II 인수분해와 이차방정식

II

인수분해와 이차방정식

1 인수분해

2 이차방정식

학습한 내용	본 단원의 내용	학습할 내용
중학교 수학 ① 소인수분해 문자의 사용과 식의 계산 일차방정식 중학교 수학 ② 식의 계산	1. 인수분해 2. 이차방정식	고등학교 수학 I 인수분해 복소수와 이차방정식

■ 단원 배경

일상생활에서 나타나는 여러 가지 문제들은 수나 식을 효과적으로 사용하면 그 문제가 가지고 있는 특성을 더 잘 나타낼 수 있다. 특히 우리 생활 주변의 자연 현상은 방정식을 통해서 그 현상을 쉽게 이해하고 예측할 수 있는 경우가 있다. 방정식을 통해 수학이나 과학의 문제뿐만 아니라 우리 생활 주변의 여러 가지 문제들을 해결하는 데 많은 도움을 받을 수 있다.

1 단원을 들어가면서

밤하늘로 쏘아올린 폭죽의 높이를 계산하거나, 축구 선수가 찬 공의 위치를 알아보는 등 우리의 생활 주변의 여러 현상들에서는 문자를 사용하여 수량 사이의 관계를 파악함으로써 어떤 문제들을 해결할 수 있는데, 이때 인수분해와 이차방정식은 다양하게 활용될 수 있다.

이 단원은 인수분해와 이차방정식으로 구성되어 있다. 인수분해는 주어진 다항식을 인수분해할 수 있도록 하며, 인수분해 공식을 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있도록 한다. 이차방정식에서는 이차방정식과 그 해의 뜻을 이해하고 이차방정식을 풀 수 있도록 하며, 이차방정식을 이용하여 여러 가지 활용 문제를 해결할 수 있도록 한다.

2 단원의 지도 목표

1. 다항식의 인수분해

(1) 인수분해의 뜻을 알고, 인수분해를 할 수 있게 한다.

2. 이차방정식과 그 활용

(1) 이차방정식과 그 해의 의미를 이해하고, 이를 풀 수 있게 한다.

(2) 이차방정식을 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있게 한다.

3 단원의 교수·학습상의 유의점

1. 인수분해

(1) 인수분해는 이차방정식의 해를 구하는 데 필요한 정도로 다룬다.

2. 이차방정식

(1) 이차방정식은 해가 실수인 경우만 다룬다.

(2) 이차방정식의 해가 문제의 의도에 맞는지 확인하게 한다.

4 단원의 지도 계통

학습한 내용		본 단원의 내용	학습할 내용	
중학교 수학 ❶	- 문자를 식으로 나타내기 - 식의 값 - 일차식의 덧셈과 뺄셈 - 등식의 성질 - 일차방정식과 그 활용	**1. 인수분해** 1-1 다항식의 인수분해	고등학교 수학 I	- 다항식의 인수분해 - 이차방정식 - 삼차방정식, 사차방정식
중학교 수학 ❷	- 이차식의 덧셈과 뺄셈 - 지수법칙 - 곱셈 공식 - 등식의 변형	**2. 이차방정식** 2-1 인수분해를 이용한 이차방정식의 풀이 2-2 근의 공식을 이용한 이차방정식의 풀이 2-3 이차방정식의 활용		

5 단원의 이론적 배경

1. 다항식의 인수분해

다항식의 인수분해는 다항식의 전개와 역 관계의 개념으로서, 하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타내는 것을 의미한다. 즉, 다항식의 인수분해는 복잡한 다항식을 기약다항식으로 분해하는 것을 의미한다. 이때 기약다항식이란 더 낮은 차수의 다항식의 곱으로 표시되지 않는 다항식을 말한다.

어떤 다항식이 기약다항식인지를 판단하는 방법으로 Eisenstein 판정법이 활용된다.

[Eisenstein 판정법] 계수가 정수인 다항식

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$$

에 대하여 다음 세 조건을 만족하는 소수 p가 존재하면 $f(x)$는 유리수 범위에서 기약다항식이다.

(i) a_n은 p로 나누어 떨어지지 않는다.

(ii) a_{n-1}, a_{n-2}, $\cdots\cdots$, a_1, a_0은 모두 p로 나누어 떨어진다.

(iii) a_0는 p^2으로 나누어 떨어지지 않는다.

또 수학자 가우스(Gauss, K. F. ; 1777 ~ 1855)는 일차 이상의 다항식은 기약다항식의 곱으로 유일하게 인수분해됨을 증명하였다. 이것을 다항식의 유일인수분해 정리라고 한다.

[유일인수분해 정리]

실수 위의 차수가 일차 이상인 다항식 $f(x)$는 다음과 같이 인수분해된다.

$f(x)=ap_1(x)p_2(x)\cdots\cdots p_k(x)\,(a\neq 0)$

여기서 a는 0이 아닌 실수이고, $p_1(x)p_2(x)\cdots\cdots p_k(x)$는 최고차항의 계수가 1인 기약다항식이다.

이때 $f(x)$의 기약인 인수들을 곱하는 순서를 무시한다면 이와 같은 인수분해는 단 한 가지뿐이다.

2. 방정식의 역사

수학사에 의하면 기원전 6세기경 고대 바빌로니아 사람들은 일차방정식, 이차방정식과 관련된 여러 가지 문제들을 풀었을 것으로 추측할 수 있다.

알렉산드리아 시대의 디오판토스(Diohpantos; ? 200～? 284)의 저서 "산학(Arithmetica)"에는 연립방정식을 비롯한 대수방정식의 해법이 적혀 있는데, 그는 방정식의 해를 정수나 유리수로 한정시켰으며, 음수와 무리수는 해로 인정하지 않았다.

인도의 수학자 브라마굽타(Brahmagupta; 598～670)는 일차부정방정식 $ax+by=c$(a, b, c는 정수)의 일반적인 해법을 최초로 소개하였으나 음수의 해까지 확장하지는 못하였다.

아라비아의 수학자 알콰리즈미(Al－Khwarizmi ; ? 780～? 850)는 일차방정식, 이차방정식의 풀이법을 발견하였는데, 알콰리즈미의 이차방정식의 풀이 방법은 오늘날 우리가 사용하고 있는 근의 공식을 구하는 과정과 유사하다.

인도의 수학자 바스카라(Bhaskara, A.; 1114～1185)는 이차방정식에는 두 근이 있으며, 그 중에는 음의 근이 존재함을 인식한 최초의 수학자이다. 그는 삼차방정식, 사차방정식도 다루었다.

삼차방정식, 사차방정식의 대수적 해법은 이탈리아의 수학자 카르다노(Cardano, G.; 1501～1576)가 1545년에 쓴 "위대한 술법(Ars Magna)"을 통해서 소개되었다. 삼차방정식의 대수적 해법은 타르탈리아(Tartaglia, N. F. ; 1499～1557)가 발견했고, 삼차방정식이 풀려진 후 오래지 않아 사차방정식의 대수적 해법은 카르다노의 제자인 페라리(Ferrari, L. ; 1522～1565)에 의해 발견되었다.

또한 오차방정식의 대수적 해법을 얻기 위해 약 300년 간에 걸쳐 수많은 수학자가 도전했으나 어느 누구도 이를 풀 수 없었다.

그러다가 1826년에 노르웨이의 수학자 아벨(Abel, N. H. ; 1802～1829)이 일반적으로 오차 이상의 방정식은 대수적으로 해를 구할 수 없다는 사실을 증명하였다.

3. 방정식에서 대수적 해법의 가능, 불가능

이차방정식, 삼차방정식, 사차방정식은 방정식의 계수들 사이의 사칙연산 및 거듭제곱근에 의해 근을 구할 수 있다. 이러한 방법으로 방정식의 근을 구하는 것을 대수적 해법이라고 한다. 즉, 이차방정식, 삼차방정식, 사차방정식은 대수적 해법에 의해 방정식의 근을 구할 수 있다.

다음은 삼차방정식의 근의 공식을 구하는 과정이다.

$$Ax^3+Bx^2+Cx+D=0\ (\text{단, } A\neq 0)$$

양변을 A로 나누면 $x^3+ax^2+bx+c=0$ …… ㉠

으로 나타낼 수 있다.

이때 $x=y-\dfrac{a}{3}$로 놓으면 ㉠은

$$y^3+3py+q=0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

과 같이 나타낼 수 있다.

㉡에서 $y=u+v$로 놓으면

$$(u^3+v^3+q)+3(u+v)(uv+p)=0 \quad \cdots\cdots ㉢$$

이고, 다음이 성립하도록 u, v를 정하면 $y=u+v$는 ㉡의 해가 된다.

$$u^3+v^3+q=0,\ uv+p=0 \quad \cdots\cdots ㉣$$

㉣에서 $u^3+v^3=-q$, $u^3v^3=-p^3$이므로 u^3, v^3은 각각

$$t^2+qt-p^3=0 \quad \cdots\cdots ㉤$$

의 해이다.

㉤을 풀면

$$u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+p^3},$$

$$v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+p^3}$$

이다.

위의 식을 만족하는 u, v의 값 중 하나를 각각 α, β라 하고, 1의 세제곱근 중 한 허근을 ω라 하면 u의 3개의 값은 α, $\omega\alpha$, $\omega\alpha^2$이고, v의 3개의 값은 β, $\omega\beta$, $\omega\beta^2$이 된다.

그런데 $uv=-p$이므로 α에 대응하는 v의 값은 β, $\omega\alpha$에 대응하는 v의 값은 $\omega\beta^2$, $\omega\alpha^2$에 대응하는 v의 값은 $\omega\beta$이다.

그러므로 방정식 ㉡의 근은 $\alpha+\beta$, $\omega\alpha+\omega^2\beta$, $\omega^2\alpha+\omega\beta$가 된다.

18세기 오일러(Euler, L.; 1707～1783), 라그랑주(Lagrange, J. L. ; 1736～1813)와 같은 수학자들은 삼차, 사차방정식의 풀이 방법을 이용하여 오차방정식의 일반적인 풀이 방법을 찾으려고 시도하였지만 모두 실패하였다.

1824년에 아벨(Abel, N. H. ; 1802～1829)은 오차 이상의 방정식은 계수들의 사칙연산과 거듭제곱근으로 나타낼 수 없다는 사실을 증명하였다.

실수 계수의 오차 이상의 방정식에 대한 대수적 해법은 존재하지 않는다.

하지만 독일의 수학자 가우스(Gauss, K. F. ; 1777～1855)는 복소수 계수의 n차 방정식은 n개의 근(중근 포함)을 갖는다는 것을 증명하였다. 이 정리를 대수학의 기본 정리라고 한다.

[대수학의 기본 정리]

모든 복소수 계수의 n차 방정식은 복소수 범위에서 적어도 하나의 해를 가진다.

아벨의 결론은 해의 존재를 부정하는 것이 아니라 대수적으로 방정식을 풀 수 있는 방법이 존재하지 않음을 나타내는 것이고, 대수학의 기본 정리는 모든 복소수 계수 다항식이 복소수 근을 갖는다는 뜻으로, 복소수체가 대수적으로 닫혀 있는 체임을 보인 것이다.

즉, 일반적으로 오차 이상의 방정식은 복소수 범위에서 해를 갖고 있지만 이를 대수적인 방법으로 구할 수는 없다.

참고 문헌

- 김응태, 박승안, 현대대수학, 경문사, 1998.
- H. Eves(이우영, 신항균 역), 수학사, 경문사, 2005.

6 단원의 지도 계획

본문 내용		지도 내용	용어와 기호	쪽수	차시
1. 인수분해	이야기로 들려주는 인수분해와 이차방정식, 준비하기			60～62	1
	1-1. 다항식의 인수분해	• 인수분해의 뜻 • $ma+mb$의 인수분해 • $a^2 \pm 2ab+b^2$의 인수분해 • a^2-b^2의 인수분해 • $x^2+(a+b)x+ab$의 인수분해 • $acx^2+(ad+bc)x+bd$의 인수분해	인수, 인수분해, 완전제곱식	63～75	5
	중단원 마무리하기, 창의 · 인성 키우기			76～79	1
2. 이차방정식	준비하기			80	1
	2-1. 인수분해를 이용한 이차방정식의 풀이	• 이차방정식의 뜻과 해 • 인수분해를 이용한 이차방정식의 풀이	이차방정식, 중근	81～86	3
	2-2. 근의 공식을 이용한 이차방정식의 풀이	• 제곱근을 이용한 이차방정식의 풀이 • 완전제곱식을 이용한 이차방정식의 풀이 • 근의 공식을 이용한 이차방정식의 풀이	근의 공식	87～93	4
	2-3. 이차방정식의 활용	• 이차방정식을 실생활 문제에 활용하기		94～98	2
	중단원 마무리하기, 창의 · 인성 키우기			99～102	1
	단원 마무리하기			103～104	1
	수행 과제, 수학으로 세상 읽기, 스스로 평가하기			105～107	1
	소계				20

7 교수 · 학습 과정 예시안

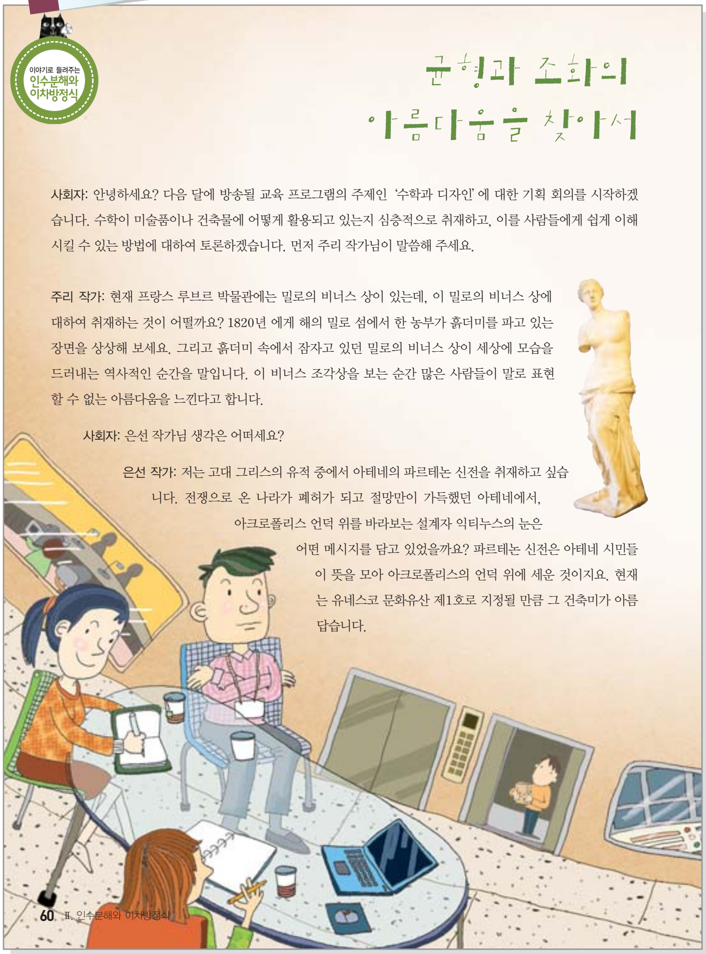
단원	Ⅱ. 인수분해와 이차방정식 1. 인수분해 01. 다항식의 인수분해	교과서 쪽수	65~67	차시	3/20
학습 주제	$a^2+2ab+b^2$, $a^2-2ab+b^2$은 어떻게 인수분해할까?	학습 목표	인수분해 공식 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$을 이해하고, 이를 이용하여 인수분해를 할 수 있다.		
준비물	학습 준비물, PPT 자료, 형성 평가지, 과제물			교과 관련	

단계(시간)	학습 내용 및 학습 방법	교수 · 학습 활동 교사	교수 · 학습 활동 학생	학습 자료 및 유의점
도입(8분)	**개념 학습**(전체 학습) – 전시 학습 제시	지난 시간에 배운 인수와 인수분해의 뜻을 확인하고, 공통인 인수를 묶어 내는 방법을 상기하는 문제를 제시하여 학생들의 학습 정도를 파악한다.	지난 시간에 배운 내용을 상기하며 준비 학습 문제를 해결한다.	
	탐구 학습(전체 학습) – 생각 열기	대수 막대를 직접 조작하여 정사각형의 한 변의 길이를 구하게 함으로써 인수분해 공식 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$을 유도할 수 있게 한다.	• 4개의 대수 막대를 이용하여 사각형들의 넓이의 합을 식으로 나타내어 본다. • 대수 막대를 조작해 보고 정사각형의 넓이를 가로의 길이와 세로의 길이의 곱으로 나타내어 본다.	▶ 학습 준비물 ▶ PPT 자료
	– 학습 목표 제시	생각 열기와 관련하여 학습 목표를 각자 생각해 보게 한 후 제시한다.	이번 시간에 배울 내용이 무엇인지 생각해 보고, 학습 목표를 선생님과 함께 읽는다.	▶ PPT 자료
전개(30분)	**개념 학습**(전체 학습) – 인수분해 공식 (1) $a^2+2ab+b^2$, $a^2-2ab+b^2$ – 함께 풀기 2, 3	다항식의 전개 공식 $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$을 이용하여 $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$으로 인수분해할 수 있도록 지도한다.		
	수준별 학습(개별 학습)	하 다항식의 곱셈 공식을 제시하고 좌변과 우변을 바꾸면 인수분해 공식 (1)을 얻을 수 있음을 다양한 예시를 통해 설명한다.	대수 막대를 이용한 활동과 연결지어 인수분해 공식을 직관적으로 이해하고, 인수분해 과정을 파악한다.	
	문제 해결 학습(개별 학습) – 문제 4, 5	• 여러 가지 문제를 통해 인수분해 공식의 의미를 정확히 인지할 수 있도록 지도한다. • 학생들이 칠판에서 **문제 4, 5**를 풀어 보고 서로의 답을 비교해 볼 수 있도록 한다.	각자 문제를 풀고, 풀지 못하는 학생은 손을 들어 선생님께 질문한다.	개별 문제 해결을 하는 동안 순회하며 지도한다.

