I 실수와 그 계산

I

실수와
그 계산

1 제곱근과 실수
2 근호를 포함한 식의 계산

학습한 내용	본 단원의 내용	학습할 내용
중학교 수학 ❶ 소인수분해 정수와 유리수 문자의 사용과 식의 계산 **중학교 수학 ❷** 유리수와 순환소수	1. 제곱근과 실수 2. 근호를 포함한 식의 계산	**고등학교 수학 I** 복소수

단원 배경

인류는 오래전부터 가축이나 물건을 세기 위하여 자연수를 사용하였고, 기온의 영상, 영하와 같이 상대적인 상황을 나타내기 위하여 음수를 도입하였다. 또 유리수를 사용하여 비율, 무게, 길이 등을 나타내었다. 그러나 '제곱하여 2가 되는 수'와 같이 지금까지 배운 수로는 나타낼 수 없는 수가 있으며, 이러한 수는 오래된 건축물에서 활용되었음을 찾아볼 수 있다.

❶ 단원을 들어가면서

한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이는 유리수로는 나타낼 수 없다. 고대 그리스의 피타고라스 학파 사람들은 이와 같은 길이를 나타낼 수 있는 수가 존재한다는 것을 알게 되었지만 피타고라스는 제자들에게 이 사실을 발설하지 못하게 하였다. 이후 이와 같은 수는 무리수라는 이름으로 알려졌다.

이 단원은 제곱근과 실수, 근호를 포함한 식의 계산으로 구성되어 있다. 제곱근과 실수에서는 제곱근의 뜻을 알고 그 성질을 이해할 수 있도록 하며, 무리수와 실수의 개념을 알고 실수의 대소 관계를 이해할 수 있도록 한다. 근호를 포함한 식의 계산에서는 근호를 포함한 식의 곱셈과 나눗셈, 분모의 유리화를 할 수 있도록 하며, 근호를 포함한 식의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있도록 한다.

❷ 단원의 지도 목표

1. 제곱근과 실수

(1) 제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해할 수 있게 한다.
(2) 무리수의 개념을 이해할 수 있게 한다.
(3) 실수의 대소 관계를 이해할 수 있게 한다.

2. 근호를 포함한 식의 계산

(1) 근호를 포함한 식의 사칙 계산을 할 수 있게 한다.

❸ 단원의 교수·학습상의 유의점

1. 제곱근과 실수

(1) 음수의 제곱근은 생각하지 않게 한다.
(2) 다양한 상황을 이용하여 무리수의 필요성을 인식하게 한다.

2. 근호를 포함한 식의 계산

(1) 제곱근의 계산에서 자신의 풀이 방법을 설명하게 한다.
(2) 제곱근의 값이 필요할 때에는 제곱근표나 계산기를 사용하게 한다.

❹ 단원의 지도 계통

학습한 내용		본 단원의 내용	학습할 내용	
중학교 수학 ❶	- 거듭제곱 - 정수와 유리수의 대소 관계 - 정수와 유리수의 사칙 계산 - 문자를 사용한 식 - 식의 값 - 일차식의 덧셈과 뺄셈	**1. 제곱근과 실수** 1-1 제곱근과 그 성질 1-2 무리수와 실수 **2. 근호를 포함한 식의 계산** 2-1 제곱근의 곱셈과 나눗셈 2-2 제곱근의 덧셈과 뺄셈	고등학교 수학 I	- 복소수
중학교 수학 ❷	- 유리수와 순환소수의 관계			

5 단원의 이론적 배경

1. 무리수의 역사

모든 유리수는 분수의 형태로 나타낼 수 있다. 그러나 무리수는 소수로는 나타낼 수 있으나 분수의 형태로는 나타낼 수 없다. 오늘날 우리는 무리수를 '순환하지 않는 무한소수 또는 분모, 분자가 정수이고 분모가 0이 아닌 분수의 형태로 나타낼 수 없는 수'라고 정의한다.

고대 그리스 사람들은 모든 자연 현상을 정수와 정수의 비인 유리수로 나타낼 수 있다고 생각하였다.

그러나 피타고라스 학파는 정사각형의 한 변의 길이와 대각선의 길이의 비와 같이 정수의 비로 표현될 수 없는 수가 있다는 것을 알고 무리수에 대하여 논리적으로 관심을 갖기 시작하였다. 이들은 $\sqrt{2}$가 무리수라는 것을 증명하기는 했으나 직관적으로 모든 크기가 유리수에 의하여 표현될 수 있다고 느꼈기 때문에 무리수를 수로 받아들이지는 못했다.

피타고라스 이후 테아이테토스(Theaetetos ; ? B. C. 417 ~B. C. 369)와 그리스의 수학자이자 천문학자인 에우독소스(Eudoxos ; ? B. C. 400~ ? B. C. 350) 등에 의하여 무리수의 존재가 상당히 인정되었다. 그러나 그리스 사람들은 무리수를 추상적인 개념으로 생각하기보다는 기하학적인 용어로서 크기나 길이로 인식하였기 때문에 무리수를 더욱 발전시키지는 못하였다.

19세기 후반에 극한과 역속 등의 해석학의 여러 개념의 발달에 따라 무리수에 대한 해명이 차츰 밝혀지면서 바이어슈트라스(Weierstrass, K. T. W. ; 1815~1897), 칸토어(Cantor, G. ; 1845~1918), 데데킨트(Dedekind, J. W. R. ; 1831~1916) 등에 의해서 기초가 확립되었다.


데데킨트

데데킨트는 절단이라는 개념을 사용해서 실수를 정의하였고, 칸토어는 집합이라는 개념을 사용해서 실수를 정의함으로써 무리수의 특징을 밝혔다.

한편 1882년에는 린데만(Lindemann, F. ; 1852~1939)에 의해서 원주율 π가 초월수라는 것이 증명되었고, 자연로그의 밑 e가 초월수라는 것은 1873년 프랑스의 에르미트(Hermit, G. ; 1822~1901)에 의해서 증명되었다. 여기서 말하는 초월수란 '계수가 유리수인 대수방정식의 풀이로서 나타낼 수 없는 무리수'를 말한다.

2. 유리수의 절단

데데킨트는 실수에 대해서는 성립하지만 유리수에 대해서는 성립하지 않는 성질인 연속성에 대한 명확한 정의를 내리기가 어렵다는 사실을 발견하고는, 실수를 도입하기 위한 방법을 고안하게 되었다.

데데킨트는 절단을 이용하여 무리수가 어떤 수인지 설명하였다. 그는 직선의 연속성의 본질이 다음과 같은 성질에 놓여 있음을 발견하였다.

'직선의 모든 점을 두 집합으로 나누어 첫째 집합의 각 점이 둘째 집합의 모든 점보다 왼쪽에 놓이도록 한다면 그 직선을 이런 두 집합으로 절단하는 직선 위의 점이 단 하나 존재한다.'

이에 따라 다음 조건을 만족시키는 유리수 전체의 집합 Q의 부분집합 A와 B로 이루어진 유리수 집합에서의 '데데킨트 절단'을 정의하였다.

(i) 각 유리수는 A 또는 B에 속한다.
➡ $A \cup B = Q$
(ii) A와 B는 각각 적어도 하나의 유리수를 포함한다.
➡ $A \neq \phi$, $B \neq \phi$
(iii) A의 각 원소는 B의 모든 원소보다 작다.
➡ $a \in A$이고 $b \in B$이면 $a < b$이다.

그는 유리수를 작은 수부터 순서를 매겨 전체를 위, 아래 두 부분으로 나누어 직선 위에 나타낸다고 가정하였다. 이와 같이 나누었을 때 다음 세 가지 경우를 생각할 수 있다.

(1) A에 최대수가 있고, B에 최소수가 없다.
(2) A에 최대수가 없고, B에 최소수가 있다.
(3) A에 최대수가 없고, B에 최소수가 없다.

이때 윗부분에 최소의 수가 있고, 아랫부분에 최대의 수가 있는 경우를 네 번째 경우로 생각할 수 있으나, 이런 일은 일어나지 않는다. 왜냐하면, 최대의 수와 최소의 수 사이에는 또 다른 유리수가 있게 되고, 이것은 위, 아래 두 부분 어디에도 속하지 않으므로 유리수 전체를 두 부분으로 나누었다는 처음의 규정에 모순이 되기 때문이다.

이렇게 유리수 전체를 나누는 것을 '절단'이라고 부른다. 아주 예리한 칼로 유리수 전체를 절단하여 위, 아래 두 부분으로 갈라놓았다고 할 수 있기 때문이다. 어떤 유리수에도 대응하지 못하는 절단 지점에 대응하는 수로 무리수를 정의할 수 있다.

3. 무리수

가. 무리수의 판별

정수 1, 2, 3, ……의 제곱은 1, 4, 9, ……이므로 제곱한 수 사이에는 2, 3, 5, 6, 7, 8, …… 등은 정수의 제곱이 될 수 없다. 이로부터 2는 정수의 제곱이 아니다.

한편 정수가 되지 않는 유리수는 분자와 분모가 서로소인 기약분수로 나타낼 수 있다. 또한 이 기약분수를 제곱하여도 다시 기약분수가 되어 정수가 될 수 없다.

이 사실을 이용하여 $\sqrt{2}$가 무리수임을 확인하여 보자.

예를 들어 기약분수인 $\frac{3}{2}$을 제곱하면

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3\times3}{2\times2}$$

이므로 다시 기약분수이다.

$\sqrt{2}$가 유리수, 즉 $\sqrt{2}=\frac{q}{p}$(단, p, q는 서로소, $q\neq1$)라 가정하자.

양변을 제곱하면 $2=\frac{q^2}{p^2}$이고, $\frac{q^2}{p^2}$이 기약분수이므로

$2\neq\frac{q^2}{p^2}$이다.

즉, $\sqrt{2}=\frac{q}{p}$(단, p, q는 서로소, $q\neq1$)라는 가정에 모순이므로 $\sqrt{2}$는 무리수이다.

위와 같이 제곱해서 2가 되는 정수나 기약분수는 없음을 알 수 있다. 따라서 $\sqrt{2}$는 유리수가 아니다.

같은 방법으로 $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, …… 등도 무리수임을 보일 수 있다.

나. 헤론의 제곱근의 계산법

1896년 콘스탄티노플에서 쇤이 발견한 헤론(Heron ; ?10~?75)의 기하학적인 측량에는 완전제곱이 아닌 정수의 세제곱근의 근삿값을 찾는 방법이 기술되어 있다. 이 책에 쓰여 있는 계산 과정은 오늘날에도 컴퓨터에 자주 이용되고 있는데, 그 계산 과정을 살펴보면 다음과 같다.

$n=ab$일 때 $\frac{a+b}{2}$를 $\sqrt{n}$의 근삿값으로 정하는데 이 근삿값은 a와 b가 가까울수록 더 정확해진다. 이와 같은 방법으로 계산해 가면 실제값에 더 가까운 근삿값을 구할 수 있다.

즉, a_1이 n에 대한 최초의 근삿값이면

$$a_2=\frac{1}{2}\left(a_1+\frac{n}{a_1}\right)$$

은 더 정밀한 근삿값이고,

$$a_3=\frac{1}{2}\left(a_2+\frac{n}{a_2}\right)$$

은 a_1보다 더 정밀한 근삿값이 된다.

다. 초월수

유리수 계수를 가진 다항방정식의 해가 되지 않는 수들을 초월수라고 부른다. 대표적인 초월수로는 π, e 같은 수가 있다. 이러한 수들은 $\sqrt{2}$가 유리수가 아님을 증명하는 방법과는 다른 방법으로 유리수가 아니라는 사실을 증명한다.

이러한 증명 방법들을 역사적으로 살펴보면 18세기에 수학자 오일러(Euler, L. ; 1707~1783)는 수학사상 최초로 π는 무리수라는 가설을 제시하였으며, 1761년에 람베르트(Lambert, J. H. ; 1728~1777)는 π가 무리수임을 증명하였다. 이 증명법은 약간 어려운 것으로, 후에 니벤이라는 사람이 π가 무리수임을 쉬운 방법으로 증명해 보였다. 또 르장드르(Legendre, A. M. ; 1752~1833)는 π^2이 무리수라는 사실을 증명하였다. 그리고 e가 무리수임을 증명하는 것은 쉬운 편이라 많은 수학자들이 이를 증명하여 왔다.

4. 실수의 완비성

실수계는 학교 수학의 정점인 미적분의 바탕이 되는 매우 중요한 내용이다. 실수계를 도입하는 방법 중 하나는 공리적 방법으로 실수의 기본 성질을 공리로 받아들이고 나머지 다른 성질들을 연역해 나아가는 방법이고, 다른 하나는 구성적 방법으로 자연수를 집합과의 관계로부터 구성한 다음, 정수계, 유리수계를 차례로 구성하고 유리수계의 확장으로써 실수계를 구성하는 방법이다.

유리수 집합의 데데킨트 절단(Dedekind cut)으로 혹은 유리수의 코시 수열로부터 그 동치류로 실수를 구성하고 그 위에 적당히 덧셈과 곱셈을 정의하고 체의 공리, 순서 공리, 완비성의 공리를 만족함을 증명함으로써 실수계의 존재성을 보일 수 있다.

실수의 부분집합 A에 실수 u가 존재해서 모든 $x\in A$에 대하여 $x\leq u$가 될 때 A는 위로 유계라 하고, u를 집합 A의 상계라 한다. 이때 $u\leq u'$인 모든 u'도 A의 상계가 된다. A의 상계 중에서 최소인 수를 A의 상한이라 한다. A의 상한 a는 다음 두 조건을 만족한다.

(ⅰ) 모든 $x\in A$에 대하여 $x\leq a$가 존재한다.

(ⅱ) $a'<a$이면 $a'<x$인 $x\in A$가 존재한다.

또 실수의 부분집합 B에서 실수 l이 존재해서 모든 $x\in B$에 대하여 $l\leq x$가 될 때 B는 아래로 유계라 하고, l를 B의 하계라 한다. 이때 $l'\leq l$인 모든 l'도 B의 하계가 된다. B의 하계 중에서 최대인 수를 B의 하한이라 한다.

B의 하한 b는 다음 두 조건을 만족한다.

(i) 모든 $x \in B$에 대하여 $b \le x$가 존재한다.

(ii) $b < b'$이면 $x < b'$인 $x \in B$가 존재한다.

유리수의 범위에서는 위로 유계일 때 상한이 반드시 존재한다고 볼 수는 없지만 실수의 범위에서는 반드시 상한이 존재한다. 이러한 실수의 완비성은 유리수의 집합에서는 성립하지 않는 성질로서 직관적으로 실수계는 순서 구조상 틈이 없이 연속이 되도록 하여 준다는 실수계에서 가장 중요한 성질이다.

참고 문헌

- 현종익, 세계 수학사, 교우사, 2011.
- 칼 B. 보이어(Carl B. Boyer) 외(양영오, 조윤동 역), 수학의 역사, 경문사, 2002.
- David Ann, PH. D(안재찬 역), MATH−ESSAY PROCESS, 창의력 개발 연구소, 2006.

6 단원의 지도 계획

본문 내용		지도 내용	용어와 기호	쪽수	차시
1. 제곱근과 실수	이야기로 들려주는 실수와 그 계산, 준비하기			10~12	1
	1-1. 제곱근과 그 성질	• 제곱근 • 제곱근의 성질 • 제곱근의 크기	제곱근, 근호, $\sqrt{}$	13~19	3
	1-2. 무리수와 실수	• 무리수 • 무리수를 수직선 위에 나타내기 • 실수의 크기 비교	무리수, 실수	20~26	2
	중단원 마무리하기, 창의 · 인성 키우기, 수학으로 세상 읽기			27~31	1
2. 근호를 포함한 식의 계산	준비하기			32	1
	2-1. 제곱근의 곱셈과 나눗셈	• 제곱근의 곱셈 • 제곱근의 나눗셈 • 분모의 유리화	분모의 유리화	33~41	2
	2-2. 제곱근의 덧셈과 뺄셈	• 제곱근의 덧셈과 뺄셈		42~46	2
	중단원 마무리하기, 창의 · 인성 키우기			49~50	1
	단원 마무리하기			51~52	1
	수행 과제, Fun Fun 수학, 수학으로 세상 읽기, 직업 속의 수학, 스스로 평가하기			53~57	1
	소계				15

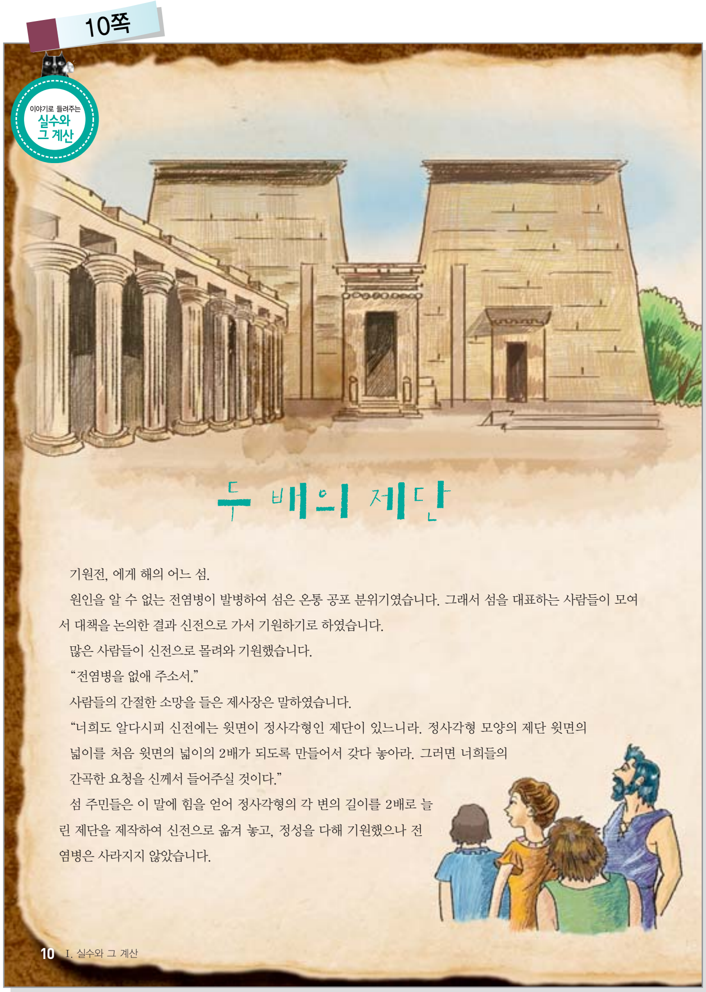
7 교수 · 학습 과정 예시안

단원	Ⅰ. 실수와 그 계산 1. 제곱근과 실수 01. 제곱근과 그 성질	교과서 쪽수	17~18	차시	4/15
학습 주제	제곱근의 크기는 어떻게 비교할까?	학습 목표	제곱근의 크기를 비교할 수 있다.		
준비물	기하판, 고무줄, 컴퍼스, PPT 자료, 활동지, 형성 평가지			교과 관련	

단계(시간)	학습 내용 및 학습 방법	교수 · 학습 활동		학습 자료 및 유의점
		교사	학생	
도입 (8분)	**개념 학습**(전체 학습) – 전시 학습 제시	지난 시간에 배운 제곱근의 성질을 이용한 문제를 제시하여 학생들의 학습 정도를 파악한다.	지난 시간에 배운 내용을 상기하며 전시 학습 확인 문제를 해결한다.	
	탐구 학습(전체 학습) – 활동하기	넓이가 큰 정사각형의 한 변의 길이가 넓이가 작은 정사각형의 한 변의 길이보다 길다는 사실을 컴퍼스를 이용하여 확인할 수 있도록 한다.	모눈종이에 사각형을 그려 본 후 넓이와 한 변의 길이를 생각해 본다.	▶ 기하판, 고무줄, 컴퍼스 ▶ PPT 자료
	– 학습 목표 제시	**활동하기**와 관련하여 학습 목표를 각자 생각해 보게 한 후 제시한다.	이번 시간에 배울 내용이 무엇인지 **활동하기**와 관련지어 생각해 보고, 학습 목표를 확인한다.	▶ PPT 자료
전개 (30분)	**개념 학습**(전체 학습) – 제곱근의 대소 관계	넓이가 주어진 사각형에서 한 변의 길이를 구할 수 있고 그 대소 관계를 알아보도록 적절한 발문을 한다.	정사각형의 한 변의 길이를 비교해 보고 크기를 비교한다.	
	문제 해결 학습(개별 학습) – 문제 8	0보다 큰 두 유리수의 대소 관계가 근호가 있는 수에서도 성립한다는 개념을 정확하게 인지하도록 지도한다.	제곱근의 대소 관계에 대하여 이해한다.	
	문제 해결 학습(전체 학습) – 함께 풀기 3	근호 안의 수의 대소를 비교하여 제곱근의 대소를 비교하게 한다.	근호 안의 수의 대소를 비교하여 제곱근의 대소를 비교한다.	

