VI 삼각비

VI

삼각비

1 삼각비

2 삼각비의 활용

학습한 내용

중학교 수학 ❷

삼각형과 사각형의 성질

도형의 닮음

중학교 수학 ❸

피타고라스 정리

본 단원의 내용

1. 삼각비

2. 삼각비의 활용

학습할 내용

고등학교 미분과 적분 Ⅱ

삼각함수의 뜻과 그래프

■ 단원 배경

탑의 높이를 직접 재지 않고도 그 높이를 알 수 있을까? 해변에서 보이는 바다 위 배까지의 거리를 측정해 보지 않고도 알 수 있을까? 첨단 기기가 없었던 시대에는 직각삼각형의 변의 길이와 각의 크기를 이용한 삼각비로 높이나 거리 등을 구했다고 한다. 삼각비는 고대 이집트의 피라미드와 신라 시대의 석굴암 등의 건축물을 지을 때에도 활용되었으며, 천체를 관측하거나 토지를 측량할 때에도 사용되었던 것으로 보인다. 삼각비는 오늘날에도 다양한 분야에서 활용되고 있다.

1 단원을 들어가면서

삼각비를 이용하여 삼각형의 변의 길이, 각의 크기 등을 계산하는 삼각법은 오래전부터 여러 분야에서 활용되어 왔다.

‘고대 이집트인들이 피라미드를 만들거나 홍수가 지나간 다음 경작지의 경계 정리를 하는 데에 삼각비를 활용했다.’는 등의 삼각비의 활용에 관한 많은 기록들이 전해져 내려오고 있다.

고대에 삼각법에 관한 연구를 본격적으로 시작한 사람은 고대 그리스의 히파르코스(Hipparchos ; ?~B.C.? 125)이다. 히파르코스는 천문학을 연구하면서 구면 위의 두 점 사이의 거리와 각의 크기를 재기 위하여 삼각형의 두 변의 길이의 비를 이용하였다. 직각삼각형의 두 변의 길이의 비를 ‘삼각비’라고 하는데, 삼각비는 ‘피타고라스 정리’와 함께 천문학, 측량학, 건축학, 물리학, 항해술 등에 활용되어 왔고, 오늘날에도 천문 · 기상학, 우주 과학 등 더 많은 분야에서 폭넓게 활용되고 있다.

이 단원은 삼각비와 삼각비의 활용으로 구성되어 있다. 삼각비에서는 직각삼각형의 변의 길이의 비를 이용한 삼각비의 뜻을 이해하고, 여러 가지 삼각비의 값을 구할 수 있도록 하며, 삼각비의 활용에서는 삼각비를 활용하여 거리를 구하고, 삼각형의 넓이를 구할 수 있도록 한다.

❷ 단원의 지도 목표

1. 삼각비

(1) 삼각비의 뜻을 알고, 간단한 삼각비의 값을 구할 수 있게 한다.

2. 삼각비의 활용

(1) 삼각비를 활용하여 다양한 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

❸ 단원의 교수·학습상의 유의점

1. 삼각비

(1) 삼각비 사이의 관계는 다루지 않는다.
(2) 삼각비의 값은 0°에서 90°까지의 각도에 대한 것을 다루고, 삼각비의 그래프는 다루지 않는다.

2. 삼각비의 활용

(1) 삼각비의 활용은 단순한 소재를 택하여 간단히 다룬다.

❹ 단원의 지도 계통

학습한 내용		본 단원의 내용	학습할 내용	
중학교 수학 ❷	- 이등변삼각형의 성질 - 사각형의 성질 - 닮은 도형의 성질 - 삼각형의 닮음조건	1. 삼각비 1-1 삼각비의 뜻 1-2 삼각비의 값 2. 삼각비의 활용 2-1 삼각비의 활용	고등학교 미분과 적분 Ⅱ	- 삼각함수의 뜻과 그래프
중학교 수학 ❸	- 피타고라스 정리			

❺ 단원의 이론적 배경

1. 삼각비의 역사적 개관

삼각비를 이용하여 삼각형의 변의 길이, 각의 크기 등을 구하는 방법을 삼각법(trigonometry)이라고 한다.

삼각법을 이용하여 평면 위에서의 삼각형의 변의 길이, 각의 크기 등을 구하는 것을 평면삼각법이라 하고, 구면 위에서의 삼각형의 변의 길이, 각의 크기 등을 구하는 것을 구면삼각법이라고 한다.

삼각법이란 말은 고대 그리스어의 trigon(삼각형)과 metria(측량)의 합성어이다. 삼각법은 고대 이집트나 바빌로니아에서 천문학, 측량술, 항해술, 점성술 등의 발달과 함께 실용적인 필요성에 의해 사용되었던 것으로 짐작할 수 있다.

삼각비에 대한 최초의 기록은 고대 이집트의 왕실 서기인 아메스(Ahmes;?B.C.1680~?B.C.1620)가 기록했다는 「린드 파피루스(Rind Papyrus)」에 실려 있는 문제로서, 이것은 피라미드의 밑면의 이면각에 대한 코탄젠트의 개념을 도입한 것이다.

또한 바빌로니아, 중국 등에서 삼각법에 관한 단편적인 기록들을 찾아볼 수 있다.

(1) 고대의 삼각법

닮은 삼각형의 비례 관계를 이용하여 그리스의 탈레스(Thales ; ?B.C. 640?~?B.C. 546)는 피라미드의 높이를 계산하였고, 에라토스테네스(Eratosthenes ; B.C. 275~B.C.194)는 지구 둘레의 길이를 계산하였다. 그리스의 히파르코스(Hipparchos;?~?B.C.125)는 삼각법을 체계적으로 연구한 삼각법의 창시자로 불리고 있다.

히파르코스는 천문학을 연구하면서 구면 위의 두 점 사이의 거리와 각의 크기를 측정할 필요를 느껴 삼각법을 연구하기 시작한 것으로 알려져 있다.

또 원을 360등분하여 그 한 중심각의 크기를 1°로 정한 후, 지구 위의 위치를 정하는 데 경도와 위도를 사용한 것으로 알려져 있다.

그 후 프톨레마이오스(톨레미)(Ptolemaios(Ptolemy), C.;?~?)는 13권으로 된 그의 저서 "알마게스트(Almagest)"에서 구면삼각형의 해법, 덧셈정리, 평각정리, 사인정리 등과 동치인 것들을 증명하였으며 0.5°부터 180°까지 0.5° 간격으로 원의 중심각에 대한 현의 길이를 소수 다섯째 자리까지 구하고 그 계산법을 설명하였다.

고대 인도에서는 천문학의 필요성이 대두됨에 따라 삼각법 중 구면삼각법이 발달하였으며, 그리스 인들은 두 대원호의 길이에 대응하는 반현의 길이를 계산해 두고 이를 표로 만들었다.

인도의 수학자 아리아바타(Aryabhata ; 476~550)가 쓴 "아리아바티야(Aryabhatiya)"에는 천문학이 주로 다루어져 있고, 수학에 대해서도 언급되어 있다. 또한 문자에 의해 수(數)를 표시할 수 있는 독특한 방법이 제시되었으며, 그리스로부터 전수되어 온 사인(sine)함수표가 들어 있다.

"아리아바티야"의 후반부터는 시간의 계산과 구면삼각법에 관한 내용이 들어 있다. 3°45′마다의 사인 표를 이용하여 평면 또는 구면 위에서 직각삼각형이 되기 위한 요소를 구하였으며, 코사인정리, $\sin(90°-a)=\cos a$,

$\sin^2 a+\cos^2 a=1$, $1-\cos 2a=2\sin^2 a$

등의 사실을 활용하여 문제를 해결하였다.

(2) 르네상스 이후의 삼각법

이탈리아의 피보나치(Fibonacci;1170~1250)의 저서 "기하학의 실용"에는 이슬람의 몇 가지 문헌들에서 모은 삼각법의 기초적인 지식이 소개되어 있다. 또 레기오몬타누스(Regiomontanus ; 1436~1476)는 "삼각법의 모든 것"이라는 저서에서 삼각형의 해법을 체계적으로 정리하였다.

이제까지는 모든 삼각비를 원의 현과 관련하여 생각하였으나, 17세기 이후에는 직각삼각형을 기준으로 하여 삼각비를 생각하게 되었다.

뉴턴(Newton,I.;1642~1727)은 다음과 같은 사인과 코사인의 급수 전개를 발견하였다.

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\cdots\cdots$$

(단, $n=1, 2, 3, \cdots\cdots$)

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\cdots\cdots$$

(단, $n=0, 1, 2, \cdots\cdots$)

뉴턴은 사인과 코사인의 급수 전개를 발견한 이후에 삼각비를 표로 만들어 제시하였다.

그 이후 스위스의 수학자 오일러(Euler, L. ; 1707~1783)는 이 공식을 실 변수에서 복소수 변수로까지 확장하고, 복소수의 편각을 고찰함으로써 일반각의 개념을 확실히 정리하였다. 오일러가 복소 변수를 사용하여 삼각함수와 지수함수 사이에 다음과 같은 공식이 성립함을 밝혔는데, 이를 오일러 공식이라고 한다.

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\ \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

(단, $e^{iz}=\cos z+i\sin z$)

또 푸리에(Fourier,J.B.J;1768~1830)는 주어진 주기함수 $f(x)$를 구간 $[-\pi, \pi]$에서 다음과 같은 삼각급수로 전개하였다. 이것을 '푸리에 급수'라고 한다.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+\cdots\cdots$$
$$+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\cdots\cdots$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx$$

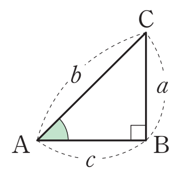
$(k=1, 2, 3, \cdots\cdots)$

$$\left(단,\ a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx\right)$$

푸리에 급수는 수리물리학에서 미적분의 중요한 도구로 쓰이고, 복소수함수론의 응용에 기여하였다.

2. 삼각비와 삼각함수

오른쪽 그림과 같이 ∠B가 직각인 △ABC에서 ∠A, ∠B, ∠C의 대변의 길이를 각각 a, b, c라 하면 ∠A에 대한 두 변의 길이의 비는 모두 6가지가 생기게 되고, 이들을 다음과 같이 정의한다.



$$\frac{a}{b}=\sin A,\ \frac{b}{a}=\frac{1}{\sin A}=\mathrm{cosec}\,A$$

$$\frac{c}{b}=\cos A,\ \frac{b}{c}=\frac{1}{\cos A}=\sec A$$

$$\frac{a}{c}=\tan A,\ \frac{c}{a}=\frac{1}{\tan A}=\cot A$$

위의 6가지 길이의 비를 삼각비라고 한다.

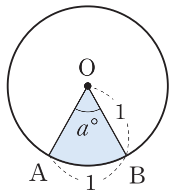
삼각비의 값은 ∠A의 크기가 결정되면 그 값이 유일하게 결정된다. 따라서 삼각비는 ∠A에 대한 함수이다. 이때 이 함수는 각도에 대하여 실수의 값에 대응되는 함수이다.

예를 들어, $y=\sin x$에서

정의역은 $\{x \mid 0^\circ \le x \le 90^\circ\}$, 치역은 $\{y \mid 0 \le x \le 1\}$이 된다.

그런데 이와 같이 함수를 정의역과 치역이 서로 다른 영역에서 다룬다는 것은 매우 불편한 경우가 많다. 이러한 불편한 점을 보완하기 위하여 새로운 각의 크기의 단위로서 라디안(Radian)을 도입하였다. 각도를 다음과 같은 방법으로 라디안으로 나타내어 보자.

오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 단위원에서 호의 길이가 1인 부채꼴 AOB의 중심각의 크기를 a°라 하면 한 원의 중심각의 크기는 360°이고, 그 둘레의 길이는 2π이므로



$2\pi : 1 = 360^\circ : a^\circ$

$$a^\circ = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

이 각의 크기 $\dfrac{180^\circ}{\pi}$를 1라디안이라 하고, 이것을 단위로 하여 각의 크기를 나타내는 방법을 호도법이라고 한다. 각을 호도법으로 나타내어 정의역을 실수의 영역으로 확장하면 삼각비를 x의 함수로 볼 수 있다. 이러한 함수를 삼각함수라고 한다.

현대의 삼각함수는 항공 우주 공학, 기상학, 전자 공학 등 다양한 분야로 확장되어 널리 활용되고 있다.

참고 문헌

• H. Eves(이우영 · 신항균 역), 수학사, 경문사, 2005.

• Cajori, F.(정지호 역), 수학의 역사, 창원사, 1997.

6 단원의 지도 계획

본문 내용		지도 내용	용어와 기호	쪽수	차시
1. 삼각비	이야기로 들려주는 삼각비, 준비하기			226～228	1
	1-1. 삼각비의 뜻	• 삼각비의 뜻	사인, 코사인 , 탄젠트, 삼각비, $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$	229～232	1
	1-2. 삼각비의 값	• 30°, 45°, 60°의 삼각비의 값 • 예각의 삼각비의 값		233～239	2
	중단원 마무리하기, 창의 · 인성 키우기, 컴퓨터로 하는 수학			240～244	1
2. 삼각비의 활용	준비하기			245	1
	2-1. 삼각비의 활용	• 삼각비를 이용한 길이 구하기 • 삼각비를 이용한 넓이 구하기		246～255	4
	중단원 마무리하기, 창의 · 인성 키우기			256～259	1
	단원 마무리하기			260～261	1
	수행 과제, 수학으로 세상 읽기, 직업 속의 수학, 스스로 평가하기			262～265	1
	소계				13

7 교수 · 학습 과정 예시안

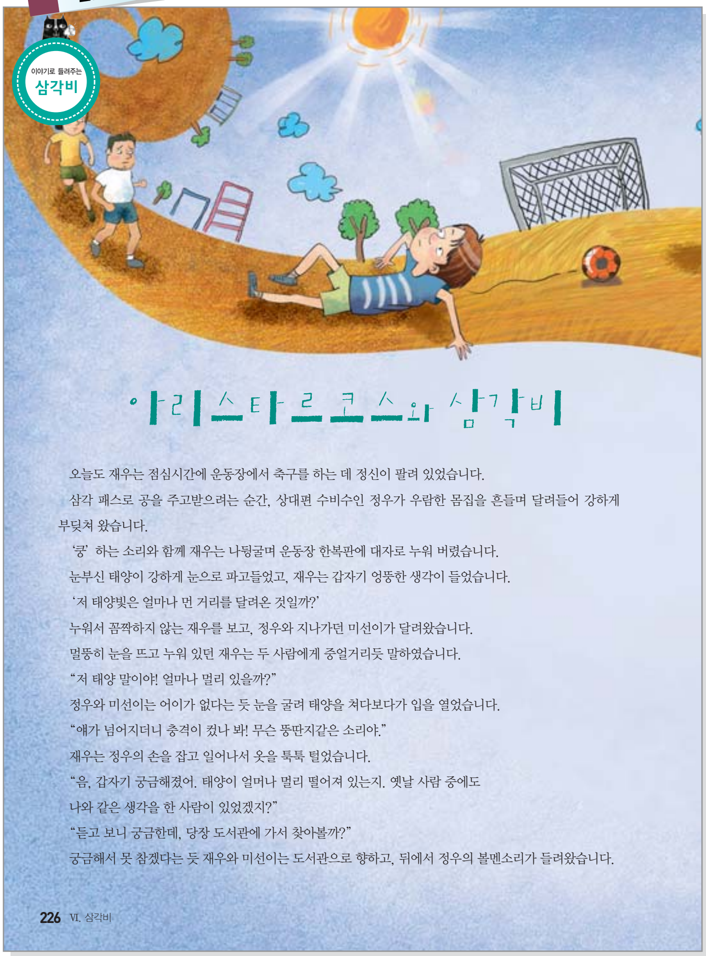
단원	Ⅵ. 삼각비 2. 삼각비의 활용 01. 삼각비의 활용	교과서 쪽수	246~248	차시	7/13
학습 주제	삼각비를 이용하여 거리를 어떻게 구할까?	학습 목표	삼각비를 활용하여 다양한 실생활 문제를 해결할 수 있다.		
준비물	활동지, PPT 자료, 계산기, 형성 평가지			교과 관련	

단계(시간)	학습 내용 및 학습 방법	교수 · 학습 활동: 교사	교수 · 학습 활동: 학생	학습 자료 및 유의점
도입(10분)	**개념 학습**(전체 학습) – 전시 학습 제시	지난 시간에 배운 삼각비 구하는 문제를 제시하여 학생들의 학습 정도를 파악한다.	지난 시간에 배운 내용을 상기하여 준비 학습 문제를 해결한다.	
	탐구 학습(전체 학습) – 생각 열기	**생각 열기**를 통해 직각삼각형의 한 각의 크기와 한 변의 길이를 알면 나머지 변의 길이도 구할 수 있음을 알 수 있도록 한다. – 발문: 슬로프의 길이와 경사각의 크기를 알 때, 슬로프의 높이를 구하기 위해서는 어떤 삼각비의 값을 사용해야 할까요?	주어진 그림을 보고 어떤 삼각비를 이용해야 나머지 두 변의 길이도 구할 수 있는지 생각해 본다. – 예상 답변 ① $\sin A$ ② $\cos A$ ③ $\tan A$	• 주변에서 직접 측정하기 어려운 거리를 삼각비를 이용하여 구함으로써 삼각비의 유용성을 알 수 있도록 지도한다. ▶ PPT 자료
	– 학습 목표 제시	생각 열기와 관련하여 학습 목표를 각자 생각해 보게 한 후 학습 목표를 제시한다.	이번 시간에 배울 내용이 무엇인지 생각해 보고 학습 목표를 선생님과 함께 생각해 본다.	▶ PPT 자료
전개(28분)	**개념 학습**(전체 학습) – 직각삼각형에서 삼각비를 이용하여 나머지 두 변의 길이 구하기	직각삼각형의 한 예각의 크기와 한 변의 길이를 알 때, 각각의 예를 들어 삼각비를 활용하는 방법을 설명하여 정확히 이해할 수 있도록 지도한다.		• 문제 상황에서 삼각비를 이용할 때, 어떤 삼각비의 값을 사용해야 할지 결정할 수 있도록 지도한다. • 사물의 높이나 거리를 구할 때, 삼각비의 값이 어림한 값이므로 실제의 값과는 차이가 있을 수 있다는 것을 지도한다.
	문제 해결 학습(전체 학습) – 함께 풀기 1, 2, 3	**함께 풀기**를 활용하여 직접 측정하기 어려운 두 지점 사이의 거리를 구하는 방법을 이해시키고, 적절한 발문을 활용하여 지도한다.	• 주변에서 실제로 직접 측정하기 어려운 거리나 높이를 삼각비를 이용하여 구할 때, 어떤 각의 크기와 변의 길이를 알아야 구할 수 있는지 배운 내용을 바탕으로 생각하여 본다. • 발문에 적극적으로 답변하며, 삼각비를 활용하는 방법을 이해하고 숙지한다.	