단계(시간)	학습 내용 및 학습 방법	교수 · 학습 활동		학습 자료 및 유의점
		교사	학생	
	개념 학습(전체 학습) – 완전제곱식 – 함께 풀기 4, 5, 6	• 완전제곱식의 뜻을 알고 완전제곱식을 확실히 이해하도록 지도한다. • 완전제곱식이 되려면 x의 계수와 상수항이 어떤 수가 되어야 하는지를 묻는 발문을 통하여 완전제곱식을 이해할 수 있도록 지도한다.	완전제곱식의 뜻을 이해하고, 이를 이용하여 인수분해를 할 수 있다.	완전제곱식은 앞으로 학습할 이차방정식의 근의 공식이나 이차함수의 그래프에도 많이 이용되므로 확실히 이해하도록 지도한다.
	문제 해결 학습(협력 학습) – 문제 6, 7, 8, 9	• 인수분해 공식을 활용하여 식의 값을 구할 수 있도록 지도한다. • 문제 7은 문제 6을 통하여 알게 된 사실을 활용하여 완전제곱식이 되기 위한 조건을 유추할 수 있도록 한다. • 모둠별로 협력해서 문제를 풀고 그 결과를 발표해 볼 수 있도록 한다.	모둠별로 협력해서 문제를 풀고 그 결과를 발표한다.	• 완전제곱식은 곱하는 상수가 제곱수가 아니어도 완전제곱식이 된다는 점에 유의하여 지도한다. • 모둠별로 활동을 하는 동안 순회하며 지도한다.
	수준별 학습(개별 학습)	상 완전제곱식이 되는 조건에 대하여 학생들끼리 서로 토론하도록 하며, 문제를 확장하여 이차식 ax^2+bx+c가 완전제곱식이 되는 조건을 식을 직접 변형해 봄으로써 유도해 볼 수 있도록 지도한다.		
정리 및 평가 (7분)	**개념 정리**(전체 학습) – 내용 정리	학생들과 함께 배운 내용을 정리한다.	선생님과 함께 학습한 내용을 정리한다.	▶ PPT 자료
	문제 해결 학습(개별 학습) – 형성 평가 문제 제시 (기초 1문제 / 기본 1문제 / 실력 1문제)	형성 평가를 통해 학생의 수업에 대한 이해도를 파악한다.	형성 평가 문제를 각자 스스로 해결해 본다.	▶ 형성 평가지
	수준별 수업(개별 학습)	수준별 과제를 부여한다.	수준별 과제를 받아간다.	▶ 과제물
	차시 예고 – a^2-b^2은 어떻게 인수분해할까?	다음 시간에 배울 내용을 안내한다.	다음 시간에 배울 내용을 확인한다.	

Ⅱ

60쪽


이야기로 들려주는 인수분해와 이차방정식

균형과 조화의 아름다움을 찾아서

사회자: 안녕하세요? 다음 달에 방송될 교육 프로그램의 주제인 '수학과 디자인'에 대한 기획 회의를 시작하겠습니다. 수학이 미술품이나 건축물에 어떻게 활용되고 있는지 심층적으로 취재하고, 이를 사람들에게 쉽게 이해시킬 수 있는 방법에 대하여 토론하겠습니다. 먼저 주리 작가님이 말씀해 주세요.

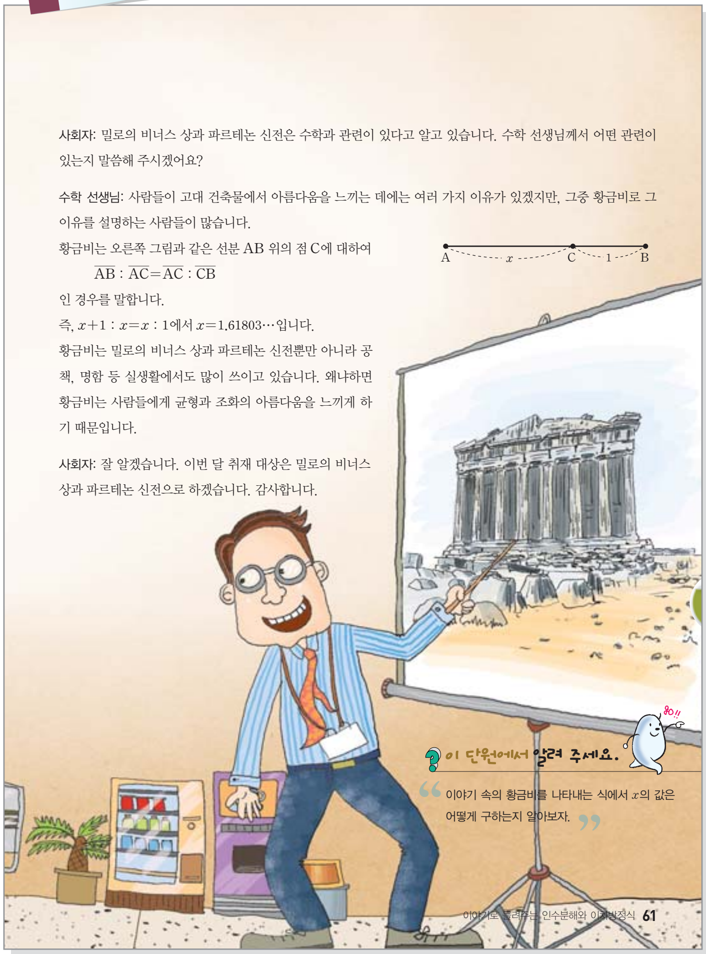
주리 작가: 현재 프랑스 루브르 박물관에는 밀로의 비너스 상이 있는데, 이 밀로의 비너스 상에 대하여 취재하는 것이 어떨까요? 1820년 에게 해의 밀로 섬에서 한 농부가 흙더미를 파고 있는 장면을 상상해 보세요. 그리고 흙더미 속에서 잠자고 있던 밀로의 비너스 상이 세상에 모습을 드러내는 역사적인 순간을 말입니다. 이 비너스 조각상을 보는 순간 많은 사람들이 말로 표현할 수 없는 아름다움을 느낀다고 합니다.

사회자: 은선 작가님 생각은 어떠세요?

은선 작가: 저는 고대 그리스의 유적 중에서 아테네의 파르테논 신전을 취재하고 싶습니다. 전쟁으로 온 나라가 폐허가 되고 절망만이 가득했던 아테네에서, 아크로폴리스 언덕 위를 바라보는 설계자 익티누스의 눈은 어떤 메시지를 담고 있었을까요? 파르테논 신전은 아테네 시민들이 뜻을 모아 아크로폴리스의 언덕 위에 세운 것이지요. 현재는 유네스코 문화유산 제1호로 지정될 만큼 그 건축미가 아름답습니다.

60 Ⅱ. 인수분해와 이차방정식

61쪽


사회자: 밀로의 비너스 상과 파르테논 신전은 수학과 관련이 있다고 알고 있습니다. 수학 선생님께서 어떤 관련이 있는지 말씀해 주시겠어요?

수학 선생님: 사람들이 고대 건축물에서 아름다움을 느끼는 데에는 여러 가지 이유가 있겠지만, 그중 황금비로 그 이유를 설명하는 사람들이 많습니다.

황금비는 오른쪽 그림과 같은 선분 AB 위의 점 C에 대하여

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{CB}$$

인 경우를 말합니다.

즉, $x+1 : x = x : 1$에서 $x = 1.61803\cdots$입니다.

황금비는 밀로의 비너스 상과 파르테논 신전뿐만 아니라 공책, 명함 등 실생활에서도 많이 쓰이고 있습니다. 왜냐하면 황금비는 사람들에게 균형과 조화의 아름다움을 느끼게 하기 때문입니다.

사회자: 잘 알겠습니다. 이번 달 취재 대상은 밀로의 비너스 상과 파르테논 신전으로 하겠습니다. 감사합니다.

이 단원에서 알려 주세요.

"이야기 속의 황금비를 나타내는 식에서 x의 값은 어떻게 구하는지 알아보자."

이야기로 들려주는 인수분해와 이차방정식 61

이야기로 들려주는 인수분해와 이차방정식

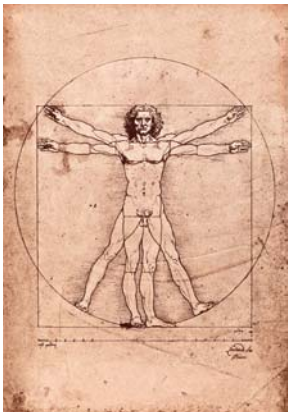
"이야기 배경"

수학 관련 방송 프로그램을 기획하는 방송국 피디와 작가와의 대화 내용을 통해 이차방정식이 활용되는 황금비의 예를 살펴보는 과정이다.

밀로의 비너스 상을 통해 미술품에서 황금비가 활용되는 예를 보여 주고 있고, 파르테논 신전을 통해 고대 그리스인의 건축에 황금비가 활용되는 예를 보여 주고 있다.

이것은 이차방정식이 실생활에서 활용되고 있는 예를 통해 이차방정식에 대한 호기심과 동기를 유발시킬 수 있도록 제시한 것이다.

현대인의 지갑이나 가방 속에 들어 있는 신용카드의 가로, 세로의 길이의 비는 황금비에 가깝다. 이외에도 책, 컴퓨터 모니터, 창문, 출입문까지 황금비는 우리 생활 주변에서 많이 찾아볼 수 있다.



또 고대 이집트의 피라미드나 부석사의 무량수전 등 여러 문명 속에서도 황금비를 찾아볼 수 있으며, 레오나르도 다빈치의 미술 작품과 뒤페, 바흐 등의 많은 음악가들의 작품 속에서도 황금비가 등장한다.

이와 같이 실생활 속에서 황금비의 예를 쉽게 찾을 수 있고, 고대 유적이나 음악, 미술 작품 속에서도 예술적인 아름다움을 추구하기 위해 활용된 황금비를 찾을 수 있다.

1 인수분해

중단원 지도 목표

1. 인수분해의 뜻을 알고, 인수분해를 할 수 있게 한다.
2. 인수분해 공식을 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원 명	지도 내용
1. 다항식의 인수분해	• 인수분해의 뜻 • 인수분해 공식과 활용
중단원 마무리하기	• 스스로 정리하기 • 기초 다지기, 기본 익히기, 실력 기르기
창의 · 인성 키우기	• 개념 바루기 • 생각 키우기

62쪽

1 인수분해

$(x+1)(x+2)$
$(x+1)^2$

1. 다항식의 인수분해

준비하기

▶자연수를 소인수분해할 수 있는가?

1. 다음 수를 소인수분해하여라.

(1) 24　(2) 30　(3) 72　(4) 100

▶두 다항식의 곱을 전개할 수 있는가?

2. 다음 식을 전개하여라.

(1) $x(x+2)$　(2) $(a+5)^2$
(3) $(x-3)^2$　(4) $(a-3)(a+3)$
(5) $(x+1)(x+4)$　(6) $(2a+b)(3a-b)$

▶곱셈 공식을 이용하여 수의 계산을 할 수 있는가?

3. 곱셈공식을 이용하여 다음을 계산하여라.

(1) 101^2　(2) 99^2
(3) 51×49　(4) 104×96

62 Ⅱ. 인수분해와 이차방정식

준비하기

▶자연수를 소인수분해할 수 있는가?

1. 이 단원에서는 자연수를 소인수분해하는 것과 같이 식을 인수분해하는 것을 배우게 된다. 따라서 인수분해와 비교할 수 있도록 간단한 소인수분해를 할 수 있어야 한다.

풀이　각 수를 소인수분해하면

(1) $24=2^3\times3$　(2) $30=2\times3\times5$
(3) $72=2^3\times3^2$　(4) $100=2^2\times5^2$

답　풀이 참조

▶두 다항식의 곱을 전개할 수 있는가?

2. 이 단원에서는 곱셈 공식을 이용한 전개의 반대 과정인 인수분해 공식을 배우게 되므로 곱셈 공식을 정확히 알고 있어야 한다.

풀이　(1) $x(x+2)=x^2+2x$
(2) $(a+5)^2=a^2+10a+25$
(3) $(x-3)^2=x^2-6x+9$
(4) $(a-3)(a+3)=a^2-9$
(5) $(x+1)(x+4)=x^2+5x+4$
(6) $(2a+b)(3a-b)=6a^2+ab-b^2$

답　풀이 참조

▶곱셈 공식을 이용하여 수의 계산을 할 수 있는가?

3. 이 단원을 학습하기 위해서는 간단한 곱셈 공식의 활용을 알고 있어야 한다.

풀이　(1) $101^2=(100+1)^2=100^2+2\times100\times1+1^2$
$=10000+200+1=10201$
(2) $99^2=(100-1)^2=100^2-2\times100\times1+1^2$
$=10000-200+1=9801$
(3) $51\times49=(50+1)(50-1)=50^2-1^2$
$=2500-1=2499$
(4) $104\times96=(100+4)(100-4)=100^2-4^2$
$=10000-16=9984$

답　(1) 10201　(2) 9801　(3) 2499　(4) 9984

Ⅱ

01 다항식의 인수분해

지도 목표

1. 인수분해의 뜻을 알게 한다.
2. 인수분해 공식을 알고, 이를 이용하여 간단한 인수분해를 할 수 있게 한다.

지도상의 유의점

1. 전개와 인수분해가 서로 역의 관계가 있음을 이해하도록 지도한다.
2. 인수분해 공식은 곱셈 공식으로부터 유도됨을 이해하도록 지도한다.
3. 인수분해를 할 때, 공통인 인수가 남지 않도록 인수분해를 할 수 있도록 지도한다.
4. 인수분해는 인수분해 공식을 바로 적용할 수 있는 간단한 형태를 주로 다루도록 한다.

