2 이차방정식

● 중단원 지도 목표

1. 이차방정식의 뜻을 알고, 그 해의 의미를 이해할 수 있게 한다.
2. 인수분해를 이용하여 이차방정식을 풀 수 있게 한다.
3. 제곱근을 이용하여 이차방정식을 풀 수 있게 한다.
4. 이차방정식의 근의 공식을 유도하고 이를 이용하여 이차방정식을 풀 수 있도록 한다.
5. 이차방정식을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

● 중단원의 구성

소단원 명	지도 내용
1. 인수분해를 이용한 이차방정식의 풀이	• 이차방정식과 그 해 • 인수분해를 이용한 이차방정식의 풀이
2. 근의 공식을 이용한 이차방정식의 풀이	• 제곱근을 이용한 이차방정식의 풀이 • 근의 공식을 이용한 이차방정식의 풀이
3. 이차방정식의 활용	• 이차방정식의 활용
중단원 마무리하기	• 스스로 정리하기 • 기초 다지기, 기본 익히기, 실력 기르기
창의 · 인성 키우기	• 개념 바루기 • 문제 만들기 • 생각 키우기

준비하기

▶일차방정식을 풀 수 있는가?

1. 이차방정식의 해를 구할 때, 일차방정식의 풀이가 활용되므로 일차방정식을 풀 수 있어야 한다.

풀이 (1) $2x-3=5$에서 $2x=8$이므로 $x=4$

(2) $2(x-1)=x+3$에서 $2x-2=x+3$

$2x-x=3+2$

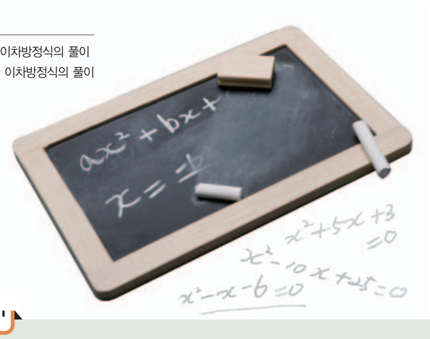
따라서 $x=5$이다.

답 (1) $x=4$ (2) $x=5$

80쪽

2 이차방정식

1. 인수분해를 이용한 이차방정식의 풀이
2. 근의 공식을 이용한 이차방정식의 풀이
3. 이차방정식의 활용



준비하기

▶ 일차방정식을 풀 수 있는가?

1. 다음 일차방정식을 풀어라.

(1) $2x-3=5$ (2) $2(x-1)=x+3$

▶ 제곱근을 구할 수 있는가?

2. 다음 수의 제곱근을 구하여라.

(1) 4 (2) 9 (3) 3 (4) 5

▶ 이차식의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있는가?

3. 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $x(x-2)+3(x^2+1)$ (2) $(x+1)(x+3)-(x-2)(x+5)$

▶ 다항식의 인수분해를 할 수 있는가?

4. 다음 식을 인수분해하여라.

(1) x^2+4x+4 (2) x^2-9

(3) x^2-4x-5 (4) $2x^2+x-3$

80 Ⅱ. 인수분해와 이차방정식

▶제곱근을 구할 수 있는가?

2. 이차방정식의 해를 구할 때, 제곱근의 계산이 사용되므로 앞 단원에서 배운 제곱근을 구할 수 있어야 한다.

답 (1) ± 2 (2) ± 3

(3) $\pm\sqrt{3}$ (4) $\pm\sqrt{5}$

▶이차식의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있는가?

3. 이차식의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있어야 한다.

답 (1) $4x^2-2x+3$ (2) $x+13$

▶다항식을 인수분해할 수 있는가?

4. 이 단원에서는 이차방정식의 해를 인수분해를 이용하여 구하므로 다항식을 인수분해할 수 있어야 한다.

답 (1) $(x+2)^2$ (2) $(x+3)(x-3)$

(3) $(x+1)(x-5)$ (4) $(2x+3)(x-1)$

01 인수분해를 이용한 이차방정식의 풀이

지도 목표

1. 이차방정식과 그 해의 의미를 이해하게 한다.
2. 인수분해를 이용하여 이차방정식을 풀 수 있게 한다.

지도상의 유의점

1. 이차방정식이 되기 위해서는 $ax^2+bx+c=0$에서 $a\neq0$임에 주의하도록 지도한다.
2. 이차방정식과 이차식의 차이점을 이해시켜 혼란이 없도록 지도한다.
3. 이차방정식은 실수인 해를 가지는 경우만 다룬다.
4. 두 인수의 곱이 0이 되는 등식의 성질 '$AB=0$'과 '$A=0$ 또는 $B=0$'은 필요충분조건을 통해 설명하기보다는 직관적으로 이해하게 한다.
5. 인수분해를 이용한 이차방정식의 풀이는 인수분해 공식을 이용하는 정도의 간단한 경우만 다루도록 지도한다.

1/3차시 차시별 학습 지도 방법

생각 열기	실생활 소재를 이용하여 학생들의 흥미를 이끌어 내도록 지도한다.
본문, 문제 1	이차방정식과 이차방정식이 아닌 예를 제시하며 이차방정식의 뜻에 대하여 비교하면서 설명한다.
본문, 함께 풀기 1	전체 학습(설명식 수업)으로 이차방정식의 해의 뜻을 이해할 수 있도록 내용을 설명하고, 다양한 문제를 통하여 이차방정식의 해의 뜻을 정확히 인지할 수 있도록 한다.
문제 2, 3	스스로 문제를 풀 수 있도록 하며 친구들과 결과를 비교해 볼 수 있도록 한다.

이차방정식의 뜻과 그 해는 무엇일까?

생각 열기 리그전의 경기 방식에서 경기 수를 구하는 것에 관한 이차식을 통하여 이차방정식의 뜻을 알게 하기 위한 생각 열기이다.

$\dfrac{x(x-1)}{2}=10$에서 등식을 정리하면 $x^2-x-20=0$이다.

81쪽

01 인수분해를 이용한 이차방정식의 풀이

학습 목표 이차방정식과 그 해의 의미를 이해한다.
인수분해를 이용하여 이차방정식을 풀 수 있다.
배울 용어 이차방정식, 중근

우리나라에서 개최되었던 월드컵 축구 대회는 온 국민을 하나로 뭉치게 해 주고 지구촌을 뜨겁게 달구어 전 세계인의 축제였다. 이 월드컵 축구 대회를 기념하기 위하여 국가대표팀을 초청하여 친선 축구 대회를 개최하려고 한다. 출전한 팀들이 다른 팀들과 모두 한 번씩 경기를 하여 총 10경기를 치르도록 할 때 몇 개의 나라가 참가해야 하는지를 이차방정식을 이용하여 구할 수 있다.

1/3차시 이차방정식의 뜻과 그 해는 무엇일까?

생각 열기 어느 축구 대회에 x개의 팀이 출전하여 다른 팀과 모두 한 번씩 경기를 할 때, 치러지는 총 경기 수는 $\dfrac{x(x-1)}{2}$이다. 총 10경기가 치러졌다고 할 때, 이를 등식으로 나타내어 보자.

생각 열기에서 총 10경기가 치러졌으므로 $\dfrac{x(x-1)}{2}=10$이고, 이 등식을 정리하면 $x^2-x-20=0$이다.

$x^2-x-20=0$
x에 대한 이차식

1 이와 같이 등식의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리한 식이

$$(x\text{에 대한 이차식})=0$$

의 꼴로 나타낼 수 있는 방정식을 x에 대한 **이차방정식**이라고 한다.

일반적으로 x에 대한 이차방정식은

$$ax^2+bx+c=0\ (a,\ b,\ c\text{는 상수},\ a\neq0)$$

의 꼴로 나타낼 수 있다.

2 보기 (1) 등식 $3x^2-5=x^2+2x$를 정리하면 $2x^2-2x-5=0$이므로 이차방정식이다.
(2) 등식 $4x^2+6x+4=4x^2+x$를 정리하면 $5x+4=0$이므로 이차방정식이 아니다.

2. 이차방정식 81

1 등식의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리한 식이 (x에 관한 이차식)$=0$의 꼴로 나타낼 수 있는 방정식을 x에 관한 이차방정식이라고 함을 알게 한다.

2 x에 대한 방정식이 이차항이 있다고 x에 대한 이차방정식이라고 답하지 않도록 지도한다. 우변의 모든 항을 좌변으로 이항하여 동류항을 정리하였을 때, 좌변이 x에 대한 이차식이 되어야 함을 강조한다.

문제 1 이차방정식의 뜻 알기

풀이 (1) 모든 항을 좌변으로 이항하면 $x^2+4x-3=0$이므로 이 방정식은 이차방정식이다.
(2) 우변을 전개하면 $x^2+5x=x^2+x$이고, 모든 항을 좌변으로 이항하면 $4x=0$이므로 이 방정식은 이차방정식이 아니다.
(3) 모든 항을 좌변으로 이항하면 $-3x+1=0$이므로 이 방정식은 이차방정식이 아니다.
(4) 좌변을 전개하면 $2x^2-x-1=0$이므로 이 방정식은 이차방정식이다.
따라서 이차방정식은 (1), (4)이다.

82쪽

문제 1 다음 중에서 이차방정식을 모두 찾아라.

(1) $x^2+4x=3$ (2) $x^2+5x=x(x+1)$

(3) $3x^2+2=3x^2+3x+1$ (4) $(x-1)(2x+1)=0$

3 x의 값이 -2, -1, 0, 1, 2일 때, 이차방정식 $x^2+x-2=0$을 참이 되게 하는 x의 값을 모두 구하여 보자.

x 대신에 -2, -1, 0, 1, 2를 대입하여 계산하면 다음 표와 같다.

x	좌변	우변	참 / 거짓
-2	$(-2)^2+(-2)-2=0$	0	참
-1	$(-1)^2+(-1)-2=-2$	0	거짓
0	$0^2+0-2=-2$	0	거짓
1	$1^2+1-2=0$	0	참
2	$2^2+2-2=4$	0	거짓

위의 표에서 $x=-2$ 또는 $x=1$일 때, 이차방정식 $x^2+x-2=0$은 참이 됨을 알 수 있다.

이와 같이 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$을 참이 되게 하는 x의 값을 이차방정식의 해 또는 근이라 하고, 이차방정식의 해를 모두 구하는 것을 이차방정식을 푼다고 한다.

문제 2 다음 [ ] 안의 수가 주어진 이차방정식의 해가 되는 것을 모두 찾아라.

(1) $x^2-9=0$ $[-3]$ (2) $x^2-3x+2=0$ $[2]$

(3) $2x^2+x-4=0$ $[2]$ (4) $x^2-5x+4=0$ $[-4]$

함께 풀기 1 x의 값이 -2, -1, 0, 1, 2일 때, 이차방정식 $x^2+3x+2=0$을 풀어라.

주어진 x의 값을 대입하여 방정식이 참이 되게 하는 x의 값을 찾는다.

풀이》 이차방정식 $x^2+3x+2=0$의 좌변에 x의 값을 각각 대입하면 다음 표와 같다.

x	-2	-1	0	1	2
x^2+3x+2	0	0	2	6	12

위의 표에서 이차방정식 $x^2+3x+2=0$을 참이 되게 하는 x의 값은 -2와 -1이므로 해는 $x=-2$ 또는 $x=-1$이다.

답》 $x=-2$ 또는 $x=-1$

문제 3 x의 값이 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3일 때, 다음 이차방정식의 해를 모두 구하여라.

(1) $x^2+x=0$ (2) $x^2-x-6=0$

82 Ⅱ. 인수분해와 이차방정식

3 이차방정식의 해의 뜻을 이해하게 하고, 주어진 x의 값 중에서 이차방정식의 해가 되는 값을 찾을 때에는 주어진 수를 이차방정식에 대입하여 등식이 성립하는지 확인하도록 하여 이차방정식의 해의 의미를 알 수 있도록 지도한다.

문제 2 주어진 값이 이차방정식의 해가 되는 것 찾기

풀이 (1) $x=-3$을 대입하면 $(-3)^2-9=0$이므로

주어진 이차방정식은 참이 된다.

따라서 $x=-3$은 $x^2-9=0$의 해이다.

(2) $x=2$를 대입하면

$2^2-3\times2+2=4-6+2=0$

이므로 주어진 이차방정식은 참이 된다.

따라서 $x=2$는 $x^2-3x+2=0$의 해이다.

(3) $x=2$를 대입하면

$2\times2^2+2-4=8+2-4=6\neq0$

이므로 이차방정식은 거짓이 된다.

따라서 $x=2$는 $2x^2+x-4=0$의 해가 아니다.

(4) 좌변에 $x=-4$를 대입하면

$(-4)^2-5\times(-4)+4=16+20+4=40\neq0$

이므로 이차방정식은 거짓이 된다.

따라서 $x=-4$는 $x^2-5x+4=0$의 해가 아니다.

그러므로 [ ] 안의 수가 주어진 이차방정식의 해가 되는 것은 (1), (2)이다.

문제 3 이차방정식의 해 구하기

풀이 (1) $x^2+x=0$의 x 대신에 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3을 각각 대입하여 계산하면 다음 표와 같다.

x	좌변	우변	참/거짓
-3	$(-3)^2+(-3)=6$	0	거짓
-2	$(-2)^2+(-2)=2$	0	거짓
-1	$(-1)^2+(-1)=0$	0	참
0	$0^2+0=0$	0	참
1	$1^2+1=2$	0	거짓
2	$2^2+2=6$	0	거짓
3	$3^2+3=12$	0	거짓

위의 표에서 이차방정식 $x^2+x=0$을 참이 되게 하는 x의 값은 -1과 0이므로 $x^2+x=0$의 해는 $x=-1$ 또는 $x=0$이다.

(2) $x^2-x-6=0$의 x 대신에 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3을 각각 대입하여 계산하면 다음 표와 같다.

x	좌변	우변	참/거짓
-3	$(-3)^2-(-3)-6=6$	0	거짓
-2	$(-2)^2-(-2)-6=0$	0	참
-1	$(-1)^2-(-1)-6=-4$	0	거짓
0	$0^2-0-6=-6$	0	거짓
1	$1^2-1-6=-6$	0	거짓
2	$2^2-2-6=-4$	0	거짓
3	$(3)^2-3-6=0$	0	참

위의 표에서 이차방정식 $x^2-x-6=0$을 참이 되게 하는 x의 값은 -2와 3이므로 $x^2-x-6=0$의 해는 $x=-2$ 또는 $x=3$이다.

수준별 교수·학습 방법

이차방정식의 뜻과 그 해의 의미를 이해한다.

하 이차방정식의 해를 찾을 때에는 여러 가지 값을 대입하여 구하는 과정을 충분히 연습하게 한 후, 해의 의미를 이해하도록 한다.

상 다음의 예와 같이 이차방정식의 해가 2개가 아닌 경우에 대해 생각해 볼 수 있도록 한다.

예 $x=-2$, -1, 0, 1, 2일 때, $x^2+2x-3=0$의 해는 $x=1$ 뿐이다.

Ⅱ

2/3차시 차시별 학습 지도 방법 [교과 교실]

생각 열기	주어진 소재를 이용하여 곱해서 0이 되는 두 수를 직관적으로 생각해 볼 수 있도록 한다.
본문, 함께 풀기 2	간단한 식을 예로 하여 인수분해를 이용한 이차방정식의 풀이 방법에 대하여 설명한다.
함께 풀기 3, 4	이차방정식의 다양한 형태에 대한 풀이 방법을 간단히 설명한다.
문제 5, 6, 7	여러 학생이 동시에 나와서 문제를 풀고, 서로 다른 사람의 풀이 방법을 비교해 볼 수 있도록 한다.

인수분해를 이용하여 이차방정식을 어떻게 풀까?

생각 열기 두 수를 곱해서 0이 되는 경우를 생각해 봄으로써 인수분해를 이용한 이차방정식의 풀이를 이해하게 하는 생각 열기이다.

곱해서 0이 되는 경우, 즉 선물을 받을 수 있는 친구는 영은, 정규, 진석이다.

83쪽

2/3차시 인수분해를 이용하여 이차방정식을 어떻게 풀까?

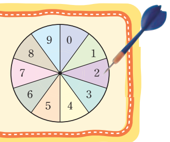
#필기

생각 열기 다음은 학교 축제 때 영은이가 속한 동아리에서 마련한 다트 던지기 게임이다.

다트를 두 번 던져 나온 두 수를 차례로 □ 안에 대입하여

□×□=0

이 되면 선물을 드립니다!



영은이는 친구들과 함께 다트 던지기 체험을 하여 아래와 같은 결과가 나왔다. 체험 코너에서 선물을 받을 수 있는 친구를 모두 말하여 보자.

영은	수민	정규	진석	주현
0, 1	3, 7	2, 0	0, 0	6, 9

4 두 수 또는 두 식 A, B에 대하여 $AB=0$이면

(1) $A=0$, $B=0$ (2) $A=0$, $B\neq0$ (3) $A\neq0$, $B=0$

의 세 가지 중에서 어느 하나가 성립한다. 이 세 가지 경우를 통틀어

$$A=0 \text{ 또는 } B=0$$

이라고 한다. 즉,

$$AB=0\text{이면 } A=0 \text{ 또는 } B=0$$

이다.

위의 성질을 이용하여 $(ax+b)(cx+d)=0$의 꼴인 이차방정식을 풀 수 있다.

함께 풀기 2 이차방정식 $(x+2)(x-1)=0$을 풀어라.

풀이» $(x+2)(x-1)=0$에서 $x+2=0$ 또는 $x-1=0$이다.
따라서 이차방정식의 해는 $x=-2$ 또는 $x=1$이다.

답» $x=-2$ 또는 $x=1$

이차방정식 $(x-a)(x-b)=0$의 해는 $x=a$ 또는 $x=b$이다.

문제 4 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $x(x-6)=0$ (2) $(x+4)(x-4)=0$

(3) $(x+3)(x-4)=0$ (4) $(x-5)(3x-1)=0$

2. 이차방정식 83

4 $AB=0$이면 $A=0$ 또는 $B=0$이 되는 등식의 성질이 성립함을 이용하여 이차방정식의 해를 구할 수 있도록 한다.

$A=0$	$B=0$	$AB=0$
$A=0$	$B\neq0$	$AB=0$
$A\neq0$	$B=0$	$AB=0$
$A\neq0$	$B\neq0$	$AB\neq0$

따라서 $AB=0$은 $A=0$ 또는 $B=0$과 서로 같음을 알 수 있도록 한다.

