{T}{2}\right]$.

FUNCIONES SENO Y COSENO: Se llama función seno y coseno a las funciones definidas por:

$$Sen:\Re\to[-1\,,1] \qquad x\mapsto y=Senx$$

$$Cos:\Re\to[-1\,,1] \qquad x\mapsto y=Cosx$$

FUNCIONES TANGENTE Y COTANGENTE: Se llaman funciones tangente y cotangente a las funciones definidas por:

$Tan:A\to\Re$

$$x\mapsto y=Tanx=\frac{Senx}{Cosx} \quad ; \quad \text{donde} \quad Cosx\neq 0\ \wedge\ A=\Re-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\};k\in Z$$

$Cot:A\to\Re$

$$x\mapsto y=Cotx=\frac{Cosx}{Senx} \quad ; \quad \text{donde} \quad Senx\neq 0\ \wedge\ A=\Re-\{k\pi\};k\in Z$$

FUNCIONES SECANTE Y COSECANTE: Se llaman funciones secante y cosecante a las funciones definidas por:

$Sec:A\to\Re$

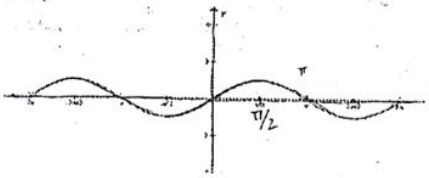
$$x\mapsto y=Secx=\frac{1}{Cosx} \quad ; \quad \text{donde} \quad Cosx\neq 0\ \wedge\ A=\Re-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\};k\in Z$$

$Csc:A\to\Re$

$$x\mapsto y=Cscx=\frac{1}{Senx} \quad ; \quad \text{donde} \quad Senx\neq 0\ \wedge\ A=\Re-\{k\pi\};k\in Z$$

10.9.2. CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DIRECTAS

$f(x) = Sen x$



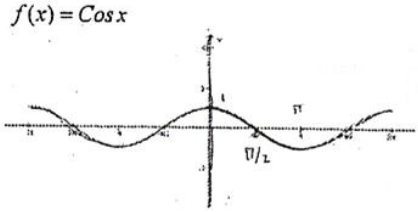
$Df: x \in \Re$; $Rf: y \in [-1, 1]$

Paridad: $Sen\ (-x) = -Sen\ (x)$ es impar

Periocidad: $Sen\ (x + 2\pi) = Sen\, x$; $T = 2\pi$

Biyectividad: en $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$f(x) = Cos\, x$



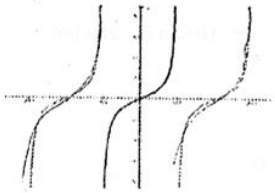
$Df: x \in \Re$; $Rf: y \in [-1, 1]$

Paridad: $Cos\,(-x) = Cos\, x$ es par

Periocidad: $Cos\,(x + 2\pi) = Cos\, x$; $T = 2\pi$

Biyectividad: en $x \in [0, \pi]$

$f(x) = Tan x$



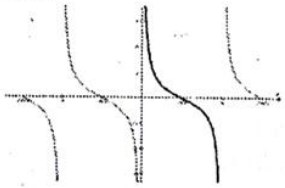
$Df: x \in \Re - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, $k \in Z$; $Rf: y \in \Re$

Paridad: $Tan\,(-x) = -Tan x$ es impar

Periocidad: $Tan\,(x + \pi) = Tan\, x$; $T = \pi$

Biyectividad: en $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$f(x) = Cot\, x$



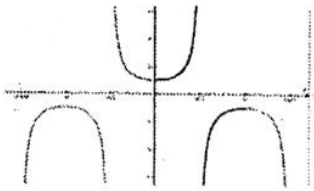
$Df: x \in \Re - \{k\pi\}$, $k \in Z$; $Rf: y \in \Re$

Paridad: $Cot\,(-x) = -Cot\, x$ es impar

Periocidad: $Cot\,(x + \pi) = Cot\, x$; $T = \pi$

Biyectividad: en $x \in (0, \pi)$

$f(x) = Sec\, x$



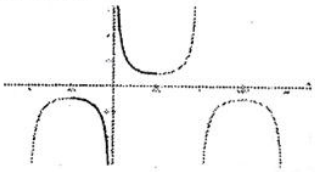
$Df: x \in \Re - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$; $k \in Z$; $Rf: y \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

Paridad: $Sec\,(-x) = Sec\, x$; es par

Periocidad: $Sec\,(x + \pi) = Sec\, x$; $T = 2\pi$

Biyectividad: en $x \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

$f(x) = Csc\, x$



$Df: x \in \Re - \{k\pi\}$, $k \in Z$; $Rf: y \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

Paridad: $Csc\,(-x) = -Csc\, x$; es impar

Periocidad: $Csc\,(x + \pi) = Csc\, x$; $T = 2\pi$

Biyectividad: en $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$

10.9.3. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS GENERALIZADAS

El período de una función trigonométrica definida por:

$f(x) = Sen\, bx$ ó $f(x) = Cos\, bx$ está dado por $T = \dfrac{2\pi}{|b|}$; $b \neq 0$

$f(x) = Tan\, bx$ ó $f(x) = Cot\, bx$ está dado por $T = \dfrac{\pi}{|b|}$; $b \neq 0$

$f(x) = Sec\, bx$ ó $f(x) = Csc\, bx$ está dado por $T = \dfrac{2\pi}{|b|}$; $b \neq 0$

GENERALIZACIÓN $y = A\, Sen(bx \pm c) + k$, donde:

Amplitud = $|A|$

Desplazamiento horizontal: $-\dfrac{c}{b}$ (hacia la izquierda) ó $\dfrac{c}{b}$ (hacia la derecha)

Desplazamiento vertical: k

EJERCICIOS RESUELTOS

Analizar y trazar la gráfica de las siguientes funciones:

1) $y = 1 + 2\, Sen\, x$

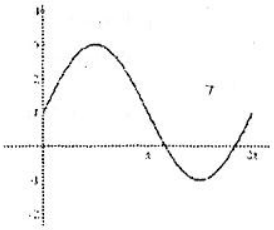
Dominio : $Dom\, f = x \in \Re$

Rango : $y = f(x) = 1 + 2\, Sen\, x \quad \wedge \quad -1 \leq Sen\, x \leq 1$

$$-2 \leq 2\, Sen\, x \leq 2$$
$$1 - 2 \leq 1 + 2\, Sen\, x \leq 1 + 2$$
$$-1 \leq y \leq 3 \quad , \quad Rgo\, f = y \in [-1, 3]$$

Período: $T = \dfrac{2\pi}{|1|}$, $T = 2\pi$

Gráfico:



2) $y = 4 + 3\, Cos\, 2x$

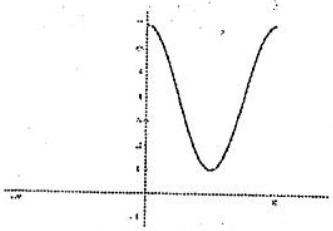
Dominio : $Dom\, f = x \in \Re$

Rango : $y = 4 + 3\, Cos\, 2x \quad \wedge \quad -1 \leq Cos\, 2x \leq 1$

$$-3 \leq 3\, Cos\, 2x \leq 3$$
$$4 - 3 \leq 4 + Cos\, 2x \leq 4 + 3$$
$$1 \leq y \leq 7 \quad , \quad Rgo\, f = y \in [1, 7]$$

Período: $T = \dfrac{2\pi}{|2|}$, $T = \pi$

Gráfico:



3) $y = -1 + Tan\dfrac{x}{2}$

Dominio : $\dfrac{x}{2} \neq \left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in Z$

$$x \neq 2\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \quad , \quad k \in Z$$

$$x \neq (\pi + 2k\pi) \quad , \quad k \in Z$$

$$x \neq (1+2k)\pi \quad , \quad k \in Z \quad , \quad Dom\ f = x \in \Re - (1+2k)\pi \quad , \quad k \in Z$$

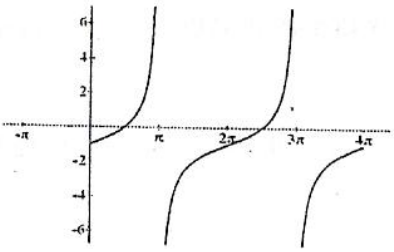
Rango : $y = -1 + Tan\dfrac{x}{2}$ $\wedge$ $-\infty < Tan\dfrac{x}{2} < +\infty$

$$-1-\infty < -1 + Tan\frac{x}{2} < -1+\infty$$

$$-\infty < y < +\infty \quad , \quad Rgo\ f = y \in \Re$$

Período: $T = \dfrac{\pi}{\left|\dfrac{1}{2}\right|}$, $T = 2\pi$

Gráfico:



4) $y = 6\,Sen\,x\,Cosx + 1$

Simplificando la regla de correspondencia de la función tenemos:

$y = 3.2\,Sen\,x\,Cosx + 1$, $y = 3\ Sen\,2x + 1$

Dominio : $Dom\ f = x \in \Re$

Rango : $y = 3\ Sen\,2x + 1$ $\wedge$ $-1 \leq Sen\,2x \leq 1$

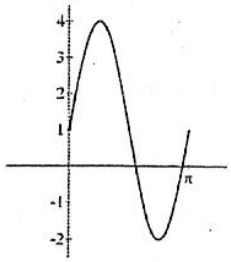
$$-3 \leq 3\,Sen\,2x \leq 3$$

$$-3+1 \leq 3\,Sen\,2x + 1 \leq 3+1$$

$$-2 \leq y \leq 4 \quad , \quad Rgo\ f = y \in [-2, 4]$$

Período: $T = \dfrac{2\pi}{|2|}$, $T = \pi$

Gráfico:



5) Analizar y graficar $y = Sen\,x\,Cosx\;Csc\,x$ en el intervalo $x \in [-2\pi, 2\pi]$

Al observar la $Csc\,x$, deducimos que $x \neq k\pi$, $k \in Z$; pero $x \in [-2\pi, 2\pi]$ entonces $x \neq [-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi]$

Dominio : $Dom\,f = x \in [-2\pi, 2\pi] - \{-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi\}$

Rango : Primero deducimos la regla de correspondencia de la función.

$y = Sen\,x\,Cosx\;Csc\,x$, Como: $Sen\,x\;Csc\,x = 1$ entonces tenemos: $y = f(x) = Cosx$

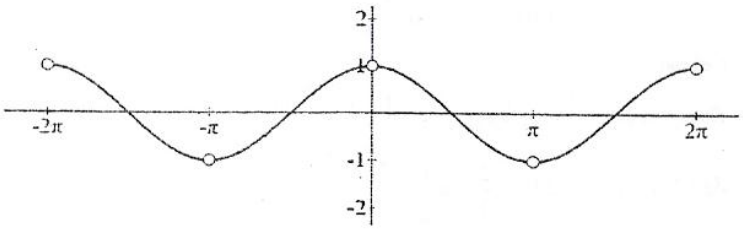
Luego: $y = Cos\,x \quad \wedge \quad -1 \leq Cos\,x \leq 1$

Pero $Cos\,x \neq \{-1, 1\}$, $-1 < Cos\,x < 1$

$-1 < y < 1$, $Rgo\,f = y \in]-1, 1[$

Período: $T = \dfrac{2\pi}{1}$, $T = \pi$

Gráfico:



Observamos que la función es continua para todo su dominio, pero es discontinua para $x = \{-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi\}$

6) Calcular el rango de la función: $y = Sen\,x(1 - Sen\,x)$

Dándole una forma conveniente de la regla de correspondencia de la función tenemos: $y = Sen\,x(1 - Sen\,x)$

$y = Sen\,x - Sen^2\,x$; $y = -(Sen^2\,x - Sen\,x)$ Completando cuadrados

$$y = \frac{1}{4} - \left(Sen^2\,x - Sen\,x + \frac{1}{4}\right) \quad , \quad y = \frac{1}{4} - \left(Sen\,x - \frac{1}{2}\right)^2$$

Además se sabe que:

$$y=\frac{1}{4}-\left(Sen\,x-\frac{1}{2}\right)^2 \quad \wedge \quad -1\le Sen\,x\le 1$$

$$-1-\frac{1}{2}\le Sen\,x-\frac{1}{2}\le 1-\frac{1}{2}$$

$$-\frac{3}{2}\le Sen\,x-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}$$

$$-\frac{3}{2}\le Sen\,x-\frac{1}{2}<0 \quad \vee \quad 0\le Sen\,x-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}$$

$$0<\left(Sen\,x-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{9}{4} \quad \vee \quad 0\le\left(Sen\,x-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{4}$$

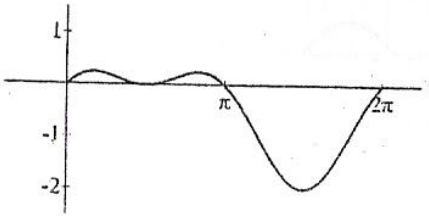
$$-\frac{9}{4}\le-\left(Sen\,x-\frac{1}{2}\right)^2<0 \quad \vee \quad -\frac{1}{4}\le-\left(Sen\,x-\frac{1}{2}\right)^2\le 0$$

$$-\frac{9}{4}+\frac{1}{4}\le\frac{1}{4}-\left(Sen\,x-\frac{1}{2}\right)^2<\frac{1}{4} \quad \vee \quad -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\le\frac{1}{4}-\left(Sen\,x-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{4}$$

$$-2\le y<\frac{1}{4} \quad \vee \quad 0\le y\le\frac{1}{4}$$

$$-2\le y\le\frac{1}{4} \quad , \quad Rgo\ f=y\in\left[-2,\frac{1}{4}\right]$$

Gráfico:



7) Hallar el dominio y rango de la función: $y=f(x)=\sqrt{Cos\,x-1}$

$y=f(x)=\sqrt{Cos\,x-1}$ Analizando la regla de correspondencia de la función tenemos:

$y=\sqrt{Cos\,x-1} \quad \Leftrightarrow \quad Cos\,x-1\ge 0 \quad , \quad Cos\,x\ge 1$

Dominio :

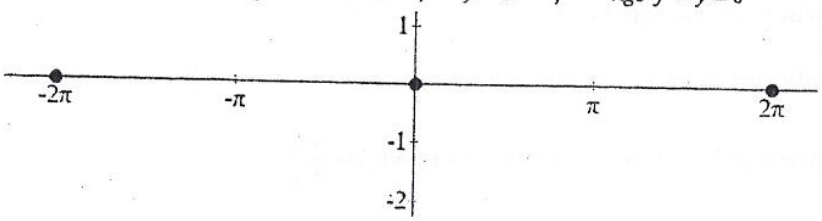
$$Cos\,x\ge 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Cos\,x=1 \\ Cos\,x>1 \quad , \quad Absurdo \end{cases}$$

$$Cos\,x=1 \quad \Rightarrow \quad x=2k\pi \quad , \quad k\in Z \quad ; \quad Dom\ f=x\in\Re/\ x=2k\pi \quad , \quad k\in Z$$

Rango : De lo anterior: $Cos\,x=1$

$$Cos\,x-1=0$$

$$\sqrt{Cos\,x-1}=0 \quad , \quad y=0 \quad , \quad Rgo\ f=y=0$$



Funciones Trascendentes

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

Realice el estudio de las siguientes funciones trigonométricas y trace su gráfica.

1) $y = 3\,Sen\,2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

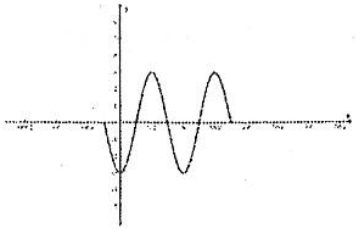
2) $y = -2Sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

3) $y = 2\,Cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)$

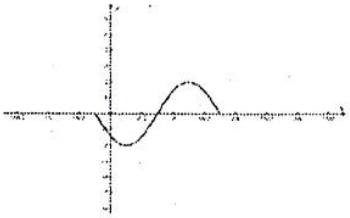
4) $y = Tan\,2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Respuestas:

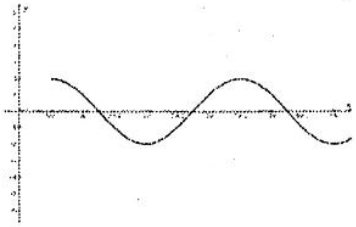
a)



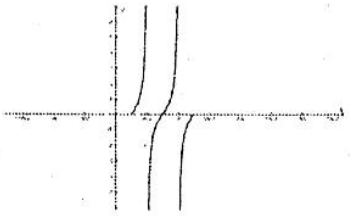
b)



c)



d)



EJERCICIOS DE REFUERZO

1) Hallar el rango de la función: $f(x) = 1 + Sen\,x$

2) Hallar el período de la función: $f(x) = 4 + 3\,Cos\,4x$

3) Hallar el dominio de la función: $f(x) = Tan\,4x$

4) Hallar el rango de la función: $f(x) = 3 + 2\,Csc\,3x$

5) Hallar dominio, rango y período de la función: $f(x) = 2\,Sen\,x\,Cos\,x$

6) Hallar el dominio de la función: $f(x) = \sqrt{Sen\,x - 1}$

7) Hallar dominio, rango y período de la función: $f(x) = (2 + Sen\,x)(2 - Sen\,x)$

8) Hallar el período de la función: $f(x) = 6\,Cos\left(2x + \frac{\pi}{5}\right)$

Funciones Trascendentes

9) Determinar dominio y rango de la función: $f(x)=\dfrac{1}{1-Sen^2x}$

10) Determinar dominio y rango de la función: $f(x)=\sqrt{1-Sen^2x}$

11) Determinar dominio y rango de la función: $f(x)=5Cos(\pi-2x)+3$

12) En las siguientes funciones determinar: interceptos, paridad, dominio, rango y punto máximo o mínimo.

a) $f(x)=\dfrac{2}{1+2\,Cos\,x}$ b) $f(x)=\dfrac{2-Sen\,x}{2+Sen\,x}$

13) Sea $f(x)=Cos\left(\dfrac{x^2}{1+x^2}\right)$, determinar: interceptos, paridad, dominio y rango.

Respuestas:

1) $y\in[0,2]$ **2)** $\dfrac{\pi}{2}$ **3)** $x\in\Re-(2k+1)\dfrac{\pi}{8}$ **4)** $x\in\Re-]1,5[$

5) $x\in\Re$, $y\in[-1,1]$, π **6)** $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in Z$

7) $x\in\Re$, $y\in[3,4]$, π **8)** π **9)** $x\in\Re-\left\{\dfrac{\pi}{2}+m\pi\right\}$, $y\in[1,+\infty[$

10) $x\in\Re$, $y\in[0,1]$ **11)** $x\in\Re$, $y\in[-2,8]$

12) a) Intersección: No existe corte con el eje x

Con el eje y: $P\left(0,\dfrac{2}{3}\right)$

f es par

$Dom\,f: x\in\Re-\left\{\dfrac{2}{3}\pi,\dfrac{4}{3}\pi,\ldots\ldots\ldots\right\}$

$Rgo\,f: y\in\left]-\infty,-2\right]\cup\left[\dfrac{2}{3},+\infty\right[$

$P\,máximo(\pi,-2)$, $P\,mínimo\left(0^\circ,\dfrac{2}{3}\right)$

b) Intersección: No existe corte con el eje x

Con el eje y: $P(0,1)$

f no es par, tampoco impar

$Dom\,f: x\in\Re$

$Rgo\,f: y\in\left[\dfrac{1}{3},3\right]$

$P\,máximo\left(\dfrac{3}{2}\pi,3\right)$, $P\,mínimo\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{1}{3}\right)$

13) Intersección: No existe corte con el eje x
Con el eje y: $P(0,1)$

f es par

$Dom\, f : x \in \Re$
$Rgo\, f : y \in [Cos 1, 1]$

10.10. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

FUNCIONES SENO Y COSENO INVERSOS

Las funciones $Sen : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, $x \mapsto y = Senx$ y $Cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $x \mapsto y = Cosx$

Son biyectivas y sus funciones inversas se denominan arco seno y arco coseno, respectivamente, así:

$arcSen : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $y \mapsto x = arcSen\, y$ y $arcCos : [-1, 1] \to [0, \pi]$, $y \mapsto x = arcCos\, y$

FUNCIONES TANGENTE Y COTANGENTE INVERSAS

Las funciones $Tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \Re$, $x \mapsto y = Tan\, x$ y $Cot :]0, \pi[\to \Re$, $x \mapsto y = Cot\, x$

Son funciones biyectivas y sus funciones inversas se denominan función arco tangente y arco cotangente, respectivamente, así:

$arcTan : \Re \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $y \mapsto x = arcTan\, y$ y $arcCot : \Re \to]0, \pi[$, $y \mapsto x = arcCot\, y$

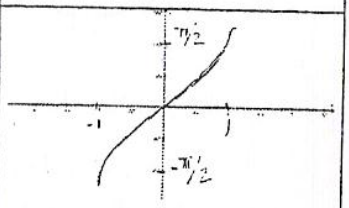
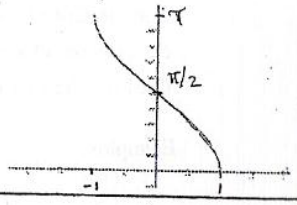
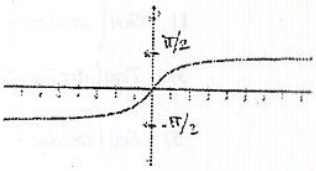
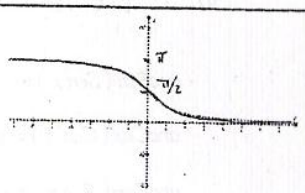
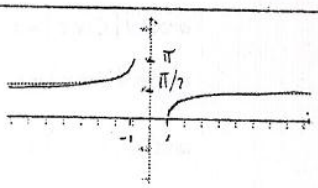
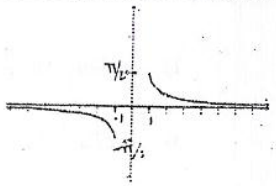
FUNCIONES SECANTE Y COSECANTE INVERSAS

Las funciones $Sec : [0, \pi] - \frac{\pi}{2} \to \Re -]-1, 1[$, $x \mapsto y = Sec\, x$ y $Csc : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\} \to \Re -]-1, 1[$, $x \mapsto y = Csc\, x$

Son funciones biyectivas y sus funciones inversas se denominan función arco secante y arco cosecante, respectivamente, así:

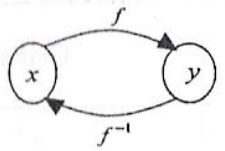
$arcSec : \Re -]-1, 1[\to [0; \pi] - \frac{\pi}{2}$, $y \mapsto x = arcSec\, y$ y $arcCsc : \Re -]-1, 1[\to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$, $y \mapsto x = arcCsc\, y$

10.10.1. CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Funciones Inversas	Dominio	Rango	Gráfico
$f(x) = arcSen\, x$ **Impar**	$x \in [-1,1]$	$y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	
$f(x) = arcCos\, x$	$x \in [-1,1]$	$y \in [0, \pi]$	
$f(x) = arcTan\, x$ **Impar**	$x \in \Re$	$y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$	
$f(x) = arcCot\, x$	$x \in \Re$	$y \in]0, \pi[$	
$f(x) = arcSec\, x$	$x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$	$y \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$	
$f(x) = arcCsc\, x$ **Impar**	$x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$	$y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$	