63쪽

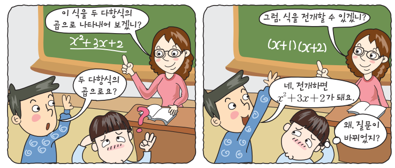
01 다항식의 인수분해

○ 학습 목표 인수분해의 뜻을 알고, 인수분해를 할 수 있다.
○ 배울 용어 인수, 인수분해, 완전제곱식

자전거의 부품을 조립하여 자전거를 만들기도 하고, 부품을 교체하기 위해 자전거를 다시 분해하기도 한다. 서로 반대되는 상황을 나타내는 자전거의 조립과 분해와 같이, 두 개 이상의 다항식의 곱을 하나의 다항식으로 나타내기도 하고, 또는 하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타내기도 한다.

1/5차시 인수분해란 무엇일까?

생각 열기 다음은 선생님과 학생의 대화 내용이다.



x^2+3x+2를 두 다항식의 곱으로 나타내어 보자.

1 생각 열기에서 $(x+1)(x+2)$를 전개하면

$$(x+1)(x+2)=x^2+3x+2$$

임을 알 수 있다. 이 식의 좌변과 우변을 서로 바꾸면

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$$

이다.

즉, 다항식 x^2+3x+2는 두 다항식 $x+1$과 $x+2$의 곱으로 나타낼 수 있다.

이와 같이 하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타낼 때, 각각의 식을 처음 다항식의 **인수**라고 한다.

위의 전개식에서 $x+1$과 $x+2$는 x^2+3x+2의 인수이다.

1. 인수분해 63

1/5차시 차시별 학습 지도 방법

생각 열기	만화를 통하여 다항식의 전개와 인수분해의 관계를 시각적으로 확인하게 한다.
본문, 함께 풀기 1	인수분해의 뜻과 공통 인수를 포함한 인수분해를 간단한 이차식의 예를 통하여 설명한다.
문제 1, 2, 3	스스로 문제를 풀어 보고 친구들과 결과를 비교해 보도록 한다. **문제 3**의 경우 공통 인수 $x+2$, $x+y$를 하나의 문자처럼 생각하여 인수분해하면 편리할 수 있음을 알도록 지도한다.

인수분해란 무엇일까?

생각 열기 선생님과 학생의 대화에서 인수분해가 다항식의 전개의 반대 개념임을 알게 하는 생각 열기이다.

$(x+1)(x+2)$를 전개한 식은 x^2+3x+2이다.

1 다항식의 곱셈에서 배운 전개를 이용하여 두 다항식의 곱이 하나의 다항식이 됨을 상기시킨 후, 이 식의 양변을 서로 바꾸어도 등호가 성립한다는 성질을 이용하여 인수분해의 원리를 이해하게 하고, 또한 인수의 뜻을 알게 한다.

문제 1 인수분해의 뜻

풀이 (1) $x(x-5)=x^2-5x$이므로

$$\boxed{x^2-5x} \underset{\text{전개}}{\overset{\text{인수분해}}{\rightleftarrows}} x(x-5)$$

(2) $(x-1)(x+2)=x^2+x-2$이므로

$$\boxed{x^2+x-2} \underset{\text{전개}}{\overset{\text{인수분해}}{\rightleftarrows}} (x-1)(x+2)$$

2 공통 인수가 들어 있는 인수분해는 분배법칙을 이용하여 공통 인수로 묶어낼 수 있도록 하고, 이를 이용하여 인수분해의 원리를 이해하게 한다.

64쪽

하나의 다항식을 두 개 이상의 인수의 곱으로 나타내는 것을 그 다항식을 **인수분해**한다고 한다.

$$x^2+3x+2 \underset{\text{전개}}{\overset{\text{인수분해}}{\rightleftarrows}} \underbrace{(x+1)}_{\text{인수}}\underbrace{(x+2)}_{\text{인수}}$$

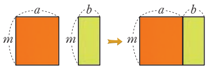
보기 $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$이므로 $x-2$, $x-3$은 다항식 x^2-5x+6의 인수이고, x^2-5x+6을 인수분해하면 $(x-2)(x-3)$이다.

문제 1 다음 $\square$ 안에 알맞은 식을 써넣어라.

(1) $\square \underset{\text{전개}}{\overset{\text{인수분해}}{\rightleftarrows}} x(x-5)$　　(2) $\square \underset{\text{전개}}{\overset{\text{인수분해}}{\rightleftarrows}} (x-1)(x+2)$

2 다항식 $ma+mb$에서 두 항 ma와 mb에 공통으로 들어 있는 인수 m을 분배법칙을 이용하여 묶어내면

$$ma+mb=m(a+b)$$



와 같이 인수분해할 수 있다.

$\underbrace{m}a+\underbrace{m}b$ 공통 인수

함께 풀기 1 다음 식을 인수분해하여라.

(1) x^2+5x　　(2) a^2b-2ab

풀이》 (1) x^2과 $5x$의 공통 인수가 x이므로 $x^2+5x=x(x+5)$이다.
(2) a^2b와 $-2ab$의 공통 인수가 ab이므로 $a^2b-2ab=ab(a-2)$이다.

답》 (1) $x(x+5)$　(2) $ab(a-2)$

식을 인수분해할 때에는 공통 인수가 남지 않도록 모두 묶어낸다.

문제 2 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $3x^2-x$　　(2) $2x^2+4xy$
(3) ab^2+5a^2b　　(4) $4a^2b-9ab$

문제 3 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $x(x+2)-3(x+2)$　　(2) $(x+y)a+(x+y)b$

64 Ⅱ. 인수분해와 이차방정식

문제 2 공통으로 들어 있는 인수로 묶는 인수분해하기

풀이 (1) $3x^2$과 $-x$에 공통으로 들어 있는 인수는 x이므로 $3x^2-x=x(3x-1)$이다.

(2) $2x^2$과 $4xy$에 공통으로 들어 있는 인수는 $2x$이므로 $2x^2+4xy=2x(x+2y)$이다.

(3) ab^2과 $5a^2b$에 공통으로 들어 있는 인수는 ab이므로 $ab^2+5a^2b=ab(b+5a)$이다.

(4) $4a^2b$와 $-9ab$에 공통으로 들어 있는 인수는 ab이므로 $4a^2b-9ab=ab(4a-9)$이다.

문제 3 공통으로 들어 있는 인수로 묶는 인수분해하기

풀이 (1) $x(x+2)$와 $-3(x+2)$의 공통 인수는 $x+2$이므로 $x(x+2)-3(x+2)=(x+2)(x-3)$이다.

(2) $(x+y)a$와 $(x+y)b$의 공통 인수는 $x+y$이므로 $(x+y)a+(x+y)b=(x+y)(a+b)$이다.

보충 자료

다항식에서 두 다항식에 공통으로 들어있는 인수로 묶어내는 인수분해를 할 때에는 공통 인수가 남지 않도록 모두 묶어내야 함을 알도록 한다.

예를 들어 다항식 $2x^2y+8xy$를 인수분해할 때,
$2x^2y+8xy=2x(xy+4y)$ 또는 $2x^2y+8xy=xy(2x+8)$
와 같이 오류를 범하는 학생들이 있을 수 있다.

다항식 $2x^2y+8xy$에 공통으로 들어 있는 인수는 $2xy$이므로 다항식 $2x^2y+8xy$을 인수분해하면
$2x^2y+8xy=2xy(x+4)$
가 됨을 알도록 한다.

수준별 교수·학습 방법

인수분해의 뜻을 알고, 공통 인수로 묶는 인수분해를 할 수 있다.

하 다항식의 곱셈을 충분히 연습한 후 다항식의 전개와 인수분해가 서로 반대 개념임을 시각적으로 표현하여 학생들이 쉽게 이해할 수 있도록 구체적인 예를 통해 설명한다.

상 다항식의 전개와 인수분해가 서로 반대 개념임을 이해하도록 지도한다. 또 $2x^2-6xy=2(x^2-3xy)$와 같이 인수분해가 완성되지 않는 경우의 문제를 제시함으로써 인수분해의 뜻을 폭넓게 이해하도록 한다.
다음과 같이 공통 인수가 다항식인 간단한 예를 제시함으로써 이를 묶어 인수분해하는 것을 지도할 수 있다.

예 $$\begin{aligned} ax+ay+bx+by &= (ax+ay)+(bx+by) \\ &= a(x+y)+b(x+y) \\ &= (a+b)(x+y) \end{aligned}$$

연구 자료

하나의 자연수를 자연수들의 곱으로 나타내었을 때, 곱해진 각 수를 원래 수의 약수 또는 인수라고 한다. 자연수 a, b, c에 대하여 $a=bc$일 때, b, c는 a의 약수 또는 인수이다.

예를 들어 $6=2\times3$이므로 2와 3은 6의 인수이다.

이와 마찬가지로 다항식에서도 하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타내었을 때, 각각의 식을 처음 다항식의 인수라고 한다.

예를 들어 $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$이므로 $x-2$, $x-3$은 다항식 x^2-5x+6의 인수이다.

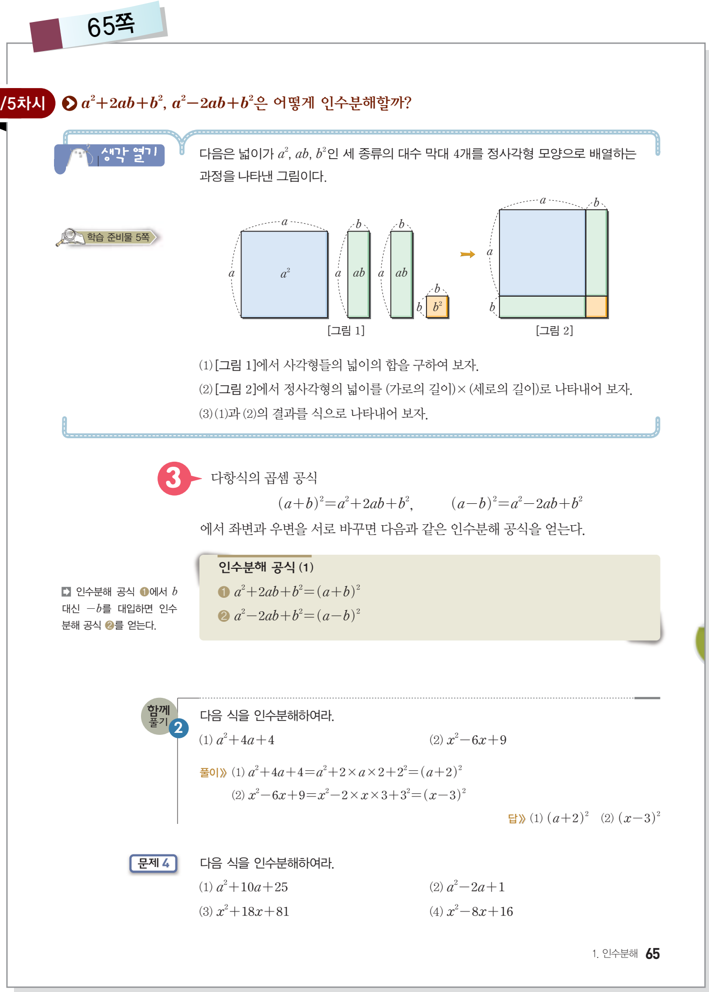
정수의 집합과 다항식의 집합은 서로 닮은 점이 많다. 즉, 두 집합은 덧셈, 뺄셈, 곱셈에 대하여 닫혀 있으나 나눗셈에 대하여는 닫혀 있지 않다. 다시 말해 정수끼리의 나눗셈의 결과는 정수가 되지 않는 경우가 있고, 다항식끼리의 나눗셈의 결과도 다항식이 되지 않는 경우가 있다.

또 양의 정수를 소인수분해하면 더 이상 소인수분해할 수 없다. 마찬가지로 다항식도 인수분해할 때 더 이상 인수분해할 수 없는 모양까지 인수분해함을 원칙으로 한다.

Ⅱ

2/5차시 차시별 학습 지도 방법

생각 열기	대수 막대를 직접 조작하게 하여 인수분해 공식 (1)을 유도할 수 있는 활동이 되도록 한다.
본문, 함께 풀기 2, 3	인수분해 공식 (1)을 이해하고, 이를 간단히 적용할 수 있는 문제를 제시한다.
문제 4, 5	스스로 문제를 풀어 보고 친구들과 비교하게 한다.
본문, 함께 풀기 4	완전제곱식이 되려면 x의 계수나 상수항이 어떤 수가 되어야 하는지를 묻는 발문을 통하여 완전제곱식을 이해할 수 있도록 지도한다.
문제 7	**문제 6**을 통하여 알게 된 사실을 활용하여 완전제곱식이 되기 위한 조건을 유추할 수 있도록 한다.
함께 풀기 5, 6	인수분해 공식 (1)을 활용하여 다양한 문제를 해결할 수 있도록 한다.
문제 8, 9	모둠별로 협력해서 문제를 풀고, 발표해 볼 수 있도록 한다.
가까운 수학	간단한 계산 활동을 통하여 곱셈 공식과 인수분해의 편리성을 알게 하여 흥미를 유도한다.


65쪽

2/5차시 $a^2+2ab+b^2$, $a^2-2ab+b^2$은 어떻게 인수분해할까?

생각 열기 다음은 넓이가 a^2, ab, b^2인 세 종류의 대수 막대 4개를 정사각형 모양으로 배열하는 과정을 나타낸 그림이다.

학습 준비물 5쪽

[그림 1] [그림 2]

(1) [그림 1]에서 사각형들의 넓이의 합을 구하여 보자.
(2) [그림 2]에서 정사각형의 넓이를 (가로의 길이)×(세로의 길이)로 나타내어 보자.
(3) (1)과 (2)의 결과를 식으로 나타내어 보자.

3 다항식의 곱셈 공식

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2, \qquad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

에서 좌변과 우변을 서로 바꾸면 다음과 같은 인수분해 공식을 얻는다.

인수분해 공식 (1)
❶ $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
❷ $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

인수분해 공식 ❶에서 b 대신 $-b$를 대입하면 인수분해 공식 ❷를 얻는다.

함께 풀기 2 다음 식을 인수분해하여라.
(1) a^2+4a+4 (2) x^2-6x+9

풀이» (1) $a^2+4a+4=a^2+2\times a\times 2+2^2=(a+2)^2$
(2) $x^2-6x+9=x^2-2\times x\times 3+3^2=(x-3)^2$

답» (1) $(a+2)^2$ (2) $(x-3)^2$

문제 4 다음 식을 인수분해하여라.
(1) $a^2+10a+25$ (2) a^2-2a+1
(3) $x^2+18x+81$ (4) $x^2-8x+16$

1. 인수분해 65

$a^2+2ab+b^2$, $a^2-2ab+b^2$은 어떻게 인수분해할까?

생각 열기 대수 막대를 조작하여 넓이를 구해 보는 활동을 통하여 인수분해 공식을 추측해 볼 수 있도록 하는 생각 열기이다.

(1) 넓이가 a^2인 정사각형이 1개, 넓이가 ab인 직사각형이 2개, 넓이가 b^2인 정사각형이 1개이므로 4개의 사각형의 넓이의 합은 $a^2+2ab+b^2$이다.

(2) 정사각형의 한 변의 길이가 $a+b$이므로 정사각형의 넓이를 (가로의 길이)×(세로의 길이)로 나타내면 $(a+b)^2$이다.

(3) 정사각형을 만들기 전후의 넓이에 변화가 없으므로 (1), (2)의 결과를 식으로 나타내면
$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
이다.

3 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
을 이용하여 인수분해 공식
$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
을 얻을 수 있음을 알게 한다.