문제 4 인수분해를 이용한 이차방정식의 풀이

풀이 (1) $x=0$ 또는 $x-6=0$이므로 이차방정식의 해는 $x=0$ 또는 $x=6$이다.

(2) $x+4=0$ 또는 $x-4=0$이므로 이차방정식의 해는 $x=-4$ 또는 $x=4$이다.

(3) $x+3=0$ 또는 $x-4=0$이므로 이차방정식의 해는 $x=-3$ 또는 $x=4$이다.

(4) $x-5=0$ 또는 $3x-1=0$이므로 이차방정식의 해는 $x=5$ 또는 $x=\frac{1}{3}$이다.

문제 5 인수분해를 이용한 이차방정식의 풀이

풀이 (1) $x(x-3)$에서 $x=0$ 또는 $x-3=0$이므로 $x=0$ 또는 $x=3$이다.

(2) $(x+5)(x-5)=0$에서 $x+5=0$ 또는 $x-5=0$이므로 $x=-5$ 또는 $x=5$이다.

(3) $(x-3)(x-5)=0$에서 $x-3=0$ 또는 $x-5=0$이므로 $x=3$ 또는 $x=5$이다.

(4) $(2x-1)(3x-5)=0$에서 $2x-1=0$ 또는 $3x-5=0$이므로 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{5}{3}$이다.

84쪽

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 좌변을 두 일차식의 곱으로 인수분해할 수 있을 때에는 인수분해를 이용하여 이차방정식을 풀 수 있다.

함께 풀기 3 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $x^2-x-6=0$ (2) $2x^2+3x+1=0$

풀이》 (1) 좌변을 인수분해하면 $(x+2)(x-3)=0$

$x+2=0$ 또는 $x-3=0$

따라서 $x=-2$ 또는 $x=3$이다.

(2) 좌변을 인수분해하면 $(x+1)(2x+1)=0$

$x+1=0$ 또는 $2x+1=0$

따라서 $x=-1$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$이다.

답》 (1) $x=-2$ 또는 $x=3$ (2) $x=-1$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$

문제 5 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $x^2-3x=0$ (2) $x^2-25=0$

(3) $x^2-8x+15=0$ (4) $6x^2-13x+5=0$

문제 6 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $x^2+2x=8$ (2) $x^2+12=7x$

함께 풀기 4 이차방정식 $(x-2)(x+3)=6$을 풀어라.

풀이》 괄호를 풀면 $x^2+x-6=6$

우변을 이항하여 정리하면 $x^2+x-12=0$

좌변을 인수분해하면 $(x+4)(x-3)=0$

$x+4=0$ 또는 $x-3=0$

따라서 $x=-4$ 또는 $x=3$이다.

답》 $x=-4$ 또는 $x=3$

문제 7 다음 이차방정식을 풀어라.

5 (1) $(x+2)(x+3)=6$ (2) $x(x+2)=15$

(3) $(x-2)(x-3)=x+22$ (4) $2x(x+3)=3x+5$

84 Ⅱ. 인수분해와 이차방정식

문제 6 **인수분해를 이용한 이차방정식의 풀이**

풀이 (1) $x^2+2x-8=0$에서 $(x+4)(x-2)=0$

$x+4=0$ 또는 $x-2=0$

따라서 $x=-4$ 또는 $x=2$이다.

(2) $x^2-7x+12=0$에서 $(x-3)(x-4)=0$

$x-3=0$ 또는 $x-4=0$

따라서 $x=3$ 또는 $x=4$이다.

문제 7 **괄호가 있는 식을 변형하여 이차방정식 풀기**

풀이 (1) $(x+2)(x+3)=6$에서 $x^2+5x+6=6$

$x^2+5x=0$

$x(x+5)=0$

$x=0$ 또는 $x+5=0$

따라서 $x=-5$ 또는 $x=0$이다.

(2) $x(x+2)=15$에서 $x^2+2x=15$

$x^2+2x-15=0$

$(x+5)(x-3)=0$

$x+5=0$ 또는 $x-3=0$

따라서 $x=-5$ 또는 $x=3$이다.

(3) $(x-2)(x-3)=x+22$에서 $x^2-5x+6=x+22$

$x^2-6x-16=0$

$(x+2)(x-8)=0$

$x+2=0$ 또는 $x-8=0$

따라서 $x=-2$ 또는 $x=8$이다.

(4) $2x(x+3)=3x+5$에서 $2x^2+6x=3x+5$

$2x^2+3x-5=0$

$(2x+5)(x-1)=0$

$2x+5=0$ 또는 $x-1=0$

따라서 $x=-\frac{5}{2}$ 또는 $x=1$이다.

5 오개념 진단 · 지도

이차방정식 $x(x-a)=0$의 해는 $x=0$ 또는 $x=a$이다. 이 경우 이차방정식의 해를 $x=a$로만 구하여 오류를 범하지 않도록 주의하도록 지도한다.

예를 들어 $x^2-3x=0$의 해를 구할 때 다음과 같이 오류를 범하는 경우가 있다.

예 $x(x-3)=0$이므로 $x=3$이다.

$x^2-3x=0$의 이차방정식의 해는 $x=0$ 또는 $x=3$임에 주의하도록 지도한다.

수준별 교수·학습 방법

인수분해를 이용하여 이차방정식을 풀 수 있다.

하 **문제 4**와 같이 인수분해가 되어 있는 식에서 이차방정식의 해를 찾는 과정을 충분히 연습하도록 한다.
앞에서 배운 인수분해 공식을 다시 한 번 충분히 연습한 다음 이차방정식을 해결할 수 있도록 지도한다.
계수가 간단한 식을 중심으로 정수의 해가 나오는 문제를 제시한다.

상 상 수준의 학생들에게 반복적인 이차방정식의 풀이는 지루하기 쉬우므로 **문제 7**과 같은 다양한 형태의 문제를 제시하여 흥미를 유발할 수 있도록 한다.

Ⅱ

3/3차시 차시별 학습 지도 방법

본문, 함께 풀기 5	중근의 뜻을 설명하고, 중근이 되는 이차방정식의 풀이 방법에 대하여 익숙해질 수 있도록 지도한다.
문제 8	스스로 문제를 풀어 보고 친구들과 비교해 보게 한다.
문제 9	이차방정식이 중근을 가지기 위한 조건에 대하여 생각해 볼 수 있는 문제를 제공한다.

85쪽

3/3차시

이차방정식 $x^2-10x+25=0$을 풀어 보자.

이차방정식 $x^2-10x+25=0$의 좌변을 인수분해하면 $(x-5)^2=0$이다.

이 식은

$$(x-5)(x-5)=0$$

$$x-5=0 \text{ 또는 } x-5=0$$

이다.

따라서 이차방정식 $x^2-10x+25=0$의 근은

$$x=5 \text{ 또는 } x=5$$

로 두 근이 서로 같다.

이차방정식이 (완전제곱식)$=0$ 의 꼴로 나타나면 중근을 갖는다.

6 이와 같이 이차방정식의 두 근이 중복되어 서로 같을 때, 이 근을 주어진 이차방정식의 **중근**이라고 한다.

따라서 이차방정식 $x^2-10x+25=0$은 중근 $x=5$를 가진다.

함께 풀기 5 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $x^2+14x+49=0$ (2) $4x^2-4x+1=0$

풀이》 (1) 좌변을 인수분해하면 $(x+7)^2=0$, $x+7=0$

따라서 $x=-7$(중근)이다.

(2) 좌변을 인수분해하면 $(2x-1)^2=0$, $2x-1=0$

따라서 $x=\frac{1}{2}$(중근)이다.

답》 (1) $x=-7$(중근) (2) $x=\frac{1}{2}$(중근)

문제 8 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $x^2-6x+9=0$ (2) $x^2+12x+36=0$

(3) $9x^2-6x+1=0$ (4) $4x^2+12x+9=0$

문제 9 이차방정식 $x^2+8x+3a-2=0$이 중근을 가질 때, 상수 a의 값을 구하여라.

2. 이차방정식 85

6 중근의 뜻을 이해하게 하고, 주어진 이차방정식이

(완전제곱식)$=0$

의 꼴로 나타나면 중근을 가짐을 알게 한다.

즉, $(x\pm b)^2=0$, $a(x\pm b)^2=0$과 같은 꼴로 인수분해되는 이차방정식은 중근을 가짐을 알도록 한다.

특히 중근은 근이 하나로 나타나지만 실제로는 두 근이 중복되어 서로 같은 것임을 알게 한다.

문제 8 중근을 가지는 이차방정식의 풀이

풀이 (1) 좌변을 인수분해하면 $(x-3)^2=0$이므로

$x=3$ (중근)이다.

(2) 좌변을 인수분해하면 $(x+6)^2=0$이므로

$x=-6$ (중근)이다.

(3) 좌변을 인수분해하면 $(3x-1)^2=0$이므로

$x=\frac{1}{3}$ (중근)이다.

(4) 좌변을 인수분해하면 $(2x+3)^2=0$이므로

$x=-\frac{3}{2}$ (중근)이다.

문제 9 이차방정식이 중근을 가질 조건

풀이 $x^2+8x+3a-2=0$이 중근을 가지려면 좌변이 완전제곱식이 되어야 하므로

$3a-2=16$

따라서 $a=6$이다.

참고 이차방정식은 고대 이집트나 바빌로니아에서도 다루었으나 푸는 방법의 변화를 가져온 것은 그리스의 수학자 디오판토스이다. 그러나 디오판토스는 방정식의 근 중 양수만 받아들이고 그 밖의 근은 무시하였다.

한편 상업이 발달했던 인도 사람들도 일상생활에서 원금과 이자 계산에 관련된 이차방정식에 능숙했으며, 이차방정식을 풀면 해가 2개 나온다는 사실도 알고 있었으나 음수는 해로 인정하지 않았다. 음수가 해로 인정받기 시작한 것은 16세기 이후의 일이다.

수준별 교수·학습 방법

중근을 가지는 이차방정식을 풀 수 있다.

하 중근을 가지는 간단한 이차방정식을 충분히 연습하고, 두 근이 중복되어 있음을 확인시키는 과정을 통해 중근의 의미를 알게 한다.

상 이차방정식이 중근을 갖기 위한 조건에 대하여 생각할 수 있도록 발문하고, 중근을 갖는 이차방정식의 예를 학생이 직접 만들어 보도록 지도한다.

86쪽

확인하기

1 다음 중에서 이차방정식을 모두 찾아라.

(1) $x^2+2=x+x^2$ (2) $2x=1-x^2$

(3) $(x+2)(x-2)=-x^2$ (4) $x(x+1)-x^2=3x+1$

2 다음 [ ] 안의 수가 주어진 이차방정식의 해가 되는 것을 모두 찾아라.

(1) $x(x+2)=0$ [-2] (2) $x^2-7x+10=0$ [-5]

(3) $2x^2-x-15=0$ [3] (4) $(x-3)(x+1)=12$ [5]

3 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $(x+2)(x-3)=0$ (2) $x^2+4x=0$

(3) $x^2+16x+64=0$ (4) $4x^2-28x+49=0$

4 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $x^2-100=0$ (2) $9x^2-25=0$

(3) $x^2-x=12$ (4) $x^2-8x+7=0$

(5) $5x^2-4x-1=0$ (6) $6x^2+x-2=0$

수학적 과정 의사소통 추론 문제 해결

5 다음은 이차방정식을 인수분해를 이용하여 푼 것인데, 식의 일부가 얼룩이 져서 보이지 않는다. 얼룩진 부분에 알맞은 수를 찾아 풀이를 완성하여라.

(1)
$x^2+\quad x-4=0$
$(x-1)(x+\quad)=0$
$x=1$ 또는 $x=$

(2)
$x^2-5x+\quad=0$
$(x-\quad)(x-3)=0$
$x=$ 또는 $x=3$

(3)
$x^2-10x+\quad=0$
$(x-\quad)^2=0$
$x=$

86 Ⅱ. 인수분해와 이차방정식

확인하기

1 평가의 주안점 이차방정식의 뜻을 이해할 수 있다.

풀이 (1) 우변의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리하면

$-x+2=0$

이므로 이차방정식이 아니다.

(2) 우변의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리하면

$x^2+2x-1=0$

이므로 이차방정식이다.

(3) 괄호를 풀면 $x^2-4=-x^2$

우변의 항을 좌변으로 이항하여 정리하면

$2x^2-4=0$

이므로 이차방정식이다.

(4) 괄호를 풀면 $x^2+x-x^2=3x+1$

우변의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리하면

$-2x-1=0$

이므로 이차방정식이 아니다.

따라서 이차방정식인 것은 (2), (3)이다.

2 평가의 주안점 이차방정식의 해의 의미를 알 수 있다.

풀이 (1) $x=-2$를 대입하면

$-2\times 0=0$

이므로 $x=-2$일 때 이차방정식은 참이 된다.

따라서 $x=-2$가 이차방정식의 해가 된다.

(2) $x=-5$를 대입하면

$(-5)^2-7\times(-5)+10=25+35+10=70\neq 0$

이므로 $x=-5$일 때 이차방정식은 거짓이다.

따라서 $x=-5$는 이차방정식의 해가 아니다.

(3) $x=3$을 대입하면

$2\times 3^2-3-15=0$

이므로 $x=3$일 때 이차방정식은 참이 된다.

따라서 $x=3$은 이차방정식의 해가 된다.

(4) $x=5$를 대입하면

$2\times 6=12$

이므로 $x=5$일 때 이차방정식은 참이 된다.

따라서 $x=5$가 이차방정식의 해가 된다.

그러므로 [ ] 안의 수가 주어진 이차방정식의 해가 되는 것은 (1), (3), (4)이다.

3 평가의 주안점 인수분해를 이용하여 이차방정식을 풀 수 있다.

풀이 (1) $x+2=0$ 또는 $x-3=0$이므로

$x=-2$ 또는 $x=3$

(2) $x^2+4x=0$의 좌변을 인수분해하면 $x(x+4)=0$

즉, $x=0$ 또는 $x+4=0$이므로

$x=0$ 또는 $x=-4$이다.

(3) $x^2+16x+64=0$의 좌변을 인수분해하면

$(x+8)^2=0$이므로

$x=-8$ (중근)이다.

(4) $4x^2-28x+49=0$의 좌변을 인수분해하면

$(2x-7)^2=0$이므로

$x=\frac{7}{2}$ (중근)이다.

4 평가의 주안점 여러 가지 형태의 이차방정식을 풀 수 있다.

풀이 (1) $x^2-100=0$의 좌변을 인수분해하면

$(x+10)(x-10)=0$이므로

$x=-10$ 또는 $x=10$이다.

(2) $9x^2-25=0$의 좌변을 인수분해하면

$(3x)^2-5^2=0$

$(3x+5)(3x-5)=0$

따라서 $x=-\frac{5}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}$이다.

Ⅱ

(3) $x^2-x-12=0$에서 좌변을 인수분해하면
$(x+3)(x-4)=0$이므로
$x=-3$ 또는 $x=4$이다.

(4) $x^2-8x+7=0$에서 좌변을 인수분해하면
$(x-1)(x-7)=0$이므로
$x=1$ 또는 $x=7$이다.

(5) $5x^2-4x-1=0$에서 좌변을 인수분해하면
$(5x+1)(x-1)=0$이므로
$x=-\frac{1}{5}$ 또는 $x=1$이다.

(6) $6x^2+x-2$에서 좌변을 인수분해하면
$(3x+2)(2x-1)=0$이므로
$x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$이다.

5 **평가의 주안점** 이차방정식에서 일차항의 계수나 상수항을 보고 해를 추론할 수 있다.

풀이 (1) 곱해서 -4가 되어야 하므로 두 번째 줄의 식은
$(x-1)(x+4)=0$
이 식을 전개하면 첫 번째 줄의 식
$x^2+3x-4=0$
이때 이차방정식의 해는 $x=1$ 또는 $x=-4$이다.
따라서 주어진 풀이를 완성하면 다음과 같다.

$$x^2+3x-4=0$$
$$(x-1)(x+4)=0$$
$$x=1 \text{ 또는 } x=-4$$

(2) 더해서 -5가 되어야 하므로 두 번째 줄의 식은
$(x-2)(x-3)=0$
그러므로 첫 번째 줄의 식은
$x^2-5x+6=0$
이때 이차방정식의 해는 $x=2$ 또는 $x=3$이다.
따라서 주어진 풀이를 완성하면 다음과 같다.

$$x^2-5x+6=0$$
$$(x-2)(x-3)=0$$
$$x=2 \text{ 또는 } x=3$$

(3) 두 번째 줄의 식을 보면 완전제곱식이므로 첫 번째 줄의 식이 완전제곱식이 되려면 상수항은 25이어야 한다.
그러므로 첫 번째 줄의 식은
$x^2-10x+25=0$
두 번째 줄의 식은
$(x-5)^2=0$
이때 이차방정식의 해는 $x=5$이다.
따라서 주어진 풀이를 완성하면 다음과 같다.

$$x^2-10x+25=0$$
$$(x-5)^2=0$$
$$x=5$$

보충 문제

1. 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $x(x-2)=35$

(2) $x^2+10^2=20x$

답 (1) $x=-5$ 또는 $x=7$ (2) $x=10$(중근)

2. 주사위를 두 번 던져서 첫 번째 나온 눈의 수를 a, 두 번째 나온 눈의 수를 b라 할 때, 이차방정식 $x^2-ax+b=0$이 중근을 가질 확률을 구하여라.

답 $\frac{1}{18}$

보충 자료

두 사람 A, B를 정하고, 다음과 같이 활동을 한다.

이차방정식 $x^2-\boxed{a}x+\boxed{b}=0$의 두 해를 인수분해를 이용하여 구하여라.

❶ A는 네모 안에 들어갈 수를 차례대로 생각한 다음 B에게 순서대로 수를 불러준다.
❷ B는 인수분해를 이용하여 두 해를 구한다.
❸ B가 두 해를 구하면 B는 $+2$점을, B가 두 해를 구하지 못하면 A는 $+2$점을 얻는다.
❹ 만약 A가 부른 두 수로 만들어진 이차방정식이 인수분해를 이용하여 해결할 수 없는 문제인 경우 B가 $+1$점을 얻는다. (예를 들어 $x^2+5x-7=0$은 인수분해를 이용하여 이차방정식의 해를 구할 수 없다.)
❺ A, B가 역할을 바꾸어 활동한다.

