III 이차함수

III

이차함수

1 이차함수와 그 그래프

2 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프

학습한 내용	본 단원의 내용	학습할 내용
중학교 수학 ① 함수의 그래프 중학교 수학 ② 일차함수와 그 그래프	1 이차함수와 그 그래프 2 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프	고등학교 수학 Ⅱ 함수 유리함수와 무리함수

단원 배경

분수대에서 나오는 물줄기나 야구 선수가 친 공이 움직이는 모양은 포물선을 그린다. 이때 변화하는 두 양 사이의 관계를 파악하여 이것을 함수의 식이나 그래프로 나타내면 편리하다. 예를 들어 물 로켓을 쏘아 올릴 때 시간에 따른 물 로켓의 높이, 달리는 자동차의 브레이크를 밟을 때의 속도에 따른 자동차가 멈출 때까지의 이동 거리 등은 식과 그래프를 이용하여 설명하면 쉽게 이해할 수 있다.

1 단원을 들어가면서

자연 현상 속에는 변화하는 두 양 사이의 관계가 일차함수로 표현되지 않는 경우가 존재한다. 분수대에서 뿜어져 나왔다가 떨어지는 물줄기의 움직임, 돌고래가 물 위로 튀어 올랐다가 다시 물 속으로 들어가는 움직임, 야구 선수가 친 공이 높이 솟아올랐다가 떨어지는 움직임 등이 그러한 경우인데, 이와 같은 움직임은 포물선 모양을 그리고, 이것을 식으로 나타내면 이차함수로 표현되는 경우가 많다.

이 단원은 이차함수와 그 그래프, 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프로 구성되어 있다.

이차함수와 그 그래프에서는 이차함수의 뜻을 알아보고, 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 그리는 방법을 알 수 있도록 한다. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서는 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 평행이동한 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$꼴의 그래프와 $y=ax^2+bx+c$의 그래프를 그리는 방법을 알 수 있도록 하고, 이를 통하여 이차함수의 최댓값 또는 최솟값을 구하는 방법을 알아보고, 여러 가지 문제를 해결할 수 있도록 한다.

❷ 단원의 지도 목표

1. 이차함수와 그 그래프

(1) 이차함수의 뜻을 알고, 이차함수의 그래프를 그릴 수 있게 한다.

2. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프

(1) 이차함수의 그래프의 성질을 이해할 수 있게 한다.

❸ 단원의 교수·학습상의 유의점

1. 이차함수와 그 그래프

(1) 다양한 상황을 표, 식, 그래프로 나타내고 설명하게 한다.

(2) 다양한 상황을 이용하여 이차함수의 의미를 다룬다.

2. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프

(1) 이차함수에서 최댓값과 최솟값은 x의 값의 범위가 실수 전체인 경우에만 다룬다.

(2) 공학적 도구를 활용하여 함수의 그래프를 그리고 다양한 상황을 해석할 수 있게 한다.

❹ 단원의 지도 계통

학습한 내용		본 단원의 내용	학습할 내용	
중학교 수학 ❶	- 함수의 개념 이해 - 순서쌍과 좌표	**1. 이차함수와 그 그래프** 1-1 이차함수의 뜻과 이차함수 $y=ax^2$의 그래프 **2. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프** 2-1 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프 2-2 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 최대 · 최소	고등학교 수학Ⅱ	- 함수 - 유리함수와 무리함수
중학교 수학 ❷	- 일차함수와 그 그래프 - 일차함수의 그래프의 성질			

❺ 단원의 이론적 배경

1. 함수의 역사

우리 주변의 자연 현상이나 사회 현상에는 어떤 규칙이 존재하는데, 이러한 규칙들을 변화하는 두 양 사이의 관계로 설명할 수 있는 경우가 있다. 함수는 이러한 변화하는 현상을 수학적으로 설명하기 위한 중요한 수단으로 많이 활용되어 왔다.

17세기 말에 라이프니츠(Leibniz, G. W. ; 1646~1716)가 곡선 위의 점의 좌표, 접선의 기울기 등과 같이 곡선과 관련된 모든 양을 나타내기 위해 함수를 도입하였는데, 그 이후 해석학의 급속한 발전으로 함수의 개념이 더욱더 정교하게 다듬어졌으며, 함수에 대한 다양한 연구가 이루어졌다. 오일러(Euler, L. ; 1707~1783)와 클레로(Clairaut, A. C.; 1713~1765)는 함수의 기호인 f를 처음으로 사용하였다.

당시의 함수는 곡선과 밀접한 관련을 가지고 있었으며, 곡선 위의 좌표를 함수를 이용하여 설명하려는 시도가 많았다. 직교 좌표를 도입하여 직선이나 원과 같은 곡선 등을 좌표평면 위에 나타내려는 노력은 이미 데카르트(Descartes, R.; 1596~1650)에 의해 시도되었다.

데카르트는 이전의 기하학과 대수학을 하나로 결합하여 직선이나 쌍곡선, 타원 등의 이차곡선을 변수를 이용한 대수식으로 나타내고, 이것을 평면 위에 나타내는 해석기하학의 장르를 개척하였다.

이러한 해석기하학의 연구는 미적분학의 발전을 가져왔으며, 곡선의 기울기나 넓이 등의 성질을 연구하는 데 크게 도움을 주었다. 함수는 코시(Cauchy, A. L. ; 1789~1857)와 같은 해석학자들에 의해 '변화하는 한 양에 따라 정해지는 다른 양의 관점' 또는 '독립적으로 변하는 독립변수와 이에 대응하여 유일하게 정해지는 종속변수의 관계'로 다루어졌다.

이후 함수는 디리클레(Dirichlet, J. P. G. L. ; 1805~1859) 등에 의해 입력 값과 이 값이 정해질 때 오직 하나로 결정되는 출력 값의 관계와 같은 추상적인 개념으로 변하였다. 이와 같은 추상적인 관점에서의 함수의 정의는 함수해석학뿐 아니라 기호논리학의 발전에도 크게 영향을 끼쳤다.

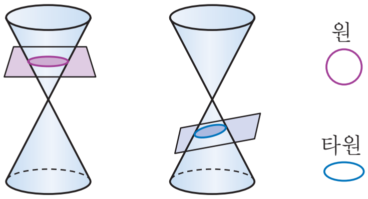
특히 칸토어(Cantor, G. ; 1845～1918)에 의해 제시된 집합론의 토대에서 드모르간(De Morgan, A. ; 1806～1871), 불(Boole, G. ; 1815～1864), 러셀(Russell, B. A. W. ; 1872～1970)등은 기호와 연산자 등을 이용하여 매우 추상적인 관점에서 함수 관계를 연구하였으며, 이는 현대 수리논리학의 발전에 크게 영향을 끼쳤다.

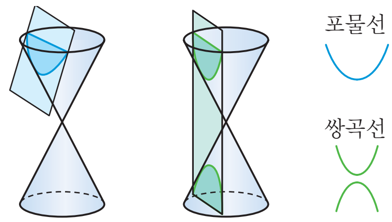
2. 원뿔곡선

원뿔에 대한 고대 그리스의 연구로부터 등장한 원, 포물선, 타원, 쌍곡선은 원뿔을 다양한 각도로 잘랐을 때 나타나는 곡선이란 의미에서 원뿔곡선 또는 원추곡선이라고 부른다.

현재 사용되고 있는 원, 포물선, 타원, 쌍곡선의 어원은 고대 그리스의 수학자 아폴로니오스의 저서 "원추곡선론"에서 찾아볼 수 있다. 아폴로니오스(Apollonios ; ?B.C. 262~? B.C. 190)는 하나의 직원뿔을 여러 가지 평면으로 잘라 이 평면이 밑면과 이루는 각이 모선과 밑면과 이루는 각보다 작은가, 같은가, 큰가에 의해 포물선은 '같다'는 뜻의 parabola, 타원은 '부족하다'는 뜻의 ellipse, 쌍곡선은 '초과한다'는 뜻의 hyperbola를 썼다.

일반적으로 수학에서는 원추곡선(원뿔곡선)을 이차곡선이라고 부르는데, 이는 원추곡선을 좌표평면 위에 나타내면 이차식이 되기 때문이다.

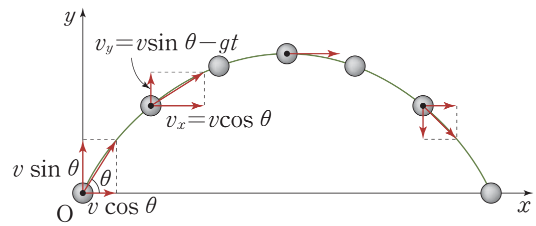




3. 이차함수와 포물선

포물선은 어떤 물체를 위로 비스듬히 던질 때, 그 물체가 그리는 곡선을 의미한다.

아래 그림과 같이 원점 O에서 어떤 물체를 x축과 θ의 각을 이루는 방향으로 매초 v m의 속력으로 던졌다고 하자.



이 물체는 x축의 방향으로 매초 $v\cos\theta$, y축의 방향으로 매초 $v\sin\theta$의 속력으로 움직인다. 이때 중력으로 인해 t초 후의 물체는 $\frac{1}{2}gt^2$만큼 자유낙하하게 된다.

따라서 t초 후의 물체의 위치를 (x, y)라 하면

$$x = vt\cos\theta,\ y = vt\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$$

이다. 위의 두 식에서

$$y = x\tan\theta - \frac{g}{2v^2\cos^2\theta}x^2$$

이다. y는 x에 대한 이차식이므로 이 곡선은 이차함수의 그래프와 같은 모양의 곡선임을 알 수 있다.

두 변수 x, y에 대하여 이차방정식

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

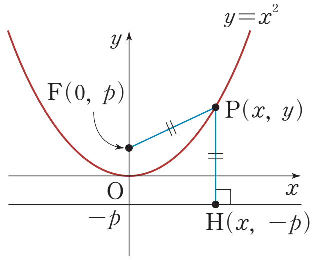
(단, A, B, C는 0이 아닌 상수)

을 만족하는 평면 위의 곡선을 이차곡선이라고 한다.

이때 $b^2 - 4ac < 0$일 때 타원 또는 원($a = c$인 경우)이 되고, $b^2 - 4ac = 0$일 때 포물선이 되며, $b^2 - 4ac > 0$일 때 쌍곡선이 된다.

해석기하학적 측면에서 포물선은 한 정점(초점)에서 한 직선(준선)에 이르는 거리가 같은 점의 자취를 말한다.

아래 그림과 같이 준선이 y축에 수직인 포물선을 생각해 보자.



그림에서 초점을 F(0, p), 준선의 방정식을 $x=-p$라 하면 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}$이므로

$$\sqrt{x^2+(y-p)^2}=|y+p|$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$x^2+y^2-2py+p^2=y^2+2py+p^2$$
$$x^2=4py$$

즉, $y=\frac{1}{4p}x^2$이므로 초점이 y축 위에 있고, 준선이 y축에 수직인 포물선은 $y=\frac{1}{4p}x^2$인 이차함수의 그래프임을 알 수 있다.

참고 문헌

- H. Eves(허민, 오혜영 역), 수학의 기초와 기본 개념, 경문사, 1999.
- H. Eves(이우영, 신항균 역), 수학사, 경문사, 2005.

6 단원의 지도 계획

본문 내용		지도 내용	용어와 기호	쪽수	차시
1. 이차함수와 그 그래프	이야기로 들려주는 이차함수, 준비하기			110～112	1
	1-1. 이차함수의 뜻과 이차함수 $y=ax^2$의 그래프	• 이차함수의 뜻과 함숫값 • 이차함수 $y=ax^2$의 그래프와 성질	이차함수, 포물선, 축, 꼭짓점	113～120	4
	중단원 마무리하기, 창의 · 인성 키우기, 컴퓨터로 하는 수학			121～125	1
2. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프	준비하기			126	1
	2-1. 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프	• 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프와 성질		127～135	4
	2-2. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 최대, 최소	• 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프 • 이차함수의 최댓값과 최솟값	최댓값, 최솟값	136～142	2
	중단원 마무리하기, 창의 · 인성 키우기			143～146	1
	단원 마무리하기			147～148	1
	수행 과제, Fun Fun 수학, 수학으로 세상 읽기, 직업 속의 수학, 스스로 평가하기			149～153	1
	소계				16