10.10.2. PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LAS FUNCIONES INVERSAS

Dada la función biyectiva f tal que:



$$f=\{(x,y)/\,y=f(x)\}$$

$$f^{-1}=\{(y,x)/\,x=f^{-1}(y)\}$$, las propiedades son:

i) $f\left[f^{-1}(x)\right]=x \quad \Leftrightarrow \quad x\in Rgo\,f$, entonces:

$$Sen\,(arcSen\,x)=x \quad \Leftrightarrow \quad x\in[-1,1]$$
$$Cos\,(arcCos\,x)=x \quad \Leftrightarrow \quad x\in[-1,1]$$
$$Tan\,(arcTan\,x)=x \quad \Leftrightarrow \quad x\in\Re$$
$$Cot\,(arcCot\,x)=x \quad \Leftrightarrow \quad x\in\Re$$
$$Sec\,(arcSec\,x)=x \quad \Leftrightarrow \quad x\in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$$
$$Csc\,(arcCsc\,x)=x \quad \Leftrightarrow \quad x\in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$$

Ejemplos:

1) $Sen\left(arcSen\,\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$

2) $Cos\left(arcCos-\frac{1}{5}\right)=-\frac{1}{5}$

3) $Tan\,(arcTan\,7)=7$

4) $Cot\,(arcCot\;10)=10$

5) $Sec\,(arcSec-5)=-5$

ii) $f^{-1}\left[f(x)\right]=x \quad \Leftrightarrow \quad x\in Dom\,f$, entonces:

$$arcSen\,(Sen\,x)=x \quad \Leftrightarrow \quad x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$
$$arcCos\,(Cos\,x)=x \quad \Leftrightarrow \quad x\in[0,\pi]$$
$$arcTan\,(Tan\,x)=x \quad \Leftrightarrow \quad x\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$
$$arcCot\,(Cot\,x)=x \quad \Leftrightarrow \quad x\in]0,\pi[$$
$$arcSec\,(Sec\,x)=x \quad \Leftrightarrow \quad x\in[0,\pi]-\frac{\pi}{2}$$
$$arcCsc\,(Csc\,x)=x \quad \Leftrightarrow \quad x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]-\{0\}$$

Ejemplos:

1) $arcSen\left(Sen\,\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}$

2) $arcCos\left(Cos\,\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\pi}{5}$

3) $arcTan\left(Tan-\frac{\pi}{9}\right)=-\frac{\pi}{9}$

4) $arcCot\left(Cot\,\frac{5}{6}\pi\right)=\frac{5}{6}\pi$

5) $arcSec\left(Sec\,\frac{5}{12}\pi\right)=\frac{5}{12}\pi$

6) $arcCsc\left(Csc-\frac{3}{8}\pi\right)=-\frac{3}{8}\pi$

Funciones Trascendentes

Sea $f(x)=10^x$ una función biyectiva con $Dom\, f: x\in\Re$, su función inversa es:

$f^{-1}(y)=log_{10}y$ con $Dom\, f^{-1}: y\in\,]0,+\infty[$, haciendo un cambio de variable $f^{-1}(x)=log\, x$

Se cumple que:

i) $f\left[f^{-1}(x)\right]=f\left[log\, x\right]$

$$=10^{log\, x}=x \quad , \quad \forall x\in\,]0,+\infty[\quad , \quad (Rgo\, f)$$

ii) $f^{-1}\left[f(x)\right]=f^{-1}\left[10^x\right]$

$$=log\left(10^x\right)=x \quad , \quad \forall x\in\Re \quad , \quad (Dom\, f)$$

EJERCICIOS RESUELTOS

Determinar el dominio y rango de las siguientes funciones:

1) $y=2\,arcSen(x-2)$

Dominio: $-1\le x-2\le 1$, $1\le x\le 3$, $Dom\, f: x\in[1,3]$

Rango: $y=2\,arcSen(x-2)$

$$\frac{y}{2}=arcSen(x-2) \quad , \quad Sen\left(\frac{y}{2}\right)=Sen\, arcSen(x-2) \quad , \quad Sen\left(\frac{y}{2}\right)=x-2$$

$$x=2+Sen\left(\frac{y}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad -\frac{\pi}{2}\le\frac{y}{2}\le\frac{\pi}{2} \quad , \quad -\pi\le y\le\pi \quad , \quad Rgo\, f=y\in[-\pi,\pi]$$

2) $y=3\,arcCos\left(\frac{2x-1}{5}\right)$

Dominio: $-1\le\frac{2x-1}{5}\le 1$, $-5\le 2x-1\le 5$, $-4\le 2x\le 6$, $-2\le x\le 3$, $Dom\, f: x\in[-2,3]$

Rango: $y=3\,arcCos\left(\frac{2x-1}{5}\right)$

$$\frac{y}{3}=arcCos\left(\frac{2x-1}{5}\right) \quad , \quad Cos\left(\frac{y}{3}\right)=Cos\, arcCos\left(\frac{2x-1}{5}\right) \quad , \quad Cos\left(\frac{y}{3}\right)=\frac{2x-1}{5}$$

$$5\,Cos\left(\frac{y}{3}\right)=2x-1 \quad , \quad 5\,Cos\left(\frac{y}{3}\right)+1=2x \quad , \quad x=\frac{5}{2}Cos\left(\frac{y}{3}\right)+\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 0\le\frac{y}{3}\le\pi$$

$$0\le y\le 3\pi \quad , \quad Rgo\, f=y\in[0,3\pi]$$

3) $y=2\,arcSen\left(\frac{2x-3}{5}\right)$

Dominio: $-1\le\frac{2x-3}{5}\le 1$, $-5\le 2x-3\le 5$, $-2\le 2x\le 8$, $-1\le x\le 4$, $Dom\, f: x\in[-1,4]$

Rango: $y = 2\,arcSen\left(\dfrac{2x-3}{5}\right)$

$$\frac{y}{2} = arcSen\left(\frac{2x-3}{5}\right) \quad , \quad Sen\left(\frac{y}{2}\right) = Sen\,arcSen\left(\frac{2x-3}{5}\right) \quad , \quad Sen\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{2x-3}{5}$$

$$2x-3 = 5\,Sen\left(\frac{y}{2}\right) \quad , \quad 2x = 5\,Sen\left(\frac{y}{2}\right)+3 \quad , \quad x = \frac{5}{2}Sen\left(\frac{y}{2}\right)+\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} \le \frac{y}{2} \le \frac{\pi}{2}$$

$$-\pi \le y \le \pi \quad , \quad Rgo\,f = y \in [-\pi, \pi]$$

4) $y = 5\,arcSen\left(\dfrac{x}{4}-1\right)+\dfrac{5}{2}\pi$

Dominio: $-1 \le \dfrac{x}{4}-1 \le 1 \quad , \quad 0 \le \dfrac{x}{4} \le 2 \quad , \quad 0 \le x \le 8 \quad , \quad Dom\,f : x \in [\,0,8\,]$

Rango: $y = 5\,arcSen\left(\dfrac{x}{4}-1\right)+\dfrac{5}{2}\pi$

$$y-\frac{5}{2}\pi = 5\,arcSen\left(\frac{x}{4}-1\right) \quad , \quad \frac{y}{5}-\frac{\pi}{2} = arcSen\left(\frac{x}{4}-1\right) \quad , \quad Sen\left(\frac{y}{5}-\frac{\pi}{2}\right) = Sen\,arcSen\left(\frac{x}{4}-1\right)$$

$$\frac{x}{4}-1 = Sen\left(\frac{y}{5}-\frac{\pi}{2}\right) \quad , \quad \frac{x}{4} = Sen\left(\frac{y}{5}-\frac{\pi}{2}\right)+1 \quad , \quad x = 4\,Sen\left(\frac{y}{5}-\frac{\pi}{2}\right)+4$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} \le \frac{y}{5}-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} \quad , \quad 0 \le \frac{y}{5} \le \pi \quad , \quad 0 \le y \le 5\pi \quad , \quad Rgo\,f = y \in [0, 5\pi]$$

5) $y = \pi + 2\,arcSen(x-3)$

Dominio: $-1 \le x-3 \le 1 \quad , \quad 2 \le x \le 4 \quad , \quad Dom\,f : x \in [\,2,4\,]$

Rango: $y = \pi + 2\,arcSen(x-3)$

$$y-\pi = 2\,arcSen(x-3) \quad , \quad \frac{y}{2}-\frac{\pi}{2} = arcSen(x-3) \quad , \quad Sen\left(\frac{y}{2}-\frac{\pi}{2}\right) = Sen\,arcSen(x-3)$$

$$x-3 = Sen\left(\frac{y}{2}-\frac{\pi}{2}\right) \quad , \quad x = Sen\left(\frac{y}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+3 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} \le \frac{y}{2}-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2}$$

$$0 \le \frac{y}{2} \le \pi \quad , \quad 0 \le y \le 2\pi \quad , \quad Rgo\,f = y \in [0, \pi]$$

6) $y = arcTan\,x + \dfrac{\pi}{2}$

Dominio: $x \in \Re \quad , \quad Dom\,f : x \in \,]-\infty, +\infty[$

Rango: $y = arcTan\,x + \dfrac{\pi}{2}$

$$y-\frac{\pi}{2}=arcTan\,x \quad , \quad Tan\left(y-\frac{\pi}{2}\right)=Tan\,arcTan\,x \quad , \quad x=Tan\left(y-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\pi}{2}<y-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2} \quad , \quad 0<y<\pi \quad , \quad Rgo\,f=y\in\,]0,\pi[$$

Analizar las siguientes funciones y hallar su inversa:

1) $f(x)=\frac{1}{2}Sen\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

Amplitud: $A=\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$; Período: $T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{|2|}=\frac{2\pi}{2}=\pi$

Intersección:

Eje "x" $\Rightarrow$ $y=0$; $0=\frac{1}{2}Sen\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

$Sen\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0$; $2x+\frac{\pi}{4}=arc\,Sen\,0$; $x=\frac{1}{2}arcSen\,0-\frac{\pi}{8}$

$x=-\frac{\pi}{8}\pm k\frac{\pi}{2}$; $x=-\frac{\pi}{8}\,,\,\frac{3}{8}\pi\,,\,\frac{7}{8}\pi\,,\ldots\ldots$

Eje "y" $\Rightarrow$ $x=0$; $y=\frac{1}{2}Sen\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$y=\frac{1}{2}Sen\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $y=0{,}35$

Dominio: $Dom\,f: x\in\Re$

Rango:

$y=\frac{1}{2}Sen\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

$2y=Sen\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$, $2x+\frac{\pi}{4}=ArcSen\,2y$, $x=\frac{1}{2}\,arcSen\,2y-\frac{\pi}{8}$

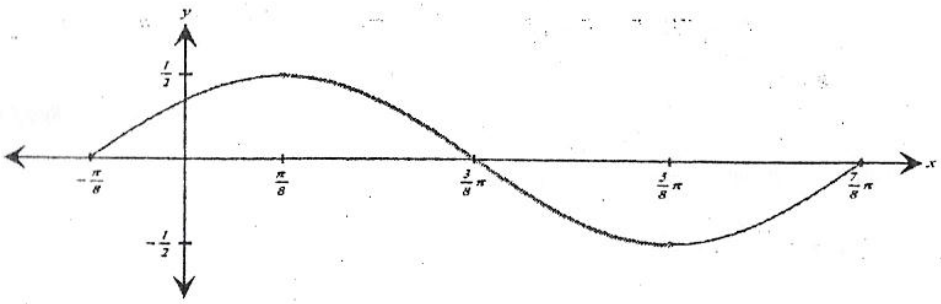
$-1\le 2y\le 1$, $-\frac{1}{2}\le y\le\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $Rgo\,f: y\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$

Punto máximo: Cuando $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

$x=\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}}{2}$; $x=\frac{\pi}{8}$

Punto mínimo: Cuando $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi$

$x=\frac{\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{4}}{2}$; $x=\frac{5}{8}\pi$



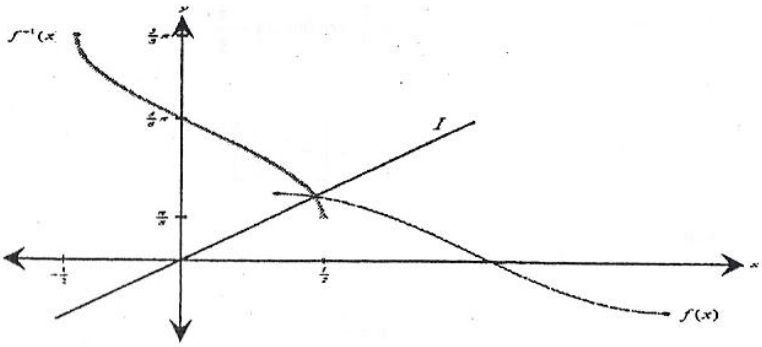
La función no es inyectiva, por lo tanto no es biyectiva

Biyectiva:

$$f:\left[\frac{\pi}{8},\frac{5}{8}\pi\right]\to\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$$
$$x\mapsto y=\frac{1}{2}Sen\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

Inversa:

$$y=\frac{1}{2}Sen\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$2y=Sen\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\quad,\quad 2x+\frac{\pi}{4}=arcSen\ 2y\quad,\quad x=\frac{1}{2}arcSen\ 2y-\frac{\pi}{8}$$
$$f^{-1}:\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\to\left[\frac{\pi}{8},\frac{5}{8}\pi\right]$$
$$y\mapsto x=\frac{1}{2}arcSen\ 2y-\frac{\pi}{8}$$



2) $f(x)=-4Cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+2$

Amplitud: $A=|-4|=4$; Período: $T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{|2|}=\frac{2\pi}{2}=\pi$

Intersección:

Eje "x" $\Rightarrow$ $y=0$; $0=-4\,Cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+2$

$4\,Cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=2$; $Cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$; $2x+\frac{\pi}{2}=arc\,Cos\frac{1}{2}$; $2x+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}$

$2x=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}$; $x=-\frac{\pi}{12}\pm k\frac{\pi}{2}$; $x=-\frac{\pi}{12}\,,\,\frac{5}{12}\pi\,,\,\frac{11}{12}\pi\,,\ldots\ldots\ldots$

Eje "y" $\Rightarrow$ $x=0$; $y=-4\,Cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+2$; $y=-4\,Cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+2$; $y=2$

Dominio: $Dom\,f: x\in\Re$

Rango:

$y=-4\,Cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+2$

$y-2=-4\,Cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$; $\frac{2-y}{4}=Cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$; $2x+\frac{\pi}{2}=arc\,Cos\left(\frac{2-y}{4}\right)$

$x=\frac{1}{2}\,arc\,Cos\left(\frac{2-y}{4}\right)-\frac{\pi}{4}$; $-1\le\frac{2-y}{4}\le 1$; $-4\le 2-y\le 4$

$-6\le -y\le 2$; $-2\le y\le 6$ $\Rightarrow$ $Rgo\,f: y\in[-2;6]$

Punto máximo y mínimo:

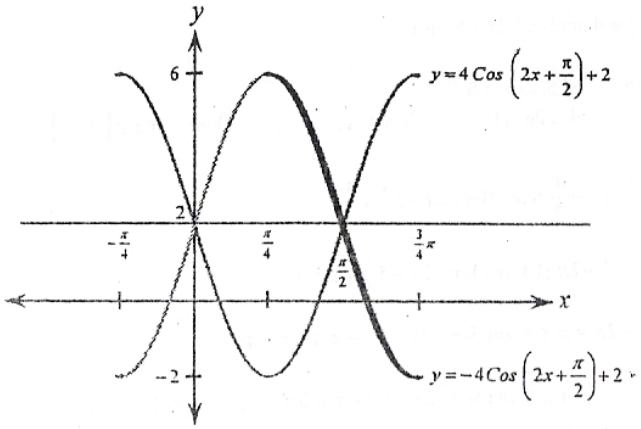
Como existe reflexión respecto al eje x, el valor calculado del punto máximo correspondería al punto mínimo y viceversa, el valor calculado del punto mínimo correspondería al punto máximo.

Punto máximo: Cuando $2x+\frac{\pi}{2}=0$

$2x=-\frac{\pi}{2}$; $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$; $x=-\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{3}{4}\pi\,,\ldots\ldots\ldots\ldots$; (Punto mínimo)

Punto mínimo: Cuando $2x+\frac{\pi}{2}=\pi$

$2x=\pi-\frac{\pi}{2}$; $x=\frac{\pi}{4}$; (Punto máximo)



La función no es inyectiva, por lo tanto no es biyectiva.

Biyectiva:

$$f:\left[\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\right]\to[-2,6]$$

$$x\mapsto y=-4\,Cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+2$$

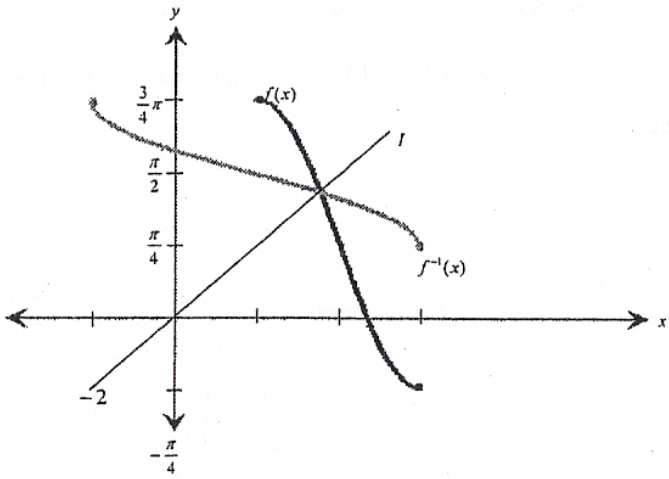
Inversa:

$$y=-4\,Cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+2$$

$$y-2=-4\,Cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right),\quad 2x+\frac{\pi}{4}=arcCos(2-y)\quad,\quad x=\frac{1}{2}arc\,Cos(2-y)-\frac{\pi}{8}$$

$$f^{-1}:[-2,6]\to\left[\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\right]$$

$$x\mapsto y=\frac{1}{2}arcCos\left(\frac{2-y}{4}\right)-\frac{\pi}{8}$$



Funciones Trascendentes

Hallar el dominio, rango y gráfica de las siguientes funciones trigonométricas inversas:

1) $y = f(x) = 2\,arcSen\,3x$

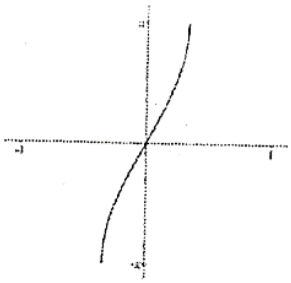
Dominio : $-1 \le 3x \le 1$

$-\frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{3}$, $Dom\,f = x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

Rango : $-\frac{\pi}{2} \le arcSen\,3x \le \frac{\pi}{2}$

$-\pi \le 2\,arcSen\,3x \le \pi$, $-\pi \le y \le \pi$, $Rgo\,f = y \in [-\pi, \pi]$

Gráfico:



2) $y = f(x) = 4\,arcCos\frac{x}{2}$

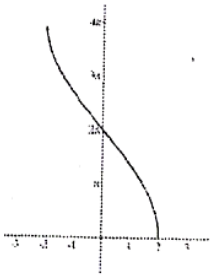
Dominio : $-1 \le \frac{x}{2} \le 1$

$-2 \le x \le 2$, $Dom\,f = x \in [-2, 2]$

Rango : $0 \le arcCos\frac{x}{2} \le \pi$

$0 \le 4\,arcCos\frac{x}{2} \le 4\pi$, $0 \le y \le 4\pi$, $Rgo\,f = y \in [0, 4\pi]$

Gráfico:



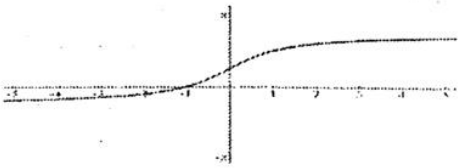
3) $y = f(x) = \frac{\pi}{4} + arcTan\,x$

Dominio: $-\infty < x < +\infty$, $Dom\,f = x \in \Re$

Rango : $-\frac{\pi}{2} < arcTan\,x < \frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} + arcTan\,x < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{4} < y < \frac{3\pi}{4}$, $Rgo\,f = y \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$

Gráfico:



4) $y = f(x) = 4\,arcSec\,\dfrac{x}{3}$

Dominio : $\dfrac{x}{3} \le -1 \quad \vee \quad \dfrac{x}{3} \ge 1$

$x \le -3 \quad \vee \quad x \ge 3 \quad , \quad Dom\,f = x \in \left]-\infty, -3\right] \cup \left[3, +\infty\right[$

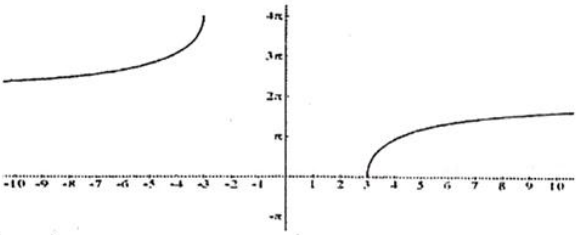
Rango : $0 \le arcSec\,\dfrac{x}{3} < \dfrac{\pi}{2} \quad \vee \quad \dfrac{\pi}{2} < arcSec\,\dfrac{x}{3} \le \pi$

$0 \le 4\,arcSec\,\dfrac{x}{3} < 2\pi \quad \vee \quad 2\pi < 4\,arcSec\,\dfrac{x}{3} \le 4\pi$

$0 \le y < 2\pi \quad \vee \quad 2\pi < y \le 4\pi$

$0 \le y \le 4\pi - \{2\pi\} \quad , \quad Rgo\,f = x \in [0, 4\pi] - \{2\pi\}$

Gráfico:



5) $y = f(x) = arcCos\left(\dfrac{x-3}{2}\right)$

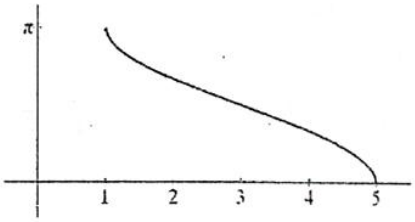
Dominio : $-1 \le \dfrac{x-3}{2} \le 1$

$-2 \le x-3 \le 2 \quad , \quad 1 \le x \le 5 \quad , \quad Dom\,f = x \in [1, 5]$

Rango: $0 \le arcCos\left(\dfrac{x-3}{2}\right) \le \pi$

$0 \le y \le \pi \quad , \quad Rgo\,f = y \in [0, \pi]$

Gráfico:



6) $y = f(x) = 4\,arcSen(2x-5)+\pi$

Dominio : $-1 \le 2x-5 \le 1$

$4 \le 2x \le 6 \quad , \quad 2 \le x \le 3 \quad , \quad Dom\,f = x \in [2,3]$

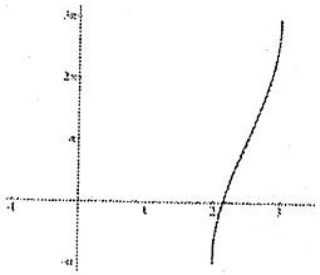
Rango : $-\frac{\pi}{2} \le arcSen(2x-5) \le \frac{\pi}{2}$

$-2\pi \le 4\ arcSen(2x-5) \le 2\pi$

$-2\pi+\pi \le 4\ arcSen(2x-5)+\pi \le 2\pi+\pi$

$-\pi \le 4\ arcSen(2x-5)+\pi \le 3\pi \quad , \quad -\pi \le y \le 3\pi \quad , \quad Rgo\,f = y \in [-\pi, 3\pi]$

Gráfico:



7) $y = f(x) = 4\,arcCsc(2x-5)$

Dominio : $2x-5 \le -1 \quad \vee \quad 2x-5 \ge 1$

$2x \le 4 \quad \vee \quad 2x \ge 6$

$x \le 2 \quad \vee \quad x \ge 3 \quad , \quad Dom\,f = x \in]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[$

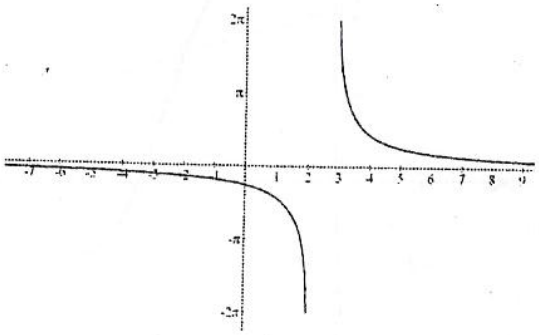
Rango: $-\frac{\pi}{2} \le arcCsc(2x-5) < 0 \quad \vee \quad 0 < arcCsc(2x-5) \le \frac{\pi}{2}$

$-2\pi \le 4\,arcCsc(2x-5) < 0 \quad \vee \quad 0 < 4\,arcCsc(2x-5) \le 2\pi$

$-2\pi \le y < 0 \quad \vee \quad 0 < y \le 2\pi$

$-2\pi \le y \le 2\pi \ - \ \{0\} \quad , \quad Rgo\,f = x \in [-2\pi, 2\pi] - \{0\}$

Gráfico:



Funciones Trascendentes

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

Realice el estudio de las siguientes funciones trigonométricas, trace su gráfica, redefínala para que sea biyectiva, encuentre su inversa y trace su gráfica.