단계(시간)	학습 내용 및 학습 방법	교수 · 학습 활동		학습 자료 및 유의점
		교사	학생	
	문제 해결 학습(개별 학습) – 문제 9	• 여러 가지 문제를 통해 제곱근의 대소 관계에 대한 개념을 정확히 인지할 수 있도록 지도한다. • 주어진 문제를 여러 학생이 나와서 풀어본 후, 풀이를 발표하도록 지도한다. • 칠판에 푼 문제를 첨삭 지도한다.	• 각자 문제를 풀고, 풀지 못하는 문제에 대해서 질문한다. • 다른 사람의 풀이 방법을 경청한다.	
	수준별 학습(개별 학습)	[하] 간단한 수로 표현되는 제곱근의 대소 관계를 비교하는 내용으로 지도한다. [문제] 다음 두 수의 대소를 비교하여라. (1) 2, $\sqrt{6}$ (2) $-\sqrt{5}$, $-\sqrt{6}$ [중] 제곱근의 대소 관계를 충분히 이해한 학생들에게 제곱근의 대소를 비교하는 문제를 만들게 하고, 다른 학생이 해결하도록 하여 상호 협력하는 학습이 될 수 있도록 지도한다.		학생들의 이해도를 파악하고 이에 따라 접근 방식을 다르게 한다.
	문제 해결 학습(협력 학습) – 즐거운 활동하기	• 주어진 모둠별 활동지를 통하여 문제를 해결할 수 있도록 지도한다. • 1부터 12까지의 정수를 제곱근을 이용하여 나타내는 활동을 하고 그 결과를 발표하여 친구들과 비교하도록 한다.	조원들과 함께 모여 주어진 문제를 의사소통을 하면서 해결해 본다.	• 모둠별 문제 해결을 하는 동안 순회하며 지도한다. ▶ 활동지
정리 및 평가 (7분)	**개념 정리**(전체 학습) – 내용 정리	학생들과 함께 배운 내용을 정리한다.	선생님과 함께 배운 내용을 정리한다.	▶ PPT 자료
	문제 해결 학습(개별 학습) – 형성 평가 문제	• 형성 평가를 통해 학생의 수업에 대한 이해도를 파악한다. • 학습 내용을 상기시키고 문제 해결을 할 수 있도록 충분한 시간을 제공한다.	형성 평가 문제를 스스로 해결해 본다.	▶ 형성 평가지
	수준별 수업(개별 학습) – 수준별 과제 제시	수준별 과제를 부여한다.	수준별 과제를 받아간다.	▶ 과제물
	차시 예고 – 무리수란 무엇일까?	다음 시간에 배울 내용을 안내한다.	다음 시간에 배울 내용을 확인한다.	

10쪽


이야기로 들려주는 실수와 그 계산

두 배의 제단

기원전, 에게 해의 어느 섬.

원인을 알 수 없는 전염병이 발병하여 섬은 온통 공포 분위기였습니다. 그래서 섬을 대표하는 사람들이 모여서 대책을 논의한 결과 신전으로 가서 기원하기로 하였습니다.

많은 사람들이 신전으로 몰려와 기원했습니다.

"전염병을 없애 주소서."

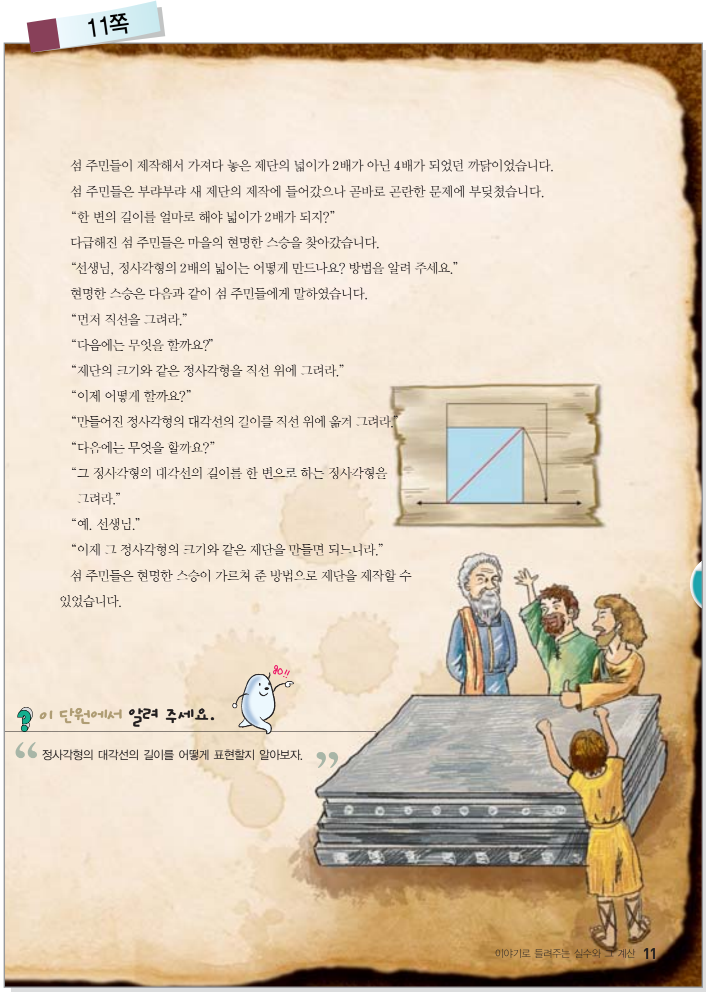
사람들의 간절한 소망을 들은 제사장은 말하였습니다.

"너희도 알다시피 신전에는 윗면이 정사각형인 제단이 있느니라. 정사각형 모양의 제단 윗면의 넓이를 처음 윗면의 넓이의 2배가 되도록 만들어서 갖다 놓아라. 그러면 너희들의 간곡한 요청을 신께서 들어주실 것이다."

섬 주민들은 이 말에 힘을 얻어 정사각형의 각 변의 길이를 2배로 늘린 제단을 제작하여 신전으로 옮겨 놓고, 정성을 다해 기원했으나 전염병은 사라지지 않았습니다.

10 I. 실수와 그 계산

11쪽


섬 주민들이 제작해서 가져다 놓은 제단의 넓이가 2배가 아닌 4배가 되었던 까닭이었습니다.

섬 주민들은 부랴부랴 새 제단의 제작에 들어갔으나 곧바로 곤란한 문제에 부딪쳤습니다.

"한 변의 길이를 얼마로 해야 넓이가 2배가 되지?"

다급해진 섬 주민들은 마을의 현명한 스승을 찾아갔습니다.

"선생님, 정사각형의 2배의 넓이는 어떻게 만드나요? 방법을 알려 주세요."

현명한 스승은 다음과 같이 섬 주민들에게 말하였습니다.

"먼저 직선을 그려라."

"다음에는 무엇을 할까요?"

"제단의 크기와 같은 정사각형을 직선 위에 그려라."

"이제 어떻게 할까요?"

"만들어진 정사각형의 대각선의 길이를 직선 위에 옮겨 그려라."

"다음에는 무엇을 할까요?"

"그 정사각형의 대각선의 길이를 한 변으로 하는 정사각형을 그려라."

"예. 선생님."

"이제 그 정사각형의 크기와 같은 제단을 만들면 되느니라."

섬 주민들은 현명한 스승이 가르쳐 준 방법으로 제단을 제작할 수 있었습니다.

이 단원에서 알려 주세요.

"정사각형의 대각선의 길이를 어떻게 표현할지 알아보자."

이야기로 들려주는 실수와 그 계산 11

이야기로 들려주는 실수와 그 계산

"이야기 배경"

이 이야기는 델로스의 문제를 정육면체가 아닌 정사각형으로 바꾸어 해결하는 모습을 상상하며 쓴 글이다.

기원전 430년경에 에게 해의 델로스 섬에서 시민들이 전염병에 시달리자 이를 델로스의 아폴로 신탁에 맡기었으며, 그에 대한 답은 '정육면체의 제단을 두 배로 만들라.' 였다.

이에 시민들은 제단의 각 변을 두 배로 늘렸으나 전염병이 수그러들지 않았는데, 그 이유는 변의 길이를 2배로 늘리게 되면 부피는 8배가 되기 때문이었다. 그래서 시민들은 이 문제를 플라톤에게 질의하였는데, 플라톤은 학문을 게을리하여 신의 노여움을 산 것이라며 사람들을 꾸짖었다고 한다. 이후에도 부피를 2배로 만들기 위한 문제가 나왔으나 해결되지 않았다. 그 후로 이 문제를 델로스의 문제라고 부르기 시작했다.

고대 그리스에서는 수많은 학자들이 기하학을 연구하는 데 일생을 바쳤다. 그 학자들 중에서 피타고라스는 으뜸가는 사람이었지만 제자들에게 자신들이 발견한 새로운 지식이 외부인에게 알려지는 것을 철저히 막을 것을 당부했다고 한다. 피타고라스는 기하학 지식이 외부로 새 나가는 것을 철두철미하게 막으면서 새로운 지식을 독점했다.

그러나 그처럼 의욕에 찬 피타고라스의 과욕은 무리수를 발견하는 과정에서 예기치 못한 대혼란을 일으켰으며 대단한 과오를 범하게 하였다.

'정사각형의 한 변의 길이를 1이라 할 때, 대각선의 길이는 과연 어떤 수일까?'

피타고라스가 주장하고 있는 수는 분수로 나타낼 수 있는 유리수가 전부인데, 이것으로는 그에 대한 흡족한 답을 찾을 수가 없었다. 게다가 분수로 표현하지 못하는 수가 있다는 사실을 믿으려 하지도 않았을 뿐만 아니라 그러한 수가 존재해서는 안 된다고 굳게 믿고 있었다.

피타고라스는 새로운 수의 체계를 과감히 받아들여야 했으나 그렇게 하지 않았던 것이다.

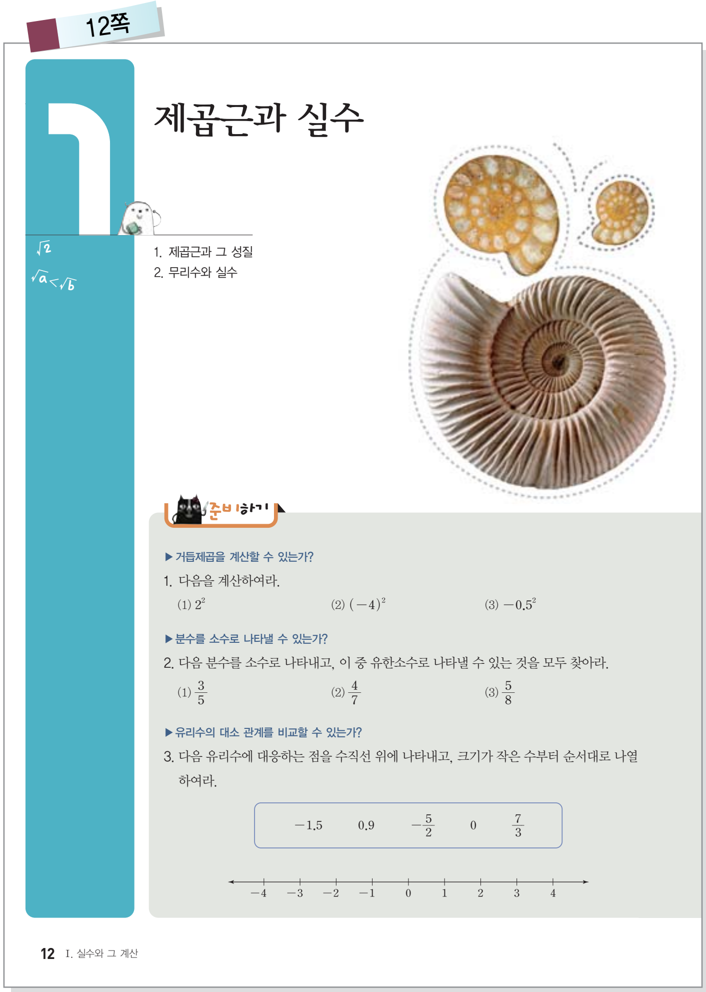
1 제곱근과 실수

중단원 지도 목표

1. 제곱근의 뜻을 알고 그 성질을 알 수 있게 한다.
2. 무리수의 개념을 알 수 있게 한다.
3. 수직선에서 실수의 대소 관계를 알 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원 명	지도 내용
1. 제곱근과 그 성질	• 제곱근의 뜻 • 제곱근의 성질 • 제곱근의 대소 관계
2. 무리수와 실수	• 무리수의 뜻 • 무리수를 수직선에 나타내기 • 실수의 대소 관계
중단원 마무리하기	• 스스로 정리하기 • 기초 다지기, 기본 익히기, 실력 기르기
창의 · 인성 키우기	• 개념 바루기 • 문제 만들기 • 생각 키우기


12쪽

1 제곱근과 실수

1. 제곱근과 그 성질
2. 무리수와 실수

준비하기

▶거듭제곱을 계산할 수 있는가?

1. 다음을 계산하여라.

(1) 2^2 (2) $(-4)^2$ (3) -0.5^2

▶분수를 소수로 나타낼 수 있는가?

2. 다음 분수를 소수로 나타내고, 이 중 유한소수로 나타낼 수 있는 것을 모두 찾아라.

(1) $\frac{3}{5}$ (2) $\frac{4}{7}$ (3) $\frac{5}{8}$

▶유리수의 대소 관계를 비교할 수 있는가?

3. 다음 유리수에 대응하는 점을 수직선 위에 나타내고, 크기가 작은 수부터 순서대로 나열하여라.

-1.5 0.9 $-\frac{5}{2}$ 0 $\frac{7}{3}$

12 I. 실수와 그 계산

준비하기

▶거듭제곱을 계산할 수 있는가?

1. 이 단원에서는 제곱해서 a가 되는 수를 이용하여 a의 제곱근을 구한다. 따라서 어떤 수의 제곱을 계산할 수 있어야 한다.

풀이 (1) $2^2=2\times2=4$

(2) $(-4)^2=(-4)\times(-4)=16$

(3) $-0.5^2=-(0.5\times0.5)=-0.25$

답 (1) 4 (2) 16 (3) -0.25

▶분수를 소수로 나타낼 수 있는가?

2. 이 단원에서는 유한소수도 아니고 순환하는 무한소수도 아닌 수를 이용하여 무리수를 도입하게 된다. 따라서 분수를 소수로 나타낼 때 유한소수나 순환하는 무한소수가 되는 것을 알고 있어야 한다.

풀이 (1) $\frac{3}{5}=0.6$ (유한소수)

(2) $\frac{4}{7}=0.571428571428571428\cdots=0.\dot{5}7142\dot{8}$

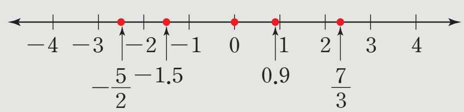
(3) $\frac{5}{8}=0.625$ (유한소수)

답 (1) 0.6 (2) $0.\dot{5}7142\dot{8}$ (3) 0.625

▶유리수의 대소 관계를 비교할 수 있는가?

3. 이 단원에서는 유리수의 대소 관계를 이용하여 제곱근의 대소를 비교하게 된다. 따라서 유리수의 대소를 비교할 수 있어야 한다.

풀이 주어진 수를 모두 수직선에 나타내면 다음과 같다.



따라서 크기가 작은 수부터 순서대로 나열하면

$-\frac{5}{2}$, -1.5, 0, 0.9, $\frac{7}{3}$이다.

답 풀이 참조

01 제곱근과 그 성질

지도 목표

1. 제곱근의 뜻을 알고, 어떤 수의 제곱근을 구할 수 있게 한다.
2. 제곱근의 성질을 이해하고, 식을 간단히 할 수 있게 한다.
3. 제곱근의 대소 관계를 비교할 수 있게 한다.

지도상의 유의점

1. 제곱과 제곱근의 관계를 이해하게 한다.
2. 어떤 수를 제곱하면 항상 0 또는 양수가 됨을 이해하게 한다.
3. 양수 a에 대하여 a의 제곱근과 $\sqrt{a}$의 차이점을 구별할 수 있게 한다.
4. 제곱근의 대소 비교는 정사각형의 넓이와 한 변의 길이를 이용하여 직관적으로 비교할 수 있게 한다.

1/3차시 차시별 학습 지도 방법

생각 열기	간단한 설계도를 이용하여 정사각형의 한 변의 길이를 직관적으로 알아보면서 제곱근을 도입할 수 있도록 한다.
본문 함께 풀기 1	제곱근의 뜻을 이해할 수 있도록 다양한 수의 예를 들어 내용을 설명한다.
문제 1, 2, 3	문제를 스스로 해결할 수 있도록 하며, 친구들과 결과를 비교해 보도록 한다.
문제 4	문항의 난이도가 높으므로 학생들의 수준에 따라 단계적으로 힌트를 제공하도록 한다.

제곱근은 무엇일까?

생각 열기 집의 설계도를 이용하여 정사각형 모양인 방의 넓이와 한 변의 길이로부터 제곱과 제곱근의 관계를 이해하게 하는 생각 열기이다.

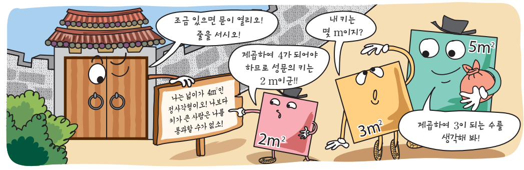
영훈이가 사용할 방의 넓이는 $9\mathrm{m}^2$이므로 한 변의 길이는 $3\mathrm{m}$이다.

부모님이 사용하실 방의 넓이는 $16\mathrm{m}^2$이므로 한 변의 길이는 $4\mathrm{m}$이다.

13쪽

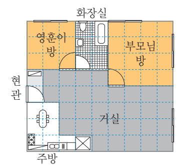
01 제곱근과 그 성질

학습 목표 제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
배울 용어 제곱근, 근호



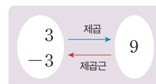
1/3차시 **제곱근은 무엇일까?**

생각 열기 영훈이는 오른쪽 그림과 같이 부모님과 자신의 방을 정사각형 모양으로 만들어 집의 구조를 설계하였다.
영훈이 방의 넓이는 $9\mathrm{m}^2$이고, 부모님 방의 넓이는 $16\mathrm{m}^2$라 할 때, 부모님과 영훈이의 방의 한 변의 길이를 각각 구하여라.