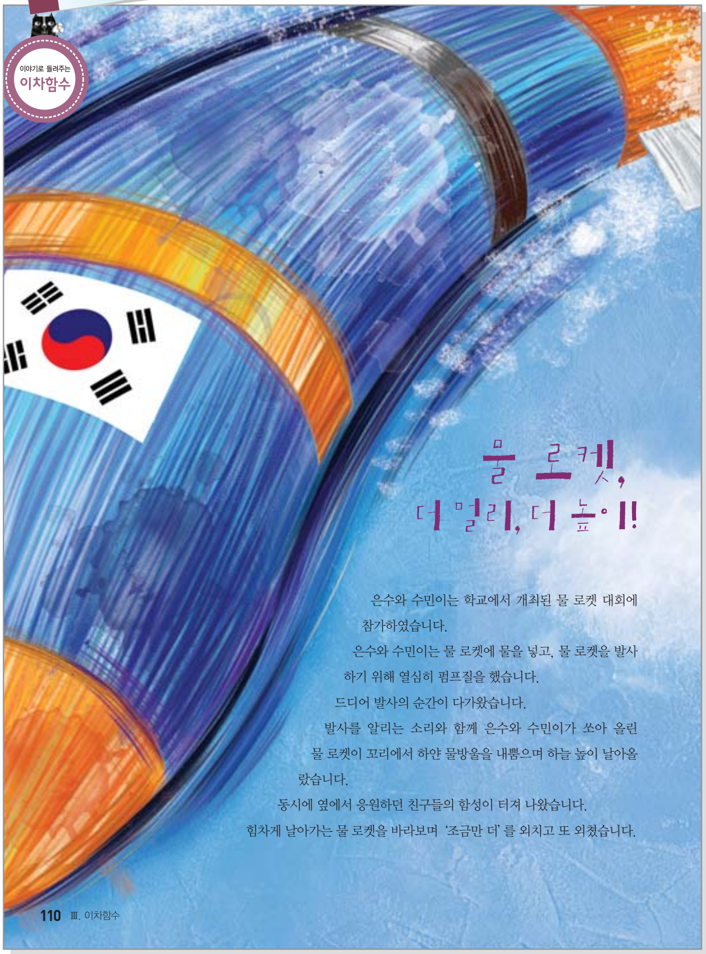
7 교수 · 학습 과정 예시안

단원	Ⅲ. 이차함수 1. 이차함수와 그 그래프 01. 이차함수의 뜻과 이차함수 $y=ax^2$의 그래프	교과서 쪽수	115~117	차시	3/16
학습 주제	이차함수 $y=ax^2$의 그래프는 어떻게 그릴까?	학습 목표	이차함수 $y=x^2$과 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 그리고, 그 성질을 이해할 수 있다.		
준비물	모눈종이, PPT 자료, 형성 평가지, 과제물, 컴퓨터 프로그램			교과 관련	

단계(시간)	학습 내용 및 학습 방법	교수 · 학습 활동		학습 자료 및 유의점
		교사	학생	
도입(8분)	**개념 학습**(전체 학습) – 전시 학습 제시	지난 시간에 배운 이차함수를 찾는 문제를 제시하여 학생들의 학습 정도를 파악한다.	지난 시간에 배운 내용을 상기하며 준비 학습 문제를 해결한다.	
	– 학습 목표 제시	이번 시간에 학습하게 될 내용을 제시한다.	이번 시간에 배울 내용을 생각한다.	▶ PPT 자료
	탐구 학습(전체 학습) – 생각 열기	**생각 열기**를 통해 x의 값에 대응하는 y의 값을 구하고, 이차함수 $y=x^2$을 좌표평면 위에 나타내기 위한 발문을 한다.	이차함수 $y=x^2$의 식에 x의 값을 대입하여 y의 값을 구하고, 그 순서쌍을 좌표평면 위에 나타내어 본다.	• 정의역, 공역, 치역이라는 용어를 쓰지 않도록 유의한다. ▶ PPT 자료
전개 (30분)	**개념 학습**(전체 학습) – 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 이차함수 $y=x^2$의 그래프의 성질	• x의 값들을 실수 전체로 확장시켜 그래프를 그리게 하고, 그 그래프가 매끄러운 곡선이 됨을 알게 한다. • 이차함수 $y=x^2$의 그래프의 성질을 알게 한다.	• 순서쌍을 좌표평면 위에 나타내어 그래프를 그려 본다. • **생각 열기**에서 그린 그래프를 보면서 그래프의 성질을 확인한다.	
	수준별 학습(개별 학습)	• 컴퓨터 그래프 프로그램이나 그래픽 계산기를 이용하여 그래프를 그려 봄으로써 매끄러운 곡선이 됨을 직관적이고, 시각적으로 알 수 있도록 한다. 하 대응표를 이용하여 x의 값의 범위가 정수인 경우의 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 그리고, 컴퓨터 프로그램이나 그래픽 계산기를 사용하여 매끄러운 곡선이 됨을 제시하여 직관적으로 이해하도록 한다. 상 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 그리고, 그래프의 특징을 학생들 스스로 찾고 토론할 수 있는 기회를 제공한다.	컴퓨터 그래프 프로그램이나 그래픽 계산기를 이용하여 그래프를 그려 봄으로써 매끄러운 곡선이 됨을 확인한다.	▶ 컴퓨터 프로그램

단계(시간)	학습 내용 및 학습 방법	교수 · 학습 활동		학습 자료 및 유의점
		교사	학생	
	문제 해결 학습(협력 학습) – 문제 5	$y=x^2$의 그래프가 x축 아래 나타나지 않는 이유를 설명하면서 수학적 의사소통이 활발히 일어날 수 있도록 지도한다.	모둠별로 그 이유를 충분히 논의하고, 다른 사람의 의견을 경청할 수 있도록 한다.	
	탐구 학습(전체 학습) – 생각 열기	**생각 열기**를 통해 x의 값에 대응하는 y의 값을 구하고, $y=x^2$과 $y=2x^2$를 좌표평면 위에 나타내도록 한다.	$y=x^2$과 $y=2x^2$의 식에 x의 값을 대입하여 y의 값을 구하고, 그 순서쌍을 좌표평면 위에 나타내어 본다.	▶ PPT 자료
	문제 해결 학습(전체 학습) – 함께 풀기 2	본문에서 $y=x^2$과 $y=2x^2$의 함숫값을 비교하는 과정을 통해 $y=ax^2$의 그래프를 그리는 방법을 이해하도록 지도한다.	$y=x^2$과 $y=\frac{1}{2}x^2$의 함숫값을 비교하는 과정을 통해 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프를 그리는 방법을 이해한다.	
	문제 해결 학습(개별 학습) – 문제 6	• 문제를 통해 개념을 정확히 인지할 수 있도록 지도한다. • 학생들이 좌표평면 칠판에 이차함수의 그래프를 그려볼 수 있도록 한다.	• 각자 문제를 풀며 이차함수 그래프의 성질을 이해한다. • 그래프를 그리지 못하는 학생은 손을 들어 선생님께 질문한다.	
정리 및 평가 (7분)	**개념 정리**(전체 학습) – 내용 정리	학생들과 함께 배운 내용을 정리한다.	선생님과 함께 학습한 내용을 정리한다.	▶ PPT 자료
	문제 해결 학습(개별 학습) – 형성 평가 문제 (기초 1문제 / 기본 1문제 / 실력 1문제)	형성 평가를 통해 학생의 수업에 대한 이해도를 파악한다.	형성 평가 문제를 각자 스스로 해결해 본다.	▶ 형성 평가지
	수준별 수업(개별 학습) – 수준별 과제 제시	수준별 과제를 부여한다.	수준별 과제를 받아간다.	▶ 과제물
	차시 예고 – 이차함수 $y=-x^2$의 그래프는 어떻게 그릴까?	다음 시간에 배울 내용을 안내한다.	다음 시간에 배울 내용을 확인한다.	

110쪽



이야기로 들려주는 이차함수

물 로켓,
더 멀리, 더 높이!

은수와 수민이는 학교에서 개최된 물 로켓 대회에 참가하였습니다.

은수와 수민이는 물 로켓에 물을 넣고, 물 로켓을 발사하기 위해 열심히 펌프질을 했습니다.

드디어 발사의 순간이 다가왔습니다.

발사를 알리는 소리와 함께 은수와 수민이가 쏘아 올린 물 로켓이 꼬리에서 하얀 물방울을 내뿜으며 하늘 높이 날아올랐습니다.

동시에 옆에서 응원하던 친구들의 함성이 터져 나왔습니다.

힘차게 날아가는 물 로켓을 바라보며 '조금만 더'를 외치고 또 외쳤습니다.

110 Ⅲ. 이차함수

111쪽

"와! 은수야, 네 물 로켓이 제일 멀리 날아갔어. 수민이 것은 너무 하늘로만 높이 올라갔어."

친구들의 칭찬에 은수는 어깨가 으쓱해졌습니다.

옆에서 물 로켓이 날아가는 모습을 지켜보고 계시던 과학 선생님께서 은수와 수민이에게 말씀하셨습니다.

"발사 각도와 물의 양에 따라 물 로켓의 최고 높이와 날아간 거리가 차이가 있을 수 있단다. 물론, 물 로켓이 포물선 모양으로 날아가면서 공기의 저항을 받기 때문에 바람의 세기도 중요한 영향을 미친단다."

"네. 어제도 분명히 같은 각도로 쏘아 올렸는데 어제보다 잘한 것 같아 기분이 좋아요."

"그래. 나아졌다니 축하한다."

선생님이 발사를 준비하는 다른 친구들 쪽으로 가신 후에 수민이가 궁금한 듯 말하였습니다.

"포물선 모양이라구?"

"포물선 모양이 어떤 모양일까?"

"글쎄, 직선은 분명히 아니고 반원도 아닌데."

"물건을 던질 때 나타나는 선이 포물선인가?"

"그래. 물 로켓이 지나간 자리가 마치 우리가 공을 하늘로 비스듬히 던질 때, 날아가는 모양과 비슷하잖아."

은수와 수민이는 다른 친구들이 발사한 물 로켓이 날아가는 모습을 지켜보기 위해 하늘을 쳐다보았습니다.

이 단원에서 알려 주세요.

"포물선 모양에 대하여 알아보자."

이야기로 들려주는 이차함수 111

이야기로 들려주는 이차함수

"이야기 배경"

물 로켓 대회에 참가한 은수와 수민이의 경험을 통하여 물 로켓이 날아가면서 그리는 포물선의 모양을 직관적으로 확인하도록 한다.

포물선은 공중으로 비스듬히 던진 물체가 떨어지면서 그리는 곡선을 말한다. 비스듬히 쏘아 올린 물 로켓이 그리는 곡선이나 분수에서 뿜어져 나오는 물줄기가 그리는 곡선 모양은 모두 포물선 모양이다.

포물선 모양으로 날아가는 물 로켓이 가장 높이 올랐을 때가 언제인지를 생각해 보게 함으로써 이차함수의 최댓값과 최솟값에 대해 직관적으로 생각해 볼 수 있도록 한다.

포물선은 매끄럽고 대칭을 이루는 곡선 모양으로, 파라볼라 안테나, 자동차의 헤드라이트 등과 같이 우리 실생활 주변에서 흔히 활용되고 있음을 알 수 있다.

어떤 물체를 자유낙하시켰을 때, 물체가 떨어진 거리는 시간의 제곱에 비례한다. 그러므로 시간의 흐름에 따라 변하는 물체가 떨어진 거리는 이차함수로 나타낼 수 있다. 또한 물 로켓을 발사했을 때, 시간의 흐름에 따라 변하는 물 로켓의 높이도 이차함수로 나타낼 수 있다.

이와 같이 자연 현상에서 비례하는 두 양 사이에 이차함수의 관계가 성립하는 많은 예를 찾아볼 수 있다. 또한 사회나 경제 현상을 수학적으로 표현할 때, 변화하는 두 양 사이에 이차함수 관계가 성립하는 예를 찾아볼 수 있다.

이 단원에서는 변화하는 두 양 사이에 이차함수 관계가 성립하는 예를 찾아보고, 이러한 이차함수를 그래프로 나타내면 포물선과 같은 모양이 됨을 확인하게 한다. 또한 실생활 주변에서 이와 같은 포물선 모양에는 어떤 것들이 있는지 찾아보도록 한다.

1 이차함수와 그 그래프

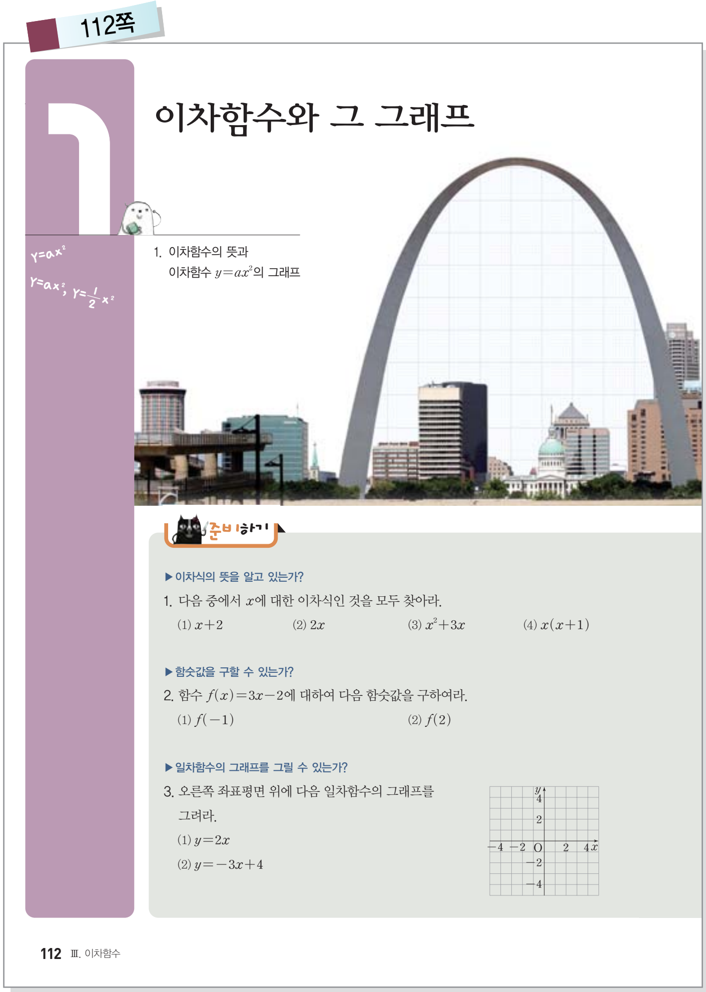
중단원 지도 목표

1. 이차함수의 뜻을 이해하게 한다.
2. 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 그리고, 그 성질을 이해하게 한다.