단계(시간)	학습 내용 및 학습 방법	교수 · 학습 활동		학습 자료 및 유의점
		교사	학생	
	문제 해결 학습(협력 학습) – 문제 1, 2, 3, 4	• 여러 가지 문제를 통해 두 지점 사이의 거리나 높이를 구하기 위한 적절한 삼각비를 활용할 수 있도록 지도한다. • 모둠별 발표를 통해 활동 내용을 확인한다.	• 활동지를 모둠별로 완성한다. • 활동한 내용을 발표하고 다른 모둠의 발표를 경청하며 비교해 본다.	• 모둠별 활동을 하는 동안 순회하며 지도한다. ▶ 활동지 ▶ 계산기
	수준별 학습(개별 학습)	하 실제 사물에서 스스로 각을 재고 한 변의 길이를 재서 높이나 거리를 직접 구해 보게 한 후 삼각비를 이용하여 구한 값과 비교해 볼 수 있도록 한다. 상 다른 풀이를 생각해 보게 하여 확산적 사고를 할 수 있도록 유도한다.		
정리 및 평가 (7분)	**개념 정리**(전체 학습) – 내용 정리	학생들이 배운 내용을 스스로 정리할 수 있도록 한다.	선생님과 함께 정리한 내용을 정리한다.	▶ PPT 자료
	문제 해결 학습(협력 학습) – 형성 평가 문제 (기초 1문제 / 기본 1문제 / 실력 1문제)	형성 평가를 통해 학생의 수업에 대한 이해도를 관찰한다.	형성 평가 문제를 각자 스스로 해결해 본다.	▶ 형성 평가지
	수준별 수업(개별 학습) – 수준별 과제 제시	수준별 과제를 부여한다.	수준별 과제를 받아간다.	
	차시 예고 – 삼각비를 활용하여 직각삼각형이 아닌 삼각형에서 길이를 어떻게 구하는지 알아본다.	다음 시간에 배울 내용을 안내한다.	다음 시간에 배울 내용을 확인한다.	

Ⅵ

226쪽



이야기로 들려주는 삼각비

아리스타르코스와 삼각비

오늘도 재우는 점심시간에 운동장에서 축구를 하는 데 정신이 팔려 있었습니다.

삼각 패스로 공을 주고받으려는 순간, 상대편 수비수인 정우가 우람한 몸집을 흔들며 달려들어 강하게 부딪쳐 왔습니다.

'쿵' 하는 소리와 함께 재우는 나뒹굴며 운동장 한복판에 대자로 누워 버렸습니다.

눈부신 태양이 강하게 눈으로 파고들었고, 재우는 갑자기 엉뚱한 생각이 들었습니다.

'저 태양빛은 얼마나 먼 거리를 달려온 것일까?'

누워서 꼼짝하지 않는 재우를 보고, 정우와 지나가던 미선이가 달려왔습니다.

멀뚱히 눈을 뜨고 누워 있던 재우는 두 사람에게 중얼거리듯 말하였습니다.

"저 태양 말이야! 얼마나 멀리 있을까?"

정우와 미선이는 어이가 없다는 듯 눈을 굴려 태양을 쳐다보다가 입을 열었습니다.

"얘가 넘어지더니 충격이 컸나 봐! 무슨 뚱딴지같은 소리야."

재우는 정우의 손을 잡고 일어나서 옷을 툭툭 털었습니다.

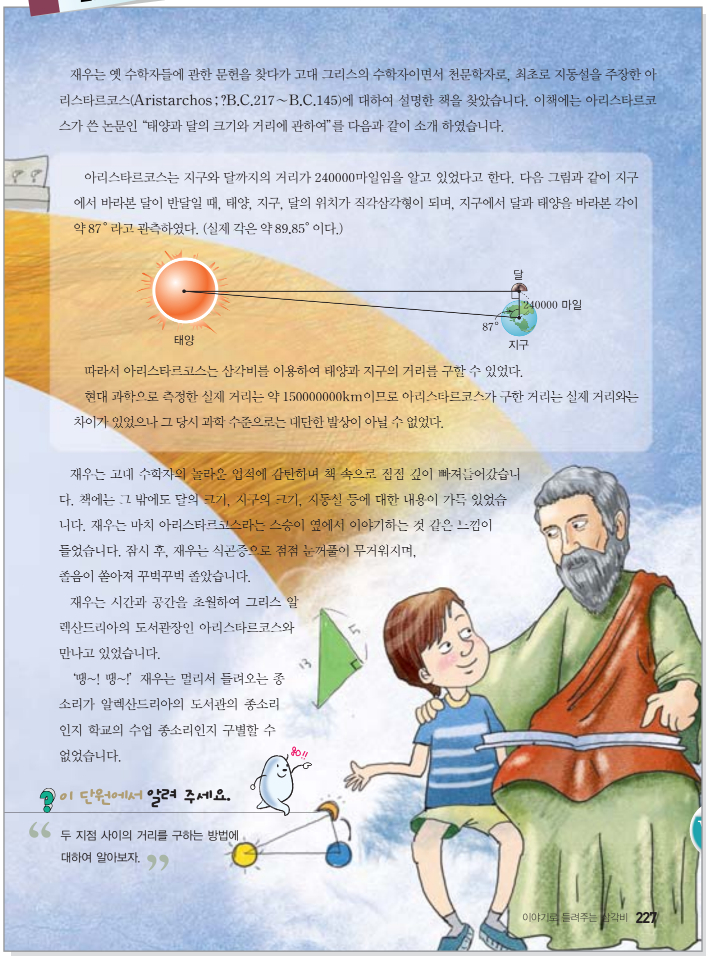
"음, 갑자기 궁금해졌어. 태양이 얼마나 멀리 떨어져 있는지. 옛날 사람 중에도 나와 같은 생각을 한 사람이 있었겠지?"

"듣고 보니 궁금한데, 당장 도서관에 가서 찾아볼까?"

궁금해서 못 참겠다는 듯 재우와 미선이는 도서관으로 향하고, 뒤에서 정우의 볼멘소리가 들려왔습니다.

226 Ⅵ. 삼각비

227쪽



재우는 옛 수학자들에 관한 문헌을 찾다가 고대 그리스의 수학자이면서 천문학자로, 최초로 지동설을 주장한 아리스타르코스(Aristarchos ; ?B.C.217～B.C.145)에 대하여 설명한 책을 찾았습니다. 이책에는 아리스타르코스가 쓴 논문인 "태양과 달의 크기와 거리에 관하여"를 다음과 같이 소개 하였습니다.

아리스타르코스는 지구와 달까지의 거리가 240000마일임을 알고 있었다고 한다. 다음 그림과 같이 지구에서 바라본 달이 반달일 때, 태양, 지구, 달의 위치가 직각삼각형이 되며, 지구에서 달과 태양을 바라본 각이 약 87° 라고 관측하였다. (실제 각은 약 89.85° 이다.)

따라서 아리스타르코스는 삼각비를 이용하여 태양과 지구의 거리를 구할 수 있었다.

현대 과학으로 측정한 실제 거리는 약 150000000km이므로 아리스타르코스가 구한 거리는 실제 거리와는 차이가 있었으나 그 당시 과학 수준으로는 대단한 발상이 아닐 수 없었다.

재우는 고대 수학자의 놀라운 업적에 감탄하며 책 속으로 점점 깊이 빠져들어갔습니다. 책에는 그 밖에도 달의 크기, 지구의 크기, 지동설 등에 대한 내용이 가득 있었습니다. 재우는 마치 아리스타르코스라는 스승이 옆에서 이야기하는 것 같은 느낌이 들었습니다. 잠시 후, 재우는 식곤증으로 점점 눈꺼풀이 무거워지며, 졸음이 쏟아져 꾸벅꾸벅 졸았습니다.

재우는 시간과 공간을 초월하여 그리스 알렉산드리아의 도서관장인 아리스타르코스와 만나고 있었습니다.

'땡~! 땡~!' 재우는 멀리서 들려오는 종소리가 알렉산드리아의 도서관의 종소리인지 학교의 수업 종소리인지 구별할 수 없었습니다.

이 단원에서 알려 주세요.

"두 지점 사이의 거리를 구하는 방법에 대하여 알아보자."

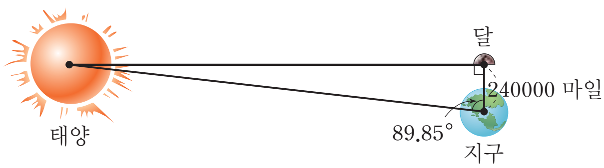
이야기로 들려주는 삼각비 227

이야기로 들려주는 삼각비

이야기 배경

이 이야기는 점심시간에 축구를 하던 재우가 문득 태양까지의 거리가 궁금해져서 도서관에서 그 내용을 찾아보던 중 고대 그리스 시대의 수학자이며 천문학자였던 아리스타르코스(Aristarchos ; ?B.C. 217～B.C. 145)가 지구와 태양 사이의 거리를 구한 것을 읽게 되는 내용이다.

아리스타르코스는 삼각비를 이용하여 태양과 지구 사이의 거리를 구하였고, 아리스타르코스가 구한 방법으로 태양과 지구 사이의 거리를 구하면 다음과 같다.



지구에서 본 태양과 달의 각을 89.85°라 하면

(아리스타코스는 87°로 재었음.)

$$\cos 89.85^\circ = \frac{240000}{x}$$

이고, 삼각비의 표에서 $\cos 89.85^\circ = 0.002618$이므로

$$x = \frac{240000}{0.002618} = 91673032.8\cdots(\text{마일})$$

이때 1마일은 약 1.6km이므로 x는 약 147593583km이다.

실제로 달의 공전 궤도와 지구의 공전 궤도는 타원 궤도이므로 평균 거리를 구하여야 한다. 현대에 과학적 방법을 이용하여 조사한 태양과 지구의 거리는 약 1억 5000만km로 알려져 있다. 따라서 아리스타르코스가 구한 방법은 실제와는 오차가 있지만 그 당시 과학의 수준으로는 대단히 혁신적인 방법이었다. 그 밖에 아리스타르코스는 지동설을 주장했다. 그는 우주의 중심을 태양으로 보고 태양 주위를 지구와 별, 행성들이 돌고 있다고 주장했으며 지구는 하루에 한 번씩 자전을 한다는 것을 알고 있었다. 또한 아리스타르코스는 지구, 달, 태양, 세 천체의 상대적인 크기와 거리를 계산해 내기도 했다. 아리스타르코스의 업적은 후대의 수학자와 과학자에게 많은 영향을 주었다.

1 삼각비

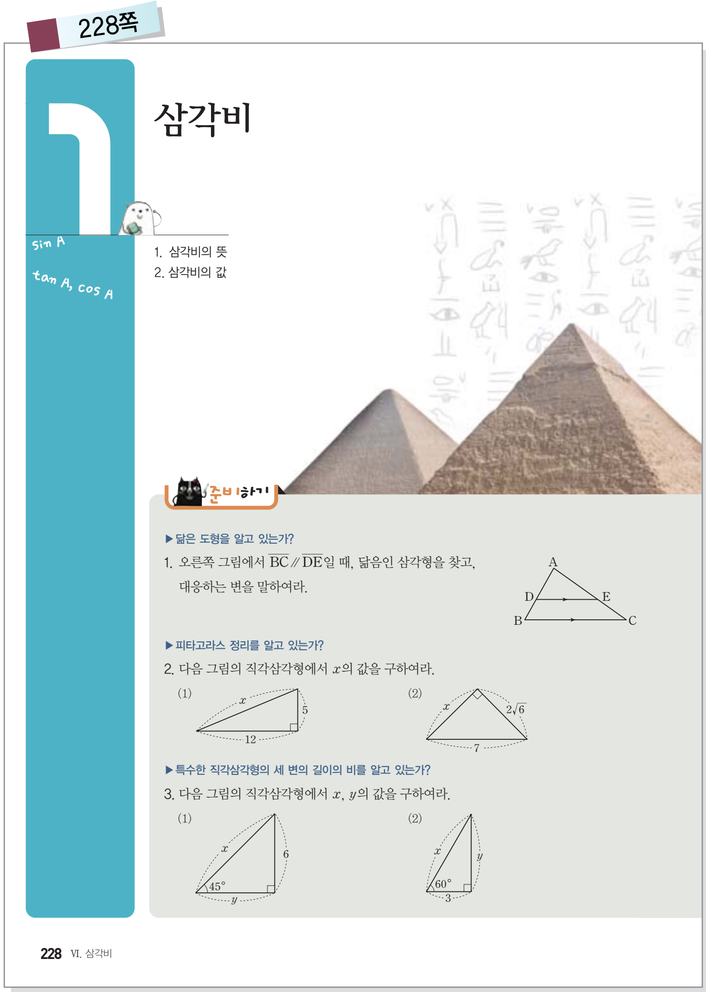
중단원 지도 목표

1. 삼각비의 뜻을 이해할 수 있다.
2. 삼각비의 값을 구할 수 있다.

중단원의 구성

소단원 명	지도 내용
1. 삼각비의 뜻	• 삼각비의 뜻
2. 삼각비의 값	• 30°, 60°, 90°의 삼각비의 값 • 예각의 삼각비의 값
중단원 마무리하기	• 스스로 정리하기 • 기초 다지기, 기본 익히기, 실력 기르기
창의 · 인성 키우기	• 개념 바루기 • 문제 만들기 • 생각 키우기
컴퓨터로 하는 수학	• 각의 크기에 따른 삼각비의 값의 변화

228쪽



1 삼각비

sin A

tan A, cos A

1. 삼각비의 뜻
2. 삼각비의 값

준비하기

▶ 닮은 도형을 알고 있는가?

1. 오른쪽 그림에서 $\overline{BC} /\!/ \overline{DE}$일 때, 닮음인 삼각형을 찾고, 대응하는 변을 말하여라.

▶ 피타고라스 정리를 알고 있는가?

2. 다음 그림의 직각삼각형에서 x의 값을 구하여라.

(1) (2)

▶ 특수한 직각삼각형의 세 변의 길이의 비를 알고 있는가?

3. 다음 그림의 직각삼각형에서 x, y의 값을 구하여라.

(1) (2)

228 Ⅵ. 삼각비

준비하기

▶ 닮은 도형을 알고 있는가?

1. 이 단원에서는 직각삼각형의 닮음비가 삼각비임을 학습하므로 닮은 도형에 대하여 알고 있어야 한다.

풀이 $\triangle ADE$와 $\triangle ABC$에서 $\overline{DE} /\!/ \overline{BC}$이므로

$\angle ADE = \angle ABC$, $\angle AED = \angle ACB$

이때 $\angle A$는 공통이므로 $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$

따라서 대응하는 변은 다음과 같다.

$\overline{AD}$와 $\overline{AB}$, $\overline{DE}$와 $\overline{BC}$, $\overline{AE}$와 $\overline{AC}$

답 풀이 참조

▶ 피타고라스 정리를 알고 있는가?

2. 이 단원에서는 직각삼각형의 세 변의 길이를 알아야 삼각비의 값을 구하므로 피타고라스 정리를 이용하여 직각삼각형의 변의 길이를 구할 수 있어야 한다.

풀이 (1) $x=\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{169}=13$

(2) $x=\sqrt{7^2-(2\sqrt{6})^2}=\sqrt{25}=5$

답 (1) 13 (2) 5

▶ 특수한 직각삼각형의 세 변의 길이의 비를 알고 있는가?

3. 이 단원에서는 한 각의 크기가 30°, 45°, 60°인 직각삼각형에서 삼각비의 값을 구하므로 한 각의 크기가 30°, 45°, 60°인 직각삼각형의 변의 길이의 비를 이용하여 변의 길이를 구할 수 있어야 한다.

풀이 (1) 직각삼각형의 직각을 제외한 나머지 두 각의 크기가 모두 45°이므로

$y=6$

이때 $6 : x = 1 : \sqrt{2}$이므로

$x=6\sqrt{2}$

(2) 직각을 제외한 나머지 두 각의 크기가 30°, 60°이므로

$3 : y : x = 1 : \sqrt{3} : 2$

$x=6$, $y=3\sqrt{3}$

답 (1) $x=6\sqrt{2}$, $y=6$

(2) $x=6$, $y=3\sqrt{3}$

01 삼각비의 뜻

지도 목표

1. 삼각비의 뜻을 알게 한다.
2. 삼각비를 구할 수 있게 한다.

지도상의 유의점

1. 삼각비의 뜻을 정확하게 이해하고, 사인, 코사인, 탄젠트의 정의를 바르게 이해할 수 있도록 지도한다.

1/1차시 차시별 학습 지도 방법

생각 열기	서로 닮은 직각삼각형의 두 변의 길이의 비가 일정함을 알 수 있도록 지도한다.
본문	사인, 코사인, 탄젠트의 정의를 정확히 이해할 수 있도록 설명한다.
문제 1	문제 풀이가 능숙하지 못한 학생들에게는 다른 예를 제시하여 삼각비의 정의에 능숙해지게 한다.
함께 풀기 1	피타고라스 정리에 대한 선수학습을 확인한 후, 학생들과 함께 문제를 풀면서 지도한다.
문제 2	문제를 통해 실생활에서 삼각비의 유용성을 인식하게 하고, 삼각비의 값을 구하게 한다.

229쪽

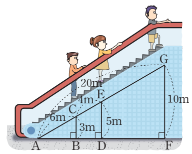
01 삼각비의 뜻

학습 목표 삼각비의 뜻을 안다.
배울 용어 사인, 코사인, 탄젠트, 삼각비

옛날 사람들은 캄캄한 밤에 바다를 항해하면서 어떻게 방향을 찾을 수 있었을까? 그것은 밤하늘의 별을 보고 가능했다고 한다. 따라서 옛 항해사들은 어떤 곳을 가더라도 별의 위치를 찾을 수 있는 별자리 지도가 필요하였고, 이러한 지도를 만들 때 삼각비를 이용하였다고 한다.

1/1차시 삼각비란 무엇일까?