제곱하여 9가 되는 수는 3, -3이 있다.
즉, $3^2=9$, $(-3)^2=9$이다.
이와 같이 어떤 수를 제곱하여 a가 되는 수, 즉 $x^2=a$를 만족하는 x를 a의 **제곱근**이라고 한다.
예를 들어 9의 제곱근은 3, -3이다.

$x^2=a\,(a\geq 0)$
a의 제곱근



양수나 음수를 제곱하면 항상 양수가 되므로 음수의 제곱근은 생각하지 않는다. 또 제곱하여 0이 되는 수는 0뿐이므로 0의 제곱근은 0 하나뿐이다.

1 제곱하여 9가 되는 수는 3, -3임을 이용하여 제곱근의 뜻을 도입하며, 0이 아닌 양수의 제곱근은 양수와 음수의 2개가 있음을 설명한다. 양수와 음수 모두 제곱하면 양수가 되므로 음수의 제곱근은 생각하지 않도록 하고, 제곱하여 0이 되는 수는 0뿐이므로 0의 제곱근은 0뿐임을 알게 한다.

연구 자료

거듭제곱근 [radical root]

누승근(累乘根) 또는 멱근(冪根)이라고도 하는데, x를 거듭제곱하여 a가 될 때 x를 a의 거듭제곱근이라 한다. 일반적으로 n이 자연수일 때 $x^n=a$가 되는 수 x를 a의 n제곱근이라고 하며, $n=2$일 때 제곱근, $n=3$일 때 세제곱근이라 한다.

a의 n제곱근은 복소수 범위에서 n개 있다. 그러나 a의 n제곱근 중 실수인 것만을 생각하면 $a>0$인 경우 n이 짝수일 때는 $\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$의 2개가 있고, 홀수일 때는 $\sqrt[n]{a}$ 하나만 있다. $a<0$인 경우 n이 짝수일 때는 음수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 없고, n이 홀수이면 $\sqrt[n]{a}$도 음수로서 하나가 있다.

문제 1 제곱근 구하기

풀이 (1) $4^2=16$, $(-4)^2=16$이므로 16의 제곱근은 4, -4이다.

(2) $11^2=121$, $(-11)^2=121$이므로 121의 제곱근은 11, -11이다.

(3) $\left(\frac{3}{8}\right)^2=\frac{9}{64}$, $\left(-\frac{3}{8}\right)^2=\frac{9}{64}$이므로 $\frac{9}{64}$의 제곱근은 $\frac{3}{8}$, $-\frac{3}{8}$이다.

(4) $0.9^2=0.81$, $(-0.9)^2=0.81$이므로 0.81의 제곱근은 0.9, -0.9이다.

2 양수 a의 제곱근을 새로운 기호 $\sqrt{\ }$를 사용하여 제곱근 중 양수인 것은 $+\sqrt{a}$, 음수인 것은 $-\sqrt{a}$로 나타내고, 이를 $\pm\sqrt{a}$로 함께 나타낼 수 있음을 설명한다.
새로운 기호 $\sqrt{\ }$에 대하여 이해하고, 제곱근 a와 a의 제곱근은 같지 않음을 주의하게 한다.

문제 2 제곱근을 근호를 사용하여 나타내기

풀이 (1) 3의 제곱근은 $\pm\sqrt{3}$이다.

(2) 5의 제곱근은 $\pm\sqrt{5}$이다.

(3) 0.7의 제곱근은 $\pm\sqrt{0.7}$이다.

(4) $\frac{3}{2}$의 제곱근은 $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$이다.

3 유리수의 제곱이 되는 양수 a의 제곱근은 근호를 사용하지 않고 나타낼 수 있음을 설명한다.

문제 3 제곱근을 근호를 사용하지 않고 나타내기

풀이 (1) $\sqrt{25}=5$ (2) $\sqrt{169}=13$

(3) $\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{4}{3}$ (4) $-\sqrt{0.36}=-0.6$

4 문자 표현이 익숙하지 않은 학생에게는 n에 1, 2, 3, ……, 15를 각각 대입하여 정수가 되는 값을 구하게 하고, 상위권 학생에게는 풀이와 같이 제곱수를 이용하여 문제를 풀 수 있도록 지도한다.

14쪽

함께 풀기 1 다음 수의 제곱근을 구하여라.

(1) 36 (2) $\frac{4}{25}$ (3) 0.49

풀이» (1) $6^2=36$, $(-6)^2=36$이므로 36의 제곱근은 6과 -6이다.

(2) $\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}$, $\left(-\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}$이므로 $\frac{4}{25}$의 제곱근은 $\frac{2}{5}$와 $-\frac{2}{5}$이다.

(3) $(0.7)^2=0.49$, $(-0.7)^2=0.49$이므로 0.49의 제곱근은 0.7과 -0.7이다.

답» (1) 6, -6 (2) $\frac{2}{5}$, $-\frac{2}{5}$ (3) 0.7, -0.7

문제 1 다음 수의 제곱근을 구하여라.

(1) 16 (2) 121

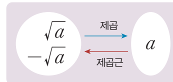
(3) $\frac{9}{64}$ (4) 0.81

근호는 '제곱근의 기호'를 줄인 말이다. 또 기호 $\sqrt{\ }$는 뿌리(root)를 뜻하는 라틴어 radix의 첫글자 r를 변형하여 만든 것이다.

양수 a의 제곱근은 양수, 음수 두 개가 있고, 이 두 수의 절댓값은 서로 같다.

양수 a의 제곱근 중에서 양수인 것을 양의 제곱근, 음수인 것을 음의 제곱근이라 하고, 기호 $\sqrt{\ }$를 사용하여

2
a의 양의 제곱근을 $\sqrt{a}$
a의 음의 제곱근을 $-\sqrt{a}$



와 같이 나타낸다. 이때 기호 $\sqrt{\ }$를 **근호**라고 하며, $\sqrt{a}$를 '제곱근 a' 또는 '루트 a'라고 읽는다.

$\pm\sqrt{a}$를 '플러스 마이너스 루트 a'라고 읽는다.

또 $\sqrt{a}$와 $-\sqrt{a}$를 한꺼번에 $\pm\sqrt{a}$로 나타내기도 한다.

보기 7의 양의 제곱근은 $\sqrt{7}$, 음의 제곱근은 $-\sqrt{7}$이므로 7의 제곱근은 $\pm\sqrt{7}$이다.

문제 2 다음 수의 제곱근을 근호를 사용하여 나타내어라.

(1) 3 (2) 5

(3) 0.7 (4) $\frac{3}{2}$

3 4의 양의 제곱근은 2, 음의 제곱근은 -2이다. 그런데 4의 제곱근을 근호를 사용하여 나타내면 $\sqrt{4}$, $-\sqrt{4}$이므로

$$\sqrt{4}=2,\ -\sqrt{4}=-2$$

임을 알 수 있다. 이와 같이 어떤 양수의 제곱근은 근호를 사용하지 않고 나타낼 수 있다.

14 I. 실수와 그 계산

문제 4 제곱근을 근호를 사용하지 않고 나타내기

풀이 $\sqrt{20-n}$이 정수가 되는 경우는

$20-n=1^2$일 때, $n=19$

$20-n=2^2$일 때, $n=16$

$20-n=3^2$일 때, $n=11$

$20-n=4^2$일 때, $n=4$

따라서 정수가 되는 n의 값은 4, 11, 16, 19이다.

연구 자료

제곱수

$1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$, ……와 같이 자연수의 제곱인 수를 제곱수라고 한다.

제곱수 이외에 일정한 물건으로 삼각형, 사각형, 오각형 모양을 만들어 놓았을 때, 사용된 물건의 총 개수들을 각각 삼각수, 사각수, 오각수라 한다.

15쪽

문제 3 다음 수를 근호를 사용하지 않고 나타내어라.

(1) $\sqrt{25}$ (2) $\sqrt{169}$

(3) $\sqrt{\frac{16}{9}}$ (4) $-\sqrt{0.36}$

추론

4 **문제 4** n이 자연수일 때, $\sqrt{20-n}$이 자연수가 되는 n의 값을 모두 구하여라.

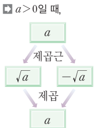
2/3차시 **제곱근에는 어떤 성질이 있을까?**

생각 열기 다음은 민수와 주영이의 대화이다.

(1) $\sqrt{5}$를 제곱하면 얼마가 되는지 말하여 보자.

(2) $-\sqrt{5}$를 제곱하면 얼마가 되는지 말하여 보자.

$a>0$일 때,



5 $\sqrt{2}$와 $-\sqrt{2}$는 2의 제곱근이므로

$$(\sqrt{2})^2=2,\ (-\sqrt{2})^2=2$$

이다.

일반적으로 양수 a의 제곱근은 $\sqrt{a}$와 $-\sqrt{a}$이고, 이들을 각각 제곱하면 a이므로

$$(\sqrt{a})^2=a,\ (-\sqrt{a})^2=a$$

이다.

보기 $(\sqrt{3})^2=3$, $(-\sqrt{5})^2=5$이다.

1. 제곱근과 실수 15

수준별 교수·학습 방법

어떤 수의 제곱근을 구할 수 있다.

하 제곱근의 뜻을 이해시키기 위하여 1, 2, 3, 4, ……의 제곱의 계산을 충분히 연습하도록 지도한다.

이때 다음의 문제와 같이 절댓값이 같고 부호가 다른 두 수를 제곱한 결과가 서로 같음을 보여 주고, 이를 통하여 제곱근을 구할 수 있도록 지도한다.

[문제 1] 2, -2를 제곱한 수를 각각 구하여라.

답 4, 4

[문제 2] 4의 제곱근을 구하여라.

답 ± 2

중 양수 a의 제곱근과 제곱근 a의 의미를 이해하게 한다. 이때 정수, 분수, 소수의 제곱근을 충분히 이해한 학생들에게 제곱근의 문제를 만들게 하고 다른 학생이 해결하도록 지도한다.

특히 0.4의 제곱근, 2.5의 제곱근, 2^2, $(-3)^2$의 제곱근과 같이 오류를 범하기 쉬운 예를 제시하도록 한다.

[문제] 다음 수의 제곱근을 구하여라.

(1) 0.4 (2) 2.5 (3) 2^2 (4) $(-3)^2$

답 (1) $\pm\sqrt{0.4}$ (2) $\pm\sqrt{2.5}$ (3) ± 2 (4) ± 3

2/3차시 차시별 학습 지도 방법

생각 열기	주어진 만화를 보면서 학생들이 제곱과 제곱근의 관계를 생각할 수 있는 발문을 한다.
본문, 함께 풀기 2	다양한 예시를 통해 제곱근의 성질의 내용을 이해할 수 있도록 한다.
문제 5, 6, 7	문제를 스스로 해결할 수 있도록 하며, 틀린 문항에 대해서는 피드백을 제공하여 개념을 바로 잡도록 지도한다.

제곱근에는 어떤 성질이 있을까?

생각 열기 제곱하여 a가 되는 수는 a의 제곱근이므로 a의 제곱근 $\sqrt{a}$, $-\sqrt{a}$를 제곱하면 a가 됨을 알게 하는 생각 열기이다.

(1) $\sqrt{5}$는 5의 양의 제곱근이므로 제곱하면 5가 된다.

(2) $-\sqrt{5}$는 5의 음의 제곱근이므로 제곱하면 5가 된다.

5 양수 a에 대하여 $\sqrt{a}$, $-\sqrt{a}$는 a의 제곱근이므로 $(\sqrt{a})^2=(-\sqrt{a})^2=a$임을 설명한다.

특히 제곱근의 성질에는 학생들이 문자를 다루는데 많은 어려움을 겪으므로 다양한 예를 통하여 충분히 이해하게 한 다음에 문자로 일반화할 수 있도록 지도한다.

이때 **보기**에서 $(-\sqrt{5})^2$을 -5로 계산하지 않도록 유의하여 지도한다.

I

연구 자료

루트 $\sqrt{\ }$에 대한 이야기

- 덧셈과 곱셈에서는 각각 1개씩의 역연산인 뺄셈과 나눗셈이 있다. 그러나 거듭제곱에는 2개의 역연산이 있다. 그 하나가 밑을 구하는 것으로 제곱근이나 세제곱근, 네제곱근 등을 통칭하여 거듭제곱의 근을 구하는 것이다. 나머지 하나의 역연산은 거듭제곱의 지수를 구하는 것이다.
- 덧셈이나 곱셈의 경우에는 두 수 중 어느 것을 역연산으로 구하더라도 다른 것을 구하는 방법과 똑같지만 거듭제곱의 경우에는 밑을 구하는 방법과 지수를 구하는 방법이 서로 다르다.

$2^4=4^2$
$2^3\neq 3^2$

거듭제곱근을 구하는 연산에서는 근호 $\sqrt{\ }$가 사용되는데 16세기에는 근호의 대문자 R와 함께 제곱근의 경우에는 q, 세제곱근의 경우에는 c를 나란히 사용하였다.

16세기	R.q.1234	R.c.1234
현재	$\sqrt{1234}$	$\sqrt[3]{1234}$

문제 5 **제곱근의 값 구하기**

풀이 (1) $(\sqrt{11})^2=11$　(2) $(-\sqrt{7})^2=7$

(3) $(-\sqrt{3.5})^2=3.5$　(4) $\left(\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right)^2=\dfrac{5}{2}$

6 양수 a에 대하여 $(-a)^2=a^2$이므로
$(\sqrt{a})^2=a$, $\sqrt{(-a)^2}=a$
임을 설명한다. 이때 $\sqrt{(-7)^2}=-7$로 계산하지 않도록 유의하여 지도한다.

문제 6 **제곱근의 값 구하기**

풀이 (1) $\sqrt{8^2}=8$

(2) $\sqrt{(-5)^2}=\sqrt{25}=\sqrt{5^2}=5$

(3) $-\sqrt{0.25^2}=-0.25$

(4) $-\sqrt{\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2}=-\sqrt{\dfrac{1}{9}}=-\sqrt{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=-\dfrac{1}{3}$

7 제곱근의 간단한 계산을 통하여 학생들이 제곱근의 성질을 충분히 이해할 수 있도록 지도한다.

문제 7 **제곱근의 값 계산하기**

풀이 (1) $(\sqrt{7})^2+(-\sqrt{3})^2=7+3=10$

(2) $(-\sqrt{1.3})^2\times(\sqrt{2})^2=1.3\times2=2.6$

(3) $\sqrt{9^2}-\sqrt{(-12)^2}=9-12=-3$

(4) $\sqrt{\dfrac{1}{4}}\div\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\dfrac{1}{2}\div\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$

보충 문제

다음을 계산하여라.

(1) $(\sqrt{0.1})^2-(-\sqrt{0.3})^2$

(2) $\sqrt{(-3)^2}-(-\sqrt{6})^2$

(3) $(-\sqrt{1.2})^2+\sqrt{(-0.2)^2}$

답 (1) -0.2　(2) -3　(3) 1.4

16쪽

문제 5 다음 값을 구하여라.

(1) $(\sqrt{11})^2$　(2) $(-\sqrt{7})^2$

(3) $(-\sqrt{3.5})^2$　(4) $\left(\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right)^2$

6 한편 $3^2=9$, $(-3)^2=9$이므로

$$\sqrt{3^2}=\sqrt{9}=3,\ \sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=3$$

이다.

일반적으로 a가 양수일 때, $(-a)^2=a^2$이므로

$$\sqrt{a^2}=a,\ \sqrt{(-a)^2}=a$$

이다.

보기 $\sqrt{5^2}=5$, $\sqrt{(-7)^2}=7$이다.

문제 6 다음 값을 구하여라.

(1) $\sqrt{8^2}$　(2) $\sqrt{(-5)^2}$

(3) $-\sqrt{0.25^2}$　(4) $-\sqrt{\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2}$

이상을 정리하면 다음과 같다.

제곱근의 성질

$a>0$일 때,

❶ $(\sqrt{a})^2=a$, $(-\sqrt{a})^2=a$　❷ $\sqrt{a^2}=a$, $\sqrt{(-a)^2}=a$

7 함께 풀기 2

다음을 간단히 하여라.

(1) $(-\sqrt{5})^2+\sqrt{(-6)^2}$　(2) $\sqrt{121}\times\sqrt{64}$

풀이» (1) $(-\sqrt{5})^2+\sqrt{(-6)^2}=5+6=11$

(2) $\sqrt{121}\times\sqrt{64}=11\times8=88$

답» (1) 11　(2) 88

문제 7 다음을 간단히 하여라.

(1) $(\sqrt{7})^2+(-\sqrt{3})^2$　(2) $(-\sqrt{1.3})^2\times(\sqrt{2})^2$

(3) $\sqrt{9^2}-\sqrt{(-12)^2}$　(4) $\sqrt{\dfrac{1}{4}}\div\sqrt{\dfrac{9}{4}}$

16 I. 실수와 그 계산

연구 자료

모든 수 a에 대하여 $\sqrt{a^2}=|a|$임을 다음과 같은 방법으로 설명할 수 있다.

(i) $a>0$일 때, $\sqrt{a^2}=a$, $|a|=a$이므로 $\sqrt{a^2}=|a|$

(ii) $a<0$일 때, $-a>0$, $a^2=(-a)^2$이므로 $\sqrt{a^2}=\sqrt{(-a)^2}=-a$

이때 $|a|=-a$이므로 $\sqrt{a^2}=|a|$

따라서 모든 수 a에 대하여 $\sqrt{a^2}=|a|$이다.

수준별 교수·학습 방법

제곱근의 성질을 이해하고 간단히 할 수 있다.

하 문자를 도입하여 설명하기보다는 생각 열기와 같이 수의 제곱근과 그 뜻을 말로 설명하면서 함께 구할 수 있도록 지도한다.

[문제 1] (1) 4의 제곱근은 무엇인가?

(2) 제곱하여 2가 되는 수는 무엇인가?

답 (1) ±2　(2) $\pm\sqrt{2}$

[문제 2] (1) $+\sqrt{3}$은 어떤 수인가?

(2) $+\sqrt{3}$을 제곱하면 어떤 수가 되는가?

답 (1) 3의 양의 제곱근　(2) 3

17쪽

3/3차시 제곱근의 크기는 어떻게 비교할까?

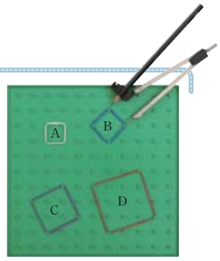
활동하기

준비물
기하 판, 고무줄, 컴퍼스

오른쪽 그림은 간격이 1인 기하 판 위에 고무줄을 이용하여 정사각형을 만든 것이다.

(1) 다음 빈칸에 알맞은 수를 써넣어 보자.

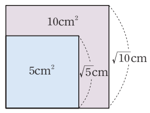
	A	B	C	D
정사각형의 넓이	1			
정사각형의 한 변의 길이	1			



(2) 컴퍼스를 이용하여 기하 판의 정사각형 A, B, C, D의 한 변의 길이를 비교하여 보자.

8 오른쪽 그림과 같이 넓이가 5cm^2, 10cm^2인 두 정사각형의 한 변의 길이는 각각 $\sqrt{5}\text{cm}$, $\sqrt{10}\text{cm}$이다.