중단원의 구성

소단원 명	지도 내용
1. 이차함수의 뜻과 이차함수 $y=ax^2$의 그래프	• 이차함수의 뜻 • 이차함수 $y=x^2$의 그래프 • 이차함수 $y=ax^2$의 그래프와 성질
중단원 마무리하기	• 스스로 정리하기 • 기초 다지기, 기본 익히기, 실력 기르기
창의 · 인성 키우기	• 개념 바루기 • 문제 만들기 • 생각 키우기
컴퓨터로 하는 수학	• 이차함수의 그래프의 특징 탐구하기

112쪽



1 이차함수와 그 그래프

1. 이차함수의 뜻과 이차함수 $y=ax^2$의 그래프

준비하기

▶이차식의 뜻을 알고 있는가?

1. 다음 중에서 x에 대한 이차식인 것을 모두 찾아라.

(1) $x+2$ (2) $2x$ (3) x^2+3x (4) $x(x+1)$

▶함숫값을 구할 수 있는가?

2. 함수 $f(x)=3x-2$에 대하여 다음 함숫값을 구하여라.

(1) $f(-1)$ (2) $f(2)$

▶일차함수의 그래프를 그릴 수 있는가?

3. 오른쪽 좌표평면 위에 다음 일차함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=2x$

(2) $y=-3x+4$

112 Ⅲ. 이차함수

준비하기

▶이차식의 뜻을 알고 있는가?

1. 이 단원에서는 이차함수의 뜻에 대하여 학습하므로 이차식의 뜻을 알고 있어야 한다.

풀이 (1) 일차식 (2) 일차식
(3) 이차식 (4) 이차식

답 (3), (4)

▶함숫값을 구할 수 있는가?

2. 이 단원에서는 이차함수의 함숫값을 이용하여 그래프를 그리게 되므로 이차함수의 함숫값과 구하는 방법이 유사한 일차함수의 함숫값을 구하는 방법을 알고 있어야 한다.

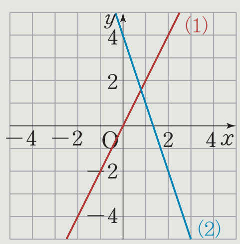
풀이 (1) $f(-1)=-3-2=-5$
(2) $f(2)=6-2=4$

답 (1) -5 (2) 4

▶일차함수의 그래프를 그릴 수 있는가?

3. 이 단원에서는 이차함수의 그래프를 그리게 되므로 먼저 일차함수의 그래프를 그리는 방법을 알고 있어야 한다.

답



보충 문제

다음 중에서 일차함수를 모두 찾아라.

(1) $y=3x$ (2) $y=\frac{3}{x}$

(3) $y=x^2$ (4) $y=\frac{1}{2}x+1$

답 (1), (4)

01 이차함수의 뜻과 $y=ax^2$의 그래프

지도 목표

1. 이차함수의 뜻을 이해하게 한다.
2. 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 그리고, 그 성질을 이해하게 한다.
3. 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 그리고, 그 성질을 이해하게 한다.

지도상의 유의점

1. 구체적인 예를 통하여 y가 x에 관한 이차식으로 나타내어지는 함수가 이차함수임을 이해하도록 지도한다.
2. x에 대응하는 y의 값을 각각 구하여 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 그리게 하고, x의 값의 간격을 점점 작게 하여 x의 값의 범위가 실수 전체가 될 때, 이차함수의 그래프가 매끄러운 곡선이 됨을 알게 한다.
3. 포물선은 엄밀하게 다루지 말고, 이차함수의 그래프 모양으로 직관적으로 이해하도록 설명한다.

113쪽

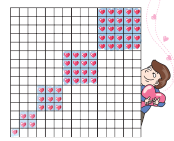
01 이차함수의 뜻과 이차함수 $y=ax^2$의 그래프

○ 학습 목표 이차함수의 의미를 이해한다.
이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 그리고, 그 성질을 이해한다.
○ 배울 용어 이차함수, 포물선, 축, 꼭짓점

여러 사람들이 함께하는 봉사 활동은 많은 사람들을 행복하게 만든다. 사람들이 함께 만들어 가는 봉사 활동은 여기에 참여한 사람들의 수의 제곱에 비례하여 더 많은 사람들에게 행복을 줄 수 있다는 유쾌한 상상이 우리를 즐겁게 한다.

1/4차시 **이차함수란 무엇일까?**

생각 열기 오른쪽은 어느 중학생이
'사랑도 모으면 점점 커집니다.'
라는 주제로 한 변의 길이가 1씩 점점 커지는 정사각형 안에 하트 모양을 그린 그림이다.
정사각형의 한 변의 길이가 x이고, 하트의 개수가 y개일 때, y를 x에 대한 식으로 나타내어 보자.



생각 열기에서 y를 x에 대한 식으로 나타내면 $y=x^2$이므로 y는 x에 대한 이차식이다. 이때 x의 값이 하나 정해지면 그에 따라 y의 값도 오직 하나로 정해지므로 y는 x의 함수이다.

1 일반적으로 함수 $y=f(x)$에서 y가 x에 대한 이차식

$$y=ax^2+bx+c \ (a,\ b,\ c\text{는 상수},\ a\neq 0)$$

로 나타날 때, 이 함수를 x에 대한 **이차함수**라고 한다.

보기 (1) 함수 $y=3x^2$, $y=-2x^2+4$, $y=x^2-2x-3$은 y가 x에 대한 이차식이므로 이차함수이다.
(2) 함수 $y=3x+2$, $y=x^3+2x^2+x+1$은 y가 x에 대한 이차식이 아니므로 이차함수가 아니다.

1. 이차함수와 그 그래프 113

1/4차시 차시별 지도 방법

생각 열기	하트의 개수를 추측해 보는 활동을 통하여 y가 x에 대한 이차식으로 나타내어짐을 확인시킨다.
본문	이차함수의 뜻을 설명할 때, 이차식인 경우와 이차식이 아닌 경우를 비교해 가며 설명한다.
문제 1	이차함수를 찾는 활동을 통해 이차함수의 뜻을 정확하게 이해할 수 있도록 한다.
문제 2	일상생활에서 이차함수의 식으로 나타내어지는 예를 통하여 이차함수의 표현을 익힐 수 있도록 한다.
문제 3	y를 x에 대한 이차식으로 나타내고, 이차함수임을 설명하는 활동을 통하여 수학적 의사소통 능력을 기를 수 있도록 한다.
함께 풀기 1, 문제 4	이차함수에서 함숫값을 구하는 과정을 설명하고, 문제는 학생 스스로 풀어 보게 한다.

이차함수란 무엇일까?

생각 열기 정사각형 안에 들어 있는 하트의 개수를 x에 대한 이차식으로 나타내어 보도록 하는 생각 열기이다.

정사각형의 한 변의 길이가
$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots\cdots$
일 때, 하트의 개수는
$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \cdots\cdots$
이므로 한 변의 길이가 x일 때, 하트의 개수는 x^2이 됨을 추측할 수 있다.
따라서 y를 x에 대한으로 나타내면 $y=x^2$이다.

1 일반적으로 함수 $y=f(x)$에서 y가 x에 대한 이차식 $y=ax^2+bx+c\,(a,\ b,\ c\text{는 상수},\ a\neq 0)$로 나타내어질 때, 이 함수가 이차함수가 됨을 설명한다.
보기와 같이 이차함수가 되는 예와 그렇지 않은 예를 비교하여 이차함수의 형태를 이해하도록 지도한다.

114쪽

문제 1 다음 중 이차함수인 것을 모두 찾아라.

(1) $y=-2x$ (2) $y=x^2-3$

(3) $y=(x-2)(x+3)$ (4) $y=\frac{3}{x}$

문제 2 다음에서 y를 x에 대한 식으로 나타내고, 이차함수인 것을 모두 찾아라.

(1) 한 줄에 2000원인 김밥을 x줄 샀을 때의 가격 y원

(2) 꼭짓점의 개수가 x인 다각형의 대각선의 개수 y

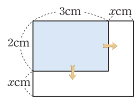
(3) 한 변의 길이가 각각 $x$cm, $(x+1)$cm인 두 정사각형의 넓이의 합 $y$cm^2

의사소통

문제 3 오른쪽 그림과 같이 가로의 길이가 3cm, 세로의 길이가 2cm인 직사각형의 가로와 세로의 길이를 각각 $x$cm씩 늘려서 만든 직사각형의 넓이를 $y$cm^{2}라 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) y를 x에 대한 식으로 나타내어라.

(2) y가 x에 대한 이차함수임을 설명하여라.



함께 풀기 1 x가 -1, 0, 2일 때, 이차함수 $y=x^2-3x+1$의 함숫값을 각각 구하여라.

풀이» x가 -1, 0, 2일 때, $y=x^2-3x+1$의 함숫값을 각각 구하면

$x=-1$일 때, $y=(-1)^2-3\times(-1)+1=5$

$x=0$일 때, $y=0^2-3\times0+1=1$

$x=2$일 때, $y=2^2-3\times2+1=-1$

답» 5, 1, -1

문제 4 x가 -2, 0, 1, 2일 때, 이차함수 $y=2x^2+x-1$의 함숫값을 각각 구하여라.

가까운 수학

이차함수와 번지 점프

인기 스포츠 중의 하나인 번지 점프는 남태평양 바누아투의 펜테코스트 섬의 원주민들이 매년 봄에 행하는 성인식에서 유래한 것이다. 원주민들이 나무 탑 위에 올라가 자신의 용맹성을 시험하기 위해 발목에 포도 넝쿨이나 칡넝쿨 등을 감고, 10m 정도의 높이에서 뛰어내린 것에서 시작되었다고 한다. 번지 점프를 할 때, 뛰어내린 후의 시간과 떨어지는 거리 사이에는 이차함수의 관계가 성립하는 것으로 알려져 있다.

114 Ⅲ. 이차함수

문제 1 이차함수 찾기

풀이 (1) 이차함수가 아니다.

(2) 이차함수이다.

(3) 우변을 정리하면 $y=x^2+x-6$이므로 이차함수이다.

(4) 이차함수가 아니다.

따라서 이차함수인 것은 (2), (3)이다.

문제 2 문장을 함수로 나타내고, 이차함수 찾기

풀이 y를 x에 대한 식으로 나타내면

(1) $y=2000x$이므로 이차함수가 아니다.

(2) $y=\frac{x(x-3)}{2}=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x$이므로

이차함수이다.

(3) $y=x^2+(x+1)^2=2x^2+2x+1$이므로

이차함수이다.

따라서 이차함수인 것은 (2), (3)이다.

문제 3 이차함수의 식 만들기

풀이 (1) 가로와 세로의 길이를 각각 $x$cm씩 늘렸으므로 새로 만든 직사각형의 가로와 세로의 길이는 각각 $(3+x)$cm, $(2+x)$cm이고, 직사각형의 넓이는 $y$cm^{2}이므로 y를 x에 대한 식으로 나타내면

$y=(3+x)(2+x)$

$=x^2+5x+6$

이다.

(2) x의 값이 하나 정해지면 그에 따라 y의 값도 오직 하나로 정해지므로 y는 x의 함수이고, y가 x에 대한 이차식이므로 이차함수이다.

문제 4 이차함수의 함숫값 구하기

풀이 (ⅰ) $x=-2$를 $y=2x^2+x-1$에 대입하면

$y=2\times4+(-2)-1=5$이다.

(ⅱ) $x=0$을 대입하면 $y=2\times0+0-1=-1$이다.

(ⅲ) $x=1$을 대입하면 $y=2\times1+1-1=2$이다.

(ⅳ) $x=2$를 대입하면 $y=2\times4+2-1=9$이다.

가까운 수학

이차함수와 번지 점프

번지 점프를 할 때, 떨어진 거리(m)는 뛰어내린 후의 시간(초)의 제곱의 다섯 배 정도라고 한다. 이때 뛰어내린 후의 시간을 x초, 떨어진 거리를 ym라 하면 $y=5x^2$인 관계가 성립한다.

수준별 교수·학습 방법

이차함수의 뜻을 알고, 이차함수의 함숫값을 구할 수 있다.

하 이차함수가 되는 구체적인 예와 그렇지 않은 예를 제시하고 이차함수의 뜻을 이해하도록 한다. 특히 식이 정리되지 않은 경우는 식을 정리하고 난 후에 이차함수인지를 판별해야 함을 주의시킨다.

예 $y=3x^2$, $y=-2x^2+4$, $y=3x^2-5x+8$은 이차함수이고, $y=3x(x-1)-3x^2$은 이차함수가 아니다.

상 실생활의 다양한 상황에서 x와 y 사이의 관계식을 구한 후, 이 관계식이 이차함수가 되는지 구분하고, 그 이유를 설명할 수 있도록 한다.