02 근의 공식을 이용한 이차방정식의 풀이

지도 목표

1. 제곱근을 이용하여 이차방정식을 풀 수 있게 한다.
2. 완전제곱식을 이용하여 근의 공식을 유도할 수 있게 한다.
3. 근의 공식을 이용하여 이차방정식을 풀 수 있게 한다.

지도상의 유의점

1. 이차방정식의 근과 계수의 관계와 관련된 문제는 다루지 않는다.

1/4차시 차시별 학습 지도 방법

생각 열기	수식 번역 프로그램이라는 흥미있는 소재를 활용하여 제곱근의 정의를 생각해 보게 한다.
본문, 함께 풀기 1, 2	제곱근을 이용하여 이차방정식을 푸는 방법에 관해 설명한다.
문제 **1**, **2**	스스로 문제를 풀어 보고 친구들과 비교해 보게 한다.
문제 **3**	문제를 푼 후에 풀이 과정을 설명하도록 유도하며, 두 사람이 구한 이차방정식의 해가 결국 같음을 추론할 수 있도록 하며, 이차방정식의 풀이의 다양성을 알게 한다.

제곱근을 이용하여 이차방정식을 어떻게 풀 수 있을까?

생각 열기 문장을 수식으로 바꾸는 과정을 통해 $x^2=k(k>0)$와 같은 꼴의 이차방정식의 해에 대하여 생각해 보게 하는 생각 열기이다.

(1) 수식 번역 프로그램에서 수식은 $x^2=5$이다.

(2) x의 값을 구하면 $x=\sqrt{5}$ 또는 $x=-\sqrt{5}$이다.

1 이차방정식 $ax^2+c=0\ (ac<0)$과 같은 꼴의 이차방정식은 $x^2=k\ (k>0)$의 꼴로 고친 후에 k의 제곱근을 구하여 풀 수 있음을 지도한다. 이때 $x^2=k\ (k>0)$인 이차방정식 근은 $x=\pm\sqrt{k}$임을 알도록 지도한다.

87쪽

02 근의 공식을 이용한 이차방정식의 풀이

학습 목표 제곱근과 근의 공식을 이용하여 이차방정식을 풀 수 있다.
배울 용어 근의 공식

기원전 6세기경부터 고대 이집트나 바빌로니아 사람들은 이차방정식을 푸는 방법을 찾으려고 노력하였다. 628년에 인도의 수학자인 브라마굽타(Brahmagupta ; 598～670)가 쓴 수학 책 "싯단타(Siddhanta)"에는 이차방정식의 풀이 방법이 실려 있는데, 현재 우리가 이차방정식을 풀 때 사용하고 있는 근의 공식과 매우 비슷하다.

1/4차시 제곱근을 이용하여 이차방정식을 어떻게 풀까?

생각 열기 시후는 글로 표현된 문장을 수식으로 바꾸는 '수식 번역 프로그램' 을 만들려고 한다.

x는 제곱해서 5가 되는 수이다.	번역
수식	x의 값

(1) 수식에 들어갈 이차방정식을 말하여 보자.

(2) x의 값은 얼마인지 구하여 보자.

생각 열기에서 x에 대한 이차방정식은 $x^2=5$로 나타낼 수 있다. 이때 x는 제곱해서 5가 되는 수, 즉 5의 제곱근이므로 이 이차방정식의 해는 $x=\sqrt{5}$ 또는 $x=-\sqrt{5}$이다.

$x=\sqrt{5}$ 또는 $x=-\sqrt{5}$를 $x=\pm\sqrt{5}$로 나타내기도 한다.

1 일반적으로 이차방정식 $ax^2+c=0(ac<0)$은 $x^2=k(k>0)$와 같은 꼴로 고친 다음 k의 제곱근을 구하여 풀 수 있다.

$x^2=k(k>0)$의 근 $x=\pm\sqrt{k}$

함께 풀기 1 이차방정식 $4x^2-3=0$을 풀어라.

풀이» 좌변의 -3을 이항하면 $4x^2=3$

양변을 4로 나누면 $x^2=\frac{3}{4}$

따라서 $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.

답» $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 이차방정식 87

중학교 과정에서의 인수분해는 유리수의 범위에서 다루므로 $x^2=5$와 같은 꼴의 이차방정식은
$(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})=0$
으로 인수분해하여 풀지 않도록 지도한다.
즉, k가 제곱수가 아닐 때, $x^2=k(k>0)$꼴의 이차방정식은 제곱근을 이용하여 $x=\pm\sqrt{k}$와 같이 구할 수 있도록 한다.

문제 1 제곱근을 이용한 이차방정식의 풀이

풀이 (1) $x^2=25$에서 $x=\pm 5$이다.

(2) $x^2-7=0$에서 상수항을 우변으로 이항하면 $x^2=7$이므로 $x=\pm\sqrt{7}$이다.

(3) $4x^2-9=0$에서 상수항을 우변으로 이항하면
$4x^2=9$
양변을 4로 나누면 $x^2=\frac{9}{4}$
따라서 $x=\pm\frac{3}{2}$이다.

(4) $3x^2=4$에서 양변을 3으로 나누면 $x^2=\frac{4}{3}$이므로

$x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$이다.

문제 2 제곱근을 이용한 이차방정식의 풀이

풀이 (1) $(x-3)^2=4$에서 $x-3=\pm 2$

따라서 $x=1$ 또는 $x=5$이다.

(2) $(x+2)^2-49=0$에서 $(x+2)^2=49$

$x+2=\pm 7$

따라서 $x=-9$ 또는 $x=5$이다.

(3) $(3x-2)^2=3$에서 $3x-2=\pm\sqrt{3}$

$3x=2\pm\sqrt{3}$

따라서 $x=\frac{2}{3}\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$이다.

(4) $3(x-1)^2-21=0$에서 $3(x-1)^2=21$

$(x-1)^2=7$, $x-1=\pm\sqrt{7}$

따라서 $x=1\pm\sqrt{7}$이다.

문제 3 제곱근을 이용한 이차방정식의 풀이

지도상의 유의점 원희의 풀이 과정은 완전제곱식을 전개한 다음 인수분해를 이용하여 해를 구하는 과정이고, 진규의 풀이 과정은 제곱근을 이용하여 해를 구하는 과정이다. 두 학생이 구한 해가 일치함을 설명하고, 다양한 방법으로 이차방정식을 풀 수 있음을 알게 한다.

풀이 (i) 원희의 풀이는 인수분해를 이용한 풀이이다.

$(x-3)^2-16=0$

괄호를 풀면 $x^2-6x+9-16=0$

$x^2-6x-7=0$

$(x+1)(x-7)=0$

따라서 $x=-1$ 또는 $x=7$이다.

(ii) 진규의 풀이는 제곱근을 이용한 풀이이다.

$(x-3)^2-16=0$

$(x-3)^2=16$

$x-3$은 16의 제곱근이므로 $x-3=\pm 4$

따라서 $x=-1$ 또는 $x=7$이다.

수준별 교수·학습 방법

인수분해를 이용하여 이차방정식을 풀 수 있다.

하 **함께 풀기 1**, **문제 1**과 같은 형태의 간단한 이차방정식에서 제곱근을 이용하여 해를 구하는 방법을 이해하도록 한다.

88쪽

문제 1 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $x^2=25$ (2) $x^2-7=0$

(3) $4x^2-9=0$ (4) $3x^2=4$

함께 풀기 2 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $(x+1)^2-2=0$ (2) $(2x-3)^2=5$

풀이» (1) 좌변의 -2를 이항하면 $(x+1)^2=2$

$x+1$은 2의 제곱근이므로 $x+1=\pm\sqrt{2}$

좌변의 1을 이항하면 $x=-1\pm\sqrt{2}$

(2) $2x-3$은 5의 제곱근이므로 $2x-3=\pm\sqrt{5}$

좌변의 -3을 이항하면 $2x=3\pm\sqrt{5}$

양변을 2로 나누면 $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

답» (1) $x=-1\pm\sqrt{2}$ (2) $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

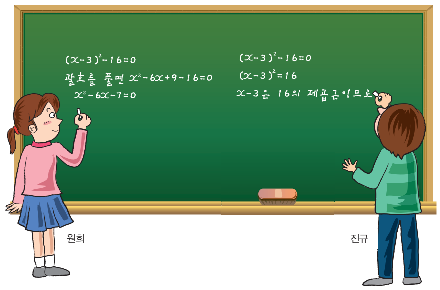
문제 2 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $(x-3)^2=4$ (2) $(x+2)^2-49=0$

(3) $(3x-2)^2=3$ (4) $3(x-1)^2-21=0$

의사소통

문제 3 다음은 원희와 진규가 칠판에 $(x-3)^2-16=0$을 푸는 과정을 나타낸 것이다. 원희와 진규의 풀이 방법에 대하여 설명하고, 나머지 부분을 완성하여라.



88 Ⅱ. 인수분해와 이차방정식

2/4차시 차시별 학습 지도 방법

생각 열기	주어진 만화를 이용하여 학생들의 관심을 유도하고, 좌변을 완전제곱식으로 바꾸어 보도록 지도한다.
본문	인수분해에서 배운 완전제곱식을 이용하여 이차방정식을 푸는 방법을 이해할 수 있도록 설명한다.
문제 4	스스로 문제를 풀어 보고 친구들과 비교해 보게 한다.

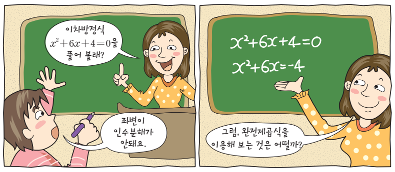
완전제곱식을 이용하여 이차방정식을 어떻게 풀까?

생각 열기 만화에서 주어진 선생님과 학생의 대화를 통하여 이차방정식의 좌변을 완전제곱식으로 만든 다음 제곱근을 이용한 이차방정식의 풀이 방법과 연관시켜 생각해 볼 수 있도록 하는 생각 열기이다.

89쪽

2/4차시 완전제곱식을 이용하여 이차방정식을 어떻게 풀까?

생각 열기 다음의 내용에서 선생님이 질문한 $x^2+6x=-4$의 좌변이 완전제곱식이 되도록 하려면 어떻게 해야 하는지 말하여 보자.



2 완전제곱식을 이용하여 이차방정식 $x^2+6x+4=0$을 풀어 보자.

$$x^2+bx \;\downarrow\; x^2+bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2 \;\downarrow\; \left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

완전제곱식

좌변에 있는 4를 이항하면

$$x^2+6x=-4$$

좌변을 완전제곱식으로 만들기 위하여 x의 계수 6의 $\frac{1}{2}$을 제곱한 값인 9를 양변에 더하면

$$x^2+6x+9=-4+9$$

좌변을 완전제곱식으로 고치면

$$(x+3)^2=5$$

제곱근을 구하면

$$x+3=\pm\sqrt{5}$$

해를 구하면

$$x=-3\pm\sqrt{5}$$

이다.

따라서 이차방정식의 해는 $x=-3\pm\sqrt{5}$이다.

문제 4 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $x^2+2x=2$ (2) $x^2-4x=1$

(3) $x^2+10x+1=0$ (4) $x^2-5x-2=0$

2. 이차방정식 89

$x^2+6x=-4$

$x^2+6x+9=-4+9$

$(x+3)^2=5$

따라서 $x^2+6x=-4$의 좌변이 완전제곱식이 되도록 하려면 양변에 9를 더하면 된다.

2 완전제곱식을 이용한 이차방정식의 풀이

주어진 이차방정식의 좌변을 완전제곱식으로 만든 다음 제곱근을 이용하여 이차방정식의 해를 구할 수 있도록 지도한다.

완전제곱식을 이용하여 이차방정식의 해를 구하는 방법은 이차방정식의 근의 공식을 유도하는 방법을 이해하는 데 도움이 되도록 결과보다는 풀이 과정을 이해할 수 있도록 지도한다.

문제 4 완전제곱식을 이용한 이차방정식의 풀이

풀이 (1) $x^2+2x=2$에서 좌변을 완전제곱식으로 만들기 위하여 1을 양변에 더하면

$x^2+2x+1=3$

$(x+1)^2=3$

$x+1=\pm\sqrt{3}$

따라서 $x=-1\pm\sqrt{3}$이다.

(2) $x^2-4x=1$에서 좌변을 완전제곱식으로 만들기 위하여 4를 양변에 더하면

$x^2-4x+4=5$

$(x-2)^2=5$

$x-2=\pm\sqrt{5}$

따라서 $x=2\pm\sqrt{5}$이다.

(3) $x^2+10x+1=0$에서 1을 우변으로 이항하면

$x^2+10x=-1$

좌변을 완전제곱식으로 만들기 위하여 25를 양변에 더하면

$x^2+10x+25=24$

$(x+5)^2=24$

$x+5=\pm 2\sqrt{6}$

따라서 $x=-5\pm 2\sqrt{6}$이다.

(4) $x^2-5x-2=0$에서 -2를 우변으로 이항하면

$x^2-5x=2$

좌변을 완전제곱식으로 만들기 위하여 $\frac{25}{4}$를 양변에 더하면

$x^2-5x+\frac{25}{4}=\frac{33}{4}$

$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{33}{4}$

$x-\frac{5}{2}=\pm\frac{\sqrt{33}}{2}$

따라서 $x=\frac{5\pm\sqrt{33}}{2}$이다.

수준별 교수·학습 방법

완전제곱식을 이용하여 이차방정식을 풀 수 있다.

하 완전제곱식으로 고치는 과정을 충분히 연습한 후 이를 이용하여 이차방정식을 풀 수 있도록 지도한다. 이때 x^2항의 계수가 1인 이차방정식을 이용하여 충분히 연습하도록 지도한다.

상 완전제곱식으로 고쳐서 이차방정식을 푸는 과정에 x^2항의 계수가 1이 아닌 경우의 문제를 어떻게 풀 지 생각해 보게 한다.

3/4차시 차시별 학습 지도 방법 [교과 교실]

생각 열기	두 사람의 대화에서 완전제곱식을 이용하여 근을 구하는 과정을 이해시키고, 근의 공식을 유도하는 과정을 생각해 볼 수 있도록 한다.
본문, 함께 풀기 3	근의 공식을 유도하고, 이를 이용하여 이차방정식을 푸는 방법에 대하여 설명한다.
문제 5	여러 학생이 동시에 나와서 문제를 풀 수 있도록 하며, 자신의 풀이 과정을 설명할 수 있게 한다.

이차방정식의 근의 공식이란 무엇일까?

생각 열기 두 사람의 대화에서 주어진 이차방정식을 (완전제곱식)$=0$의 꼴로 고치는 과정을 통하여 근의 공식을 이끌어내는 과정을 연관시켜 생각해 볼 수 있게 하는 생각 열기이다.

(1) $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{17}}{4}$

(2) x^2의 계수가 1이 아닌 경우는 먼저 x^2의 계수로 양변을 나눈 후에 완전제곱식을 이용하여 이차방정식의 해를 구한다.

3 근의 공식을 $2x^2+5x+1=0$의 풀이 과정과 비교하여 이해하도록 지도한다.
이차방정식의 근의 공식을 유도하고, 근의 공식을 이용하여 이차방정식의 해를 구할 수 있도록 지도한다.

참고 자료

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 다음과 같은 근의 공식을 얻는다.

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (단, $b^2-4ac\geq 0$)

b가 짝수인 경우 $b=2b'$이라 하면 $ax^2+2b'x+c=0$이다.
이때 다음과 같은 근의 공식을 얻는다.

$$x=\frac{-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{-2b'\pm2\sqrt{(b')^2-ac}}{2a}$$
$$=\frac{-b'\pm\sqrt{(b')^2-ac}}{a}$$

예를 들어 $3x^2-4x-1=0$에서 $a=3$, $b'=-2$, $c=-1$이므로

$$x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-3\times(-1)}}{3}=\frac{2\pm\sqrt{7}}{3}$$

이다.

90쪽

3/4차시 이차방정식의 근의 공식이란 무엇일까?

생각 열기 다음은 선생님과 은송이가 나누는 대화이다.

선생님: 이차방정식 $2x^2+5x+1=0$은 어떻게 풀까?
은송: 이차항의 계수가 1이면 완전제곱식을 이용하여 풀 수 있을 텐데…….
선생님: 그럼 계수를 1로 만들어 보렴.
은송: 양변을 2로 나누면 $x^2+\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}=0$이 돼요.

(1) 이차방정식 $2x^2+5x+1=0$의 해를 구하여 보자.
(2) x^2의 계수가 1이 아닌 이차방정식의 해를 구하는 방법에 대해 말하여 보자.

3 생각 열기에서와 같이 이차방정식 $2x^2+5x+1=0$을 푸는 과정을 생각하면서 완전제곱식을 이용하여 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$을 풀어 보자.

이차방정식	$2x^2+5x+1=0$	$ax^2+bx+c=0\,(a\neq0)$
양변을 x^2의 계수로 나눈다.	$x^2+\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}=0$	$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$
좌변의 상수항을 우변으로 이항한다.	$x^2+\frac{5}{2}x=-\frac{1}{2}$	$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$
x의 계수의 $\frac{1}{2}$을 제곱한 값을 양변에 더한다.	$x^2+\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{4}\right)^2=-\frac{1}{2}+\left(\frac{5}{4}\right)^2$	$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$
좌변을 완전제곱식으로 고친다.	$\left(x+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{17}{16}$	$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$
제곱근을 구한다.	$x+\frac{5}{4}=\pm\frac{\sqrt{17}}{4}$	$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
좌변의 상수항을 이항하여 해를 구한다.	$x=-\frac{5}{4}\pm\frac{\sqrt{17}}{4}$ $=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{4}$	$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

90 Ⅱ. 인수분해와 이차방정식

문제 5 근의 공식을 이용한 이차방정식의 풀이

풀이 (1) $x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times1\times(-1)}}{2}$

$=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+4}}{2}$

$=\dfrac{-2\pm2\sqrt{2}}{2}=-1\pm\sqrt{2}$

(2) $x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4\times1\times(-3)}}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+12}}{2}$

$=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

(3) $x=\dfrac{-9\pm\sqrt{9^2-4\times3\times5}}{6}=\dfrac{-9\pm\sqrt{81-60}}{6}$

$=\dfrac{-9\pm\sqrt{21}}{6}$

(4) $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times2\times(-2)}}{4}$

$=\dfrac{-5\pm\sqrt{25+16}}{4}$

$=\dfrac{-5\pm\sqrt{41}}{4}$

91쪽

4 위의 결과에서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근은 세 상수 a, b, c를 이용하여 나타낼 수 있음을 알았다.