1) $y = 2\,Cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)$

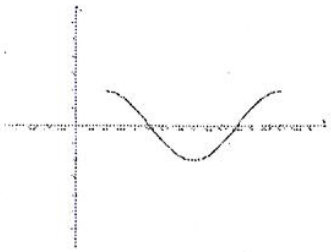
2) $y = Tan\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

3) $y = -Sen\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)$

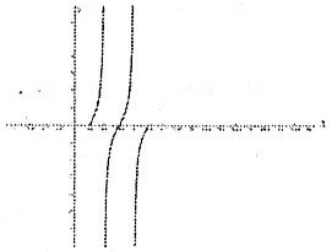
4) $y = Csc\frac{1}{2}x$

Respuestas: (Gráfica de las funciones trigonométricas directas)

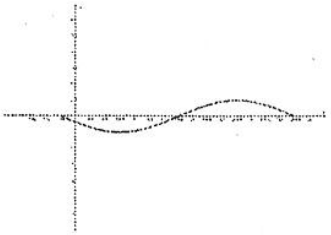
a)



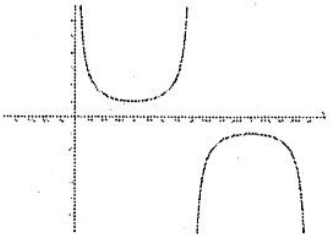
b)



c)



d)



EJERCICIOS DE REFUERZO

1) Dada la función: $y = f(x) = 3\,arcCos\left(\frac{2x-1}{5}\right)$ hallar $Dom\,f \cap Rgo\,f$

2) Dada la función: $y = f(x) = 2\,arcSen\left(\frac{2x-3}{5}\right)$ hallar $Dom\,f \cap Rgo\,f$

Determinar dominio y rango en las siguientes funciones:

3) $y = 2\,arc\,Sen(x-2)$

4) $y = 5\,arc\,Sen\left(\frac{x}{4} - 1\right) + \frac{5}{2}\pi$

5) $= \pi + 2\,arc\,Sen(x-3)$

6) $y = arc\,Tan\,x + \frac{\pi}{2}$

7) $y = arcSen\left(\frac{2x}{3}\right)$

8) $y = arc\,Cos\left(\frac{x}{5}\right)$

9) $y = arc\,Tan(5x)$

10) $y = arc\,Cot\left(\frac{x}{3}\right)$

11) $y = arc\,Sec(7x)$

12) $y = arc\,Csc\left(\frac{x}{9}\right)$

13) $y = arcSen\left(x-3\right)$

14) $y = arc\,Cos\left(x+1\right)$

15) $y = arc\,Tan\left(x+\sqrt{2}\right)$

16) $y = arc\,Cot\left(x-\pi\right)$

17) $y = arc\,Sec\left(x-7\right)$

18) $y = arc\;Csc\left(x-10\right)$

19) $y = 2\,arc\,Sen\left(x-2\right)+\frac{\pi}{2}$

20) $y = 3\,arc\,Tan\left(x-1\right)+\pi$

Respuestas:

1) $\left[0,3\right]$

2) $\left[-1,\pi\right]$

3) $x\in\left[1,3\right],\quad y\in\left[-\pi,\pi\right]$

4) $x\in\left[0,8\right],\quad y\in\left[0,5\pi\right]$

5) $x\in\left[2,4\right],\quad y\in\left[0,2\pi\right]$

6) $x\in\Re\,,\quad y\in\left]0,\pi\right[$

7) $x\in\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right],\quad y\in\left]0,\pi\right[$

8) $x\in\left[-5,5\right],\quad y\in\left[0,\pi\right]$

9) $x\in\Re\,,\quad y\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

10) $x\in\Re\,,\quad y\in\left]0,\pi\right[$

11) $x\in\Re-\left]-\frac{1}{7},\frac{1}{7}\right[,\quad y\in\left[0,\pi\right]-\left\{-\frac{\pi}{2}\right\}$

12) $x\in\Re-\left]-9,9\right[,\quad y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]-\left\{0\right\}$

13) $x\in\left[2,4\right],\quad y\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

14) $x\in\left[-2,0\right],\quad y\in\left[0,\pi\right]$

15) $x\in\Re\,,\quad y\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

16) $x\in\Re\,,\quad y\in\left]0,\pi\right[$

17) $x\in\Re-\left]6,8\right[,\quad y\in\left[0,\pi\right]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

18) $x\in\Re-\left]9,11\right[,\quad y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]-\left\{0\right\}$

19) $x\in\left[1,3\right],\quad y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$

20) $x\in\Re,\quad y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$

Realice el estudio de las siguientes funciones trigonométricas, trace su gráfica, redefínala para que sea biyectiva, encuentre su inversa y trace su gráfica.

1) $y = 3+2\,Sen\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$

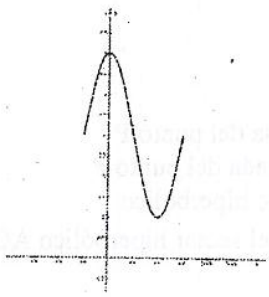
2) $y = Cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-4$

3) $y = \frac{1}{2}Sec\left(2\pi x-\pi\right)$

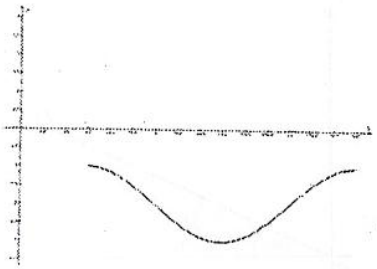
4) $y = 2\,Tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+3$

Respuestas: (Gráfica de las funciones trigonométricas directas)

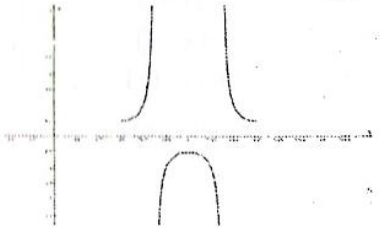
1)



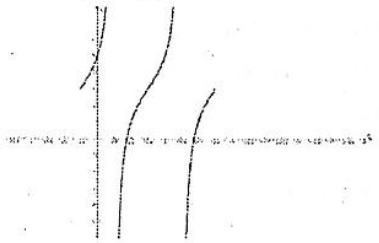
2)



3)



4)



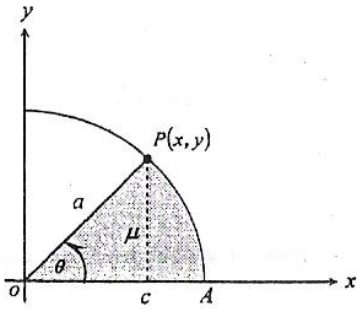
10.11. FUNCIONES HIPERBÓLICAS

A causa de la semejanza que existe entre la circunferencia y la hipérbola se plantea la cuestión de si habrá un conjunto de magnitudes o funciones que se correspondan con la hipérbola de la misma manera que las funciones circulares se corresponden con la circunferencia. Estas funciones existen y se denominan funciones hiperbólicas.

A las funciones trigonométricas a veces se las llaman funciones circulares debido a la estrecha relación que tienen con el círculo $x^2 + y^2 = 1$.

En la misma forma ciertas combinaciones de las exponenciales e^x, e^{-x}, se relacionan con la hipérbola unitaria $x^2 - y^2 = 1$.

FUNCIONES CIRCULARES (Periódicas): $x^2 + y^2 = a^2$



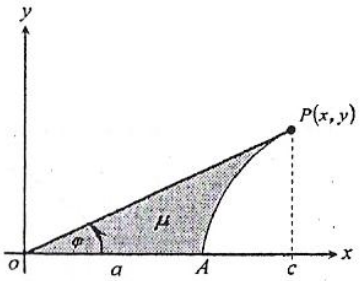
$x^2 + y^2 = a^2$

OA = OP = radio = a
OC = Abscisa del punto P
CP = Ordenada del punto P
θ = Ángulo central
μ = Área del sector circular AOP

$$Sen\theta = \frac{y}{a} \quad ; \quad Cos\theta = \frac{x}{a} \quad ; \quad Tan\theta = \frac{y}{x} \quad ; \quad etc \qquad (1)$$

$$\mu = \frac{1}{2}r^2\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{2\mu}{r^2} \quad ; \quad \theta = \frac{2\mu}{a^2} \qquad (2)$$

FUNCIONES HIPERBÓLICAS (Hipérbola): $x^2 - y^2 = a^2$



$x^2 - y^2 = a^2$

OA = a
OC = Abscisa del punto P
CP = Ordenada del punto P
φ = Ángulo hiperbólico
μ = Área del sector hiperbólico AOP

19) $Cosh 2x = 2\,Cosh(x) - 1$

20) $[Senh\,x + Cosh\,x]^n = e^{nx} \quad , \quad \forall n \in Z$

21) $Tanh(x-y) = \dfrac{Tanh\,x + Tanh\,y}{1 - Tanh\,x\;Tanh\,y}$

22) $[Cosh\,x - Senh\,x]^n = e^{-nx} \quad , \quad \forall n \in Z$

EJERCICIOS RESUELTOS

Demostrar las siguientes identidades:

a) $Cosh\,x + Senh\,x = e^x$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^x$$

$$\frac{e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x}}{2} = e^x \quad ; \quad \frac{2e^x}{2} = e^x \quad ; \quad e^x = e^x$$

b) $Cosh 2x = Cosh^2 x + Senh^2 x$

$$= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} + \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} + \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$$

$$= \frac{2e^{2x} - 2e^{-2x}}{4} = \frac{2\left(e^{2x} - e^{-2x}\right)}{4} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = Cosh 2x$$

c) $Senh(x+y) = Senh\,x\,Cosh\,y + Cosh\,x\,Senh\,y$

$$= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y} + e^{x+y} + e^{-x+y} - e^{x-y} - e^{-x-y}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[2e^{x+y} - 2e^{-(x+y)}\right] = \frac{2}{4}\left[e^{x+y} - e^{-(x+y)}\right] = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = Senh(x+y)$$

d) $[Senh\,x + Cosh\,x]^n = Cosh(nx) + Senh(nx) \quad ; \quad \forall n \in Z$

$$= \frac{e^{nx} + e^{-nx}}{2} + \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{2} = \frac{e^{nx} + e^{-nx} + e^{nx} - e^{-nx}}{2} = \frac{2e^{nx}}{2} = e^{nx}$$

$$= \left(e^x\right)^n = [Sen\,x + Cosh]^n$$

e) $Senh^2 x = \dfrac{Cosh 2x - 1}{2}$

$$= \left[\frac{\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} - 1}{2}\right] = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} = \frac{e^{2x} + \frac{1}{e^{2x}} - 2}{4} = \frac{e^{4x} - 2e^{2x} + 1}{4e^{2x}} = \left(\frac{e^{2x} - 1}{2e^x}\right)^2$$

$$= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = Senh\,x$$

Funciones Trascendentes

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

1) Demostrar las siguientes identidades:

a) $Cosh^2 x - Senh^2 x = 1$

b) $Sen\,h 2x = 2\,Sen\,h\,x\,Cos\,h\,x$

c) $Cosh\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{Cosh x + 1}{2}}$

d) $Cos\,h\,x\,Cos\,h\,y - Sen\,h\,x\,Sen\,h\,y = Cosh(x-y)$

e) $Tan\,h^{-1} x + Tan\,h^{-1} y = Tan\,h^{-1}\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$

f) $Coth^2 x - Cscsh^2 x = 1$

2) Determinar dominio, rango y puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones:

a) $y = Tanhx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

b) $y = Sechx = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$

c) $y = Senh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

d) $y = Coth^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

EJERCICIOS DE REFUERZO

1) Demostrar las siguientes identidades:

a) $2\,Senh^2\left(\frac{x}{2}\right) = Cosh\,x - 1$

b) $Cos\,h\,x - Cos\,h\,y = 2\,Sen\,h\left(\frac{x+y}{2}\right) Sen\,h\left(\frac{x-y}{2}\right)$

c) $\left[Coh\,x - Senh\,x\right]^n = e^{-nx}\,; \quad \forall n \in Z$

d) $Tanh(x-y) = \frac{Tanh\,x + tanh\,y}{1 + tanh\,x\,Tanh\,y}$

e) $Tanh^2 x + Sech^2 x = 1$

h) $Cosh^2 x = \frac{Cosh 2x + 1}{2}$

2) Simplificar: $\left[x\,Cosh(t) + y\,Senh(t)\right]^2 - \left[x\,Senh(t) + y\,Cosh(t)\right]^2$

Respuestas:

2) $x^2 - y^2$

CAPÍTULO XI
ECUACIONES PARAMÉTRICAS Y COORDENADAS POLARES

11.1. ECUACIONES DADAS EN FORMA PARAMETRICA

Las coordenadas (x,y) del punto P de una curva, pueden estar dadas en función de una tercera variable, llamada parámetro, es decir:

$$C:\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$$

A esta expresión dada se la denomina ecuaciones paramétricas, en donde a cada valor de t, le corresponde un punto de coordenadas. $P[f(t);g(t)]$, del plano $x\,y$.

El lugar geométrico que describe el punto P, se denomina curva parametrizada de la ecuación paramétrica y para obtener la ecuación cartesiana se elimina el parámetro t y de esa forma se obtiene una ecuación en forma cartesiana $y=f(x)$ o $E=(x,y)=0$ de la siguiente manera:

- Forma Explicita $\longrightarrow$ $y=f(x)$
- Forma Implícita $\longrightarrow$ $E=(x,y)=0$
- Ecuaciones Paramétricas $\longrightarrow$ $C:\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$; t = parámetro.

11.1.1. ELIMINACIÓN DEL PARÁMETRO

Para transformar una curva puramétrica a una ecuación cartesiana o rectangular en forma explícita o implícita hay que eliminar el parámetro t de la variable independiente y sustituirla en la variable dependiente.

a.- Transformar a rectangulares con el parámetro t

$$C:\begin{cases} x=f(t) & ;\ \textit{Despejando}\ t=f^{-1}(x) \\ y=g(t) & ;\ \textit{Re emplazando}\ y=g\left[f^{-1}(x)\right] \end{cases} \quad \textit{(Función Compuesta)}$$

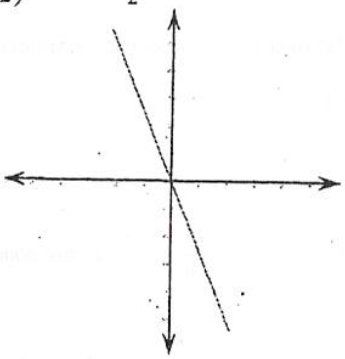
$$y=F(x)$$

EJERCICIOS RESUELTOS

Trazar la grafica de las siguientes ecuaciones paramétricas

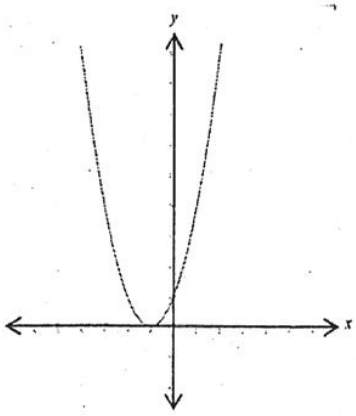
1) $C:\begin{cases} x=2t \\ y=-5t \end{cases}$ $\quad t=\dfrac{x}{2} \Rightarrow y=-5\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $y=-\dfrac{5}{2}x$ *Ec. de una recta*

t	x	y
-2	-4	10
-1	-2	5
0	0	0
1	2	-5
2	4	-10
3	6	-15



2) $C:\begin{cases} x = t-1 \\ y = t^2 \end{cases}$ $\quad t = x+1 \;\Rightarrow\; y = (x+1)^2$ *Ec. de la Parábola*

t	x	y
0	-1	0
1	0	1
-1	-2	1
2	1	4
-2	-3	4



b.- Transformar a rectangulares con el parámetro θ

En este caso se utiliza identidades trigonométricas del triángulo como $Sen^2\theta + Cos^2\theta = 1$

$$C:\begin{cases} x = a\,Cos\,\theta \\ y = b\,Sen\,\theta \end{cases}$$

Despejamos de las dos ecuaciones el parámetro θ:

$$Cos\theta = \frac{x}{a} \quad \wedge \quad Sen\theta = \frac{y}{b}$$

$$Sen^2\theta + Cos^2\theta = 1 \;,\; \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \textit{Ecuación Cartesiana de la Elipse}$$

$C:\begin{cases} x = a\,Cos\,\theta \\ y = b\,Sen\,\theta \end{cases}$ *Ecuación Paramétrica de la Elipse*

$$Si:\begin{cases} a < b \;\Rightarrow\; \textit{Elipse simetrica a "y"} \\ a = b \;\Rightarrow\; \textit{Circunferencia} \\ a > b \;\Rightarrow\; \textit{Elipse simetrica a "x"} \end{cases}$$

Ejemplos:

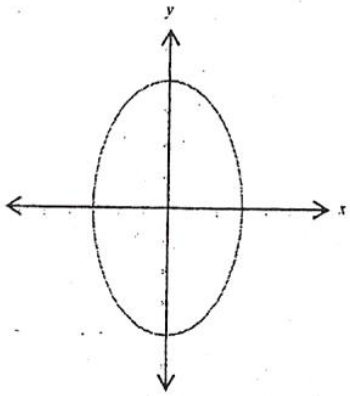
Trazar la gráfica de las siguientes ecuaciones paramétricas:

1) $C = \begin{cases} x = 3\,Cos\theta \\ y = 4\,Sen\theta \end{cases}$

$$Cos\theta = \frac{x}{3} \quad \wedge \quad Sen\theta = \frac{y}{4}$$

$$Cos^2\theta + Sen^2\theta = 1 \;,\; \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \qquad \textit{Elipse simetrica a y}$$

θ	x	y
0	3	0
$\pi/4$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$2\sqrt{2}$
$\pi/2$	0	-4
$3\pi/4$	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$2\sqrt{2}$
π	-3	0
$5\pi/4$	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$-2\sqrt{2}$
$3\pi/2$	0	-4
$7\pi/4$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$-2\sqrt{2}$



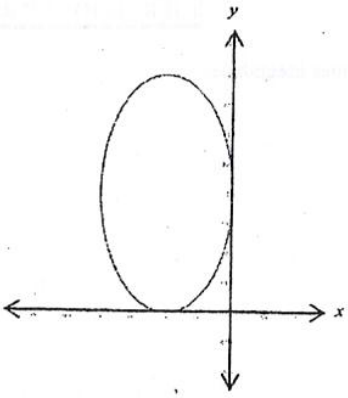
2)

$$\begin{cases} x = -1 + Cos\,\theta \\ y = 2 + 2Sen\ \theta \end{cases}$$

$$Cos\,\theta = x+1 \quad , \quad Sen\ \theta = \frac{y-2}{2}$$

$$Cos^2\,\theta + Sen^2\,\theta = 1$$

$$(x+1)^2 + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$



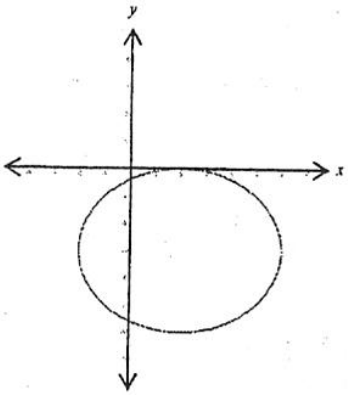
3)

$$\begin{cases} x = 2 + 4\ Cost \\ y = -3 + 3\,Sen\,t \end{cases}$$

$$Cost = \frac{x-2}{4} \quad , \quad Sen\,t = \frac{y+3}{3}$$

$$Cos^2 t + Sen^2 t = 1$$

$$\left(\frac{x-2}{16}\right)^2 + \left(\frac{y+3}{9}\right)^2 = 1$$



EJERCICIOS DE REFUERZO

Determine la ecuación cartesiana o rectangular de las siguientes ecuaciones paramétricas:

a) $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -1 + t \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = -10 - t \\ y = -20 + 2t \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 2\,Cos\,t \\ y = 3\,Sen\,t \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = a\sqrt{t} \\ y = b\sqrt{t+1} \end{cases}$ e) $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^{3t} \end{cases}$ f) $\begin{cases} x = Cos\,t \\ y = 2\,Sen^2 t \end{cases}$

g) $\begin{cases} x = Tan\,t \\ y = Sen\,2t \end{cases}$ h) $\begin{cases} x = Tan\,t \\ y = Sen\,2t + 2Cos\,2t \end{cases}$ i) $\begin{cases} x = |\ln t| \\ y = 1 + t^3 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t^2 - 2t + 2 \end{cases}$ k) $\begin{cases} x = Sec\,t \\ y = Tan\,t \end{cases}$; $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ l) $\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{t^2 - 1} \end{cases}$; $|t| \geq 1$

Respuestas:

a) $y = \frac{x-6}{2}$ b) $-2x - 40$ c) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ d) $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

e) $y = \frac{1}{x^3}$ f) $y = 2 - 2x^2$ g) $y = \frac{2x}{x^2+1}$ h) $y = \frac{2x + 2 - 2x^2}{x^2+1}$

i) $y = 1 + e^{3x}$, $y = 1 + e^{-3x}$ j) $y = x^2 + 1$ k) $x^2 - y^2 = 1$ l) $y = \sqrt{x^2 - 1}$

11.2 ESTUDIO Y GRÁFICO DE ECUACIONES PARAMÉTRICAS

Sea: $C: \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$

a) **Dominio:** $Dom\,C = Dom\,x \cap Dom\,y$

b) **Rango:** $Rgo\,C = Rgo\,x \cap Rgo\,y$

$$\left.\begin{matrix} Rgo\,x \\ Rgo\,y \end{matrix}\right\} Despejar\ t$$

c) **Intersección:**

Con el eje x: Si: $y = 0$

$g(t) = 0 \Rightarrow t_1$; *Sustituyo en x*

Con el eje y: Si: $x = 0$

$g(t) = 0 \Rightarrow t_1$; *Sustituyo en y*

d) **Asíntotas:**

Asíntota Vertical A.V.: Analizar la restricción en y para sustituir en x

Asíntota horizontal A.H. Analizar la restricción en x para sustituir en y

Ejemplo.

$$C:\begin{cases} x=\dfrac{2t}{t-1} \\ y=\dfrac{t+1}{t-2} \end{cases}$$

A.V. $t\neq 2$; $x=\dfrac{2(2)}{2-1}=\dfrac{4}{1}=4 \Rightarrow x=4$ *A.V.*

A.H. $t\neq 1$; $y=\dfrac{1+1}{1-2}=\dfrac{2}{-1}=-2 \Rightarrow y=-2$ *A.H.*

Asíntota Oblicua: Hay que transformar la curva paramétrica a rectangular solo si existe A.V.