정사각형은 넓이가 더 넓을수록 한 변의 길이도 더 길다. 따라서 $\sqrt{5}<\sqrt{10}$이다. 또한 정사각형의 변의 길이가 더 길수록 넓이가 더 넓다.



일반적으로 두 양수 a, b에 대하여 다음이 성립한다.

제곱근의 대소 관계
$a>0$, $b>0$일 때,
❶ $a<b$이면 $\sqrt{a}<\sqrt{b}$ ❷ $\sqrt{a}<\sqrt{b}$이면 $a<b$

보기 (1) $6<7$이므로 $\sqrt{6}<\sqrt{7}$이다.
(2) $\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$이므로 $\sqrt{\frac{1}{3}}<\sqrt{\frac{1}{2}}$이다.

9 **문제 8** 다음 두 수의 대소를 비교하여라.

▶ $a>0$, $b>0$일 때, $a<b$이면 $\sqrt{a}<\sqrt{b}$이고 $-\sqrt{a}>-\sqrt{b}$이다.

(1) $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ (2) $\sqrt{\frac{3}{2}}$, $\sqrt{\frac{4}{3}}$
(3) $-\sqrt{7}$, $-\sqrt{6}$ (4) $-\sqrt{\frac{1}{4}}$, $-\sqrt{\frac{2}{5}}$

1. 제곱근과 실수 17

제곱근의 크기는 어떻게 비교할까?

활동하기 넓이가 큰 정사각형의 한 변의 길이가 넓이가 작은 정사각형의 한 변의 길이보다 길다는 사실을 컴퍼스를 이용하여 확인하게 하는 활동하기이다.

(1) 빈칸에 알맞은 수를 써넣으면 다음과 같다.

	A	B	C	D
정사각형의 넓이	1	2	5	10
정사각형의 한 변의 길이	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{10}$

(2) 정사각형 A, B, C, D의 한 변의 길이를 비교하면 $1<\sqrt{2}<\sqrt{5}<\sqrt{10}$이다.

8 정사각형의 넓이를 통하여 유리수의 크기를 비교해 보고, 정사각형의 한 변의 길이로 나타내어지는 무리수의 크기를 비교해 볼 수 있게 한다.
즉, $a>0$, $b>0$일 때, $a<b$이면 $\sqrt{a}<\sqrt{b}$이다.
또한 $\sqrt{a}<\sqrt{b}$이면 $a<b$임을 직관적으로 이해할 수 있도록 설명한다.

9 제곱근으로 나타낸 두 수의 크기를 비교할 때에는 근호 안의 두 수를 비교할 수 있도록 지도한다.
유리수의 대소 비교와 같이 '두 수가 모두 음수이면 절댓값이 큰 수가 작은 수이다.' 라는 내용을 상기시켜 음수의 제곱근의 대소 비교를 할 때에도 마찬가지로 적용할 수 있도록 지도한다.

3/3차시 차시별 학습 지도 방법 [교과 교실]

활동하기	기하 판과 컴퍼스를 이용하여 직접 정사각형의 한 변의 길이를 재어 보게 함으로써 학생들의 흥미를 이끌어낸다.
본문 함께 풀기 3	활동하기를 바탕으로 제곱근의 대소 비교를 이해할 수 있도록 내용을 설명한다.
문제 8, 9	문제를 푼 후 풀이 과정을 설명하도록 하고, 다른 학생의 풀이 방법을 경청하도록 한다.
즐거운 활동하기	1부터 12까지의 정수를 제곱근을 이용하여 일과표를 나타내는 활동을 하고, 그 결과를 발표하여 친구들과 비교하면서 자신의 바람직한 일상생활을 함께 이야기해 보는 시간을 통해 인성을 키울 수 있도록 한다.

문제 8 제곱근의 대소 비교하기

풀이 (1) $3<5$이므로 $\sqrt{3}<\sqrt{5}$이다.
(2) $\frac{3}{2}>\frac{4}{3}$이므로 $\sqrt{\frac{3}{2}}>\sqrt{\frac{4}{3}}$이다.
(3) $7>6$이므로 $\sqrt{7}>\sqrt{6}$이고, $-\sqrt{7}<-\sqrt{6}$이다.
(4) $\frac{1}{4}<\frac{2}{5}$이므로 $\sqrt{\frac{1}{4}}<\sqrt{\frac{2}{5}}$이고, $-\sqrt{\frac{1}{4}}>-\sqrt{\frac{2}{5}}$이다.

10 유리수와 제곱근의 대소 비교는 유리수를 $\sqrt{(\text{유리수})^2}$의 꼴로 바꾼 다음 근호 안의 수의 대소를 비교할 수 있도록 지도한다.

문제 9 제곱근의 대소 비교하기

풀이 (1) $3^2=9$, $(\sqrt{8})^2=8$에서 $9>8$이므로 $\sqrt{9}>\sqrt{8}$이다.
따라서 $3>\sqrt{8}$이다.
(2) $4^2=16$, $(\sqrt{17})^2=17$에서 $16<17$이므로 $\sqrt{16}<\sqrt{17}$이다.
따라서 $4<\sqrt{17}$이다.
(3) $3^2=9$이므로 $\sqrt{10}>\sqrt{9}$이고, $-\sqrt{10}<-\sqrt{9}$이므로
$-\sqrt{10}<-3$이다.
(4) $1.2^2=1.44$이므로 $\sqrt{1.2}<\sqrt{1.44}$이고,
$-\sqrt{1.2}>-\sqrt{1.44}$이므로 $-\sqrt{1.2}>-1.2$이다.

참고 부호가 같을 때, 근호가 있는 수와 근호가 없는 수의 대소 비교는 근호가 없는 수를 제곱하여 근호 안에 넣은 후, 근호 안의 수끼리 비교할 수 있다.
문제 9의 (1)에서 $3=\sqrt{3^2}=9$이고, $9>8$이므로 $3>\sqrt{8}$이다.

즐거운 활동하기
제곱근으로 일과표 만들기

지도상의 유의점 주어진 일과표를 이용하여 문장을 완성시킨 후 조별로 나누어 활동 결과를 발표하게 하고, 친구들과 비교하게 한다. 이때 다양한 수 카드를 만들어서 제곱근의 성질과 그 계산에 흥미를 가질 수 있도록 지도한다.

준비물 일과표, 수 카드, 학습 준비물

풀이 일과표에서 완희는 오전 9시부터 12시까지 공부할 계획이므로 9와 12가 되는 수 카드를 찾으면 된다.

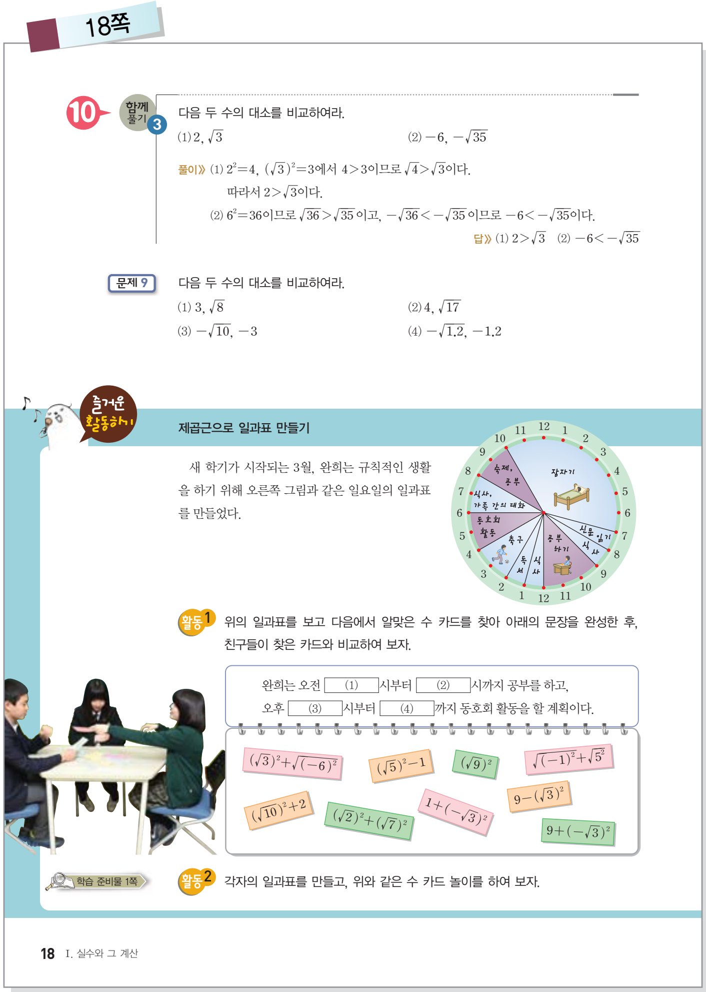
(1) 9: $(\sqrt{3})^2+\sqrt{(-6)^2}=3+6=9$
$(\sqrt{9})^2=9$
$(\sqrt{2})^2+(\sqrt{7})^2=2+7=9$

(2) 12: $9+(-\sqrt{3})^2=9+3=12$
$(\sqrt{10})^2+2=10+2=12$

또 오후 4시부터 6시까지 동호회 활동을 할 계획이므로 4와 6이 되는 수 카드를 찾으면 된다.

(3) 4: $(\sqrt{5})^2-1=5-1=4$
$1+(-\sqrt{3})^2=1+3=4$

(4) 6: $\sqrt{(-1)^2}+\sqrt{5^2}=1+5=6$
$9-(\sqrt{3})^2=9-3=6$


18쪽

10 함께 풀기 3 다음 두 수의 대소를 비교하여라.
(1) 2, $\sqrt{3}$ (2) -6, $-\sqrt{35}$

풀이» (1) $2^2=4$, $(\sqrt{3})^2=3$에서 $4>3$이므로 $\sqrt{4}>\sqrt{3}$이다.
따라서 $2>\sqrt{3}$이다.
(2) $6^2=36$이므로 $\sqrt{36}>\sqrt{35}$이고, $-\sqrt{36}<-\sqrt{35}$이므로 $-6<-\sqrt{35}$이다.
답» (1) $2>\sqrt{3}$ (2) $-6<-\sqrt{35}$

문제 9 다음 두 수의 대소를 비교하여라.
(1) 3, $\sqrt{8}$ (2) 4, $\sqrt{17}$
(3) $-\sqrt{10}$, -3 (4) $-\sqrt{1.2}$, -1.2

즐거운 활동하기
제곱근으로 일과표 만들기

새 학기가 시작되는 3월, 완희는 규칙적인 생활을 하기 위해 오른쪽 그림과 같은 일요일의 일과표를 만들었다.

활동 1 위의 일과표를 보고 다음에서 알맞은 수 카드를 찾아 아래의 문장을 완성한 후, 친구들이 찾은 카드와 비교하여 보자.

완희는 오전 (1) 시부터 (2) 시까지 공부를 하고,
오후 (3) 시부터 (4) 까지 동호회 활동을 할 계획이다.

$(\sqrt{3})^2+\sqrt{(-6)^2}$ $(\sqrt{5})^2-1$ $(\sqrt{9})^2$ $\sqrt{(-1)^2}+\sqrt{5^2}$
$(\sqrt{10})^2+2$ $(\sqrt{2})^2+(\sqrt{7})^2$ $1+(-\sqrt{3})^2$ $9-(\sqrt{3})^2$ $9+(-\sqrt{3})^2$

학습 준비물 1쪽
활동 2 각자의 일과표를 만들고, 위와 같은 수 카드 놀이를 하여 보자.

18 I. 실수와 그 계산

창의 · 인성 수 카드를 이용한 놀이 경험을 통해 자신의 수학적 능력을 깨달을 수 있게 한다.

수준별 교수·학습 방법

제곱근의 대소를 비교할 수 있다.

하 간단한 수로 표현되는 제곱근을 이용하여 대소 비교를 하게 한다.
[문제] 다음 두 수의 대소를 비교하여라.
(1) 2, $\sqrt{6}$
(2) $-\sqrt{5}$, $-\sqrt{6}$
답 (1) $2<\sqrt{6}$ (2) $-\sqrt{5}>-\sqrt{6}$

중 제곱근의 대소 관계를 충분히 이해한 학생들에게 제곱근의 대소를 비교하는 문제를 만들게 하고, 다른 학생이 해결하도록 하여 상호 협력하는 학습이 될 수 있도록 지도한다.

19쪽

확인하기

1 다음 수의 제곱근을 구하여라.

(1) 100 (2) 37 (3) $\frac{3}{10}$

(4) $\frac{16}{25}$ (5) 0.15 (6) 0.09

2 다음 값을 구하여라.

(1) 3의 제곱근 (2) 제곱근 5

(3) 7의 양의 제곱근 (4) 11의 음의 제곱근

3 다음 수를 근호를 사용하지 않고 나타내어라.

(1) $\sqrt{196}$ (2) $\sqrt{81}$

(3) $\sqrt{\frac{81}{16}}$ (4) $\sqrt{0.64}$

4 다음을 간단히 하여라.

(1) $(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{5})^2$ (2) $\sqrt{6^2}-\sqrt{(-4)^2}$

(3) $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2\times\sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2}$ (4) $\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2}\div\sqrt{(-3)^2}$

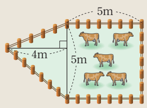
5 다음 두 수의 대소를 비교하여라.

(1) $2,\ \sqrt{5}$ (2) $\sqrt{\frac{2}{3}},\ \sqrt{\frac{3}{4}}$

(3) $-\sqrt{8},\ -3$ (4) $-0.4,\ -\sqrt{0.2}$

수학적 과정 | 의사소통 | 추론 | 문제 해결

6 오른쪽 그림과 같이 삼각형과 정사각형을 붙여 놓은 모양의 우리가 있다. 이 우리와 넓이가 같은 정사각형 모양의 우리를 만들 때, 새로 만들어지는 우리의 한 변의 길이를 구하여라.



1. 제곱근과 실수 19

확인하기

1 평가의 주안점 어떤 양수의 제곱근을 구할 수 있다.

풀이 (1) ±10 (2) $\pm\sqrt{37}$

(3) $\pm\sqrt{\frac{3}{10}}$ (4) $\pm\frac{4}{5}$

(5) $\pm\sqrt{0.15}$ (6) ±0.3

2 평가의 주안점 양수 a에 대하여 a의 제곱근과 제곱근 a를 구별할 수 있다.

풀이 (1) $\pm\sqrt{3}$ (2) $\sqrt{5}$

(3) $\sqrt{7}$ (4) $-\sqrt{11}$

3 평가의 주안점 근호 안의 수가 유리수의 제곱이 되는 수를 근호를 사용하지 않고 나타낼 수 있다.

풀이 (1) 14 (2) 9

(3) $\frac{9}{4}$ (4) 0.8

4 평가의 주안점 제곱근의 성질을 이용하여 제곱근의 계산을 할 수 있다.

풀이 (1) $(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{5})^2=2+5=7$

(2) $\sqrt{6^2}-\sqrt{(-4)^2}=6-4=2$

(3) $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2\times\sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$

(4) $\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2}\div\sqrt{(-3)^2}=\frac{3}{4}\div3=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$

5 평가의 주안점 제곱근의 대소를 비교할 수 있다.

풀이 (1) $2^2=4$, $(\sqrt{5})^2=5$에서 $4<5$이므로 $\sqrt{4}<\sqrt{5}$이다.
따라서 $2<\sqrt{5}$이다.

(2) $\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$이므로 $\sqrt{\frac{2}{3}}<\sqrt{\frac{3}{4}}$이다.

(3) $3^2=9$이므로 $\sqrt{8}<\sqrt{9}$이고,
$-\sqrt{8}>-\sqrt{9}$이므로
$-\sqrt{8}>-3$이다.

(4) $0.4^2=0.16$이므로 $\sqrt{0.16}<\sqrt{0.2}$이고,
$-\sqrt{0.16}>-\sqrt{0.2}$이므로
$-0.4>-\sqrt{0.2}$이다.

6 평가의 주안점 정사각형의 넓이와 한 변의 길이의 관계를 이용하여 제곱과 제곱근의 관계를 이해할 수 있다.

풀이 전체 우리의 넓이는 삼각형 모양과 정사각형 모양의 넓이의 합과 같으므로

$\frac{1}{2}\times5\times4+5^2=35(\mathrm{m}^2)$

따라서 새로 만들어지는 우리의 한 변의 길이는 $\sqrt{35}$ m이다.

보충 문제

1. $a>0$일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 찾아라.

(1) $\sqrt{a^2}=a$ (2) $-\sqrt{a^2}=-a$

(3) $\sqrt{-a^2}=-a$ (4) $-\sqrt{(-a)^2}=-a$

2. $0<x<1$일 때, 다음을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt{(x+1)^2}$ (2) $\sqrt{(1-x)^2}$

답 1. (1), (2), (4) 2. (1) $x+1$ (2) $1-x$

I

02 무리수와 실수

지도 목표

1. 무리수의 개념을 이해할 수 있게 한다.
2. 무리수를 수직선 위에 나타낼 수 있게 한다.
3. 실수의 대소 관계를 비교할 수 있게 한다.

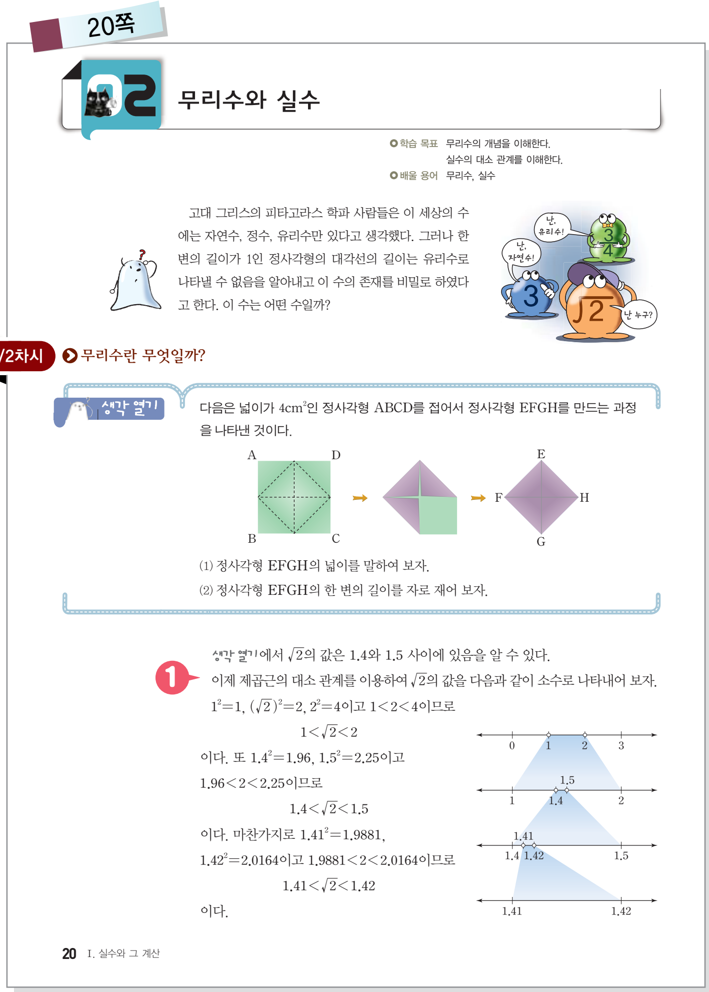
지도상의 유의점

1. 무리수는 $\sqrt{2}=1.4142\cdots$와 같이 순환하지 않는 무한소수가 됨을 알게 한다.
2. 순환하지 않는 무한소수를 무리수라고 하며, 이는 분모, 분자가 정수인 분수 꼴로 나타낼 수 없음을 예를 통하여 이해하게 한다.
3. 무리수도 수직선 위의 점에 대응시킬 수 있으며, 서로 다른 두 무리수 사이에도 무수히 많은 무리수가 있음을 이해하게 한다.
4. 실수의 대소 관계는 부등식의 성질을 이용하여 이해하도록 지도한다.

