



원주각의 성질



중단원 지도 목표

1. 원주각과 중심각의 관계, 원주각에 대한 여러 가지 성질을 이해할 수 있게 한다.
2. 접선과 현이 이루는 각에 대한 성질을 알아보고 이를 활용할 수 있게 한다.
3. 원에 내접하는 사각형의 성질을 이해할 수 있게 한다.
4. 원과 두 직선이 만나서 생기는 선분의 길이 사이의 관계를 알아보고 이를 활용할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원 명	지도 내용
1. 원주각	<ul style="list-style-type: none"> • 원주각과 중심각의 관계 • 원주각과 호의 길이 사이의 관계 • 네 점이 한 원 위에 있을 조건 • 원의 접선과 현이 이루는 각
2. 원주각의 활용	<ul style="list-style-type: none"> • 원에 내접하는 사각형 • 두 할선의 선분의 길이의 비
중단원 마무리하기	<ul style="list-style-type: none"> • 스스로 정리하기 • 기초 다지기, 기본 익히기, 실력 기르기
창의·인성 키우기	<ul style="list-style-type: none"> • 개념 바꾸기 • 생각 키우기



▶삼각형의 외각의 크기에 대한 성질을 알고 있는가?

1. 이 단원에서는 삼각형의 외각의 크기에 대한 성질을 이용하여 원주각과 중심각의 크기에 대한 성질을 설명한다. 따라서 삼각형의 외각의 크기에 대한 성질을 알고 있어야 한다.

풀이 $\angle x = 40^\circ + 70^\circ = 110^\circ$

답 110°

▶중심각의 크기와 호의 길이 사이의 관계를 알고 있는가?

2. 이 단원에서는 원의 중심각의 크기와 호의 길이 사이의 관계를 이용하여 원주각과 호의 길이 사이의 관계를 설명한다. 따라서 중심각의 크기와 호의 길이 사이의 관계를 알고 있어야 한다.

풀이 한 원에서 중심각의 크기와 호의 길이는 비례한다.

$x^\circ : 40^\circ = 6 : 3$ 에서 $3x^\circ = 240^\circ$ 이므로 $x = 80$ 이다.

284쪽



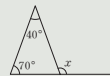
원주각의 성질

1. 원주각
2. 원주각의 활용



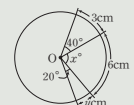
▶삼각형의 외각의 크기에 대한 성질을 알고 있는가?

1. 오른쪽 그림에서 $\angle x$ 의 크기를 구하여라.



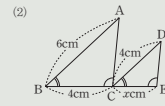
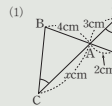
▶중심각의 크기와 호의 길이 사이의 관계를 알고 있는가?

2. 오른쪽 그림의 원 O에서 x, y 의 값을 구하여라.



▶삼각형의 닮음조건을 알고 있는가?

3. 다음 그림에서 x 의 값을 구하여라.



284 VII. 원의 성질

$20^\circ : 40^\circ = y : 3$ 에서 $1 : 2 = y : 3$ 이므로 $y = \frac{3}{2}$ 이다.

답 $x = 80, y = \frac{3}{2}$

▶삼각형의 닮음조건을 알고 있는가?

3. 이 단원에서는 삼각형의 닮음조건을 이용하여 원에서 두 할선의 길이 사이의 관계를 설명하게 된다. 따라서 삼각형의 닮음조건을 알고 있어야 한다.

풀이 (1) $\triangle ABC$ 와 $\triangle ADE$ 에서
 $\angle C = \angle E, \angle BAC = \angle DAE$ (맞꼭지각)
 이므로 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ 이다.

따라서 $x : 3 = 4 : 2$ 이므로 $2x = 12$ 에서 $x = 6$ 이다.

(2) $\triangle ABC$ 와 $\triangle DCE$ 에서
 $\angle B = \angle DCE, \angle ACB = \angle DEC$
 이므로 $\triangle ABC \sim \triangle DCE$ 이다.

따라서 $x : 4 = 4 : 6$ 이므로 $6x = 16$ 에서 $x = \frac{8}{3}$ 이다.

답 (1) 6 (2) $\frac{8}{3}$



지도 목표

1. 원주각의 뜻을 알 수 있게 한다.
2. 원주각의 크기와 중심각의 크기 사이의 관계를 이해할 수 있게 한다.
3. 한 원에 대한 원주각의 크기는 모두 같음을 이해하고, 이를 활용하여 호의 길이와 원주각의 크기 사이의 관계를 알 수 있게 한다.
4. 네 점이 한 원 위에 있을 조건을 알 수 있게 한다.
5. 원의 접선과 현이 이루는 각의 크기 사이의 관계를 이해할 수 있게 한다.

지도상의 유의점

1. 임의의 중심각에 대하여 여러 개의 원주각을 그린 후, 원주각과 중심각 사이의 관계를 생각하고 확인하게 한다.
2. 한 호에 대한 중심각은 하나로 정해지지만 원주각은 무수히 많음을 알게 한다.
3. 삼각형은 반드시 원에 내접하거나 외접하지만, 사각형은 원에 내접하지도 외접하지도 않는 경우가 있음을 알게 한다.
4. 네 점이 한 원 위에 있을 조건에 대한 설명은 간단히 다룬다.