$y=\dfrac{{}^{o}N(x)}{{}^{o}D(x)} \Leftrightarrow {}^{o}N(x)>{}^{o}D(x)$ *en una unidad*

e) **Simetría:**

$Sc\,x:\ Si:\ f(t)=f(-t) \ \wedge\ g(t)=-g(-t)$
$Sc\,y:\ Si:\ f(t)=-f(-t) \ \wedge\ g(t)=g(-t)$
$Sc\,O:\ Si:\ f(t)=-f(-t) \ \wedge\ g(t)=-f(-t)$

f) **Tabla de valores:**

t	x	y

EJERCICIOS RESUELTOS

Analizar y graficar las siguientes ecuaciones paramétricas y transformarla a la forma rectangular:

1) Sea: $C:\begin{cases} x=t-1 \\ y=t^2 \end{cases}$

a) **Dominio:**

$$\left.\begin{array}{l} Dom\,x=\Re \\ Dom\,y=\Re \end{array}\right\} \Rightarrow Dom\,C=Dom\,x\cap Dom\,y=\Re$$

b) **Rango:**

$$\left.\begin{array}{l} Rgo\,x:\ t=x=1\ ;\ Rgo=\Re \\ Rgo\,y:\ t=\pm\sqrt{y}\ ;\ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow Rgo\,C=Rgo\,x\cap Rgo\,y=:\ y\in[0,+\infty[$$

c) **Intersección:**

Con el eje x: Si: $y=0$

$0=t^2$; $t=0 \Rightarrow x=-1$; $(-1,0)$

Con el eje y: Si: $x=0$

$$0=t-1 \;\; ; \;\; t=1 \;\; \Rightarrow \;\; y=1 \;\; ; \;\; (0,1)$$

d) Asíntotas:

No existen

e) Simetría:

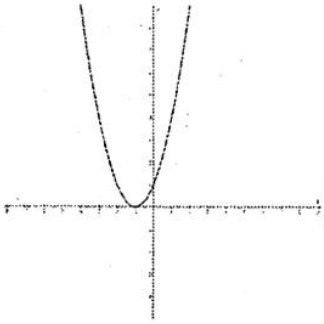
$f(t)=t-1 \;\neq\; f(-t)=-t-1$ *no existe simetría*

$f(t)=t-1 \;\neq\; -f(-t)=t+1$ *no existe simetría*

Ya no es necesario analizar las condición con $g(t)$ y $g(-t)$

f) Tabla de valores:

t	x	y
-2	-3	4
-1	-2	1
0	-1	0
1	0	1
2	1	4



g) Transformación de la ecuación paramétrica a rectangular:

$$C:\begin{cases} x=t-1 & (1) \\ y=t^2 & (2) \end{cases}$$

De (1) despejamos t

$x=t-1 \;\; ; \;\; t=x+1$, este valor sustituimos en (2)

$y=t^2 \;\; ; \;\; y=(x+1)^2$ **Ecuación rectangular**

2) Analizar y graficar la siguiente ecuación paramétrica:

Sea: $C:\begin{cases} x=\dfrac{t+1}{t-2} \\ y=\dfrac{t}{t-1} \end{cases}$

a) Dominio:

$$\left.\begin{array}{l} Dom\,x=\Re-\{2\} \\ Dom\,y=\Re-\{1\} \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; Dom\,C=Dom\,x\cap Dom\,y=x\in\Re-\{1,2\}$$

b) Rango:

$Rgo\,x:\ xt-2x=t+2$

$$xt-t=2x+2\quad;\quad t=\frac{2x+2}{x-1}\quad;\quad Rgo\,x:\Re-\{1\}$$

$Rgo\,y:\ yt-y=t$

$$yt-t=y\quad;\quad t=\frac{y}{t-1}\quad;\quad Rgo\,y:\Re-\{1\}$$

$Rgo\,C=Rgo\,x\cap Rgo\,y=\Re-\{1\}$

c) Intersección:

Con el eje x: Si: $y=0$

$$0=\frac{t}{t-1}\quad;\quad t=0\quad\Rightarrow\quad x=\frac{0+2}{0-2}=-1\quad;\quad(-1,0)$$

Con el eje y: Si: $x=0$

$$0=\frac{t+2}{t-2}\quad;\quad t=-2\quad\Rightarrow\quad y=\frac{-2}{-2-1}=\frac{2}{3}\quad;\quad\left(0,\frac{2}{3}\right)$$

d) Asíntotas:

A.V. $t\neq 1\ ;\ x=\dfrac{1+2}{1-2}=-3\quad\Rightarrow\quad x=-3\ A.V.$

A.H. $t\neq 2\ ;\ y=\dfrac{2}{2-1}=2\quad\Rightarrow\quad y=2\ A.H.$

e) Simetría:

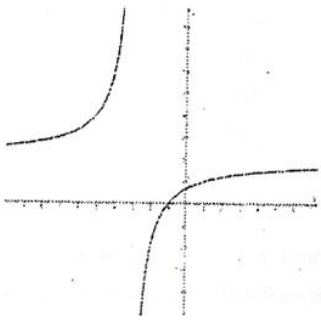
$f(t)=\dfrac{t+2}{t-2}\ \neq\ f(-t)=\dfrac{-t+2}{-t-2}$ *no existe simetría*

$f(t)=t-1\ \neq\ -f(-t)=\dfrac{t-2}{-t-2}$ *no existe simetría*

No es necesario analizar las condición con $g(t)$ y $g(-t)$

f) Tabla de valores:

t	x	y
6/5	-4	6
-2	0	2/3
-1	-1/3	1/2
0	-1	0
1	-3	∄
2	∄	2
3	5	3/2



g) Transformación de la ecuación paramétrica a rectangular:

$$C:\begin{cases} x=\dfrac{t+1}{t-2} & (1) \\ y=\dfrac{t}{t-1} & (2) \end{cases}$$

De (1) despejamos t y ese valor sustituimos en (2)

$$x=\frac{t+1}{t-2} \;;\; xt-2x=t+2 \;;\; xt-t=2x+2 \;;\; (x-1)t=2x+2 \;;\; t=\frac{2x+2}{x-2}$$

$$y=\frac{t}{t-1} \;;\; y=\frac{\dfrac{2x+2}{x-1}}{\dfrac{2x+2}{x-1}-1} \;;\; y=\frac{2x+2}{x+3} \;;\; y=\frac{\dfrac{2x+2}{x-1}}{\dfrac{2x+2-x+1}{x-1}}$$

$$y=\frac{2x+2}{x+3}$$ **Ecuación rectangular**

EJERCICIOS DE REFUERZO

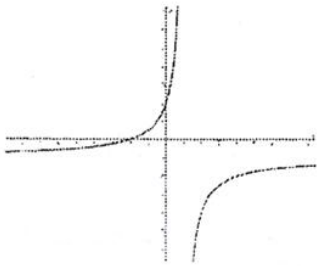
Analizar y graficar las siguientes ecuaciones paramétricas y transformarla a la forma rectangular:

1) $C:\begin{cases} x=\dfrac{t-3}{t} \\ y=t-1 \end{cases}$ 2) $C:\begin{cases} x=\dfrac{4t-1}{2t} \\ y=\dfrac{3}{2}t-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ 3) $C:\begin{cases} x=\dfrac{t^2-t}{3} \\ y=t+1 \end{cases}$ 4) $C:\begin{cases} x=t^2-1 \\ y=t \end{cases}$

5) $C:\begin{cases} x=t^2 \\ y=t^3+3t \end{cases}$ 6) $C:\begin{cases} x=1+\dfrac{1}{2t} \\ y=t-4 \end{cases}$ 7) $C:\begin{cases} x=\dfrac{t^2+2t+1}{2} \\ y=t-4 \end{cases}$ 8) $C:\begin{cases} x=\dfrac{t^2}{2}-\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{t^2}{4}-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

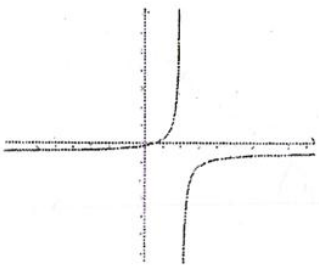
Respuestas:

1)



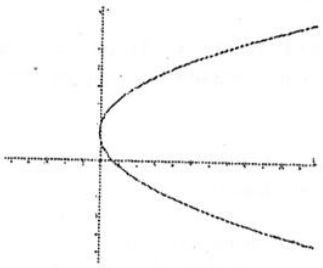
$$y=\frac{-x-2}{x-1}$$

2)



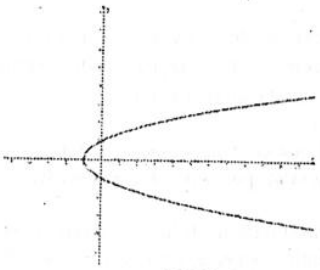
$$y=\frac{-2x+1}{4x-8}$$

3)



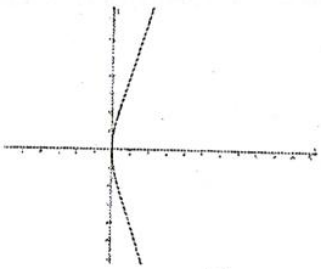
$$y = \frac{3 \pm \sqrt{12x+1}}{2}$$

4)



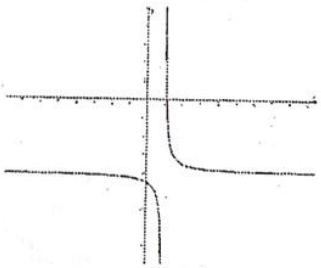
$$y = \pm\sqrt{x+1}$$

5)



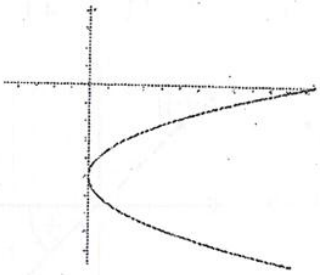
$$y = \pm(x+3)\sqrt{x}$$

6)



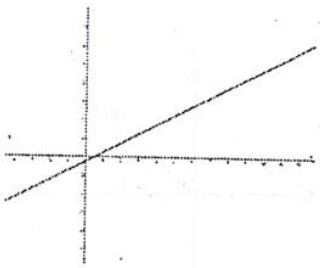
$$y = \frac{-8x+9}{2x-2}$$

7)



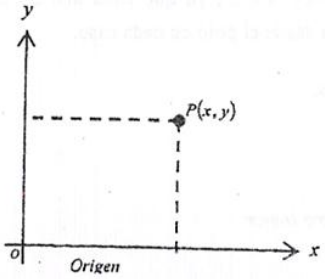
$$y = -5 \pm \sqrt{2x}$$

8)

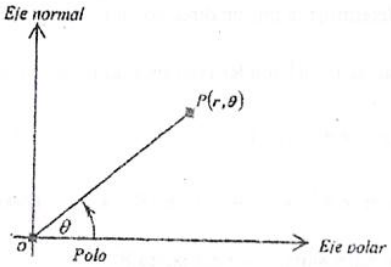


$$y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

11.3. COORDENADAS POLARES



COORDENADAS RECTANGULARES



COORDENADAS POLARES

Ecuaciones Paramétricas y Coordenadas Polares

Llamamos al par ordenado (r, θ) coordenadas polares del punto P.

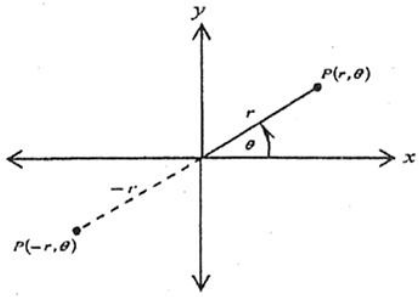
La posicion de un punto P en el plano se puede indicar mediante coordenadas polares en función de su distancia $OP(r)$ llamada **radio vector**, y el ángulo θ llamado **argumento** o ángulo vectorial medido desde el eje polar al radio vector.

Igual que en trigonometría, el radio vector puede girar cualquier ángulo en sentido horario o en sentido antihorario, por tanto θ puede tomar cualquier valor positivo o negativo.

Las distancias medidas a lo largo del radio vector desde el polo se definen como positivas y las medidas en sentido opuesto, esto es, a lo largo del radio vector hasta el polo son negativas, por definición.

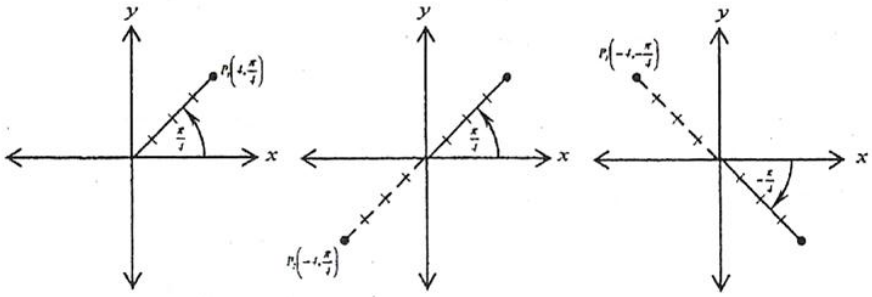
Si un punto tiene un radio vector negativo, se mide primero el ángulo polar, y después se toma el radio vector en la prolongación del lado final.

La recta que pasa por el polo perpendicularmente al eje polar se conoce como eje a 90° o eje normal.



Ejemplos:

Graficar los puntos indicados: $P_1\left(4, \frac{\pi}{4}\right)$, $P_2\left(-4, \frac{\pi}{4}\right)$ y $P_3\left(-4, -\frac{\pi}{4}\right)$



Un punto en el plano coordenado determina uno y solamente un punto, no así un par de coordenadas polares (r, θ) pueden darse las coordenadas $(r, \theta \pm 2k\pi)$, donde $k \in Z$, ya que cada uno de estos ángulos determina la misma dirección que θ, y r es la distancia desde el polo en cada caso.

En general, si (r, θ) son las coordenadas de un punto P, entonces:

$(r, \theta \pm 2k\pi)$ ó $(-r, \theta \pm 360^{\circ}k)$ *donde* $k \in Z$

$(-r, \theta \pm k\pi)$ ó $(-r, \theta \pm 180^{\circ}k)$ *donde k es un entero impar*

Todas son representaciones del punto P.

Ejemplo:

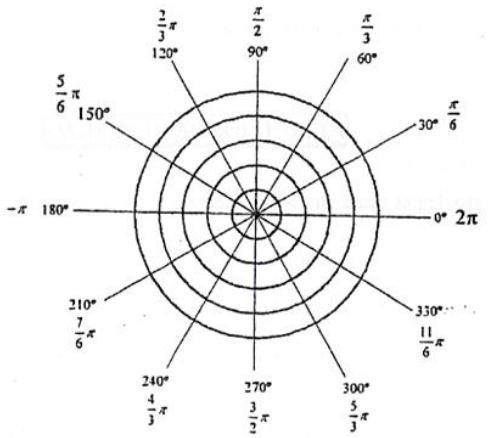
El punto $P\left(4,\frac{\pi}{3}\right)=P\left(4,\frac{\pi}{3}+2\pi\right)=P\left(4,\frac{7\pi}{3}\right)$

$$=P\left(4,\frac{\pi}{3}-2\pi\right)=P\left(4,-\frac{5\pi}{3}\right)$$

El punto $P\left(4,\frac{\pi}{3}\right)=P\left(-4,\frac{\pi}{3}+\pi\right)=P\left(-4,\frac{4\pi}{3}\right)$

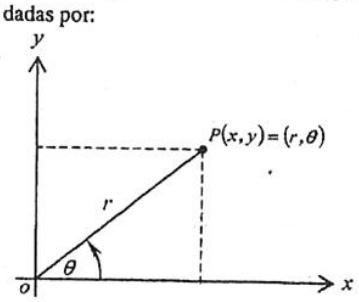
$$=P\left(-4,\frac{\pi}{3}-\pi\right)=P\left(-4,-\frac{2\pi}{3}\right)$$

Para representar puntos y curvas en coordenadas polares es recomendable el uso de papel polar o preparar un retículo polar como el de la figura adjunta.



11.3.1. RELACIÓN ENTRE COORDENADAS POLARES Y RECTANGULARES

Si P es un punto con coordenadas polares (r,θ), las coordenadas rectangulares (x,y) de P están dadas por:



$$x=r\,Cos\,\theta \quad ; \quad y=r\,Sen\,\theta$$

$$x^2+y^2=r^2 \quad ; \quad \theta=arcTan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$r=\pm\sqrt{x^2+y^2}$$

$$Cos\,\theta=\pm\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad ; \quad Sen\,\theta=\pm\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Ejemplos:

1) Convertir a la forma polar $\left(-\sqrt{6},\sqrt{2}\right)$

$r=\sqrt{(-\sqrt{6})^2+(\sqrt{2})^2}$; $r=\sqrt{6+2}$; $r=\sqrt{8}$; $r=2\sqrt{2}$

$\theta=ArcTan\left(\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\right)$; $\theta=ArcTan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$; $\theta=\frac{5\pi}{6}$

$\left(-\sqrt{6},\sqrt{2}\right)$ *en forma polar es* $\left(2\sqrt{2},\ \frac{5\pi}{6}\right)$

2) Convertir a coordenadas rectangulares $\left(8,\frac{\pi}{6}\right)$

$x=r\,Cos\theta$; $x=8\,Cos\frac{\pi}{6}$; $x=\frac{8\sqrt{3}}{2}$; $x=4\sqrt{3}$

$y=r\,Sen\theta$; $y=8\,Sen\frac{\pi}{6}$; $y=\frac{8}{2}$; $y=4$

Las coordenadas rectángulares del punto $\left(8,\ \frac{\pi}{6}\right)$ *son* $\left(4\sqrt{3},4\right)$

3) Convertir a coordenadas rectangulares $\left(-4,\frac{5\pi}{4}\right)$

$x=r\,Cos\theta$; $x=-4\,Cos\frac{5\pi}{4}$; $x=-4\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$; $x=2\sqrt{2}$

$y=r\,Sen\theta$; $y=-4\,Sen\frac{5\pi}{4}$; $y=-4\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$; $y=2\sqrt{2}$

Las coordenadas rectángulares del punto $\left(-4,\ \frac{5\pi}{4}\right)$ *son* $\left(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}\right)$

4) Convertir a la forma polar $2x-3y=1$

$$2\left(r\,Cos\,\theta\right)-3\left(y\,Sen\,\theta\right)=1$$
$$2r\,Cos\,\theta-3y\,Sen\,\theta=1$$
$$r\left(2Cos\,\theta-3Sen\,\theta\right)=1\ ,\ r=\frac{1}{2Cos\,\theta-3Sen\,\theta}$$

5) Convertir a la forma polar $4xy=9$

$$4\left(r\,Cos\,\theta\right)\left(r\,Sen\,\theta\right)=9$$
$$4r^2\,Cos\,\theta\,Sen\,\theta=9\ ,\ 2r^2\left(2\right)Sen\,\theta\,Cos\,\theta=9\ ,\ 2r^2Sen\,2\theta=9$$
$$r^2=\frac{9}{2}Sen\,2\theta \qquad ; \qquad r=\frac{3}{2\sqrt{Cos\,\theta\,Sen\,\theta}}$$

6) Convertir a la forma polar $(x-1)^2+y^2=1$

$$x^2-2x+1+y^2=1\ ,\ \left(x^2+y^2\right)-2x=0\ ,\ r^2-2r\,Cos\,\theta=0\quad r\left(r-2Cos\,\theta\right)=0$$
$$r-2Cos\,\theta=0\ ,\ ó\ \ r=0$$

Como r es igual a 0 *simplemente el polo y se incluye en* $r-2\cos\theta=0$

7) Convertir a la forma rectangular $r=\frac{1}{Sen\,\theta+Cos\,\theta}$

Multiplicando ambos miembros por $\left(Sen\ \theta+Cos\ \theta\right)$ se obtiene:

$r(\,Sen\,\theta+Cos\,\theta\,)=1$, $r\,Sen\,\theta+r\,Cos\,\theta=1$, $y+x=1$, $x+y=1$

8) Convertir a la forma rectangular $r=\dfrac{6}{2-Cos\,\theta}$

$2r-r\,Cos\,\theta=6$, $2\sqrt{x^2+y^2}-x=6$, $2\sqrt{x^2+y^2}=6+x$, $4(x^2+y^2)=(6+x)^2$
$4x^2+4y^2=36+12x+x^2$, $3x^2+4y^2-12x-36=0$

9) Convertir a la forma rectangular $r-4\,Sen\,\theta=0$

Multiplicando ambos miembros por r se obtiene:

$r(r-4\,Sen\,\theta)=0$, $r^2-4r\,Sen\,\theta=0$, $(x^2+y^2)-4y=0$, $x^2+y^2=4y$

10) Convertir a la forma rectangular $r^2=5\,Sen\,(2\theta)$

$r^2=10\,Sen\,\theta\,Cos\,\theta$, *multiplicando por* r^2 , $r^4=10r\,Sen\,\theta\,r\,Cos\,\theta$
$(x^2+y^2)^2=10yx$

11) Convertir a la forma rectangular $r=\dfrac{6}{2-3\,Sen\,\theta}$

$2r-3r\,Sen\theta=6$, $2r-3y=6$, $2r=3y+6$, $4r^2=9y^2+36y+36$

$4(x^2+y^2)=9y^2+36y+36$, $4x^2-5y^2-36y-36=0$

12) Convertir a la forma rectangular $r=2\,Sen\,\theta$

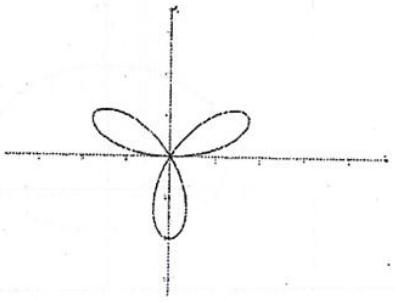
$r^2=2\,r\,Sen\,\theta$, $x^2+y^2=2yr$, $x^2-2y+y^2=0$, $x^2+(y^2-2y+1)=1$

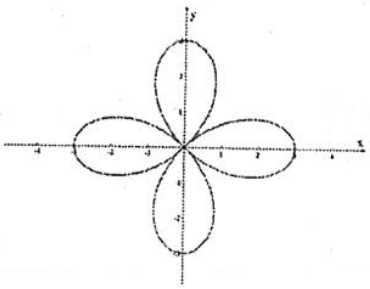
$x^2+(y^2-1)^2=1$

Observación. Cuando se multiplica por r los dos miembros de una ecuación se corre el riesgo de que r sea cero, en ese caso se añade el polo a la gráfica. Si a la inversa, se divide la ecuación por r; se podría eliminarlo.