문제 4 인수분해 공식 (1)

풀이 (1) $a^2+10a+25=a^2+2\times a\times 5+5^2=(a+5)^2$
(2) $a^2-2a+1=a^2-2\times a\times 1+1^2=(a-1)^2$
(3) $x^2+18x+81=x^2+2\times x\times 9+9^2=(x+9)^2$
(4) $x^2-8x+16=x^2-2\times x\times 4+4^2=(x-4)^2$

문제 5 인수분해 공식 (1)

풀이 (1) $a^2+4ab+4b^2=a^2+2\times a\times(2b)+(2b)^2$
$=(a+2b)^2$
(2) $x^2-14xy+49y^2=x^2-2\times x\times(7y)+(7y)^2$
$=(x-7y)^2$
(3) $9a^2+24ab+16b^2=(3a)^2+2\times(3a)\times(4b)+(4b)^2$
$=(3a+4b)^2$
(4) $16x^2-8xy+y^2=(4x)^2-2\times(4x)\times y+y^2$
$=(4x-y)^2$

66쪽

함께 풀기 3 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $a^2+12ab+36b^2$　　(2) $4x^2-12xy+9y^2$

풀이》 (1) $a^2+12ab+36b^2=a^2+2\times a\times 6b+(6b)^2$

$=(a+6b)^2$

(2) $4x^2-12xy+9y^2=(2x)^2-2\times 2x\times 3y+(3y)^2$

$=(2x-3y)^2$

답》 (1) $(a+6b)^2$　(2) $(2x-3y)^2$

문제 5 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $a^2+4ab+4b^2$　　(2) $x^2-14xy+49y^2$

(3) $9a^2+24ab+16b^2$　　(4) $16x^2-8xy+y^2$

4 다항식 $(a+b)^2$, $(x+2y)^2$과 같이 다항식의 제곱으로 된 식이나 $2(x+1)^2$과 같이 다항식의 제곱에 상수를 곱한 식을 **완전제곱식**이라고 한다.

함께 풀기 4 다음 식이 완전제곱식이 되도록 $\square$ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

(1) $a^2+6a+\square$　　(2) $x^2+\square x+100$

풀이》 (1) $a^2+6a+\square=a^2+2\times a\times 3+\square$

완전제곱식이 되려면 $\square=3^2=9$이다.

(2) $x^2+\square x+100=x^2+\square x+(\pm 10)^2$

완전제곱식이 되려면 $\square=2\times(\pm 10)=\pm 20$이다.

답》 (1) 9　(2) ± 20

문제 6 다음 식이 완전제곱식이 되도록 $\square$ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

(1) $x^2-14x+\square$　　(2) $x^2+\square x+36$

(3) $a^2+\square a+\frac{1}{4}$　　(4) $a^2+8ab+\square$

추론

문제 7 a, b가 상수일 때, x^2+ax+b가 완전제곱식이 되기 위한 a와 b의 관계를 말하여라.

66 Ⅱ. 인수분해와 이차방정식

4 완전제곱식

완전제곱식은 다항식의 제곱으로 된 식이나 다항식의 제곱에 상수항을 곱한 것이다. 이때 곱하는 상수가 제곱수가 아니어도 완전제곱식이 된다는 점에 유의하도록 지도한다.

또한 완전제곱식은 이차방정식의 근의 공식이나 이차함수의 식을 완전제곱의 꼴로 바꾸는 데 자주 사용되므로 확실히 이해할 수 있도록 지도한다.

문제 6 완전제곱식 만들기

풀이 (1) $x^2-14x+\square=x^2-2\times x\times 7+\square$이므로
완전제곱식이 되려면 $\square$ 안의 수는
$7^2=49$이다.

(2) $x^2+\square x+36=x^2+\square x+6^2$이므로
완전제곱식이 되려면 $\square$ 안의 수는
$2\times 6=12$ 또는 $2\times(-6)=-12$이다.

(3) $a^2+\square a+\frac{1}{4}=a^2+\square a+\left(\frac{1}{2}\right)^2$이므로
완전제곱식이 되려면 $\square$ 안의 수는
$2\times\frac{1}{2}=1$ 또는 $2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$이다.

(4) $a^2+8ab+\square=a^2+2\times a\times 4b+\square$이므로
완전제곱식이 되려면 $\square$ 안의 수는
$(4b)^2=16b^2$이다.

문제 7 완전제곱식이 되기 위한 조건 추론하기

지도상의 유의점 이차식이 완전제곱식이 되기 위한 조건이 무엇인지 추론해 보도록 함으로써 완전제곱식에 대한 이해의 폭을 넓히고, 앞으로 이차방정식과 이차함수에서 완전제곱식을 고치는 과정에 적용하도록 지도한다.

풀이 a, b가 상수일 때, x^2+ax+b가 완전제곱식이 되기 위해서는 상수항 b가 x의 계수 a의 $\frac{1}{2}$의 제곱이 되어야 한다.

즉, $b=\left(\frac{1}{2}a\right)^2=\frac{1}{4}a^2$이다.

보충 자료

문제 7을 잘 풀지 못하는 학생에게는 다음과 같이 계수가 상수인 경우에 완전제곱식이 되는 예를 다양하게 제시한 다음 계수가 일반적인 문자인 경우로 확장하여 추론하도록 지도한다.

예 (1) x^2+2x+1: 완전제곱식 (2와 1의 관계)
(2) x^2+4x+4: 완전제곱식 (4와 4의 관계)
(3) x^2+6x+9: 완전제곱식 (6과 9의 관계)
(4) x^2-2x+1: 완전제곱식 (-2와 1의 관계)
(5) x^2-4x+4: 완전제곱식 (-4와 4의 관계)
(6) x^2-6x+9: 완전제곱식 (-6과 9의 관계)

보충 문제

다음 식이 완전제곱식이 되도록 $\square$ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

(1) $25x^2+10x+\square$　　(2) $4x^2+\square x+25$

(3) $9a^2+12ab+\square$　　(4) $64a^2+\square a+\frac{1}{16}$

답 (1) 1　(2) 20 또는 -20　(3) $4b^2$　(4) 4 또는 -4

Ⅱ

문제 8 **인수분해 공식 (1) 활용하기**

풀이 인수분해 공식 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$을 이용하면

$0.83^2+2\times0.83\times0.17+0.17^2$

$=(0.83+0.17)^2$

$=1^2=1$

이다.

보충 문제

$102^2-4\times102+2^2$의 값을 구하여라.

풀이 $102^2-4\times102+2^2$

$=(102-2)^2$

$=(100)^2$

$=10000$

답 10000

문제 9 **인수분해 공식 (1)을 활용하여 식의 값 구하기**

풀이 (1) x^2+2x+1을 인수분해하면

$x^2+2x+1=(x+1)^2$이고

$x=-1+\sqrt{2}$를 대입하면

$x^2+2x+1=(x+1)^2$

$=(-1+\sqrt{2}+1)^2$

$=(\sqrt{2})^2$

$=2$

이다.

(2) $x^2+2xy+y^2$을 인수분해하면

$x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$이고

$x=3+\sqrt{5}$, $y=3\sqrt{5}-3$을 대입하면

$x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$

$=(3+\sqrt{5}+3\sqrt{5}-3)^2$

$=(4\sqrt{5})^2$

$=80$

이다.

5 x, y의 값을 직접 대입하여 계산하는 방법은 잘못된 것은 아니지만 계산할 식이 많아서 매우 까다롭고 실수가 잦아 틀리는 경우가 많이 발생한다. 학생들이 주어진 식을 인수분해한 다음 x의 값을 대입하여 식의 값을 구하는 것이 쉬운 것임을 알도록 지도한다.

67쪽

함께 풀기 5 $537^2+2\times537\times463+463^2$의 값을 구하여라.

풀이》 인수분해 공식 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$을 이용하여 풀면 된다.

$537^2+2\times537\times463+463^2=(537+463)^2$

$=(1000)^2=1000000$

답》 1000000

문제 8 $0.83^2+2\times0.83\times0.17+0.17^2$의 값을 구하여라.

5 함께 풀기 6 $x=3+\sqrt{2}$일 때, x^2-6x+9의 값을 구하여라.

풀이》 x^2-6x+9를 인수분해하면 $x^2-6x+9=(x-3)^2$에서

$x=3+\sqrt{2}$를 대입하면

$(x-3)^2=(3+\sqrt{2}-3)^2=(\sqrt{2})^2=2$

이다.

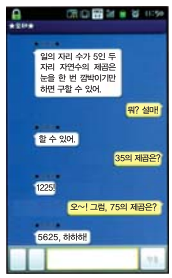
답》 2

문제 9 인수분해 공식을 이용하여 다음 값을 구하여라.

(1) $x=-1+\sqrt{2}$일 때, x^2+2x+1의 값

(2) $x=3+\sqrt{5}$, $y=3\sqrt{5}-3$일 때, $x^2+2xy+y^2$의 값

가까운 수학 **6** 오태는 어떻게 쉽게 계산할 수 있었을까?



일의 자리 수가 5인 두 자리 자연수는 $10a+5$의 꼴로 나타낼 수 있다.

$(10a+5)^2=100a^2+100a+25$

$=100a(a+1)+25$

위 식을 살펴보면, 오태는 곱셈 공식과 인수분해를 이용하여 일의 자리 수가 5인 두 자리 자연수의 제곱을 쉽게 계산한 것임을 알 수 있다.

예를 들어

$35^2=(10\times3+5)^2=100\times3^2+100\times3+25$

$=100\times3(3+1)+25$

$=1200+25$

즉, 오태는 3 곱하기 4를 계산한 값 뒤에 25를 붙여서 읽은 것이다.

마찬가지로 75의 제곱은 7 곱하기 8을 계산한 값 뒤에 25를 붙여서 읽으면 된다.

1. 인수분해 67

6 핸드폰 문자 메세지를 통한 문자의 대화 내용 중 오태의 계산 방법에서 곱셈 공식과 인수분해 공식이 사용됨을 확인하게 한다.

수준별 교수·학습 방법

인수분해 공식 (1)을 이해하고, 이를 이용하여 인수분해를 할 수 있다.

하 다항식의 곱셈 공식을 제시하고 좌변과 우변을 바꾸면 인수분해 공식 (1)을 얻을 수 있음을 다양한 예를 통하여 설명한다.

상 다항식의 곱셈 공식을 이용하여 인수분해 공식 (1)을 이해하도록 하고, 인수분해 공식 (1)을 적용할 수 있는 **문제 5**와 같은 다양한 형태의 문제를 제공한다.
문제 7과 같이 완전제곱식이 되는 조건에 대하여 학생들끼리 서로 토론하도록 하며, 문제를 확장하여 이차식 ax^2+bx+c가 완전제곱식이 되는 조건을 식을 직접 변형해 봄으로써 유도해 볼 수 있도록 지도한다.

68쪽

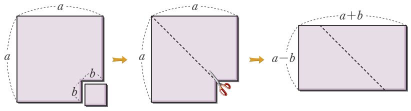
3/5차시 a^2-b^2은 어떻게 인수분해할까?

활동하기 한 변의 길이가 a인 정사각형 모양의 종이를 이용하여 다음의 활동을 하여 보자.

준비물
정사각형 모양의 종이, 가위

1 [그림 1]과 같이 한 변의 길이가 b인 정사각형을 오린다.
2 [그림 2]와 같이 표시된 점선을 따라 오린다.
3 [그림 2]에서 오린 두 조각을 [그림 3]과 같은 직사각형 모양으로 만든다.

학습 준비물 5쪽



[그림 1] [그림 2] [그림 3]

(1) [그림 2]의 도형의 넓이를 구하여 보자.
(2) [그림 3]의 직사각형의 넓이를 (가로의 길이)×(세로의 길이)로 나타내어 보자.
(3) (1)과 (2)의 결과를 식으로 나타내어 보자.

7 다항식의 곱셈 공식

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

에서 좌변과 우변을 서로 바꾸면 다음과 같은 인수분해 공식을 얻는다.

8 **인수분해 공식 (2)**

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

함께 풀기 7 다음 식을 인수분해하여라.

(1) a^2-25 (2) $4x^2-81y^2$

풀이» (1) $a^2-25=a^2-5^2$
$=(a+5)(a-5)$
(2) $4x^2-81y^2=(2x)^2-(9y)^2$
$=(2x+9y)(2x-9y)$

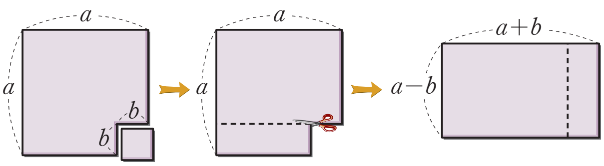
답» (1) $(a+5)(a-5)$ (2) $(2x+9y)(2x-9y)$

(1) 넓이가 a^2인 정사각형의 넓이에서 넓이가 b^2인 정사각형의 넓이를 빼면 a^2-b^2이다.
(2) 직사각형의 가로의 길이는 $a+b$, 세로의 길이는 $a-b$이다. 직사각형의 넓이를 (가로의 길이)×(세로의 길이)로 나타내면 $(a+b)(a-b)$이다.
(3) 직사각형을 만들기 전후의 넓이에 변화가 없으므로 (1), (2)의 결과를 식으로 나타내면
$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
이다.

보충 자료

아래와 같은 방법으로 종이를 오려서 활동하기를 지도할 수 있다.

1 [그림 1]과 같이 한 변의 길이가 b인 정사각형을 오려낸다.
2 [그림 2]와 같이 표시된 점선을 따라 오린다.
3 [그림 2]에서 오린 두 조각을 [그림 3]과 같은 직사각형 모양으로 만든다.



[그림 1] [그림 2] [그림 3]

3/5차시 차시별 학습 지도 방법 [교과 교실]

활동하기	종이를 오려서 직사각형으로 만드는 조작 활동을 통해 인수분해 공식 (2)를 유도할 수 있도록 한다.
본문, 함께 풀기 7	인수분해 공식 (2)를 이해하고, 이를 간단히 적용할 수 있는 문제를 제시한다.
함께 풀기 8 문제 12, 13	인수분해 공식 (2)를 활용하여 문제를 해결해 봄으로써 인수분해의 편리성을 알게 하여 학생의 흥미를 유발한다.
문제 14	실생활에서 인수분해가 활용되는 문제를 해결하게 함으로써 수학의 가치를 알도록 한다.

a^2-b^2은 어떻게 인수분해할까?

활동하기 학생들이 직접 종이를 오려서 직사각형으로 만드는 활동을 통해 인수분해 공식을 추측해 볼 수 있도록 하는 활동하기이다.

7 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용하여 인수분해 공식
$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
를 얻을 수 있음을 알게 한다.

8 분배법칙을 이용하여 인수분해 공식 (2)를 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned}a^2-b^2&=a^2-ab+ab-b^2\\&=(a^2-ab)+(ab-b^2)\\&=a(a-b)+b(a-b)\\&=(a+b)(a-b)\end{aligned}$$

문제 10 **인수분해 공식 (2)**

풀이 (1) $a^2-9=a^2-3^2=(a+3)(a-3)$

(2) $a^2-\frac{1}{4}=a^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(a-\frac{1}{2}\right)$

(3) $x^2-49=x^2-7^2=(x+7)(x-7)$

(4) $x^2-\frac{1}{64}=x^2-\left(\frac{1}{8}\right)^2=\left(x+\frac{1}{8}\right)\left(x-\frac{1}{8}\right)$

Ⅱ

문제 11 **인수분해 공식 (2)**

풀이 (1) $49a^2-b^2=(7a)^2-b^2$
$=(7a+b)(7a-b)$

(2) $4a^2-9b^2=(2a)^2-(3b)^2$
$=(2a+3b)(2a-3b)$

(3) $25x^2-36y^2=(5x)^2-(6y)^2$
$=(5x+6y)(5x-6y)$

(4) $\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{25}y^2=\left(\frac{1}{3}x\right)^2-\left(\frac{1}{5}y\right)^2$
$=\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}y\right)\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{5}y\right)$

문제 12 **인수분해 공식 (2)를 활용하여 계산하기**

풀이 (1) $32^2-28^2=(32+28)(32-28)$
$=60\times4=240$

(2) $35\times3.5^2-35\times1.5^2=35(3.5^2-1.5^2)$
$=35(3.5+1.5)(3.5-1.5)$
$=35\times5\times2=350$

문제 13 **인수분해 공식 (2)를 활용하여 식의 값 구하기**

풀이 a^2-b^2을 인수분해하면 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$이다.
$a=1+\sqrt{2}$, $b=1-\sqrt{2}$를 대입하면
$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
$=\{(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})\}\{(1+\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})\}$
$=2\times2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$
이다.