Ⅲ

115쪽

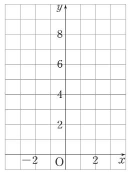
2/4차시 **이차함수 $y=x^2$의 그래프는 어떻게 그릴까?**

생각 열기 다음 표는 이차함수 $y=x^2$에 대하여 x의 값에 대응하는 y의 값을 나타낸 것이다.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2		4		0	1		9

(1) 표의 빈칸을 채워 보자.

(2) 표에서 구한 순서쌍 (x, y)를 좌표로 하는 점을 오른쪽 좌표평면 위에 나타내어 보자.



생각 열기에서 순서쌍 (x, y)를 좌표로 하는 점은

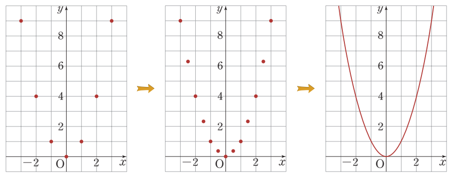
$$(-3, 9), (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9)$$

이고, 이를 좌표평면 위에 나타내면 [그림 1]과 같다.

또 x의 값의 간격을 0.5로 하여 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 그려 보자.

x의 값이 $-3, -\frac{5}{2}, -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3$일 때, 이차함수 $y=x^2$의 순서쌍 (x, y)를 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내면 [그림 2]와 같다.

이제 이차함수 $y=x^2$에서 x의 값의 간격을 점점 작게 하면 이차함수 $y=x^2$의 그래프는 [그림 3]과 같은 매끄러운 곡선이 된다. 이 곡선이 실수 전체의 범위에서 이차함수 $y=x^2$의 그래프이다.



[그림 1] [그림 2] [그림 3]

위의 그림에서 알 수 있듯이 이차함수 $y=x^2$의 그래프는 원점을 지나고 아래로 볼록하며 y축에 대칭인 곡선이다.

1. 이차함수와 그 그래프 115

116쪽

또 $x<0$일 때 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하고, $x>0$일 때 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

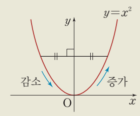
이상을 정리하면 다음과 같다.

이차함수 $y=x^2$의 그래프

❶ 원점을 지나고 아래로 볼록하다.

❷ y축에 대칭이다.

❸ $x<0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
$x>0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.



의사소통

문제 5 이차함수 $y=x^2$의 그래프는 x축보다 아래쪽에 나타나지 않는다. 그 이유를 설명하여라.

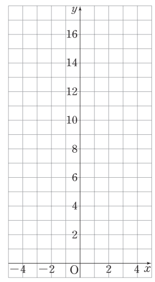
이차함수 $y=ax^2$의 그래프는 어떻게 그릴까?

생각 열기 다음 표는 두 이차함수 $y=x^2$과 $y=2x^2$에 대하여 x의 값에 대응하는 y의 값을 나타낸 것이다.

x	x^2	$2x^2$
⋮	⋮	⋮
-3	9	
-2	4	
-1	1	
0	0	
1	1	
2	4	
3	9	
⋮	⋮	⋮

(1) 표의 빈칸을 채워 보자.

(2) 표에서 구한 순서쌍 (x, y)를 좌표로 하는 점을 오른쪽 좌표평면 위에 나타내어 보자.



116 Ⅲ. 이차함수

2/4차시 **차시별 지도 방법** [교과 교실]

생각 열기	학생들 스스로 대응표를 완성하고, 순서쌍 (x, y)를 좌표평면 위에 나타낼 수 있도록 지도한다.
본문	생각 열기를 바탕으로 자연스럽게 이차함수 $y=x^2$의 그래프가 매끄러운 곡선이 됨을 알 수 있도록 설명한다. 컴퓨터 프로그램이나 그래픽 계산기를 이용하여 그래프를 그려 봄으로써 매끄러운 곡선이 됨을 직관적이고, 시각적으로 알 수 있도록 할 수 있다.
문제 5	수학적 의사소통을 활성화시키는 문제이므로 학생들에게 의견을 발표하도록 하고, 그래프를 해석할 수 있는 능력을 키울 수 있도록 지도한다.
생각 열기	학생들 스스로 대응표를 완성하고, 순서쌍 (x, y)를 좌표평면 위에 나타낼 수 있도록 지도한다.
본문, 함께 풀기 2	$y=ax^2$의 그래프를 그리는 방법을 설명한다.
문제 6	학생들 스스로 그래프를 그리게 함으로써 능동적인 수업이 되도록 한다.

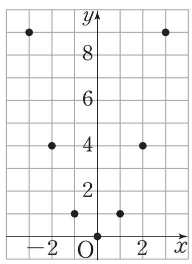
이차함수 $y=x^2$의 그래프는 어떻게 그릴까?

생각 열기 x의 값에 대응하는 y의 값을 구하고, 순서쌍 (x, y)를 좌표평면에 나타내는 활동을 통하여 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 그려 보도록 하는 생각 열기이다.

(1)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

(2)



문제 5 **$y=x^2$의 그래프 특징 알기**

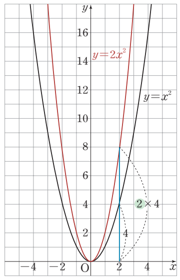
풀이 모든 실수 x에 대하여 $x^2 \geq 0$이므로 $y=x^2$의 그래프는 x축보다 아래쪽에 나타나지 않는다.

117쪽

2 생각 열기에서 같은 x의 값에 대하여 $2x^2$의 값은 x^2의 값의 2배가 된다.

따라서 이차함수 $y=2x^2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=x^2$의 그래프 위의 각 점의 y좌표를 2배로 하는 점을 잡아서 그릴 수 있다.

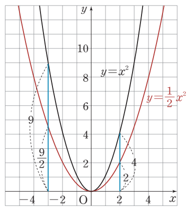
이때 이차함수 $y=2x^2$의 그래프는 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 마찬가지로 원점을 지나고 아래로 볼록하며 y축에 대칭인 곡선이 된다.



함께 풀기 2 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 이용하여 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프를 그려라.

풀이» $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프 위의 각 점의 y좌표를 $\frac{1}{2}$배로 하는 점을 잡아서 그린다.

따라서 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

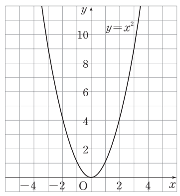


답» 풀이 참조

문제 6 오른쪽 그림은 이차함수 $y=x^2$의 그래프이다.
이 그래프를 이용하여 다음 이차함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=3x^2$

(2) $y=\frac{1}{3}x^2$



1. 이차함수와 그 그래프 **117**

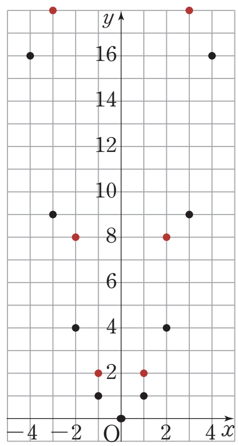
❯ 이차함수 $y=ax^2$의 그래프는 어떻게 그릴까?

생각 열기 $y=x^2$과 $y=2x^2$의 순서쌍 $(x,\ y)$를 좌표평면 위에 각각 나타내는 활동을 통하여 $y=x^2$과 $y=2x^2$의 함숫값을 비교해 보고 $y=2x^2$의 그래프를 그리는 방법을 유추해 보게 하는 생각 열기이다.

(1) 빈칸을 채우면 다음과 같다.

x	x^2	$2x^2$
⋮	⋮	⋮
-3	9	18
-2	4	8
-1	1	2
0	0	0
1	1	2
2	4	8
3	9	18
⋮	⋮	⋮

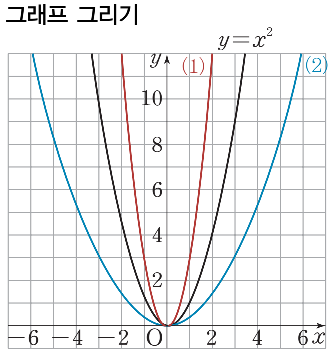
(2)



2 이차함수 $y=2x^2$의 그래프는 이차함수 $y=x^2$의 그래프 위의 각 점의 y좌표를 2배로 하는 점을 잡아서 그린 것과 같음을 설명한다. 또 **함께 풀기 2**를 통해 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프의 경우도 마찬가지로 생각할 수 있음을 설명한다.

문제 6 이차함수 $y=ax^2$의 그래프 그리기

풀이 두 이차함수 $y=3x^2$, $y=\frac{1}{3}x^2$은 $y=x^2$의 그래프 위의 각 점의 y좌표를 각각 3배, $\frac{1}{3}$배로 하는 점을 잡아서 그린 것이다.



수준별 교수·학습 방법

$y=ax^2(a>0)$의 그래프를 그리고, 그 그래프의 특징을 이해할 수 있다.

하 생각 열기에서와 같이 x의 값에 대응하는 y의 값을 나타내는 순서쌍 $(x,\ y)$를 좌표평면에 그리는 연습을 충분히 하여 이차함수 $y=ax^2$ 그래프를 그린다. 예를 들어 생각 열기와 마찬가지로 $y=x^2$, $y=3x^2$에서 같은 x의 값에 대하여 $3x^2$의 값이 x^2의 값의 3배가 됨을 이해하도록 한다. 다른 예에 대해서도 순서쌍 $(x,\ y)$를 좌표평면 위에 그리는 연습을 충분히 하여 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 그리는 방법을 익히도록 한다.

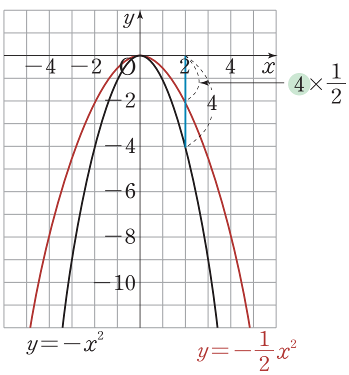
상 문제 5와 같이 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 그리고, 그래프의 특징을 학생들 스스로 찾고 토론할 수 있는 기회를 제공한다. 또 학생들이 컴퓨터 프로그램이나 그래픽 계산기를 사용하여 그래프를 그려 보는 활동을 통해 자신의 추측을 확인해 보도록 한다.

3/4차시 차시별 지도 방법

본문	대응표를 통해 이차함수 $y=-x^2$의 그래프가 $y=x^2$의 그래프와 x축에 대칭이 됨을 자연스럽게 받아들일 수 있도록 지도한다.
함께 풀기 3	본문의 내용을 바탕으로 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 이용하여 $y=-ax^2$의 그래프를 그리는 방법을 설명한다.
문제 7	학생들이 직접 좌표평면에 이차함수의 그래프를 그릴 수 있도록 지도한다.

3 두 이차함수 $y=x^2$과 $y=-x^2$에 대하여 순서쌍 $(x,\ y)$를 좌표평면에 각각 나타내고, $y=x^2$과 $y=-x^2$의 함숫값을 비교하여 $y=-x^2$의 그래프를 그리는 방법을 유추해 볼 수 있도록 지도할 수 있다.
이를 통하여 $y=-x^2$의 그래프가 $y=x^2$의 그래프와 x축에 서로 대칭임을 알게 한다.
또한 일반적으로 $a>0$일 때, 이차함수 $y=ax^2$의 그래프는 $y=-ax^2$의 그래프와 x축에 서로 대칭임을 알게 한다.

4 이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프는 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프를 x축에 대칭인 점을 잡아서 그렸지만 이차함수 $y=-x^2$의 그래프를 이용하여 $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프를 그릴 수도 있다.



문제 7 이차함수의 그래프 그리기

풀이 이차함수 $y=-\frac{1}{3}x^2$의 그래프는 이차함수 $y=\frac{1}{3}x^2$의 그래프 위의 각 점과 x축에 대칭인 점을 잡아서 그리고, 이차함수 $y=-3x^2$의 그래프는 $y=3x^2$의 그래프 위의 각 점과 x축에 대칭인 점을 잡아서 그리면 된다.

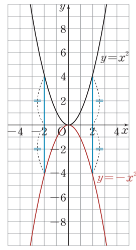
118쪽

3/4차시

이제 이차함수 $y=-x^2$의 그래프를 그려 보자.

3 다음 표는 x의 값이 정수일 때, 두 이차함수 $y=x^2$과 $y=-x^2$에 대하여 x의 값에 대응하는 y의 값을 나타낸 것이다.

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
x^2	$\cdots$	9	4	1	0	1	4	9	$\cdots$
$-x^2$	$\cdots$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	$\cdots$



위의 표에서 같은 x의 값에 대하여 $-x^2$의 값은 x^2의 값과 절댓값은 같고 부호는 반대이다.

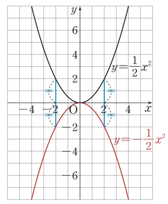
따라서 이차함수 $y=-x^2$의 그래프는 이차함수 $y=x^2$의 그래프 위의 각 점과 x축에 대칭인 점을 잡아서 그릴 수 있다.

일반적으로 $a>0$일 때, 이차함수 $y=-ax^2$의 그래프는 이차함수 $y=ax^2$의 그래프 위의 각 점과 x축에 대칭인 점을 잡아서 그릴 수 있다.