생각 열기 현지는 오른쪽 그림과 같은 길이가 20m인 에스컬레이터를 타고 올라가면, 높이가 바닥으로부터 10m만큼 높아진다는 것을 알았다.



(1) △ABC와 닮은 삼각형을 모두 찾아보자.

(2) 다음 표의 빈칸을 채워 보자.

△ABC	△ADE	△AFG
$\dfrac{\overline{CB}}{\overline{AC}}=\dfrac{\square}{\square}$	$\dfrac{\overline{ED}}{\overline{AE}}=\dfrac{\square}{\square}$	$\dfrac{\overline{GF}}{\overline{AG}}=\dfrac{\square}{\square}$

(3) (2)에서 구한 $\dfrac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$, $\dfrac{\overline{ED}}{\overline{AE}}$, $\dfrac{\overline{GF}}{\overline{AG}}$의 값을 비교하여 보자.

생각 열기에서 △ABC, △ADE, △AFG는 모두 ∠A를 공통으로 하는 서로 닮은 직각삼각형이다.

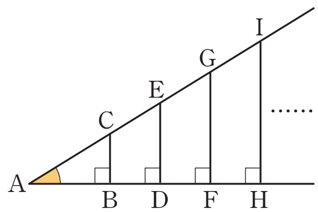
이때 닮은 도형은 대응변의 길이의 비가 일정하므로

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{ED}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{GF}}{\overline{AG}}=\frac{1}{2}$$

임을 알 수 있다.

1. 삼각비 229

1 직각삼각형에서 한 각은 직각이므로 나머지 한 각만 같으면 닮은 도형이다. 이러한 닮은 도형은 항상 길이의 비가 일정하다.



위의 그림의 네 직각삼각형 ABC, ADE, AFG, AHI에서

$$\angle B=\angle D=\angle F=\angle H=90^\circ$$

이므로 한 각의 크기가 정해지면 직각삼각형의 크기에 관계없이 직각삼각형의 세 변의 길이의 비는 항상 일정하다.

즉, $\dfrac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$, $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CA}}$, $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$의 값은 항상 일정하다.

삼각비란 무엇일까?

생각 열기 실생활에서 소재의 에스컬레이터에서 나타나는 직각삼각형의 닮음을 이용하여 비로 나타내어 보는 생각 열기이다.

지도상의 유의점 에스컬레이터가 움직인 거리와 높이를 알고, 그 비가 일정함을 알게 한다.

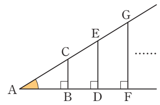
(1) △ABC와 닮은 삼각형을 찾으면 △ADE, △AFG이다.

(2) $\dfrac{\overline{CB}}{\overline{AC}}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$, $\dfrac{\overline{ED}}{\overline{AE}}=\dfrac{5}{10}=\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$, $\dfrac{\overline{GF}}{\overline{AG}}=\dfrac{10}{20}=\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$

(3) $\dfrac{\overline{CB}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{ED}}{\overline{AE}}=\dfrac{\overline{GF}}{\overline{AG}}=\dfrac{1}{2}$이므로
그 값이 일정함을 알 수 있다.

230쪽

❶ 일반적으로 오른쪽 그림과 같이 ∠A의 크기가 같은 직각삼각형은 모두 닮은 도형이다. 이때 닮은 도형에서 대응변의 길이의 비는 서로 같으므로



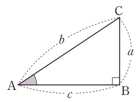
$$\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{ED}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{GF}}{\overline{AG}}=\cdots\cdots$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{EA}}=\frac{\overline{AF}}{\overline{GA}}=\cdots\cdots$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{FG}}{\overline{AF}}=\cdots\cdots$$

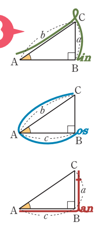
이다.

이와 같이 ∠B=90°인 직각삼각형 ABC에서 ∠A의 크기가 정해지면 직각삼각형의 크기에 관계없이



$$\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}},\ \frac{\overline{AB}}{\overline{CA}},\ \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

의 값은 항상 일정함을 알 수 있다.



❷ 이때 $\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}=\frac{a}{b}$를 ∠A의 **사인**이라 하고, 이것을 기호로

sin *A*

와 같이 나타낸다. 또 $\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}}=\frac{c}{b}$를 ∠A의 **코사인**이라 하고, 이것을 기호로

cos *A*

와 같이 나타낸다. 마찬가지로 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{a}{c}$를 ∠A의 **탄젠트**라 하고, 이것을 기호로

tan *A*

와 같이 나타낸다.

그리고 sin A, cos A, tan A를 통틀어 ∠A의 **삼각비**라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

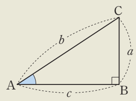
삼각비의 뜻

∠B=90°인 직각삼각형 ABC에서

❹ $\sin A=\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}=\frac{a}{b}$

$\cos A=\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}}=\frac{c}{b}$

$\tan A=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{a}{c}$



sin, cos, tan는 각각 sine, cosine, tangent의 약자이고, A는 ∠A의 크기를 나타낸다.

230 Ⅵ. 삼각비

❷ 삼각비에서의 각의 표시는 ∠A를 A로 나타내고, sin, cos, tan와 함께 sin A, cos A, tan A와 같이 쓴다.

지도상의 유의점 학생들은 삼각비를 처음 접하게 되므로 사인(sin), 코사인(cos), 탄젠트(tan)라는 용어가 익숙하지 않고, 직각삼각형의 길이의 비도 혼동하기 쉽다. 따라서 직각삼각형의 예를 통하여 반복하여 설명함으로써 익숙해질 수 있도록 지도한다.

❸ A에 대한 삼각비를 쓸 때 각의 위치에 따라 직각삼각형의 '밑변의 길이'와 '높이'가 변하므로

$$\sin A=\frac{(\text{높이})}{(\text{빗변의 길이})}$$

와 같은 방법으로 암기하지 않도록 지도한다.

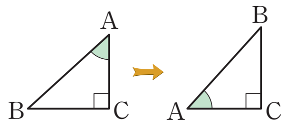
삼각비를 구할 때 구하는 각의 위치를 변화시킨 예를 보여 주고, 변의 길이의 비를 혼동하지 않도록 지도한다.

참고 보조단에 있는 사인, 코사인, 탄젠트의 모양과 같이 사인, 코사인, 탄젠트를 연관지어 생각할 수 있는 방법으로 지도하면 혼동을 줄일 수도 있다.

❹ **오개념 진단 · 지도**

직각삼각형의 예각의 위치에 따른 삼각비의 값을 자주 혼동하는 학생의 경우 다음 예와 같이 구하려는 직각삼각형의 예각의 위치를 왼쪽 하단에 나타나도록 고쳐 그린 후, 생각하게 할 수 있다.

예 ∠A에 대한 삼각비의 값을 구할 때, 다음과 같이 바꾸어 생각할 수 있다.



하 수준의 학생이나 도입을 위해 잠깐 사용할 수 있는 방법이지만 습관이 되지 않도록 지도한다.

참고 자료

[사인]

사인함수 sine이 된 것은 실제로는 오역에서 비롯된 것이다. sine은 라틴어 sinus(시누스)에서 나온 것인데, 이 말은 '길의 커브, 땅이 움푹 들어간 곳, 꼬불꼬불한 길, 옷의 주름, 접힘, 주머니, 만(灣), 가슴' 등과 같은 뜻을 나타낸다. 1150년경 이탈리아 수학자 게라르도(Gherardo of Cremona)가 아랍어 수학책을 번역하면서 아랍어로 현이나 사인함수를 나타내는 jiba(지바)를 옷의 주름을 가리키는 jaib(자이브)와 혼동해서 sinus로 옮긴 데서 사인함수가 sinus, 여기서 영어로 sine이 된 것이다. 그 이후, 1624년 영국의 수학자 건터(Gunter, E.;1581～1626)가 기호 sin을 처음 사용하였다.

[탄젠트]

탄젠트가 접선(接線)을 나타낸다는 것과 관계가 있다. 탄젠트는 접촉하고 있다는 뜻의 라틴어 tangens에서 유래한 것으로 접선을 영어로는 tangent line 또는 그냥 줄여서 tangent로 쓰였다.

탄젠트는 원래는 사인이나 코사인처럼 각도에 대한 함수가 아니라 어떤 물체의 그림자 길이에서 높이를 계산하는 데서 고안된 것이다. 아랍어 책을 라틴어로 번역하면서, 움브라 렉타(umbra recta : 바른 그림자, 수직으로 세운 막대가 수평면에 드리우는 그림자)와 움브라 베르사(umbra versa : 반대 그림자, 수평으로 된 막대가 수직면에 드리우는 그림자)와 같이 그림자와 관련된 이름으로 불렸다.

이 개념을 접선의 기울기와 연관지어 탄젠트라고 부른 것은 덴마크 수학자 토마스 핀케(Thomas Fincke; 1561～1656)이다.

Ⅵ

[코사인]

사인 함수 sine의 어원은 원호의 현(弦, chord)과 관계가 있다. 지름이 1인 원 안에 내접하면서 지름을 빗변으로 하는 직각삼각형이 있다고 생각할 때, 직각이 아닌 어떤 각과 마주보는 변의 길이는 사인의 값이 되고, 나머지 한 변의 길이는 코사인의 값인 것을 뜻하고, 빗변이 아닌 변은 현이라는 뜻도 있다. 아울러 접두사 '코(co)'는 '부수적인 것, 나머지'라는 뜻을 나타낸다. 즉, 나머지라는 뜻의 '여(餘)'와 같은 의미이다. 따라서 사인 값을 나타내는 현을 기준으로, 사인의 값은 정현이고, 코사인은 여현이다.

코사인함수 cosine은 complementary sine 을 줄인 것으로 여각의 사인이라는 뜻이다.

cosine도 라틴어 cosinus에서 나왔고, 수학자 건터(Gunter, E. ; 1581～1626)가 1620년에 complementum sinus를 합친 co.sinus를 사용하였고, 1658년에 뉴턴(Newton, I. ; 1642～1727)은 cosinus로 사용하였다.

기호 cos는 1729년에 오일러(Euler, L. ; 1707～1783)가 사용하였다.

문제 1 삼각비의 값 구하기

풀이 (1) $\sin A=\dfrac{\overline{CB}}{\overline{AC}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

(2) $\cos A=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CA}}=\dfrac{2}{3}$

(3) $\tan A=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

문제 2 삼각비의 값 구하기

풀이 $\overline{AB}=4\text{ m}$, $\overline{BC}=2\text{m}$이므로

$\overline{AC}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}\,(\text{m})$

(1) $\sin A=\dfrac{\overline{CB}}{\overline{AC}}=\dfrac{2}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

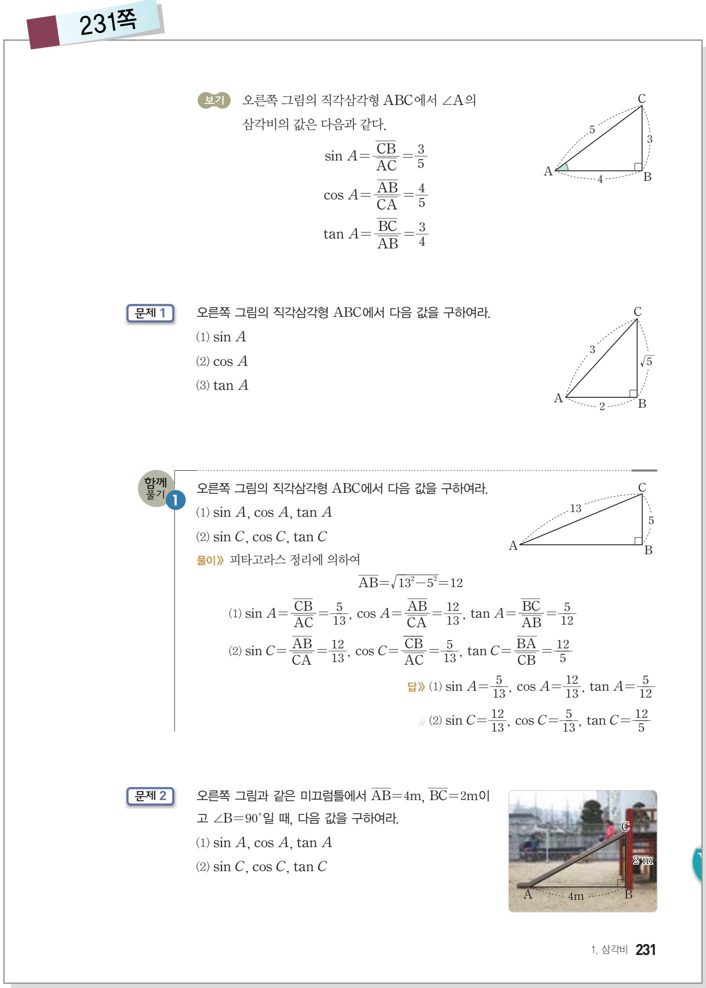
$\cos A=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CA}}=\dfrac{4}{2\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\tan A=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

(2) $\sin C=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CA}}=\dfrac{4}{2\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\cos C=\dfrac{\overline{CB}}{\overline{AC}}=\dfrac{2}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\tan C=\dfrac{\overline{BA}}{\overline{CB}}=\dfrac{4}{2}=2$



231쪽

보기 오른쪽 그림의 직각삼각형 ABC에서 ∠A의 삼각비의 값은 다음과 같다.

$$\sin A=\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}=\frac{3}{5}$$
$$\cos A=\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}}=\frac{4}{5}$$
$$\tan A=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{3}{4}$$

문제 1 오른쪽 그림의 직각삼각형 ABC에서 다음 값을 구하여라.

(1) $\sin A$

(2) $\cos A$

(3) $\tan A$

함께 풀기 1 오른쪽 그림의 직각삼각형 ABC에서 다음 값을 구하여라.

(1) $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$

(2) $\sin C$, $\cos C$, $\tan C$

풀이》 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AB}=\sqrt{13^2-5^2}=12$$

(1) $\sin A=\dfrac{\overline{CB}}{\overline{AC}}=\dfrac{5}{13}$, $\cos A=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CA}}=\dfrac{12}{13}$, $\tan A=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{5}{12}$

(2) $\sin C=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CA}}=\dfrac{12}{13}$, $\cos C=\dfrac{\overline{CB}}{\overline{AC}}=\dfrac{5}{13}$, $\tan C=\dfrac{\overline{BA}}{\overline{CB}}=\dfrac{12}{5}$

답》 (1) $\sin A=\dfrac{5}{13}$, $\cos A=\dfrac{12}{13}$, $\tan A=\dfrac{5}{12}$

(2) $\sin C=\dfrac{12}{13}$, $\cos C=\dfrac{5}{13}$, $\tan C=\dfrac{12}{5}$

문제 2 오른쪽 그림과 같은 미끄럼틀에서 $\overline{AB}=4\text{m}$, $\overline{BC}=2\text{m}$이고 $\angle B=90^\circ$일 때, 다음 값을 구하여라.

(1) $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$

(2) $\sin C$, $\cos C$, $\tan C$

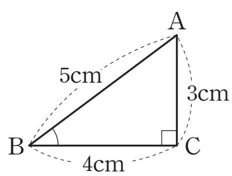
1. 삼각비 231

수준별 교수·학습 방법

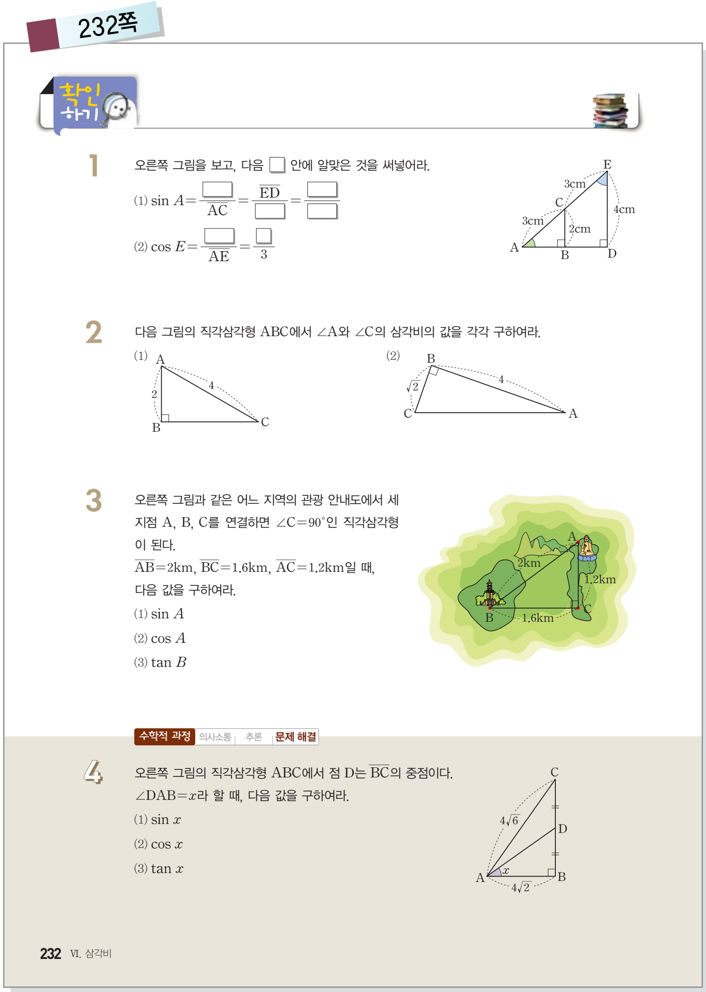
삼각비의 뜻을 이해하고, 삼각비의 값을 구할 수 있다.

하 삼각비의 용어와 기호가 익숙하지 않고 삼각비를 이해 하는데 어려움이 있는 학생들에게는 직각삼각형 중에서 많이 눈에 익은 것을 예로 들어 설명한다.

[문제] 다음 그림의 직각삼각형 ABC에서 ∠B에 대한 삼각비의 값을 구하여라.



답 $\sin B=\dfrac{3}{5}$, $\cos B=\dfrac{4}{5}$, $\tan B=\dfrac{3}{4}$


232쪽

확인하기

1 오른쪽 그림을 보고, 다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

(1) $\sin A=\dfrac{\square}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{ED}}{\square}=\dfrac{\square}{\square}$

(2) $\cos E=\dfrac{\square}{\overline{AE}}=\dfrac{\square}{3}$

2 다음 그림의 직각삼각형 ABC에서 ∠A와 ∠C의 삼각비의 값을 각각 구하여라.