문제 14 **인수분해 공식 (2)를 활용하여 추론하기**

지도상의 유의점 문제에서 어떤 인수분해 공식을 이용해야 하는지를 스스로 선택하여 풀게 함으로써 인수분해 공식을 자유롭게 활용할 수 있도록 지도한다.

풀이 가로, 세로의 칸의 개수는 99^2-1이므로 이 벽에 붙일 수 있는 사진은 (99^2-1)장이다.
$99^2-1=99^2-1^2=(99+1)(99-1)$
$=100\times98=9800$
이므로 이 벽에 붙일 수 있는 사진은 9800장이다.

69쪽

문제 10 다음 식을 인수분해하여라.

(1) a^2-9 (2) $a^2-\frac{1}{4}$

(3) x^2-49 (4) $x^2-\frac{1}{64}$

문제 11 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $49a^2-b^2$ (2) $4a^2-9b^2$

(3) $25x^2-36y^2$ (4) $\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{25}y^2$

함께 풀기 8 인수분해 공식을 이용하여 다음을 계산하여라.

(1) 55^2-45^2 (2) 103^2-97^2

풀이》 (1) $55^2-45^2=(55+45)(55-45)$
$=100\times10$
$=1000$

(2) $103^2-97^2=(103+97)(103-97)$
$=200\times6$
$=1200$

답》 (1) 1000 (2) 1200

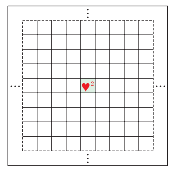
문제 12 인수분해 공식을 이용하여 다음을 계산하여라.

(1) 32^2-28^2 (2) $35\times3.5^2-35\times1.5^2$

문제 13 $a=1+\sqrt{2}$, $b=1-\sqrt{2}$일 때, a^2-b^2의 값을 구하여라.

추론

문제 14 어느 봉사 단체에서 가로, 세로가 각각 99칸인 정사각형 모양의 벽 가운데 한 칸에는 봉사 단체의 로고 ♥² 를 붙이고, 나머지 칸에는 봉사 활동에 참여한 사람들의 사진을 각각 한 장씩 붙여 전시하는 행사를 계획하고 있다. 이 벽에 모두 몇 장의 사진을 붙일 수 있는지 구하여라.



1. 인수분해 69

수준별 교수·학습 방법

인수분해 공식 (2)를 이해하고, 이를 이용하여 인수분해를 할 수 있다.

하 다양한 예를 통해 좌변과 우변을 바꾸면 인수분해 공식 (2)를 얻을 수 있음을 설명한다.

예 $(x-5)(x+5)=x^2+5x-5x-25=x^2-25$
$(x-6)(x+6)=x^2+6x-6x-36=x^2-36$

상 인수분해 공식 (2)를 활용하여 사고할 수 있는 다음과 같은 문제를 제공하여 공식에 대한 이해의 폭을 넓히도록 한다.

[문제] 연속하는 두 자연수의 제곱의 차가 홀수인지 짝수인지 말하고, 그 이유를 설명하여라.

답 n이 자연수일 때, $(n+1)^2-n^2=2n+1$이므로 연속하는 두 자연수의 제곱의 차는 홀수이다.

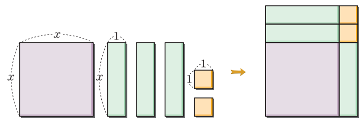
위와 같은 문제를 지도하는 과정에서 학생들이 직접 문자를 사용하여 쉽게 이 문제에 접근하지 못하는 경우, 다양한 수를 이용하여 먼저 문제의 의미를 이해하도록 하고, 일반적인 경우에 접근하도록 지도한다.

70쪽

4/5차시 $x^2+(a+b)x+ab$는 어떻게 인수분해할까?

생각 열기 다음은 넓이가 x^2, x, 1인 세 종류의 대수 막대 6개를 직사각형 모양으로 배열하는 과정을 나타낸 그림이다.

학습 준비물 5쪽



[그림 1] [그림 2]

(1) [그림 1]에서 사각형들의 넓이의 합을 구하여 보자.
(2) [그림 2]의 직사각형의 넓이를 (가로의 길이)×(세로의 길이)로 나타내어 보자.
(3) (1)과 (2)의 결과를 식으로 나타내어 보자.

9 다항식의 곱셈 공식

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

에서 좌변과 우변을 서로 바꾸면 다음과 같은 인수분해 공식을 얻는다.

인수분해 공식 (3)

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

인수분해 공식 (3)을 이용하여 다항식 x^2+3x+2를 인수분해하여 보자.

다항식 x^2+3x+2를 인수분해 공식 (3)의 좌변과 비교해 보면

$$x^2+(a+b)x+ab$$
$$x^2+\ \ 3\ x\ \ +\ 2$$

$$a+b=3,\ ab=2$$

인 경우이다.

이때 합이 3이고 곱이 2인 두 정수 a, b를 찾아보자.

오른쪽 표에서 곱이 2인 두 정수 중에서 합이 3인 두 정수는 1과 2이다.

곱이 2인 두 정수	합
$-1,\ -2$	-3
$1,\ 2$	3

따라서 x^2+3x+2를 인수분해하면

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$$

이다.

70 Ⅱ. 인수분해와 이차방정식

4/5차시 차시별 학습 지도 방법

생각 열기	대수 막대를 직접 조작해 봄으로써 인수분해 공식 (3)을 유도할 수 있도록 한다.
본문, 함께 풀기 9	인수분해 공식 (3)을 이해하고, 이를 간단히 적용할 수 있는 문제를 제시한다.
문제 15	인수분해를 하기 전에 합과 곱이 주어진 수를 먼저 찾아보게 하여 실제 인수분해에서 활용될 수 있도록 한다.
문제 16, 17	인수분해 공식 (3)을 적용할 수 있는 문제를 단계적으로 제시하여 인수분해 공식 (3)을 보다 더 잘 이해하도록 한다.
문제 18	협력 학습을 통하여 문제를 해결할 수 있도록 하며, 시각적 표상과 대수식을 연결함으로써 인수분해 공식 (3)을 이해할 수 있도록 지도한다.

$x^2+(a+b)x+ab$는 어떻게 인수분해할까?

생각 열기 학생들이 직접 대수 막대를 이용하여 인수분해 공식을 추측해 볼 수 있도록 하는 생각 열기이다.

(1) 넓이가 x^2인 정사각형이 1개, 넓이가 x인 직사각형이 3개, 넓이가 1인 정사각형이 2개이므로 6개의 사각형의 넓이의 합은 x^2+3x+2이다.

(2) 직사각형의 가로의 길이는 $x+1$, 세로의 길이는 $x+2$이므로 직사각형의 넓이를 (가로의 길이)×(세로의 길이)로 나타내면 $(x+1)(x+2)$이다.

(3) 직사각형을 만들기 전후의 넓이에 변화가 없으므로 (1), (2)의 결과를 식으로 나타내면

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$$

이다.

9 다항식의 곱셈 공식

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

를 이용하여 인수분해 공식

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

를 얻을 수 있음을 알게 한다.

문제 15 합과 곱이 주어진 두 정수 찾기

풀이 (1) 합이 7, 곱이 12인 두 정수는 3, 4이다.
(2) 합이 -8, 곱이 15인 두 정수는 -5, -3이다.
(3) 합이 1, 곱이 -6인 두 정수는 -2, 3이다.
(4) 합이 -3, 곱이 -18인 두 정수는 -6, 3이다.

Ⅱ

문제 16 인수분해 공식 (3)

풀이 (1) $x^2+\boxed{6}\,x+8=(x+\boxed{2}\,)(x+4)$
(2) $x^2-2x-\boxed{15}=(x+\boxed{3}\,)(x-5)$

문제 17 인수분해 공식 (3)

풀이 (1) $x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$
(2) $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$
(3) $x^2-7x+10=(x-5)(x-2)$
(4) $x^2-x-12=(x-4)(x+3)$

문제 18 **인수분해 공식 (3)을 활용하기**

유의점 학생들이 대수 막대나 그림을 이용하여 직사각형을 만든 후 둘레를 구하고 이를 인수분해와 연관시켜 이해할 수 있도록 지도한다.

풀이 넓이가 x^2인 정사각형이 1개, 넓이가 x인 직사각형이 5개, 넓이가 1인 정사각형이 4개이므로 10개의 사각형의 넓이의 합은 x^2+5x+4이다.
이때 $x^2+5x+4=(x+4)(x+1)$이므로
직사각형의 가로의 길이는 $x+4$, 세로의 길이는 $x+1$이다.
따라서 구하는 직사각형의 둘레의 길이는
$2(x+4+x+1)=2(2x+5)=4x+10$이다.

보충 자료

$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$의 인수분해를 지도할 때, 일차항의 계수와 상수항의 계수의 부호에 유의하여 인수분해해야 함을 알게 한다.

이런 과정을 통해 학생들이 인수분해에서 오류를 발생하지 않도록 하고 인수분해에 대하여 보다 더 잘 이해할 수 있도록 지도한다.

(i) x^2+4x+3과 같이 일차항의 계수와 상수항의 계수가 모두 양수인 경우 a, b의 부호가 모두 양수가 됨을 알게 한다.
$x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$

(ii) x^2-3x+2와 같이 일차항의 계수가 음수이고, 상수항의 계수가 양수인 경우 a, b의 부호가 모두 음수임을 알게 한다.
$x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$

(iii) x^2-x-6과 같이 일차항의 계수와 상수항이 모두 음수인 경우 a, b의 부호가 서로 반대임을 알게 한다.
$x^2-x-6=(x-3)(x+2)$

수준별 교수·학습 방법

인수분해 공식 (3)을 이해하고, 이를 이용하여 인수분해를 할 수 있다.

하 다양한 예를 통해 좌변과 우변을 바꾸면 인수분해 공식 (3)을 얻을 수 있음을 설명한다.
또한 **문제 15**와 같이 합과 곱이 주어진 두 정수를 찾는 문제를 모둠별 게임과 같은 형식으로 충분히 익히게 하여 인수분해에 대한 흥미를 높이고 능숙하게 인수분해 공식 (3)을 적용할 수 있도록 한다.

상 인수분해 공식 (3)을 활용하여 해결할 수 있는 다양한 형태의 응용 문제를 제공한다.
또 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$에서 $a+b$와 ab의 부호가 결정되면 a, b의 부호가 어떻게 정해지는지 토론할 수 있도록 한다.

71쪽

문제 15 합과 곱이 각각 다음과 같은 두 정수를 찾아라.
(1) 합: 7, 곱: 12　(2) 합: -8, 곱: 15
(3) 합: 1, 곱: -6　(4) 합: -3, 곱: -18

함께 풀기 9 다음 식을 인수분해하여라.
(1) x^2+5x+6　(2) $x^2-3x-10$

풀이» (1) 오른쪽 표에서 곱이 6이고,
합이 5인 두 정수는 2와 3이므로
$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$
이다.

곱이 6인 두 정수	합
-6, -1	-7
-3, -2	-5
2, 3	5
1, 6	7

(2) 오른쪽 표에서 곱이 -10이고,
합이 -3인 두 정수는 -5와 2이므로
$$x^2-3x-10=(x-5)(x+2)$$
이다.

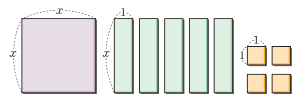
곱이 -10인 두 정수	합
-10, 1	-9
-5, 2	-3
-2, 5	3
-1, 10	9

답» (1) $(x+2)(x+3)$　(2) $(x-5)(x+2)$

문제 16 다음 $\square$ 안에 알맞은 수를 써넣어라.
(1) $x^2+\square x+8=(x+\square)(x+4)$
(2) $x^2-2x-\square=(x+\square)(x-5)$

문제 17 다음 식을 인수분해하여라.
(1) x^2+4x+3　(2) x^2+2x-3
(3) $x^2-7x+10$　(4) x^2-x-12

문제 해결
문제 18 다음 그림과 같이 넓이가 x^2, x, 1인 세 종류의 대수 막대 10개를 모두 사용하여 직사각형을 만들었을 때, 직사각형의 둘레의 길이를 구하여라.



5/5차시 차시별 학습 지도 방법 [교과 교실]

생각 열기	대수 막대를 직접 조작해 봄으로써 인수분해 공식 (4)를 유도할 수 있도록 한다.
본문, 함께 풀기 10	인수분해 공식 (4)를 이해하고, 이를 간단히 적용할 수 있는 문제를 제시한다.
문제 19, 20	인수분해 공식 (4)를 적용할 수 있는 간단한 문제를 풀고 이를 활용한 문제를 해결할 수 있도록 한다.
즐거운 활동하기	학습 준비물이나 대수 막대를 충분히 준비하여 수업 시간에 활용할 수 있도록 한다. 모둠별로 협력 학습이 이루어질 수 있도록 하며 활동 중 다양한 수학적 의사소통이 이루어질 수 있도록 유도한다.

$acx^2+(ad+bc)x+bd$는 어떻게 인수분해할까?

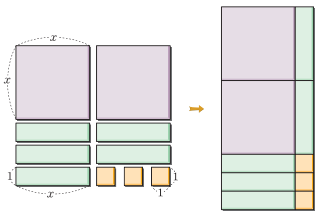
생각 열기 학생들이 직접 대수 막대를 이용하여 인수분해 공식을 추측해 볼 수 있도록 하는 생각 열기이다.

72쪽

5/5차시 $acx^2+(ad+bc)x+bd$는 어떻게 인수분해할까?

생각 열기 다음은 넓이가 x^2, x, 1인 세 종류의 대수 막대 10개를 직사각형 모양으로 배열하는 과정을 나타낸 그림이다.

학습 준비물 5쪽



[그림 1] [그림 2]

(1) [그림 1]에서 사각형들의 넓이의 합을 구하여 보자.
(2) [그림 2]의 직사각형의 넓이를 (가로의 길이)×(세로의 길이)로 나타내어 보자.
(3) (1)과 (2)의 결과를 식으로 나타내어 보자.

10 다항식의 곱셈 공식

$$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$$

에서 좌변과 우변을 서로 바꾸면 다음과 같은 인수분해 공식을 얻는다.

인수분해 공식 (4)

$$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$$

인수분해 공식 (4)를 이용하여 다항식 $2x^2+5x+3$을 인수분해하여 보자.

다항식 $2x^2+5x+3$을 인수분해 공식 (4)의 좌변과 비교해 보면

$$ac=2,\ ad+bc=5,\ bd=3$$

인 경우이다.

$$\begin{array}{ccccc} acx^2 & + & (ad+bc)x & + & bd \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 2\,x^2 & + & 5\,x & + & 3 \end{array}$$

이 조건을 만족하는 네 정수 a, b, c, d를 찾아보자.

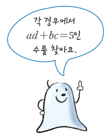
이때 보통 a, c는 양의 정수로 생각한다.

73쪽

먼저 $ac=2$인 두 양의 정수 a, c와 $bd=3$인 두 정수 b, d를 구하고, 오른쪽 그림과 같이 나열하여 $ad+bc=5$인 네 정수를 찾는다.

$$\begin{array}{cccc} a & b & \longrightarrow & bc \\ c & d & \longrightarrow & ad \\ \hline & & & ad+bc \end{array}$$

즉, 다음과 같이 계산하여 본다.



$$\begin{array}{cccc} 1 & -3 & \longrightarrow & -6 \\ 2 & -1 & \longrightarrow & -1 \\ \hline & & & -7 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & -1 & \longrightarrow & -2 \\ 2 & -3 & \longrightarrow & -3 \\ \hline & & & -5 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & \longrightarrow & 6 \\ 2 & 1 & \longrightarrow & 1 \\ \hline & & & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 1 & \longrightarrow & 2 \\ 2 & 3 & \longrightarrow & 3 \\ \hline & & & 5 \end{array}$$

이때 주어진 조건을 만족시키는 정수는 $a=1$, $b=1$, $c=2$, $d=3$이다.