1/2차시 차시별 학습 지도 방법 [교과 교실]

생각 열기	학생들이 직접 $\sqrt{2}$의 길이를 재어 보는 활동을 하면서, 그 값의 범위를 말하게 하여 무리수에 대한 흥미를 유발할 수 있도록 한다. 하 수준 학생에게는 계산기를 이용하여 지도할 수 있다.
본문	계산기를 준비하여 본문과 같이 무리수 $\sqrt{2}$의 값의 범위를 좁혀가는 활동을 할 수 있도록 한다.
문제 1, 2, 3	문제를 스스로 해결할 수 있도록 하며 친구들과 그 결과를 비교해 볼 수 있도록 한다.
생각 열기	조각 퍼즐을 이용하여 무리수 $\sqrt{2}$의 길이를 수직선 위에 나타낼 수 있음을 이해하게 한다.
본문	생각 열기를 이용하여 수직선에서 무리수에 대응하는 점을 설명하고, 유리수와 같이 수직선에서 대응하는 점을 설명한다.
함께 풀기 1	정사각형의 대각선의 길이를 이용하여 수직선 위에 대응하는 점을 찾을 수 있도록 수직선 위에 정사각형을 그려 가면서 그 과정을 설명한다.
문제 4, 5, 6	학생들이 직접 수직선에서 대응하는 수를 찾거나 수직선 위에 정사각형을 그려 대응하는 수를 찾을 수 있도록 지도한다.

20쪽


02 무리수와 실수

학습 목표 무리수의 개념을 이해한다.
실수의 대소 관계를 이해한다.
배울 용어 무리수, 실수

고대 그리스의 피타고라스 학파 사람들은 이 세상의 수에는 자연수, 정수, 유리수만 있다고 생각했다. 그러나 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이는 유리수로 나타낼 수 없음을 알아내고 이 수의 존재를 비밀로 하였다고 한다. 이 수는 어떤 수일까?

1/2차시 무리수란 무엇일까?

생각 열기 다음은 넓이가 4cm^2인 정사각형 ABCD를 접어서 정사각형 EFGH를 만드는 과정을 나타낸 것이다.

(1) 정사각형 EFGH의 넓이를 말하여 보자.
(2) 정사각형 EFGH의 한 변의 길이를 자로 재어 보자.

1 생각 열기에서 $\sqrt{2}$의 값은 1.4와 1.5 사이에 있음을 알 수 있다.
이제 제곱근의 대소 관계를 이용하여 $\sqrt{2}$의 값을 다음과 같이 소수로 나타내어 보자.
$1^2=1$, $(\sqrt{2})^2=2$, $2^2=4$이고 $1<2<4$이므로

$$1<\sqrt{2}<2$$

이다. 또 $1.4^2=1.96$, $1.5^2=2.25$이고
$1.96<2<2.25$이므로

$$1.4<\sqrt{2}<1.5$$

이다. 마찬가지로 $1.41^2=1.9881$,
$1.42^2=2.0164$이고 $1.9881<2<2.0164$이므로

$$1.41<\sqrt{2}<1.42$$

이다.

20 I. 실수와 그 계산

무리수란 무엇일까?

생각 열기 넓이가 2cm^2인 정사각형 EFGH의 한 변의 길이 $\sqrt{2}\text{cm}$를 자로 직접 재어 보는 활동을 통하여 그 값이 어떤 범위에 있는지 알게 하려는 생각 열기이다.

(1) 정사각형 EFGH의 넓이는 2cm^2이다.
(2) 정사각형 EFGH의 한 변의 길이는 약 1.4cm이다.

참고 한 변의 길이가 2cm인 정사각형의 넓이는 4cm^2이고, 네 꼭짓점이 정사각형의 중심에 모이도록 접으면 처음의 정사각형은 합동인 8개의 직각삼각형으로 나누어진다.

1 제곱근의 대소 관계를 이용하여 무리수 $\sqrt{2}$의 값을 다음과 같이 확인해 볼 수 있게 한다.
$1^2=1$, $(\sqrt{2})^2=2$, $2^2=4$이고, $1<2<4$이므로 $1<\sqrt{2}<2$이다. 따라서 $\sqrt{2}=1.\cdots$이다.
이와 같은 방법을 이용하여 무리수 $\sqrt{2}$를 소수로 나타낼 수 있음을 알게 한다.

21쪽

앞과 같은 방법으로 하면

$$1.414<\sqrt{2}<1.415$$
$$1.4142<\sqrt{2}<1.4143$$
$$\cdots\cdots$$

2 이다. 이와 같은 계산을 되풀이하여 $\sqrt{2}$를 소수로 나타내면

$$\sqrt{2}=1.414213562373\cdots$$

과 같이 순환하지 않는 무한소수임이 알려져 있다.

또 $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, π를 소수로 나타내면 다음과 같이 순환하지 않는 무한소수가 됨이 알려져 있다.

$$\sqrt{3}=1.732050807568\cdots$$
$$\sqrt{5}=2.236067977499\cdots$$
$$\pi=3.141592653589\cdots$$

유한소수나 순환소수로 나타낼 수 있는 수는 유리수인데, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, π 등은 유한소수나 순환소수로 나타낼 수 없으므로 유리수가 아니다.

이와 같이 어떤 수를 소수로 나타내었을 때, 순환하지 않는 무한소수가 되는 수를 **무리수**라고 한다.

$$\text{소수}\begin{cases}\text{유한소수} \cdots\cdots & \text{유리수}\\ \text{무한소수}\begin{cases}\text{순환소수} \cdots\cdots & \text{유리수}\\ \text{순환하지 않는 무한소수} \cdots\cdots & \text{무리수}\end{cases}\end{cases}$$

한편 $-\sqrt{2}=-1.414213562373\cdots$이므로 $-\sqrt{2}$는 무리수이다. 즉, 무리수에도 양수와 음수가 있다.

3 근호를 사용하여 나타낸 수 중에는 무리수가 아닌 수도 있다. 예를 들어

$$\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2,\ -\sqrt{\frac{1}{9}}=-\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=-\frac{1}{3}$$

과 같이 근호 안의 수가 어떤 유리수의 제곱이면 그 수는 유리수이다.

보기 (1) $\sqrt{16}=\sqrt{4^2}=4$이므로 $\sqrt{16}$은 유리수이다.
(2) 7이 어떤 유리수의 제곱이 아니므로 $\sqrt{7}$은 무리수이다.

1. 제곱근과 실수 **21**

22쪽

문제 1 다음 수 중에서 무리수를 모두 찾아라.

$$\sqrt{9}\qquad \sqrt{13}\qquad \sqrt{\frac{4}{25}}\qquad \sqrt{0.5}$$

4 $\sqrt{2}+1$을 소수로 나타내면

$$\sqrt{2}+1=1.414213562373\cdots+1=2.414213562373\cdots$$

과 같이 순환하지 않는 무한소수이므로 $\sqrt{2}+1$은 무리수이다. 마찬가지로 $\sqrt{2}-1$도 무리수이다.

문제 2 다음 수 중에서 무리수를 모두 찾아라.

(1) $\sqrt{3}-1$ (2) $\sqrt{4}+3$
(3) $\sqrt{5}+1$ (4) $\sqrt{0.9}+1$

5 유리수와 무리수를 통틀어 **실수**라고 한다. 앞으로 수라고 할 때에는 실수를 말한다.

실수를 분류하면 다음과 같다.

실수의 분류

$$\text{실수}\begin{cases}\text{유리수}\begin{cases}\text{정수}\begin{cases}\text{양의 정수(자연수)}\\ 0\\ \text{음의 정수}\end{cases}\\ \text{정수가 아닌 유리수}\end{cases}\\ \text{무리수}\end{cases}$$

문제 3 다음 수를 보고 물음에 답하여라.

$$3\qquad -\sqrt{10}\qquad \sqrt{\frac{9}{4}}\qquad -0.3\qquad \sqrt{1.8}\qquad \frac{5}{3}\qquad \sqrt{(-6)^2}$$

(1) 유리수를 모두 찾아라.
(2) 무리수를 모두 찾아라.
(3) 실수를 모두 찾아라.

22 I. 실수와 그 계산

---

2 정수가 아닌 모든 유리수를 소수로 나타낼 때 유한소수 또는 순환소수가 되므로 순환하지 않는 무한소수로 나타나는 $\sqrt{2}$는 유리수가 아니며, $\sqrt{2}$를 소수로 나타낼 때 순환하지 않는 무한소수임이 알려져 있음을 알게 한다.
$\sqrt{2}$가 순환하지 않는 무한소수이므로 $-\sqrt{2}$도 순환하지 않는 무한소수이다. 따라서 무리수에도 양수와 음수가 있음을 알게 한다.

3 $\sqrt{9}=\sqrt{3^2}=3$과 같이 근호를 사용하여 나타낸 수가 모두 무리수인 것은 아님을 알게 한다.

문제 1 제곱근 중에서 무리수 찾기

풀이 $\sqrt{9}=3$ (유리수), $\sqrt{13}$ (무리수),
$\sqrt{\frac{4}{25}}=\frac{2}{5}$ (유리수), $\sqrt{0.5}$ (무리수)
따라서 무리수는 $\sqrt{13}$, $\sqrt{0.5}$이다.

4 무리수에 유리수를 더하거나 빼어도 순환하지 않는 무한소수가 되는 무리수임을 알게 한다.

문제 2 무리수 찾기

풀이 (1) $\sqrt{3}-1=1.732\cdots-1=0.732\cdots$는 무리수이다.
(2) $\sqrt{4}+3=2+3=5$이므로 유리수이다.
(3) $\sqrt{5}+1=2.236\cdots+1=3.236\cdots$은 무리수이다.
(4) $\sqrt{0.9}+1$은 무리수이다.
따라서 무리수는 (1), (3), (4)이다.

5 지금까지 일반적으로 수라고 하면 유리수를 의미하였으나 유리수와 무리수를 통틀어 나타낸 실수라는 수 체계를 이해함으로써 앞으로 수라고 하면 실수를 의미하게 됨을 알게 한다.

문제 3 무리수 찾기

풀이 근호가 있는 수를 근호가 없는 수로 나타내면
$\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$, $\sqrt{(-6)^2}=6$
(1) 유리수는 3, $\sqrt{\frac{9}{4}}$, -0.3, $\frac{5}{3}$, $\sqrt{(-6)^2}$이다.
(2) 무리수는 $-\sqrt{10}$, $\sqrt{1.8}$이다.
(3) 주어진 수는 모두 실수이다.

무리수를 수직선 위에 나타낼 수 있을까?

생각 열기 조각 퍼즐을 이용하여 넓이가 2인 정사각형의 한 변의 길이 $\sqrt{2}$를 수직선 위에 나타내어 보는 생각 열기이다.

(1) 정사각형 ABCD의 넓이는 2이다.

(2) 정사각형 ABCD의 한 변의 길이는 $\sqrt{2}$이다.

6 넓이가 1인 정사각형의 대각선의 길이가 $\sqrt{2}$인 것을 이용하여 무리수 $\sqrt{2}$가 수직선 위의 한 점에 대응한다는 것을 알게 한다.

수직선을 통해 유리수의 조밀성을 직관적으로 이해하게 하고 무리수를 수직선 위에 나타낼 수 있다는 것을 $\sqrt{2}$를 통해 확인해 봄으로써 수직선 위에는 유리수와 무리수에 대응하는 점들로 이루어져 있음을 이해하도록 지도한다.

문제 4 무리수를 수직선 위에 나타내기

풀이 넓이가 5인 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{5}$이므로 점 A에 대응하는 수는 원점에서 오른쪽으로 $\sqrt{5}$만큼 떨어진 $\sqrt{5}$이고, 점 B에 대응하는 수는 원점에서 왼쪽으로 $\sqrt{5}$만큼 떨어진 $-\sqrt{5}$이다.

읽기 자료

메소포타미아의 $\sqrt{2}$

오른쪽 둥그런 모양의 점토판은 기원전 1800년에서 1600년 사이에 만든 것으로 추정되며 점토판에는 정사각형과 대각선이 그려져 있고, 3개의 숫자가 적혀져 있다.

이 유물은 고대 바빌로니아 사람들이 $\sqrt{2}$를 소수 다섯째 자리까지 정확히 구하고 있었음을 보여준다.

[바빌로니아 점토판]

정사각형의 한 변에 30이라고 적혀져 있고, 수평으로 그어진 대각선에 1 24 51 10이, 그 아래 42 25 35가 적혀 있다.

이것을 우리가 쓰는 것으로 바꾸어 보면

$a=30$,

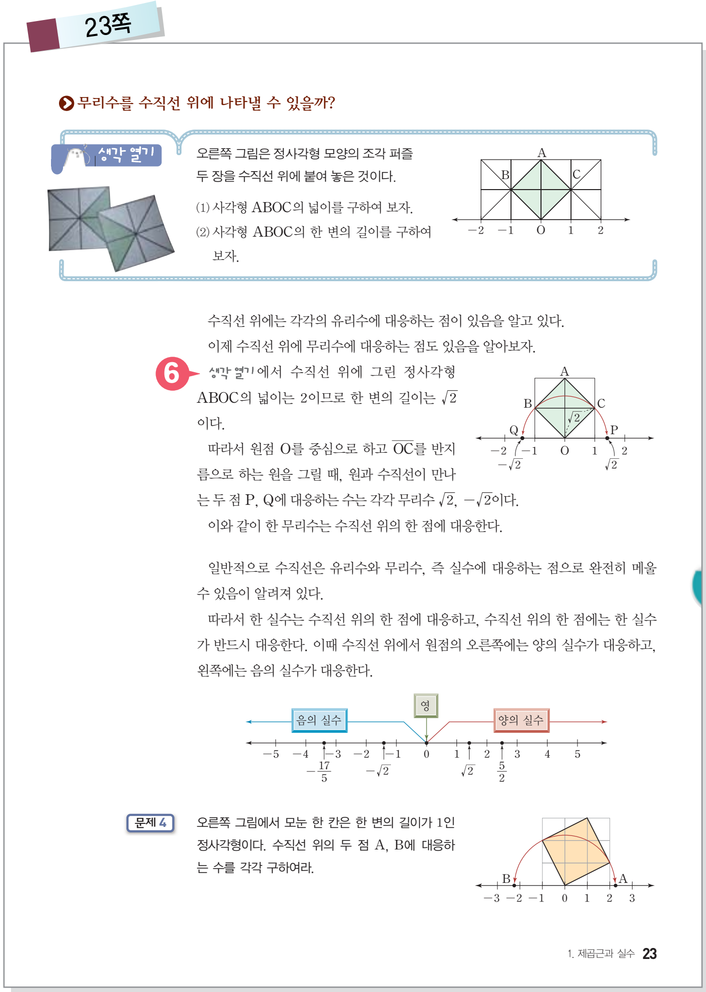
$b=1;24, 51, 10$

$=1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}$

$=42.42638889$

이 값을 30으로 나누면 그 결과는 1.414212963이다.

정사각형의 한 변의 길이를 1이라 하면 대각선의 길이는 1.414212963인 것이다.


23쪽

무리수를 수직선 위에 나타낼 수 있을까?

생각 열기 오른쪽 그림은 정사각형 모양의 조각 퍼즐 두 장을 수직선 위에 붙여 놓은 것이다.

(1) 사각형 ABOC의 넓이를 구하여 보자.

(2) 사각형 ABOC의 한 변의 길이를 구하여 보자.

수직선 위에는 각각의 유리수에 대응하는 점이 있음을 알고 있다. 이제 수직선 위에 무리수에 대응하는 점도 있음을 알아보자.

6 생각 열기에서 수직선 위에 그린 정사각형 ABOC의 넓이는 2이므로 한 변의 길이는 $\sqrt{2}$이다.

따라서 원점 O를 중심으로 하고 $\overline{OC}$를 반지름으로 하는 원을 그릴 때, 원과 수직선이 만나는 두 점 P, Q에 대응하는 수는 각각 무리수 $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$이다.

이와 같이 한 무리수는 수직선 위의 한 점에 대응한다.

일반적으로 수직선은 유리수와 무리수, 즉 실수에 대응하는 점으로 완전히 메울 수 있음이 알려져 있다.

따라서 한 실수는 수직선 위의 한 점에 대응하고, 수직선 위의 한 점에는 한 실수가 반드시 대응한다. 이때 수직선 위에서 원점의 오른쪽에는 양의 실수가 대응하고, 왼쪽에는 음의 실수가 대응한다.

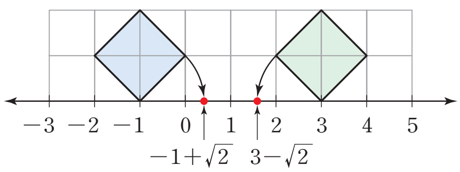
음의 실수 영 양의 실수

문제 4 오른쪽 그림에서 모눈 한 칸은 한 변의 길이가 1인 정사각형이다. 수직선 위의 두 점 A, B에 대응하는 수를 각각 구하여라.

1. 제곱근과 실수 23

문제 5 무리수를 수직선 위에 나타내기

풀이 넓이가 2인 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{2}$이다. 이때 $-1+\sqrt{2}$는 수직선 위의 -1에서 오른쪽으로 $\sqrt{2}$만큼 떨어져 있는 점이고, $3-\sqrt{2}$는 수직선 위의 3에서 왼쪽으로 $\sqrt{2}$만큼 떨어져 있는 점이다.



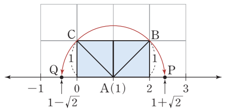
문제 6 수직선 위에 나타내어진 무리수 구하기

풀이 넓이가 5인 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{5}$이다. 이때 점 A에 대응하는 수는 -1에서 왼쪽으로 $\sqrt{5}$만큼 있으므로 $-1-\sqrt{5}$이고, 점 B에 대응하는 수는 -1에서 오른쪽으로 $\sqrt{5}$만큼 있으므로 $-1+\sqrt{5}$이다.

24쪽

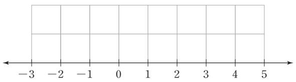
함께 풀기 1 수직선 위에 $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$에 대응하는 점을 각각 나타내어라.

풀이》 오른쪽 그림에서 수직선 위의 점 A의 좌표는 1이고, $\overline{AB}=\overline{AC}=\sqrt{2}$이므로 점 A를 중심으로 원을 그렸을 때 수직선과 만나는 두 점 P, Q는 각각 $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$를 나타낸다.

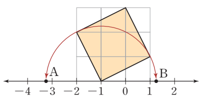


답》 풀이 참조

문제 5 다음 수직선 위에 $-1+\sqrt{2}$, $3-\sqrt{2}$에 대응하는 점을 각각 나타내어라.

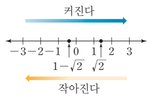


문제 6 오른쪽 그림에서 모눈 한 칸은 한 변의 길이가 1인 정사각형이다. 수직선 위의 두 점 A, B에 대응하는 수를 각각 구하여라.



2/2차시 실수의 크기를 비교할 수 있을까?

모든 실수는 수직선 위의 점에 대응하므로 실수의 대소 관계도 유리수와 마찬가지로 수직선 위의 오른쪽에 있는 수가 왼쪽에 있는 수보다 크다.