11.4 CURVAS POLARES

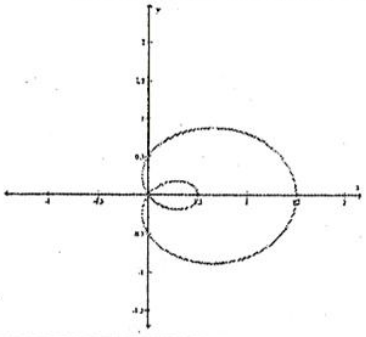
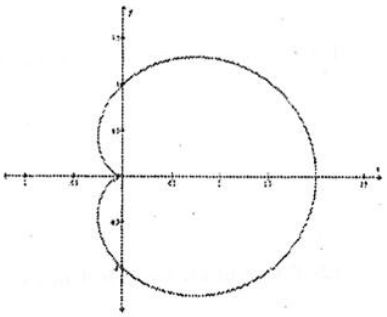
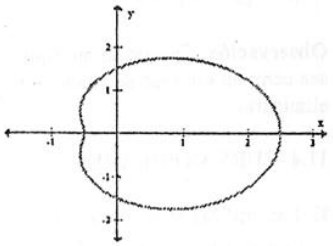
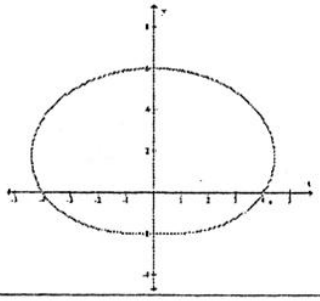
1) Las gráficas de las ecuaciones: $r=a\,Cos(n\theta)$; $r=a\,Sen(n\theta)$ se denominan rosas
Si n es par la rosa tendrá $2n$ pétalos y si n es impar, tendrá n pétalos.



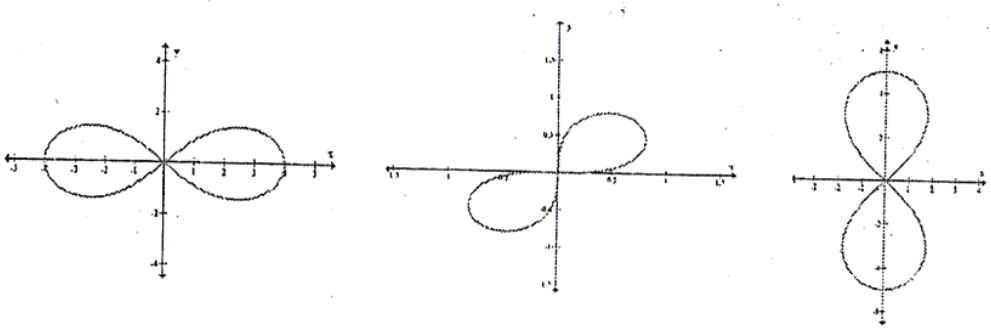


2) Las gráficas de las ecuaciones: $r = a \pm b\,Cos\,\theta$; $r = a \pm b\,Sen\,\theta$ se denominan **caracoles** o **limazones** (limacon)

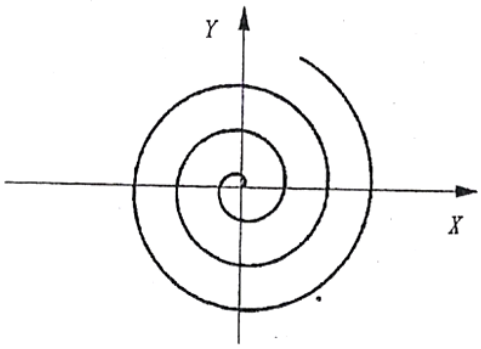
Existen cuatro tipos de caracoles, que dependen de la razón $\frac{a}{b}$

RAZON	NOMBRE	GRÁFICO
1) $a < b$ ó $0 < \frac{a}{b} < 1$	Caracol con un lazo interno	
2) $\frac{a}{b} = 1$	Cardioide	
3) $1 < \frac{a}{b} < 2$	Caracol con hendidura	
4) $2 \leq \frac{a}{b}$	Caracol convexo (sin hendidura)	

3) Las gráficas de: $r^2 = \pm a\, Cos(2\theta)$; $r^2 = \pm a\, Sen\,(2\theta)$ tienen la forma de 8 y se denominan **lemniscatas**



4) La gráfica de $r = a\theta$ se denomina **espiral de Arquímedes**



11.5. ECUACIONES POLARES

Resumen de ecuaciones polares de rectas y circunferencias.

Sean: C , a y b constantes

$\theta = C$	Recta que contiene al polo, forma un ángulo de C radianes con el eje polar.
$b = r\,Sen\,\theta$	Recta paralela al eje polar; arriba del eje polar si $b > 0$, debajo del eje polar si $b < 0$
$a = r\,Cos\,\theta$	Recta paralela al eje $\frac{\pi}{2}$, a la derecha del eje $\frac{\pi}{2}$ si $a > 0$, a la izquierda del eje $\frac{\pi}{2}$ si $a < 0$
$r = C$	Circunferencia, centro en el polo y radio C
$r = 2a\,Cos\,\theta$	Circunferencia, radio $\lvert a \rvert$, tangente al eje $\frac{\pi}{2}$; centro en el eje polar o en su prolongación.
$r = 2b\,Sen\,\theta$	Circunferencia, radio $\lvert b \rvert$, tangente al eje polar; centro en el eje $\frac{\pi}{2}$; o en su prolongación.

11.6. TANGENTES EN EL ORIGEN

Las tangentes en el origen se calculan simplemente haciendo $r=0$ y resolviendo la ecuación trigonométrica resultante.

Ejemplo.

Calcular las tangentes en el origen de la curva : $r=3Cos2\theta$

$$Si\ r=0 \Rightarrow 0=3Cos2\theta \ ,\ Cos2\theta=0 \ ,\ 2\theta=ArcCos0$$

$$2\theta=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}$$

11.7. GRAFICAS EN COORDENADAS POLARES

La gráfica de una ecuación en coordenadas polares $r=f(\theta)$, es el conjunto de todos los puntos $P(r,\theta)$, cada uno de los cuales tiene por lo menos un par ordenado (r,θ) que satisfacen a la ecuación dada.

En símbolos: $G=\{(r,\theta)/r=f(\theta)\}$

Para construir una curva en coordenadas polares, se elabora una tabla de valores lo suficientemente completa, se marcan los puntos en el plano polar y a través de ellos se traza una curva suave y continua.. Los pasos a seguir en la construcción de curvas dadas en coordenadas polares son los siguientes:

1) **Intersecciones**

a) Con el eje polar

Se obtiene resolviendo la ecuación polar dada para r, cuando a θ se le asigna sucesivamente los valores:

$$\theta=\pi n \quad ; \quad \forall n\in Z$$

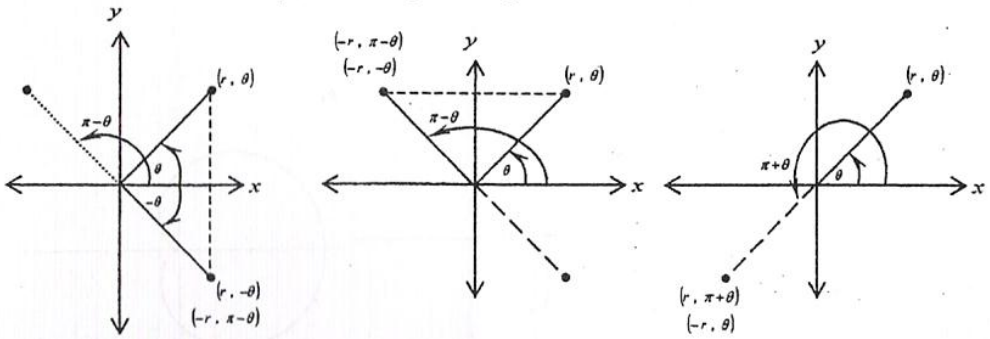
b) Con el eje a 90 °

Se obtiene resolviendo la ecuación polar dada para r, cuando a θ se le asigna sucesivamente los valores:

$$\theta=\frac{\pi}{2}+\pi n \quad ; \quad \forall n\in Z$$

2) **Análisis de simetrías**

Antes de trazar una curva polar, es conveniente realizar el análisis de simetría. Esto como es sabido, permite ahorrar tiempo en el cálculo de la tabla de valores y el trazo de la curva. El análisis de simetría se realiza aplicando las siguientes ***reglas de simetría***:



1. La gráfica de una ecuación polar es simétrica respecto al eje polar, si al sustituir θ por $-\theta$ la ecuación no cambia; ó si al sustituir θ por $(\pi-\theta)$ se obtiene $-r$.

2. La gráfica de una ecuación polar es simétrica respecto al eje normal $\theta=\pi/2$, si al sustituir θ por $\pi-\theta$, la ecuación no cambia; ó si al sustituir θ por $-\theta$ se obtiene $-r$.

3. La gráfica de una ecuación polar será simétrica respecto al polo si al sustituir θ por $\pi+\theta$ ó por $-r$, se obtiene una ecuación equivalente.

Debido a la multiplicidad de representación de los puntos en coordenadas polares, pueden presentarse simetrías que no son identificables mediante estas pruebas.

3) **Construcción de una tabla de valores:**

Dando valores a θ podemos obtener un número suficiente de puntos para obtener una grafica adecuada. Por lo general se toman los valores de θ a intervalos de $30°$.

4) **Trazado de la curva**

Ejemplos:

1) Graficar la ecuación: $r=1-Sen\,\theta$

a) Intersecciones:

Con el eje polar: $Si\ \theta=0 \Rightarrow r=1$

Con el eje normal: $Si\ \theta=\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow r=0$

b) Simetrías:

Con el eje polar: $f(r,\ -\theta):\ r=1-Sen(-\theta)=1+Sen\,\theta \neq f(r,\ \theta)$

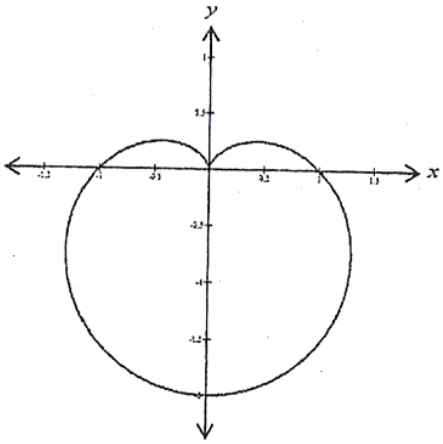
Con el eje normal: $f(r,\ \pi-\theta):\ r=1-Sen(\pi-\theta)=1-Sen\,\theta = f(r,\ \theta)$

Con el polo: $f(r,\ \pi+\theta):\ r=1-Sen(\pi+\theta)=1+Sen\,\theta \neq f(r,\ \theta)$

Por lo tanto la curva es simétrica al eje normal.

Tabla de valores:

θ	$r=1-Sen\theta$
0 °	1
30 °	0.5
60 °	0.13
90 °	0
270 °	2
300 °	1.87
330 °	1.5
360 °	1



2) Graficar la ecuación: $r = 3\,Cos 2\theta$

a) Intersección:

Con el eje polar. $Si\ \theta = 0 \Rightarrow r = 3$

Con el eje normal. $Si\ \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = -3$

b) Simetrías:

Con el eje polar: $f(r, -\theta)$: $r = 3Cos(-2\theta) = 3\,Cos 2\theta = f(r, -\theta)$

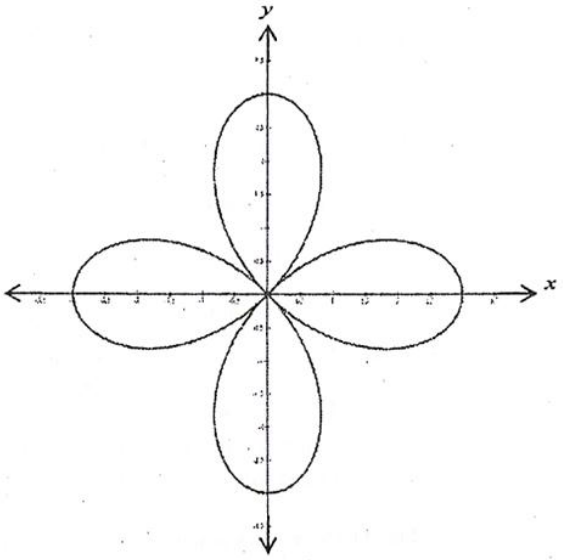
Con el eje normal: $f(r, \pi-\theta)$: $r = 3Cos(2\pi-2\theta) = 3\,Cos\,2\theta = f(r, -\theta)$

Con el polo: $f(r, \pi+\theta)$: $r = 3Cos(2\pi+2\theta) = 3\,Cos\,2\theta = f(r, -\theta)$

Por lo tanto la curva es simétrica al eje polar, eje normal, y al polo.

Tabla de valores:

θ	$r = 3\,Cos 2\theta$
0 °	2
15 °	2.50
30 °	1.5
45 °	0
60 °	-1.5
75 °	-2.6
90 °	-3
105 °	-2.6
120 °	-1.5
135 °	0
150 °	1.5
165 °	2.6
180 °	3



3) Graficar la ecuación: $r^2 = Sen\ 2\theta$

$r^2 = 2\,Sen\,\theta\,Cos\,\theta$, $r = \sqrt{2\,Sen\,\theta\,Cos\,\theta} \Rightarrow f(r,\theta)$

a) Intersección:

Con el eje polar. $Si\ \theta = 0 \Rightarrow r = 0$

Con el eje normal. $Si\ \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = 0$

b) Simetrías:

Con el eje polar: $f(r,\theta)$: $r = \sqrt{2\,Sen(-\theta)\,Cos(-\theta)} = \sqrt{-2\,Sen\,\theta\,Cos\,\theta} \neq f(r,\theta)$

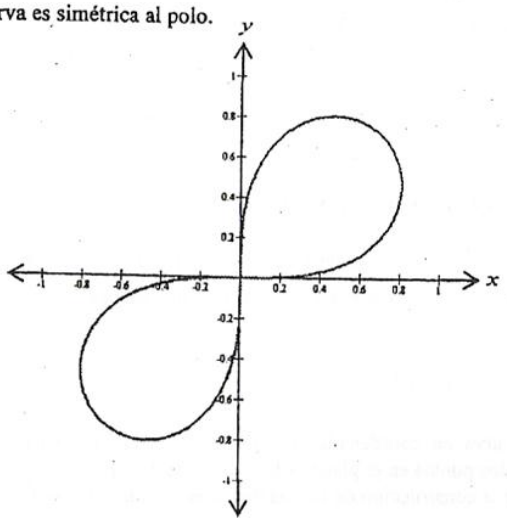
Con el eje normal: $f(r,\pi-\theta)$: $r = \sqrt{2\,Sen(\pi-\theta)\,Cos(\pi-\theta)} = \sqrt{-2\,Sen\,\theta\,Cos\,\theta} \neq f(r,\theta)$

Con el polo

$$f\left(r,\pi+\theta\right):\ r=\sqrt{2\,Sen(\pi+\theta)\,Cos(\pi+\theta)}=\sqrt{2\left(-Sen\,\theta\right)\left(-Cos\,\theta\right)}$$

$$r=\sqrt{2\,Sen\,\theta\ Cos\,\theta}\ \neq f\left(r,\theta\right)$$

Por lo tanto la curva es simétrica al polo.



EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

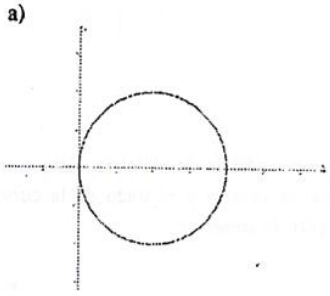
Analice las siguientes ecuaciones y trace su gráfica:

a) $r=4\,Cos\,\theta$ b) $r=2+2\,Sen\,\theta$ c) $r^2=4\,Cos\,2\theta$

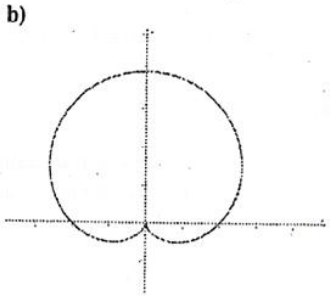
d) $r=2\,Sen3\theta$ e) $r=4\left(1-Cos\,\theta\right)$

Respuestas:

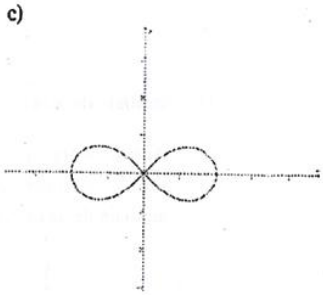
a)



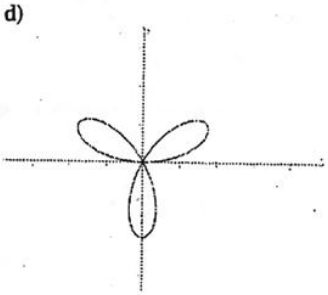
b)



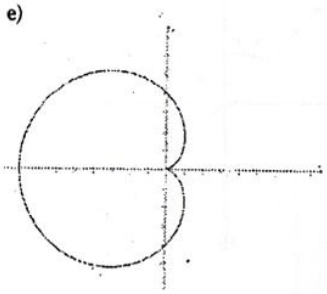
c)



d)



e)



EJERCICIOS DE REFUERZO

Trace cada punto dado en coordenadas polares:

a) $(5, 90°)$ b) $(3, 270°)$ c) $(-2, 0)$ d) $(-3, 120°)$

e) $\left(6, \frac{\pi}{6}\right)$ f) $(-2, \pi)$ g) $(-2, 135°)$ h) $\left(-3, -\frac{\pi}{4}\right)$

Encuentre las coordenadas rectangulares de los siguientes puntos:

a) $\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$ b) $(6, 150°)$ c) $\left(-2, \frac{3\pi}{4}\right)$ d) $(-2, -180°)$

Respuestas:

a) $(0, 3)$ b) $\left(-3\sqrt{3}, 3\right)$ c) $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ d) $(2, 0)$

Convertir a la forma polar:

a) $3x - 4y = 1$ b) $(x-1)^2 + y^2 = 1$ c) $xy = x + y$

d) $x = -2$ e) $x^2 + y^2 = 25$ f) $\left(x^2 + y^2\right)^3 = \left(x^2 - y^2\right)^2$

Respuestas:

a) $r = \frac{1}{(3\,Cos\,\theta - 4\,Sen\,\theta)}$ b) $r - 2\,Cos\,\theta = 0$ c) $r\,Sen\,2\theta = 2\,Sen\,\theta + 2\,Cos\,\theta$

d) $r\,Cos\,\theta = 2$ e) $r^2 = 25$ f) $r^2 = Cos^2\,2\theta$

Convertir a coordenadas rectangulares:

a) $r = 4\,Sen\,\theta$ b) $r = 3\,Cos\,\theta$ c) $r^2 = 9\,Sen\,2\theta$

d) $r = \frac{1}{Sen\,\theta + Cos\,\theta}$ e) $r = \frac{3}{2 + 3\,Sen\,\theta}$ f) $r = \frac{2}{Sen\,\theta - Cos\,\theta}$

g) $r = \frac{9}{1 - Sen\,\theta}$ h) $r^2 = 4\,Cos\,2\theta$ i) $r = 4$

Respuestas:

a) $x^2 + y^2 - 4y = 0$ b) $x^2 + y^2 - 3x = 0$ c) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 18\,xy$

d) $x + y = 1$ e) $4x^2 - 5y^2 + 18y - 9 = 0$ f) $y - x = 2$

g) $x^2 + y^2 = (y + 9)$ h) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 4\left(x^2 - y^2\right)$ i) $x^2 + y^2 = 16$

Analice las siguientes ecuaciones y trace su gráfica:

a) $r = 2(1 - Cos\,\theta)$ b) $r = 3\,Cos\,2\,\theta$ c) $r^2 = -4\,Sen\,2\,\theta$

d) $r = 2 + Cos\,\theta$

e) $r = 4\,Sen\,3\,\theta$

f) $r = 2 - 2\,Cos\,\theta$

g) $r = 2\left(1 - Sen\,\theta\right)$

h) $r = 4 + 3\,Cos\,\theta$

i) $r = 2 + 4\,Cos\,\theta$

j) $r = 4\,Sen\,\theta$

k) $r = 3\,Cos\,\theta$

l) $r = 2 + 4\,Sen\,\theta$

m) $r = 2\,Cos\,4\theta$

n) $r^2 = 9\,Cos\,2\,\theta$

o) $r = 2\cos 3\theta$

p) $r = 2\,Sen\,\theta\;Tan\,\theta$

q) $r = 2\,Sec\,\theta - 1$

r) $r = \dfrac{6}{1 - 2\cos\theta}$

s) $r = \dfrac{2}{1 + Sen\,\theta}$

t) $r = \dfrac{1}{1 + Cos\,\theta}$

u) $r = \dfrac{1}{Sen\,\theta - Cos\,\theta}$

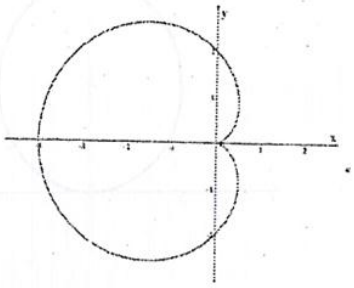
v) $r = \dfrac{Sen\,\theta}{1 + Cos\,\theta}$

w) $r = \dfrac{Sen\,\theta}{1 - Sen\,\theta}$

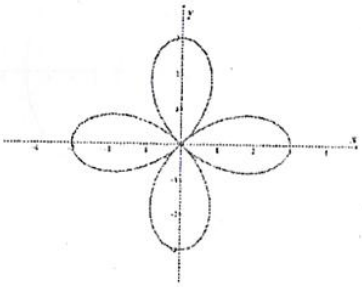
x) $r = 4\,Sen\,\theta\,Cos\,4\theta$

Respuestas:

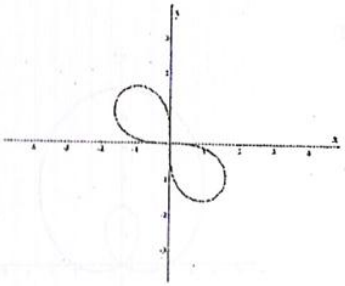
a)



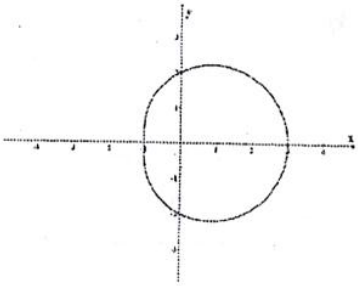
b)



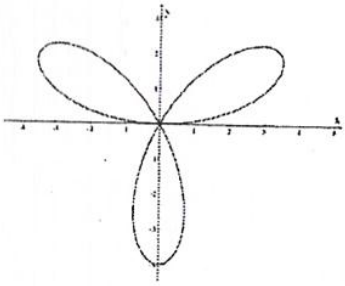
c)



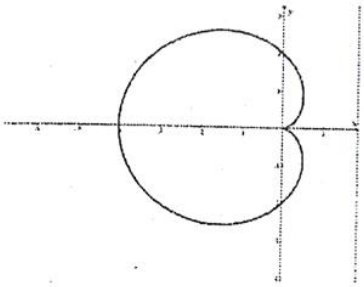
d)



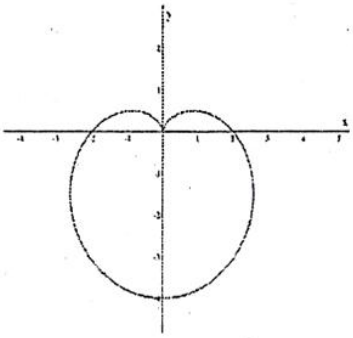
e)



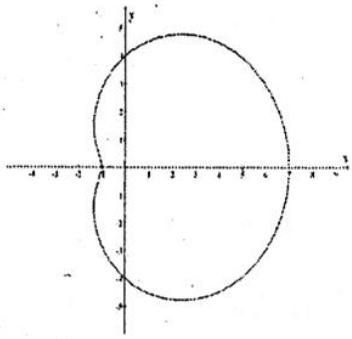
f)