3 오른쪽 그림과 같은 어느 지역의 관광 안내도에서 세 지점 A, B, C를 연결하면 ∠C=90°인 직각삼각형이 된다.
$\overline{AB}=2\text{km}$, $\overline{BC}=1.6\text{km}$, $\overline{AC}=1.2\text{km}$일 때, 다음 값을 구하여라.
(1) $\sin A$
(2) $\cos A$
(3) $\tan B$

수학적 과정 의사소통 추론 문제 해결

4 오른쪽 그림의 직각삼각형 ABC에서 점 D는 $\overline{BC}$의 중점이다. $\angle DAB=x$라 할 때, 다음 값을 구하여라.
(1) $\sin x$
(2) $\cos x$
(3) $\tan x$

232 Ⅵ. 삼각비

확인하기

1 **평가의 주안점** 닮은 직각삼각형에서 삼각비의 값을 구할 수 있다.

풀이 (1) $\sin A=\dfrac{\boxed{\overline{CB}}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{ED}}{\boxed{\overline{AE}}}=\dfrac{\boxed{2}}{\boxed{3}}$

(2) $\cos E=\dfrac{\boxed{\overline{ED}}}{\overline{AE}}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{\boxed{2}}{3}$

2 **평가의 주안점** 직각삼각형의 한 변의 길이를 구하고, 삼각비의 값을 구할 수 있다.

풀이 (1) $\overline{AB}=2$, $\overline{AC}=4$이므로 $\overline{BC}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$

(i) ∠A의 삼각비의 값을 구하면

$\sin A=\dfrac{\overline{CB}}{\overline{AC}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos A=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CA}}=\dfrac{1}{2}$

$\tan A=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

(ii) ∠C의 삼각비의 값을 구하면

$\sin C=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CA}}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

$\cos C=\dfrac{\overline{CB}}{\overline{AC}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan C=\dfrac{\overline{BA}}{\overline{CB}}=\dfrac{2}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(2) $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=\sqrt{2}$이므로

$\overline{AC}=\sqrt{4^2+(\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$

(i) ∠A의 삼각비의 값을 구하면

$\sin A=\dfrac{\overline{CB}}{\overline{AC}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{3}$

$\cos A=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CA}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan A=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

(ii) ∠C의 삼각비의 값을 구하면

$\sin C=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CA}}=\dfrac{4}{3\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\cos C=\dfrac{\overline{CB}}{\overline{AC}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{3}$

$\tan C=\dfrac{\overline{BA}}{\overline{CB}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

3 **평가의 주안점** 실제 지도에서 삼각비의 값을 구할 수 있다.

풀이 지도의 직각삼각형 ABC에서

(1) $\sin A=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{1.6}{2}=0.8$

(2) $\cos A=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BA}}=\dfrac{1.2}{2}=0.6$

(3) $\tan B=\dfrac{\overline{CA}}{\overline{BC}}=\dfrac{1.2}{1.6}=\dfrac{3}{4}=0.75$

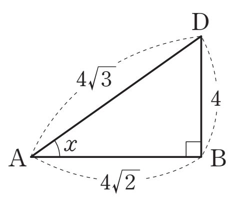
4 **평가의 주안점** 직각삼각형의 한 변의 길이를 구하고, 삼각비의 값을 구할 수 있다.

풀이 직각삼각형 ABC에서

$\overline{AC}=4\sqrt{6}$, $\overline{AB}=4\sqrt{2}$, $\overline{BC}=\sqrt{(4\sqrt{6})^2-(4\sqrt{2})^2}=8$이므로

$\overline{DB}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=4$

$\overline{AD}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2+4^2}=4\sqrt{3}$



(1) $\sin x=\dfrac{4}{4\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(2) $\cos x=\dfrac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

(3) $\tan x=\dfrac{4}{4\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

02 삼각비의 값

지도 목표

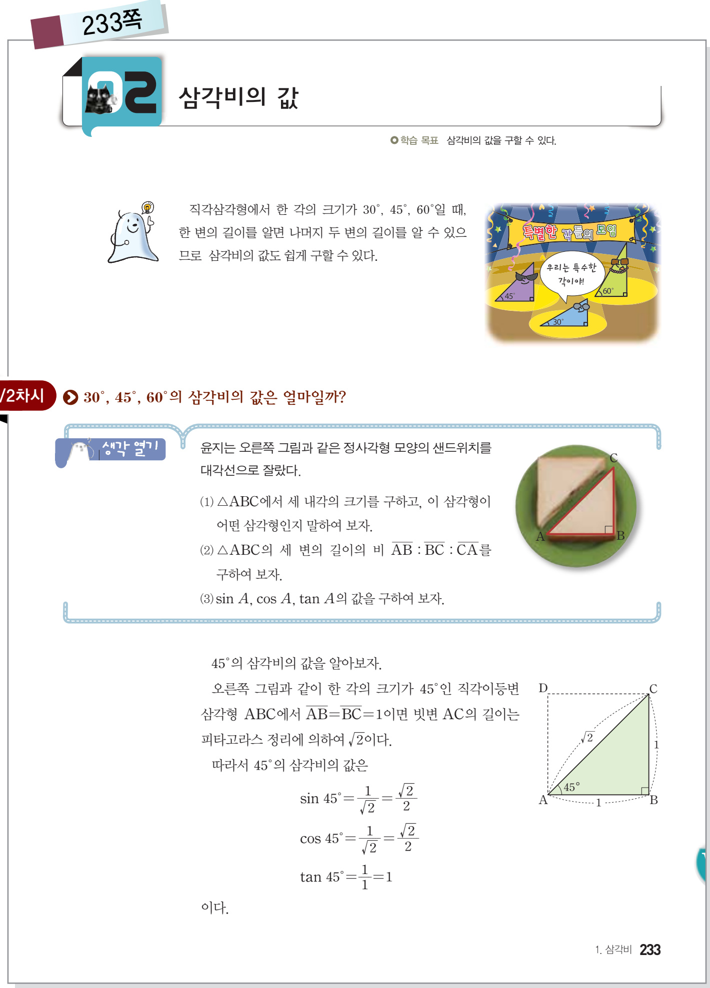
1. 30°, 45°, 60°의 삼각비의 값을 알게 한다.
2. 예각의 삼각비의 값을 구할 수 있게 한다. 또 삼각비의 표에서 삼각비의 값을 찾을 수 있게 한다.

지도상의 유의점

1. 직각삼각형에서 한 예각이 30°, 45°, 60°일 때 세 변의 길이의 비는 피타고라스 정리에서 배웠음을 상기시키고, 그 길이의 비를 이용하여 삼각비의 값을 구할 수 있도록 지도한다.
2. 사분원에서 구한 예각의 삼각비의 값을 이해할 수 있도록 지도한다.
3. 삼각비의 값은 0°에서 90°까지만 다룬다.
4. 삼각비의 표를 이해할 수 있도록 지도한다.

1/2차시 차시별 학습 지도 방법

생각 열기	직각삼각형의 한 각이 45°일 때, 세 변의 길이의 비가 일정함을 알고, 삼각비의 값을 구할 수 있게 한다.
본문	직각삼각형에서 한 예각이 30°, 45°, 60°일 때, 삼각비의 값을 설명한다.
함께 풀기 1, 문제 1	특수한 각에 대한 삼각비의 값은 많이 사용되는 값이므로 그에 대한 문제를 많이 풀어봄으로써 익숙해지게 한다.
함께 풀기 2, 문제 2	직각삼각형에서 한 예각이 30°, 45°, 60°일 때, 삼각비의 값을 이용하여 그 삼각형의 변의 길이를 구할 수 있도록 한다.
문제 3	하위권 학생들에게는 문제 풀이의 단계를 제시해 주도록 한다.
문제 4	삼각비의 유용성을 인식하게 하고, 실생활에서 삼각비가 쓰이는 경우를 찾아보게 한다.


233쪽

02 삼각비의 값

학습 목표 삼각비의 값을 구할 수 있다.

직각삼각형에서 한 각의 크기가 30°, 45°, 60°일 때, 한 변의 길이를 알면 나머지 두 변의 길이를 알 수 있으므로 삼각비의 값도 쉽게 구할 수 있다.

1/2차시 30°, 45°, 60°의 삼각비의 값은 얼마일까?

생각 열기 윤지는 오른쪽 그림과 같은 정사각형 모양의 샌드위치를 대각선으로 잘랐다.

(1) $\triangle ABC$에서 세 내각의 크기를 구하고, 이 삼각형이 어떤 삼각형인지 말하여 보자.

(2) $\triangle ABC$의 세 변의 길이의 비 $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}$를 구하여 보자.

(3) $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$의 값을 구하여 보자.

45°의 삼각비의 값을 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 한 각의 크기가 45°인 직각이등변삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=\overline{BC}=1$이면 빗변 AC의 길이는 피타고라스 정리에 의하여 $\sqrt{2}$이다.

따라서 45°의 삼각비의 값은

$$\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\tan 45^\circ=\frac{1}{1}=1$$

이다.

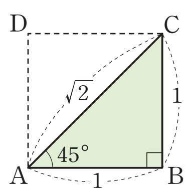
1. 삼각비 233

30°, 45°, 60°의 삼각비의 값은 얼마일까?

생각 열기 정사각형 모양의 샌드위치를 이용하여 세 변의 길이의 비를 나타내어 보는 생각 열기이다.

(1) 정사각형을 대각선으로 잘랐으므로 $\triangle ABC$에서 $\angle B$는 직각이고, $\angle A=\angle C=45^\circ$인 직각삼각형이다.

(2) 한 각의 크기가 45°인 직각이등변삼각형 ABC에서 직각을 낀 변의 길이가 1이면 빗변 AC의 길이는 피타고라스 정리에 의하여 $\sqrt{2}$이다.



$\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=1:1:\sqrt{2}$

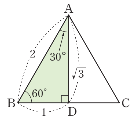
234쪽

이제 30°와 60°의 삼각비의 값을 각각 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 밑변 BC에 내린 수선의 발을 D라 하면

$\angle B=60^\circ,\ \angle BAD=30^\circ,\ \overline{BD}=1$

이고, 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{AD}$의 길이는 $\sqrt{3}$이다.



따라서 60°와 30°의 삼각비의 값은

$$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 60^\circ=\frac{1}{2},\ \tan 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$$

$$\sin 30^\circ=\frac{1}{2},\ \cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

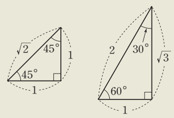
이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

30°, 45°, 60°의 삼각비의 값

1

삼각비 \ A	30°	45°	60°
$\sin A$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan A$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$



함께 풀기 1 다음을 계산하여라.

(1) $\sin 30^\circ+\cos 60^\circ$ (2) $\cos 30^\circ\times\tan 60^\circ$

풀이》 (1) $\sin 30^\circ+\cos 60^\circ=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

(2) $\cos 30^\circ\times\tan 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}=\frac{3}{2}$

답》 (1) 1 (2) $\frac{3}{2}$

문제 1 다음을 계산하여라.

(1) $\sin 60^\circ+\cos 30^\circ$ (2) $\cos 45^\circ-\sin 45^\circ$

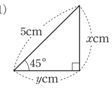
(3) $\sin 30^\circ\times\tan 30^\circ$ (4) $\cos 30^\circ\div\tan 60^\circ$

234 Ⅵ. 삼각비

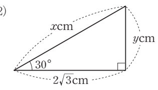
235쪽

2 **함께 풀기 2** 다음 그림에서 x, y의 값을 구하여라.

(1)



(2)



풀이》 (1) $\sin 45^\circ=\frac{x}{5}$이므로 $x=5\times\sin 45^\circ=5\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

$\cos 45^\circ=\frac{y}{5}$이므로 $y=5\times\cos 45^\circ=5\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

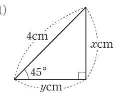
(2) $\cos 30^\circ=\frac{2\sqrt{3}}{x}$이므로 $x=2\sqrt{3}\times\frac{1}{\cos 30^\circ}=2\sqrt{3}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=4$

$\tan 30^\circ=\frac{y}{2\sqrt{3}}$이므로 $y=2\sqrt{3}\times\tan 30^\circ=2\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=2$

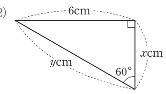
답》 (1) $x=\frac{5\sqrt{2}}{2}$, $y=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (2) $x=4$, $y=2$

문제 2 다음 그림에서 x, y의 값을 구하여라.

(1)

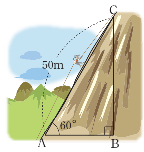


(2)



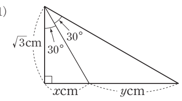
문제 해결

문제 3 오른쪽 그림은 등반을 하고 있는 정수의 모습을 나타낸 것이다. $\overline{AC}=50$m, $\angle A=60^\circ$, $\angle B=90^\circ$일 때, 두 지점 B, C 사이의 거리를 구하여라.

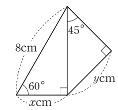


문제 4 다음 그림에서 x, y의 값을 구하여라.

(1)



(2)



1. 삼각비 235

(3) $\angle A=45^\circ$이므로 삼각비의 값은

$$\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ=\frac{1}{1}=1$$

1 직각삼각형에서 한 예각이 30°, 45°, 60°일 때 삼각비의 값을 정리한 표를 단순히 암기하기보다는, 한 예각이 45°인 직각삼각형과 정삼각형을 반으로 나누었을 때 만들어지는 직각삼각형에서 삼각비의 값을 완전히 이해할 수 있도록 지도한다.

문제 1 **30°, 45°, 60°의 삼각비의 값 계산하기**

풀이 (1) $\sin 60^\circ+\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

(2) $\cos 45^\circ-\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$

(3) $\sin 30^\circ\times\tan 30^\circ=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

(4) $\cos 30^\circ\div\tan 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\div\sqrt{3}=\frac{1}{2}$

2 **함께 풀기 2**의 (1)과 (2)는 다음과 같은 방법으로 풀 수도 있다.

(1) $\sin 45^\circ=\frac{x}{5}$에서 $x=\frac{5\sqrt{2}}{2}$이고, 직각이등변삼각형이므로 $x=y=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

(2) $\cos 30^\circ=\frac{2\sqrt{3}}{x}$에서 $x=4$

$\sin 30^\circ=\frac{y}{x}=\frac{y}{4}$에서 $y=2$

Ⅵ

문제 2 **직각삼각형의 변의 길이 구하기**

풀이 (1) $\sin 45^\circ=\dfrac{x}{4}$에서

$x=4\times\sin 45^\circ$

$=4\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

또 $\cos 45^\circ=\dfrac{y}{4}$에서

$y=4\times\cos 45^\circ$

$=4\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

(2) $\tan 60^\circ=\dfrac{6}{x}$에서

$x=\dfrac{6}{\tan 60^\circ}=\dfrac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

$\cos 60^\circ=\dfrac{2\sqrt{3}}{y}$에서

$y=\dfrac{2\sqrt{3}}{\cos 60^\circ}=4\sqrt{3}$

문제 3 **삼각비를 이용하여 두 지점 사이의 거리 구하기**

풀이 두 지점 A, C 사이의 거리가 50 m이므로

$\sin 60^\circ=\dfrac{\overline{BC}}{50}$에서

$\overline{BC}=50\times\sin 60^\circ$

$=50\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=25\sqrt{3}\,(\mathrm{m})$

따라서 두 지점 B, C 사이의 거리는 $25\sqrt{3}$ m이다.

문제 4 **직각삼각형의 변의 길이 구하기**

풀이 (1) $\tan 30^\circ=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$이므로

$x=\sqrt{3}\times\tan 30^\circ$

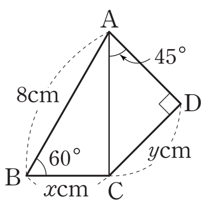
$=\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=1$

또 $\tan 60^\circ=\dfrac{1+y}{\sqrt{3}}$이므로

$1+y=\tan 60^\circ\times\sqrt{3}$

$y=2$

(2) 오른쪽 그림의 △ABC에서



$\cos 60^\circ=\dfrac{x}{8}$이므로

$x=8\times\cos 60^\circ$

$=8\times\dfrac{1}{2}=4$

$\tan 60^\circ=\dfrac{\overline{AC}}{4}$이므로

$\overline{AC}=4\times\tan 60^\circ=4\sqrt{3}$이고,

$\angle ACD=45^\circ$이므로 △ACD에서

$\cos 45^\circ=\dfrac{y}{4\sqrt{3}}$

$y=4\sqrt{3}\times\cos 45^\circ$

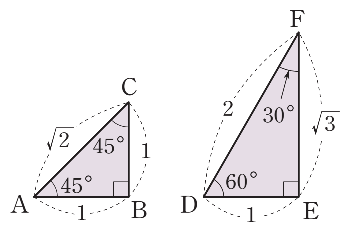
$=4\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{6}$

수준별 교수·학습 방법

삼각비의 값을 알고, 이를 이용하여 삼각비의 계산과 직각삼각형의 변의 길이를 구할 수 있다.

하 직각삼각형에서 한 예각이 30°, 45°, 60°일 때 삼각비의 값을 구하는 과정을 완전히 이해할 수 있도록 하고, 간단한 문제를 반복하여 풀어 보게 함으로써 삼각비의 값을 구하는 계산에 익숙하게 한다.

[문제] 아래 그림을 보고 다음 값을 구하여라.



(1) $\sin 45^\circ$ (2) $\cos 45^\circ$ (3) $\tan 45^\circ$

(4) $\sin 60^\circ$ (5) $\sin 30^\circ$ (6) $\cos 60^\circ$

(7) $\cos 30^\circ$ (8) $\tan 60^\circ$ (9) $\tan 30^\circ$

(10) $2\times\sin 45^\circ$ (11) $3\times\cos 60^\circ$ (12) $\sqrt{3}\times\tan 60^\circ$

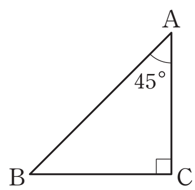
답 (1) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (3) 1 (4) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (5) $\dfrac{1}{2}$ (6) $\dfrac{1}{2}$

(7) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (8) $\sqrt{3}$ (9) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (10) $\sqrt{2}$ (11) $\dfrac{3}{2}$ (12) 3

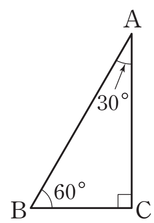
보충 문제

다음 삼각형에서 $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}$를 구하여라.