7 한편 유리수의 경우와 마찬가지로 실수에서도 부등식의 양변에 같은 수를 더하거나 빼어도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

따라서 두 실수 a, b에 대하여

$a-b>0$이면 $a-b+b>0+b$이므로 $a>b$

$a-b<0$이면 $a-b+b<0+b$이므로 $a<b$

이다. 일반적으로 두 실수 a, b의 대소 관계는 $a-b$의 부호를 조사하면 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

24 I. 실수와 그 계산

25쪽

실수의 대소 관계

두 실수 a, b에 대하여　$a-b>0$이면 $a>b$

$a-b=0$이면 $a=b$

$a-b<0$이면 $a<b$

함께 풀기 2 다음 두 실수의 대소를 비교하여라.

(1) $\sqrt{10}-1$, 2　　(2) $\sqrt{5}+1$, 4

풀이》 (1) $(\sqrt{10}-1)-2=\sqrt{10}-1-2=\sqrt{10}-3$

이때 $\sqrt{10}-\sqrt{9}>0$이므로 $\sqrt{10}-1>2$이다.

(2) $(\sqrt{5}+1)-4=\sqrt{5}-3$

이때 $\sqrt{5}-\sqrt{9}<0$이므로 $\sqrt{5}+1<4$이다.

답》 (1) $\sqrt{10}-1>2$　(2) $\sqrt{5}+1<4$

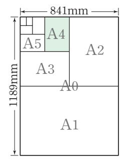
문제 7 다음 두 실수의 대소를 비교하여라.

(1) $\sqrt{3}+2$, 4　　(2) $\sqrt{8}-1$, 1

가까운 수학 복사 용지와 $\sqrt{2}$

복사 용지에서 가장 많이 사용하고 있는 A4 용지의 규격은 210mm×297mm이다.

간단하게 200mm×300mm로 정하면 편했을 텐데, 왜 이렇게 복잡한 값이 쓰였을까? 그 이유는 큰 종이를 잘라서 작은 종이를 만드는 과정에서 반으로 잘라도 가로의 길이와 세로의 길이의 비율이 유지되게 함으로써 종이의 낭비를 최대한 줄일 수 있기 때문이다. 이때 제안된 A 열 용지 규격의 치수를 A0부터 A5까지 mm 단위로 나타내면 다음과 같다. 또 A 열 용지 규격에서 $\frac{(\text{긴 변의 길이})}{(\text{짧은 변의 길이})}$의 값은 무리수 $\sqrt{2}$에 가까운 수이다.



규격	A0	A1	A2	A3	A4	A5
짧은 변의 길이	841	594	420	297	210	148
긴 변의 길이	1189	841	594	420	297	210
$\frac{(\text{긴 변의 길이})}{(\text{짧은 변의 길이})}$	1.41379	1.41582	1.41428	1.41414	1.41428	1.41891

1. 제곱근과 실수 25

보충 문제

다음 설명 중 옳지 않은 것을 찾아라.

(1) 두 정수 1과 2 사이에는 무수히 많은 무리수가 있다.

(2) 두 무리수 $\sqrt{2}$와 $\sqrt{3}$ 사이에는 무수히 많은 무리수가 있다.

(3) 두 정수 1과 1000 사이에는 무수히 많은 정수가 있다.

(4) 서로 다른 두 무리수 사이에는 무수히 많은 유리수가 있다.

답 (3)

수준별 교수·학습 방법

무리수를 수직선 위에 나타낼 수 있다.

하 정사각형의 넓이와 한 변의 길이 사이의 관계를 이용하여 무리수 $\sqrt{2}$를 수직선 위에 나타내고, 수직선 위에 나타낸 점에 대응하는 수를 말할 수 있도록 지도한다.

중 넓이가 2, 5, 10인 정사각형의 한 변의 길이를 수직선 위에 나타내고 친구들에게 설명해 보도록 지도한다.
(교과서 30쪽의 문제 만들기 참조)

2/2차시 차시별 학습 지도 방법

본문, 함께 풀기 2	부등식의 성질을 간단히 설명하고, 이를 이용하여 실수의 대소를 비교할 수 있는 발문을 하도록 한다.
문제 7	학생이 나와서 문제를 풀게 한 후, 자신의 풀이를 설명할 수 있도록 한다.
가까운 수학	$\sqrt{2}$가 복사 용지를 제작할 때 쓰이는 것처럼 무리수가 일상생활에서 유용하게 쓰이고 있음을 알게 하고, 이를 통하여 수학의 가치와 유용성을 깨닫게 한다.

실수의 대소를 비교할 수 있을까?

7 실수의 대소 관계는 부등식의 성질을 이용하여 비교하게 한다.

$a-b>0$이면 $a-b+b>0+b$이므로 $a>b$이다.

이와 같이 두 실수 a, b의 대소 관계는 $a-b$의 부호를 조사하여 나타낼 수 있음을 설명한다.

학생의 수학 이해하기

함께 풀기 (1)에서 $\sqrt{10}-1$, 2의 대소 비교는
$\sqrt{10}-1=3.\cdots-1=2.\cdots$이고, $2.\cdots>2$이므로
$\sqrt{10}-1>2$이다.

문제 7 실수의 대소 비교하기

풀이 (1) $(\sqrt{3}+2)-4=\sqrt{3}-2=\sqrt{3}-\sqrt{4}<0$이므로
$\sqrt{3}+2<4$
(2) $(\sqrt{8}-1)-1=\sqrt{8}-2=\sqrt{8}-\sqrt{4}>0$이므로 $\sqrt{8}-1>1$

가까운 수학
복사 용지와 $\sqrt{2}$

A 열 용지는 종이를 절반으로 자르는 과정에서 낭비를 최소로 하기 위해 잘라진 종이들이 모두 서로 닮은꼴이 되도록 만든 용지이다. 따라서 A 열 용지는 접기 전과 접은 후의 모양은 서로 닮은 모양이다. A4 용지에서 짧은 변의 길이와 긴 변의 길이의 비를 $1:x$라 하면 반으로 접은 후의 짧은 변의 길이와 긴 변의 길이의 비는 $\frac{x}{2}:1$이므로

$1:x=\frac{x}{2}:1$, $x^2=2$

따라서 $x=\sqrt{2}$이다.

수준별 교수·학습 방법

실수의 대소 관계를 비교할 수 있다.

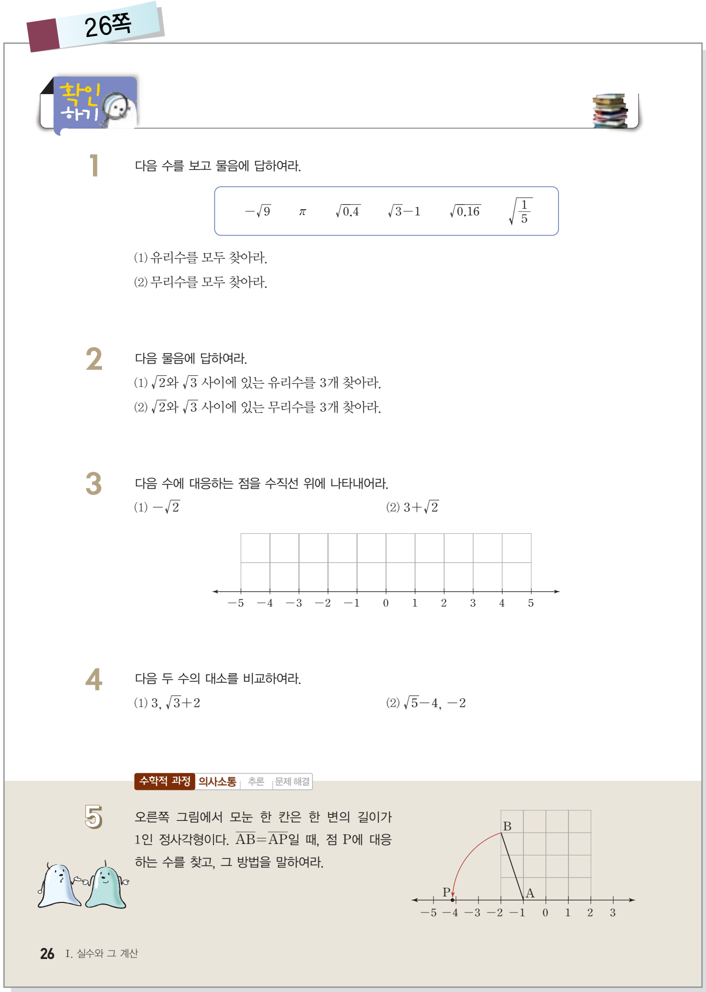
하 두 실수의 대소를 비교할 때, 제곱근을 어림한 값으로 비교할 수도 있음을 설명한다.
[문제] 다음 두 실수의 대소를 비교하여라.
(1) $\sqrt{3}+2$, 4　　(2) $\sqrt{8}-1$, 2
답 (1) $\sqrt{3}+2<4$　(2) $\sqrt{8}-1<2$

상 두 실수의 제곱근의 대소를 비교하고, 그 방법을 설명할 수 있도록 지도한다.
[문제] 다음 두 실수의 대소를 비교하여라.
(1) $\sqrt{2}+1$, $\sqrt{3}+1$　　(2) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$, $\sqrt{5}-2$
답 (1) $\sqrt{2}+1<\sqrt{3}+1$　(2) $\sqrt{5}-\sqrt{2}>\sqrt{5}-2$

확인하기

1 평가의 주안점 유리수와 무리수를 구별할 수 있다.

풀이 (1) $-\sqrt{9}=-3$, $\sqrt{0.16}=0.4$이므로
$-\sqrt{9}$, $\sqrt{0.16}$은 유리수이다.
(2) 무리수는 π, $\sqrt{0.4}$, $\sqrt{3}-1$, $\sqrt{\frac{1}{5}}$이다.


26쪽

확인하기

1 다음 수를 보고 물음에 답하여라.

$-\sqrt{9}$　π　$\sqrt{0.4}$　$\sqrt{3}-1$　$\sqrt{0.16}$　$\sqrt{\frac{1}{5}}$

(1) 유리수를 모두 찾아라.
(2) 무리수를 모두 찾아라.

2 다음 물음에 답하여라.
(1) $\sqrt{2}$와 $\sqrt{3}$ 사이에 있는 유리수를 3개 찾아라.
(2) $\sqrt{2}$와 $\sqrt{3}$ 사이에 있는 무리수를 3개 찾아라.

3 다음 수에 대응하는 점을 수직선 위에 나타내어라.
(1) $-\sqrt{2}$　　(2) $3+\sqrt{2}$

4 다음 두 수의 대소를 비교하여라.
(1) 3, $\sqrt{3}+2$　　(2) $\sqrt{5}-4$, -2

수학적 과정 의사소통 추론 문제 해결

5 오른쪽 그림에서 모눈 한 칸은 한 변의 길이가 1인 정사각형이다. $\overline{AB}=\overline{AP}$일 때, 점 P에 대응하는 수를 찾고, 그 방법을 말하여라.

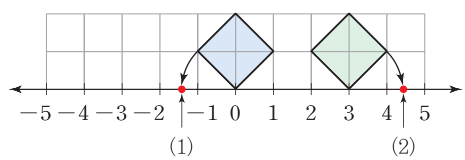
26 I. 실수와 그 계산

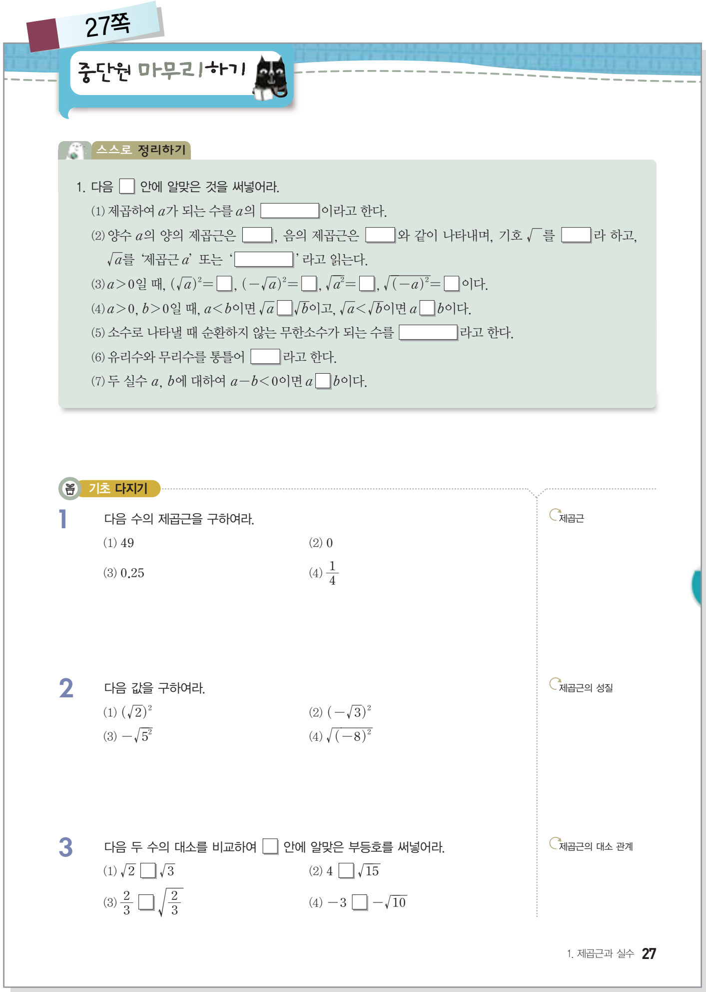
2 평가의 주안점 $\sqrt{2}$와 $\sqrt{3}$ 사이에 있는 수를 찾을 수 있다.

풀이 $\sqrt{2}=1.414\cdots$, $\sqrt{3}=1.732\cdots$이므로
(1) 예시 답안
$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$의 사이에 있는 유리수를 3개 찾으면
1.42, 1.5, 1.651이 있다.
(2) 예시 답안
$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$의 사이에 있는 무리수를 3개 찾으면
$\sqrt{2}+0.1$, $\sqrt{2}+0.21$, $\sqrt{3}-0.1$이 있다.

3 평가의 주안점 무리수를 수직선 위에 나타낼 수 있다.

풀이





27쪽

중단원 마무리하기

스스로 정리하기

1. 다음 $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

(1) 제곱하여 a가 되는 수를 a의 $\square$이라고 한다.

(2) 양수 a의 양의 제곱근은 $\square$, 음의 제곱근은 $\square$와 같이 나타내며, 기호 $\sqrt{\ }$를 $\square$라 하고, $\sqrt{a}$를 '제곱근 a' 또는 '$\square$'라고 읽는다.

(3) $a>0$일 때, $(\sqrt{a})^2=\square$, $(-\sqrt{a})^2=\square$, $\sqrt{a^2}=\square$, $\sqrt{(-a)^2}=\square$이다.

(4) $a>0$, $b>0$일 때, $a<b$이면 $\sqrt{a}\square\sqrt{b}$이고, $\sqrt{a}<\sqrt{b}$이면 $a\square b$이다.

(5) 소수로 나타낼 때 순환하지 않는 무한소수가 되는 수를 $\square$라고 한다.

(6) 유리수와 무리수를 통틀어 $\square$라고 한다.

(7) 두 실수 a, b에 대하여 $a-b<0$이면 $a\square b$이다.

기초 다지기

1 다음 수의 제곱근을 구하여라. 제곱근

(1) 49 (2) 0

(3) 0.25 (4) $\frac{1}{4}$

2 다음 값을 구하여라. 제곱근의 성질

(1) $(\sqrt{2})^2$ (2) $(-\sqrt{3})^2$

(3) $-\sqrt{5^2}$ (4) $\sqrt{(-8)^2}$

3 다음 두 수의 대소를 비교하여 $\square$ 안에 알맞은 부등호를 써넣어라. 제곱근의 대소 관계

(1) $\sqrt{2}\ \square\ \sqrt{3}$ (2) $4\ \square\ \sqrt{15}$

(3) $\frac{2}{3}\ \square\ \sqrt{\frac{2}{3}}$ (4) $-3\ \square\ -\sqrt{10}$

1. 제곱근과 실수 27

중단원 마무리하기

스스로 정리하기

1. (1) 제곱근 (2) $\sqrt{a}$, $-\sqrt{a}$, 근호, 루트 a

(3) a, a, a, a (4) $<$, $<$

(5) 무리수 (6) 실수

(7) $<$

기초 다지기

1 평가의 주안점 어떤 수의 제곱근을 구할 수 있다.

풀이 (1) $7^2=49$, $(-7)^2=49$이므로 49의 제곱근은 ±7이다.

(2) $0^2=0$이므로 0의 제곱근은 0이다.

(3) $(0.5)^2=0.25$, $(-0.5)^2=0.25$이므로 0.25의 제곱근은 ±0.5이다.

(4) $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$이므로 $\frac{1}{4}$의 제곱근은 $\pm\frac{1}{2}$이다.

2 평가의 주안점 제곱근의 성질을 이용하여 그 값을 구할 수 있다.

풀이 (1) 2 (2) 3 (3) -5

(4) $\sqrt{(-8)^2}=\sqrt{64}=\sqrt{8^2}=8$

3 평가의 주안점 제곱근의 대소를 비교할 수 있다.

풀이 (1) $2<3$이므로 $\sqrt{2}<\sqrt{3}$이다.

(2) $4^2=16$, $(\sqrt{15})^2=15$에서 $16>15$이므로 $4>\sqrt{15}$이다.

(3) $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$, $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2=\frac{2}{3}$에서 $\frac{4}{9}<\frac{2}{3}$이므로 $\frac{2}{3}<\sqrt{\frac{2}{3}}$이다.

(4) $3^2=9$, $(\sqrt{10})^2=10$에서 $9<10$이므로 $-3>-\sqrt{10}$이다.

4 평가의 주안점 두 실수의 대소를 비교할 수 있다.

풀이 (1) $3-(\sqrt{3}+2)=1-\sqrt{3}$

$=\sqrt{1}-\sqrt{3}<0$

따라서 $3<\sqrt{3}+2$이다.

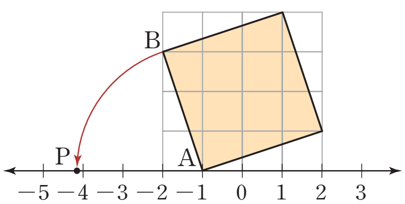
(2) $(\sqrt{5}-4)-(-2)=\sqrt{5}-2$

$=\sqrt{5}-\sqrt{4}>0$

따라서 $\sqrt{5}-4>-2$이다.

5 평가의 주안점 무리수를 수직선 위에 나타낼 수 있다.