4 함께 풀기 3 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프를 이용하여 이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프를 그려라.

풀이》 $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프는 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프 위의 각 점과 x축에 대칭인 점을 잡아서 그린다.
따라서 $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.

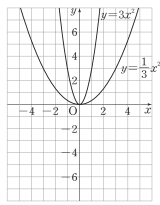
답》 풀이 참조



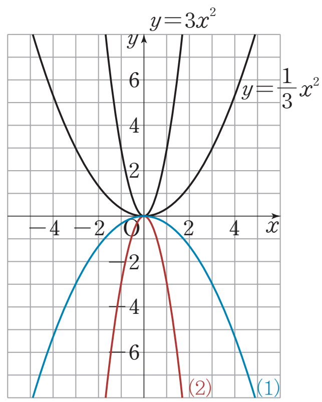
문제 7 오른쪽 그림은 두 이차함수 $y=\frac{1}{3}x^2$, $y=3x^2$의 그래프이다. 이 그래프를 이용하여 다음 이차함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=-\frac{1}{3}x^2$

(2) $y=-3x^2$



118 Ⅲ. 이차함수



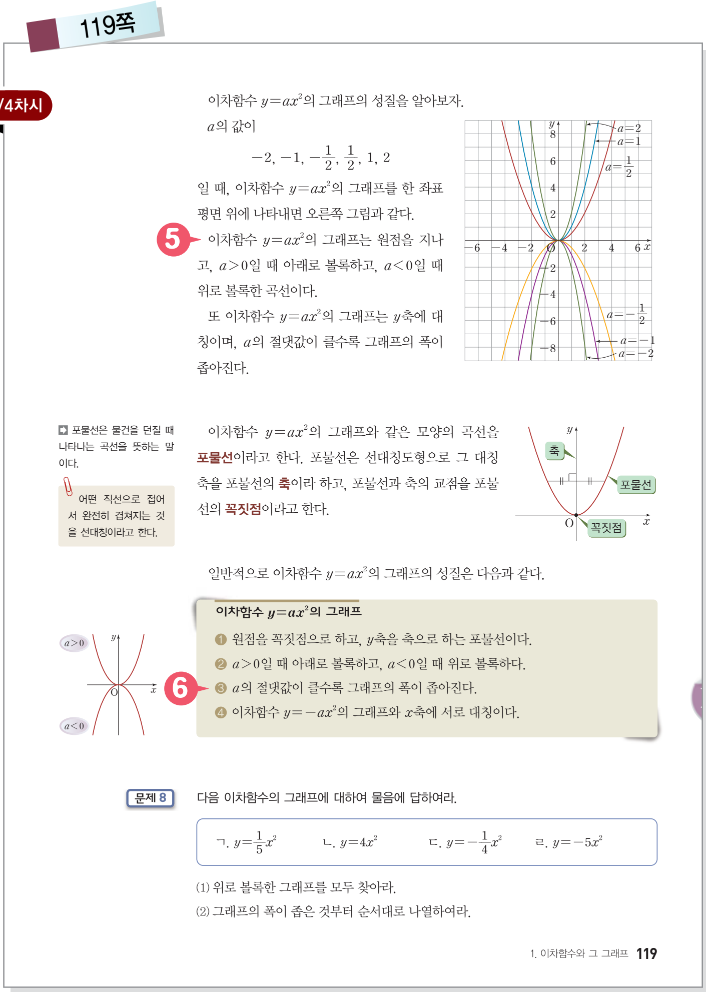
수준별 교수·학습 방법

이차함수 $y=ax^2(a>0)$의 그래프를 그리고 그 특징을 이해할 수 있다.

하 다양한 예에서 대응표를 이용하여 $y=ax^2$과 $y=-ax^2$의 함숫값은 절댓값이 같고 부호가 반대임을 충분히 연습하도록 한다.
예 $y=x^2$과 $y=-x^2$, $y=2x^2$과 $y=-2x^2$

상 이차함수 $y=ax^2(a<0)$에서 a의 값을 변화시키면서 그래프를 그려 보게 하고, 그래프의 특징을 직접 찾아볼 수 있도록 지도한다.

119쪽


4/4차시

이차함수 $y=ax^2$의 그래프의 성질을 알아보자.

a의 값이

$$-2,\ -1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2$$

일 때, 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 한 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

5 이차함수 $y=ax^2$의 그래프는 원점을 지나고, $a>0$일 때 아래로 볼록하고, $a<0$일 때 위로 볼록한 곡선이다.

또 이차함수 $y=ax^2$의 그래프는 y축에 대칭이며, a의 절댓값이 클수록 그래프의 폭이 좁아진다.

포물선은 물건을 던질 때 나타나는 곡선을 뜻하는 말이다.

어떤 직선으로 접어서 완전히 겹쳐지는 것을 선대칭이라고 한다.

이차함수 $y=ax^2$의 그래프와 같은 모양의 곡선을 **포물선**이라고 한다. 포물선은 선대칭도형으로 그 대칭축을 포물선의 **축**이라 하고, 포물선과 축의 교점을 포물선의 **꼭짓점**이라고 한다.

일반적으로 이차함수 $y=ax^2$의 그래프의 성질은 다음과 같다.

이차함수 $y=ax^2$의 그래프

❶ 원점을 꼭짓점으로 하고, y축을 축으로 하는 포물선이다.
❷ $a>0$일 때 아래로 볼록하고, $a<0$일 때 위로 볼록하다.
6 ❸ a의 절댓값이 클수록 그래프의 폭이 좁아진다.
❹ 이차함수 $y=-ax^2$의 그래프와 x축에 서로 대칭이다.

문제 8 다음 이차함수의 그래프에 대하여 물음에 답하여라.

ㄱ. $y=\frac{1}{5}x^2$ ㄴ. $y=4x^2$ ㄷ. $y=-\frac{1}{4}x^2$ ㄹ. $y=-5x^2$

(1) 위로 볼록한 그래프를 모두 찾아라.
(2) 그래프의 폭이 좁은 것부터 순서대로 나열하여라.

1. 이차함수와 그 그래프 119

4/4차시 차시별 지도 방법

본문	다양한 a의 값에 따라 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 한 좌표평면 위에 나타내어 그려봄으로써 이차함수의 특징을 비교해 볼 수 있도록 지도한다.
문제 8	학생 스스로 문제를 풀어 보게 함으로써 주어진 이차함수의 그래프의 특징에 대해 정리하는 기회가 되도록 지도한다.

5 다양한 a의 값에 대하여 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 한 좌표평면 위에 함께 그린 후, a의 값에 따라 그래프의 모양이 어떻게 변하는지 관찰하여 그래프의 성질을 이해하게 한다. 교과서 125쪽의 **컴퓨터로 하는 수학**을 이용하여 직관적으로 이해할 수 있도록 지도할 수 있다.

6 이차함수 $y=ax^2$의 그래프는 a의 절댓값이 클수록 그래프의 폭이 좁아짐을 예를 들어 설명한다.

문제 8 이차함수 그래프의 성질

풀이 (1) 위로 볼록한 그래프를 찾으면 ㄷ, ㄹ이다.

(2) $y=ax^2$에서 a의 절댓값이 클수록 그래프의 폭이 좁아지므로 그래프의 폭이 좁은 것부터 순서대로 나열하면 ㄹ, ㄴ, ㄷ, ㄱ이다.

보충 자료

일차함수 $y=ax$와 이차함수 $y=ax^2$의 그래프

일차함수 $y=ax(a>0)$는 x의 값이 1만큼 증가함에 따라 y의 값은 a만큼 일정하게 증가한다.

하지만 이차함수 $y=ax^2(a>0)$에서는 x의 값이 증가함에 따라 y의 값이 증가하는 구간도 있고, 감소하는 구간도 있다.

또한 일차함수와 달리 x의 값의 증감이 일정하지 않다. 즉, $x>0$일 때 x의 값이 1만큼 증가함에 따라 y의 값은 $3a$, $5a$, $7a$, ……와 같이 증가하는 값이 일정하지 않다.

수준별 교수·학습 방법

이차함수 $y=ax^2$의 그래프의 특징을 이해할 수 있다.

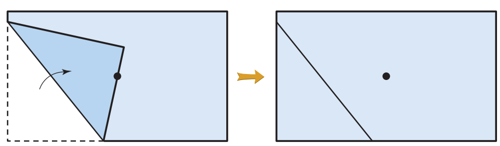
하 한 좌표평면 위에 여러 개의 그래프를 동시에 그려서 비교하는 것은 하 수준의 학생들에게 혼동을 줄 수 있으므로 ㉮와 같이 그래프 두 개만을 그려서 같은 x의 값에 대한 함숫값을 관찰하는 연습을 한 후 이차함수 $y=ax^2$의 그래프의 특징을 이해하도록 지도한다.

㉮ $y=x^2$과 $y=2x^2$: 그래프의 폭을 비교한다.
$y=2x^2$과 $y=-2x^2$: x축에 서로 대칭임을 알게 한다.

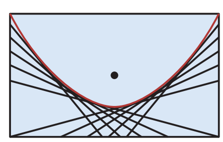
상 학생들 스스로 a의 값을 정하여 그래프를 그려 보게 하고, 그 결과를 친구들과 서로 토론하도록 하여 $y=ax^2$의 그래프의 특징을 스스로 찾을 수 있도록 지도한다.

참고 다음과 같은 종이접기를 이용하여 포물선을 만드는 활동을 통하여 학생들에게 포물선의 모양에 대하여 지도할 수 있다.

① 직사각형 모양의 종이의 가운데에 다음 그림과 같이 점을 찍고, 아래쪽의 가로선이 점 위에 놓이도록 접은 다음 다시 펼친다. 이때 접은 자국이 생긴다.



② 약간의 간격을 두고 ①의 과정을 되풀이하면 오른쪽 그림과 같이 포물선 모양의 선이 생김을 확인할 수 있다.



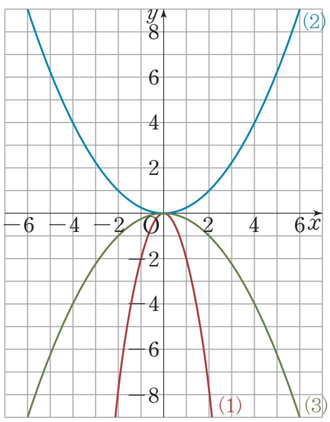
확인하기

1 평가의 주안점 이차함수인 것을 찾을 수 있다.

풀이 (1) 이차함수가 아니다.
(2) 이차함수이다.
(3) 이차함수가 아니다.
(4) 우변을 전개하면 $y=-3x^2-9x-6$이므로 이차함수이다.
따라서 이차함수인 것을 찾으면 (2), (4)이다.

2 평가의 주안점 이차함수의 그래프를 그릴 수 있다.

풀이



3 평가의 주안점 두 그래프의 공통된 성질을 찾을 수 있다.

풀이 (1) 두 이차함수는 모두 $\boxed{y}$축에 대하여 대칭인 그래프이다.
(2) 두 이차함수는 모두 ($\boxed{0}$, $\boxed{0}$)을 꼭짓점으로 하는 포물선이다.
(3) 두 이차함수의 그래프는 $\boxed{\text{아래}}$로 볼록하다.

4 평가의 주안점 이차함수의 그래프와 그 성질을 이해하여 응용 문제를 풀 수 있다.

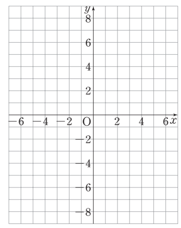
풀이 점 A의 좌표를 $\left(a, \frac{1}{5}a^2\right)$이라 할 때,
□OBAC가 정사각형이 되려면 점 A의 x좌표와 y좌표의 값이 같아야 하므로
$a=\frac{1}{5}a^2$
$a^2-5a=0$, $a(a-5)=0$
$a>0$이므로 $a=5$
따라서 □OBAC가 정사각형이 되기 위한 점 A의 좌표는 $(5, 5)$이다.

120쪽

확인하기

1 다음 중에서 이차함수인 것을 모두 찾아라.
(1) $y=-3x+2$
(2) $y=4x^2-1$
(3) $y=\frac{2}{x}$
(4) $y=-3(x+1)(x+2)$

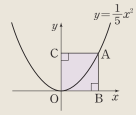
2 다음 이차함수의 그래프를 오른쪽 좌표평면 위에 그려라.
(1) $y=-2x^2$
(2) $y=\frac{1}{4}x^2$
(3) $y=-\frac{1}{4}x^2$



3 다음은 두 이차함수 $y=\frac{1}{6}x^2$, $y=6x^2$의 그래프의 공통인 성질이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.
(1) 두 이차함수는 모두 □축에 대칭인 그래프이다.
(2) 두 이차함수는 점 (□, □)을 꼭짓점으로 하는 포물선이다.
(3) 두 이차함수의 그래프는 □로 볼록하다.

수학적 과정 의사소통 추론 문제 해결

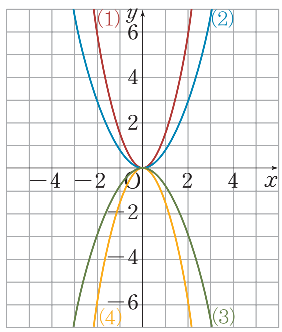
4 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=\frac{1}{5}x^2$ 위의 한 점 A에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 B, C라 하자. 점 A가 그래프 위를 움직일 때, □OBAC가 정사각형이 되기 위한 점 A의 좌표를 구하여라.
(단, 점 A는 제1사분면 위의 점이다.)