이상을 정리하면 다음과 같은 이차방정식의 **근의 공식**을 얻는다.

이차방정식의 근의 공식
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근은
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ (\text{단, } b^2-4ac\ge 0)$$

함께 풀기 3 근의 공식을 이용하여 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $2x^2+3x-1=0$ (2) $3x^2-4x-1=0$

풀이》 (1) 근의 공식에 $a=2$, $b=3$, $c=-1$을 대입하면
$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times2\times(-1)}}{2\times2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+8}}{4}=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$$
(2) 근의 공식에 $a=3$, $b=-4$, $c=-1$을 대입하면
$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times3\times(-1)}}{2\times3}=\frac{4\pm\sqrt{16+12}}{6}=\frac{4\pm\sqrt{28}}{6}=\frac{4\pm2\sqrt{7}}{6}=\frac{2\pm\sqrt{7}}{3}$$

답》 (1) $x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$ (2) $x=\frac{2\pm\sqrt{7}}{3}$

문제 5 근의 공식을 이용하여 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $x^2+2x-1=0$ (2) $x^2-x-3=0$
(3) $3x^2+9x+5=0$ (4) $2x^2+5x-2=0$

4/4차시

92쪽

5 계수가 분수나 소수인 이차방정식을 풀 때에는 양변에 적당한 수를 곱하여 계수를 정수로 만든 다음 인수분해나 근의 공식을 이용하여 풀면 편리하다.

함께 풀기 4 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $\frac{1}{3}x^2-x+\frac{1}{2}=0$ (2) $x^2+0.5x-0.1=0$

풀이》 (1) 양변에 분모 2와 3의 최소공배수 6을 곱하면
$$2x^2-6x+3=0$$
근의 공식에 $a=2$, $b=-6$, $c=3$을 대입하면
$$x=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\times2\times3}}{2\times2}=\frac{6\pm\sqrt{36-24}}{4}=\frac{6\pm\sqrt{12}}{4}=\frac{6\pm2\sqrt{3}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}$$
(2) 양변에 10을 곱하면 $10x^2+5x-1=0$
근의 공식에 $a=10$, $b=5$, $c=-1$을 대입하면
$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times10\times(-1)}}{2\times10}=\frac{-5\pm\sqrt{25+40}}{20}=\frac{-5\pm\sqrt{65}}{20}$$

답》 (1) $x=\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}$ (2) $x=\frac{-5\pm\sqrt{65}}{20}$

문제 6 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{6}=0$ (2) $0.3x^2+0.2x=0.5$

의사소통

문제 7 이차방정식 $2x^2+5x-3=0$을 다양한 방법으로 풀고, 그 풀이 방법을 설명하여라.

4 근의 공식은 지금까지 배운 이차방정식의 풀이법 이외에 모든 이차방정식의 풀이에 적용할 수 있는 것임을 알게 한다.

수준별 교수·학습 방법

근의 공식을 이용하여 이차방정식을 풀 수 있다.

하 근의 공식을 유도하는 과정에 초점을 두기보다는 근의 공식을 이용하여 계수가 간단한 이차방정식의 근을 구하도록 하는데 중점을 둔다.

상 계수가 문자인 이차방정식에서 완전제곱식을 이용하여 근의 공식을 유도하게 하고, 근의 공식에서 중근을 갖는 경우와 두 근을 갖는 경우를 발견하도록 지도한다.

연구 자료

이차방정식의 판별식

$D=b^2-4ac$라 하면 $ax^2+bx+c=0\,(a\ne0)$의 두 근은 근의 공식에 의하여 $x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$이다. 여기서 $D\ge0$이면 실근, $D<0$이면 허근을 갖는다.

4/4차시 차시별 학습 지도 방법

본문, 함께 풀기 4	계수가 분수나 소수인 경우 계수를 간단히 만들기 위한 발문을 통하여 학생들이 양변에 곱할 적당한 수를 찾도록 유도한다.
문제 7	수학적 의사소통을 활성화시키는 문제이므로 자신의 풀이를 설명할 수 있도록 지도하고, 이차방정식의 다양한 풀이 방법을 알게 한다.

5 계수가 분수나 소수인 이차방정식은 양변에 적당한 수를 곱하여 계수를 정수로 만든 다음 인수분해나 근의 공식을 이용하여 해를 구할 수 있도록 지도한다.

Ⅱ

문제 6 **계수가 분수나 소수인 이차방정식의 풀이**

풀이 (1) $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{6}=0$의 양변에 6를 곱하면

$3x^2+2x-1=0$

좌변을 인수분해하면 $(x+1)(3x-1)=0$

따라서 $x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{3}$이다.

(2) $0.3x^2+0.2x=0.5$의 양변에 10을 곱하면

$3x^2+2x=5$

5를 좌변으로 이항하면 $3x^2+2x-5=0$

좌변을 인수분해하면 $(3x+5)(x-1)=0$

따라서 $x=-\frac{5}{3}$ 또는 $x=1$이다.

문제 7 **다양한 방법의 이차방정식의 풀이**

지도상의 유의점 인수분해나 완전제곱식, 근의 공식을 이용하여 구한 근이 모두 같음을 학생들 스스로 확인할 수 있도록 지도한다.

풀이 **[방법 1]** 인수분해를 이용한 풀이

$2x^2+5x-3=0$의 좌변을 인수분해하면

$(x+3)(2x-1)=0$

따라서 $x=-3$ 또는 $x=\frac{1}{2}$이다.

[방법 2] 완전제곱식을 이용한 풀이

$2x^2+5x-3=0$에서 -3을 우변으로 이항하면

$2x^2+5x=3$

양변을 2로 나누면 $x^2+\frac{5}{2}x=\frac{3}{2}$

양변에 $\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$를 더하면

$x^2+\frac{5}{2}x+\frac{25}{16}=\frac{3}{2}+\frac{25}{16}$

$\left(x+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{49}{16}$, $x+\frac{5}{4}=\pm\frac{7}{4}$

$x=-\frac{5}{4}\pm\frac{7}{4}$

따라서 $x=-3$ 또는 $x=\frac{1}{2}$이다.

[방법 3] 근의 공식을 이용한 풀이

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times2\times(-3)}}{4}$$

$$=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{4}=\frac{-5\pm\sqrt{49}}{4}$$

$$=\frac{-5\pm7}{4}$$

따라서 $x=-3$ 또는 $x=\frac{1}{2}$이다.

93쪽

확인하기

1 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $x^2-8=0$　(2) $x^2-16x+64=0$

(3) $(x-2)^2=6$　(4) $3(x-4)^2-24=0$

2 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $x^2+4x-3=0$　(2) $x^2+5x+3=0$

(3) $2x^2-7x+2=0$　(4) $3x^2-5x+1=0$

3 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x-3=0$　(2) $\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{5}=0$

(3) $0.1x^2-0.1x-2=0$　(4) $0.7x^2+x+0.2=0$

수학적 과정 의사소통 | 추론 | 문제 해결

4 다음은 고대 바빌로니아의 이차방정식과 관련된 문제와 그 풀이이다.

> 문제: 정사각형의 넓이에서 한 변의 길이를 뺀 값이 870일 때, 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라.
>
> 풀이: 1의 반은 0.5이고, 이것을 제곱하면 0.25이다. 이것을 870에 더하면 870.25가 되는데, 이것은 29.5의 제곱과 같다. 이제 29.5에 0.5를 더하면 30이고, 이것이 정사각형의 한 변의 길이이다.

정사각형의 한 변의 길이를 x라 할 때, 주어진 문제는 이차방정식 $x^2-x=870$으로 표현된다. 고대 바빌로니아 사람들의 풀이 방법을 근의 공식을 이용한 풀이와 비교하여 설명하여라.

2. 이차방정식 93

창의 · 인성 자신의 풀이를 다른 사람에게 설명함으로써 수학적 의사소통을 활성화시키고, 수학 지식을 활용하여 합리적인 의사 결정을 할 수 있는 능력을 기르게 한다.

수준별 교수 · 학습 방법

계수가 분수나 소수인 경우의 이차방정식을 근의 공식을 이용하여 풀 수 있다.

상 문제 7과 같이 주어진 이차방정식에 대하여 인수분해에 의한 풀이, 완전제곱식을 이용한 풀이, 근의 공식을 이용한 풀이를 적용해 보고 어떤 방법을 이용하는 것이 보다 편리한 지에 관해 이야기해 보도록 지도한다.

확인하기

1 **평가의 주안점** 제곱근을 이용하여 이차방정식을 풀 수 있다.

풀이 (1) -8을 우변으로 이항하면 $x^2=8$이므로

$x=\pm\sqrt{8}=\pm 2\sqrt{2}$이다.

(2) $x^2-16x+64=0$의 좌변을 인수분해하면

$(x-8)^2=0$이므로

$x=8$ (중근)이다.

(3) $x-2=\pm\sqrt{6}$이므로 $x=2\pm\sqrt{6}$이다.

(4) $3(x-4)^2-24=0$에서 -24를 우변으로 이항하면

$3(x-4)^2=24$

3으로 양변을 나누면 $(x-4)^2=8$

$x-4=\pm 2\sqrt{2}$

따라서 $x=4\pm 2\sqrt{2}$이다.

2 **평가의 주안점** 근의 공식을 이용하여 이차방정식을 풀 수 있다.

풀이 (1) 근의 공식을 이용하여 풀면 다음과 같다.

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16+12}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{28}}{4}$$
$$=\frac{-4\pm 2\sqrt{7}}{2}=-2\pm\sqrt{7}$$

(2) 근의 공식을 이용하여 풀면 다음과 같다.

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-12}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$$

(3) 근의 공식을 이용하여 풀면 다음과 같다.

$$x=\frac{7\pm\sqrt{49-16}}{4}=\frac{7\pm\sqrt{33}}{4}$$

(4) 근의 공식을 이용하여 풀면 다음과 같다.

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-12}}{6}=\frac{5\pm\sqrt{13}}{6}$$

3 **평가의 주안점** 계수가 분수나 소수인 이차방정식을 풀 수 있다.

풀이 (1) $\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x-3=0$의 양변에 2를 곱하면

$x^2-5x-6=0$

$(x+1)(x-6)=0$

따라서 $x=-1$ 또는 $x=6$이다.

(2) $\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{5}=0$의 양변에 10을 곱하면

$5x^2+10x+2=0$

근의 공식을 이용하여 근을 구하면

$$x=\frac{-10\pm\sqrt{100-40}}{10}$$
$$=\frac{-10\pm\sqrt{60}}{10}=\frac{-10\pm 2\sqrt{15}}{10}$$
$$=\frac{-5\pm\sqrt{15}}{5}$$

이다.

(3) $0.1x^2-0.1x-2=0$에서 양변에 10을 곱하면

$x^2-x-20=0$

$(x+4)(x-5)=0$

따라서 $x=-4$ 또는 $x=5$이다.

(4) $0.7x^2+x+0.2=0$의 양변에 10을 곱하면

$7x^2+10x+2=0$이고

근의 공식을 이용하여 근을 구하면

$$x=\frac{-10\pm\sqrt{100-56}}{14}$$
$$=\frac{-10\pm\sqrt{44}}{14}$$
$$=\frac{-10\pm 2\sqrt{11}}{14}$$
$$=\frac{-5\pm\sqrt{11}}{7}$$

이다.

4 **평가의 주안점** 고대 바빌로니아 사람들의 풀이 방법을 추론할 수 있다.

풀이 바빌로니아 사람들의 풀이를 식으로 나타내면

$(0.5)^2+870=(29.5)^2$

$29.5+0.5=30$

그런데 근의 공식으로 $x^2-x=870$을 풀어 보면

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+3480}}{2} \quad \cdots\cdots ①$$
$$=\frac{1\pm\sqrt{3481}}{2}$$
$$=\frac{1\pm 59}{2}$$

이므로 $x=-29$ 또는 $x=30$

$x>0$이므로 $x=30$

①의 식에서

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+3480}}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3480}{4}}$$
$$=0.5\pm\sqrt{(0.5)^2+870}$$
$$=0.5\pm\sqrt{(29.5)^2}$$
$$=0.5\pm 29.5$$

이므로 $x=-29$ 또는 $x=30$

$x>0$이므로 $x=30$

바빌로니아 사람들이 구한 방법이 결국 현재의 근의 공식과 동일한 것임을 확인할 수 있다.

03 이차방정식의 활용

지도 목표

1. 이차방정식을 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있도록 한다.

지도상의 유의점

1. 이차방정식을 활용한 문제에서는 이차방정식을 풀어서 구한 해가 문제의 뜻에 맞는지 확인할 필요가 있음에 유의하도록 지도한다.
2. 활용 문제를 풀 때에는 먼저 문제를 잘 읽어 문제의 뜻을 잘 파악하여야 함을 강조한다. 문제에 적합한 해결 전략을 세우도록 하고, 답 자체에 관심을 가지게 하기보다는 풀이 과정에 관심을 가지도록 하여 학생들의 문제 해결력을 신장시킬 수 있도록 지도한다.
3. 문제를 풀기 위하여 방정식을 세울 때에는 수량의 단위에 유의하게 하고, 답을 쓸 때에는 단위를 붙여 쓰도록 지도한다.

1/2차시 차시별 지도 방법

생각 열기	포토 앨범의 크기를 바꾸는 상황에서 이차방정식을 활용하여 문제를 해결할 수 있음을 생각해 볼 수 있도록 한다.
본문, 함께 풀기 1	이차방정식을 활용하여 문제를 푸는 순서를 제시하고, 구체적인 문제 상황에 이를 적용하여 문제를 해결하는 과정을 설명한다.
문제 1	스스로 문제를 풀어 보고 친구들과 비교해 보게 한다.

이차방정식을 활용하여 여러 가지 문제를 어떻게 풀 수 있을까?

생각 열기 포토 앨범의 가로와 세로의 길이를 문자 x를 사용하여 나타낸 다음 넓이를 이용하여 이차방정식을 세울 수 있음을 알게 하려는 생각 열기이다.

(1) 가로의 길이는 세로의 길이보다 2cm가 길다고 하였으므로 가로의 길이는 $(x+2)$cm이다.

(2) $x(x+2)=24$

94쪽

03 이차방정식의 활용

○ 학습 목표 이차방정식을 활용하여 여러 가지 실생활 문제를 풀 수 있다.

공중으로 던진 공이 땅에 떨어질 때까지 걸린 시간을 구하거나 둘레의 길이와 넓이가 주어진 직사각형의 한 변의 길이를 구하는 등의 실생활 문제는 이차방정식을 활용하여 해결할 수 있다.

1/2차시 **이차방정식을 활용하여 여러 가지 문제를 어떻게 풀 수 있을까?**

1 생각 열기 재우는 컴퓨터 프로그램을 이용하여 포토 앨범을 만들려고 한다. 이때 사진 한 장의 가로의 길이는 세로의 길이보다 2cm 길고, 넓이가 24cm^2가 되도록 하려고 한다.

(1) 사진 한 장의 세로의 길이를 $x$cm라 할 때, 가로의 길이를 x에 대한 식으로 나타내어 보자.

(2) 넓이가 24cm^2임을 이용하여 이차방정식을 세워 보자.

이차방정식을 활용하여 문제를 해결할 때에는 구하고자 하는 것을 미지수로 놓고 이차방정식으로 나타낸 다음 그 식을 풀고 문제의 뜻에 맞는 해를 구한다.

2 생각 열기에서 주어진 문제를 다음과 같은 순서로 풀어 보자.

이해 문제의 뜻 이해하기	문제의 뜻을 이해하고 구하고자 하는 것을 x로 놓는다.	세로의 길이를 $x$cm라 하자.
계획 방정식 세우기	문제의 뜻에 맞게 방정식을 세운다.	가로의 길이는 $(x+2)$cm이고, 넓이가 24cm^2이므로 $x(x+2)=24$
실행 방정식 풀기	방정식을 푼다.	$x^2+2x-24=0$, $(x-4)(x+6)=0$ $x=4$ 또는 $x=-6$ $x>0$이므로 $x=4$ 따라서 사진의 세로의 길이는 4cm이다.
확인 확인하기	구한 해가 문제의 뜻에 맞는지 확인한다.	세로의 길이는 4cm, 가로의 길이는 6cm이므로 넓이는 24cm^2이다.

1 여러 가지 문제 상황을 이차방정식으로 표현하여 해결할 수 있도록 지도한다. 문제 상황에 맞도록 미지수를 정하고, 수량 사이의 관계를 이용하여 이차방정식을 세우고 이를 해결할 수 있도록 지도한다.

2 이차방정식을 활용하여 문제를 풀 때에는 순서를 이해하고 문제를 풀 수 있도록 지도한다.

Polya의 문제 해결 과정을 적용한 이차방정식의 풀이

Polya의 문제 해결 4단계		이차방정식의 풀이
이해	문제의 뜻 파악	문제의 뜻을 이해하고, 구하고자 하는 것을 x로 놓는다.
계획	문제 풀이 전략 구상	방정식을 세운다.
실행	전략을 실행	방정식을 푼다.
반성	풀이 과정이나 결과를 확인, 반성	구한 해가 문제의 뜻에 맞는지 확인한다.

95쪽

일반적으로 이차방정식의 활용 문제는 다음과 같은 순서로 푼다.

이차방정식을 활용하여 문제를 푸는 순서

❶ 문제의 뜻을 이해하고 구하고자 하는 것을 미지수 x로 놓는다.
❷ 이차방정식을 세운다.
❸ 이차방정식을 푼다.
❹ 구한 해가 문제의 뜻에 맞는지 확인한다.

함께 풀기 1 연속하는 세 자연수의 제곱의 합이 302일 때, 세 자연수를 구하여라.

풀이》 이해 연속하는 세 자연수를 $x-1$, x, $x+1(x\geq 2)$이라 하면

계획 세 자연수의 제곱의 합이 302이므로

$$(x-1)^2+x^2+(x+1)^2=302$$

실행 $x^2-2x+1+x^2+x^2+2x+1-302=0$에서

$$3x^2-300=0,\ x^2-100=0$$

이차방정식을 풀면 $(x+10)(x-10)=0$

$$x=-10 \text{ 또는 } x=10$$

$x\geq 2$이므로 $x=10$

따라서 연속하는 세 자연수는 9, 10, 11이다.