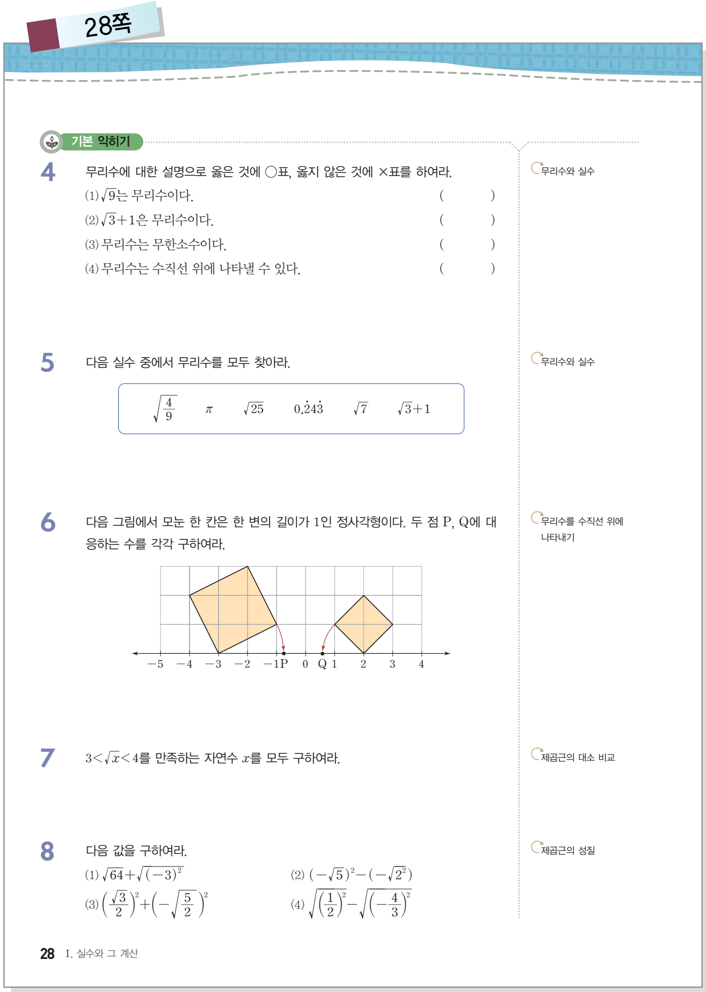
풀이



$\overline{AB}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이가 10이므로 $\overline{AB}=\sqrt{10}$이다.

이때 $\overline{AB}=\overline{AP}$이므로 점 P에 대응하는 수는 $-1-\sqrt{10}$이다.

기본 익히기


28쪽

기본 익히기

4 무리수에 대한 설명으로 옳은 것에 ○표, 옳지 않은 것에 ×표를 하여라.

(1) $\sqrt{9}$는 무리수이다. (　　)

(2) $\sqrt{3}+1$은 무리수이다. (　　)

(3) 무리수는 무한소수이다. (　　)

(4) 무리수는 수직선 위에 나타낼 수 있다. (　　)

무리수와 실수

5 다음 실수 중에서 무리수를 모두 찾아라.

$\sqrt{\frac{4}{9}}$　π　$\sqrt{25}$　$0.\dot{2}4\dot{3}$　$\sqrt{7}$　$\sqrt{3}+1$

무리수와 실수

6 다음 그림에서 모눈 한 칸은 한 변의 길이가 1인 정사각형이다. 두 점 P, Q에 대응하는 수를 각각 구하여라.

무리수를 수직선 위에 나타내기

7 $3<\sqrt{x}<4$를 만족하는 자연수 x를 모두 구하여라.

제곱근의 대소 비교

8 다음 값을 구하여라.

(1) $\sqrt{64}+\sqrt{(-3)^2}$　(2) $(-\sqrt{5})^2-(-\sqrt{2^2})$

(3) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2$　(4) $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2}$

제곱근의 성질

28 I. 실수와 그 계산

4 평가의 주안점 무리수의 개념을 이해할 수 있다.

풀이 (1) $\sqrt{9}=3$이므로 유리수이다. (×)

(2) $\sqrt{3}+1=1.732\cdots+1=2.732\cdots$이므로 무리수이다. (○)

(3) 무리수는 순환하지 않는 무한소수이다. (○)

(4) 무리수는 수직선 위에 나타낼 수 있다. (○)

5 평가의 주안점 무리수를 찾을 수 있다.

풀이 $\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$, $\sqrt{25}=5$, $0.\dot{2}4\dot{3}$은 유리수이므로

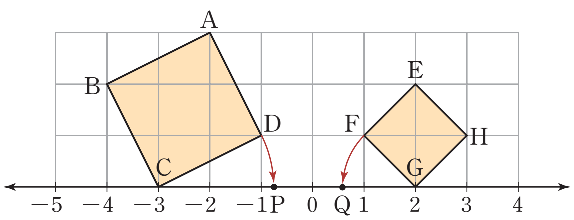
주어진 수 중에서 무리수는

π, $\sqrt{7}$, $\sqrt{3}+1$

이다.

6 평가의 주안점 무리수를 수직선 위에 나타낼 수 있다.

풀이



정사각형 ABCD의 넓이가 5이므로 $\overline{CD}=\sqrt{5}$이다.

$\overline{CD}=\overline{CP}$이므로 점 P에 대응하는 수는

$-3+\sqrt{5}$이다.

정사각형 EFGH의 넓이가 2이므로 $\overline{FG}=\sqrt{2}$이다.

$\overline{FG}=\overline{GQ}$이므로 점 Q에 대응하는 수는

$2-\sqrt{2}$이다.

7 평가의 주안점 제곱근의 대소를 비교할 수 있다.

풀이 $3<\sqrt{x}<4$에서 $3^2=9$, $(\sqrt{x})^2=x$, $4^2=16$이므로

$9<x<16$이다.

따라서 자연수 x는 10, 11, 12, 13, 14, 15이다.

8 평가의 주안점 제곱근의 성질을 이용하여 제곱근의 값을 계산할 수 있다.

풀이 (1) $\sqrt{64}+\sqrt{(-3)^2}=8+3=11$

(2) $(-\sqrt{5})^2-(-\sqrt{2^2})=5-(-2)=7$

(3) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2=\frac{3}{4}+\frac{5}{2}=\frac{13}{4}$

(4) $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{1}{2}-\frac{4}{3}=-\frac{5}{6}$

9 평가의 주안점 두 실수의 대소를 비교할 수 있다.

풀이 (1) $(\sqrt{3}+2)-4=\sqrt{3}-2=\sqrt{3}-\sqrt{4}<0$

따라서 $\sqrt{3}+2<4$이다.

(2) $1-(\sqrt{7}-2)=3-\sqrt{7}=\sqrt{9}-\sqrt{7}>0$

따라서 $1>\sqrt{7}-2$이다.

(3) $(3+\sqrt{3})-5=\sqrt{3}-2=\sqrt{3}-\sqrt{4}<0$

따라서 $3+\sqrt{3}<5$이다.

(4) $(\sqrt{13}+2)-5=\sqrt{13}-3=\sqrt{13}-\sqrt{9}>0$

따라서 $\sqrt{13}+2>5$이다.

10 평가의 주안점 제곱근의 성질을 이용하여 복잡한 제곱근의 계산을 할 수 있다.

풀이 $-\sqrt{0.36}\times\{-(-\sqrt{10})^2\}+\sqrt{\frac{4}{9}}\div\sqrt{(-4)^2}$

$=-0.6\times(-10)+\frac{2}{3}\div4$

$=-\frac{6}{10}\times(-10)+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}$

$=6+\frac{1}{6}=\frac{37}{6}$

29쪽

9 다음 두 실수의 대소를 비교하여라.

(1) $\sqrt{3}+2,\ 4$ (2) $1,\ \sqrt{7}-2$

(3) $3+\sqrt{3},\ 5$ (4) $\sqrt{13}+2,\ 5$

실수의 대소 비교

10 $-\sqrt{0.36}\times\{-(-\sqrt{10})^2\}+\sqrt{\frac{4}{9}}\div\sqrt{(-4)^2}$을 간단히 하여라.

제곱근의 성질

서술형

11 $\sqrt{24x}$가 자연수가 되도록 하는 수 중 가장 작은 자연수 x를 구하고, 그 과정을 서술하여라.

제곱근의 성질

실력 기르기

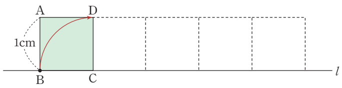
문제 해결 서술형

12 단면인 원의 반지름의 길이가 4cm, 8cm인 두 배수관이 있다. 이 두 배수관의 단면의 넓이의 합과 가장 가까운 단면의 넓이를 가지는 하나의 배수관으로 교체하려고 한다. 교체할 배수관의 단면인 원의 반지름의 길이를 구하고, 그 과정을 서술하여라. (단, 배수관의 단면의 반지름의 길이는 자연수이다.)

두 배수관의 단면의 넓이를 더한 것이 교체할 배수관의 단면의 넓이와 같다.

추론

13 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1cm인 정사각형 ABCD를 직선 l 위에 미끄러지지 않게 한 바퀴 굴렸을 때, 점 B가 움직인 거리를 구하여라.



점 B가 움직이는 모양을 그려 본다.

1. 제곱근과 실수 29

11 평가의 주안점 제곱근의 성질을 이용하여 x의 값을 구할 수 있다.

풀이 $\sqrt{24x}=\sqrt{2^3\times3\times x}$ …… ①

가 자연수이므로 x는

$2\times3\times n^2$ (단, n은 자연수)의 꼴이어야 한다. …… ②

따라서 가장 작은 x의 값은

$2\times3=6$이다. …… ③

단계	채점 기준	배점 비율
①	24를 소인수분해한다.	20%
②	x는 $2\times3\times n^2$의 꼴임을 안다.	40%
③	가장 작은 x의 값을 구한다.	40%

실력 기르기

12 평가의 주안점 실생활 문제를 제곱근의 곱셈과 나눗셈을 이용하여 풀 수 있다.

풀이 두 배수관의 단면의 넓이의 합은

$\pi\times4^2+\pi\times8^2=16\pi+64\pi=80\pi(\text{cm}^2)$이다.

교체할 배수관의 반지름의 길이를 $x$cm라 하면

$\pi\times x^2=80\pi$ …… ①

$x^2=80$

$x>0$이므로 $x=\sqrt{80}$ …… ②

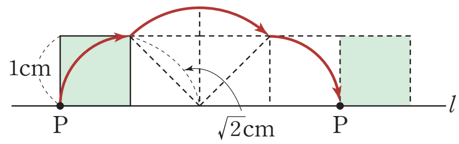
이때 $8^2=64,\ 9^2=81,\ 8.5^2=72.25$이므로 $8.5<x<9$

따라서 $\sqrt{80}$은 8보다 9에 가까우므로 교체할 배수관의 반지름의 길이는 9cm이다. …… ③

단계	채점 기준	배점 비율
①	교체할 배수관의 반지름의 길이를 x라 놓고 식을 세운다.	30%
②	x의 값을 구한다.	40%
③	교체할 배수관의 반지름의 길이를 구한다.	30%

13 평가의 주안점 무리수 $\sqrt{2}$를 활용한 문제를 해결할 수 있다.

풀이 점 P가 지나간 곳을 그리면 다음과 같다.



따라서 점 P가 움직인 거리는

$$\frac{1}{4}\times(2\times\pi\times1)+\frac{1}{4}\times(2\times\pi\times\sqrt{2})+\frac{1}{4}\times(2\times\pi\times1)$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi+\frac{\pi}{2}=\left(\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\right)\text{cm}$$

이다.

연구 자료

무리수를 연분수(continued fraction)로 표현하기

무리수 $\sqrt{2}$를 소수로 나타내면 1.41421356…와 같이 그 규칙성을 전혀 알 수 없는 무한소수가 된다.

한편 무리수 $\sqrt{2}$를 연분수로 나타내면 다음과 같이 2가 한없이 계속됨을 알 수 있다.

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots\cdots}}}}$$

$$\sqrt{2}=[1\,;\,2,\ 2,\ 2,\ \cdots\cdots]=[1\,;\,\dot{2}]$$

또 무리수 $\sqrt{3}$을 연분수로 나타내면 다음과 같이 1, 2, 1, 2, ……와 같이 12가 한없이 되풀이되어 나타난다.

$$\sqrt{3}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cdots\cdots}}}}$$

$$\sqrt{3}=[1\,;\,1,\ 2,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots]=[1\,;\,\dot{1}\dot{2}]$$

창의 · 인성 키우기

개념 바루기

지도상의 유의점 제곱근의 뜻을 바탕으로 제곱근의 개념을 확실하게 하기 위한 문제이므로 학생들이 직접 옳지 않은 부분을 설명해 보도록 지도한다.

올바른 풀이 세 사람의 대화를 바르게 고치면 다음과 같다.
정수: 제곱근 4는 $\sqrt{4}=2$이다.
지섭: 5의 제곱근은 $\pm\sqrt{5}$이다.
윤아: $(\sqrt{0.3^2})^2=0.3^2=0.09$, $(\sqrt{0.3})^2=0.3$이므로
$\sqrt{0.3^2}$은 $\sqrt{0.3}$보다 작다.

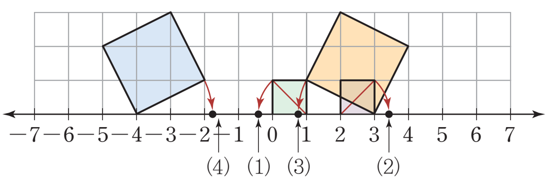
오개념 진단 · 지도
$(0.3)^2=0.09$이다. $(0.3)^2\neq0.9$임을 유의시킨다.

창의 · 인성 오류를 통해 비판적 사고력을 키우도록 하며, 학생들이 자신의 생각을 발표하게 함으로써 개념을 다질 수 있게 한다.

문제 만들기

지도상의 유의점 무리수 $\sqrt{2}$를 수직선 위에 나타내는 방법에 대한 이해를 바탕으로 무리수 $\sqrt{5}$를 수직선 위에 나타낼 수 있도록 하기 위한 문제이다. 따라서 여러 학생이 동시에 나와서 풀고자 하는 문항을 풀게 한 후, 그 풀이를 설명할 수 있도록 지도한다.

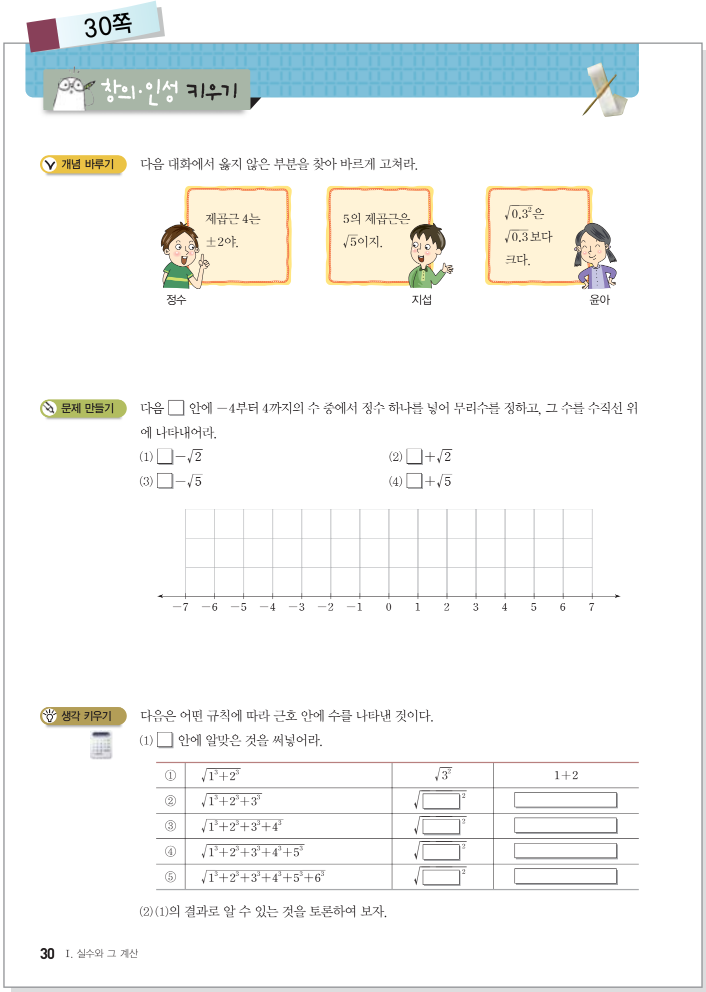
예시 답안 (1) $\boxed{1}-\sqrt{2}$ (2) $\boxed{2}+\sqrt{2}$
(3) $\boxed{3}-\sqrt{5}$ (4) $\boxed{-4}+\sqrt{5}$



창의 · 인성 학생 스스로 문제를 만들어 풀게 함으로써 자기 주도적 학습 능력을 향상시킬 수 있도록 한다.

생각 키우기

지도상의 유의점 제곱근의 성질에 대한 이해를 바탕으로 특별한 수에 대한 규칙을 찾아낼 수 있도록 유도한다.
수학적 창의성을 기를 수 있는 문항이므로 다양한 생각을 발표할 수 있도록 지도한다.



①	$\sqrt{1^3+2^3}$	$\sqrt{3^2}$	$1+2$
②	$\sqrt{1^3+2^3+3^3}$	$\sqrt{\square^2}$	$\square$
③	$\sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3}$	$\sqrt{\square^2}$	$\square$
④	$\sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3+5^3}$	$\sqrt{\square^2}$	$\square$
⑤	$\sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3}$	$\sqrt{\square^2}$	$\square$

(2) (1)의 결과로 알 수 있는 것을 토론하여 보자.

30 I. 실수와 그 계산

풀이 (1) □ 안에 알맞은 것을 써넣으면

② $\sqrt{1^3+2^3+3^3}=\sqrt{1+8+27}=\sqrt{36}=\sqrt{\boxed{6}^2}$
$=6=\boxed{1+2+3}$

③ $\sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3}$
$=\sqrt{1+8+27+64}=\sqrt{100}=\sqrt{\boxed{10}^2}$
$=10=\boxed{1+2+3+4}$

④ $\sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3+5^3}$
$=\sqrt{1+8+27+64+125}=\sqrt{225}=\sqrt{\boxed{15}^2}$
$=15=\boxed{1+2+3+4+5}$

⑤ $\sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3}$
$=\sqrt{1+8+27+64+125+216}=\sqrt{441}=\sqrt{\boxed{21}^2}$
$=21=\boxed{1+2+3+4+5+6}$

(2) **예시 답안** $\sqrt{1^3+2^3+\cdots\cdots+n^3}=1+2+\cdots\cdots+n$과 같으므로 1부터 n까지의 자연수를 세제곱하여 더한 것의 양의 제곱근의 값은 1부터 n까지의 자연수의 합과 같다.

창의 · 인성 학생이 말한 결과를 통하여 수학의 아름다움을 알 수 있도록 하여 확산적 사고와 수렴적 사고를 함께 기를 수 있도록 한다.

31쪽

수학으로 세·상·읽·기

우리나라의 옛 수학

정사각형의 넓이가 주어졌을 때 한 변의 길이를 구하는 문제와 같이 제곱근을 구하는 문제는 일상생활에서 쉽게 접할 수 있다. 요즘은 전자계산기를 이용하여 제곱근을 간편하게 구할 수 있지만 전자계산기가 없었던 옛날 우리나라 사람들은 어떻게 제곱근을 구하였을까?

조선 시대 수학자 홍길주(洪吉周 ; 1786~1841)는 넓이가 주어진 정사각형의 한 변의 길이를 다음과 같이 구하였다고 한다.

예를 들어 넓이가 121인 정사각형이 있다고 하자. 아래와 같이 121을 반으로 나눈 다음 계속하여 1, 2, 3, ……을 빼고 더 이상 계산할 수 없을 때까지 계산한다.

121을 반으로 나눈다. → 60.5
이 값에서 1을 뺀다. → 60.5 −1= 59.5
2를 뺀다. → 59.5 −2= 57.5
3을 뺀다. → 57.5 −3= 54.5
4를 뺀다. → 54.5 −4= 50.5
5를 뺀다. → 50.5 −5= 45.5
6을 뺀다. → 45.5 −6= 39.5
7을 뺀다. → 39.5 −7= 32.5
8을 뺀다. → 32.5 −8= 24.5
9를 뺀다. → 24.5 −9= 15.5
10을 뺀다. → 15.5 −10= 5.5
11 = 2×5.5

위에서 10까지 빼고 남은 수에서 11을 뺄 수 없다. 이때 마지막으로 남은 수 5.5를 2배하면 11이 되는데, 이 수는 마지막으로 빼려고 했던 수 11과 일치한다. 이 11이 바로 121의 제곱근이다.