따라서 $2x^2+5x+3$을 인수분해하면

$$2x^2+5x+3=(x+1)(2x+3)$$

이다.

함께 풀기 10 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $2x^2+5x+2$ (2) $6x^2-xy-2y^2$

풀이» (1) 인수분해 공식 (4)를 이용하면

$$2x^2+5x+2=(x+2)(2x+1)$$

$$\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{l}{2x^2+5x+2} \\ 1 & 2 & \longrightarrow & 4 \\ 2 & 1 & \longrightarrow & 1 \\ \hline & & & 5 \end{array}$$

(2) 인수분해 공식 (4)를 이용하면

$$6x^2-xy-2y^2=(2x+y)(3x-2y)$$

$$\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{l}{6x^2-xy-2y^2} \\ 2 & y & \longrightarrow & 3y \\ 3 & -2y & \longrightarrow & -4y \\ \hline & & & -y \end{array}$$

답» (1) $(x+2)(2x+1)$ (2) $(2x+y)(3x-2y)$

문제 19 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $3x^2+5x-2$ (2) $6x^2+11x+3$

(3) $3x^2+7xy-6y^2$ (4) $5x^2-3xy-2y^2$

문제 20 윗면의 넓이가 $5x^2+13x+6$이고, 가로의 길이가 $x+2$인 직사각형 모양의 식탁이 있다. 이 식탁의 세로의 길이를 구하여라.

---

(1) 넓이가 x^2인 정사각형이 2개, 넓이가 x인 직사각형이 5개, 넓이가 1인 정사각형이 3개이므로 10개의 사각형의 넓이의 합은 $2x^2+5x+3$이다.

(2) 직사각형의 가로의 길이는 $x+1$, 세로의 길이는 $2x+3$이므로 직사각형의 넓이를 (가로의 길이)×(세로의 길이)로 나타내면 $(x+1)(2x+3)$이다.

(3) 직사각형을 만들기 전후의 넓이에 변화가 없으므로 (1), (2)의 결과를 식으로 나타내면

$$2x^2+5x+3=(x+1)(2x+3)$$

이다.

10 다항식의 곱셈 공식

$$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$$

를 이용하여 인수분해 공식

$$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$$

를 얻을 수 있음을 알게 한다.

문제 19 **인수분해 공식 (4)**

풀이 (1) $3x^2+5x-2$
$=(3x-1)(x+2)$

$$\begin{array}{cccc} 3 & -1 & \longrightarrow & -1 \\ 1 & 2 & \longrightarrow & 6 \\ \hline & & & 5 \end{array}$$

(2) $6x^2+11x+3$
$=(3x+1)(2x+3)$

$$\begin{array}{cccc} 3 & 1 & \longrightarrow & 2 \\ 2 & 3 & \longrightarrow & 9 \\ \hline & & & 11 \end{array}$$

(3) $3x^2+7xy-6y^2$
$=(3x-2y)(x+3y)$

$$\begin{array}{cccc} 3 & -2y & \longrightarrow & -2y \\ 1 & 3y & \longrightarrow & 9y \\ \hline & & & 7y \end{array}$$

(4) $5x^2-3xy-2y^2$
$=(5x+2y)(x-y)$

$$\begin{array}{cccc} 5 & 2y & \longrightarrow & 2y \\ 1 & -y & \longrightarrow & -5y \\ \hline & & & -3y \end{array}$$

문제 20 **인수분해 공식 (4)를 활용하기**

풀이 $5x^2+13x+6$을 인수분해하면

$5x^2+13x+6=(5x+3)(x+2)$

따라서 사각형 모양의 식탁의 세로의 길이는 $5x+3$이다.

Ⅱ

즐거운 활동하기

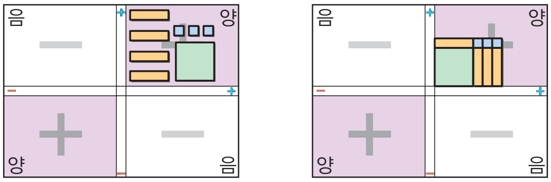
대수 막대를 이용하여 인수분해하기

지도상의 유의점 인수분해를 대수 막대를 이용하여 인수분해하는 것이 학생들에게는 익숙하지 않으므로 그 방법을 상세히 설명한다.

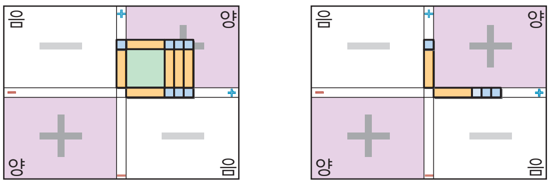
준비물 학습 준비물

풀이 활동 3 (1) x^2+4x+3을 인수분해하면 다음과 같다.

❶ x^2+4x+3을 대수 막대를 이용하여 대수판에 놓는다.
❷ x^2+4x+3을 이용하여 직사각형을 만든다.



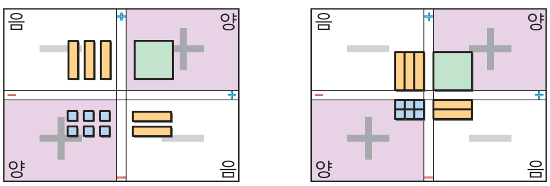
❸ 가로축과 세로축에 각각 $x+3$과 $x+1$을 대수 막대를 이용하여 대수판에 놓는다.
❹ 직사각형을 없애고 남아 있는 대수 막대를 읽는다.



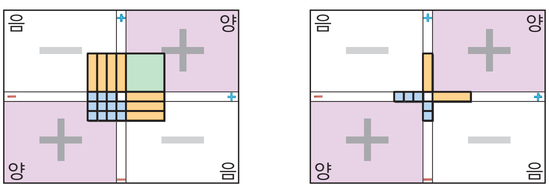
따라서 $x^2+4x+3=(x+3)(x+1)$이다.

(2) x^2-5x+6을 인수분해하면 다음과 같다.

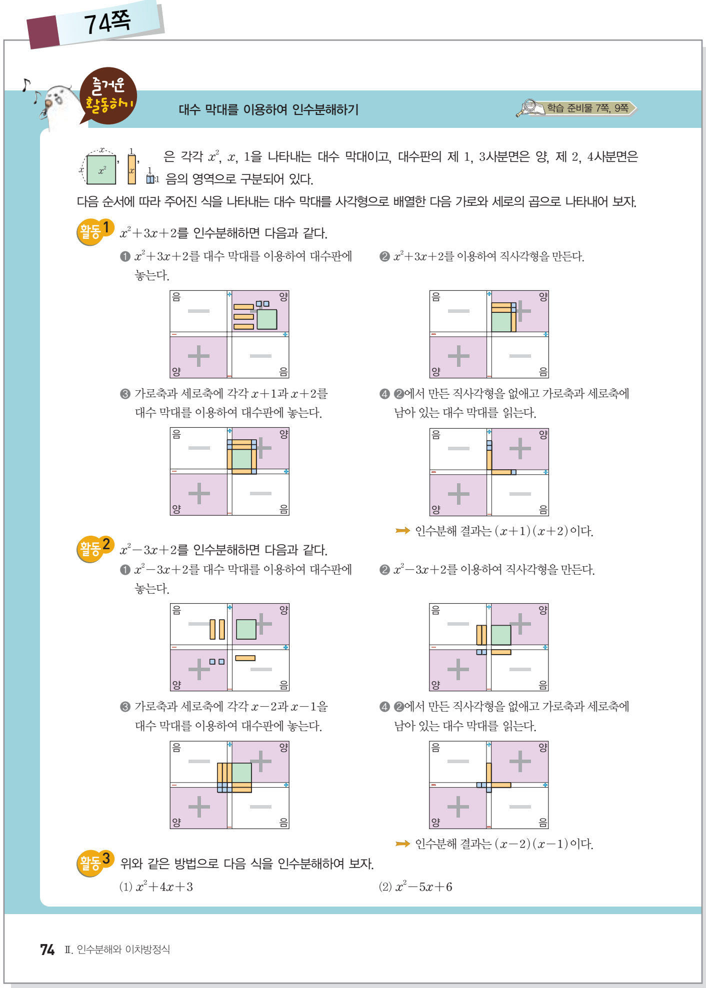
❶ x^2-5x+6을 대수 막대를 이용하여 대수판에 놓는다.
❷ x^2-5x+6을 이용하여 직사각형을 만든다.



❸ 가로축과 세로축에 각각 $x-3$과 $x-2$를 대수 막대를 이용하여 대수판에 놓는다.
❹ 직사각형을 없애고 남아 있는 대수 막대를 읽는다.



따라서 $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$이다.


74쪽

즐거운 활동하기 대수 막대를 이용하여 인수분해하기 학습 준비물 7쪽, 9쪽

은 각각 x^2, x, 1을 나타내는 대수 막대이고, 대수판의 제 1, 3사분면은 양, 제 2, 4사분면은 음의 영역으로 구분되어 있다.
다음 순서에 따라 주어진 식을 나타내는 대수 막대를 사각형으로 배열한 다음 가로와 세로의 곱으로 나타내어 보자.

활동 1 x^2+3x+2를 인수분해하면 다음과 같다.
❶ x^2+3x+2를 대수 막대를 이용하여 대수판에 놓는다.
❷ x^2+3x+2를 이용하여 직사각형을 만든다.
❸ 가로축과 세로축에 각각 $x+1$과 $x+2$를 대수 막대를 이용하여 대수판에 놓는다.
❹ ❷에서 만든 직사각형을 없애고 가로축과 세로축에 남아 있는 대수 막대를 읽는다.
➞ 인수분해 결과는 $(x+1)(x+2)$이다.

활동 2 x^2-3x+2를 인수분해하면 다음과 같다.
❶ x^2-3x+2를 대수 막대를 이용하여 대수판에 놓는다.
❷ x^2-3x+2를 이용하여 직사각형을 만든다.
❸ 가로축과 세로축에 각각 $x-2$과 $x-1$을 대수 막대를 이용하여 대수판에 놓는다.
❹ ❷에서 만든 직사각형을 없애고 가로축과 세로축에 남아 있는 대수 막대를 읽는다.
➞ 인수분해 결과는 $(x-2)(x-1)$이다.

활동 3 위와 같은 방법으로 다음 식을 인수분해하여 보자.
(1) x^2+4x+3 (2) x^2-5x+6

74 Ⅱ. 인수분해와 이차방정식

창의 · 인성 다양한 교구를 활용하여 사고의 폭을 넓히고, 자유롭게 생각할 수 있도록 한다.

수준별 교수·학습 방법

인수분해 공식 (4)를 이해하고, 이를 이용하여 인수분해를 할 수 있다.

하 다항식의 곱셈 공식을 간단한 예를 활용하여 제시하고, 좌변과 우변을 바꾸면 인수분해 공식 (4)를 얻을 수 있음을 설명한다.

중 다항식의 곱셈 공식을 이용하여 인수분해 공식 (4)를 이해하도록 하고, 인수분해 공식 (4)를 적용할 수 있는 **문제 20**과 같은 종류의 문제를 제공한다.
또 인수분해 공식 (1), (2), (3)은 인수분해 공식 (4)의 특별한 경우임을 알도록 한다.
즉, $acx^2+(ad+bc)x+bd$에서
(i) 인수분해 공식 (1)은 $a=c=\pm1$, $d=b$
(ii) 인수분해 공식 (2)는 $a=c=1$, $d=-b$
(iii) 인수분해 공식 (3)은 $a=c=1$
인 경우임을 확인할 수 있다.

75쪽

확인하기

1 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $ab-3ac$ (2) ma^2+m^2a

(3) $x^2+10x+25$ (4) $4x^2-4x+1$

(5) x^2-64 (6) $9x^2-4y^2$

2 다음 식이 완전제곱식이 되도록 □ 안에 알맞은 양수를 써넣어라.

(1) $x^2-16x+\square$ (2) $4x^2+12xy+\square y^2$

(3) $x^2+\square xy+25y^2$ (4) $9x^2-\square x+1$

3 다음 식을 인수분해하여라.

(1) x^2-5x+6 (2) x^2+x-42

(3) $6x^2+5xy+y^2$ (4) $3x^2+10xy-8y^2$

수학적 과정 의사소통 | 추론 | 문제 해결

4 다음은 정인이와 수정이의 대화 내용이다. 대화를 읽고 물음에 답하여라.

정인: ㉠ 두 자연수의 차가 1일 때, 두 자연수를 각각 제곱한 수의 차는 항상 처음 두 자연수의 합과 같아!
수정: 무슨 말인지 잘 모르겠어.
정인: 예를 들어 차가 1인 두 자연수 4와 5를 생각해 봐.
4와 5에서 각각의 제곱의 차는 9가 되는데, 이 수는 4와 5의 합과 같잖아.
수정: 우아, 신기하다. 다른 경우에도 항상 성립하는지 확인해 봐야겠어!

(1) 4와 5 이외의 다른 예를 들어 정인이가 말한 것을 확인하여 보자.
(2) 문자를 사용하여 ㉠이 성립함을 설명하여 보자.

1. 인수분해 75

확인하기

1 평가의 주안점 다항식을 인수분해할 수 있다.

풀이 (1) $ab-3ac=a(b-3c)$

(2) $ma^2+m^2a=ma(a+m)$

(3) $x^2+10x+25=(x+5)^2$

(4) $4x^2-4x+1=(2x-1)^2$

(5) $x^2-64=(x+8)(x-8)$

(6) $9x^2-4y^2=(3x+2y)(3x-2y)$

2 평가의 주안점 완전제곱식이 되는 조건을 이해할 수 있다.

풀이 (1) $x^2-16x+\square=x^2-2\times x\times 8+\square$에서

$\square=8^2=64$

(2) $4x^2+12xy+\square y^2=(2x)^2+2\times(2x)\times 3y+\square y^2$에서

$\square=3^2=9$

(3) $x^2+\square xy+25y^2=x^2+\square xy+(5y)^2$에서

$\square=2\times 1\times 5=10$

(4) $9x^2-\square x+1=(3x)^2-\square x+1^2$에서

$\square=2\times 3\times 1=6$

3 평가의 주안점 다항식을 인수분해할 수 있다.

풀이 (1) $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

(2) $x^2+x-42=(x+7)(x-6)$

(3) $6x^2+5xy+y^2=(2x+y)(3x+y)$

(4) $3x^2+10xy-8y^2=(3x-2y)(x+4y)$

4 평가의 주안점 일상적인 언어로 된 문장을 기호와 식으로 나타내어 문제를 해결할 수 있다.

풀이 (1) 예시 답안 7, 8을 각각 제곱하면 49, 64가 되고, 그 차는 15이다. 이는 7과 8의 합과 같다.

(2) 차가 1이 되는 두 자연수를 각각 x, $x+1$이라 하자.
두 자연수를 각각 제곱한 다음 그 차를 구하면
$(x+1)^2-x^2$이고, 이를 인수분해하면

$$(x+1)^2-x^2=(x+1+x)(x+1-x)$$
$$=x+1+x$$

두 자연수의 차가 1일 때, 두 자연수 각각의 제곱의 차는 항상 처음 두 자연수의 합과 같다.

지도상의 유의점 일상적인 언어를 사용한 표현을 문자를 사용한 식으로 바꾸면 훨씬 간단하고 문제에 대해 보다 명확하게 이해할 수 있음을 알도록 한다.
두 자연수의 차가 1일 때, 두 자연수를 x, $x+1$이라 놓고, 문자를 사용하여 표현할 수 있음을 알도록 지도한다.

중단원 마무리하기

스스로 정리하기

1. (1) 인수 (2) 인수분해
(3) 완전제곱식

2. (1) m (2) b
(3) a (4) b, a
(5) a, b (6) a, c, d

기초 다지기

1 평가의 주안점 다항식을 인수분해할 수 있다.