확인 9, 10, 11을 제곱하여 더하면 $9^2+10^2+11^2=81+100+121=302$이다.

답》 9, 10, 11

문제 1 차가 6이고, 곱이 187이 되는 두 자연수를 구하여라.

2/2차시

함께 풀기 2 공중으로 던진 농구공의 t초 후 공의 높이가 $(-5t^2+9t+2)$m라 할 때, 농구공이 땅에 떨어지는 것은 몇 초 후인지 구하여라.

풀이》 이해 농구공이 땅에 떨어졌을 때의 높이는 0이므로

계획 $-5t^2+9t+2=0$

실행 이 식을 정리하면 $5t^2-9t-2=0$

$(5t+1)(t-2)=0$, $t=-\dfrac{1}{5}$ 또는 $t=2$

이때 $t>0$이므로 $t=2$이다.

따라서 농구공이 땅에 떨어지는 것은 2초 후이다.

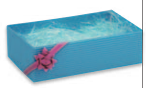
확인 $t=2$를 $-5t^2+9t+2$에 대입하면 0이 되므로 농구공이 땅에 떨어지는 것은 2초 후이다.

답》 2초 후

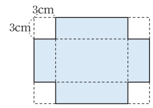
2. 이차방정식 95

96쪽

문제 2 태원이가 친 야구공의 t초 후의 높이를 $(-5t^2+20t+1)$m라 하자. 공이 처음으로 지상으로부터 높이가 16m인 지점을 지날 때는 공을 친 다음 몇 초 후인지 구하여라.



함께 풀기 3 오른쪽 그림과 같이 가로의 길이가 세로의 길이보다 4cm 더 긴 직사각형 모양의 종이가 있다. 이 종이의 네 귀퉁이에서 한 변의 길이가 3cm인 정사각형 모양을 잘라서 부피가 180cm³인 선물 상자를 만들려고 한다. 처음 직사각형의 세로의 길이를 구하여라.



풀이》 이해 처음 직사각형의 세로의 길이를 $x$cm라 하면 가로의 길이는 $(x+4)$cm이므로 선물 상자의 밑면의 세로의 길이는 $(x-6)$cm, 가로의 길이는 $(x-2)$cm이다.

계획 선물 상자의 부피가 180cm³이므로

$$3(x-6)(x-2)=180$$

실행 $(x-6)(x-2)=60$에서

$$x^2-8x-48=0,\ (x+4)(x-12)=0$$

$x=-4$ 또는 $x=12$

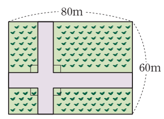
그런데 $x>6$이므로 $x=12$이다.

따라서 처음 직사각형의 세로의 길이는 12cm이다.

확인 처음 직사각형의 세로의 길이가 12cm이면 선물 상자의 부피는 $3\times 6\times 10=180(\text{cm}^3)$이다.

답》 12cm

문제 3 오른쪽 그림과 같이 가로의 길이와 세로의 길이가 각각 80m, 60m인 직사각형 모양의 잔디 광장에 폭이 일정한 보행 도로를 만들었다. 보행 도로를 제외한 잔디 광장의 넓이가 4256m²일 때, 보행 도로의 폭을 구하여라.



문제 4 오른쪽 그림은 2023년 9월의 달력이다. 아래, 위로 이웃하는 두 수를 각각 제곱하여 합한 값이 445가 될 때, 두 자연수를 구하여라.

96 Ⅱ. 인수분해와 이차방정식

문제 1 이차방정식의 간단한 활용 문제 풀기

풀이 이해 차가 6인 두 자연수를 x, $x+6$이라 하면

계획 두 자연수의 곱이 187이므로 $x(x+6)=187$

실행 $x^2+6x=187$에서 $x^2+6x-187=0$

이차방정식을 풀면 $(x+17)(x-11)=0$이므로

$x=-17$ 또는 $x=11$

$x>0$이므로 $x=11$

따라서 차가 6이고, 곱이 187인 두 자연수는 11, 17이다.

확인 두 수 11, 17의 차는 6이고, 두 수를 곱하면 187이 된다.

수준별 교수·학습 방법

이차방정식의 활용 문제를 풀 수 있다.

하	문장제로 주어진 이차방정식 문제를 이해하는 것은 쉽지 않으므로 쉬운 예로 문제 해결 단계를 차근차근 익히도록 한다.
상	이차방정식과 관련된 문제에 대하여 학생들 스스로 식을 세워 풀 수 있도록 지도한다. 이차방정식이 활용되는 경우를 학생들이 조사하여 방정식을 세우고 풀이 방법을 토론하도록 하며, 이를 발표하도록 한다.

2/2차시 차시별 학습 지도 방법

함께 풀기 2, 3	이차방정식을 활용하여 다양한 실생활 문제를 해결할 수 있음을 알게 한다.
문제 2, 3, 4	실생활 상황을 나타내는 문제를 통하여 이차방정식의 유용성과 수학의 가치를 알 수 있도록 지도한다.

문제 2 이차방정식의 활용 문제 풀기

풀이 이해 높이가 16m인 지점을 야구공이 지나므로

계획 $-5t^2+20t+1=16$

실행 $-5t^2+20t-15=0$에서 양변을 -5로 나누면

$t^2-4t+3=0$

$(t-1)(t-3)=0$이므로 $t=1$ 또는 $t=3$

따라서 처음으로 높이가 16m인 지점을 지날 때는 공을 친 다음 1초 후이다.

확인 $t=1$을 $-5t^2+20t+1$에 대입하면 16이 되므로 높이가 16m인 지점을 지날 때는 공을 친 다음 1초 후이다.

Ⅱ

문제 3 이차방정식의 활용 문제 풀기

풀이 **이해** 보행 도로의 폭을 xm라 하면 보행 도로를 제외한 잔디 광장의 가로의 길이는 $(80-x)$m, 세로의 길이는 $(60-x)$m이다.

계획 보행 도로를 제외한 잔디 광장의 넓이가 4256m^2이므로
$(80-x)(60-x)=4256$

실행 $x^2-140x+4800=4256$에서 $x^2-140x+544=0$
$(x-4)(x-136)=0$, $x=4$ 또는 $x=136$
$0<x<60$이므로 $x=4$
따라서 보행 도로의 폭은 4m이다.

확인 보행 도로의 폭이 4m이면 보행 도로를 제외한 잔디 광장의 넓이는 $76\times56=4256(\text{m}^2)$이다.

문제 4 이차방정식의 활용 문제 풀기

풀이 **이해** 달력에서 아래, 위로 이웃한 수는 그 차가 7이므로 위의 수를 x, 아래의 수를 $x+7$이라 하자.

계획 두 수를 각각 제곱하여 합한 값이 445이므로
$x^2+(x+7)^2=445$

실행 $2x^2+14x+49=445$에서 $2x^2+14x-396=0$
$x^2+7x-198=0$, $(x+18)(x-11)=0$
$x=-18$ 또는 $x=11$
$x>0$이므로 $x=11$
따라서 달력에서 위의 수는 11이고, 아래의 수는 18이다.

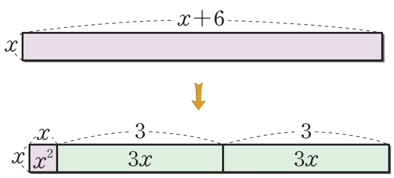
확인 11과 18은 달력에서 아래 위로 이웃한 수이고, 각 수를 각각 제곱하여 합한 값은 445이다.

즐거운 활동하기

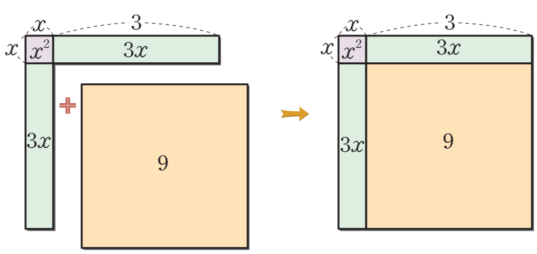
도형을 이용하여 이차방정식 풀기

지도상의 유의점 알콰리즈미의 이차방정식의 풀이를 통하여 이차방정식의 다양한 풀이 방법에 호기심을 가지게 한다.

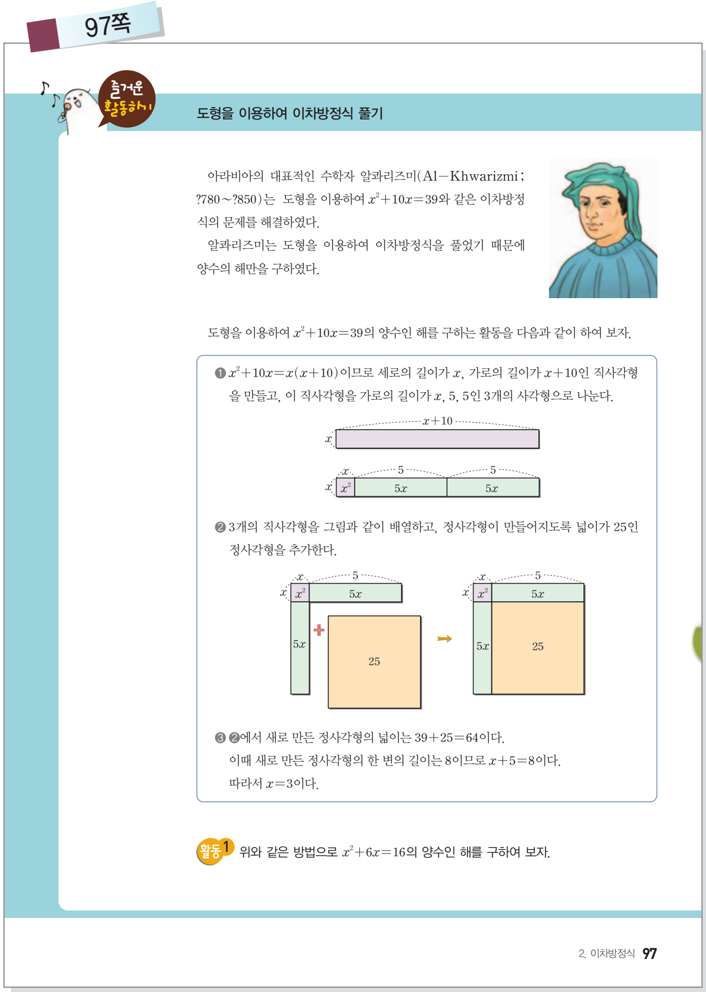
활동 1 ❶



❷



97쪽


즐거운 활동하기

도형을 이용하여 이차방정식 풀기

아라비아의 대표적인 수학자 알콰리즈미(Al−Khwarizmi ; ?780~?850)는 도형을 이용하여 $x^2+10x=39$와 같은 이차방정식의 문제를 해결하였다.

알콰리즈미는 도형을 이용하여 이차방정식을 풀었기 때문에 양수의 해만을 구하였다.

도형을 이용하여 $x^2+10x=39$의 양수인 해를 구하는 활동을 다음과 같이 하여 보자.

❶ $x^2+10x=x(x+10)$이므로 세로의 길이가 x, 가로의 길이가 $x+10$인 직사각형을 만들고, 이 직사각형을 가로의 길이가 x, 5, 5인 3개의 사각형으로 나눈다.

❷ 3개의 직사각형을 그림과 같이 배열하고, 정사각형이 만들어지도록 넓이가 25인 정사각형을 추가한다.

❸ ❷에서 새로 만든 정사각형의 넓이는 $39+25=64$이다.
이때 새로 만든 정사각형의 한 변의 길이는 8이므로 $x+5=8$이다.
따라서 $x=3$이다.

활동 1 위와 같은 방법으로 $x^2+6x=16$의 양수인 해를 구하여 보자.

2. 이차방정식 97

❸ 새로 만든 정사각형의 넓이는 $16+9=25$이므로 한 변의 길이는 $x+3=5$이다.
따라서 $x=2$이다.

창의 · 인성 수학적 지식을 적절하게 활용하는 능력을 키우고, 호기심과 끈기를 가지고 해결할 수 있는 능력을 기르게 한다.

수준별 교수 · 학습 방법

이차방정식의 활용 문제를 풀 수 있다.

하 간단하게 식을 세우고 해결할 수 있는 이차방정식의 활용 문제를 충분히 제시하고, 해결하는 순서를 익히도록 지도한다.

상 실생활과 관련된 문제를 다양하게 제시하여 이차방정식을 통해 해결할 수 있도록 하고, 학생들이 실생활과 관련된 문제를 직접 찾아보게 하고, 이를 해결하면서 이차방정식의 활용 문제 해결 능력을 높이도록 지도한다.

98쪽

확인하기

1 자매인 은경이와 은주는 3살 터울이다. 두 사람의 나이를 곱했더니 180이 되었다. 동생인 은경이의 나이를 구하여라.

2 진영이는 농구를 좋아하여 학교에 있는 농구 코트를 자주 이용한다. 진영이가 다니는 학교에 있는 농구 코트의 가로의 길이는 세로의 길이의 2배보다 2m가 짧고, 넓이가 420m^2라 할 때, 농구 코트의 가로의 길이와 세로의 길이를 구하여라.

3 연속하는 두 자연수의 제곱의 합이 365일 때, 두 자연수를 구하여라.

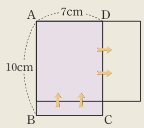
4 소방 호스로부터 나온 물의 t초 후의 지상으로부터의 높이를 $(-5t^2+30t+2)$m라 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 소방 호스로부터 나온 물의 1초 후의 지상으로부터의 높이를 구하여라.

(2) 물이 47m의 높이에 도달할 때까지 걸리는 시간을 구하여라.

수학적 과정 | 의사소통 | 추론 | 문제 해결

5 오른쪽 그림과 같이 가로의 길이와 세로의 길이가 각각 7cm, 10cm인 직사각형 ABCD가 있다. 가로의 길이는 매초 2cm씩 늘어나고 세로의 길이는 매초 1cm씩 줄어들 때, 이 직사각형의 넓이가 몇 초 후에 처음 직사각형 ABCD의 넓이와 같아지는지 구하여라.



98 Ⅱ. 인수분해와 이차방정식

확인하기

1 **평가의 주안점** 이차방정식을 활용하여 실생활 문제를 풀 수 있다.

풀이 동생인 은경이의 나이를 x살이라 하면 은경이와 은주는 3살 터울이므로 은주의 나이는 $(x+3)$살이다.
이때 두 나이의 곱이 180이므로
$x(x+3)=180$
$x^2+3x-180=0$, $(x+15)(x-12)=0$
$x=-15$ 또는 $x=12$
$x>0$이므로 $x=12$
따라서 은경이의 나이는 12살이다.

2 **평가의 주안점** 이차방정식을 활용하여 실생활 문제를 풀 수 있다.

풀이 농구 코트의 세로의 길이를 xm라 하면, 가로의 길이는 $(2x-2)$m가 된다.
농구 코트의 넓이가 420m^2이므로 $x(2x-2)=420$
$2x^2-2x=420$
$x^2-x-210=0$
$(x+14)(x-15)=0$
$x=-14$ 또는 $x=15$
$x>0$이므로 $x=15$
따라서 농구 코트의 세로의 길이는 15m, 가로의 길이는 28m이다.

3 **평가의 주안점** 이차방정식을 활용하여 수에 대한 문제를 풀 수 있다.

풀이 연속하는 두 자연수를 x, $x+1$이라 하면
두 자연수의 제곱의 합이 365이므로
$x^2+(x+1)^2=365$
$2x^2+2x-364=0$, $x^2+x-182=0$
$(x+14)(x-13)=0$
$x=-14$ 또는 $x=13$
$x>0$이므로 $x=13$
따라서 연속하는 두 자연수는 13, 14이다.

4 **평가의 주안점** 이차방정식을 활용하여 실생활 문제를 풀 수 있다.

풀이 (1) 발사한지 1초 후 물줄기의 높이는
$-5t^2+30t+2=-5+30+2=27$(m)이다.
(2) 물줄기가 47m 높이에 있으므로
$-5t^2+30t+2=47$
$5t^2-30t+45=0$, $t^2-6t+9=0$, $(t-3)^2=0$
$t=3$
따라서 물이 47m의 높이에 도달할 때까지 걸린 시간은 3초이다.

5 **평가의 주안점** 이차방정식을 활용하여 직사각형의 넓이에 대한 문제를 풀 수 있다.

풀이 t초 후의 직사각형의 가로의 길이는 $(7+2t)$cm, 세로의 길이는 $(10-t)$cm이다.
t초 후의 직사각형의 넓이가 처음 직사각형이 넓이와 같으므로 $(7+2t)(10-t)=70$
$70+13t-2t^2=70$, $2t^2-13t=0$, $t(2t-13)=0$
$t=0$ 또는 $t=\frac{13}{2}$
$t>0$이므로 $t=\frac{13}{2}$
그러므로 $\frac{13}{2}$초 후에 직사각형은 처음 직사각형 ABCD와 넓이가 같아진다.

중단원 마무리하기

스스로 정리하기

1. (1) 이차방정식　　(2) 해, 근
   (3) 중근　　(4) $-a$, $-b$
   (5) b^2-4ac, $2a$

기초 다지기

1 평가의 주안점 이차방정식의 뜻을 알 수 있다.

풀이 ㄱ. $3x^2-15=0$이므로 이차방정식이다.

ㄴ. 좌변을 전개하면 $x^2-2x=x^2+5x$에서 $7x=0$
따라서 이차방정식이 아니다.

ㄷ. 주어진 식의 좌변과 우변을 전개하면
$x^2-x-2=2x^2-3x+1$
$x^2-2x+3=0$
따라서 이차방정식이다.

ㄹ. 주어진 식의 좌변을 전개하면
$3x^2-12x+12=4x^2-x+1$
$x^2+11x-11=0$
따라서 이차방정식이다.

그러므로 이차방정식은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

2 평가의 주안점 이차방정식의 해를 구할 수 있다.

풀이 이차방정식의 해를 구하면

(1) $x=1$ 또는 $x=4$　　(2) $x=-1$ 또는 $x=3$
(3) $x=-5$ 또는 $x=2$　　(4) $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

따라서 이차방정식과 그 해를 연결하면 다음과 같다.

(1) ㉣　　(2) ㉡
(3) ㉠　　(4) ㉢

3 평가의 주안점 중근의 의미를 알 수 있다.