따라서 넓이가 121인 정사각형의 한 변의 길이는 11이다.

실제로 11×11을 계산해 보면 121이 되어 11은 121의 양의 제곱근임을 알 수 있다.

1. 제곱근과 실수 31

수학으로 세·상·읽·기

수학에서 같은 수를 두 번 곱해 A가 되는 수를 'A의 제곱근'이라고 한다. 예를 들어 4의 제곱근은 2와 −2, 9의 제곱근은 3과 −3이다. 제곱근은 땅의 넓이나 그릇의 부피에서 한 변의 길이를 측정하는 데 활용된다.

지금까지 조선 시대의 제곱근 계산 방법은 중국에서 영향을 받은 것으로 알려져 왔으나 서울대 과학문화연구센터 전용훈 연구원은 19세기 초 유학자 홍길주가 나눗셈과 뺄셈만으로 제곱근을 구했다는 사실을 옛 문헌 조사 결과 확인했다고 밝혔다. 이 연구 결과는 과학사 분야의 권위지 "사이언스 인 콘텍스트"에 소개되었다.

○ 중국의 셈법과 다른 독자적 방식

홍길주의 풀이법은 간단하다. 먼저 수를 반으로 나누고 나눈 값을 1부터 오름차순으로 뺀다. 9의 경우 반으로 나눈 값 4.5에서 1을 빼고, 남은 값 3.5에서 2를 빼는 식이다. 그렇게 더는 뺄 수 없을 때 남은 수를 2배한 뒤 그 수가 뺄 수와 같으면 제곱근이라는 것이다.

3.5에서 2를 빼고 남은 수 1.5는 3으로 더는 뺄 수 없고 이를 2배한 3이 빼려는 수 3과 같기 때문에 9의 제곱근은 3이 된다는 것이다. 이는 훗날 서양 수학에 등장하는 수열의 합을 구하는 공식과 유사한 독특한 풀이법이다.

그전까지는 중국에서 넓이 계산에 썼던 '개방술'의 영향이 컸다. 개방술은 어떤 수의 제곱근이 'A백 B십 C'라고 추측하고, A, B, C를 구하거나 방정식의 근사해를 이용하는 식으로 제곱근을 얻었다.

전 연구원은 '나눗셈과 뺄셈만 이용하는 이 풀이법은 "산학계몽"이나 서양 수학을 담고 있는 "수리정온"에 근거한 중국의 전통과 결별한 새로운 방식'이라고 말했다. 홍길주 스스로도 자신의 저서 "숙수념(孰遂念)"에서 '바보가 아닌 이상 어린아이들도 쉽게 할 수 있는 풀이법'이라고 설명했다.

○ 소수점까지 계산

이 계산법은 제곱근이 2.449…처럼 소수로 나오는 6과 같은 수에도 적용할 수 있을 정도로 응용할 수 있다. 6의 경우 일단 1000000을 곱해 일곱 자릿수로 만든 뒤 같은 방식으로 계산하면 2449가 나온다. 6의 제곱근을 구하려면 이 수를 1000000의 제곱근 1000으로 나누면 2.449…가 나온다.

6×100		
600	300	299
2	299	297
3	297	294
4	294	290
5	290	285
6	285	279
7	279	272
8	272	264
9	264	255
10	255	245
11	245	234
12	234	222
13	222	209
14	209	195
15	195	180
16	180	164
17	164	147
18	147	129
19	129	110
20	110	90
21	90	69
22	69	47
23	47	24
24	24	0
24÷10		
$\sqrt{6}=2.4\cdots$		

6×1000000		
6000000	3000000	2999999
2	2999999	2999997
3	2999997	2999994
4	2999994	2999990
5	2999990	2999985
6	2999985	2999979
7	2999979	2999972
8	2999972	2999964
9	2999964	2999955
10	2999955	2999945
11	2999945	2999934
12	2999934	2999922
13	2999922	2999909
⋮	⋮	⋮
2441	21980	19539
2442	19539	17097
2443	17097	14654
2444	14654	12210
2445	12210	9765
2446	9765	7319
2447	7319	4872
2448	4872	2424
2449	2424	−25
2449÷1000		
$\sqrt{6}=2.449\cdots$		

학년	반	번호:	이름:	/ 점수:

선다형은 각 4점, 나머지 문항은 각 문항에 표시함.

01 **보기**에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ. $\sqrt{16}=\pm4$

ㄴ. $\sqrt{(-2)^2}=2$

ㄷ. 16의 제곱근은 ±4이다.

ㄹ. $\sqrt{25}$의 제곱근은 ±5이다.

① ㄱ, ㄴ ② ㄴ, ㄷ ③ ㄴ, ㄹ
④ ㄷ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄹ

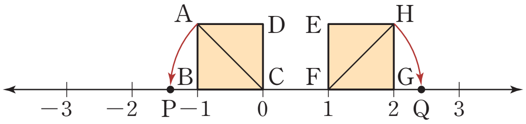
02 부등식 $2.5<\sqrt{x}<4$를 만족하는 자연수 x는 모두 몇 개인가?

① 6개 ② 7개 ③ 8개
④ 9개 ⑤ 10개

03 다음 중 옳은 것은?

① 9의 제곱근은 3이다.
② $-\sqrt{15}$는 -4보다 작다.
③ 모든 수의 제곱근은 2개이다.
④ 제곱근 4와 4의 제곱근은 같다.
⑤ 순환하지 않는 무한소수는 무리수이다.

04 다음 수직선에서 □ABCD와 □EFGH는 한 변의 길이가 1인 정사각형이다. $\overline{CA}=\overline{CP}$이고 $\overline{FH}=\overline{FQ}$일 때, 점 P와 점 Q에 대응하는 수를 차례로 쓰면?



① $-\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2}$ ② $-\sqrt{2},\ \sqrt{2}-1$
③ $-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}$ ④ $-1+\sqrt{2},\ \sqrt{2}-1$
⑤ $-1+\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2}$

05 다음 수를 큰 수부터 나열할 때, 세 번째로 큰 수는?

① $(-\sqrt{0.3})^2$ ② $\sqrt{0.04}$ ③ $\sqrt{0.25}$
④ $\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2}$ ⑤ $\sqrt{\frac{49}{100}}$

06 **보기**에서 무리수는 모두 몇 개인가?

보기

$\sqrt{\frac{4}{9}}$ $\sqrt{5}$ $-\frac{\pi}{2}$ $\sqrt{1.96}$ $\sqrt{8}$ $\sqrt{2}+\sqrt{9}$

① 1개 ② 2개 ③ 3개
④ 4개 ⑤ 5개

07 다음 계산 중 옳지 않은 것은?

① $\sqrt{9}+\sqrt{144}=15$
② $\sqrt{0.81}\times\sqrt{4}=1.8$
③ $\sqrt{(-15)^2}\div\sqrt{5^2}=3$
④ $\sqrt{(-2)^2}-\sqrt{5^2}=-7$
⑤ $(-\sqrt{3})^2\times(\sqrt{7})^2=21$

08 $\sqrt{(-12)^2}+(-\sqrt{7})^2-\sqrt{121}-\sqrt{3^2}$을 간단히 하면?

① -26 ② -21 ③ -11
④ 0 ⑤ 5

단답형

09 $(-5)^2$의 양의 제곱근을 a, $\sqrt{49}$의 음의 제곱근을 b라 할 때, $2a-b^2$의 값을 구하여라. [6점]

10 다음을 간단히 하여라. [6점]

$$(-\sqrt{0.6})^2 \div \sqrt{\left(-\frac{6}{7}\right)^2} - \sqrt{0.16} \times \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2}$$

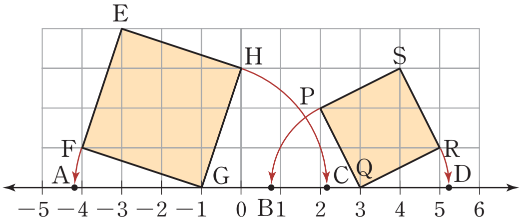
11 다음 두 실수의 대소를 비교하여 $\square$ 안에 알맞은 부등호를 써넣어라. [각 3점]

(1) $\sqrt{0.1}$ $\square$ 0.1

(2) $1-\sqrt{3}$ $\square$ $1-\sqrt{2}$

12 $\sqrt{360x}$가 자연수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 x를 구하여라. [6점]

13 다음 그림에서 모눈 한 칸은 한 변의 길이가 1인 정사각형이다. 네 점 A, B, C, D에 대응하는 수를 각각 구하여라. [8점]



서술형

14 두 실수 a, b에 대하여 $a-b>0$, $ab<0$일 때,

$$\sqrt{a^2}+|b|-\sqrt{(b-a)^2}$$

을 간단히 하고, 그 과정을 서술하여라. [10점]

15 $\sqrt{7a}+\sqrt{b}=11$이 성립하도록 하는 두 자연수 a, b에 대하여 a^2-b의 값을 구하고, 그 과정을 서술하여라. [10점]

수리 논술형

16 다음 제시문을 읽고, 반지름의 길이가 1인 원 O의 넓이의 2배가 되는 원을 그리고, 그 방법을 설명하여라. [16점]

한결이는 도자기 체험장에서 연필꽂이를 만들려고 한다. 원판을 이용하여 원 모양의 밑면을 떼어낸 후 직사각형의 옆면을 밑면인 원의 둘레에 붙이고, 옆면을 아름답게 장식하면 된다.

한결이는 필통의 밑면인 원의 넓이가 2배가 되는 필통을 만들려면 원판을 어떻게 만들어야 할지 궁금하였다.

중단원 평가 문제

01 ② **02** ④ **03** ⑤ **04** ③
05 ① **06** ④ **07** ④ **08** ⑤
09 3 **10** 0.1 **11** (1) $>$ (2) $<$
12 10
13 A: $-1-\sqrt{10}$, B: $3-\sqrt{5}$, C: $-1+\sqrt{10}$, D: $3+\sqrt{5}$
14~16 풀이 참조

01 평가 기준 제곱근의 성질을 알고 있는가?

풀이 ㄱ. $\sqrt{16}=4$ ㄴ. $\sqrt{(-2)^2}=2$
ㄷ. 16의 제곱근은 ±4이다.
ㄹ. $\sqrt{25}=5$이므로 $\sqrt{25}$의 제곱근은 $\pm\sqrt{5}$이다.
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

02 평가 기준 제곱근의 대소를 비교할 수 있는가?

풀이 $2.5<\sqrt{x}<4$에서
$2.5^2=6.25$, $(\sqrt{x})^2=x$, $4^2=16$이므로
$6.25<x<16$이다.
따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수는
7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15
의 모두 9개이다.

03 평가 기준 제곱근과 무리수의 개념에 대하여 알고 있는가?

풀이 ① 9의 제곱근은 ±3이다.
② $\sqrt{15}<4$이므로 $-\sqrt{15}>-4$이다.
③ 0의 제곱근은 0 하나뿐이다.
④ 제곱근 4는 2이고, 4의 제곱근은 ±2이다.
따라서 옳은 것은 ⑤이다.

04 평가 기준 무리수 $\sqrt{2}$를 수직선 위에 나타낼 수 있는가?

풀이 점 C의 좌표가 0이고, $\overline{CA}=\overline{CP}=\sqrt{2}$이므로
점 P의 좌표는 $-\sqrt{2}$이다.
점 F의 좌표가 1이고, $\overline{FH}=\overline{FQ}=\sqrt{2}$이므로
점 Q의 좌표는 $1+\sqrt{2}$이다.

05 평가 기준 제곱근의 대소를 비교할 수 있는가?

풀이 ① $(-\sqrt{0.3})^2=0.3$ ② $\sqrt{0.04}=\sqrt{0.2^2}=0.2$
③ $\sqrt{0.25}=0.5$ ④ $\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{1}{4}=0.25$
⑤ $\sqrt{\frac{49}{100}}=\frac{7}{10}=0.7$

큰 수부터 차례대로 나열하면
$\sqrt{\frac{49}{100}}$, $\sqrt{0.25}$, $(-\sqrt{0.3})^2$, $\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2}$, $\sqrt{0.04}$
따라서 세 번째로 큰 수는 $(-\sqrt{0.3})^2$이다.

06 평가 기준 무리수를 찾을 수 있는가?

풀이 $\sqrt{\frac{4}{9}}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}$, $\sqrt{1.96}=\sqrt{1.4^2}=1.4$
$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, $\sqrt{2}+\sqrt{9}=\sqrt{2}+3$
이므로 유리수는 $\sqrt{\frac{4}{9}}$, $\sqrt{1.96}$이고,
무리수는 $\sqrt{5}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{2}+\sqrt{9}$이다.
따라서 무리수는 모두 4개이다.

07 평가 기준 제곱근의 성질을 알고 있는가?

풀이 ① $\sqrt{9}+\sqrt{144}=3+12=15$
② $\sqrt{0.81}\times\sqrt{4}=0.9\times2=1.8$
③ $\sqrt{(-15)^2}\div\sqrt{5^2}=15\div5=3$
④ $\sqrt{(-2)^2}-\sqrt{5^2}=2-5=-3$
⑤ $(-\sqrt{3})^2\times(\sqrt{7})^2=3\times7=21$

08 평가 기준 제곱근의 성질을 알고 있는가?

풀이 $\sqrt{(-12)^2}+(-\sqrt{7})^2-\sqrt{121}-\sqrt{3^2}$
$=12+7-11-3$
$=5$

09 평가 기준 어떤 수의 제곱근을 구할 수 있는가?

풀이 $(-5)^2=25$이므로 $(-5)^2$의 제곱근은 ±5이고,
양의 제곱근 $a=5$이다.
$\sqrt{49}=\sqrt{7^2}=7$이므로 $\sqrt{49}$의 제곱근은 $\pm\sqrt{7}$이고,
음의 제곱근 $b=-\sqrt{7}$이다.
따라서 $2a-b^2=2\times5-(-\sqrt{7})^2=10-7=3$이다.

10 평가 기준 제곱근의 성질을 알고 식을 간단히 할 수 있는가?

풀이 $(-\sqrt{0.6})^2\div\sqrt{\left(-\frac{6}{7}\right)^2}-\sqrt{0.16}\times\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2}$
$=0.6\div\frac{6}{7}-0.4\times\frac{3}{2}$
$=0.7-0.6$
$=0.1$

11 **평가 기준** 실수의 대소를 비교할 수 있는가?

풀이 (1) $(\sqrt{0.1})^2=0.1$, $0.1^2=0.01$이고,

$0.1>0.01$이므로 $\sqrt{0.1}>0.1$

(2) $(1-\sqrt{3})-(1-\sqrt{2})$

$=1-\sqrt{3}-1+\sqrt{2}$

$=-\sqrt{3}+\sqrt{2}<0$

따라서 $1-\sqrt{3}<1-\sqrt{2}$이다.

12 **평가 기준** 제곱근의 성질을 이용하여 x의 값을 구할 수 있는가?

풀이 $360x=2^3\times3^2\times5\times x$이므로

$\sqrt{360x}=\sqrt{(2\times3)^2\times2\times5\times x}=6\sqrt{10x}$

따라서 $\sqrt{360x}$가 자연수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 x는 10이다.

13 **평가 기준** 무리수를 수직선 위에 나타낼 수 있는가?

풀이 정사각형 EFGH의 넓이가 10이므로 한 변의 길이는 $\sqrt{10}$이다. 점 G에 대응하는 수가 -1이고,

$\overline{GA}=\overline{GF}=\sqrt{10}$, $\overline{GC}=\overline{GH}=\sqrt{10}$이므로

점 A에 대응하는 수는 $-1-\sqrt{10}$,

점 C에 대응하는 수는 $-1+\sqrt{10}$이다.

또 정사각형 PQRS의 넓이가 5이므로 한 변의 길이는 $\sqrt{5}$이다. 점 Q에 대응하는 수가 3이고,

$\overline{QB}=\overline{QP}=\sqrt{5}$, $\overline{QD}=\overline{QR}=\sqrt{5}$이므로

점 B에 대응하는 수는 $3-\sqrt{5}$,

점 D에 대응하는 수는 $3+\sqrt{5}$이다.

14 **평가 기준** 제곱근의 성질을 이용하여 제곱근의 값을 간단히 할 수 있는가?

풀이 $a-b>0$에서 $a>b$이고 $ab<0$이므로

$a>0$, $b<0$

$\sqrt{a^2}=a$, $|b|=-b$

$(b-a)^2=(a-b)^2$, $a-b>0$이므로

$\sqrt{(b-a)^2}=\sqrt{(a-b)^2}=a-b$ …… ①

따라서 $\sqrt{a^2}+|b|-\sqrt{(b-a)^2}=a-b-(a-b)=0$이다.

…… ②

단계	채점 기준	배점
①	$\sqrt{a^2}$, $\lvert b\rvert$, $\sqrt{(b-a)^2}$을 간단히 한다.	각 2점
②	$\sqrt{a^2}+\lvert b\rvert-\sqrt{(b-a)^2}$을 간단히 한다.	4점

15 **평가 기준** 제곱근의 성질을 이용한 활용 문제를 해결할 수 있는가?

풀이 a, b가 자연수이므로 $\sqrt{7a}+\sqrt{b}=11$을 성립시키는 것은 $\sqrt{7a}=7$, $\sqrt{b}=4$일 때뿐이다. …… ①

$\sqrt{7a}=7$에서 $7a=49$이므로

$a=7$ …… ②

$\sqrt{b}=4$에서 $b=16$ …… ③

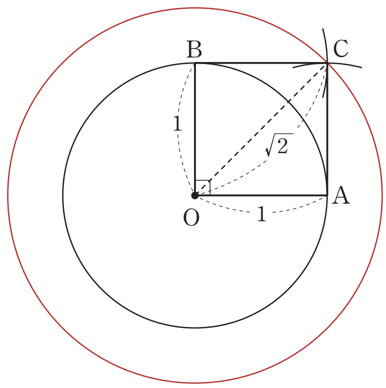
따라서 $a^2-b=49-16=33$이다. …… ④

단계	채점 기준	배점
①	$\sqrt{7a}$, $\sqrt{b}$의 값을 구한다.	4점
②	a의 값을 구한다.	2점
③	b의 값을 구한다.	2점
④	a^2-b의 값을 구한다.	2점

16 **평가 기준** 무리수 $\sqrt{2}$를 활용한 문제를 해결할 수 있는가?

예시 답안 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 정사각형의 대각선을 반지름으로 하는 원을 그리면 된다. …… ①

따라서 반지름의 길이가 1인 원을 그린 후, 원 O의 반지름 $\overline{OA}$에 수선 $\overline{OB}$를 긋고, 원 O와 만난 두 점 A, B에서 원 O의 반지름의 길이로 원을 그려 만나는 점을 C라 하자. 네 점 A, B, C, D를 연결하여 정사각형을 만든 후 대각선의 길이 $\overline{OC}$를 반지름으로 하는 원을 그리면 반지름의 길이가 1인 원의 넓이의 2배가 되는 원이 된다. …… ②



…… ③

단계	채점 기준	배점
①	한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이가 $\sqrt{2}$임을 설명한다.	5점
②	반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원을 만드는 방법을 설명한다.	6점
③	반지름의 길이가 1인 원의 넓이의 2배가 되는 원을 그린다.	5점