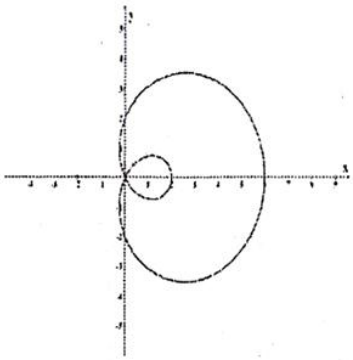
g)



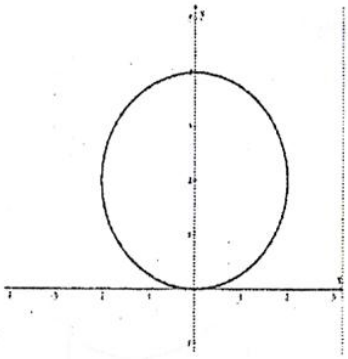
h)



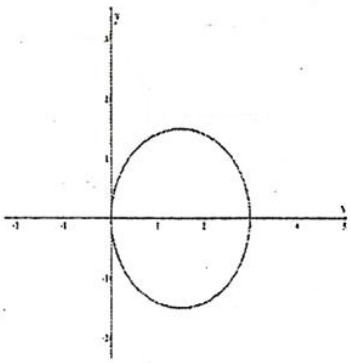
i)



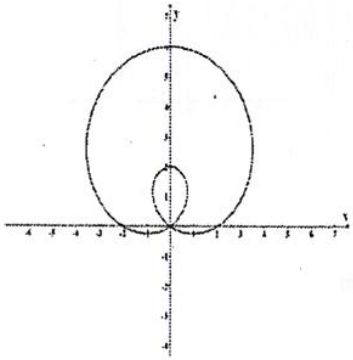
j)



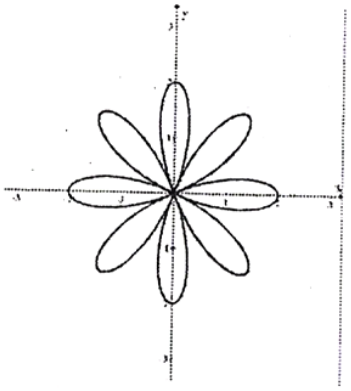
k)



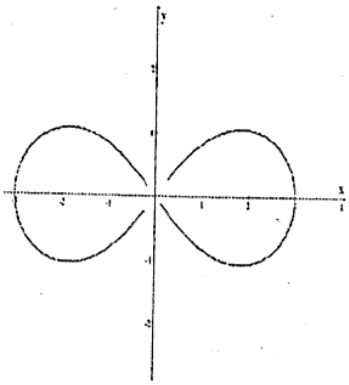
l)



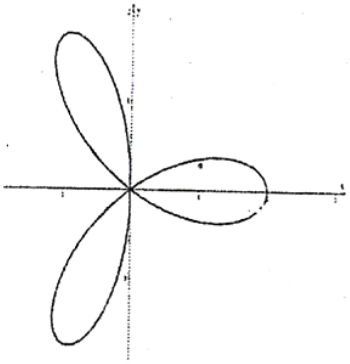
m)



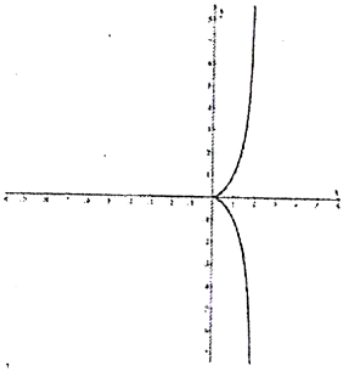
n)



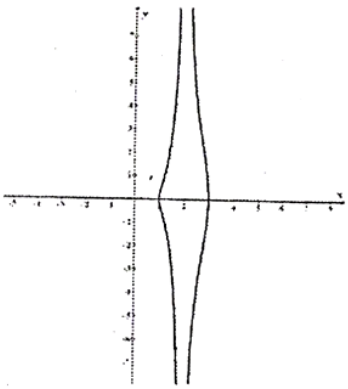
o)



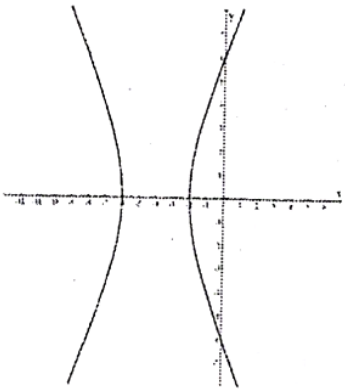
p)



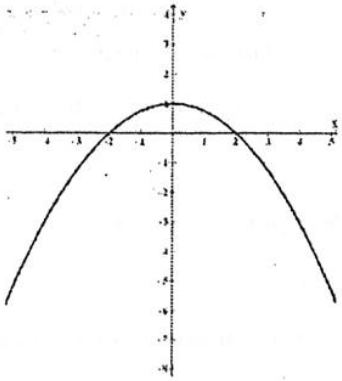
q)



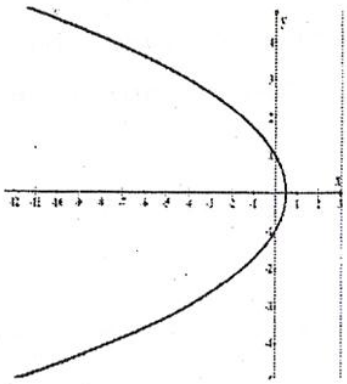
r)



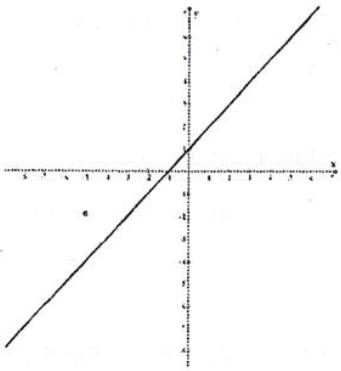
s)



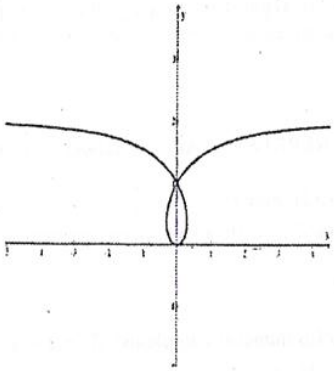
t)



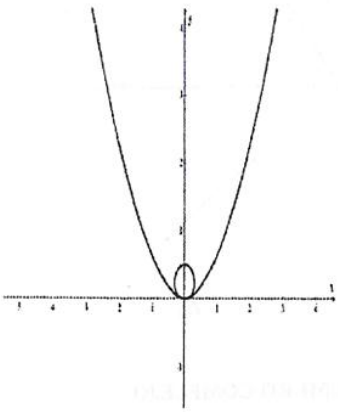
u)



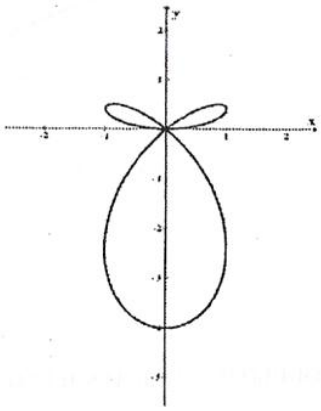
v)



w)



x)



CAPÍTULO XII
NÚMEROS COMPLEJOS

12.1. CANTIDADES IMAGINARIAS

El problema de resolver la ecuación de tipo $x^2+b=0$; $(b\neq 0)$ ha servido como uno de los motivos para la introducción de los nuevos números llamados imaginarios (i).

Al resolver la ecuación $x^2+4=0$; o bien $x^2=-4$, no tiene raíces reales $x=\pm\sqrt{-4}$,puesto que no existe número real cuyo cuadrado sea igual a -4.

$$x^2+4=0 \Leftrightarrow x^2=-4 \;,\quad x=\pm\sqrt{-4} \;,\quad x=\pm\sqrt{4(-1)} \;,\quad x=\pm 2\sqrt{(-1)} \text{ ; hacer } \sqrt{-1}=i$$
$$x=\pm 2i$$

La unidad imaginaria, $i=\sqrt{-1}$ posee la propiedad de que su cuadrado es igual a -1.

12.1.1. POTENCIAS DE LA UNIDAD IMAGINARIA

$i^1=\left(\sqrt{-1}\right)^1=i$

$i^2=\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=-1$

$i^3=i^2\times i=-i$

$i^4=i^2\times i^2=1$

$i^5=i^4\times i=i$

$i^6=i^5\times i=-1$

$i^7=i^6\times i=-i$

$i^8=i^7\times i=1$

Se observa que los resultados de la unidad imaginaria se repiten en períodos de 4 en 4 y estos valores son: $i,-1,-i,1$. En general:

$i^{4n+1}=i \quad , \quad i=i$

$i^{4n+2}=i^2=-1 \quad , \quad i^2=-1$

$i^{4n+3}=i^3=-i \quad , \quad i^3=-i$

$i^{4n}=i \;,\; \forall n\in N \quad , \quad i^4=1$

EJERCICIOS RESUELTOS

Calcular el valor de las siguientes potencias imaginarias:

1) $i^{17}=\left(i^4\right)^4 i=i$

2) $i^{30}=\left(i^4\right)^7 i^2=i^2=-1$

3) $i^{55}=\left(i^4\right)^{13} i^3=i^3=-i$

4) $i^{100}=\left(i^4\right)^{25}=1$

5) $i^{-13}=\dfrac{1}{i^{13}}=\dfrac{1}{\left(i^4\right)^3 i}=\dfrac{1}{i}\times\dfrac{i}{i}=\dfrac{i}{i^2}=-i$

6) $i^{-75}=\dfrac{1}{i^{75}}=\dfrac{1}{\left(i^4\right)^{18} i^3}=\dfrac{1}{i^3}=-\dfrac{1}{i}\times\dfrac{i}{i}=\dfrac{-i}{i^2}=i$

7) $E=\dfrac{(1+i)^9}{1+i^9}$; efectuando: $i^9=\left(i^4\right)^2=i$

$$E=\frac{(1+i)^9}{1+i}=\frac{(1+i)^8(1+i)}{1+i}=(1+i)^8=\left[(1+i)^2\right]^4=\left(1+2i+i^2\right)^4=(1+2i-1)^4$$
$$E=(2i)^4=16i^4=16$$

12.2. NÚMEROS COMPLEJOS

A los números complejos los denotaremos por la letra Z, así: $Z_1=2+3i$, $Z_2=-5-2i$, $Z_3=-1+\sqrt{3}\,i$

Al conjunto de los números complejos los denotaremos por la letra C, así tendremos:

$$C=\left\{Z=a+bi\,/\ a\wedge b\in\Re\ \ ;\ \ i=\sqrt{-1}\right\}$$

Todo número complejo $Z=a+bi$ tiene dos componentes:

"a" es la componente real y se denota por $a=Re(Z)$
"b" es la componente imaginaria y se denota por $b=Im(Z)$

Ejemplos:

$Z=3-2i$; $Re(Z)=3$, $Im(Z)=-2$

$Z=-\frac{1}{2}+4i$; $Re(Z)=-\frac{1}{2}$, $Im(Z)=4$

12.2.1. EXPRESIONES BINOMIAL Y CARTESIANA DE UN NÚMERO COMPLEJO

Cualquier número complejo $Z=a+bi$ también se puede considerar como un par ordenado (a,b) de números reales, donde la segunda componente del par corresponde al coeficiente de la unidad imaginaria i.

$Z=a+bi\ \in\Re$ y $(a,b)\in\Re$, así tenemos:

El número complejo $Z_1=-3+5i$ se identifica con el vector $(-3,5)$
El número complejo $Z_2=8-2i$ se identifica con el vector $(8,-2)$
El número complejo $Z_3=1+0i$ se identifica con el vector $(1,0)$
El número complejo $Z_4=0+i$ se identifica con el vector $(0,1)$

12.2.2. CLASES DE NÚMEROS COMPLEJOS

Complejo Real.- Es aquel cuya parte imaginaria es nula. Ejemplo $5+0i=5$

Complejo Puro.- Es aquel cuya parte real es nula. Ejemplo $0+2i=2i$

Complejo Nulo.- Es aquel cuya parte real y cuya parte imaginaria son nulas. Ejemplo $0+0i=0$

Complejos Iguales.- Son dos complejos, que tienen iguales sus partes reales e iguales sus partes imaginarias.
$Z_1=a+bi\ ;\ Z_2=c+di\ \Rightarrow\ Z_1=Z_2\ \Leftrightarrow\ a=c\wedge b=d$

Complejos Conjugados.- Son aquellos que tienen iguales sus partes reales e iguales pero de signo contrario sus partes imaginarias, se denota por $\overline{Z}$.

$Z_1=a+bi$ y $\overline{Z_2}=a-bi$

Ejemplos:

$\overline{2+3i}=2-3i$, $\overline{-6-2i}=-6+2i$, $\overline{4}=4$, $\overline{Cos\,\theta+i\,Sen\,\theta}=Cos\,\theta-i\,Sen\,\theta$

* El producto de un número complejo y su conjugado es un número real no negativo

$$Z \times \overline{Z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$$

* El conjugado de un número complejo conjugado es el mismo número complejo $\overline{\overline{Z}} = Z$

* El conjugado de la suma de dos números complejos es igual a la suma de sus conjugados

$$\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$$

* El conjugado del producto de dos números complejos es igual al producto de sus conjugados

$$\overline{Z_1 \times Z_2} = \overline{Z_1} \times \overline{Z_2}$$

* El conjugado del cociente de dos números complejos es igual al cociente de sus conjugados

$$\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$$

Complejos Opuestos.- Son aquellos que tienen iguales, pero de signo contrario, tanto las partes reales como las imaginarias, también se le conoce como el negativo de un número complejo.

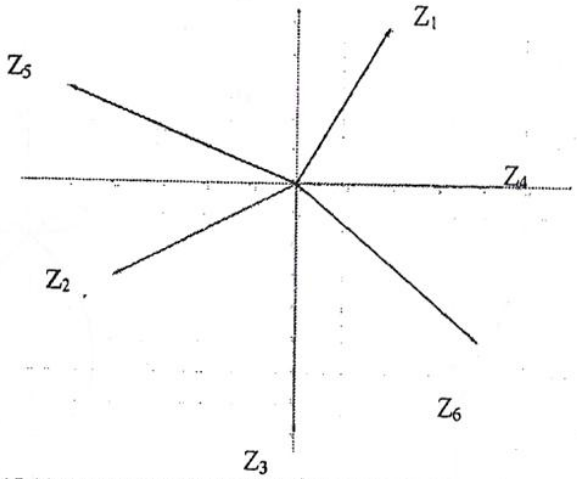
$$Z_1 = a+bi \quad \text{y} \quad Z_2 = -a-bi$$

12.2.3. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN NÚMERO COMPLEJO

Como cada número complejo $Z = a+bi$ se identifica con el par ordenado $(a+b)$, entonces el número complejo Z se grafica en el plano cartesiano.

Ejemplo:

Graficar los números complejos: $Z_1 = 2+5i$, $Z_2 = -4-3i$, $Z_3 = -8i$, $Z_4 = 5$, $Z_5 = -5+3i$ y $Z_6 = 4-5i$



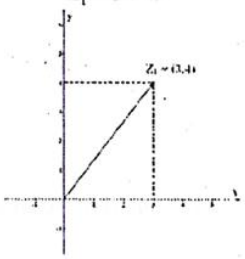
12.2.4. MÓDULO O VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO COMPLEJO

El módulo o valor absoluto de un número complejo $Z = a+bi$ es, el valor real no negativo $|Z| = \sqrt{a^2+b^2}$

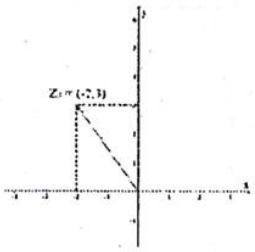
También se le conoce como módulo o radio vector $r = |Z| = \sqrt{a^2+b^2}$

Ejemplos:

$Z_1 = 3+4i$



$Z_2 = -2+3i$

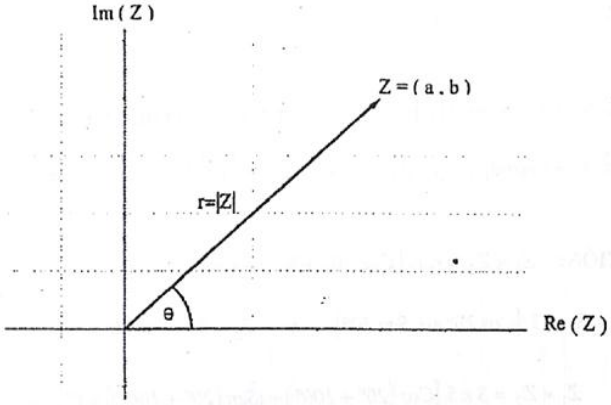


$$r = \sqrt{(3)^2+(4)^2} = \sqrt{9+15} = 5$$

$$r = \sqrt{(-2)^2+(3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

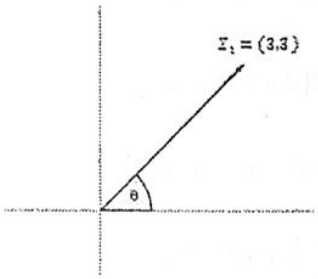
12.2.5. ARGUMENTO O AMPLITUD DE UN NÚMERO COMPLEJO

El argumento de un número complejo distinto de cero $Z = a+bi$, denotado por $\theta = Arg(Z)$, es la medida en radianes del ángulo de inclinación del vector (a, b)



Ejemplos:
Calcular el argumento en los siguientes números complejos

1) $Z_1 = 3+3i$

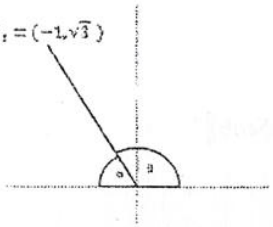


$$\theta_1 = Arg(Z_1) = arcTan\left(\frac{3}{3}\right)$$

$$= arcTan(1)$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4}$$

2) $Z_2 = -1+\sqrt{3}i$



$$\theta_2 = Arg(Z_2) = \pi - \alpha$$

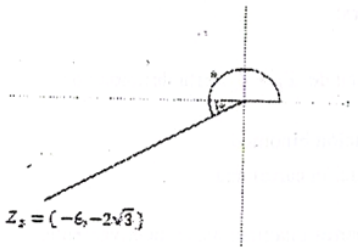
$$= \pi - arcTan\left|\frac{\sqrt{3}}{-1}\right|$$

$$= \pi - arcTan(\sqrt{3})$$

$$= \pi - \frac{\pi}{3}$$

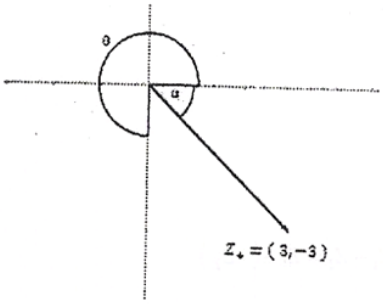
$$\theta_2 = \frac{2\pi}{3}$$

3) $Z_3 = -6 - 2\sqrt{3}i$



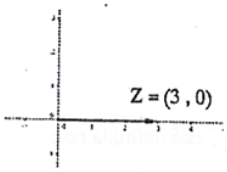
$$\theta_3 = Arg(Z_3) = \pi + \alpha$$
$$= \pi + arcTan\left|\frac{2\sqrt{3}}{-6}\right|$$
$$= \pi + arcTan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$
$$= \pi + \frac{\pi}{6}$$
$$\theta_3 = \frac{7\pi}{6}$$

4) $Z_4 = 3 - 3i$

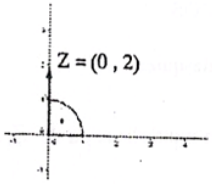


$$\theta_4 = Arg(Z_4) = 2\pi - \alpha$$
$$= 2\pi - arcTan\left|\frac{-3}{3}\right|$$
$$= 2\pi - arcTan(1)$$
$$= 2\pi - \frac{\pi}{4}$$
$$\theta_4 = \frac{7\pi}{4}$$

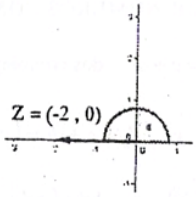
5) $Z = 3 + 0i$ 6) $Z = 0 + 2i$ 7) $Z = -2 + 0i$ 8) $Z = 0 - 3i$



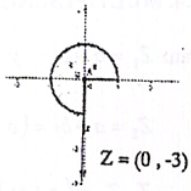
$\theta = 0°$



$\theta = 90°$

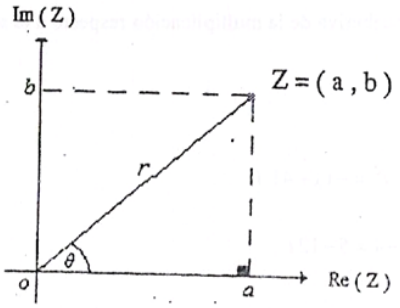


$\theta = 180°$



$\theta = 270°$

12.2.6. REPRESENTACIÓN EN FORMA POLAR O TRIGONOMÉTRICA



r = Radio vector o módulo

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = |a + bi| \quad ; \quad |r| \geq 0$$

θ = Ángulo o argumento

$$Tan\theta = \frac{b}{a} \quad ; \quad \theta = arcTan\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$Sen\theta = \frac{b}{r} \quad ; \quad b = r\,Sen\theta$$

$$Cos\theta = \frac{a}{r} \quad ; \quad a = r\,Cos\theta$$

Reemplazando los valores de a y b en la forma estándar tenemos:

$Z = r[Cos\theta + i\,Sen\theta]$; forma polar o trigonométrica

Se puede abreviar también: $Z = r\,Cis\theta$; $Z = r\underline{|\theta}$

12.3. ADICIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

Sean: $Z_1 = a + bi$ y $Z_2 = c + di$ dos complejos cualesquiera:

$Z_1 = a + bi = (a, b)$ y $Z_2 = c + di = (c, d)$ la adición de $Z_1 + Z_2$, está definida por:

$Z_1 + Z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ Notación binomial
$Z_1 + Z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ Notación cartesiana

Para sumar números complejos se suman las partes reales y las partes imaginarias, respectivamente.