풀이 이차방정식의 해를 구하면

(1) $x=-3$ 또는 $x=3$
(2) $x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=\frac{3}{2}$
(3) $x=-6$ (중근)
(4) $(x+5)^2=5$에서 $x+5=\pm\sqrt{5}$이므로
$x=-5\pm\sqrt{5}$이다.

따라서 중근을 가지는 것은 (3)이다.

99쪽

중단원 마무리하기

스스로 정리하기

1. 다음 $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣어라.
   (1) $ax^2+bx+c=0(a, b, c$는 상수, $a\neq0)$의 꼴로 나타내어지는 방정식을 x에 대한 $\square$이라고 한다.
   (2) 이차방정식을 참이 되게 하는 x의 값을 이 이차방정식의 $\square$ 또는 $\square$이라고 한다.
   (3) 이차방정식의 두 해가 중복되어 서로 같을 때, 이 해를 주어진 이차방정식의 $\square$이라고 한다.
   (4) 이차방정식 $(x+a)(x+b)=0$의 해는 $x=\square$ 또는 $x=\square$이다.
   (5) 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 근의 공식을 이용하여 해를 구하면
   $x=\frac{-b\pm\sqrt{\square}}{\square}$ (단, $b^2-4ac\geq0$)이다.

기초 다지기

1 다음 중에서 이차방정식을 모두 찾아라.　이차방정식의 뜻

ㄱ. $3x^2=15$	ㄴ. $x(x-2)=x^2+5x$
ㄷ. $(x-2)(x+1)=(2x-1)(x-1)$	ㄹ. $3(x-2)^2=4x^2-x+1$

2 이차방정식과 그 해를 바르게 연결하여라.　이차방정식의 해

(1) $(x-1)(x-4)=0$ •　　• ㉠ $x=-5$ 또는 $x=2$
(2) $(x+1)(x-3)=0$ •　　• ㉡ $x=-1$ 또는 $x=3$
(3) $(x+5)(x-2)=0$ •　　• ㉢ $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$
(4) $\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)=0$ •　　• ㉣ $x=1$ 또는 $x=4$

3 다음 이차방정식 중에서 중근을 가지는 것을 찾아라.　중근

(1) $(x+3)(x-3)=0$　　(2) $(3x-2)(2x-3)=0$
(3) $(x+6)^2=0$　　(4) $(x+5)^2=5$

2. 이차방정식 99

기본 익히기

4 평가의 주안점 인수분해를 이용하여 이차방정식을 풀 수 있다.

풀이 (1) $x^2+7x+10=0$의 좌변을 인수분해하면
$(x+5)(x+2)=0$이므로
$x=-5$ 또는 $x=-2$이다.

(2) $(x-2)(x+2)=3x$에서
$x^2-3x-4=0$
좌변을 인수분해하면
$(x+1)(x-4)=0$이므로
$x=-1$ 또는 $x=4$이다.

(3) $9x^2+42x+49=0$의 좌변을 인수분해하면
$(3x+7)^2=0$이므로
$x=-\frac{7}{3}$(중근)이다.

(4) $9x^2-3x-2=0$의 좌변을 인수분해하면
$(3x+1)(3x-2)=0$이므로
$x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}$이다.

100쪽

기본 익히기

4 다음 이차방정식을 인수분해를 이용하여 풀어라.

(1) $x^2+7x+10=0$　　(2) $(x-2)(x+2)=3x$

(3) $9x^2+42x+49=0$　　(4) $9x^2-3x-2=0$

인수분해를 이용한 이차방정식의 풀이

서술형

5 이차방정식 $x^2+ax+5a-1=0$의 한 근이 -2일 때, 상수 a의 값과 다른 한 근을 구하고, 그 과정을 서술하여라.

이차방정식의 풀이

6 다음 이차방정식을 근의 공식을 이용하여 풀어라.

(1) $x^2+x-1=0$　　(2) $3x^2+6x+2=0$

(3) $5x^2+5x+1=0$　　(4) $3x^2-4x-2=0$

근의 공식을 이용한 이차방정식의 풀이

7 다음은 이차방정식 $2x^2+4x-1=0$을 완전제곱식을 이용하여 해를 구한 것이다. A, B, C의 값을 구하여라.

-1을 우변으로 이항하면	$2x^2+4x=1$
양변을 2로 나누면	$x^2+2x=\frac{1}{2}$
	$(x+A)^2=B$
따라서 $x=-A\pm\frac{\sqrt{C}}{2}$이다.	

완전제곱식을 이용한 이차방정식의 풀이

8 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $0.1x^2-0.5x-1=0$　　(2) $\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{6}x-\frac{1}{3}=0$

(3) $(2x+3)(x-2)+4=0$　　(4) $(x-1)^2=2x^2+1$

이차방정식의 풀이

100 Ⅱ. 인수분해와 이차방정식

5 **평가의 주안점** 이차방정식의 해의 의미를 이해하고, 이차방정식을 풀 수 있다.

풀이 이차방정식 $x^2+ax+5a-1=0$의 한 근이 -2이므로 $x=-2$를 대입하면

$4-2a+5a-1=0$, $3a+3=0$, $a+1=0$

$a=-1$ …… ❶

이차방정식 $x^2+ax+5a-1=0$에 $a=-1$을 대입하면

$x^2-x-6=0$, $(x+2)(x-3)=0$

$x=-2$ 또는 $x=3$

따라서 다른 한 근은 $x=3$이다. …… ❷

단계	채점 기준	배점 비율
❶	a의 값을 구한다.	40%
❷	다른 한 근을 구한다.	60%

6 **평가의 주안점** 근의 공식을 이용하여 이차방정식을 풀 수 있다.

풀이 근의 공식을 이용하여 해를 구하면

(1) $x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

(2) $x=\frac{-6\pm\sqrt{36-24}}{6}=\frac{-6\pm\sqrt{12}}{6}=\frac{-3\pm\sqrt{3}}{3}$

(3) $x=\frac{-5\pm\sqrt{25-20}}{10}=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{10}$

(4) $x=\frac{4\pm\sqrt{16+24}}{6}=\frac{4\pm\sqrt{40}}{6}=\frac{2\pm\sqrt{10}}{3}$

7 **평가의 주안점** 완전제곱식을 이용하여 이차방정식을 풀 수 있다.

풀이 $2x^2+4x-1=0$에서

$2x^2+4x=1$, $x^2+2x=\frac{1}{2}$

$(x+1)^2=\frac{3}{2}$, $x+1=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

$x=-1\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

따라서 $A=1$, $B=\frac{3}{2}$, $C=6$이다.

8 **평가의 주안점** 계수가 분수나 소수인 이차방정식을 풀 수 있다.

풀이 (1) 양변에 10을 곱하면 $x^2-5x-10=0$에서

$x=\frac{5\pm\sqrt{25+40}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{65}}{2}$이다.

(2) 양변에 6을 곱하면 $3x^2-5x-2=0$에서

$(3x+1)(x-2)=0$이므로

$x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=2$이다.

(3) $(2x+3)(x-2)+4=0$의 좌변을 전개하면

$2x^2-x-6+4=0$, $2x^2-x-2=0$

따라서 $x=\frac{1\pm\sqrt{1+16}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}$이다.

(4) $(x-1)^2=2x^2+1$의 좌변을 전개하면

$x^2-2x+1=2x^2+1$, $x^2+2x=0$, $x(x+2)=0$

따라서 $x=0$ 또는 $x=-2$이다.

9 **평가의 주안점** 이차방정식을 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

풀이 $6+5+4=15$이므로 $x^2+5+(x-2)=15$

$x^2+x-12=0$

$(x+4)(x-3)=0$

이때 $x>0$이므로 $x=3$이다.

$x=3$을 이용하여 표를 채우면 다음과 같다.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Ⅱ

10 **평가의 주안점** 이차방정식을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있다.

풀이 회의에 참석한 회장의 수를 x명이라 하면 회장 모두가 서로 한 번씩 악수를 하는 횟수는 $\dfrac{x(x-1)}{2}$이다.

악수를 모두 55번 하였으므로

$\dfrac{x(x-1)}{2}=55$

$x^2-x-110=0$, $(x-11)(x+10)=0$

$x=11$ 또는 $x=-10$

$x>0$이므로 $x=11$

따라서 회의에 참석한 회장은 11명이다.

실력 기르기

11 **평가의 주안점** 이차방정식의 해의 의미를 이해할 수 있다.

풀이 $3x^2+2x-1=0$에서 $(x+1)(3x-1)=0$

즉, $x=-1$ 또는 $x=\dfrac{1}{3}$이다.

따라서 두 근 중 작은 근은 -1, 큰 근은 $\dfrac{1}{3}$이다.

이때 -1이 이차방정식 $x^2-(a+2)x+a+1=0$의 근이므로

$x=-1$을 대입하면

$1+(a+2)+a+1=0$

$2a+4=0$, $2a=-4$

즉, $a=-2$이다.

$\dfrac{1}{3}$이 이차방정식 $3x^2+(b-1)x-1=0$의 근이므로

$x=\dfrac{1}{3}$을 대입하면

$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}(b-1)-1=0$

$\dfrac{1}{3}b-1=0$, $\dfrac{1}{3}b=1$

즉, $b=3$이다.

따라서 $a+b=-2+3=1$이다.

12 **평가의 주안점** 이차방정식을 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

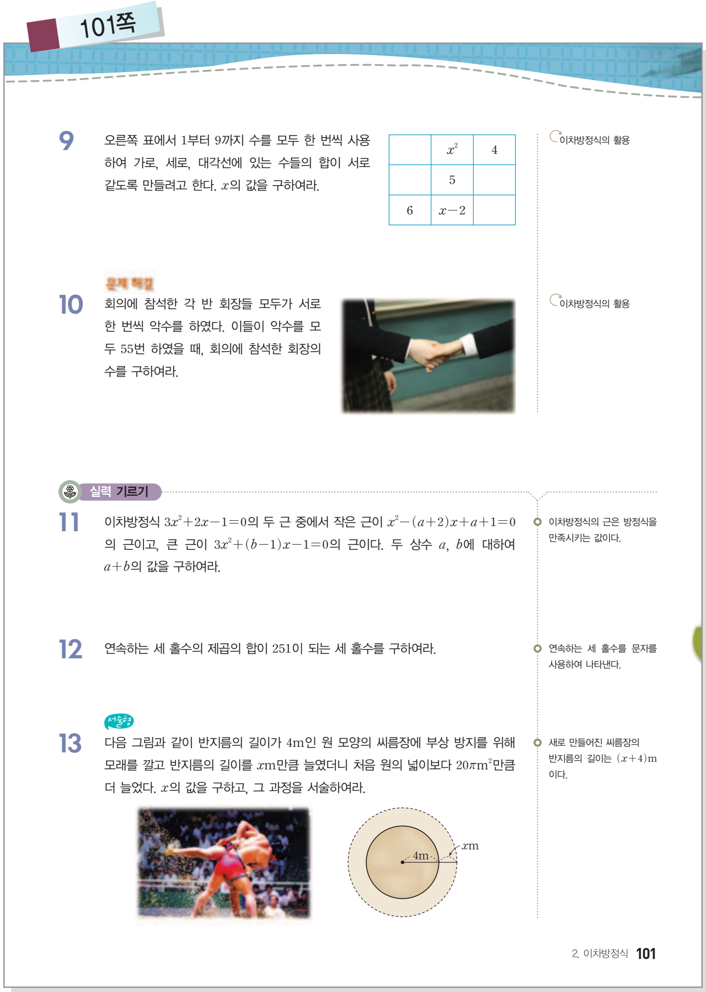
풀이 가운데 홀수를 x라 하면 연속하는 세 홀수는 $x-2$, x, $x+2$이다. 세 홀수의 제곱의 합이 251이므로

$(x-2)^2+x^2+(x+2)^2=251$

$3x^2=243$, $x^2=81$

$x=9$

따라서 연속하는 세 홀수는 7, 9, 11이다.


101쪽

9 오른쪽 표에서 1부터 9까지 수를 모두 한 번씩 사용하여 가로, 세로, 대각선에 있는 수들의 합이 서로 같도록 만들려고 한다. x의 값을 구하여라.

	x^2	4
	5	
6	$x-2$	

이차방정식의 활용

문제 해결

10 회의에 참석한 각 반 회장들 모두가 서로 한 번씩 악수를 하였다. 이들이 악수를 모두 55번 하였을 때, 회의에 참석한 회장의 수를 구하여라.

이차방정식의 활용

실력 기르기

11 이차방정식 $3x^2+2x-1=0$의 두 근 중에서 작은 근이 $x^2-(a+2)x+a+1=0$의 근이고, 큰 근이 $3x^2+(b-1)x-1=0$의 근이다. 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

이차방정식의 근은 방정식을 만족시키는 값이다.

12 연속하는 세 홀수의 제곱의 합이 251이 되는 세 홀수를 구하여라.

연속하는 세 홀수를 문자를 사용하여 나타낸다.

서술형

13 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 4m인 원 모양의 씨름장에 부상 방지를 위해 모래를 깔고 반지름의 길이를 xm만큼 늘였더니 처음 원의 넓이보다 $20\pi\text{m}^2$만큼 더 늘었다. x의 값을 구하고, 그 과정을 서술하여라.

새로 만들어진 씨름장의 반지름의 길이는 $(x+4)$m이다.

2. 이차방정식 101

13 **평가의 주안점** 이차방정식을 활용하여 도형의 넓이에 대한 문제를 해결할 수 있다.

풀이 반지름의 길이를 xm만큼 늘였으므로 반지름의 길이는 $(x+4)$m이고, 원의 넓이는

$\pi(x+4)^2\text{m}^2$

이다. …… ①

처음 원의 넓이는 $16\pi\text{m}^2$이고, 이 넓이보다 $20\pi\text{m}^2$만큼 늘었으므로 새로 만들어진 원의 넓이는 $36\pi\text{m}^2$이다.

따라서 조건에 따라 식을 세우면

$\pi(x+4)^2=36\pi$ …… ②

$(x+4)^2=36$

$x+4=\pm 6$

$x=-10$ 또는 $x=2$ …… ③

이때 $x>0$이므로 $x=2$이다. …… ④

단계	채점 기준	배점 비율
①	새로 만들어진 씨름장의 넓이를 x에 대한 식으로 나타낸다.	30%
②	이차방정식을 세운다.	30%
③	이차방정식의 해를 구한다.	30%
④	이차방정식의 조건에 맞는 x의 값을 구한다.	10%

창의·인성 키우기

개념 바루기

지도상의 유의점 이차방정식의 풀이를 도구적으로 학습함으로써 오류를 범하는 학생들에게 보다 관계적으로 이해하도록 지도한다.

주영이는 상수항을 우변으로 이항하지 않고 근의 공식을 잘못 사용하여 해를 구하였다.

올바른 풀이 $x^2-3x=1$에서 $x^2-3x-1=0$이므로

$$x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times(-1)}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{9+4}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$$

창의 · 인성 위의 문항 외에도 일어날 수 있는 또 다른 오류를 발표해 볼 수 있는 시간을 제공하여 서로의 경험을 공유할 수 있도록 한다.

문제 만들기

지도상의 유의점 문제 만들기 활동을 통해 수학적 사고력을 향상시킬 수 있도록 한다. 문제를 만들고 푸는 과정에서 학생에게 피드백을 제공하며 부족한 부분을 다시 확인할 수 있도록 지도한다.

풀이 모둠의 학생을 x명이라 하면 $x(x-2)=80$

$x^2-2x-80=0$, $(x-10)(x+8)=0$

$x=10$ 또는 $x=-8$

$x>0$이므로 $x=10$

따라서 학생은 모두 10명이다.

예시 문항 학생 회장인 정은이는 학교 축제를 위해 강당에 1인용 의자를 직사각형 모양으로 놓으려고 한다. 세로 줄의 개수가 가로 줄의 개수보다 10줄이 많고, 260명의 학생이 의자에 앉을 때, 의자가 4개 남았다고 한다. 의자의 가로 줄의 개수를 구하여라.

풀이 가로 줄을 x개라 하면 세로 줄은 $(x+10)$개이다. 학생 260명이 의자에 앉을 때 의자가 4개가 남았으므로 의자는 모두 264개이다.

$x(x+10)=264$에서 $x^2+10x-264=0$

$(x+22)(x-12)=0$, $x=-22$ 또는 $x=12$

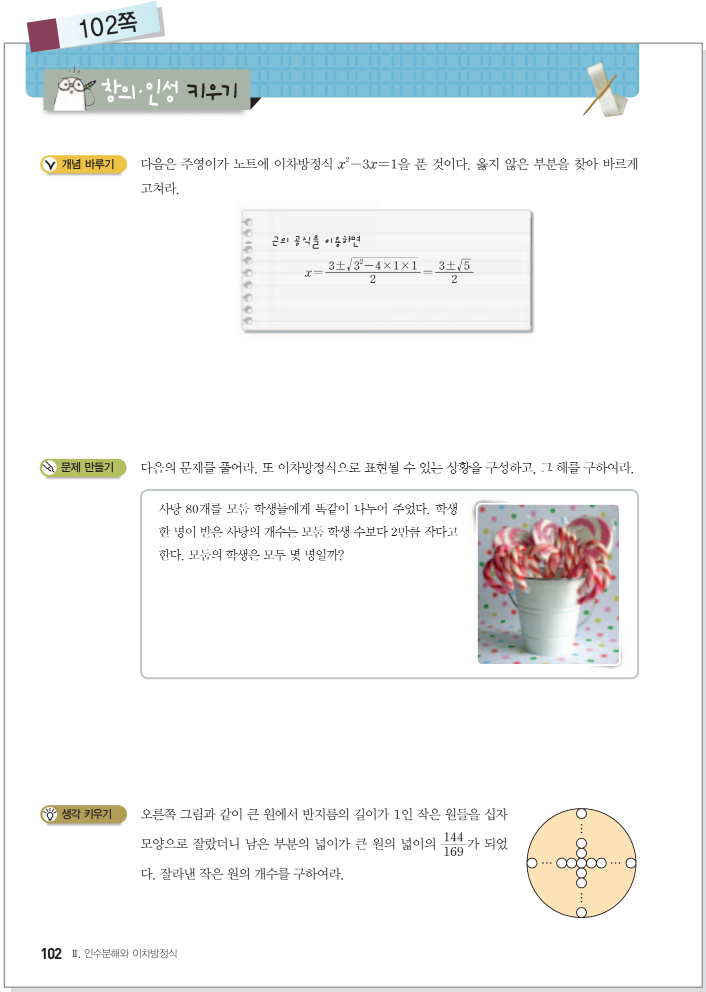
$x>0$이므로 $x=12$

그러므로 의자의 가로 줄은 12개이다.