120 Ⅲ. 이차함수

보충 문제

다음 이차함수의 그래프에 알맞은 이차함수의 식을 **보기**에서 찾아 써라.



보기

ㄱ. $y=-\frac{3}{2}x^2$ ㄴ. $y=-\frac{3}{4}x^2$
ㄷ. $y=\frac{3}{2}x^2$ ㄹ. $y=\frac{3}{4}x^2$

답 (1) ㄷ (2) ㄹ (3) ㄴ (4) ㄱ

중단원 마무리하기

스스로 정리하기

1. (1) 이차함수 (2) 축, 꼭짓점
2. (1) y축 (2) 아래, 위
   (3) 좁아진다 (4) x축

기초 다지기

1 **평가의 주안점** 이차함의 뜻을 알 수 있다.

풀이 y를 x에 대한 식으로 나타내면
ㄱ. $y=4\pi x^2$이므로 이차함수이다.
ㄴ. $y=20x$이므로 이차함수가 아니다.
ㄷ. $y=x(5-x)=-x^2+5x$이므로 이차함수이다.
따라서 이차함수인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

2 **평가의 주안점** 이차함수의 함숫값을 구할 수 있다.

풀이 (1) $f(3)-f(-2)=-18+8=-10$
(2) $-2a^2=-8$에서 $a^2=4$
$a=\pm 2$
이때 a가 양수이므로 $a=2$이다.

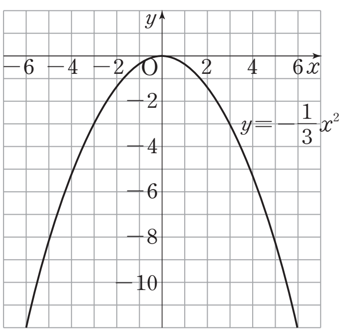
3 **평가의 주안점** 이차함수의 그래프가 지나는 점의 좌표를 대입하여 이차함수를 구할 수 있다.

풀이 $y=ax^2$ 그래프가 점 $(2,\ -3)$을 지나므로
$-3=4a$
따라서 $a=-\dfrac{3}{4}$이다.

기본 익히기

4 **평가의 주안점** 이차함수 $y=ax^2$의 그래프의 성질을 이해할 수 있다.

풀이



121쪽

중단원 마무리하기

스스로 정리하기

1. 다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.
(1) 함수 $y=f(x)$에서 y가 x에 대한 이차식 $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq 0$)로 나타날 때, 이 함수를 x에 대한 □라고 한다.
(2) 이차함수 $y=ax^2$의 그래프와 같은 모양의 곡선을 포물선이라 한다. 포물선은 선대칭도형으로 그 대칭축을 포물선의 □이라 하고, 축과 포물선의 교점을 포물선의 □이라고 한다.

2. 다음은 이차함수 $y=ax^2$의 그래프에 대한 설명이다. ( ) 안에서 알맞은 말을 골라라.
(1) (x축, y축)을 축으로 하고, 꼭짓점이 원점인 포물선이다.
(2) $a>0$일 때 (위, 아래)로 볼록하고, $a<0$일 때 (위, 아래)로 볼록하다.
(3) a의 절댓값이 클수록 그래프의 폭이 (넓어진다, 좁아진다).
(4) 이차함수 $y=ax^2$의 그래프는 이차함수 $y=-ax^2$의 그래프와 (x축, y축)에 서로 대칭이다.

기초 다지기

1 다음 중에서 y가 x의 이차함수인 것을 모두 찾아라.

ㄱ. 반지름의 길이가 $x$cm인 구의 겉넓이 $y\text{cm}^2$
ㄴ. 자전거를 타고 시속 20km로 x시간 동안 달린 거리 $y$km
ㄷ. 둘레의 길이가 10cm이고, 가로의 길이가 $x$cm인 직사각형의 넓이 $y\text{cm}^2$

이차함수의 뜻

2 이차함수 $f(x)=-2x^2$에 대하여 다음을 구하여라.
(1) $f(3)-f(-2)$의 값
(2) $f(a)=-8$이 되는 양수 a의 값

이차함수의 함숫값

3 이차함수 $y=ax^2$의 그래프가 점 $(2,\ -3)$을 지날 때, 상수 a의 값을 구하여라.

이차함수 $y=ax^2$의 그래프

1. 이차함수와 그 그래프 **121**

ㄱ. 위로 볼록한 그래프이다.
ㄴ. 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ 0)$이다.
ㄷ. y축에 대칭이다.
ㄹ. $y=\dfrac{1}{3}x^2$의 그래프와 x축에 서로 대칭이다.
ㅁ. $x>0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

5 **평가의 주안점** 이차함수 $y=ax^2$의 그래프의 성질을 이해할 수 있다.

풀이 $y=ax^2$의 그래프가 점 $(1,\ 5)$를 지나므로 $a=5$
$y=5x^2$의 그래프가 $(-2,\ b)$를 지나므로 $b=20$
따라서 $a+b=25$이다.

6 **평가의 주안점** 이차함수 $y=ax^2$의 그래프의 성질을 이해할 수 있다.

풀이 (1) 이차함수의 그래프가 아래로 볼록하려면 이차항의 계수가 양수이어야 하므로 ㄱ, ㄹ이다.
(2) $\left|-\dfrac{1}{4}\right|<\left|\dfrac{1}{3}\right|<|2|<|-5|$이므로 그래프의 폭이 넓은 순서대로 나열하면 ㄴ, ㄹ, ㄱ, ㄷ이다.

7 **평가의 주안점** 이차함수 $y=ax^2$의 그래프의 식을 구할 수 있다.

풀이 주어진 그래프 (1), (2)는 모두 원점이 꼭짓점인 이차함수이므로 $y=ax^2$이라 하자.

(1) 그래프가 $(2,\ 2)$를 지나므로 $2=4a$, $a=\frac{1}{2}$

따라서 이차함수의 식은 $y=\frac{1}{2}x^2$이다.

(2) 그래프가 $(1,\ -2)$를 지나므로 $-2=a$, $a=-2$

따라서 이차함수의 식은 $y=-2x^2$이다.

8 **평가의 주안점** 원점과 다른 한 점을 지나는 이차함수의 식을 구할 수 있다.

풀이 원점이 꼭짓점인 이차함수이므로 $y=ax^2$이라 하자.

이때 그래프가 점 $(-6,\ 12)$를 지나므로

$12=36a$, $a=\frac{1}{3}$ …… ❶

따라서 이차함수의 식은 $y=\frac{1}{3}x^2$이고, 이것이 점 $(k,\ 3)$을 지나므로 $3=\frac{1}{3}k^2$

$k^2=9$, $k=\pm 3$ …… ❷

이때 k는 양수이므로 $k=3$이다. …… ❸

단계	채점 기준	배점 비율
❶	이차항의 계수를 구한다.	40%
❷	k의 값을 구한다.	40%
❸	조건에 맞는 k의 값을 구한다.	20%

9 **평가의 주안점** 이차함수 $y=ax^2$의 그래프의 성질을 이해할 수 있다.

풀이 $y=ax^2$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프보다 폭이 넓고 아래로 볼록하므로 a의 값의 범위는 $0<a<1$ 이다.

따라서 이차함수의 식이 될 수 있는 것은 ㄷ, ㅂ이다.

실력 기르기

10 **평가의 주안점** 이차함수 $y=ax^2$의 그래프의 성질을 이해할 수 있다.

풀이 이차함수 $y=ax^2$의 그래프와 $y=bx^2$의 그래프가 x축에 대하여 서로 대칭이므로 a의 절댓값과 b의 절댓값이 같고, 부호가 반대이다.

즉, $b=-a$ …… ①

①을 $ab=-9$에 대입하면 $a(-a)=-9$

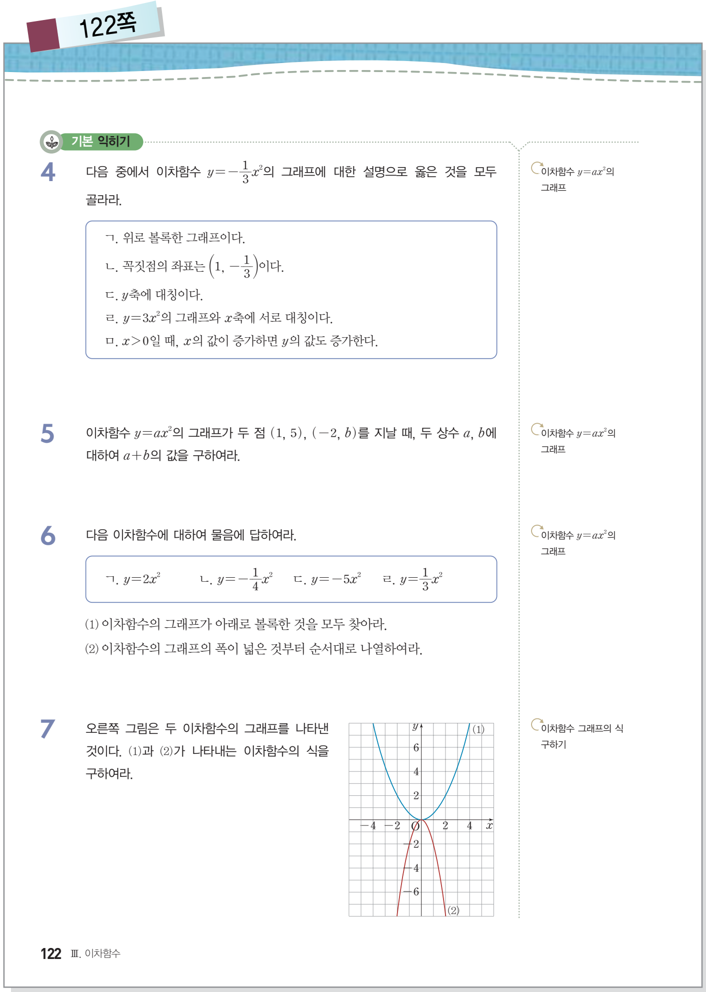
$-a^2=-9$, $a^2=9$

즉, $a=\pm 3$

이때 $a>0$이므로 $a=3$

①에 의하여 $b=-3$

따라서 $a=3$, $b=-3$이다.


122쪽

기본 익히기

4 다음 중에서 이차함수 $y=-\frac{1}{3}x^2$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 골라라.

ㄱ. 위로 볼록한 그래프이다.
ㄴ. 꼭짓점의 좌표는 $\left(1,\ -\frac{1}{3}\right)$이다.
ㄷ. y축에 대칭이다.
ㄹ. $y=3x^2$의 그래프와 x축에 서로 대칭이다.
ㅁ. $x>0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

이차함수 $y=ax^2$의 그래프

5 이차함수 $y=ax^2$의 그래프가 두 점 $(1,\ 5)$, $(-2,\ b)$를 지날 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

이차함수 $y=ax^2$의 그래프

6 다음 이차함수에 대하여 물음에 답하여라.

ㄱ. $y=2x^2$ ㄴ. $y=-\frac{1}{4}x^2$ ㄷ. $y=-5x^2$ ㄹ. $y=\frac{1}{3}x^2$

(1) 이차함수의 그래프가 아래로 볼록한 것을 모두 찾아라.
(2) 이차함수의 그래프의 폭이 넓은 것부터 순서대로 나열하여라.

이차함수 $y=ax^2$의 그래프

7 오른쪽 그림은 두 이차함수의 그래프를 나타낸 것이다. (1)과 (2)가 나타내는 이차함수의 식을 구하여라.

이차함수 그래프의 식 구하기

122 Ⅲ. 이차함수

11 **평가의 주안점** 이차함수 $y=ax^2$의 그래프의 성질을 이해하고, 이를 응용할 수 있다.

풀이 이차함수 $y=-\frac{1}{4}x^2$의 그래프와 직선 $y=-9$가 만나는 점의 x좌표의 값을 구하면

$-\frac{1}{4}x^2=-9$ …… ❶

$\frac{1}{4}x^2=9$, $x^2=36$

$x=\pm 6$

따라서 점 A의 좌표는 $(-6,\ -9)$, 점 B의 좌표는 $(6,\ -9)$이다. ……… ❷

이때 점 $(0,\ -9)$를 H라 하면 △OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OH}=\frac{1}{2}\times 12\times 9$

$=54$ …… ❸

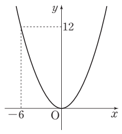
이다.

단계	채점 기준	배점 비율
❶	두 그래프가 만나는 점의 좌표를 찾는 식을 만든다.	30%
❷	두 점 A, B의 좌표를 구한다.	각 25%
❸	△OAB의 넓이를 구한다.	20%

123쪽

서술형

8 오른쪽 그림과 같이 원점을 꼭짓점으로 하고, 점 $(-6, 12)$를 지나는 이차함수의 그래프가 점 $(k, 3)$을 지날 때, 양수 k의 값을 구하고, 그 과정을 서술하여라.



이차함수 $y=ax^2$의 그래프

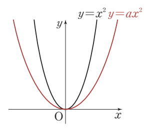
의사소통

9 다음에서 이차함수 $y=ax^2$의 그래프가 될 수 있는 것을 모두 찾고, 그 이유를 말하여라.