풀이 (1) $2a+8ab=2a(1+4b)$

(2) $ab^2-ab+3a^2b=ab(b-1+3a)$

(3) $x^2-14x+49=(x-7)^2$

(4) $x^2-25y^2=(x+5y)(x-5y)$

(5) $x^2-7x+10=(x-5)(x-2)$

(6) $x^2-x-12=(x-4)(x+3)$

2 평가의 주안점 다항식을 인수분해할 수 있다.

풀이 (1) $2x^2+5x-3$

$$\begin{array}{lcccc} 1 & \searrow\!\!\!\!\nearrow & \boxed{3} & \longrightarrow & \boxed{6} \\ 2 & & \boxed{-1} & \longrightarrow & \boxed{-1} \\ \hline & & & & 5 \end{array}$$

$2x^2+5x-3=\underline{(x+3)(2x-1)}$

(2) $8x^2+14x+5$

$$\begin{array}{lcccc} 2 & \searrow\!\!\!\!\nearrow & \boxed{1} & \longrightarrow & \boxed{4} \\ 4 & & \boxed{5} & \longrightarrow & \boxed{10} \\ \hline & & & & 14 \end{array}$$

$8x^2+14x+5=\underline{(2x+1)(4x+5)}$

기본 익히기

3 평가의 주안점 다항식을 인수분해할 수 있다.

풀이 (1) $9x^2+12xy+4y^2=(3x+2y)^2$

(2) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{25}=\left(\dfrac{x}{2}\right)^2-\left(\dfrac{y}{5}\right)^2=\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{5}\right)\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{5}\right)$

(3) $x^2-10x+21=(x-3)(x-7)$

(4) $x^2+4x-12=(x+6)(x-2)$

(5) $x^2+9x+18=(x+6)(x+3)$

(6) $x^2-6x-16=(x+2)(x-8)$

76쪽

중단원 마무리하기

스스로 정리하기

1. 다음 $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣어라.
   (1) 하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타낼 때, 각각의 식을 처음 다항식의 $\square$라고 한다.
   (2) 하나의 다항식을 두 개 이상의 인수의 곱으로 나타내는 것을 그 다항식을 $\square$한다고 한다.
   (3) 다항식 $(a+b)^2$, $(x+2y)^2$과 같이 다항식의 제곱으로 된 식이나 $2(x+1)^2$과 같이 다항식의 제곱에 상수를 곱한 식을 $\square$이라고 한다.

2. 다음 $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣어라.
   (1) $ma+mb=\square(a+b)$
   (2) $a^2+2ab+b^2=(a+\square)^2$
   (3) $a^2-2ab+b^2=(\square-b)^2$
   (4) $a^2-b^2=(a+\square)(\square-b)$
   (5) $x^2+(a+b)x+ab=(x+\square)(x+\square)$
   (6) $acx^2+(ad+bc)x+bd=(\square x+b)(\square x+\square)$

기초 다지기

1 다음 식을 인수분해하여라. 인수분해

(1) $2a+8ab$ (2) $ab^2-ab+3a^2b$ (3) $x^2-14x+49$

(4) x^2-25y^2 (5) $x^2-7x+10$ (6) x^2-x-12

2 다음 $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣고, 주어진 식을 인수분해하여라. 인수분해

(1) $2x^2+5x-3$

$$\begin{array}{lcccc} 1 & \searrow\!\!\!\!\nearrow & \square & \longrightarrow & \square \\ 2 & & \square & \longrightarrow & \square \\ \hline & & & & 5 \end{array}$$

$2x^2+5x-3$

$=$ ____________

(2) $8x^2+14x+5$

$$\begin{array}{lcccc} 2 & \searrow\!\!\!\!\nearrow & \square & \longrightarrow & \square \\ 4 & & \square & \longrightarrow & \square \\ \hline & & & & 14 \end{array}$$

$8x^2+14x+5$

$=$ ____________

76 Ⅱ. 인수분해와 이차방정식

4 평가의 주안점 다항식을 인수분해한 다음 공통으로 들어 있는 인수를 찾을 수 있다.

풀이 두 식을 인수분해하면 다음과 같다.

$3x^2-12=3(x^2-4)=3(x^2-2^2)$

$=3(x+2)(x-2)$ …… ❶

$x^2+3x-10=(x+5)(x-2)$ …… ❷

따라서 공통으로 들어 있는 인수는 $x-2$이다. …… ❸

단계	채점 기준	배점 비율
❶	$3x^2-12$를 인수분해한다.	40%
❷	$x^2+3x-10$을 인수분해한다.	40%
❸	공통으로 들어 있는 인수를 찾는다.	20%

5 평가의 주안점 다항식을 인수분해할 수 있다.

풀이 (1) $7x^2+3x-4=(7x-4)(x+1)$

(2) $5x^2-7x-6=(5x+3)(x-2)$

(3) $6x^2+7xy+2y^2=(3x+2y)(2x+y)$

(4) $8x^2+2xy-3y^2=(4x+3y)(2x-y)$

6 평가의 주안점 완전제곱식의 뜻을 이해할 수 있다.

풀이 $x^2+(4k+2)x+9=x^2+(4k+2)x+3^2$

이 식이 완전제곱식이 되려면

$4k+2=2\times1\times(-3)$ 또는 $4k+2=2\times1\times3$이므로

$4k=-8$ 또는 $4k=4$

따라서 $k=-2$ 또는 $k=1$이다.

7 평가의 주안점 인수분해 공식을 활용하여 식의 값을 구할 수 있다.

풀이 (1) $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$

$=\{(\sqrt{2}+1)-(\sqrt{2}-1)\}^2=2^2=4$

(2) $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

$=\{(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1)\}\{(\sqrt{2}+1)-(\sqrt{2}-1)\}$

$=2\sqrt{2}\times2=4\sqrt{2}$

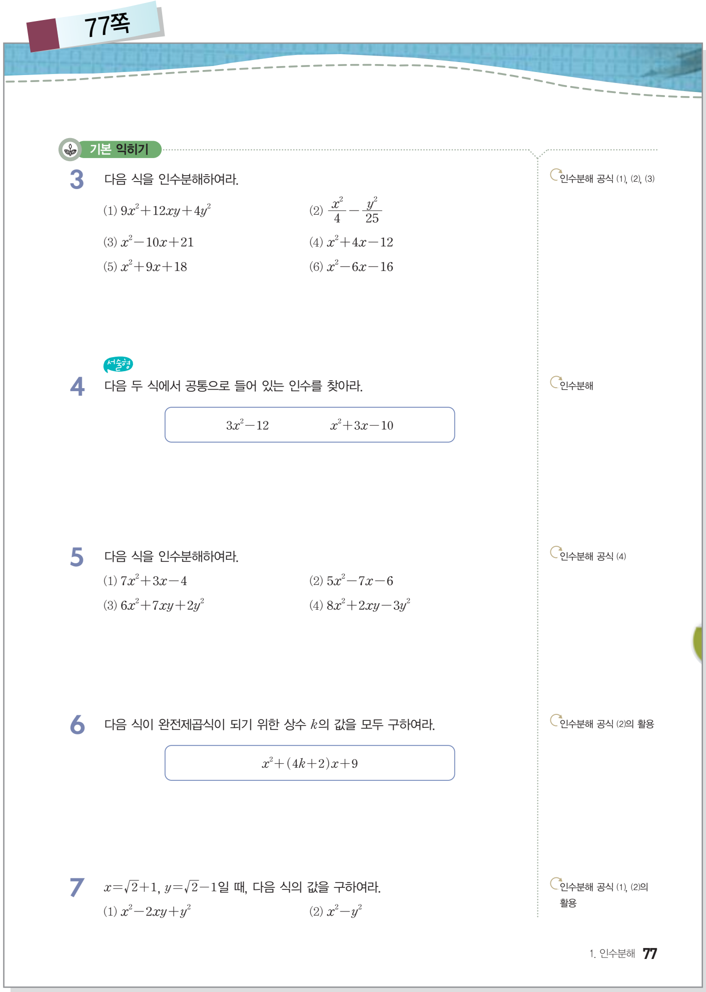
8 평가의 주안점 인수분해 공식을 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

풀이 도형 A의 넓이는 $(x+3)^2-1$이므로

$(x+3)^2-1=x^2+6x+8=(x+4)(x+2)$

도형 A의 넓이와 도형 B의 넓이가 같으므로

직사각형 B의 가로의 길이는 $x+4$이다.



77쪽

기본 익히기

3 다음 식을 인수분해하여라. 인수분해 공식 (1), (2), (3)

(1) $9x^2+12xy+4y^2$　(2) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}$

(3) $x^2-10x+21$　(4) $x^2+4x-12$

(5) $x^2+9x+18$　(6) $x^2-6x-16$

서술형

4 다음 두 식에서 공통으로 들어 있는 인수를 찾아라. 인수분해

$3x^2-12$　　$x^2+3x-10$

5 다음 식을 인수분해하여라. 인수분해 공식 (4)

(1) $7x^2+3x-4$　(2) $5x^2-7x-6$

(3) $6x^2+7xy+2y^2$　(4) $8x^2+2xy-3y^2$

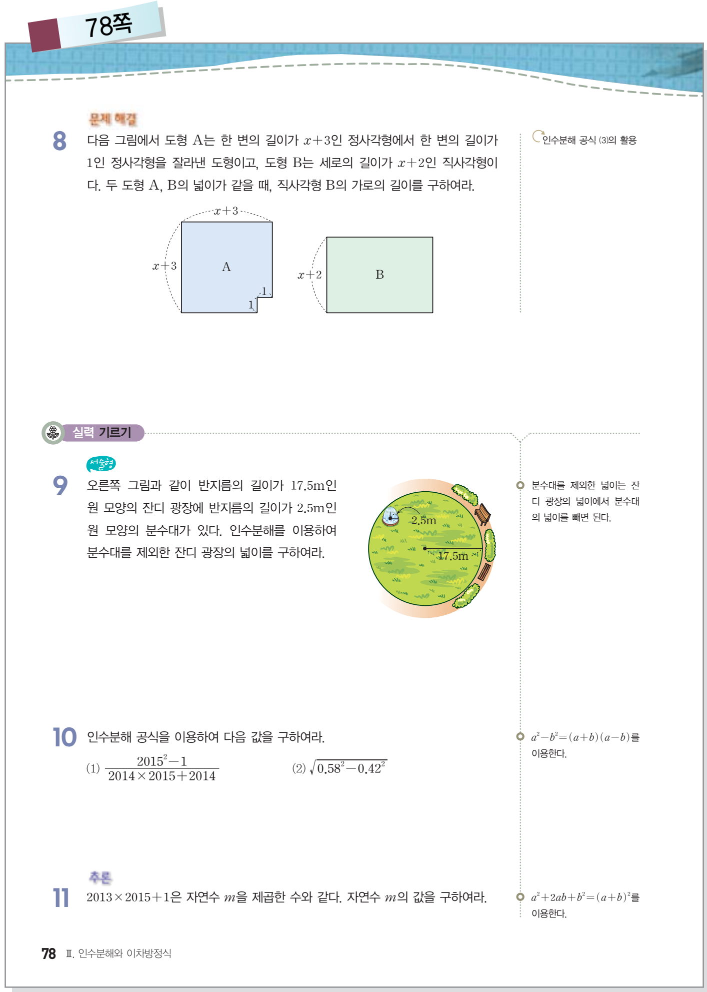
6 다음 식이 완전제곱식이 되기 위한 상수 k의 값을 모두 구하여라. 인수분해 공식 (2)의 활용

$x^2+(4k+2)x+9$

7 $x=\sqrt{2}+1$, $y=\sqrt{2}-1$일 때, 다음 식의 값을 구하여라. 인수분해 공식 (1), (2)의 활용

(1) $x^2-2xy+y^2$　(2) x^2-y^2

1. 인수분해 77



78쪽

문제 해결

8 다음 그림에서 도형 A는 한 변의 길이가 $x+3$인 정사각형에서 한 변의 길이가 1인 정사각형을 잘라낸 도형이고, 도형 B는 세로의 길이가 $x+2$인 직사각형이다. 두 도형 A, B의 넓이가 같을 때, 직사각형 B의 가로의 길이를 구하여라. 인수분해 공식 (3)의 활용

실력 기르기

서술형

9 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 17.5m인 원 모양의 잔디 광장에 반지름의 길이가 2.5m인 원 모양의 분수대가 있다. 인수분해를 이용하여 분수대를 제외한 잔디 광장의 넓이를 구하여라.

분수대를 제외한 넓이는 잔디 광장의 넓이에서 분수대의 넓이를 빼면 된다.

10 인수분해 공식을 이용하여 다음 값을 구하여라.

(1) $\frac{2015^2-1}{2014\times2015+2014}$　(2) $\sqrt{0.58^2-0.42^2}$

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$를 이용한다.

추론

11 $2013\times2015+1$은 자연수 m을 제곱한 수와 같다. 자연수 m의 값을 구하여라.

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$를 이용한다.

78 Ⅱ. 인수분해와 이차방정식

실력 기르기

9 **평가의 주안점** 인수분해 공식을 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

풀이 반지름의 길이가 17.5m인 원 모양의 잔디 광장의 넓이는 $17.5^2\pi\text{m}^2$이다. …… ①

반지름의 길이가 2.5m인 원 모양의 분수대의 넓이는 $2.5^2\pi\text{m}^2$이다. …… ②

분수대를 제외한 잔디 광장의 넓이는

$$\begin{aligned}17.5^2\pi-2.5^2\pi&=(17.5^2-2.5^2)\pi\\&=(17.5+2.5)(17.5-2.5)\pi\\&=(20\times15)\pi\\&=300\pi(\text{m}^2)\end{aligned}$$ …… ③

이다.

단계	채점 기준	배점 비율
①	잔디 광장의 넓이를 구한다.	30%
②	분수대의 넓이를 구한다.	30%
③	분수대를 제외한 잔디 광장의 넓이를 구한다.	40%

10 **평가의 주안점** 인수분해 공식을 활용하여 식의 값을 구할 수 있다.

풀이 (1) $$\begin{aligned}\frac{2015^2-1}{2014\times2015+2014}&=\frac{(2015+1)(2015-1)}{2014(2015+1)}\\&=1\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}\sqrt{0.58^2-0.42^2}&=\sqrt{(0.58+0.42)(0.58-0.42)}\\&=\sqrt{1\times0.16}\\&=\sqrt{0.16}=0.4\end{aligned}$$

11 **평가의 주안점** 인수분해 공식을 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

풀이 $$\begin{aligned}2013\times2015+1&=2013\times(2013+2)+1\\&=2013^2+2\times2013+1\\&=2013^2+2\times2013\times1+1^2\\&=(2013+1)^2\\&=2014^2\end{aligned}$$

그러므로 자연수 2014를 제곱한 수와 같다.

따라서 $m=2014$이다.

창의 · 인성 키우기

개념 바루기

지도상의 유의점 문제에서 주어진 경우는 학생들이 인수분해를 할 때, 오류를 범하기 쉬운 부분이므로 유의하도록 지도한다. 이때 오류를 범한 학생에게는 인수분해를 한 후 우변의 식을 곱셈 공식을 이용하여 전개하여 학생들이 자신의 풀이를 반성하는 습관을 기를 수 있도록 지도한다.

올바른 풀이 (i) 지영

$x^2+5x+6=(x+1)(x+6)$에서 우변을 전개하면 일차항의 계수가 7이 되므로 지영이의 인수분해는 잘못된 것이다.

곱해서 6, 더해서 5가 되는 두 수는 2와 3이므로

$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$

(ii) 창균

$5x^2-3x-2=(5x-1)(x+2)$에서 우변을 전개하면 일차항의 계수가 9이 되므로 인수분해는 잘못된 것이다.

$5x^2-3x-2=(5x+2)(x-1)$

창의 · 인성 위의 문항 외에도 일어날 수 있는 또 다른 오류를 발표해 볼 수 있는 시간을 제공하여 서로의 경험을 공유할 수 있도록 한다.

생각 키우기

지도상의 유의점 인수분해를 활용하여 퍼즐을 풀거나 암호를 풀면서 흥미를 가지고 인수분해를 배울 수 있도록 지도한다. 학생들의 풀이 과정과 문제를 만들어 숫자를 추론해 가는 과정을 살펴보고, 필요한 경우 조언하여 문제를 해결할 수 있도록 지도한다.