창의 · 인성 다양한 소재를 선택하여 문제를 만들고, 수학적 지식을 이용하여 이차방정식을 풀 수 있도록 격려하여 확산적 사고와 수렴적 사고를 함께 기를 수 있도록 한다.

생각 키우기

지도상의 유의점 난이도가 높은 문항이므로 학생들의 수준에 맞춰 힌트를 주어서 문제를 풀 수 있도록 지도하여야 한다. 이차방정식으로 표현하는 과정에서 무엇을 x로 놓을 것인지를 학생들 스스로 찾아보고, 식을 세워 보도록 지도한다.


102쪽

창의·인성 키우기

개념 바루기 다음은 주영이가 노트에 이차방정식 $x^2-3x=1$을 푼 것이다. 옳지 않은 부분을 찾아 바르게 고쳐라.

근의 공식을 이용하면

$$x=\frac{3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times1}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

문제 만들기 다음의 문제를 풀어라. 또 이차방정식으로 표현될 수 있는 상황을 구성하고, 그 해를 구하여라.

사탕 80개를 모둠 학생들에게 똑같이 나누어 주었다. 학생 한 명이 받은 사탕의 개수는 모둠 학생 수보다 2만큼 작다고 한다. 모둠의 학생은 모두 몇 명일까?

생각 키우기 오른쪽 그림과 같이 큰 원에서 반지름의 길이가 1인 작은 원들을 십자 모양으로 잘랐더니 남은 부분의 넓이가 큰 원의 넓이의 $\frac{144}{169}$가 되었다. 잘라낸 작은 원의 개수를 구하여라.

102 Ⅱ. 인수분해와 이차방정식

풀이 잘라낸 작은 원 중 가로의 원의 개수를 x라 하자.

큰 원의 반지름의 길이는 x이고, 큰 원의 넓이는 $\pi\times x^2$,

잘라낸 작은 원의 전체 개수는 $2x-1$이다.

작은 원의 반지름의 길이가 1이므로 잘라낸 작은 원의 전체 넓이는 $\pi\times(2x-1)$이고, 잘라내고 남은 부분의 넓이는

$\pi x^2-\pi(2x-1)=\pi(x^2-2x+1)$

이때 잘라내고 남은 부분의 넓이가 큰 원의 넓이의 $\frac{144}{169}$이므로

$\pi(x^2-2x+1)=\frac{144}{169}\times\pi x^2$

$(x-1)^2=\left(\frac{12}{13}x\right)^2$, $x-1=\pm\frac{12}{13}x$

$x-1=\frac{12}{13}x$ 또는 $x-1=-\frac{12}{13}x$

$\frac{1}{13}x=1$ 또는 $\frac{25}{13}x=1$

$x=13$ 또는 $x=\frac{13}{25}$

x는 자연수이므로 $x=13$

그러므로 잘라낸 작은 원의 개수는 $2\times13-1=25$이다.

창의 · 인성 학생 스스로 문제를 해결해 봄으로써 수학에 대한 자신감을 키우고, 문제 해결 능력을 키울 수 있도록 한다.

Ⅱ

학년 반 번호: 이름: / 점수:

선다형은 각 5점, 나머지 문항은 각 문항에 표시함.

01 다음 등식 중에서 x에 대한 이차방정식인 것을 고르면? (정답 2개)

① $x^2+6x=x^2+2x+5$
② $x^2+4=2x+3$
③ $x^2+6x=3+x^3$
④ $2x(x-3)=x^2-1$
⑤ $(x+3)(x-2)=x^2+3x$

02 다음 중에서 [ ] 안의 수가 주어진 이차방정식의 해인 것은?

① $x^2+2x-3=0$ $[3]$
② $x^2-4=0$ $[-1]$
③ $2x^2-5x+2=0$ $[1]$
④ $(x+5)^2-9=0$ $[-2]$
⑤ $x^2+2=3x$ $[-3]$

03 이차방정식 $x^2+ax+8=0$의 한 해가 $x=-2$일 때, 상수 a의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

04 x에 대한 이차방정식 $x^2-14x+5a-1=0$이 중근을 가질 때, 상수 a의 값은?

① -10 ② -8 ③ -6
④ 8 ⑤ 10

05 이차방정식 $x^2-8x-3=0$을 $(x-p)^2=q$의 꼴로 고칠 때, 두 상수 p, q의 값은?

① $p=2$, $q=8$ ② $p=3$, $q=10$
③ $p=3$, $q=13$ ④ $p=4$, $q=19$
⑤ $p=4$, $q=22$

06 이차방정식 $3(x-1)^2=2(x^2+5)$의 두 근을 a, b라 할 때, $a+7b$의 값은? (단, $a>b$)

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

07 이차방정식 $x^2-mx+81=0$이 중근을 가질 때, 이차방정식 $mx^2-8=0$의 두 근을 a, b라 하자. a^2+b^2의 값은? (단, m은 상수이고, $m>0$)

① $\frac{4}{9}$ ② $\frac{8}{9}$ ③ $\frac{9}{4}$
④ 8 ⑤ 9

08 이차방정식 $\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}=\frac{7}{12}x$의 두 근을 구하면?

① $x=4$ 또는 $x=\frac{1}{3}$ ② $x=\frac{3}{2}$ 또는 $x=2$
③ $x=1$ 또는 $x=3$ ④ $x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=-2$
⑤ $x=-3$ 또는 $x=-1$

단답형

09 이차방정식 $3x^2-4x-5=0$의 해가 $x=\frac{A\pm\sqrt{B}}{3}$일 때, $B-A$의 값을 구하여라. [6점]

10 지면으로부터 50m 높이에서 초속 10m의 속력으로 위로 던져 올린 공의 t초 후의 높이를 hm라 하면

$$h=-5t^2+10t+50$$

인 관계가 성립한다고 한다. 공의 높이가 10m가 되는 순간은 몇 초인지 구하여라. [6점]

11 어떤 자연수를 제곱해야 할 것을 잘못하여 2배하였더니 제곱한 값보다 24만큼 작았다. 어떤 자연수를 구하여라. [8점]

12 윗변과 아랫변의 길이의 비가 1 : 3이고, 높이는 아랫변의 길이보다 4cm가 긴 사다리꼴이 있다. 이 사다리꼴의 넓이가 40cm^2일 때, 사다리꼴의 아랫변의 길이를 구하여라. [8점]

서술형

13 두 이차방정식 $x^2+6x-a=0$과 $x^2+bx+20=0$의 해가 $x=2$일 때, 이차방정식 $3x^2+ax+b=0$의 해를 구하고, 그 과정을 서술하여라. [10점]

14 이차방정식 $3x^2-4x+k=0$의 한 근이 다른 근의 3배일 때, 이차방정식의 두 근과 상수 k의 값의 합을 구하고, 그 과정을 서술하여라. [10점]

수리 논술형

15 다음은 조선 시대의 수학자 홍정하가 지은 구일집에 실려 있는 문제이다. 이 문제를 풀고 그 과정을 설명하여라. (단, 원주율 π는 3으로 계산한다.) [12점]

> 정사각형 모양의 밭 안에 원 모양의 연못이 있다. 연못을 제외한 나머지 부분의 넓이는 486m^2라고 한다. 정사각형의 각 변에서 연못에 이르는 가장 짧은 거리는 모두 4.5m일 때, 밭의 한 변의 길이와 연못의 지름의 길이는 각각 얼마인가?

중단원 평가 문제

01 ②, ④	02 ④	03 ③	04 ⑤
05 ④	06 ③	07 ②	08 ②
09 17	10 4초	11 6	
12 6cm	13~15 풀이 참조		

01 평가 기준 이차방정식의 뜻을 알고 있는가?

풀이 ① $x^2+6x=x^2+2x+5$에서 $4x-5=0$이므로 이차방정식이 아니다.

② $x^2+4=2x+3$에서 $x^2-2x+1=0$이므로 이차방정식이다.

③ $x^2+6x=3+x^3$에서 $x^3-x^2-6x+3=0$이므로 이차방정식이 아니다.

④ $2x(x-3)=x^2-1$에서 $2x^2-6x=x^2-1$, $x^2-6x+1=0$ 이므로 이차방정식이다.

⑤ $(x+3)(x-2)=x^2+3x$에서 $x^2+x-6=x^2+3x$, $2x+6=0$ 이므로 이차방정식이 아니다.

따라서 이차방정식인 것은 ②, ④이다.

02 평가 기준 이차방정식의 해의 뜻을 알고 있는가?

풀이 ④ $x=-2$를 대입하면 $(x+5)^2-9=0$이 성립하므로 주어진 이차방정식의 해가 된다.

03 평가 기준 이차방정식의 해의 뜻을 알고 있는가?

풀이 $x=-2$를 이차방정식 $x^2+ax+8=0$에 대입하면

$4-2a+8=0$

$2a=12$

따라서 $a=6$이다.

04 평가 기준 중근의 뜻을 알고 있는가?

풀이 이차방정식 $x^2-14x+5a-1=0$이 중근을 가지므로

$5a-1=49$

$5a=50$

따라서 $a=10$이다.

05 평가 기준 이차방정식을 완전제곱식을 포함한 식으로 고칠 수 있는가?

풀이 $x^2-8x-3=0$에서 $x^2-8x=3$

$x^2-8x+16=19$

$(x-4)^2=19$

따라서 $p=4$, $q=19$이다.

06 평가 기준 이차방정식을 풀 수 있는가?

풀이 $3(x-1)^2=2(x^2+5)$에서

$3(x^2-2x+1)=2x^2+10$

$3x^2-6x+3=2x^2+10$

$x^2-6x-7=0$, $(x-7)(x+1)=0$

$x=7$ 또는 $x=-1$

즉, $a=7$, $b=-1$이다.

따라서 $a+7b=0$이다.

07 평가 기준 이차방정식의 중근의 뜻을 알고, 이차방정식을 풀 수 있는가?

풀이 $x^2-mx+81=0$이 중근을 가지므로 $m=18$

$m=18$을 $mx^2-8=0$에 대입하면

$18x^2-8=0$, $x^2=\frac{4}{9}$

$x=\pm\frac{2}{3}$

이때 $a=\frac{2}{3}$, $b=-\frac{2}{3}$ 또는 $a=-\frac{2}{3}$, $b=\frac{2}{3}$이므로

$a^2+b^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}+\frac{4}{9}=\frac{8}{9}$이다.

08 평가 기준 계수가 분수인 이차방정식을 풀 수 있는가?

풀이 $\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}=\frac{7}{12}x$에서 $2x^2-7x+6=0$

$(2x-3)(x-2)=0$

따라서 $x=\frac{3}{2}$ 또는 $x=2$이다.

09 평가 기준 이차방정식의 해를 구할 수 있는가?

풀이 $3x^2-4x-5=0$을 근의 공식을 이용하여 풀면

$x=\frac{4\pm\sqrt{76}}{6}=\frac{4\pm2\sqrt{19}}{6}=\frac{2\pm\sqrt{19}}{3}$

이므로 $A=2$, $B=19$이다.

따라서 $B-A=19-2=17$이다.

10 평가 기준 이차방정식을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

풀이 $-5t^2+10t+50=10$

$5t^2-10t-40=0$

$t^2-2t-8=0$, $(t+2)(t-4)=0$

$t=-2$ 또는 $t=4$

$t>0$이므로 $t=4$

따라서 공의 높이가 10m가 되는 것은 4초이다.

11 평가 기준 이차방정식을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

풀이 어떤 자연수를 x라 하면 $x^2-2x=24$

$x^2-2x-24=0$, $(x+4)(x-6)=0$

$x=-4$ 또는 $x=6$

$x>0$이므로 $x=6$

따라서 어떤 자연수는 6이다.

12 평가 기준 이차방정식을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

풀이 사다리꼴의 윗변의 길이를 $a$cm라 하면 아랫변의 길이는 $3a$cm이고, 높이는 $(3a+4)$cm이므로 넓이는

$\frac{1}{2}(a+3a)(3a+4)=40$

$2a(3a+4)=40$, $3a^2+4a-20=0$

$(3a+10)(a-2)=0$

$a=-\frac{10}{3}$ 또는 $a=2$

$a>0$이므로 $a=2$

따라서 아랫변의 길이는 6cm이다.

13 평가 기준 이차방정식을 풀 수 있는가?

풀이 $x=2$를 두 이차방정식 $x^2+6x-a=0$, $x^2+bx+20=0$에 각각 대입하면

$4+12-a=0$, $4+2b+20=0$

$a=16$, $b=-12$ …… ❶

이차방정식 $3x^2+16x-12=0$의 해를 구하면

$(x+6)(3x-2)=0$

따라서 $x=-6$ 또는 $x=\frac{2}{3}$이다. …… ❷

단계	채점 기준	배점
❶	a, b의 값을 구한다.	5점
❷	이차방정식의 해를 구한다.	5점

14 평가 기준 이차방정식을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

풀이 한 근을 a라 하면 다른 한 근은 $3a$이므로

$3a^2-4a+k=0$ …… ㉠

$27a^2-12a+k=0$ …… ㉡

㉡－㉠을 하면 $24a^2-8a=0$

$8a(3a-1)=0$

$a=0$ 또는 $a=\frac{1}{3}$

이때 $a=0$이면 다른 한 근도 0이 되어 조건에 맞지 않으므로

$a=\frac{1}{3}$

따라서 이차방정식의 두 근은 $\frac{1}{3}$, 1이다. …… ❶

이때 $x=1$을 $3x^2-4x+k=0$에 대입하면

$3-4+k=0$

$k=1$ …… ❷

따라서 이차방정식의 두 근과 k의 값의 합은

$\frac{1}{3}+1+1=\frac{7}{3}$이다. …… ❸

단계	채점 기준	배점
❶	$3x^2-4x+k=0$의 두 근을 구한다.	4점
❷	k의 값을 구한다.	4점
❸	두 근과 k의 값의 합을 구한다.	2점

15 평가 기준 이차방정식을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

풀이 연못의 반지름의 길이를 r이라 하면 정사각형 모양의 밭의 한 변의 길이는 $2r+9$이다. …… ❶

연못의 넓이는 $\pi r^2=3r^2$이고, 연못을 제외한 나머지 부분의 넓이는 486m²이므로

$(2r+9)^2-3r^2=486$ …… ❷

$r^2+36r-405=0$

$(r-9)(r+45)=0$

$r=9$ 또는 $r=-45$ …… ❸

그런데 $r>0$이므로 $r=9$

따라서 밭의 한 변의 길이는 27m이고, 연못의 지름의 길이는 18m이다. …… ❹

단계	채점 기준	배점
❶	연못의 반지름의 길이와 밭의 한 변의 길이를 문자를 사용하여 나타낸다.	2점
❷	연못을 제외한 나머지 부분의 넓이가 486 m²임을 이용하여 이차방정식을 세운다.	3점
❸	❷에서 세운 이차방정식을 푼다.	5점
❹	밭의 한 변의 길이와 연못의 지름의 길이를 구한다.	2점

단원 마무리하기

1 평가의 주안점 인수분해를 할 수 있다.

풀이 $x^2+6x-16=(x-2)(x+8)$
따라서 계수가 1인 두 일차식은 $x-2$, $x+8$이므로
두 일차식의 합은 $2x+6$이다.

2 평가의 주안점 인수분해를 이용하여 식의 값을 구할 수 있다.

풀이 $x=\dfrac{3}{\sqrt{7}-2}$의 분모를 유리화하면

$x=\dfrac{3(\sqrt{7}+2)}{7-4}=\sqrt{7}+2$

주어진 식을 인수분해하면
$x^2-4x+4=(x-2)^2$
따라서 $x^2-4x+4=(x-2)^2=(\sqrt{7}+2-2)^2=7$이다.

3 평가의 주안점 이차방정식을 풀 수 있다.

풀이 (1) $x^2+3x-18=0$에서 $(x+6)(x-3)=0$이므로
$x=-6$ 또는 $x=3$이다.
(2) $16x^2-9=0$에서 $(4x-3)(4x+3)=0$이므로
$4x-3=0$ 또는 $4x+3=0$
$x=\dfrac{3}{4}$ 또는 $x=-\dfrac{3}{4}$이다.
(3) $(x+2)^2=7$에서 $x^2+4x+4=7$이므로
$x^2+4x-3=0$
$x=\dfrac{-4\pm\sqrt{28}}{2}=\dfrac{-4\pm 2\sqrt{7}}{2}=-2\pm\sqrt{7}$이다.
(4) $x^2-7x+2=0$에서
$x=\dfrac{7\pm\sqrt{49-8}}{2}=\dfrac{7\pm\sqrt{41}}{2}$이다.

4 평가의 주안점 이차방정식을 풀 수 있다.

풀이 $(2x-1)(x+2)=x^2+2$에서
$2x^2+3x-2=x^2+2$, $x^2+3x-4=0$
$(x+4)(x-1)=0$
따라서 $x=-4$ 또는 $x=1$이다.

5 평가의 주안점 이차방정식의 근의 의미를 이해하고, 근을 구할 수 있다.

풀이 $x^2-ax-(a+1)=0$의 상수항을 잘못 보고 부호를 바꾸어서 풀었더니 한 근이 3이 되었으므로

103쪽

단원 마무리하기

1 x의 계수가 1인 두 일차식의 곱이 $x^2+6x-16$일 때, 두 일차식의 합을 구하여라.

2 $x=\dfrac{3}{\sqrt{7}-2}$일 때, x^2-4x+4의 값을 구하여라.

3 다음 이차방정식을 풀어라.
(1) $x^2+3x-18=0$　(2) $16x^2-9=0$
(3) $(x+2)^2=7$　(4) $x^2-7x+2=0$

4 이차방정식 $(2x-1)(x+2)=x^2+2$의 해를 구하여라.

서술형
5 이차방정식 $x^2-ax-(a+1)=0$에서 상수항의 부호를 잘못 보고 부호를 바꾸어서 풀었더니 한 근이 3이 되었다. 처음 이차방정식의 근을 구하고, 그 과정을 서술하여라.