ㄱ. $y=\frac{3}{2}x^2$　　ㄴ. $y=-\frac{3}{2}x^2$

ㄷ. $y=\frac{2}{3}x^2$　　ㄹ. $y=-\frac{2}{3}x^2$

ㅁ. $y=-x^2$　　ㅂ. $y=\frac{1}{2}x^2$



이차함수 $y=ax^2$의 그래프

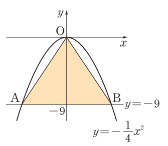
실력 기르기

10 두 이차함수 $y=ax^2$, $y=bx^2$의 그래프가 x축에 서로 대칭이고, $ab=-9$일 때, 두 상수 a, b의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

두 그래프가 x축에 서로 대칭이므로 a와 b의 절댓값은 같다.

문제 해결 서술형

11 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=-\frac{1}{4}x^2$의 그래프와 직선 $y=-9$가 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이를 구하고, 그 과정을 서술하여라.



$y=-\frac{1}{4}x^2$의 그래프에서 y의 값이 -9인 x의 값을 찾는다.

124쪽

창의·인성 키우기

개념 바루기 다음의 문제에 대한 수인이의 풀이에서 옳지 않은 부분을 찾아 바르게 고쳐라.

다음 이차함수 중에서 그래프의 폭이 좁은 것부터 순서대로 나열하여라.

$y=2x^2$, $y=-\frac{1}{2}x^2$, $y=\frac{3}{2}x^2$, $y=-3x^2$

풀이 이차함수의 그래프의 폭은 이차항의 계수가 클수록 좁아지므로 폭이 좁은 것부터 순서대로 나열하면

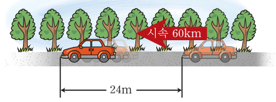
$y=2x^2$, $y=\frac{3}{2}x^2$, $y=-\frac{1}{2}x^2$, $y=-3x^2$

문제 만들기 다음 주어진 이차함수에 대하여 [예시]와 같이 기준을 정한 다음 그 기준에 해당되는 이차함수를 찾아 써라.

$y=\frac{3}{4}x^2$,　$y=x^2$,　$y=5x^2$,　$y=-\frac{3}{4}x^2$,　$y=-x^2$,　$y=-5x^2$

[예시] 위로 볼록한 이차함수: $y=-\frac{3}{4}x^2$, $-x^2$, $y=-5x^2$

생각 키우기 자동차를 운전할 때, 운전자가 브레이크를 밟은 후 정지할 때까지 진행한 거리를 제동 거리라고 한다. 시속 $x$km로 달리는 자동차의 제동 거리를 ym라고 할 때, y는 x의 제곱에 비례한다. 시속 60km로 달리는 어느 자동차의 제동 거리가 24m라 할 때, 다음 물음에 답하여라.



(1) y를 x에 대한 식으로 나타내어라.

(2) 비오는 날 시속 72km로 달리던 자동차의 운전자가 전방에 있는 위험 물체를 발견하고, 1초가 지나 브레이크를 밟았다. 비오는 날의 제동 거리가 25% 길어진다고 할 때, 운전자가 위험 물체를 발견한 후 자동차가 정지할 때까지 진행한 거리를 구하여라.

창의·인성 키우기

개념 바루기

지도상의 유의점 이차함수의 그래프의 폭을 비교할 때에는 이차항의 계수의 절댓값을 비교해야 함에 유의하게 한다.

올바른 풀이 이차함수의 그래프의 폭은 이차항의 계수의 절댓값이 클수록 좁아지므로 폭이 좁은 것부터 순서대로 나열하면

$y=-3x^2$, $y=2x^2$, $y=\frac{3}{2}x^2$, $y=-\frac{1}{2}x^2$이다.

창의 · 인성 이차함수의 그래프를 그리면서 실수했던 부분을 발표해 볼 수 있는 시간을 제공하여 서로의 경험을 공유할 수 있도록 한다.

문제 만들기

지도상의 유의점 이차함수의 그래프의 특징을 파악하여 학생 스스로 기준을 정하여 분류할 수 있도록 지도한다.

예시 답안 ① x축에 서로 대칭인 이차함수:

$y=\frac{3}{4}x^2$과 $y=-\frac{3}{4}x^2$, $y=5x^2$과 $y=-5x^2$,

$y=x^2$과 $y=-x^2$

② $x>0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하는 이차함수:

$y=\frac{3}{4}x^2$, $y=x^2$, $y=5x^2$

창의 · 인성 다양한 분류 기준이 나올 수 있도록 격려하여 확산적 사고와 수렴적 사고를 함께 기를 수 있도록 한다.

생각 키우기

지도상의 유의점 이차함수를 활용하여 실생활의 문제를 해결할 수 있는 능력을 키울 수 있도록 지도한다.

(1) y는 x의 제곱에 비례하므로 $y=ax^2$이라 하자.

시속 60km로 달리는 자동차의 제동 거리가 24m이므로

$24=a\times 60^2$, $a=\frac{1}{150}$

따라서 $y=\frac{1}{150}x^2$이다.

(2) 시속 72km로 달리던 자동차의 운전자가 전방에 있는 위험 물체를 발견하고 1초가 지나 브레이크를 밟았으므로 그동안 자동차가 움직인 거리를 구하면

72000(m) : 3600(초)=(1초 동안 움직인 거리)(m) : 1(초)

그러므로 1초 동안 움직인 거리는 20m이다.

비가 오지 않는 날 시속 72km로 달리는 자동차의 제동 거리는

$\frac{1}{150}\times72\times72=34.56(\text{m})$

비오는 날은 제동 거리가 25% 길어지므로 제동 거리는

$$\begin{aligned}34.56+34.56\times0.25&=34.56+8.64\\&=43.2(\text{m})\end{aligned}$$

따라서 비오는 날 시속 72 km로 달리는 자동차에서 운전자가 전방에 있는 위험 물체를 발견한 후 진행한 거리는

$20+43.2=63.2(\text{m})$

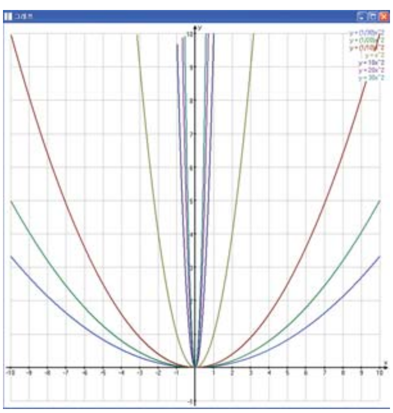
이다.

창의 · 인성 문제에서 제시된 상황을 친구에게 설명해 보도록 함으로써 문제 상황을 이해하도록 하고, 문제를 해결하는 과정에서 여러 조건을 적절히 활용하는 능력을 기르게 한다. 제동 거리는 이차함수가 활용되는 흥미있는 소재이므로 호기심을 가지고 접근할 수 있도록 하고, 이를 끝까지 해결할 수 있도록 격려한다.

컴퓨터로 하는 수학

지도상의 유의점 컴퓨터 프로그램이나 그래픽 계산기를 이용하여 함수의 그래프를 그려 보고, 그래프의 특징을 탐구할 수 있도록 지도한다. 지필 환경보다 역동적인 탐구 환경을 제공함으로써 학생들의 흥미를 이끌어낼 수 있도록 한다.

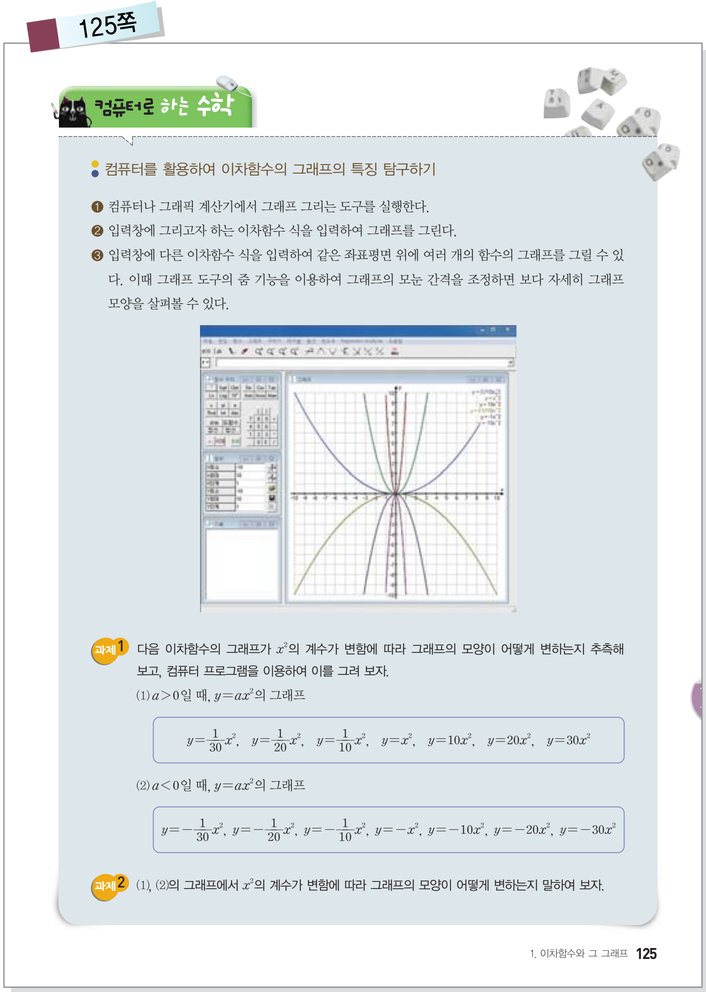
과제 1 (1)



위의 그래프에서 폭이 좁은 것부터 순서대로 나열하면

$y=30x^2$, $y=20x^2$, $y=10x^2$, $y=x^2$, $y=\frac{1}{10}x^2$,

$y=\frac{1}{20}x^2$, $y=\frac{1}{30}x^2$이다.


125쪽

컴퓨터로 하는 수학

컴퓨터를 활용하여 이차함수의 그래프의 특징 탐구하기

❶ 컴퓨터나 그래픽 계산기에서 그래프 그리는 도구를 실행한다.

❷ 입력창에 그리고자 하는 이차함수 식을 입력하여 그래프를 그린다.

❸ 입력창에 다른 이차함수 식을 입력하여 같은 좌표평면 위에 여러 개의 함수의 그래프를 그릴 수 있다. 이때 그래프 도구의 줌 기능을 이용하여 그래프의 모눈 간격을 조정하면 보다 자세히 그래프 모양을 살펴볼 수 있다.

과제 1 다음 이차함수의 그래프가 x^2의 계수가 변함에 따라 그래프의 모양이 어떻게 변하는지 추측해 보고, 컴퓨터 프로그램을 이용하여 이를 그려 보자.

(1) $a>0$일 때, $y=ax^2$의 그래프

$y=\frac{1}{30}x^2$, $y=\frac{1}{20}x^2$, $y=\frac{1}{10}x^2$, $y=x^2$, $y=10x^2$, $y=20x^2$, $y=30x^2$

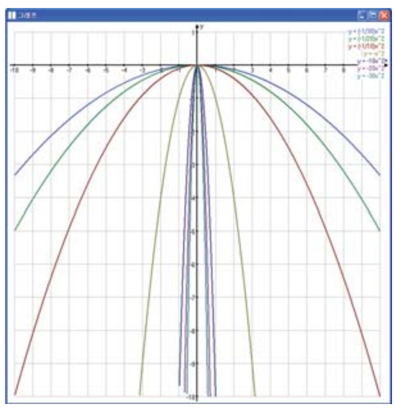
(2) $a<0$일 때, $y=ax^2$의 그래프

$y=-\frac{1}{30}x^2$, $y=-\frac{1}{20}x^2$, $y=-\frac{1}{10}x^2$, $y=-x^2$, $y=-10x^2$, $y=-20x^2$, $y=-30x^2$

과제 2 (1), (2)의 그래프에서 x^2의 계수가 변함에 따라 그래프의 모양이 어떻게 변하는지 말하여 보자.

1. 이차함수와 그 그래프 125

(2)



위의 그래프에서 폭이 좁은 것부터 순서대로 나열하면

$y=-30x^2$, $y=-20x^2$, $y=-10x^2$, $y=-x^2$,

$y=-\frac{1}{10}x^2$, $y=-\frac{1}{20}x^2$, $y=-\frac{1}{30}x^2$이다.

과제 2 $y=ax^2$의 그래프에서 $a>0$일 때 a의 값이 커질수록 그래프의 폭이 좁아지고, $a<0$일 때 a의 값이 커질수록 그래프의 폭이 넓어진다.

창의 · 인성 컴퓨터 프로그램을 이용하여 학생 스스로 탐구하게 한 후, 자신의 활동 결과를 논리적으로 설명할 수 있도록 한다.

중단원 평가 문제

학년 반 번호:	이름:	/ 점수:

선다형은 각 5점, 나머지 문항은 각 문항에 표시함.

01 다음 중 이차함수인 것은?