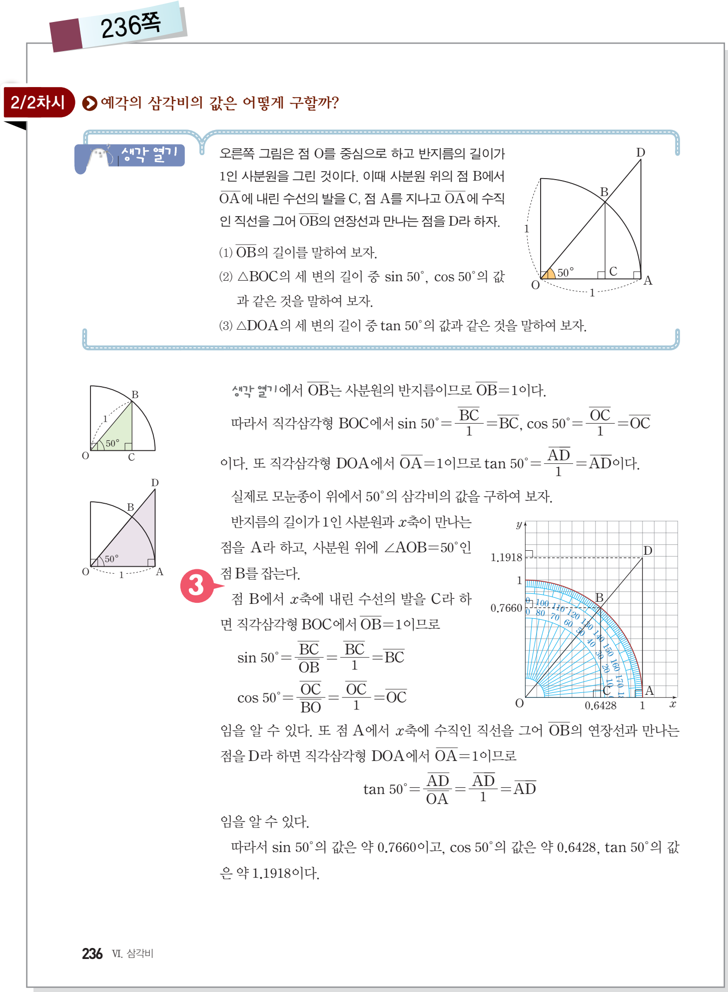
(1)



(2)



답 (1) $\sqrt{2}:1:1$ (2) $2:1:\sqrt{3}$



236쪽

2/2차시 예각의 삼각비의 값은 어떻게 구할까?

생각 열기 오른쪽 그림은 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 사분원을 그린 것이다. 이때 사분원 위의 점 B에서 $\overline{OA}$에 내린 수선의 발을 C, 점 A를 지나고 $\overline{OA}$에 수직인 직선을 그어 $\overline{OB}$의 연장선과 만나는 점을 D라 하자.

(1) $\overline{OB}$의 길이를 말하여 보자.

(2) $\triangle BOC$의 세 변의 길이 중 $\sin 50^\circ$, $\cos 50^\circ$의 값과 같은 것을 말하여 보자.

(3) $\triangle DOA$의 세 변의 길이 중 $\tan 50^\circ$의 값과 같은 것을 말하여 보자.

생각 열기에서 $\overline{OB}$는 사분원의 반지름이므로 $\overline{OB}=1$이다.

따라서 직각삼각형 BOC에서 $\sin 50^\circ=\frac{\overline{BC}}{1}=\overline{BC}$, $\cos 50^\circ=\frac{\overline{OC}}{1}=\overline{OC}$이다. 또 직각삼각형 DOA에서 $\overline{OA}=1$이므로 $\tan 50^\circ=\frac{\overline{AD}}{1}=\overline{AD}$이다.

실제로 모눈종이 위에서 50°의 삼각비의 값을 구하여 보자.

반지름의 길이가 1인 사분원과 x축이 만나는 점을 A라 하고, 사분원 위에 $\angle AOB=50^\circ$인 점 B를 잡는다.

3 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 C라 하면 직각삼각형 BOC에서 $\overline{OB}=1$이므로

$$\sin 50^\circ=\frac{\overline{BC}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{BC}}{1}=\overline{BC}$$

$$\cos 50^\circ=\frac{\overline{OC}}{\overline{BO}}=\frac{\overline{OC}}{1}=\overline{OC}$$

임을 알 수 있다. 또 점 A에서 x축에 수직인 직선을 그어 $\overline{OB}$의 연장선과 만나는 점을 D라 하면 직각삼각형 DOA에서 $\overline{OA}=1$이므로

$$\tan 50^\circ=\frac{\overline{AD}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{AD}}{1}=\overline{AD}$$

임을 알 수 있다.

따라서 $\sin 50^\circ$의 값은 약 0.7660이고, $\cos 50^\circ$의 값은 약 0.6428, $\tan 50^\circ$의 값은 약 1.1918이다.

236 Ⅵ. 삼각비

2/2차시 차시별 학습 지도 방법 [교과 교실]

생각 열기	사분원을 이용하여 예각의 삼각비를 구할 수 있도록 한다.
본문, 문제 5	사분원을 이용하여 예각의 삼각비를 구할 수 있음을 설명하고 문제를 풀 수 있도록 한다.
본문, 문제 6	사분원을 이용하여 0°, 90°의 삼각비를 구할 수 있음을 설명하고 문제를 풀 수 있도록 한다.
활동하기, 본문	계산기를 이용하여 삼각비의 값을 구하는 방법과 삼각비의 표를 이용하여 삼각비의 값을 구하는 방법을 알게 한다.
문제 7	직접 계산기를 활용하여 계산해 보게 하고, 부록의 삼각비의 표를 이용하여 삼각비의 값을 구하고 서로 비교할 수 있도록 한다.

예각의 삼각비의 값은 어떻게 구할까?

생각 열기 예각의 삼각비의 값을 반지름의 길이가 1인 사분원에서 구하는 생각 열기이다.

지도상의 유의점 사인과 코사인은 빗변의 길이가 1인 직각삼각형을 이용하고, 탄젠트는 밑변의 길이가 1인 직각삼각형을 이용함을 이해할 수 있도록 지도한다.

(1) $\overline{OB}$는 사분원의 반지름의 길이와 같으므로 1이다.

(2) $\triangle BOC$에서

$$\sin 50^\circ=\frac{\overline{BC}}{1}=\overline{BC},\ \cos 50^\circ=\frac{\overline{OC}}{1}=\overline{OC}$$

(3) $\triangle OAD$에서

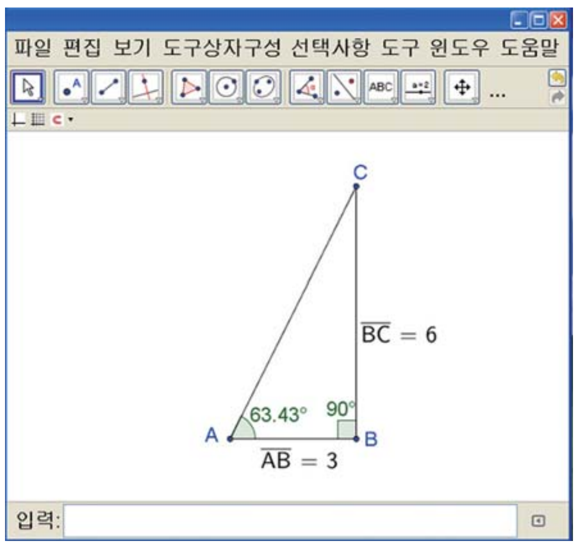
$$\tan 50^\circ=\frac{\overline{AD}}{1}=\overline{AD}$$

3 모눈종이와 각도기를 사용하여 반지름의 길이가 1인 사분원을 그리고, 임의의 예각의 삼각비를 하나의 선분으로 나타내는 방법을 지도한다.
삼각비의 값을 정확히 구하는 것보다 구하는 과정을 익히는 데 중점을 두어 지도한다.

참고 자료

컴퓨터 프로그램을 이용하여 임의의 예각에 대한 삼각비의 값을 구하여 보자.

그림에서 점 C를 움직이며 $\angle A$의 크기의 변화에 따른 $\tan A$의 값을 확인할 수 있다.



문제 5 임의의 예각의 삼각비의 값 구하기

풀이 (1) △BOC에서 $\sin 40^\circ = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{OB}} = \dfrac{\overline{BC}}{1}$ 이므로

$\sin 40^\circ$의 값은 약 0.6428이다.

(2) △BOC에서 $\cos 40^\circ = \dfrac{\overline{OC}}{\overline{BO}} = \dfrac{\overline{OC}}{1}$ 이므로

$\cos 40^\circ$의 값은 약 0.7660이다.

(3) △DOA에서 $\tan 40^\circ = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{AD}}{1}$ 이므로

$\tan 40^\circ$의 값은 약 0.8391이다.

4 직각삼각형에서 직각이 아닌 한 각이 0°이거나 90°인 경우는 생각할 수 없다. 그러므로 0°에 가까워질 때와 90°로 가까워질 때로 나누어 생각함을 알게 한다.

각 경우에 사인, 코사인, 탄젠트의 값이 어떻게 변화하는지 살펴보고, 다음과 같이 정해짐을 알게 한다.

$\sin 0^\circ = 0$,

$\cos 0^\circ = 1$,

$\sin 90^\circ = 1$,

$\cos 90^\circ = 0$,

$\tan 0^\circ = 0$

이와 같이 정할 수 있음을 학생들이 직관적으로 받아들일 수 있도록 지도한다.

한편, $\tan 90^\circ$는 한없이 커지므로 정할 수 없음을 유의하도록 지도한다.

문제 6 삼각비의 값 계산하기

풀이 (1) $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 0 + 1 = 1$

(2) $\sin 90^\circ - \cos 90^\circ = 1 - 0 = 1$

(3) $\cos 0^\circ \times \sin 90^\circ + \tan 0^\circ$

$= 1 \times 1 + 0 = 1$

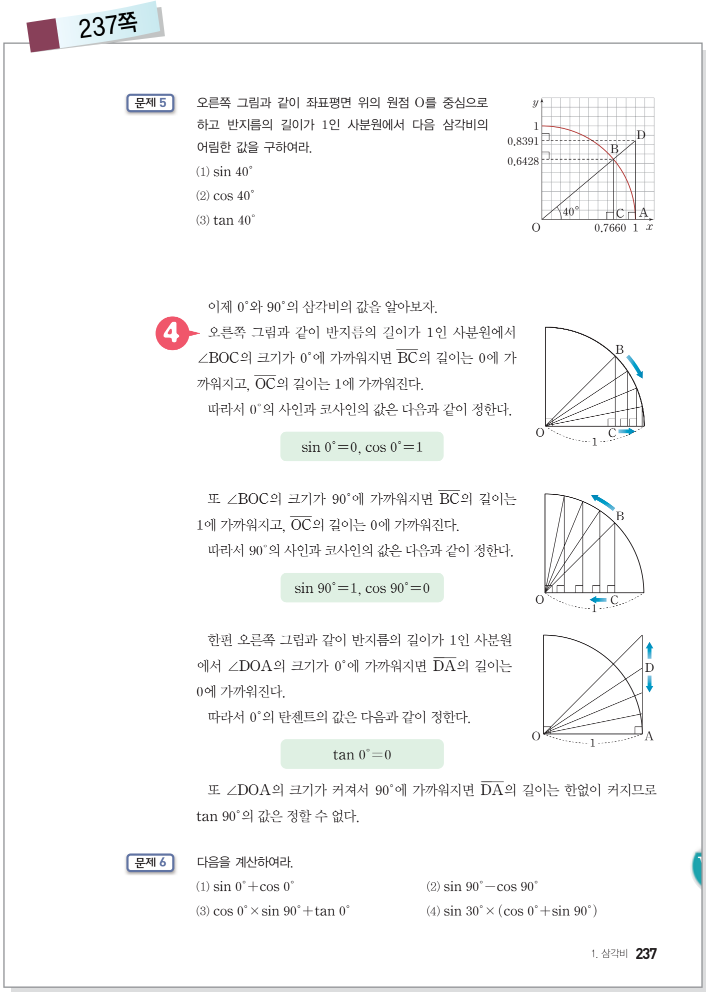
(4) $\sin 30^\circ \times (\cos 0^\circ + \sin 90^\circ)$

$= \dfrac{1}{2} \times (1+1) = 1$

참고 자료

스프레드시트 프로그램 이용하기

직각삼각형에서 직각이 아닌 한 각이 0°에 가까워 질 때와 90°에 가까워질 때, 각의 크기에 따른 삼각비의 값의 변화를 스프레드시트 프로그램을 이용하여 다음과 같이 확인할 수 있다.



237쪽

문제 5 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위의 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 사분원에서 다음 삼각비의 어림한 값을 구하여라.

(1) $\sin 40^\circ$

(2) $\cos 40^\circ$

(3) $\tan 40^\circ$

이제 0°와 90°의 삼각비의 값을 알아보자.

4 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 사분원에서 ∠BOC의 크기가 0°에 가까워지면 $\overline{BC}$의 길이는 0에 가까워지고, $\overline{OC}$의 길이는 1에 가까워진다.

따라서 0°의 사인과 코사인의 값은 다음과 같이 정한다.

$\sin 0^\circ = 0,\ \cos 0^\circ = 1$

또 ∠BOC의 크기가 90°에 가까워지면 $\overline{BC}$의 길이는 1에 가까워지고, $\overline{OC}$의 길이는 0에 가까워진다.

따라서 90°의 사인과 코사인의 값은 다음과 같이 정한다.

$\sin 90^\circ = 1,\ \cos 90^\circ = 0$

한편 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 사분원에서 ∠DOA의 크기가 0°에 가까워지면 $\overline{DA}$의 길이는 0에 가까워진다.

따라서 0°의 탄젠트의 값은 다음과 같이 정한다.

$\tan 0^\circ = 0$

또 ∠DOA의 크기가 커져서 90°에 가까워지면 $\overline{DA}$의 길이는 한없이 커지므로 $\tan 90^\circ$의 값은 정할 수 없다.

문제 6 다음을 계산하여라.

(1) $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ$ (2) $\sin 90^\circ - \cos 90^\circ$

(3) $\cos 0^\circ \times \sin 90^\circ + \tan 0^\circ$ (4) $\sin 30^\circ \times (\cos 0^\circ + \sin 90^\circ)$

1. 삼각비 237

이때 스프레드시트 프로그램에서 도(°)값을 입력하려면 라디안으로 환산해서 입력하면 되는데, 수식은 위에서 설명한 비례식 $2\pi(\text{rad}) = 360^\circ$를 이용한다.

즉, 라디안을 도로 고칠 땐 $\dfrac{180}{\pi}$를 곱해 주고, 도를 라디안으로 고칠 땐 $\dfrac{\pi}{180}$를 곱해 줘야 한다.

스프레드시트 프로그램에서 π값은 무변수 함수 pi( )를 사용하므로 $\sin 30^\circ$의 값을 구하기 위해 '=sin(30*pi( )/180)'라고 입력하면 $0.5\left(=\dfrac{1}{2}\right)$인 값을 구할 수 있다.

	A	B	C	D
1	각도(도)	sin A	cos A	tan A
2	0	0	1	0
3	10	0.173648	0.984807753	0.176326981
4	20	0.34202	0.939692621	0.363970234
5	30	0.5	0.866025404	0.577350269
6	40	0.642788	0.766044443	0.839099631
7	50	0.766044	0.64278761	1.191753593
8	60	0.866025	0.5	1.732050808
9	70	0.939693	0.342020143	2.747477419
10	80	0.984808	0.173648178	5.67128182
11	90	1	0	
12				

238쪽

삼각비의 값을 구하기 위하여 삼각비의 표는 어떻게 이용할까?

활동하기

준비물
계산기

다음은 소수 다섯째 자리에서 반올림하여 계산 결과가 소수 넷째 자리까지 보이도록 설정해 놓은 계산기이다. 이를 이용하여 삼각비의 값을 구하면 다음과 같다.

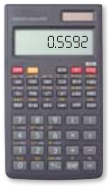
sin 34°의 값은 계산기에서

sin, 3, 4, =

을 차례로 누르면

0.5592

가 나타난다. 즉, sin 34°의 값은 약 0.5592이다.



위와 같이 계산기를 이용하여 다음 값을 구하여 보자.

(1) cos 34°　　(2) tan 34°

활동하기에서 cos 34°, tan 34°를 구하면

$$\cos 34^\circ = 0.8290,\ \tan 34^\circ = 0.6745$$

이다.

삼각비의 표의 삼각비의 값은 어림한 값이지만 편의상 '='를 쓴다.

이제 삼각비의 표를 이용하여 삼각비의 값을 구하는 방법에 대하여 알아보자.

5 0°에서 90°까지의 각에 대한 삼각비의 값은 소수 다섯째 자리에서 반올림하여 표로 나타낸 삼각비의 표를 이용하여 구할 수 있다.

각도	sin	cos	tan
0°	0.0000	1.0000	0.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175
⋮	⋮	⋮	⋮
34°	0.5592	0.8290	0.6745
35°	0.5736	0.8192	0.7002
36°	0.5878	0.8090	0.7265
⋮	⋮	⋮	⋮

이 책의 부록에 실려있는 삼각비의 표에서 sin 34°의 값은 34°의 가로줄과 sin의 세로줄이 만나는 칸에 적혀 있는 수 0.5592이다. 즉, sin 34°=0.5592이다.

또 위의 삼각비 표에서 cos 34°, tan 34°를 찾으면

$$\cos 34^\circ = 0.8290,\ \tan 34^\circ = 0.6745$$

이다.

문제 7 계산기와 삼각비의 표를 이용하여 다음 삼각비의 값을 구하여라.

삼각비	계산기(소수 다섯째 자리에서 반올림)	삼각비의 표
sin 65°		
cos 42°		
tan 70°		

238 VI. 삼각비

삼각비의 값을 구하기 위하여 삼각비의 표는 어떻게 이용할까?

활동하기 계산기를 이용하여 삼각비의 값을 구해 보는 활동하기이다.

지도상의 유의점 계산기에 따라 매뉴얼이 다르므로 자신이 가지고 있는 계산기의 매뉴얼을 숙지하고 활용할 수 있도록 하고, 계산기도 교구와 같이 적극적으로 사용할 수 있도록 지도한다.

sin 34°와 마찬가지로 계산기를 이용하면

(1) cos 34°의 값은

cos 3 4 =

의 버튼을 차례로 누르면 화면에 0.8290이 나타난다.

0.8290

(2) tan34°의 값은

tan 3 4 =

의 버튼을 차례로 누르면 화면에 0.6745가 나타난다.