6 수진이와 미정이가 책을 읽고 있던 중에 미정이가 수진이에게 지금 몇 쪽을 읽고 있느냐고 물었더니 수진이가 아래와 같이 대답하였다. 수진이가 지금 몇 쪽을 읽고 있는지 구하여라.

> "내가 지금 읽고 있는 부분의 두 면의 쪽수를 곱하면 930이 되고, 나는 지금 짝수 쪽을 읽고 있어."

단원 마무리하기 103

$x^2-ax+(a+1)=0$의 한 근이 3이다. …… ①
$9-3a+a+1=0$
$-2a=-10$
$a=5$ …… ②
따라서 처음 이차방정식은 $x^2-5x-6=0$이므로
$(x+1)(x-6)=0$
$x=-1$ 또는 $x=6$
그러므로 처음 이차방정식의 근은 $x=-1$ 또는 $x=6$이다. …… ③

단계	채점 기준	배점 비율
①	$x^2-ax+(a+1)=0$의 한 근이 3임을 안다.	20%
②	a의 값을 구한다.	30%
③	처음 이차방정식의 해를 구한다.	50%

6 평가의 주안점 이차방정식을 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

풀이 두 면의 쪽수를 x, $x+1$이라 하면
두 면의 쪽수를 곱하면 930이 되므로
$x(x+1)=930$
$x^2+x-930=0$

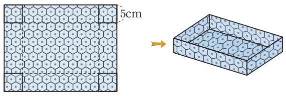
104쪽

추론

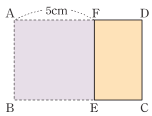
7 직선 $5x+ky=2$가 점 $(k^2, k+1)$을 지나고, 제2 사분면을 지나지 않을 때, 상수 k의 값을 구하여라.

문제 해결 서술형

8 수민이는 친구의 생일을 맞이하여 선물 상자 바닥의 가로와 세로의 길이의 비가 $3:2$가 되고, 바닥의 넓이가 $294\mathrm{cm}^2$인 선물 상자를 만들려고 한다. 두꺼운 종이의 네 모퉁이에서 한 변의 길이가 5cm인 정사각형을 오려내어 점선 부분을 접어서 상자를 만든다고 할 때, 수민이가 구입해야 할 종이의 가로의 길이와 세로의 길이를 구하고, 그 과정을 서술하여라.

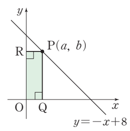


9 오른쪽 그림과 같이 직사각형 ABCD에서 한 변의 길이가 5cm인 정사각형 ABEF를 잘라내어 새로운 직사각형 ECDF를 얻었다. 처음 직사각형 ABCD와 새로 만든 직사각형 ECDF가 서로 닮은 도형일 때, $\overline{\mathrm{EC}}$의 길이를 구하여라.



문제 해결

10 오른쪽 그림과 같이 일차함수 $y=-x+8$의 그래프 위의 한 점 $\mathrm{P}(a, b)$에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 할 때, □OQPR의 넓이가 12가 되게 하는 점 P의 좌표를 구하여라. (단, $b>a>0$)



104 Ⅱ. 인수분해와 이차방정식

$(x+31)(x-30)=0$

$x=-31$ 또는 $x=30$

$x>0$이므로 $x=30$

따라서 수진이는 지금 30쪽을 읽고 있다.

7 **평가의 주안점** 이차방정식을 이용하여 직선이 지나는 점에 대한 문제를 해결할 수 있다.

풀이 직선 $5x+ky=2$가 점 $(k^2, k+1)$을 지나므로

$5k^2+k(k+1)=2$

$5k^2+k^2+k=2$, $6k^2+k-2=0$

$(3k+2)(2k-1)=0$

$k=-\frac{2}{3}$ 또는 $k=\frac{1}{2}$

(i) $k=-\frac{2}{3}$일 때, $5x-\frac{2}{3}y=2$, $15x-2y=6$

즉, 제2사분면을 지나지 않는다.

(ii) $k=\frac{1}{2}$일 때, $5x+\frac{1}{2}y=2$, $10x+y=4$

즉, 제2사분면을 지난다.

따라서 구하는 상수 k의 값은 $-\frac{2}{3}$이다.

8 **평가의 주안점** 이차방정식을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있다.

풀이 선물 상자 바닥의 가로와 세로의 길이의 비가 $3:2$이므로 가로의 길이를 $3x\mathrm{cm}$, 세로의 길이를 $2x\mathrm{cm}$라 하자. …… ❶

바닥의 넓이가 $294\mathrm{cm}^2$이므로

$3x\times 2x=294$ …… ❷

$6x^2=294$, $x^2=49$, $x\pm 7$

$x>0$이므로 $x=7$ …… ❸

선물 상자 바닥의 가로의 길이는 21cm,

세로의 길이는 14cm이다. …… ❹

따라서 수민이가 처음 구입한 종이의 가로의 길이는

$21+10=31(\mathrm{cm})$, 세로의 길이는 $14+10=24(\mathrm{cm})$이다. …… ❺

단계	채점 기준	배점 비율
❶	조건을 이용하여 가로와 세로의 길이를 나타낸다.	20%
❷	이차방정식을 세운다.	20%
❸	이차방정식을 풀어 조건에 맞는 값을 구한다.	20%
❹	상자의 가로와 세로의 길이를 구한다.	20%
❺	처음 구입한 종이의 가로와 세로의 길이를 구한다.	20%

9 **평가의 주안점** 이차방정식을 활용하여 닮은 도형에 관한 문제를 해결할 수 있다.

풀이 $\overline{\mathrm{EC}}=x\ \mathrm{cm}$라 하면 □ABCD와 □ECDF가 서로 닮은 도형이므로

$5+x:5=5:x$

$5x+x^2=25$, $x^2+5x-25=0$

$x=\frac{-5\pm\sqrt{25+100}}{2}=\frac{-5\pm 5\sqrt{5}}{2}$

이때 $x>0$이므로 $x=\frac{-5+5\sqrt{5}}{2}$이다.

10 **평가의 주안점** 이차방정식을 활용하여 일차함수의 그래프에 관한 문제를 해결할 수 있다.

풀이 점 $\mathrm{P}(a, b)$가 일차함수 $y=-x+8$ 위의 점이므로

$b=-a+8$

이때 x축에 내린 수선의 발 Q의 좌표는 $(a, 0)$이고, y축에 내린 수선의 발 R의 좌표는 $(0, -a+8)$이고, □OQPR의 넓이가 12이므로

$a(-a+8)=12$

$-a^2+8a=12$, $a^2-8a+12=0$, $(a-2)(a-6)=0$

즉, $a=2$ 또는 $a=6$이므로

$a=2$, $b=6$ 또는 $a=6$, $b=2$

이때 $b>a$이므로 $a=2$, $b=6$

따라서 점 P의 좌표는 $(2, 6)$이다.

Ⅱ

수행과제

지도상의 유의점 학생들이 스스로 이차방정식이 활용되는 실생활 문제 상황을 설정하고 이를 해결해 보도록 하는 활동이다. 이때 실생활에서 이차방정식이 활용되는 적절한 예를 찾도록 함으로써 수학의 활용성을 깨닫도록 지도한다.

과제 1 A의 가로의 길이를 x, 세로의 길이를 y라 하면

$4x=3y$

즉, $y=\frac{4}{3}x$이므로 직사각형 A의 세로의 길이는 $\frac{4}{3}x$이다.

과제 2 홍보 게시판의 넓이가 8400cm^2이므로

$4x\times\left(\frac{4}{3}x+x\right)=\frac{28x^2}{3}=8400$

$x^2=900$

$x>0$이므로 $x=30$

따라서 직사각형 A의 가로의 길이는 30cm, 세로의 길이는 40cm이다.

다른 풀이

과제 1 모든 직사각형 전체의 넓이가 8400cm^2이므로

직사각형 A의 넓이는

$\frac{8400}{7}=1200(\text{cm}^2)$

따라서 A의 가로의 길이를 x, 세로의 길이를 y라 하면

$xy=1200$

즉, $y=\frac{1200}{x}$이므로 직사각형 A의 세로의 길이는 $\frac{1200}{x}$이다.

과제 2 주어진 그림에서 전체 홍보 게시판의 가로의 길이를 이용하여 식을 세우면

$4x=3\times\frac{1200}{x}$

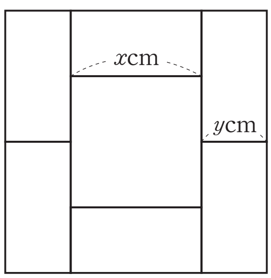
$4x^2=3600$, $x^2=900$

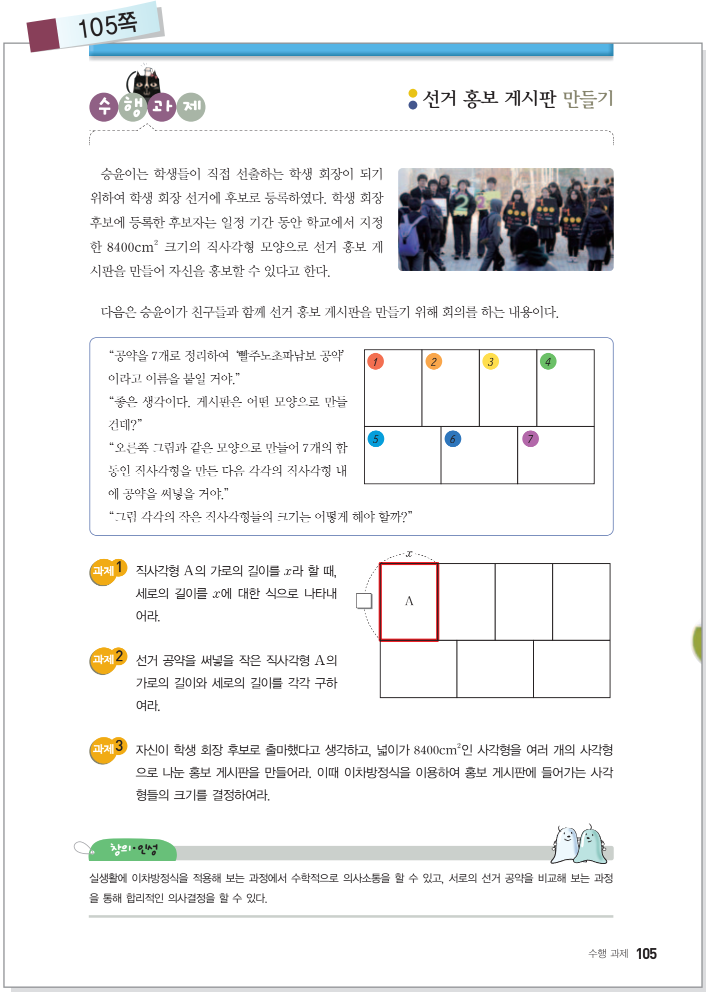
$x>0$이므로 $x=30$

따라서 직사각형 A의 가로의 길이는 30cm, 세로의 길이는 40cm이다.

과제 3 예시 답안

다음 그림과 같이 가운데는 정사각형이고, 정사각형을 둘러싼 직사각형들 6개는 모두 합동인 모양의 게시판을 만든다.




105쪽

수행과제 선거 홍보 게시판 만들기

승윤이는 학생들이 직접 선출하는 학생 회장이 되기 위하여 학생 회장 선거에 후보로 등록하였다. 학생 회장 후보에 등록한 후보자는 일정 기간 동안 학교에서 지정한 8400cm^2 크기의 직사각형 모양으로 선거 홍보 게시판을 만들어 자신을 홍보할 수 있다고 한다.

다음은 승윤이가 친구들과 함께 선거 홍보 게시판을 만들기 위해 회의를 하는 내용이다.

"공약을 7개로 정리하여 '빨주노초파남보 공약'이라고 이름을 붙일 거야."
"좋은 생각이다. 게시판은 어떤 모양으로 만들 건데?"
"오른쪽 그림과 같은 모양으로 만들어 7개의 합동인 직사각형을 만든 다음 각각의 직사각형 내에 공약을 써넣을 거야."
"그럼 각각의 작은 직사각형들의 크기는 어떻게 해야 할까?"

1 2 3 4 5 6 7

과제 1 직사각형 A의 가로의 길이를 x라 할 때, 세로의 길이를 x에 대한 식으로 나타내어라.

과제 2 선거 공약을 써넣을 작은 직사각형 A의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 구하여라.

x A

과제 3 자신이 학생 회장 후보로 출마했다고 생각하고, 넓이가 8400cm^2인 사각형을 여러 개의 사각형으로 나눈 홍보 게시판을 만들어라. 이때 이차방정식을 이용하여 홍보 게시판에 들어가는 사각형들의 크기를 결정하여라.

창의·인성 실생활에 이차방정식을 적용해 보는 과정에서 수학적으로 의사소통을 할 수 있고, 서로의 선거 공약을 비교해 보는 과정을 통해 합리적인 의사결정을 할 수 있다.

수행 과제 105

가운데 정사각형 한 변의 길이를 $x$cm, 주위의 합동인 직사각형의 짧은 변의 길이를 $y$cm라 하면

$2x=x+2y$

$y=\frac{1}{2}x$

이때 홍보 게시판의 넓이가 8400cm^2이므로

$2x\times2x=8400$

$x^2=2100$

$x=10\sqrt{21}$

즉, 가운데 정사각형의 한 변의 길이는 $10\sqrt{21}$cm이다.

따라서 직사각형의 가로, 세로의 길이는 각각 $5\sqrt{21}$cm, $10\sqrt{21}$cm이다.

창의 · 인성 학생 스스로 수학적 지식 및 방법을 결정하면서 문제를 해결할 수 있는 능력을 키울 수 있게 한다.

106쪽

수학으로 세·상·읽·기

하국주와 홍정하의 수학 대결

조선 시대 수학자인 홍정하(洪正夏 ; 1684～?)와 유수석(劉壽錫 ; ?～?)이 조선에 온 중국의 하국주(何國柱 ; ?～?)를 만나 수학에 관해 대결을 벌인 이야기가 홍정하가 지은 “구일집”에 실려 있다.

중국 천문대 관직인 사력으로 일하며 천문과 역산, 산학 등에 뛰어난 실력자였던 하국주는 조선의 수학자를 얕보는 마음으로 산술 문제를 냈다.

어릴 적부터 산술 문제를 풀면서 실력을 갈고닦아 온 홍정하는 금방 답을 말하였다.

홍정하가 금방 문제를 풀자 하국주는 다음의 이차방정식에 대한 문제를 냈고, 홍정하는 이번에도 쉽게 답하였다.

이번에는 홍정하가 구 모양의 옥돌에 내접하는 가장 큰 정육면체의 한 모서리의 길이를 구하는 문제를 내었는데, 하국주는 매우 당황하며 다음날 답을 주겠다고 하였지만 다음날에도 정답을 말하지 못하였다.

하국주도 정오각형의 한 변의 길이와 넓이에 대한 문제를 냈고, 홍정하는 이 문제는 답을 하지 못하였다.

우리나라의 수학자인 홍정하와 중국의 하국주는 수학에 관해 서로 토론하고, 배우며 교류하였다고 전해지고 있다.

홍정하의 수학 실력은 중국의 수학자와 비교해 보아도 뒤지지 않았음을 알 수 있다. 또한 과거 동양의 수학은 서양의 수학만큼이나 매우 발전해 왔음을 많은 문헌들을 통해 알 수 있다.

106 Ⅱ. 인수분해와 이차방정식

수학으로 세·상·읽·기

하국주와 홍정하의 일화는 당시의 중국과 조선의 수학 수준이 어떠했는가를 보여 주는 매우 재미있는 일화이다.

18세기 초에 사신의 일행으로 조선에 온 중국의 천문 관리인 하국주와 조선의 수학자인 홍정하가 나눈 대화 내용은 학생들에게 수학에 대한 호기심을 유발하기에 충분한 내용이다.

중국의 하국주가 낸 문제를 홍정하가 쉽게 풀 수 있었던 것은 산목셈 덕분으로 추측된다.

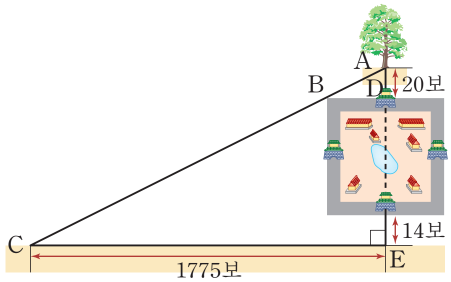
조선에서는 산목셈을 이용하여 어려운 방정식을 풀었던 기록이 전해 내려오고 있다.

산목셈이란 대나무 가지 같은 것으로 계산하는 계산기의 일종이었다. 당시 중국에서는 없어진 산목셈이 조선에는 그대로 보존되어 있었고, 하국주가 중국에 돌아갈 때 이것을 가지고 갔다. 중국에서는 뒷날, 조선의 수학이 없었다면 이 부분에서 동양 수학의 명맥이 끊어졌을지 모른다고 말하기도 했다.

보충 학습 자료

역사 속 이차방정식을 찾아서

중국의 고대 수학책인 “구장산술”은 동양에서 가장 오래된 수학책이다. 구장산술 제9장 구고에는 다음과 같은 이차방정식과 관련된 문제가 실려 있다.

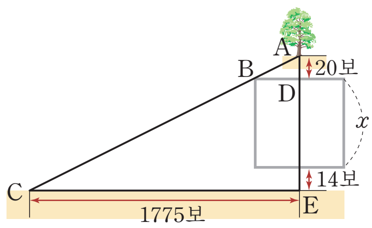


네 변이 동서남북을 향한 정사각형 모양의 성벽으로 둘러싸인 성이 있고, 각 성벽의 중앙에는 문이 있다.

네 개의 성문 중 북문을 나와 북쪽으로 20보를 걸어가면 나무 한 그루가 서 있다.

남문을 나와 남쪽으로 14보를 걸어간 다음 90도만큼 방향을 바꿔 서쪽으로 1775보를 걸어가면 그 나무가 보인다. 성벽의 한 변의 길이를 구하여라.

풀이 성벽의 한 변의 길이를 x라 놓고, △ABD와 △ACE가 닮음임을 이용하여 식을 세우면



$20 : x+34 = \frac{x}{2} : 1775$

이 식을 정리하면 $x^2+34x-71000=0$이므로

$x=250$ 또는 $x=-284$

구하는 수는 자연수이므로 $x=250$

따라서 성벽의 한 변의 길이는 250보이다.