① $y=-2x+4$　② $y=(x-1)^2-x^2$
③ $y=(x-2)(x+3)$　④ $y=x^3-2x^2$
⑤ $y=\dfrac{3}{x}$

02 다음 중 y가 x에 대한 이차함수로 나타나지 않는 것은? (정답 2개)

① 시속 30km인 자전거로 x시간 동안 달린 거리 $y$km
② 밑변의 길이와 높이가 모두 $x$cm인 직각이등변삼각형의 넓이 $y\text{cm}^2$
③ 반지름의 길이가 x cm인 원의 넓이 $y\text{cm}^2$
④ 한 봉지에 호두과자가 4개씩 들어 있을 때, x봉지에 들어 있는 호두과자의 개수 y
⑤ 아랫변의 길이가 5cm, 윗변의 길이가 $x$cm, 높이가 $x$cm인 사다리꼴의 넓이 $y\text{cm}^2$

03 이차함수 $f(x)=2x^2-3x+2$에 대하여 $f(a)=1$을 만족하는 a의 값은?

① $a=-2$ 또는 $a=1$　② $a=-1$ 또는 $a=\dfrac{1}{3}$
③ $a=\dfrac{1}{2}$ 또는 $a=1$　④ $a=1$ 또는 $a=2$
⑤ $a=2$ 또는 $a=3$

04 다음 이차함수의 그래프 중 폭이 가장 좁은 것은?

① $y=-2x^2$　② $y=-\dfrac{1}{4}x^2$　③ $y=\dfrac{2}{5}x^2$
④ $y=\dfrac{3}{2}x^2$　⑤ $y=3x^2$

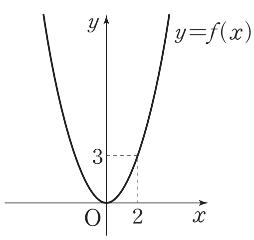
05 이차함수 $y=-5x^2$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 **보기**에서 모두 고른 것은?

보기

ㄱ. 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ -5)$이다.
ㄴ. 아래로 볼록한 함수이다.
ㄷ. y축에 대하여 대칭이다.
ㄹ. $x>0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
ㅁ. 두 점 $(1,\ -5)$, $(-1,\ -5)$를 지난다.

① ㄱ, ㄹ　② ㄷ, ㅁ　③ ㄱ, ㄷ, ㅁ
④ ㄴ, ㄷ, ㄹ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄹ, ㅁ

06 오른쪽 그림과 같은 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $f(-3)$의 값을 구하면?



① $\dfrac{9}{4}$　② $\dfrac{27}{4}$
③ $\dfrac{4}{9}$　④ $\dfrac{4}{27}$
⑤ $\dfrac{9}{27}$

07 다음 이차함수의 그래프 중 이차함수 $y=-3x^2$의 그래프와 x축에 서로 대칭인 것은?

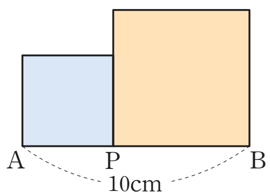
① $y=3x^2$　② $y=\dfrac{2}{3}x^2$　③ $y=\dfrac{1}{3}x^2$
④ $y=-\dfrac{1}{3}x^2$　⑤ $y=-\dfrac{2}{3}x^2$

단답형

08 이차함수 $y=ax^2$의 그래프가 두 점 $(-3, 3)$, $(2, b)$를 지날 때, 두 상수 a, b에 대하여 $b-a$의 값을 구하여라. [6점]

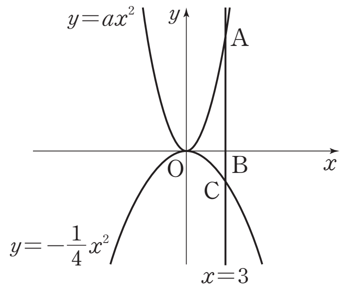
09 이차함수 $y=ax^2$의 그래프는 이차함수 $y=10x^2$의 그래프보다 폭이 넓고, $y=-3x^2$의 그래프보다 폭이 좁다. 이때 정수 a의 값의 합을 구하여라. [8점]

10 다음 그림과 같이 길이가 10cm인 선분 AB 위에 한 점 P가 움직인다. $\overline{AP}=x$cm일 때, $\overline{AP}$, $\overline{BP}$를 각각 한 변으로 하는 두 정사각형의 넓이의 합을 $y$cm^{2}라 할 때, y를 x에 대한 식으로 나타내어라. [10점]

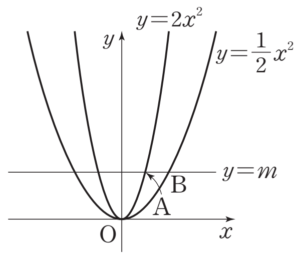


서술형

11 직선 $x=3$이 이차함수 $y=ax^2$의 그래프와 제1사분면에서 만나는 점을 A, x축과 만나는 점을 B, $y=-\frac{1}{4}x^2$의 그래프와 만나는 점을 C라 할 때, $\overline{AB}:\overline{BC}=4:1$이다. 상수 a의 값을 구하고, 그 과정을 서술하여라. [12점]



12 다음 그림과 같이 두 이차함수 $y=2x^2$, $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프가 직선 $y=m$의 그래프와 제1사분면에서 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{AB}=1$이 되게 하는 m의 값을 구하고, 그 과정을 서술하여라. [14점]



수리 논술형

13 건물의 옥상에서 공을 떨어뜨렸을 때, 시간 x초와 떨어진 거리 ym 사이의 관계를 표로 나타내면 다음과 같다.

시간 x(초)	0	1	2	3	$\cdots$
거리 y(m)	0	5	20	45	$\cdots$

(1) 위의 표에서 x, y 사이의 관계를 이차함수의 식으로 나타내고, 그 과정을 설명하여라. [8점]

(2) 공이 4초 후에 땅바닥에 떨어졌을 때, 공을 떨어뜨린지 몇 초 후에 공이 건물 전체 높이의 $\frac{3}{4}$ 지점을 통과했는지 구하고, 그 과정을 설명하여라. [7점]

중단원 평가 문제

01 ③	02 ①, ④	03 ③	04 ⑤
05 ②	06 ②	07 ①	08 1
09 0	10 $y=2x^2-20x+100$		
11~13 풀이 참조			

01 평가 기준 이차함수의 뜻을 알고 있는가?

풀이 ① $y=-2x+4$
② $y=(x-1)^2-x^2=-2x+1$
③ $y=(x-2)(x+3)=x^2+x-6$
④ $y=x^3-2x^2$
⑤ $y=\frac{3}{x}$
따라서 이차함수인 것은 ③이다.

02 평가 기준 주어진 문장을 식으로 나타내고, 이차함수가 되는 것을 찾을 수 있는가?

풀이 ① $y=30x$ ② $y=\frac{1}{2}x^2$
③ $y=\pi x^2$ ④ $y=4x$
⑤ $y=\frac{1}{2}(5+x)x=\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x$
따라서 이차함수가 아닌 것은 ①, ④이다.

03 평가 기준 이차함수의 함숫값을 구할 수 있는가?

풀이 $f(a)=1$이므로 $x=a$를 대입하면 $2a^2-3a+2=1$
$2a^2-3a+1=0$
$(2a-1)(a-1)=0$
따라서 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=1$이다.

04 평가 기준 이차함수의 그래프의 폭을 비교할 수 있는가?

풀이 이차함수의 그래프 중에서 폭이 가장 좁은 것은 이차항의 계수의 절댓값이 가장 클 때이므로 $y=3x^2$의 그래프의 폭이 가장 좁다.

05 평가 기준 이차함수의 그래프의 특징을 알 수 있는가?

풀이 ㄱ. 꼭짓점의 좌표는 $(0, 0)$이다.
ㄴ. 위로 볼록한 함수이다.
ㄷ. y축에 대하여 대칭이다.
ㄹ. $x>0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
ㅁ. 두 점 $(1, -5)$, $(-1, -5)$를 지난다.
따라서 옳은 것은 ㄷ, ㅁ이다.

06 평가 기준 이차함수의 식과 함숫값을 구할 수 있는가?

풀이 원점을 지나고 아래로 볼록한 이차함수이므로
$y=ax^2(a>0)$
이라 하자.
점 $(2, 3)$을 지나므로 $x=2$, $y=3$을 대입하면
$3=4a$, $a=\frac{3}{4}$
따라서 주어진 이차함수의 그래프의 식은 $y=\frac{3}{4}x^2$이므로
$f(-3)=\frac{3}{4}\times(-3)^2=\frac{27}{4}$
이다.

07 평가 기준 x축에 대하여 대칭인 함수를 찾을 수 있는가?

풀이 이차함수 $y=-3x^2$의 그래프와 x축에 서로 대칭인 것은 $y=3x^2$의 그래프이다.

08 평가 기준 이차함수의 그래프가 지나는 점을 이용하여 미지수를 구할 수 있는가?

풀이 이차함수 $y=ax^2$의 그래프가 점 $(-3, 3)$을 지나므로
$3=9a$, $a=\frac{1}{3}$
따라서 이차함수는 $y=\frac{1}{3}x^2$이고, 이 그래프가 점 $(2, b)$를 지나므로
$b=\frac{4}{3}$
따라서 $b-a=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}=1$이다.

09 평가 기준 이차함수의 그래프의 폭을 비교할 수 있는가?

풀이 $3<|a|<10$이므로 정수 a의 값을 구하면
$-9, -8, -7, -6, -5, -4, 4, 5, 6, 7, 8, 9$
이다.
따라서 정수 a의 모든 값이 합은 0이다.

10 평가 기준 주어진 내용을 이차함수의 식으로 나타낼 수 있는가?

풀이 $\overline{AP}=x$cm라 하면 $\overline{BP}=(10-x)$cm이다.
두 정사각형의 넓이의 합이 $y$cm^{2}이므로
$y=x^2+(10-x)^2$
$=x^2+100-20x+x^2$
$=2x^2-20x+100$
이다.

11 평가 기준 이차함수 그래프 위에서 거리의 비를 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

풀이 직선 $x=3$과 이차함수 $y=ax^2$의 그래프가 제1사분면에서 만나는 점 A의 좌표는 $(3, 9a)$이고, x축과 만나는 점 B의 좌표는 $(3, 0)$이다. …… ①
또 $y=-\frac{1}{4}x^2$의 그래프와 만나는 점 C의 좌표는
$\left(3, -\frac{9}{4}\right)$이다. …… ②
조건에서 $\overline{AB}:\overline{BC}=4:1$이므로
$9a:\frac{9}{4}=4:1$
$9a=9$
따라서 $a=1$이다. …… ③

단계	채점 기준	배점
①	두 점 A, B의 좌표를 구한다.	각 3점
②	점 C의 좌표를 구한다.	3점
③	a의 값을 구한다.	3점

12 평가 기준 이차함수의 그래프 위에 있는 점의 좌표를 구할 수 있는가?

풀이 $y=2x^2$의 그래프와 직선 $y=m$이 제1사분면에서 만나는 점의 x좌표의 값을 구하면
$2x^2=m,\ x^2=\frac{m}{2}$
$x>0$이므로 $x=\sqrt{\frac{m}{2}}$
따라서 제1사분면 위의 점 A의 좌표는 $\left(\sqrt{\frac{m}{2}}, m\right)$이다.
…… ①
또 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프와 직선 $y=m$이 제1사분면에서 만나는 점의 x좌표의 값을 구하면
$\frac{1}{2}x^2=m,\ x^2=2m$
$x>0$이므로 $x=\sqrt{2m}$
따라서 제1사분면 위의 점 B의 좌표는 $(\sqrt{2m}, m)$이다.
…… ②
조건에서 $\overline{AB}=1$이므로
$\sqrt{2m}-\sqrt{\frac{m}{2}}=1$ …… ③
$\sqrt{2}\sqrt{m}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{m}=1$
$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{m}=1,\ \sqrt{m}=\sqrt{2}$
따라서 $m=2$이다. …… ④

단계	채점 기준	배점
①	점 A의 좌표를 구한다.	5점
②	점 B의 좌표를 구한다.	5점
③	조건을 만족하는 식을 세운다.	2점
④	m의 값을 구한다.	2점

13 평가 기준 주어진 x, y의 값을 이용하여 이차함수의 식을 구할 수 있는가?

풀이 (1) 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$라 하면
$x=0$일 때, $y=0$이므로 $c=0$
$x=1$일 때, $y=5$이므로
$a+b=5$ …… ㉠
$x=2$일 때, $y=20$이므로
$4a+2b=20$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=5,\ b=0$ …… ①
따라서 구하는 이차함수는 $y=5x^2$이다. …… ②
(2) 공이 4초 후에 땅바닥에 떨어졌으므로 건물 전체의 높이는 $5\times4^2=5\times16=80$(m)이다. 건물 전체 높이의 $\frac{3}{4}$지점은 땅바닥으로부터 60m 지점이다.
즉, 공을 떨어뜨린 후 공이 20m를 떨어졌을 때의 시간을 구하면 된다. 표에서 20m를 떨어졌을 때의 시간은 2초이다. …… ③

단계	채점 기준	배점
①	이차함수의 식을 세우고 a, b, c의 값을 구하는 방법을 설명한다.	각 2점
②	이차함수의 식을 구한다.	2점
③	공이 건물 전체 높이의 $\frac{3}{4}$지점을 통과하는 시간을 구하는 과정을 설명한다.	7점