0.6745

5 삼각비는 직각삼각형의 두 변의 길이의 비로 설명할 수 있으며, 그 값은 대부분 어림한 값이다.
따라서 교과서의 부록에 실려 있는 삼각비의 표는 소수 다섯째 자리에서 반올림하여 소수 넷째 자리까지 나타낸 어림한 값임을 알게 한다.

문제 7 계산기로 구한 삼각비의 값을 삼각비 표에서 찾아보고 비교하기

풀이

삼각비	계산기 (소수 다섯째 자리에서 반올림)	삼각비의 표
sin 65°	0.9063	0.9063
cos 42°	0.7431	0.7431
tan 70°	2.7475	2.7475

수준별 교수·학습 방법

직각삼각형에서 직각이 아닌 한 각이 0°이거나 90°인 경우의 삼각비의 값을 구할 수 있다. 또 삼각비의 값을 계산기로 구하는 방법과 삼각비의 표를 보는 방법을 알 수 있다.

하

- 그래픽 계산기와 다양한 컴퓨터 프로그램을 사용하여 직각삼각형에서 직각이 아닌 한 각이 0°에 가까워질 때와 90°로 가까워질 때로 나누어, 각의 변화에 따른 삼각비의 값을 확인할 수 있게 한다.
  교과 교실에서 다양한 시각 자료로 편안하고 자유롭게 생각할 수 있는 환경을 조성한다.

- 계산기를 활용하여 삼각비의 값을 구하는 방법을 간단한 예와 함께 설명한다. 또 다양한 각의 삼각비의 값을 삼각비의 표로 확인할 수 있게 한다.

  [문제 1] 다음을 계산기로 소수 다섯째 자리에서 반올림하여 소수 넷째 자리까지 구하여라.
  (1) sin 68°　(2) cos 68°　(3) tan 68°
  답 (1) 0.9272 (2) 0.3746 (3) 2.4751

  [문제 2] 삼각비의 표를 이용하여 다음 값을 구하여라.
  (1) sin 35°　(2) cos 35°　(3) tan 35°
  답 (1) 0.5736 (2) 0.8192 (3) 0.7002

  [문제 3] 삼각비의 표를 이용하여 다음 ∠A의 크기를 구하여라.
  (1) sin A=0.9135　(2) cos A=0.3746
  (3) tan A=2.3559　(4) tan A=2.7475
  답 (1) 66° (2) 68° (3) 67° (4) 70°

VI

확인하기

1 **평가의 주안점** 직각삼각형의 각 변의 길이를 알 때, 삼각비의 값을 구할 수 있다.

풀이 (1) 직각삼각형 ABC에서

$$\sin B=\frac{\overline{AC}}{\overline{BA}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos B=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\tan B=\frac{\overline{CA}}{\overline{BC}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{14}}{7}$$

(2) 직각삼각형 ABC에서

$$\sin B=\frac{\overline{CA}}{\overline{BC}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos B=\frac{\overline{BA}}{\overline{CB}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\tan B=\frac{\overline{AC}}{\overline{BA}}=\frac{2}{1}=2$$

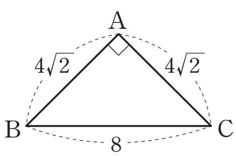
2 **평가의 주안점** 0°, 30°, 45°, 60°, 90°의 삼각비의 값을 구할 수 있다.

풀이

삼각비 \ A	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin A$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos A$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan A$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	

3 **평가의 주안점** 직각삼각형의 한 변의 길이와 한 각의 크기를 알 때, 삼각비의 값을 구할 수 있다.

풀이 (1) $\overline{AB}=\sqrt{8^2-(4\sqrt{2})^2}$
$=4\sqrt{2}$

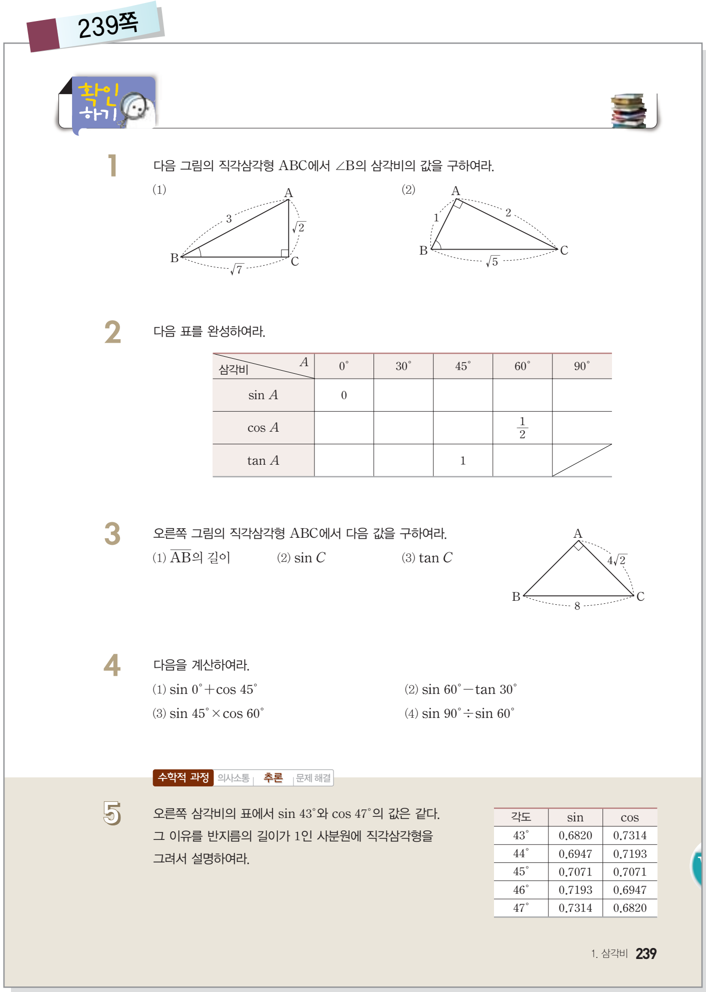


(2) $\sin C=\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}=\frac{4\sqrt{2}}{8}$
$=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\tan C=\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}}=\frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}=1$

4 **평가의 주안점** 삼각비의 값을 이용하여 사칙 계산을 할 수 있다.

풀이 (1) $\sin 0^\circ+\cos 45^\circ=0+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$



239쪽

확인하기

1 다음 그림의 직각삼각형 ABC에서 ∠B의 삼각비의 값을 구하여라.

(1) (2)

2 다음 표를 완성하여라.

삼각비 \ A	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin A$	0				
$\cos A$				$\frac{1}{2}$	
$\tan A$			1		

3 오른쪽 그림의 직각삼각형 ABC에서 다음 값을 구하여라.

(1) $\overline{AB}$의 길이 (2) $\sin C$ (3) $\tan C$

4 다음을 계산하여라.

(1) $\sin 0^\circ+\cos 45^\circ$ (2) $\sin 60^\circ-\tan 30^\circ$

(3) $\sin 45^\circ\times\cos 60^\circ$ (4) $\sin 90^\circ\div\sin 60^\circ$

수학적 과정 의사소통 추론 문제 해결

5 오른쪽 삼각비의 표에서 $\sin 43^\circ$와 $\cos 47^\circ$의 값은 같다. 그 이유를 반지름의 길이가 1인 사분원에 직각삼각형을 그려서 설명하여라.

각도	sin	cos
43°	0.6820	0.7314
44°	0.6947	0.7193
45°	0.7071	0.7071
46°	0.7193	0.6947
47°	0.7314	0.6820

1. 삼각비 239

(2) $\sin 60^\circ-\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

(3) $\sin 45^\circ\times\cos 60^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

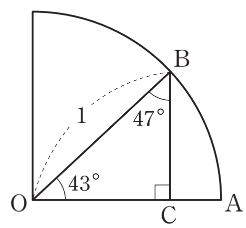
(4) $\sin 90^\circ\div\sin 60^\circ=1\div\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

5 **평가의 주안점** 직각삼각형에서 두 삼각비의 값을 비교할 수 있다.

풀이 주어진 삼각비의 표에서

$\sin 43^\circ=0.6820$, $\cos 47^\circ=0.6820$이므로 두 값은 같다.

이것을 오른쪽 직각삼각형에서 살펴보면



$$\sin 43^\circ=\frac{\overline{BC}}{1}=\overline{BC}$$

$$\cos 47^\circ=\frac{\overline{BC}}{1}=\overline{BC}$$

이므로 두 값이 같음을 알 수 있다.

중단원 마무리하기

스스로 정리하기

1. (1) 사인, $\sin A$　　(2) 코사인, $\cos A$
   (3) 탄젠트, $\tan A$　　(4) 삼각비

기초 다지기

1 **평가의 주안점** 직각삼각형의 두 변의 길이를 알 때, 삼각비의 값을 구할 수 있다.

풀이 피타고라스 정리를 이용하면

$\overline{AC}=\sqrt{12^2+5^2}=13$

(1) $\sin A=\dfrac{\overline{CB}}{\overline{AC}}=\dfrac{5}{13}$

(2) $\cos A=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CA}}=\dfrac{12}{13}$

(3) $\cos C=\dfrac{\overline{CB}}{\overline{AC}}=\dfrac{5}{13}$

(4) $\tan C=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\dfrac{12}{5}$

2 **평가의 주안점** 직각삼각형의 한 변의 길이를 알 때, 나머지 두 변의 길이를 구하고 삼각비의 값을 계산할 수 있다.

풀이 직각삼각형 ABC에서

$\overline{AB}=12\text{cm}$, $\angle B=30^\circ$, $\angle A=60^\circ$이므로

$\sin 60^\circ=\dfrac{\overline{BC}}{12}$이므로

$\overline{BC}=12\times\sin 60^\circ=12\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}\,(\text{cm})$

$\overline{BC}\times\sin B=6\sqrt{3}\times\sin 30^\circ=3\sqrt{3}$

3 **평가의 주안점** 반지름의 길이가 1인 사분원에서 예각의 삼각비의 값을 구할 수 있다.

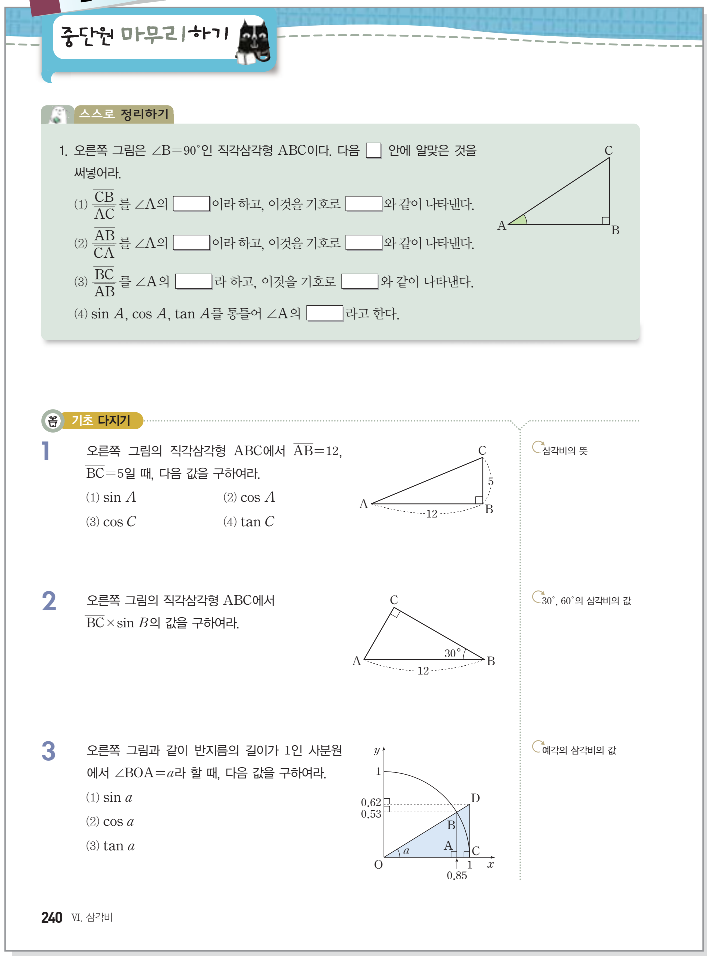
풀이 (1) $\sin a=\dfrac{\overline{BA}}{\overline{OB}}=\overline{BA}$이므로

$\sin a$의 값은 약 0.53이다.

(2) $\cos a=\dfrac{\overline{OA}}{\overline{BO}}=\overline{OA}$이므로

$\cos a$의 값은 약 0.85이다.

240쪽



중단원 마무리하기

스스로 정리하기

1. 오른쪽 그림은 $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형 ABC이다. 다음 $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

(1) $\dfrac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$를 ∠A의 $\square$이라 하고, 이것을 기호로 $\square$와 같이 나타낸다.

(2) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CA}}$를 ∠A의 $\square$이라 하고, 이것을 기호로 $\square$와 같이 나타낸다.

(3) $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$를 ∠A의 $\square$라 하고, 이것을 기호로 $\square$와 같이 나타낸다.

(4) $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$를 통틀어 ∠A의 $\square$라고 한다.

기초 다지기

1 오른쪽 그림의 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=12$, $\overline{BC}=5$일 때, 다음 값을 구하여라.

(1) $\sin A$　(2) $\cos A$
(3) $\cos C$　(4) $\tan C$

삼각비의 뜻

2 오른쪽 그림의 직각삼각형 ABC에서 $\overline{BC}\times\sin B$의 값을 구하여라.

30°, 60°의 삼각비의 값

3 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 사분원에서 $\angle BOA=a$라 할 때, 다음 값을 구하여라.

(1) $\sin a$
(2) $\cos a$
(3) $\tan a$

예각의 삼각비의 값

240 Ⅵ. 삼각비

(3) $\tan a=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{OC}}=\overline{CD}$이므로

$\tan a$의 값은 약 0.62이다.

다른 풀이 $\tan a=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{OA}}=\dfrac{0.53}{0.85}$이므로

$\tan a$의 값은 약 0.62이다.

보충 문제

1. 다음을 계산하여라.

(1) $2\times\sin 30^\circ$　　(2) $2\sqrt{2}\times\sin 45^\circ$
(3) $4\times\cos 45^\circ$　　(4) $6\times\sin 60^\circ$
(5) $2\sqrt{3}\times\tan 30^\circ$　　(6) $\sin 30^\circ\times\cos 60^\circ$

답 (1) 1　(2) 2　(3) $2\sqrt{2}$　(4) $3\sqrt{3}$　(5) 2　(6) $\dfrac{1}{4}$

2. 다음 계산을 하여라.

(1) $\sin 30^\circ+\cos 60^\circ$　　(2) $\tan 60^\circ-\cos 45^\circ$
(3) $\cos 60^\circ\div\sin 45^\circ$　　(4) $\tan 60^\circ\div\tan 30^\circ$

답 (1) 1　(2) $\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(3) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(4) 3

기본 익히기

4 평가의 주안점 직각삼각형의 한 변의 길이를 알 때, 나머지 두 변의 길이를 구하고 삼각비의 값을 구할 수 있다.

풀이 직각삼각형 ABC에서

(1) $\cos A=\dfrac{3}{4}=\dfrac{6}{\overline{AC}}$ 이므로 $\overline{AC}=8$

(2) $\overline{BC}=\sqrt{8^2-6^2}=2\sqrt{7}$

(3) $\sin A=\dfrac{\overline{CB}}{\overline{AC}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{8}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

(4) $\tan A=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{6}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

5 평가의 주안점 직각삼각형의 변의 길이를 삼각비를 이용하여 구할 수 있다.

풀이 $\triangle$CDB에서 $\overline{CD}=4$, $\overline{DB}=2$이므로

$\overline{CB}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$

(1) $\triangle$ABC에서

$\overline{AB}=\sqrt{(4\sqrt{3})^2-(2\sqrt{3})^2}=6$

$\overline{AD}=\overline{AB}-\overline{DB}=6-2=4$

(2) $\cos A=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CA}}=\dfrac{6}{4\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

6 평가의 주안점 삼각비의 값을 계산할 수 있다.

풀이 (1) $\cos 30^\circ\times\tan 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$

(2) $\tan 60^\circ-\sin 30^\circ\times\cos 45^\circ$

$=\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$=\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

(3) $\sin 45^\circ\times\cos 45^\circ-\cos 60^\circ\times\tan 45^\circ$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{2}\times 1$

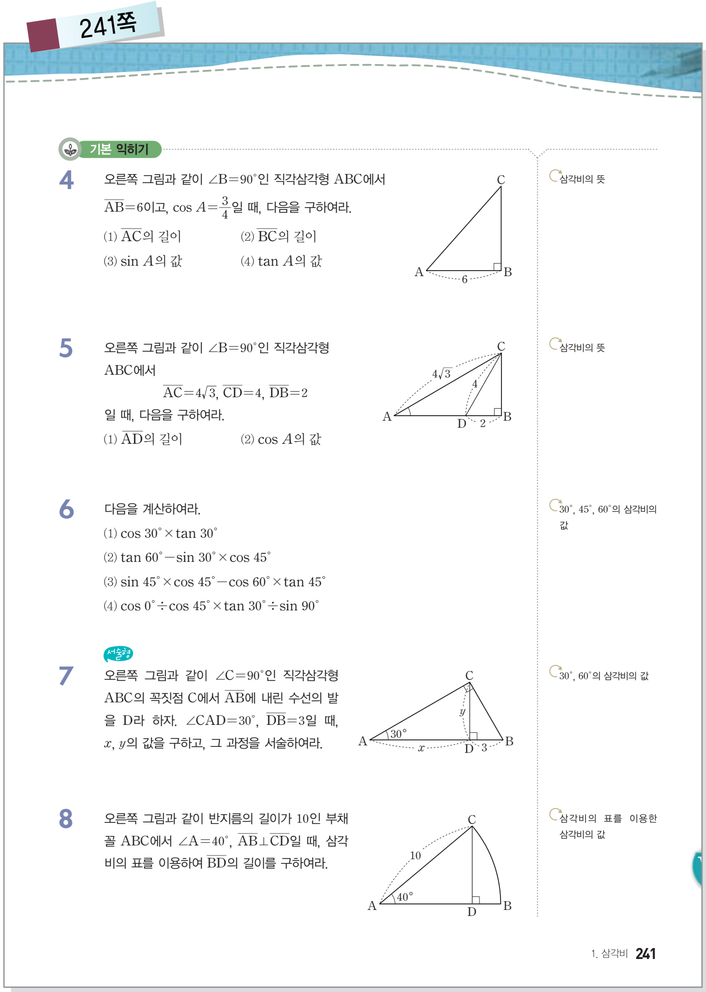
$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=0$

(4) $\cos 0^\circ\div\cos 45^\circ\times\tan 30^\circ\div\sin 90^\circ$

$=1\div\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}\div 1$

$=\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$



7 평가의 주안점 30°, 60°의 삼각비의 값을 구할 수 있다.