풀이 (1) $x^2-Ax-6=(x+B)(x-3)$ …… ①

$2x^2+x-21=(x-3)(Cx+D)$ …… ②

①의 우변을 전개하면

$(x+B)(x-3)=x^2+(B-3)x-3B$

$-A=B-3,\ -6=-3B$

따라서 $A=1,\ B=2$이다.

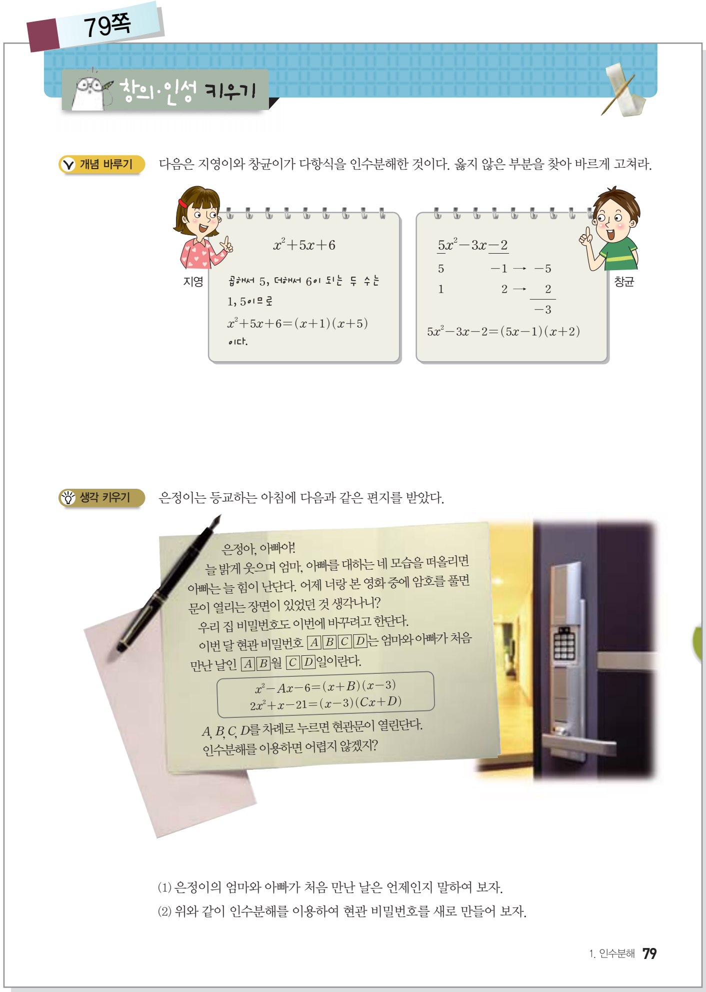
②의 우변을 전개하면

$(x-3)(Cx+D)=Cx^2+(-3C+D)x-3D$

$C=2,\ -3C+D=1,\ -3D=-21$

따라서 $C=2,\ D=7$이다.

그러므로 비밀번호는 1227이므로 은정이의 엄마와 아빠가 처음 만난 날은 12월 27일이다.


79쪽

창의·인성 키우기

개념 바루기 다음은 지영이와 창균이가 다항식을 인수분해한 것이다. 옳지 않은 부분을 찾아 바르게 고쳐라.

지영

x^2+5x+6

곱해서 5, 더해서 6이 되는 두 수는 1, 5이므로

$x^2+5x+6=(x+1)(x+5)$

이다.

창균

$5x^2-3x-2$

5 　 $-1 \to -5$

1 　 $2 \to 2$

-3

$5x^2-3x-2=(5x-1)(x+2)$

생각 키우기 은정이는 등교하는 아침에 다음과 같은 편지를 받았다.

은정아, 아빠야!

늘 밝게 웃으며 엄마, 아빠를 대하는 네 모습을 떠올리면 아빠는 늘 힘이 난단다. 어제 너랑 본 영화 중에 암호를 풀면 문이 열리는 장면이 있었던 것 생각나니?

우리 집 비밀번호도 이번에 바꾸려고 한단다.

이번 달 현관 비밀번호 $\boxed{A}\boxed{B}\boxed{C}\boxed{D}$는 엄마와 아빠가 처음 만난 날인 $\boxed{A}\boxed{B}$월 $\boxed{C}\boxed{D}$일이란다.

$x^2-Ax-6=(x+B)(x-3)$

$2x^2+x-21=(x-3)(Cx+D)$

A, B, C, D를 차례로 누르면 현관문이 열린단다.

인수분해를 이용하면 어렵지 않겠지?

(1) 은정이의 엄마와 아빠가 처음 만난 날은 언제인지 말하여 보자.

(2) 위와 같이 인수분해를 이용하여 현관 비밀번호를 새로 만들어 보자.

1. 인수분해 79

(2) **예시 문항** 이번 달 비밀번호 $\boxed{A}\boxed{B}\boxed{C}\boxed{D}$는 내 생일인 $\boxed{A}\boxed{B}$월 $\boxed{C}\boxed{D}$일이다.

$x^2+2x+A=x(x+B)$

$x^2-Cx-72=(x+8)(x-D)$

$x^2+2x+A=x(x+B)$

$x^2-Cx-72=(x+8)(x-D)$

풀이 $x^2+2x+A=x(x+B)$ …… ①

$x^2-Cx-72=(x+8)(x-D)$ …… ②

①의 우변을 전개하면 $x(x+B)=x^2+Bx$

따라서 $A=0,\ B=2$이다.

②의 우변을 전개하면

$(x+8)(x-D)=x^2+(8-D)x-8D$

$-C=8-D,\ -72=-8D$

따라서 $C=1,\ D=9$이다.

그러므로 비밀번호는 0219이다.

창의 · 인성 인수분해에서 배운 수학적 지식을 적절하게 활용하여 추론하는 능력을 기르고, 타인과 함께 해결하면서 상호 작용하는 능력을 키우게 한다.

학년 반 번호: 이름: / 점수:

선다형은 각 4점, 나머지 문항은 각 문항에 표시함.

01 다음 중 이차식 $2x^2-10x$의 인수인 것은?

① $2x^2$ ② $-10x$ ③ $2x-5$
④ $x-5$ ⑤ x^2-5

02 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은? (정답 2개)

① $4xy-8x=4x(y-2)$
② $-5x-10y=-5(x-2y)$
③ $2x^2y-4x=2x(xy-2)$
④ $-3x^2+6x=-3x(x-2)$
⑤ $6x^2y+18xy=6xy(xy+3xy)$

03 다음 중 완전제곱식으로 나타낼 수 <u>없는</u> 것은?

① $x^2-18x+81$
② $a^2-3a+\frac{9}{4}$
③ $9x^2+12x+4$
④ $25x^2-20x+1$
⑤ $4x^2-12xy+9y^2$

04 $x^2-144=(x-a)(x+a)$일 때, 상수 a의 값은? (단, $a>0$)

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

05 x^2+2x-a를 인수분해한 식이 $(x+5)(x-b)$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

06 일차항의 계수가 1인 두 일차식의 곱이 x^2-x-6일 때, 두 일차식의 합은?

① $2x-1$ ② $2x+1$
③ $2x-5$ ④ $2x+5$
⑤ $2x-6$

07 다항식 $12x^2+kx-5$를 인수분해하면 $(3x-5)(4x+1)$일 때, 상수 k의 값은?

① -17 ② -15 ③ -13
④ -11 ⑤ -9

08 다음 **보기**의 다항식 중 $x-4$를 인수로 가지는 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ. x^2+4x ㄴ. x^2-2x-8
ㄷ. $2x^2-5x-12$ ㄹ. $3x^2+10x+8$

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄹ
③ ㄴ, ㄷ ④ ㄷ, ㄹ
⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

Ⅱ

단답형

09 다항식 $(x-5)(x-7)+1$을 인수분해하여라. [6점]

10 넓이가 $3x^2+14x+8$이고, 가로의 길이가 $x+4$인 직사각형의 세로의 길이를 구하여라. [6점]

11 $x=\sqrt{2}+1$, $y=\sqrt{2}-1$일 때, $x^2-y^2-2x-2y$의 값을 구하여라. [8점]

12 a, b가 정수일 때,

$$x^2+kx+12=(x+a)(x+b)$$

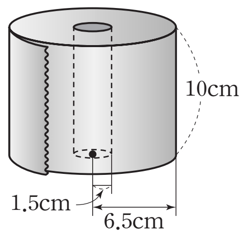
을 만족하는 상수 k의 값들의 합을 구하여라. [10점]

서술형

13 인수분해 공식을 이용하여 다음 식의 값을 구하고, 그 과정을 서술하여라. [12점]

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{14^2}\right)\left(1-\frac{1}{15^2}\right)$$

14 다음 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 6.5cm이고, 높이가 10cm인 원기둥 모양의 화장지가 있다. 비어 있는 안쪽 원기둥의 밑면의 반지름의 길이가 1.5cm일 때, 비어 있는 부분을 제외한 이 화장지의 부피를 구하고, 그 과정을 서술하여라. [12점]



수리 논술형

15 어떤 이차식을 인수분해하는 문제에서 승진이는 x의 계수를 잘못 보고, 민섭이는 상수항을 잘못 보고 인수분해하였더니 그 결과가 각각 $(2x+5)(x-3)$, $(2x-1)(x-3)$이 되었다. 처음 주어진 이차식을 구하고, 그 식을 인수분해하는 과정을 설명하여라. [14점]

중단원 평가 문제

01 ④	02 ②, ⑤	03 ④	04 ③
05 ⑤	06 ①	07 ①	08 ③
09 $(x-6)^2$	10 $3x+2$	11 0	12 0
13~15 풀이 참조			

01 평가 기준 인수의 뜻을 알고 있는가?

풀이 $2x^2-10x$를 인수분해하면 $2x(x-5)$이므로 $x-5$는 인수이다.

02 평가 기준 공통 인수로 묶는 인수분해를 할 수 있는가?

풀이 ② $-5x-10y=-5(x+2y)$
⑤ $6x^2y+18xy=6xy(x+3)$

03 평가 기준 완전제곱식의 뜻을 알고 있는가?

풀이 ① $x^2-18x+81=(x-9)^2$
② $a^2-3a+\frac{9}{4}=\left(a-\frac{3}{2}\right)^2$
③ $9x^2+12x+4=(3x+2)^2$
⑤ $4x^2-12xy+9y^2=(2x-3y)^2$
그러나 ④ $25x^2-20x+1$은 완전제곱식으로 나타낼 수 없다.

04 평가 기준 인수분해 공식 (2)를 알고 있는가?

풀이 $x^2-144=x^2-12^2$
$=(x-12)(x+12)$
따라서 $a=12$이다.

05 평가 기준 인수분해 공식 (3)을 알고 있는가?

풀이 $(x+5)(x-b)=x^2+(5-b)x-5b$이므로
$5-b=2$, $-a=-5b$에서
$b=3$, $a=15$
따라서 $a+b=18$이다.

06 평가 기준 인수분해 공식 (3)을 알고 있는가?

풀이 $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$이므로 두 일차식은 $x-3$, $x+2$이다.
따라서 두 일차식의 합은
$(x-3)+(x+2)=2x-1$
이다.

07 평가 기준 다항식의 전개와 인수분해의 관계를 이해하고 있는가?

풀이 $(3x-5)(4x+1)=12x^2-17x-5$
따라서 $k=-17$이다.

08 평가 기준 인수분해를 할 수 있는가?

풀이 ㄱ. $x^2+4x=x(x+4)$
ㄴ. $x^2-2x-8=(x-4)(x+2)$
ㄷ. $2x^2-5x-12=(x-4)(2x+3)$
ㄹ. $3x^2+10x+8=(x+2)(3x+4)$
따라서 $x-4$를 인수로 가지는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

09 평가 기준 인수분해를 할 수 있는가?

풀이 $(x-5)(x-7)+1=x^2-12x+35+1$
$=x^2-12x+36$
$=(x-6)^2$

10 평가 기준 인수분해를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

풀이 $3x^2+14x+8=(x+4)(3x+2)$이므로 직사각형의 세로의 길이는 $3x+2$이다.

11 평가 기준 인수분해를 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

풀이 $x=\sqrt{2}+1$, $y=\sqrt{2}-1$이므로

$$x^2-y^2-2x-2y=(x+y)(x-y)-2(x+y)$$
$$=(x+y)(x-y-2)$$
$$=2\sqrt{2}\times 0=0$$

이다.

12 평가 기준 인수분해를 할 수 있는가?

풀이 $x^2+kx+12=(x+a)(x+b)$에서

$x^2+kx+12=x^2+(a+b)x+ab$이므로

$a+b=k$, $ab=12$

이때 $ab=12$를 만족하는 순서쌍 (a, b)를 구하면

$(-12, -1)$, $(-6, -2)$, $(-4, -3)$, $(-3, -4)$, $(-2, -6)$, $(-1, -12)$, $(1, 12)$, $(2, 6)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(6, 2)$, $(12, 1)$

따라서 k의 값은 -13, -8, -7, 13, 8, 7이므로

$(-13)+(-8)+(-7)+13+8+7=0$

이다.

13 평가 기준 인수분해 공식을 활용하여 식의 값을 계산할 수 있는가?

풀이 $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{14^2}\right)\left(1-\frac{1}{15^2}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)$

$\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{14}\right)\left(1+\frac{1}{14}\right)\left(1-\frac{1}{15}\right)\left(1+\frac{1}{15}\right)$ …… ❶

$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\cdots\cdots\times\frac{13}{14}\times\frac{15}{14}\times\frac{14}{15}\times\frac{16}{15}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{16}{15}$

$=\frac{8}{15}$ …… ❷

단계	채점 기준	배점
❶	주어진 식을 인수분해한다.	6점
❷	식의 값을 구한다.	6점

14 평가 기준 인수분해 공식를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

풀이 밑면의 반지름의 길이가 6.5cm, 높이가 10cm인 원기둥의 부피는

$\{(6.5)^2\pi\times 10\}\text{cm}^3$ …… ❶

비어 있는 안쪽 원기둥의 부피는

$\{(1.5)^2\pi\times 10\}\text{cm}^3$ …… ❷

따라서 비어 있는 부분을 제외한 화장지의 부피는

$(6.5)^2\pi\times 10-(1.5)^2\pi\times 10$

$=(6.5^2-1.5^2)\pi\times 10$

$=(6.5+1.5)(6.5-1.5)\pi\times 10$

$=\pi\times 8\times 5\times 10$

$=400\pi(\text{cm}^3)$ …… ❸

이다.

단계	채점 기준	배점
❶	밑면의 반지름의 길이가 6.5cm인 원기둥의 부피를 구한다.	3점
❷	밑면의 반지름의 길이가 1.5cm인 원기둥의 부피를 구한다.	3점
❸	비어 있는 부분을 제외한 화장지의 부피를 구한다.	6점

15 평가 기준 인수분해를 이용한 문제를 해결할 수 있는가?

풀이 $(2x+5)(x-3)=2x^2-x-15$이므로

승진이가 인수분해한 식은 $2x^2-x-15$이다. …… ❶

$(2x-1)(x-3)=2x^2-7x+3$이므로

민섭이가 인수분해한 식은 $2x^2-7x+3$이다. …… ❷

승진이는 이차항과 상수항을 옳게 보았고,

민섭이는 이차항과 일차항을 옳게 보았으므로

처음 주어진 다항식은

$2x^2-7x-15$

이다. …… ❸

따라서 $2x^2-7x-15=(2x+3)(x-5)$이다. …… ❹

단계	채점 기준	배점
❶	승진이가 인수분해한 식을 구한다.	4점
❷	민섭이가 인수분해한 식을 구한다.	4점
❸	처음 주어진 다항식을 구하는 방법을 설명하고, 다항식을 구한다.	3점
❹	처음 주어진 다항식을 인수분해한다.	3점