Ejemplos:

$(3 + 5i) + (-2 + 3i) = (3 - 2) + (5 + 3)i = 1 + 8i$

$(\sqrt{2} - i) + (6 - 2\sqrt{3}i) = (\sqrt{2} + 6) - (1 + 2\sqrt{3})i$

$(6, 1) + (9, 3) = (6 + 9, 1 + 3) = (15, -2)$

SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

Para cualquier complejo : $Z_1 = a + bi$ y $Z_2 = c + di$, $Z_1 - Z_2 = Z_1 + (-Z_2)$
Ejemplo:

$(6 + 4i) - (3 + 6i) = (6 + 4i) + (-3 - 6i) = (6 - 3) + (4 - 6)i = 3 - 2i$

12.4. MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

Sean: $Z_1 = a + bi$ y $Z_2 = c + di$ dos complejos cualesquiera:

$Z_1 = a + bi = (a, b)$ y $Z_2 = c + di = (c, d)$ la multiplicación de $Z_1 . Z_2$, está definida por:

$Z_1 . Z_2 = (a + bi).(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$ Notación binomial

$Z_1 . Z_2 = (a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ Notación cartesiana

Para multiplicar números complejos se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma, recordando que $i^2 = \sqrt{-1}$

Ejemplos:

$(5 + 3i)(2 + 7i) = 5(2 + 7i) + 3i(2 + 7i) = 10 + 35i + 6i + 21i^2 = -11 + 41i$

$(3 - 2i)^2 = 3^2 - 2(3)(2i) + (2i)^2 = 9 - 12i + 4i^2 = 9 - 12i - 4 = 5 - 12i$

$(7, 2).(4, -3) = (28 + 6, -21 + 8) = (34, -13)$

DIVISIÓN ENTRE DOS NÚMEROS COMPLEJOS

Para dividir números complejos hay que hacer desaparecer el factor i del divisor, multiplicando ambos términos (dividendo y divisor) por un número conveniente, como se indica en los siguientes ejemplos:

a) $\frac{6}{3i}=\frac{6i}{3i.i}=\frac{6i}{3i^2}=\frac{6i}{3(-1)}=-2i$

b) $\frac{2-3i}{3+4i}=\frac{(2-3i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{6-17i+12i^2}{3^2-(4i)^2}=\frac{-6-17i}{9-16i^2}=\frac{-6-17i}{25}=-\frac{6}{25}-\frac{17}{25}i$

Para dividir dos números complejos se **multiplica dividendo y divisor por el conjugado del divisor**

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{Z_1}{Z_2}\times\frac{\overline{Z_2}}{\overline{Z_2}}=\frac{a+bi}{c+di}\times\frac{c-di}{c-di}$$

Ejemplo:

$$\frac{2+3i}{4-5i}=\frac{2+3i}{4-5i}\times\frac{4+5i}{4+5i}=\frac{2(4+5i)+3i(4+5i)}{16-25i^2}=\frac{8+10i+12i+15i^2}{16-25(-1)}$$

$$=\frac{-7+22i}{41}=-\frac{7}{41}+\frac{22}{41}i$$

12.5. OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA POLAR O TRIGONOMÉTRICA

Sean: $Z_1=r_1[Cos\,\theta_1+i\,Sen\,\theta_1]$ y $Z_2=r_2[Cos\,\theta_2+i\,Sen\,\theta_2]$ dos complejos cualesquiera:

MULTIPLICACIÓN: $Z_1\times Z_2=r_1r_2[Cos(\theta_1+\theta_2)+i\,Sen(\theta_1+\theta_2)]$

Ejemplo: Sean $Z_1=3\,[Cos\,20°+i\,Sen\,20°]$ y $Z_2=5\,[Cos\,100°+i\,Sen\,100°]$

$$Z_1\times Z_2=3\times 5\,[Cos(20°+100°)+iSen(20°+100°)]=15[Cos\,120°+i\,Sen\,120°]$$

DIVISIÓN: $\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{r_1[Cos\theta_1+iSen\theta_1]}{r_2[Cos\theta_2+iSen\theta_2]}$, $\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{r_1}{r_2}[Cos(\theta_1-\theta_2)+iSen(\theta_1-\theta_2)]$

Ejemplo: Sean $Z_1=4\sqrt{2}\,[Cos\,45°+iSen\,45°]$ y $Z_2=2[Cos\,315°+iSen\,315°]$

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{4\sqrt{2}\,(Cos45°+iSen45°)}{2\,(Cos315°+iSen315°)}=\frac{4\sqrt{2}}{2}\,[Cos\,(45°-315°)+i\,Sen\,(45°-315°)]$$

$$=2\sqrt{2}\,[Cos(-270°)+i\,Sen(-270°)]=2\sqrt{2}\,[Cos\,90°+i\,Sen\,90°]$$

90^0 es el ángulo coterminal positivo de -270^0

POTENCIA: (FÓRMULA DE MOIVRE)

$Z=a+bi \Rightarrow Z^n=(a+bi)^n$; *equivale a* : $Z^n=[r\,(Cos\theta+iSen\theta)]^n$

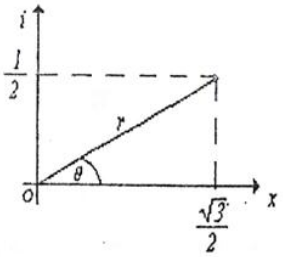
$Z^n=r^n[Cos(n\theta)+iSen(n\theta)]$

Ejemplos:

a) $\left[3\left(Cos45^\circ + iSen45^\circ\right)\right]^4 = 3^4\left[Cos(45^\circ \times 4) + iSen(45^\circ \times 4)\right]$

$$= 81\left[Cos180^\circ + i\,Sen180^\circ\right] = -81$$

b) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i\right)^{100} = \left[Cos30^\circ + i\,Sen30^\circ\right]^{100}$



$$\theta = arcTan\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = arcTan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30^\circ$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$Z = \left[Cos30^\circ + i\,Sen30^\circ\right]^{100}$$

$$= Cos\left(30^\circ \times 100\right) + i\,Sen\left(30^\circ \times 100\right) = Cos\,3000^\circ + i\,Sen\,3000^\circ = Cos\,120^\circ + i\,Sen\,120^\circ = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$$

RADICACIÓN:

$Z = a + bi \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{a+bi}$; *equivale a:* $\sqrt[n]{Z} = (a+bi)^{\frac{1}{n}}$

$\sqrt[n]{Z} = \left[r\left(Cos\theta + iSen\theta\right)\right]^{\frac{1}{n}}$; $\sqrt[n]{Z} = r^{\frac{1}{n}}\left[Cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + iSen\left(\frac{\theta}{n}\right)\right]$

Generalizando, si K es un entero cualquiera, entonces

$$Cos\,\theta = Cos(\theta + 2k\pi) \quad \wedge \quad Sen\,\theta = Sen(\theta + 2k\pi)$$

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[Cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\,Sen\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right]$$

Un número cualquiera (real o complejo); excepto el cero, tiene n raíces enésimas distintas.

Las n raíces enésimas de un número complejo $Z = a + bi$, ó , $Z = r\left[Cos\theta + i\,Sen\theta\right]$ se obtienen dando a K valores sucesivos 0, 1, 2, 3, ..., $n-1$

Ejemplo:

$$\sqrt[5]{32(Cos50^\circ + i\,Sen50^\circ)} = \sqrt[5]{32}\left[Cos\frac{50^\circ + 2k\pi}{5} + i\,Sen\frac{50^\circ + 2k\pi}{5}\right]$$

$$= 2\left[Cos\frac{50^\circ + k \times 360^\circ}{5} + i\,Sen\frac{50^\circ + k \times 360^\circ}{5}\right]$$

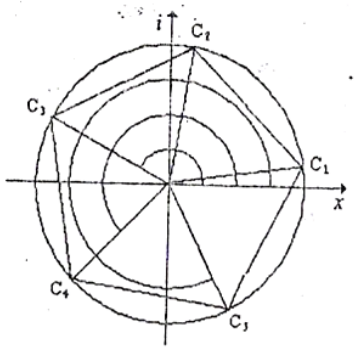
$Si\ k=0 \Rightarrow C_1 = 2\ [Cos\,10° + iSen\,10°]$

$Si\ k=1 \Rightarrow C_2 = 2\ [Cos\,82° + iSen\,82°]$

$Si\ k=2 \Rightarrow C_3 = 2\ [Cos\,154° + iSen\,154°]$

$Si\ k=3 \Rightarrow C_4 = 2\ [Cos\,226° + iSen\,226°]$

$Si\ k=4 \Rightarrow C_5 = 2\ [Cos\,298° + iSen\,298°]$



12.6. RAÍZ CUADRADA DE UN NÚMERO COMPLEJO

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + \sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\,i\right] = \pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - \sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\,i\right]$$

Ejemplo:

$$\sqrt{1+2i} = \pm\left[\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\,i\right] = \pm[1{,}27 + 0{,}78i]$$

$C_1 = 1.27 + 0.78i$ y $C_2 = -1.27 - 0.78$

EJERCICIOS RESUELTOS

1) Efectuar las siguientes sumas:

a) $(2+3i)+(3-i) = (2+3)+(3-1)i = 5+2i$

b) $(4-5i)+(2+5i) = (4+2)+(-5+5)i = 6$

2) Efectuar las siguientes restas:

a) $(-2+2i)-(-2-i) = (-2+2)+(2+1)i = 3i$

b) $(4-3i)-(-2+i) = (4+2)+(-3-1)i = 6-4i$

3) Efectuar los siguientes productos:

a) $(4+i)\,2i = 8i+2i^2 = -2+8i$

b) $(-5+i)(2-i) = -10+5i+2i-i^2 = -10+7i+1 = -9+7i$

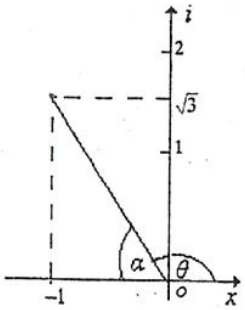
4) Efectuar los siguientes cocientes:

a) $\dfrac{2+3i}{2+i} = \dfrac{2+3i}{2+i}\times\dfrac{2-i}{2-i} = \dfrac{4-2i+6i-3i^2}{4-i^2} = \dfrac{4+4i+3}{4+1} = \dfrac{7+4i}{5} = \dfrac{7}{5}+\dfrac{4}{5}i$

b) $\dfrac{3-4i}{4+3i} = \dfrac{(3-4i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = \dfrac{12-9i-16i+12i^2}{16-9i^2} = \dfrac{12-25i-12}{16+9} = \dfrac{-25i}{25}$

5) Representar en forma trigonométrica los siguientes números complejo:.

a) $-1+\sqrt{3}\,i$



$\theta = \pi - \alpha$

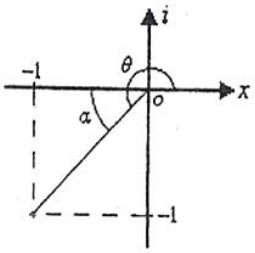
$\theta = \pi - arcTan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{1}\right)$; $r = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4}$

$\theta = \pi - \dfrac{\pi}{3}$ $\qquad r = 2$

$\theta = \dfrac{2}{3}\pi$

$-1+\sqrt{3}\,i = 2\left[Cos\dfrac{2\pi}{3} + i\,Sen\dfrac{2\pi}{3}\right]$ o también $-1+\sqrt{3}\,i = 2\left[Cos120° + i\,Sen120°\right]$

b) $-1-i$



$\theta = \pi + \alpha$; $r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}$

$\theta = \pi + arcTan\,(1)$ $\qquad r = \sqrt{2}$

$\theta = \pi + \dfrac{\pi}{4}$

$\theta = \dfrac{5}{4}\pi$

$-1-i = \sqrt{2}\left[Cos\dfrac{5\pi}{4} + i\,Sen\dfrac{5\pi}{4}\right]$ o también $-1-i = \sqrt{2}\left[Cos225° + i\,Sen225°\right]$

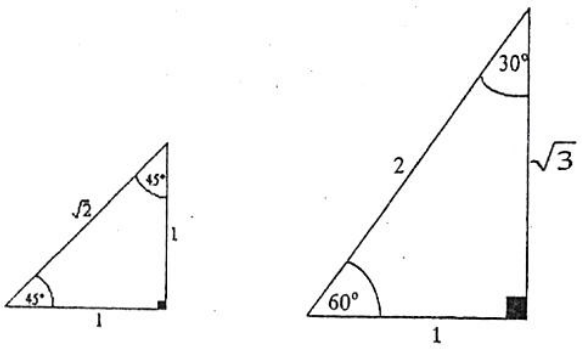
6) Escribir los siguientes números complejos en la forma rectangular:

a) $2\,(Cos\,30° + i\,Sen\,30°) = 2\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right] = \sqrt{3} + i$

b) $6\,(Cos\,60° + i\,Sen\,60°) = 6\left[\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right] = 3 + 3\sqrt{3}i$

c) $3\,(Cos\,90° + i\,Sen\,90°) = 3\,(0 + i) = 3\,i$

d) $4\,(Cos\,720° + i\,Sen\,720°) = 4\,(Cos\,360° + i\,Sen\,360°) = 4\,(1 + 0\,i) = 4$



Estas figuras nos permiten recordar con facilidad las funciones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60°.

Al calcular las funciones inversas debemos recordar que los valores que se obtienen (calculadora) corresponden al valor del ángulo referencial α el mismo que nos permite determinar el valor del argumento θ en todos los cuadrantes excepto en el primer cuadrante donde $\alpha = \theta$.

7) Multiplicar y Dividir en la forma polar

a) Sean: $Z_1 = 3\left(Cos\,20^\circ + i\,Sen\,20^\circ\right)$ y $Z_2 = 5\left(Cos\,100^\circ + i\,Sen\,100^\circ\right)$, hallar $Z_1 \times Z_2$ y $\dfrac{Z_1}{Z_2}$

$$Z_1 \times Z_2 = 15\left(Cos 120^\circ + i\,Sen 120^\circ\right)$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{3}{5}\left[Cos\left(-80^\circ\right) + i\,Sen\left(-80^\circ\right)\right] = \frac{3}{5}\left[Cos\,280^\circ + i\,Sen\,280^\circ\right]$$

b) Si $Z_1 = 2 - 3i$ y $Z_2 = 5 + 2i$, escribir cada una de las expresiones en forma estándar:

a) $\overline{Z_1 + Z_2}$; b) $Z_1 + \overline{Z_1}$; c) $\dfrac{Z_1}{Z_2}$

a) $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{(2+3i)} + \overline{(5-2i)} = \overline{7-i} = 7 + i$

b) $Z_1 + \overline{Z_1} = (2-3i) + (2+3i) = 4$

c) $\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{Z_1\overline{Z_2}}{Z_1\overline{Z_2}} = \dfrac{(2-3i)(5-2i)}{(5+2i)(5-2i)} = \dfrac{10-15i-4i+6i^2}{25-4i^2} = \dfrac{4-19i}{29} = \dfrac{4}{29} - \dfrac{19}{29}i$

8) Hallar los valores de "x" y "y" que cumplen con la siguiente igualdad:

$$x^2 + 2y^2 + xi + yi = xy + 7 + 3i$$

Ordenando los términos de modo que cada miembro sea un número complejo de la forma a + bi, tenemos:

$$\left(x^2 + 2y^2\right) + (x+y)i = (xy+7) + 3i$$

Por la definición de igualdad de dos números complejos, igualamos las partes reales e imaginarios entre si:

1) $x^2+2y^2=xy+7$

2) $x+y=3 \quad ; \quad x=3-y \quad ;$ reemplazando en 1)

$$(3-y)^2+2y^2=(3-y)y+7$$

$$9-6y+y^2+2y^2=3y-y^2+7 \qquad ; \qquad 4y^2-9y+2=0$$

$$y=\frac{9\pm\sqrt{81-4(4)(2)}}{8}=\frac{9\pm\sqrt{49}}{8}=\frac{9\pm 7}{8}$$

$$y_1=2 \;\Rightarrow\; x_1=1 \quad \wedge \quad y_2=\frac{1}{4} \;\Rightarrow x_2=\frac{11}{4}$$

9) Simplificar la siguiente expresión:

$$E=\frac{(1+i)^{11}}{32(1-i)}=\frac{(1+i)^{10}(1+i)}{32(1-i)}=\frac{\left[(1+i)^2\right]^5(1+i)}{32(1-i)}=\frac{(1+2i+i^2)^5(1+i)}{32(1-i)}=\frac{(2i)^5(1+i)}{32(1-i)}$$

$$=\frac{32i^5(1+i)}{32(1-i)}=\frac{i^4\,i(1+i)}{(1-i)}=\frac{i+i^2}{1-i}=\frac{-1+i}{1-i}=-\frac{(1-i)}{(1-i)}=-1$$

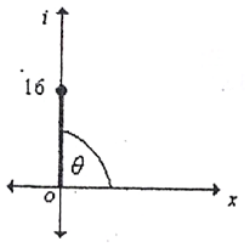
10) Escribir en forma algebraica la siguiente expresión:

$$\frac{(Cos17°+iSen17°)^3\left[\sqrt{2}(Cos28°+iSen28°)\right]^2}{(Cos7°+iSen7°)^{11}}$$

$$=\frac{Cis\,51°\times 2\,Cis\,56°}{Cis77°}=\frac{2\,Cis\,107°}{Cis77°}=2Cis30°=2\left[Cos30°+i\,Sen30°\right]=\frac{2\sqrt{3}}{2}+\frac{2}{2}i$$

$$=\sqrt{3}+i\;=\;1.732+i$$

11) Hallar todas las raíces $\sqrt[4]{16i}$ y representar gráficamente.



$$r=\sqrt{(0)^2+(16)^2}$$

$$r=\sqrt{(16)^2} \qquad ; \quad r=16$$

$$\theta=90°$$

$$Z=\sqrt[4]{16Cis90°}=\sqrt[4]{16}(Cis90°)^{\frac{1}{4}}$$

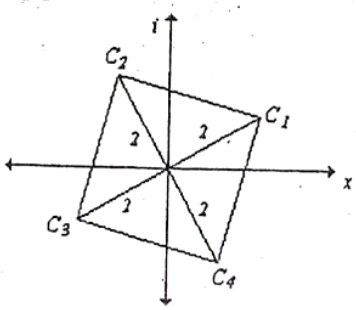
$$Z=2\left[Cos\frac{90°+2k\pi}{4}+i\,Sen\frac{90°+2k\pi}{4}\right]$$

$$Si\;\; k=0 \Rightarrow C_1=2(Cos\;22.5°+iSen\;22.5°)$$

$$Si\;\; k=1 \Rightarrow C_2=2(Cos\;112.5°+iSen\,112.5°)$$

$$Si\;\; k=2 \Rightarrow C_3=2(Cos\;202.5°+iSen\;202.5°)$$

$$Si\;\; k=3 \Rightarrow C_4=2(Cos\;292.5°+iSen\;292.5°)$$



12) Calcular: $\left[\sqrt{2}\left(Cos\ 56.25° + i\ Sen\ 56.25°\right)\right]^8$

$$= (\sqrt{2})^{\,8}\left[Cos\,(56{,}25° \times 8) + iSen\,(52{,}25° \times 8)\right]$$

$$= \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^8 \left[Cos\ 450° + i\,Sen 450°\right] = 2^4\left[Cos\ 90° + i\ Sen\ 90°\right] = 16\ \left[0 + i\,(1)\right] = 16\,i$$

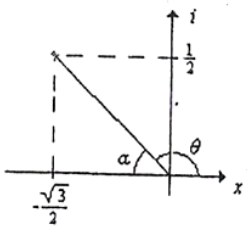
13) Determine las raíces del siguiente número complejo

$$Z = \sqrt[3]{\frac{(2Cis30°)^3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}}}$$

Transformando a la forma trigonométrica cada complejo tenemos:

* $(2\,Cis\,30°)^3 = \left[2\left(Cos\,30° + i\,Sen\,30°\right)\right]^3 = 8\left(Cos\ \ 90° + i\ \ Sen\ \ 90°\right)$

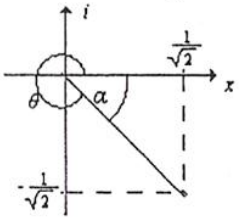
* $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = \left(Cos\ \ 150° + iSen\ \ 150°\right)$



$$r = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \quad ; \quad \alpha = arcTan\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$$

$$r = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1 \qquad \alpha = 30° \ \Rightarrow \theta = 150°$$

* $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} = Cos\,315° + i\,Sen\,315°$



$$r=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \quad ; \quad \alpha = arcTan\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)$$

$$r=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=1 \qquad \alpha = arcTan\ 1$$

$$r=1 \qquad \alpha = 45° \Rightarrow \theta = 315°$$

Reemplazando valores y simplificando la cantidad subradical tenemos:

$$\frac{8\,(\text{Cos}\,90° + \text{i Sen}\,90°)(\text{Cos}\,150° + \text{i Sen}\,150°)}{\text{Cos}\,315° + \text{i Sen}\,315°}$$

$$\frac{8\,[\text{Cos}\,240° + \text{i Sen}\,240°]}{\text{Cos}\,315° + \text{i Sen}\,315°} = 8\,[\text{Cos}(-75°) + \text{iSen}(-75°)] = 8\,[\text{Cos}\,285° + \text{i Sen}\,285°]$$

Por lo tanto se reduce a:

$$\sqrt[3]{8\,(\text{Cos}\,285° + \text{i Sen}\,285°)} = 2\left[\text{Cos}\frac{285° + 2K\pi}{3} + \text{i Sen}\frac{285° + 2K\pi}{3}\right]$$

$Si\ k=0 \Rightarrow C_1 = 2\,[Cos\,95° + i\,Sen\,95°]$; $Z_1 = 2\,Cis\,95°$; $Z_1 = -0.1743 + 1.9924i$

$Si\ k=1 \Rightarrow C_2 = 2\,[Cos\,215° + i\,Sen\,215°]$; $Z_2 = 2\,Cis\,215°$; $Z_2 = -1.6383 - 1.1472i$

$Si\ k=2 \Rightarrow C_3 = 2\,[Cos\,335° + i\,Sen\,335°]$; $Z_3 = 2\,Cis\,335°$; $Z_3 = 1.8126 - 0.8452i$

14) Calcular el valor de a para que el cociente sea igual a un imaginario puro.

$$\frac{a+3i}{2-5i} = bi$$

$$\frac{a+3i}{2-5i} \times \frac{2+5i}{2+5i} = bi \qquad \Rightarrow \qquad \frac{2a+5ia+6i-15}{4+25} = bi$$

$$\frac{(2a-15)+(5a+6)i}{29} = bi \qquad \Rightarrow \qquad \frac{2a-15}{29} = 0 \ ; \ 2a = 15 \ ; \ a = \frac{15}{2}$$

12.7. FORMA EXPONENCIAL DE UN NÚMERO COMPLEJO

Fórmula de Euler

$$Z = r\,[Cos\,\theta + i\,Sen\,\theta] \quad donde \quad Cos\,\theta + i\,Sen\,\theta = e^{\theta i} \qquad \Rightarrow \qquad Z = r\,e^{\theta i}$$

Todo número complejo $Z \neq 0$ se puede representar en la forma $Z = r\,e^{\theta i}$, donde:

r = módulo del número Z ; θ = argumento en radianes

Sustituyendo en la fórmula de Euler θ por $-\theta$ obtendremos la segunda fórmula de Euler.

$$e^{-\theta i} = Cos\,(-\theta) + i\,Sen\,(-\theta) \quad , \ o\ bien \quad e^{-\theta i} = Cos\,\theta - i\,Sen\,\theta$$

12.7.1. OPERACIONES EN FORMA EXPONENCIAL

Sean: $Z_1 = r_1 e^{\theta_1 i}$ *y* $Z_2 = r_2 e^{\theta_2 i}$ dos complejos cualesquiera:

ADICIÓN O SUSTRACCIÓN: $Z_1 \pm Z_2 = r_1 e^{\theta_1 i} \pm r_2 e^{\theta_2 i}$

Ejemplo:

$Z_1 = 8\, e^{\frac{\pi}{3} i}$ *y* $Z_2 = 3\, e^{\frac{\pi}{4} i}$, entonces $Z_1 \pm Z_2 = 8 e^{\frac{\pi}{3} i} \pm 3 e^{\frac{\pi}{4} i}$

MULTIPLICACIÓN: $Z_1 \times Z_2 = r_1\, r_2\, e^{(\theta_1 + \theta_2) i}$

Ejemplo:

$Z_1 = 3e^{\frac{2\pi}{3} i}$ *y* $Z_2 = 5e^{\frac{5\pi}{6} i}$, entonces $Z_1 \times Z_2 = 3 \times 5\, e^{\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right) i}$; $Z_1 \times Z_2 = 15\, e^{\frac{3\pi}{2} i}$

DIVISIÓN: $\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{(\theta_1 - \theta_2) i}$

Ejemplo:

$Z_1 = 2\, e^{\frac{11\pi}{6} i}$ *y* $Z_2 = 3\, e^{\frac{4\pi}{3} i}$, entonces $\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{2}{3} e^{\left(\frac{11\pi}{6} - \frac{4\pi}{3}\right) i}$; $\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{2}{3} e^{\frac{\pi}{2} i}$

POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN:

$Z = r\, e^{\theta i} \Rightarrow Z^n = r^n e^{n\theta i}$

$Z = r\, e^{\theta i} \Rightarrow \sqrt[n]{Z} = r^{\frac{1}{n}} e^{\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) i}$; $k = 0, 1, 2, 3, \ldots . n-1$

Ejemplos:

a) Hallar Z^5

$Z = 3e^{\frac{5\pi}{6} i}$, entonces $Z^5 = \left(3e^{\frac{5\pi}{6} i}\right)^5$; $Z^5 = 3^5 e^{5 \times \frac{5\pi}{6} i}$; $Z^5 = 243\, e^{\frac{25\pi}{6} i}$

b) Hallar $\sqrt[4]{Z}$ si $Z = 16e^{\frac{5\pi}{3} i}$

$\sqrt[4]{Z} = \sqrt[4]{16} e^{\left(\frac{\frac{5\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right) i}$; $\sqrt[4]{Z} = 2e^{\left(\frac{\frac{5\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right) i}$; $\sqrt[4]{Z} = 2e^{\left(\frac{5\pi + 6k\pi}{12}\right) i}$

$Si\ k = 0 \Rightarrow Z_1 = 2e^{\frac{5\pi}{12} i}$; $Si\ k = 1 \Rightarrow Z_2 = 2e^{\frac{11\pi}{12} i}$

$Si\ k = 2 \Rightarrow Z_3 = 2e^{\frac{17\pi}{12} i}$; $Si\ k = 3 \Rightarrow Z_4 = 2e^{\frac{23\pi}{12} i}$

Números Complejos

EJERCICIOS RESUELTOS

1) Escribir los siguientes números en la forma exponencial: $1\,;\,i\,;\,-2\,;\,-i$

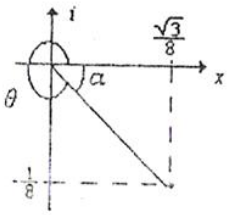
a) $1 = 1 + 0i \quad ; \quad r = 1 \;\; y \;\; \theta = 0^0 = 2\pi \;\Rightarrow\; 1 = e^{2\pi i}$

b) $i = 0 + i \quad ; \quad r = 1 \;\; y \;\; \theta = 90^0 = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; i = e^{\frac{\pi}{2}\pi i}$

c) $-2 = -2 + 0i \quad ; \quad r = 2 \;\; y \;\; \theta = 180^0 = \pi \;\Rightarrow\; -2 = e^{\pi i}$

d) $-i = 0 - i \quad ; \quad r = 1 \;\; y \;\; \theta = 270^0 = \frac{3\pi}{2} \;\Rightarrow\; -i = e^{\frac{3\pi}{2}\pi i}$

2) Expresar en forma exponencial el número complejo $Z = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{i}{8}$



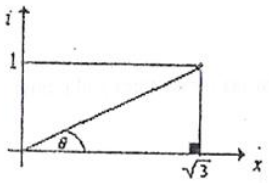
$$r = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\right)^2 + \left(-\frac{1}{8}\right)^2} \quad ; \quad \alpha = arcTan\left(\frac{\frac{1}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{8}}\right)$$

$$r = \frac{1}{4} \qquad \alpha = 30° \Rightarrow \theta = 330° \;;\; \theta = \frac{11}{6}\pi$$

$$\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{i}{8} = \frac{1}{4} e^{\frac{11\pi}{6} i}$$

3) Escribir todos los valores de $\sqrt[4]{\sqrt{3} + i}$ en forma exponencial.

$\sqrt{3} + i$



$$r = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} \quad ; \quad \theta = arcTan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$r = 2 \qquad \theta = 30°$$

$\sqrt{3} + i = 2e^{\frac{\pi}{6} i}$; *por lo tanto tenemos :*

$$Z = \sqrt[4]{2}\, e^{\frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi i}{4}}$$

$$Si\; k = 0 \Rightarrow Z_1 = \sqrt[4]{2}\; e^{\frac{\pi}{24} i}$$

$$Si\; k = 1 \Rightarrow Z_2 = \sqrt[4]{2}\; e^{\frac{13\pi}{24} i}$$

$$Si\; k = 2 \Rightarrow Z_3 = \sqrt[4]{2}\; e^{\frac{25\pi}{24} i}$$

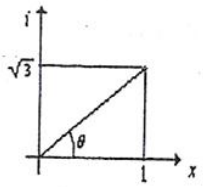
$$Si\; k = 3 \Rightarrow Z_4 = \sqrt[4]{2}\; e^{\frac{37\pi}{24} i}$$

4) Escribir en forma trigonométrica el siguiente número complejo.

$$Z = \frac{e^{-\frac{\pi}{6} i}\left(1 + \sqrt{3} i\right)^7}{i}$$

* $e^{-\frac{\pi}{6}i} \Rightarrow r = 1$; $\theta = -30°; \theta = 330°$; $e^{-\frac{\pi}{6}i} = (Cos330° + iSen330°)$

* $1 + \sqrt{3}i$



$r = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2}$; $r = 2$

$\theta = arcTan\ (\sqrt{3})$

$\theta = 60°$

Entonces tenemos: $1 + \sqrt{3}\,i = 2\ Cis\ 60°$

$$(1+\sqrt{3}i)^7 = [2\,(Cos\,60° + i\ Sen\,60°)]^7$$
$$= 2^7[Cos\,(60° \times 7) + i\ Sen\,(60° \times 7)] = 128\,[Cos\ 420° + i\ Sen\ 420°] =$$
$$= 128[Cos\ 60° + i\ Sen\ 60°]$$

* $i = (Cos\ 90° + i\ Sen\ 90°)$

Reemplazando valores tenemos:

$$Z = \frac{(Cos330° + i\ Sen330°) \times 128\,(Cos60° + i\ Sen60°)}{Cos90° + i\ Sen90°}$$

$$Z = 128\ Cis300°$$

EJERCICIOS PARA RESOLVER EN EL AULA

Hallar el valor de las siguientes expresiones:

1) i^{28} 2) i^{33} 3) i^{-3} 4) i^{63}

5) $(-i)^{14}$ 6) $i^{4327} - i^{1111}$ 7) $(1+i)^{16}$ 8) $(1-i)^4$

9) $i^{-3} + i^{-4}$ 10) $i^{-11} + i^{-12} + i^{-23}$ 11) $\dfrac{(1-i)^6 - 1}{(1+i)^6 + 1}$ 12) $\dfrac{3(1+i)^2}{(1-i)^2} - \dfrac{2(1-i)^3}{(1+i)^3}$

13) $\dfrac{(1-i)^5 - 1}{(1+i)^5 + 1}$ 14) $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$

Respuestas:

1) 1 2) i 3) i 4) $-i$ 5) -1

6) 0 7) 256 8) -4 9) $1+i$ 10) $1+2i$

11) -1 12) $-3-2i$ 13) $-\dfrac{1}{25} - \dfrac{32}{25}i$ 14) 2

Dados $Z_1 = 3 + 2i$ y $Z_2 = 5 - 4i$, calcular:

1) $Z_1 + Z_2$ 2) $Z_1 - Z_2$ 3) $Z_1 \times Z_2$

4) $\dfrac{Z_1}{Z_2}$ 5) $Z_1^{\,2} \times Z_2^{\,3}$

Expresar en la forma polar.

1) $3i$ 2) $\sqrt{3}+i$ 3) $-2-2\sqrt{3}\,i$

4) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ 5) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

Expresar en la forma rectangular:

1) $3\ cis\ 0^\circ$ 2) $3\ cis\left(-180^\circ\right)$ 3) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}\right)^3$ 4) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\ i\right)^2$

5) $5\left[Cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)+i\ Sen\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)\right]$ 6) $4\left(Cos\,180^\circ+i\ Sen\,180^\circ\right)$ 7) $2\left(Cos\,315^\circ+i\ Sen\,315^\circ\right)$

Efectuar las operaciones indicadas:

1) $3\ cis\ 45^\circ \times \sqrt{2}\ cis\ 90^\circ$ 2) $\dfrac{3\ cis\ 130^\circ}{2\ cis\ 70^\circ}$ 3) $\dfrac{5\ cis\ 135^\circ}{cis\ 180^\circ}$ 4) $\left(-\sqrt{\dfrac{3}{2}}+\dfrac{1}{2}i\right)^9$

5) $\left(\sqrt{3}-i\right)^8$ 6) $\left[\sqrt{5}\left(Cos\,20^\circ+i\ Sen\,20^\circ\right)\right]^4$ 7) $\left[2\left(Cos\,150^\circ+i\ Sen\,150^\circ\right)\right]^8$

Simplificar:

1) $\dfrac{\left[6\left(Cos\,75^\circ+i\ Sen\,75^\circ\right)\right]\left[2\left(Cos\,25^\circ+i\ Sen\,25^\circ\right)\right]}{12\left(Cos\,40^\circ+i\ Sen\,40^\circ\right)}$ 2) $\dfrac{36\ Cis\,100^\circ}{\left(3\ Cis\,50^\circ\right)\left(4\ Cis\,20^\circ\right)}$

3) $\dfrac{45\ Cis\,80^\circ}{\left(3\ Cis\,25^\circ\right)\left(5\ Cis\,55^\circ\right)}$

Hallar y graficar las raíces indicadas:

1) $\sqrt[3]{1+i}$ 2) $\sqrt[4]{-\sqrt{3}-3i}$ 3) $\sqrt[3]{(1-i)^2}$ 4) $\sqrt[3]{-4\sqrt{3}+4i}$

5) $\sqrt[6]{i-\sqrt{3}}$ 6) $\sqrt[3]{\dfrac{1-i}{\sqrt{3}-i}}$ 7) $\sqrt[5]{\dfrac{1-i}{1+\sqrt{3}i}}$

Expresar en la forma exponencial:

1) $1-i$ 2) $2i$ 3) $-\sqrt{3}+i$ 4) $-Cos\dfrac{\pi}{7}+i\ Sen\dfrac{\pi}{7}$

5) $\left(\sqrt{3}-i\right)^6$ 6) $\dfrac{e^{-\frac{\pi}{3}i}\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^7}{i}$ 7) $\dfrac{\left(\sqrt{2}\,Cis\,445^\circ\right)^2\left(\sqrt{6}\,Cis\,140^\circ\right)^4}{\left[2Cis\left(-130^\circ\right)\right]^2\left[Cis\,345^\circ\right]^2}$

Números Complejos

Expresar los resultados en la forma polar y rectangular

1) $3e^{\frac{\pi}{3}i}\cdot 2\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}$ 2) $\dfrac{2\sqrt{2}\,e^{\frac{3}{4}\pi i}}{3e^{\frac{\pi}{2}i}}$ 3) e^{2+i}

Hallar el módulo del complejo:

$$Z=\frac{(4+3i)^2(-1+i)^4}{(\sqrt{3}+i)^5}$$

Hallar las raíces y expresar en la forma polar y rectangular:

1) $\sqrt[5]{\dfrac{(2Cis17^\circ)^3\left[\sqrt[3]{4}\,e^{\frac{7}{45}\pi i}\right]^3}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^3}}$ 2) $\sqrt[3]{\dfrac{Cis30^\circ}{\frac{2}{i}-\sqrt{3}-i^3}}$

3) Determinar el valor que debe tomar m para que el cociente $\dfrac{3-2i}{4+mi}$ sea:

a) Un imaginario puro b) Un número real

Respuestas:

a) $m=6$ b) $m=-\dfrac{8}{3}$

4) Determinar cuál debe ser el valor de a en el complejo $Z=a+bi$ para que se cumpla $|Z+2|=|Z-3|$

Respuesta: $a=\dfrac{1}{2}$

5) Una de las raíces cuartas de un número complejo es $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, encontrar las otras raíces y el número Z.

EJERCICIOS DE REFUERZO

Calcular las siguientes expresiones:

1) $\dfrac{i^4+i^9+i^{16}}{2-i^5+i^{10}+i^{15}}$ 2) $\dfrac{3(i+1)^2}{(1-i)^2}-\dfrac{2(1-i)^3}{(1+i)^3}$

3) $1+\cfrac{i}{1+\cfrac{i}{1+\cfrac{i}{1+i}}}$ 4) $\dfrac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$ 5) $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$

6) Resolver y simplificar: $\dfrac{(-1+\sqrt{3}\,i)^{15}}{(1-i)^{20}}+\dfrac{(-1-\sqrt{3}\,i)^{15}}{(1+i)^{20}}$

7) Calcular "a" sabiendo que $\frac{a+3i}{2-5i}$ es un imaginario puro.

8) Hallar el modulo del complejo:

a) $Z=\frac{(4+3i)^2(-1+i)^4}{(\sqrt{3}+i)^5}$ b) $Z=\frac{(6+7i)(4-2i)}{4+2i}\cdot\left(-\frac{1}{7+6i}\right)$

9) Calcular los valores de x e y reales que verifican la siguiente igualdad de complejos :

a) $\frac{xi}{1+yi}=\frac{3x+4i}{x+3y}$ b) $\frac{2i}{x}+iy-2=3i-\frac{3}{x}+y$

10) Si $Z_1=1-i$; $Z_2=-2+4i$; $Z_3=\sqrt{3}-2i$ Hallar:

a) $\left|\frac{Z_1+Z_2+1}{Z_1-Z_2+1}\right|$ b) $\frac{1}{2}\left[\frac{Z_3}{\overline{Z_3}}+\frac{\overline{Z_3}}{Z_3}\right]$

11) Hallar el número complejo Z, igual al cuadrado del número complejo conjugado a él, es decir $Z=\left(\overline{Z}\right)^2$

12) Expresar en forma trigonométrica los siguientes numero complejos:

a) $Z=\sqrt{3}+i$ b) $Z=-2-2\sqrt{3}i$ c) $Z=\frac{(3-3i)(2-2\sqrt{3}i)^2}{(-3-\sqrt{3}i)(4-3i)}$

13) Expresar en forma cartesiana el siguiente numero complejo:

$$Z=\frac{(Cos17°+iSen17°)^3\left[\sqrt{2}\,Cis28°\right]^2}{(Cis7°)^{11}}$$

14) Calcular:

a) $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{40}$ b) $\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)^{16}$

15) Halle las raíces indicadas en forma polar y algebraica:

a) $\sqrt[3]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$ b) $\sqrt[5]{\frac{1-i}{1+\sqrt{3}i}}$

16) Escribir en forma exponencial y algebraica los siguientes numero complejos:

a) $Z=\frac{e^{-\frac{\pi}{3}i}(1+\sqrt{3}i)^7}{i}$ b) $Z=\frac{(1-\sqrt{3}i)(Cos\theta+i\,Sen\theta)}{2(1-i)(Cos\theta-i\,Sen\theta)}$ c) $Z=\frac{\left(Cos\frac{\pi}{3}-i\,Sen\frac{\pi}{3}\right)\left(\sqrt{3}+i\right)}{i-1}$

d) $Z=\frac{(-\sqrt{3}+i)\left[Cos\frac{\pi}{12}-i\,Sen\frac{\pi}{12}\right]}{1-i}$ e) $Z=\frac{\left(\sqrt{2}\,Cis445°\right)^2\left(\sqrt{6}\,Cis140°\right)^4}{\left[2Cis(-130°)\right]^2\left[Cis345°\right]^2}$ f) $Z=\frac{\left(i^8+\sqrt{3}\,i^5\right)^5}{4}$

Números Complejos

17) Expresar el resultado en forma geométrica:

a) $3e^{\frac{\pi}{3}i}\cdot 2\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}$ b) $\dfrac{2\sqrt{2}\,e^{\frac{3}{4}\pi i}}{3e^{\frac{\pi}{2}i}}$ c) e^{2+i}

18) Halle las raíces indicadas en forma trigonométrica:

a) $\sqrt[3]{\dfrac{Cos\,30^\circ + i\,Sen\,30^\circ}{\frac{2}{i}-\sqrt{3}-i^3}}$ b) $\sqrt[3]{\dfrac{e^{-\frac{\pi}{6}i}(1+\sqrt{3i})^7}{i}}$

c) $\sqrt[3]{\dfrac{i^9\left[Cos\frac{5}{3}\pi + i\,Sen\frac{5}{3}\pi\right]}{\left[-Cos30^\circ + i\,Sen30^\circ\right]^{-1}}}$

19) Hallar Z tal que $|Z| - Z = 1+2i$

20) Expresar en forma exponencial y trigonométrica: $\dfrac{\sqrt{2}\,e^{-\frac{7}{6}\pi}\left(-3-\sqrt{3}\,i\right)^4}{8\,Cis\,90^{\circ} + \left(1-\sqrt{3}\,i\right)^3}$

21) Calcular a y b en: $\left[e^{-\ln\left(\frac{i}{1-\sqrt{2}}\right)}\right]^2 + a + bi = e^{\frac{\pi}{2}i}$

22) Hallar el número complejo Z que satisface simultáneamente a las dos igualdades:

$$\left|\frac{Z-12}{Z-8i}\right| = \frac{5}{3} \quad ; \quad \left|\frac{Z-4}{Z-8}\right| = 1$$

23) La suma de dos complejos es $3-i$ Determinarlos sabiendo que tienen igual módulo y que su cociente es imaginario puro.

24) Hallar las raíces cúbicas del número: $Z = e^{\left[\frac{\pi}{3}i + Cos2\pi + i\,Sen2\pi\right]}$

25) Resolver la ecuación: $1 + x = \frac{1}{2}|x| - i$; siendo x un número complejo.

26) Encontrar los valores de x y de y en los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases}(1-i)x + 2yi = 3\\ 4x + (1-i)y = 2+i\end{cases}$ b) $\begin{cases}(2+i)x + (2-i)y = 6\\ (3+2i)x + (3-2i)y = 8\end{cases}$ c) $\begin{cases}x + iy - 2z = 10\\ x - y + 2iz = 20\\ ix + 3iy - (1+i)z = 30\end{cases}$

Respuestas:

1) $2+i$ 2) $-3-2i$ 3) $\frac{4}{3}+\frac{2}{3}i$ 4) $-\frac{1}{25}-\frac{32}{25}i$

5) 2 6) -64 7) $a = \frac{15}{2}$ 8) a) $\frac{25}{8}$ b) 1

Ing. José Silva C.

9) a) $x = \pm 2$; $y = \pm \frac{3}{2}$ b) $x = 1$; $y = 1$

10) a) $\frac{3}{5}$ b) $-\frac{1}{7}$

11) $Z_1 = 0$; $Z_2 = 1$; $Z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$; $Z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

12) a) $2\,Cis\,30°$ b) $4\,Cis\,240°$ c) $\frac{8}{5}\sqrt{6}\,Cis\,21{,}87°$

13) $\sqrt{3} + i$

14) a) $2^{20} Cis 240°$ b) $\frac{1}{256} Cis 360°$

15) a) $Z_1 = \sqrt[3]{2}\,Cis\,5°$; $Z_2 = \sqrt[3]{2}\,Cis\,125°$; $Z_3 = \sqrt[3]{2}\,Cis\,245°$

b) $Z_1 = \sqrt[5]{2}\,Cis\,39°$; $Z_2 = \sqrt[5]{2}\,Cis\,111°$; $Z_3 = \sqrt[5]{2}\,Cis\,183°$; $Z_4 = \sqrt[5]{2}\,Cis\,255°$; $Z_5 = \sqrt[5]{2}\,Cis\,327°$

16) a) $Z = 128\,e^{\frac{5}{3}\pi i}$
$Z = 128\ Cis\,300°$

c) $Z = \sqrt{2}\,e^{\frac{13}{12}\pi i}$
$Z = \sqrt{2}\,Cis\,195°$

d) $Z = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{3} i}$
$Z = \sqrt{2}\,Cis\,60°$

e) $Z = 18\,e^{\frac{5}{3}\pi i}$
$Z = 18\,Cis\,300°$

f) $Z = 8\,e^{\frac{5}{3}\pi i}$
$Z = 8\,Cis\,300°$

17) a) $-2{,}156 + 8{,}196\,i$ b) $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} i$ c) $1{,}468 + 2{,}28\,i$

18) a) $Z_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} Cis\,60°$
$Z_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} Cis\,180°$
$Z_3 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} Cis\,300°$

b) $Z_1 = 4\sqrt[3]{2}\,Cis\,100°$
$Z_3 = 4\sqrt[3]{2}\,Cis\,220°$
$Z_5 = 4\sqrt[3]{2}\,Cis\,340°$

c) $Z_1 = Cis\,180°$
$Z_2 = Cis\,200°$
$Z_3 = Cis\,320°$

19) $Z = \frac{3}{2} - 2i$

20) $18\,e^{-\frac{3\pi}{4} i}$, $18\,Cis\,225°$

21) $a = -2\sqrt{2} + 3$, $b = 1$

22) $Z_1 = 6 + 17\,i$, $Z_2 = 6 + 8\,i$

23) $Z_1 = 2 + i$; $Z_2 = 1 - 2i$
$Z_1 = 1 - 2i$; $Z_2 = 2 + i$

24) $Z_1 = \sqrt[3]{e}\,Cis\,20°$
$Z_2 = \sqrt[3]{e}\,Cis\,140°$
$Z_3 = \sqrt[3]{e}\,Cis\,260°$

25) $x = -0{,}45 - i$
$y = -2{,}21 - i$

26) a) $x = \frac{7}{10} + \frac{1}{2} i$
$y = \frac{1}{10} - \frac{9}{10} i$

b) $x = 2 + i$
$y = 2 - i$

c) $x = 3 - 11i$
$y = -3 - 9i$
$z = 1 - 7i$

REFERENCIAS

1.- M .O. González - J. D. Mancill ÁLGEBRA ELEMENTAL MODERNA (I y II)
Editorial Kapeluza _ Buenos Aires

2.- M. García Ardura EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE ÁLGEBRA
Decimoséptima edición. Hernando Madrid

3.- R. A. Kalnin ÁLGEBRA Y FUNCIONES ELEMENTALES
Editorial Mir – Moscu Tercera edición 1988

4.- Charles H. Lehmann ALGEBRA
Editorial Limusa-Wiley S. A. Mexico 1967

5.- Earl W. Swokowski - Jeffery A. Cole ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA CON GEOMETRIA ANALITICA. Intrenatinal Thomson Editores. Novena edición 1997

6.- James Stewart PRECÁLCULO Tercera edición 2001
Internacional Thomson Editores

7.- Edwin Galindo D. - Danilo Gortaire J. MATEMÁTICAS SUPERIORES
Primera edición 2003 Pro Ciencia Editores

8.- Silva - Lazo FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA
Limusa Noriega Editores

9.- Jorge Lara P. - Jorge Sandoval R. ANÁLISIS MATEMÁTICO
Cuarta edición 2001 Centro de Matemática Universidad Central del Ecuador

10.- Ing. Juan Goñi Galarza ÁLGEBRA
Colección Goñi Editorial Ingenieria E.I.R.L

11.- R. Figueroa G. ANÁLISIS MATEMÁTICO 1
Segunda edición2006 EdicionesR.F.G.

12.- R. Figueroa G. MATEMÁTICA BÁSICA
Octava edición 2003 Editorial America

13.- Murray R. Spiegel TEORÍA Y PROBLEMAS DE ÁLGEBRA SUPERIOR
Serie de compendios Schaum Mc Graw – Hill

14.- Jorge Gid Hoffman MATEMÁTICA
Sphix Caracas