풀이 $\triangle$ABC에서 $\angle B=60^\circ$

$\triangle$CDB에서 $\tan 60^\circ=\dfrac{y}{3}$이므로

$\dfrac{y}{3}=\sqrt{3}$에서 $y=3\sqrt{3}$ …… ❶

$\triangle$CAD에서 $\tan 30^\circ=\dfrac{3\sqrt{3}}{x}$이므로

$\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{3\sqrt{3}}{x}$에서 $x=9$ …… ❷

단계	채점 기준	배점 비율
❶	y의 값을 구한다.	50%
❷	x의 값을 구한다.	50%

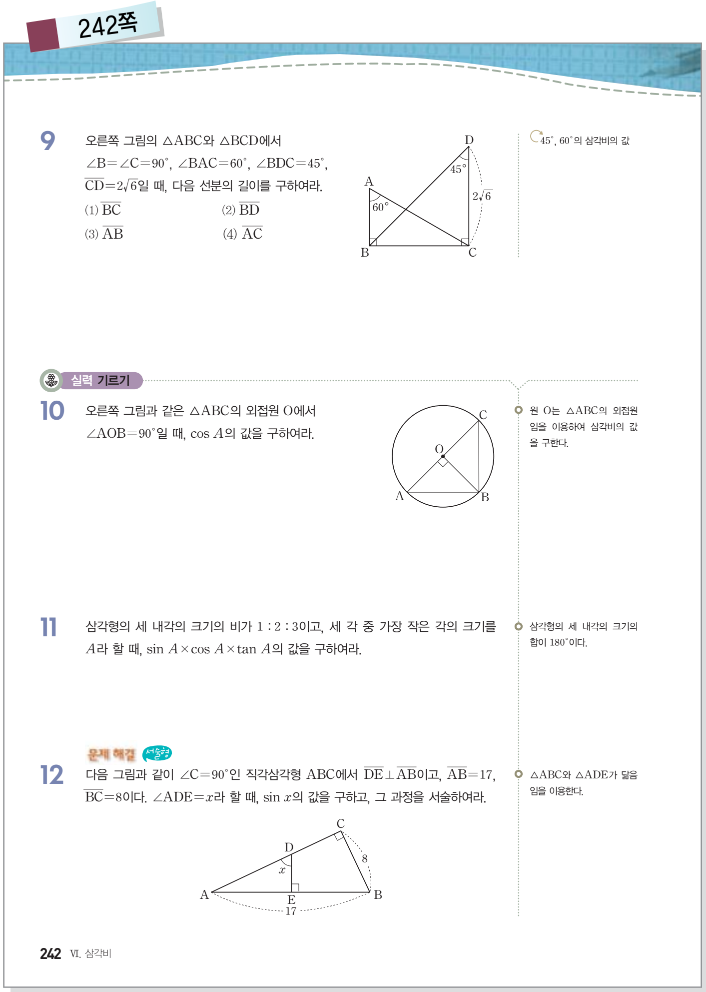
8 평가의 주안점 삼각비의 표를 이용하여 변의 길이를 구할 수 있다.

풀이 $\triangle$ADC에서

$\overline{AD}=10\times\cos 40^\circ$

$=10\times 0.7660=7.66$

$\overline{DB}=\overline{AB}-\overline{AD}=10-7.66=2.34$


242쪽

9 오른쪽 그림의 $\triangle ABC$와 $\triangle BCD$에서 $\angle B=\angle C=90^\circ$, $\angle BAC=60^\circ$, $\angle BDC=45^\circ$, $\overline{CD}=2\sqrt{6}$일 때, 다음 선분의 길이를 구하여라.

(1) $\overline{BC}$ (2) $\overline{BD}$

(3) $\overline{AB}$ (4) $\overline{AC}$

45°, 60°의 삼각비의 값

실력 기르기

10 오른쪽 그림과 같은 $\triangle ABC$의 외접원 O에서 $\angle AOB=90^\circ$일 때, $\cos A$의 값을 구하여라.

원 O는 $\triangle ABC$의 외접원임을 이용하여 삼각비의 값을 구한다.

11 삼각형의 세 내각의 크기의 비가 $1:2:3$이고, 세 각 중 가장 작은 각의 크기를 A라 할 때, $\sin A\times\cos A\times\tan A$의 값을 구하여라.

삼각형의 세 내각의 크기의 합이 180°이다.

문제 해결 서술형

12 다음 그림과 같이 $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{DE}\perp\overline{AB}$이고, $\overline{AB}=17$, $\overline{BC}=8$이다. $\angle ADE=x$라 할 때, $\sin x$의 값을 구하고, 그 과정을 서술하여라.

$\triangle ABC$와 $\triangle ADE$가 닮음임을 이용한다.

242 Ⅵ. 삼각비

9 평가의 주안점 45°, 60°의 삼각비의 값을 구할 수 있다.

풀이 (1) $\triangle BCD$에서 $\angle DBC=45^\circ$이므로

$\overline{BC}=2\sqrt{6}\times\tan 45^\circ=2\sqrt{6}\times 1$

$=2\sqrt{6}$

(2) $\triangle BCD$에서

$\overline{BD}=2\sqrt{6}\times\dfrac{1}{\cos 45^\circ}=2\sqrt{6}\times\sqrt{2}$

$=4\sqrt{3}$

다른 풀이 (1)에 의하여

$\overline{BD}=\sqrt{(2\sqrt{6})^2+(2\sqrt{6})^2}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$

(3) $\triangle ABC$에서

$\overline{AB}=2\sqrt{6}\times\dfrac{1}{\tan 60^\circ}=2\sqrt{6}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$=2\sqrt{2}$

(4) $\triangle ABC$에서

$\overline{AC}=2\sqrt{2}\times\dfrac{1}{\cos 60^\circ}=2\sqrt{2}\times 2$

$=4\sqrt{2}$

다른 풀이 (1), (3)에 의하여

$\overline{AC}=\sqrt{(2\sqrt{6})^2+(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

실력 기르기

10 평가의 주안점 외접원을 이용하여 삼각비의 값의 구할 수 있다.

풀이 $\overline{AO}=\overline{OC}=a$로 놓으면

$\overline{AC}=2a$

원 O는 $\triangle ABC$의 외접원이고, $\angle AOB=90^\circ$이므로

$\angle OAB=\angle OBA=\angle OBC=\angle OCB$

$=45^\circ$

따라서 $\angle B=90^\circ$이다.

이때 $\overline{AB}=\overline{BC}=a\sqrt{2}$이므로

$\cos A=\dfrac{a\sqrt{2}}{2a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이다.

11 평가의 주안점 삼각형의 세 내각의 비를 이용하여 세 각의 크기를 알아내고 삼각비의 값을 구하고 계산할 수 있다.

풀이 삼각형의 내각의 크기의 합은 180°이고, 세 내각의 크기의 비가 $1:2:3$이므로 가장 작은 각 $\angle A$는

$\angle A=180^\circ\times\dfrac{1}{6}=30^\circ$

$\sin A\times\cos A\times\tan A$

$=\sin 30^\circ\times\cos 30^\circ\times\tan 30^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$=\dfrac{1}{4}$

12 평가의 주안점 삼각형의 닮음을 이용하여 삼각비의 값을 구하고 계산할 수 있다.

풀이 $\triangle ABC$에서

$\overline{AC}=\sqrt{17^2-8^2}=15$ …… ❶

$\triangle ABC$와 $\triangle ADE$에서 $\angle A$는 공통이고,

$\angle ACB=\angle AED=90^\circ$이므로

$\triangle ABC\backsim\triangle ADE$이다. …… ❷

$\angle B=\angle ADE$이므로

$\sin x=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\dfrac{15}{17}$ …… ❸

단계	채점 기준	배점 비율
❶	$\overline{AC}$의 길이를 구한다.	30%
❷	$\triangle ABC$와 $\triangle ADE$가 닮음임을 안다.	30%
❸	$\sin x$의 값을 구한다.	40%

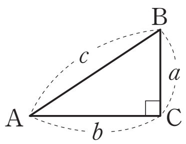
Ⅵ

창의 · 인성 키우기

개념 바루기

지도상의 유의점 직각삼각형에서 삼각비의 값을 구할 때, 착각할 수 있는 내용을 유의하도록 지도한다.

올바른 풀이 문제의 그림을 돌려 놓으면 다음 그림과 같다.



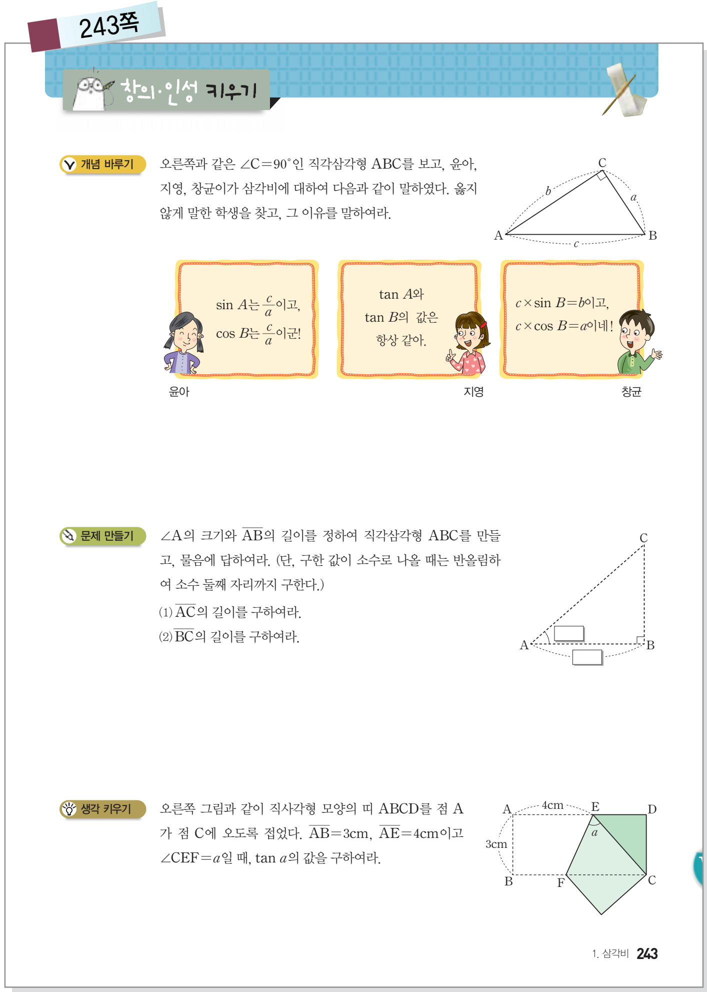
• 윤아는 코사인의 값과 사인의 값을 역수로 잘못 알고 있다.
따라서 $\sin A=\dfrac{a}{c}$, $\cos B=\dfrac{a}{c}$이다.

• 지영이는 ∠A, ∠B가 모두 45°일 때, $\tan A$의 값과 $\tan B$의 값이 같은 것으로 보고 항상 같다고 생각하였다.
하지만 45° 이외의 다른 모든 각에서의 탄젠트의 값은 다르다.
실제로 $\tan A=\dfrac{a}{b}$이고, $\tan B=\dfrac{b}{a}$이다.

• 창균이는 다음과 같이 풀어서 모두 옳게 말하였다.
$c\times\sin B=c\times\dfrac{b}{c}=b$, $c\times\cos B=c\times\dfrac{a}{c}=a$

창의 · 인성 대화에서 나타난 오류를 통하여 비판 의식과 합리적인 사고를 할 수 있도록 지도한다.

243쪽


창의·인성 키우기

개념 바루기 오른쪽과 같은 ∠C=90°인 직각삼각형 ABC를 보고, 윤아, 지영, 창균이가 삼각비에 대하여 다음과 같이 말하였다. 옳지 않게 말한 학생을 찾고, 그 이유를 말하여라.

문제 만들기 ∠A의 크기와 $\overline{AB}$의 길이를 정하여 직각삼각형 ABC를 만들고, 물음에 답하여라. (단, 구한 값이 소수로 나올 때는 반올림하여 소수 둘째 자리까지 구한다.)

(1) $\overline{AC}$의 길이를 구하여라.

(2) $\overline{BC}$의 길이를 구하여라.

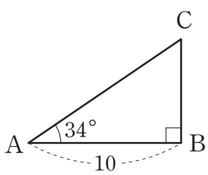
생각 키우기 오른쪽 그림과 같이 직사각형 모양의 띠 ABCD를 점 A가 점 C에 오도록 접었다. $\overline{AB}$=3cm, $\overline{AE}$=4cm이고 ∠CEF=a일 때, $\tan a$의 값을 구하여라.

1. 삼각비 243

문제 만들기

지도상의 유의점 삼각형에서 임의로 ∠A의 크기와 $\overline{AB}$의 길이를 정하면 직각삼각형을 만들 수 있고, 그 삼각비를 구할 수 있음을 지도한다.

예시 답안 △ABC의 ∠A=34°, $\overline{AB}$=10으로 정하여 직각삼각형을 만든다.



(1) $\cos 34^\circ=\dfrac{10}{\overline{AC}}$에서

$\overline{AC}=\dfrac{10}{\cos 34^\circ}=\dfrac{10}{0.8290}=12.062\cdots$

따라서 $\overline{AC}$=12.06이다.

(2) $\tan 34^\circ=\dfrac{\overline{BC}}{10}$에서

$\overline{BC}=10\times\tan 34^\circ=10\times0.6745=6.745$

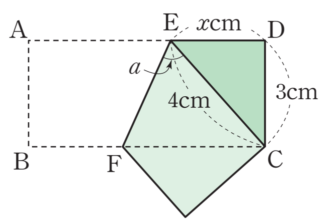
따라서 $\overline{BC}$=6.75이다.

창의 · 인성 모둠별로 서로 문제를 바꾸어 내어 풀게 한다. 상대방의 문제를 풀어 봄으로써 서로 상호 작용하는 능력을 키운다.

생각 키우기

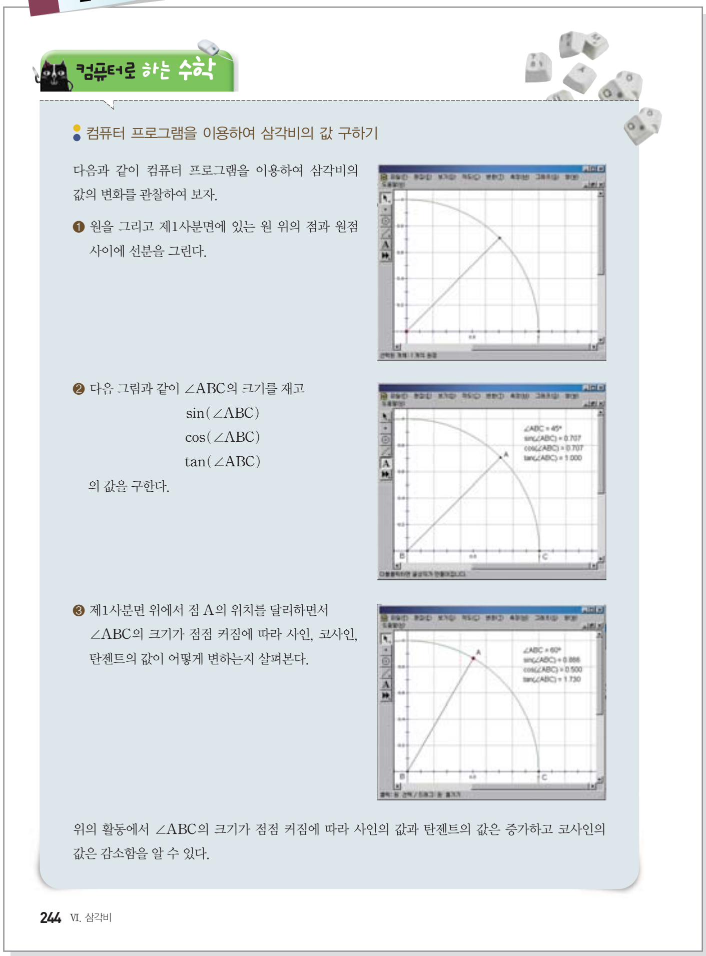
지도상의 유의점 직사각형 모양의 띠를 접었을 때의 각을 이용하여 삼각비의 값을 구할 수 있도록 지도한다.

풀이



위의 그림의 △EDC에서 $\overline{ED}=x$cm라 하면
$\overline{CD}$=3cm, $\overline{EC}$=4cm이므로 피타고라스 정리에 의하여
$x=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$
이때 ∠AEF=∠FEC(접은 각),
∠AEF=∠EFC(엇각)
이므로 ∠FEC=∠EFC
따라서 $\overline{CE}=\overline{CF}$이다.
그러므로 $\overline{BF}=\overline{ED}=\sqrt{7}$cm이다.

244쪽


컴퓨터로 하는 수학

컴퓨터 프로그램을 이용하여 삼각비의 값 구하기

다음과 같이 컴퓨터 프로그램을 이용하여 삼각비의 값의 변화를 관찰하여 보자.

❶ 원을 그리고 제1사분면에 있는 원 위의 점과 원점 사이에 선분을 그린다.

❷ 다음 그림과 같이 ∠ABC의 크기를 재고

sin(∠ABC)
cos(∠ABC)
tan(∠ABC)

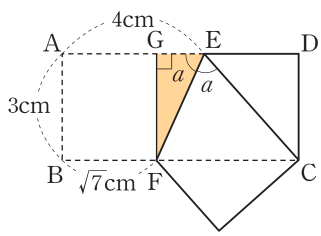
의 값을 구한다.

❸ 제1사분면 위에서 점 A의 위치를 달리하면서 ∠ABC의 크기가 점점 커짐에 따라 사인, 코사인, 탄젠트의 값이 어떻게 변하는지 살펴본다.

위의 활동에서 ∠ABC의 크기가 점점 커짐에 따라 사인의 값과 탄젠트의 값은 증가하고 코사인의 값은 감소함을 알 수 있다.

244 VI. 삼각비

점 F에서 $\overline{AE}$에 내린 수선의 발을 G라 하면 △EGF는 직각삼각형이다.
이때 ∠CEF는 접은 각이므로
$\angle CEF = \angle GEF = a$



따라서 △EGF에서 $\overline{GE} = (4-\sqrt{7})$cm, $\overline{GF} = 3$cm이므로
$\tan a = \dfrac{\overline{GF}}{\overline{GE}} = \dfrac{3}{4-\sqrt{7}} = \dfrac{4+\sqrt{7}}{3}$이다.

창의 · 인성 다양한 풀이가 나올 수 있도록 격려하며, 사고를 확장할 수 있도록 지도한다.

컴퓨터로 하는 수학

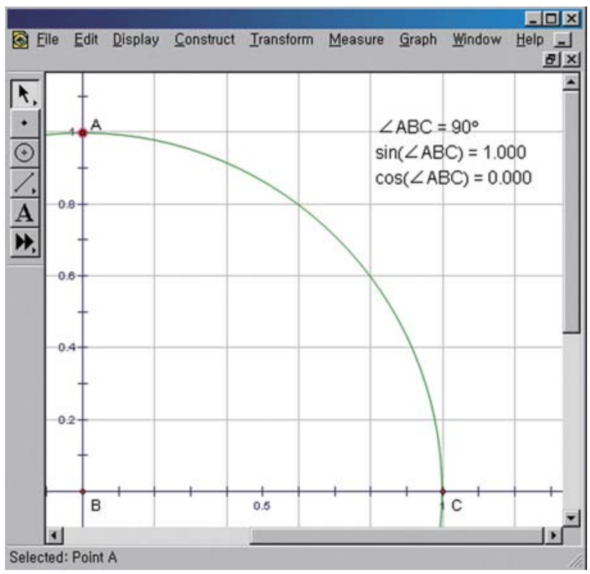
지도상의 유의점 컴퓨터 프로그램을 이용하여 삼각비의 값의 변화를 살펴보고, 각의 크기에 따른 삼각비의 값의 변화를 모둠별로 토론할 수 있도록 지도한다.

0°에서 90°까지의 사인, 코사인, 탄젠트의 값의 변화를 살펴보면 다음과 같다.

(1) 사인의 값
$\sin 0^\circ = 0$이고 $\sin 90^\circ = 1$이므로 사인의 값은 0부터 점점 커져서 1까지 변화됨을 화면에서 확인할 수 있다.

(2) 코사인의 값
$\cos 0^\circ = 1$이고 $\cos 90^\circ = 0$이므로 코사인의 값은 1부터 점점 작아져 0까지 변화됨을 화면에서 확인할 수 있다.
45°일 때 사인의 값과 코사인의 값은 같아진다.

(3) 탄젠트의 값
$\tan 0^\circ = 0$이고 90° 직전까지 점점 커지며 $\tan 90^\circ$의 값은 정할 수 없다.



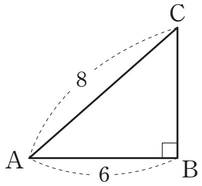
창의 · 인성 컴퓨터 프로그램을 이용함으로써 흥미를 가지고 자기주도적으로 과제를 해결할 수 있도록 한다.

VI

학년 반 번호:	이름:	/ 점수:

선다형은 각 4점, 나머지 문항은 각 문항에 표시함.

01 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=8$일 때, 다음 중 옳은 것은?



① $\sin A=\frac{3}{4}$ ② $\cos A=\frac{4}{3}$

③ $\sin C=\frac{4}{\sqrt{7}}$ ④ $\cos C=\frac{\sqrt{7}}{4}$

⑤ $\tan C=\frac{\sqrt{7}}{6}$

02 $\cos A=\frac{\sqrt{6}}{3}$일 때, $\sin A$의 값은? (단, $0^\circ<A<90^\circ$)

① $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{2}$

④ $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ⑤ $\frac{6}{\sqrt{3}}$

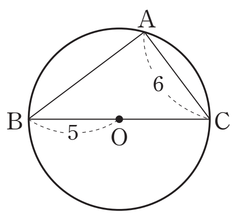
03 $\cos A=\frac{2}{3}$일 때, $\sin A\times\tan A$의 값은?

(단, $0^\circ<A<90^\circ$)

① $\frac{1}{\sqrt{6}}$ ② $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{3}$

④ $\frac{5}{\sqrt{6}}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

04 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$가 원 O의 지름이고, $\overline{BO}=5$, $\overline{AC}=6$일 때, $\tan C$의 값은?



① $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ② $\frac{4}{3}$

③ $\frac{5}{3}$ ④ $\frac{3\sqrt{2}}{3}$

⑤ 2

05 다음 중 옳은 것은?

① $\sin 30^\circ+\cos 60^\circ=1$

② $\sin 45^\circ\times\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

③ $\cos 90^\circ+\tan 45^\circ=2$

④ $\tan 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\sin 45^\circ$

⑤ $\sin 60^\circ\times\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

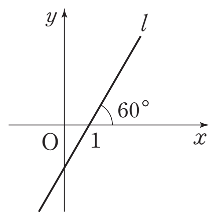
06 $\cos(x+20^\circ)=\sin 30^\circ$을 만족하는 x의 값은?

(단, $0^\circ<x<70^\circ$)

① 10° ② 15° ③ 25°

④ 30° ⑤ 40°

07 오른쪽 그림과 같이 직선 l과 x축이 이루는 각의 크기가 60°이고, x절편이 1인 일차함수의 그래프의 식은?



① $y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$

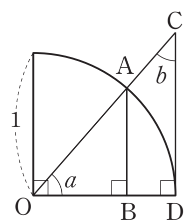
② $y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$

③ $y=-\sqrt{3}x+\frac{1}{\sqrt{3}}$

④ $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x-\sqrt{3}$

⑤ $y=-\sqrt{3}x-\sqrt{3}$

08 다음 중 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 사분원에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?



① $\sin a=\overline{AB}$

② $\cos a=\overline{OB}$

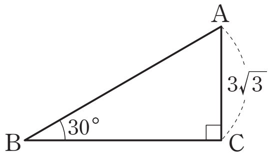
③ $\sin b=\overline{OB}$

④ $\cos b=\overline{AB}$

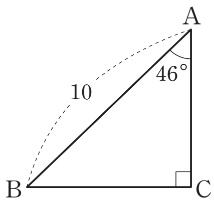
⑤ $\tan b=\overline{CD}$

단답형

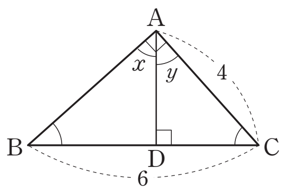
09 오른쪽 그림의 직각삼각형 ABC에서 $\angle B=30^\circ$, $\overline{AC}=3\sqrt{3}$일 때, $\overline{BC}$의 길이를 구하여라. [6점]



10 오른쪽 그림의 직각삼각형 ABC에서 $\angle A=46^\circ$, $\overline{AB}=10$일 때, $\overline{AC}$의 길이를 구하여라. [6점]



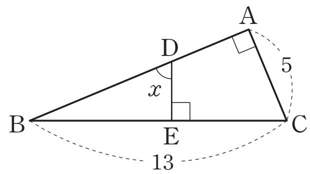
11 오른쪽 그림의 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=4$, $\overline{BC}=6$일 때, $\tan x-\cos y$의 값을 구하여라. [8점]



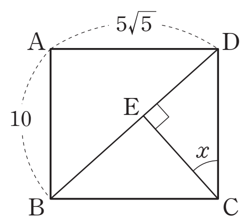
12 $\sin 45^\circ\times\cos 45^\circ+\dfrac{1-\tan 60^\circ}{3-\tan 45^\circ}\times(\sqrt{3}+1)$의 값을 구하여라. [8점]

서술형

13 다음 그림의 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=5$, $\overline{BC}=13$일 때, $\sin x+\cos x$의 값을 구하고, 그 과정을 서술하여라. [12점]



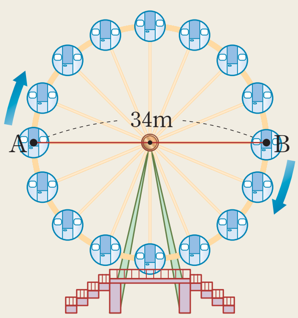
14 오른쪽 그림의 직사각형 ABCD에서 $\overline{AB}=10$, $\overline{AD}=5\sqrt{5}$일 때, $\sin x\times\cos x$의 값을 구하고, 그 과정을 서술하여라. [12점]



수리 논술형

15 다음 제시문을 읽고, 두 지점 A, B 사이의 거리가 34m일 때, 명인이가 바라본 관람차의 두 지점 A, B의 높이의 차를 구하고, 그 과정을 설명하여라. [16점]

> 명인이는 놀이 공원에서 관람차를 보았다. 이 관람차는 3초에 1°씩 시계 방향으로 회전한다고 한다. 명인이는 현재 지면과 수평을 이루며 같은 높이에 있는 두 지점 A, B의 3분 후의 높이의 차를 생각해 보았다.



중단원 평가 문제

01 ④	02 ②	03 ⑤	04 ②
05 ①	06 ⑤	07 ①	08 ⑤
09 9	10 6.947	11 $\frac{\sqrt{5}}{6}$	
12 $-\frac{1}{2}$	13~15 풀이 참조		

01 평가 기준 직각삼각형에서 두 변의 길이를 알 때, 삼각비의 값을 구할 수 있는가?

풀이 $\overline{BC}=\sqrt{8^2-6^2}=2\sqrt{7}$

① $\sin A=\frac{\sqrt{7}}{4}$ ② $\cos A=\frac{3}{4}$

③ $\sin C=\frac{3}{4}$ ④ $\cos C=\frac{\sqrt{7}}{4}$

⑤ $\tan C=\frac{3\sqrt{7}}{7}$

따라서 옳은 것은 ④이다.

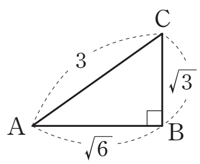
02 평가 기준 코사인의 값을 알 때, 사인의 값을 구할 수 있는가?

풀이 $\cos A=\frac{\sqrt{6}}{3}$이므로

오른쪽 그림의 $\triangle ABC$에서

$\overline{BC}=\sqrt{3^2-(\sqrt{6})^2}=\sqrt{3}$

따라서 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{3}$이다.



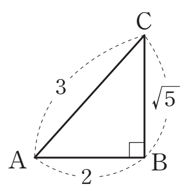
03 평가 기준 코사인의 값을 알 때, 사인의 값과 탄젠트의 값을 계산할 수 있는가?

풀이 $\cos A=\frac{2}{3}$이므로

오른쪽 그림의 $\triangle ABC$에서

$\sin A=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\tan A=\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\sin A\times\tan A=\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{5}{6}$

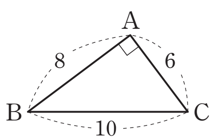


04 평가 기준 삼각형의 외접원에서 삼각비의 값을 구할 수 있는가?

풀이 $\triangle ABC$는 원의 지름을 한 변으로 하는 직각삼각형이다.

$\overline{AB}=\sqrt{10^2-6^2}=8$이므로

$\tan C=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$



05 평가 기준 삼각비의 값을 계산할 수 있는가?

풀이 ① $\sin 30^\circ+\cos 60^\circ=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

② $\sin 45^\circ\times\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$

③ $\cos 90^\circ+\tan 45^\circ=0+1=1$

④ (좌변)$=\tan 45^\circ=1$,

(우변)$=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\sin 45^\circ=\frac{1}{2}$이므로 (좌변)$\neq$(우변)

⑤ $\sin 60^\circ\times\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{2}$

따라서 옳은 것은 ①이다.

06 평가 기준 복잡한 삼각비의 값을 구할 수 있는가?

풀이 $\cos(x+20^\circ)=\sin 30^\circ$

$\cos(x+20^\circ)=\frac{1}{2}$,

$x+20^\circ=60^\circ$

$x=40^\circ$

07 평가 기준 일차함수의 그래프의 기울기와 탄젠트의 값의 의미를 알고 있는가?

풀이 이 직선의 기울기는 $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$이다.

따라서 구하는 직선의 식은 $y=\sqrt{3}x+b$로 놓을 수 있다.

x축과 만나는 점 $(1, 0)$을 대입하면

$0=\sqrt{3}+b$, $b=-\sqrt{3}$

따라서 구하는 직선의 식은 $y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$이다.

08 평가 기준 사분원에서 삼각비의 값을 알 수 있는가?

풀이 $\triangle AOB$에서 $\sin a=\overline{AB}$, $\cos a=\overline{OB}$이고,

$\triangle AOB$에서 $\angle AOB=b$이므로

$\sin b=\overline{OB}$, $\cos b=\overline{AB}$, $\tan b=\frac{\overline{BO}}{\overline{AB}}$

$\triangle COD$에서 $\tan b=\frac{1}{\overline{CD}}$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

09 평가 기준 직각삼각형에서 한 각의 크기와 한 변의 길이를 알 때, 탄젠트의 값을 이용하여 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있는가?

풀이 $\tan 30^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{\overline{BC}}$

$\overline{BC}=3\sqrt{3}\times\frac{1}{\tan 30^\circ}=3\sqrt{3}\times\sqrt{3}=9$

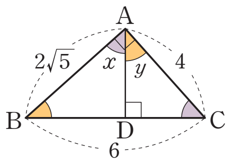
10 평가 기준 직각삼각형에서 한 각의 크기와 한 변의 길이를 알 때, 코사인의 값을 이용하여 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있는가?

풀이 $\cos 46^\circ=\dfrac{\overline{AC}}{10}$에서 $\overline{AC}=10\times\cos 46^\circ$

삼각비의 표에서 $\cos 46^\circ=0.6947$이므로

$\overline{AC}=10\times0.6947=6.947$이다.

11 평가 기준 삼각형의 닮음을 이용하여 삼각비의 값을 구할 수 있는가?



풀이 $\overline{AB}=\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}$

$\triangle ABC$와 $\triangle DBA$에서

$\angle B$는 공통, $\angle A=\angle ADB=90^\circ$,

$\angle C=\angle BAD$

따라서 $\triangle ABC\backsim\triangle DBA$이다.

마찬가지로 $\triangle ABC\backsim\triangle DAC$이다.

$\tan x=\tan C=\dfrac{2\sqrt{5}}{4}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

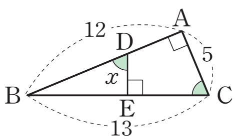
$\cos y=\cos B=\dfrac{2\sqrt{5}}{6}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

따라서 $\tan x-\cos y=\dfrac{\sqrt{5}}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{3}=\dfrac{\sqrt{5}}{6}$이다.

12 평가 기준 복잡한 삼각비의 계산을 할 수 있는가?

풀이 (주어진 식)$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1-\sqrt{3}}{3-1}\times(\sqrt{3}+1)=-\dfrac{1}{2}$

13 평가 기준 직각삼각형의 닮음을 이용하여 삼각비의 값을 구하고, 계산할 수 있는가?



풀이 $\triangle ABC$에서

$\overline{AB}=\sqrt{13^2-5^2}=12$ …… ❶

$\triangle ABC$와 $\triangle EBD$에서

$\angle B$는 공통, $\angle A=\angle DEB=90^\circ$,

$\angle C=\angle BDE$

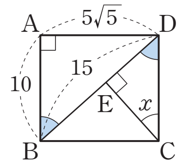
따라서 $\triangle ABC\backsim\triangle EBD$이다. …… ❷

$\sin x=\sin C=\dfrac{12}{13}$, $\cos x=\cos C=\dfrac{5}{13}$ …… ❸

$\sin x+\cos x=\dfrac{12}{13}+\dfrac{5}{13}=\dfrac{17}{13}$ …… ❹

단계	채점 기준	배점
❶	$\overline{AB}$의 길이를 구한다.	3점
❷	닮음인 두 삼각형을 찾는다.	3점
❸	$\sin x$, $\cos x$의 값을 구한다.	4점
❹	$\sin x+\cos x$의 값을 구한다.	2점

14 평가 기준 직각삼각형의 닮음을 이용하여 삼각비의 값을 구하고 계산할 수 있는가?



풀이 $\triangle ABD$에서

$\overline{BD}=\sqrt{(5\sqrt{5})^2+10^2}$

$=15$ …… ❶

$\triangle ABD$와 $\triangle EDC$에서

$\angle A=\angle DEC=90^\circ$

$\angle ABD=\angle CDB$ (엇각),

$\angle ADB=\angle ECD$

따라서 $\triangle ABD\backsim\triangle EDC$이다. …… ❷

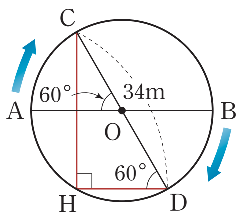
$\sin x=\sin(\angle ADB)=\dfrac{10}{15}=\dfrac{2}{3}$

$\cos x=\cos(\angle ADB)=\dfrac{5\sqrt{5}}{15}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ …… ❸

$\sin x\times\cos x=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\sqrt{5}}{3}=\dfrac{2\sqrt{5}}{9}$ …… ❹

단계	채점 기준	배점
❶	$\overline{BD}$의 길이를 구한다.	3점
❷	$\triangle ABD$와 $\triangle EDC$가 닮은 도형임을 안다.	3점
❸	$\sin x$, $\cos x$의 값을 구한다.	각 2점
❹	$\sin x\times\cos x$의 값을 구한다.	2점

15 평가 기준 제시문을 읽고, 두 지점의 높이의 차를 구할 수 있는가?



풀이 관람차가 3초에 1°씩 회전하므로 1분에 20°, 3분에 60° 회전한다. …… ❶

3분 후에 A지점이 이동한 지점을 C, B지점이 이동한 지점을 D라 하자. C지점에서 수선의 발을 내려 원과 만나는 지점을 H라 하면 $\triangle CHD$는 직각삼각형이다. …… ❷

$\triangle CHD$에서

$\overline{CH}=34\times\sin 60^\circ=34\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=17\sqrt{3}\,(\mathrm{m})$ …… ❸

따라서 두 지점 A, B의 3분 후의 높이의 차는 $17\sqrt{3}\,\mathrm{m}$이다. …… ❹

단계	채점 기준	배점
❶	3분 동안 회전한 각을 구한다.	4점
❷	관람차에서 직각삼각형을 찾는다.	5점
❸	$\overline{CH}$의 길이를 구한다.	5점
❹	두 지점 A, B의 높이의 차를 구한다.	2점