1/4차시 차시별 지도 방법

[교과 교실]

활동하기	직접 각을 그려 크기를 재어 보게 하고 원주각과 중심각의 크기 사이의 관계를 이해하도록 지도한다.
본문	원주각에 대한 정의를 정확히 이해하도록 설명하고, 원주각의 크기와 그 호에 대한 중심각의 크기 사이의 관계를 세 가지 경우로 나누어 설명한다. 이때 하 수준의 학생을 고려하여 충분한 설명을 한다.
함께 풀기 1, 문제 1	본문의 2, 3의 경우는 함께 풀기 1과 문제 1을 풀면서 원주각의 크기와 중심각의 크기 사이의 관계를 알 수 있도록 설명한다.
함께 풀기 2, 문제 2, 3	문제를 푼 후 풀이 과정을 설명하도록 하고, 다른 학생의 풀이 방법을 경청하도록 지도한다.

- 학습 목표 원주각의 성질을 이해한다.
- 배울 용어 원주각



3D 입체 영상은 생생한 입체감을 느끼게 해 주어 영화와 같은 영상 매체에서 많이 이용되고 있다. 3D 입체 영상은 인간의 두 눈의 움직임과 그 움직임을 통한 영상의 인식 과정을 모방하여 두 대의 카메라를 사용한다. 이때 두 카메라 사이의 간격을 변화시켜 다양한 입체감을 줄 수 있다.



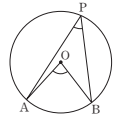
1/4차시 원주각과 중심각의 크기 사이에는 어떤 관계가 있을까?

활동하기

준비물
색종이, 자, 각도기

다음과 같이 활동을 하여 보자.

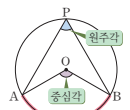
- 1 원 O를 그리고, 원 위의 두 점 A, B를 잡는다.
- 2 부채꼴 AOB를 그린다.
- 3 호 AB 위에 있지 않은 원 위의 점 P를 잡고 $\angle APB$ 를 그린다.



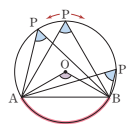
- (1) $\angle AOB$ 와 $\angle APB$ 의 크기를 재어 보자.
- (2) $\angle AOB$ 의 크기는 $\angle APB$ 의 크기의 몇 배인지 말하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 원 O에서 호 AB 위에 있지 않은 원 위의 한 점을 P라 할 때, $\angle APB$ 를 호 AB에 대한 **원주각**이라고 한다.

이때 호 AB를 원주각 $\angle APB$ 에 대한 호라고 한다.



- 1 호 AB가 정해지면 호 AB에 대한 중심각 $\angle AOB$ 는 하나로 정해지지만 원주각 $\angle APB$ 는 점 P의 위치에 따라 여러 개가 있다.



2. 원주각의 성질 285

원주각과 중심각의 크기 사이에는 어떤 관계가 있을까?

활동하기 학생들이 원 O 위에 중심각과 원주각을 그리고 그 크기를 재어 보는 활동을 하면서 원주각과 중심각의 크기의 관계를 알게 하려는 활동하기이다.

따라서 학생들에게 직접 원을 그려 보게 한 다음 중심각과 원주각을 그리게 하고, 각도기로 재어 본 각의 크기를 발표하게 한다.

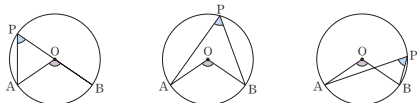
- (1) $\angle AOB = 80^\circ$, $\angle APB = 40^\circ$
- (2) $\angle AOB = 2\angle APB$

- 1 호 AB의 중심각과 원주각을 이해하게 하고, 호 AB에 대한 원주각은 호 AB를 제외한 원 위의 점과 두 점 A, B를 이어서 생기는 각을 말하는 것이므로 호 AB에 대한 원주각은 무수히 많이 그릴 수 있음을 알게 한다.

이제 한 호에 대한 원주각의 크기와 그 호에 대한 중심각의 크기 사이의 관계를 알아보자.

- 2 호 AB에 대한 원주각 $\angle APB$ 와 원의 중심 O의 위치 관계는 점 P의 위치에 따라 다음과 같이 세 가지 경우로 나눌 수 있다.

- 1 $\angle APB$ 의 변 위에 중심 O가 있다. 2 $\angle APB$ 의 안에 중심 O가 있다. 3 $\angle APB$ 의 밖에 중심 O가 있다.



- 3 1의 경우 $\triangle OPA$ 에서 $\overline{OP} = \overline{OA}$ 이므로 $\angle OPA = \angle OAP$

이다.

그런데 $\angle AOB$ 는 $\angle POA$ 의 외각이므로

$$\begin{aligned}\angle AOB &= \angle OPA + \angle OAP \\ &= 2\angle APB\end{aligned}$$

이다. 따라서 $\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$ 이다.



답게 풀기

위의 2와 같이 $\angle APB$ 의 안에 원의 중심 O가 있는 경우 $\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$ 임을 설명하라.

풀이 오른쪽 그림과 같이 중심 O를 지나는 지름 PQ를 그으면 위의 1의 경우가 되므로

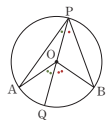
$$\angle APQ = \frac{1}{2}\angle AOQ, \angle BPQ = \frac{1}{2}\angle BOQ$$

따라서

$$\begin{aligned}\angle APB &= \angle APQ + \angle BPQ \\ &= \frac{1}{2}\angle AOQ + \frac{1}{2}\angle BOQ \\ &= \frac{1}{2}(\angle AOQ + \angle BOQ) \\ &= \frac{1}{2}\angle AOB\end{aligned}$$

즉, $\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$ 이다.

답 풀이 참조



문제 1 다음은 앞의 2와 같이 $\angle APB$ 의 밖에 원의 중심 O가 있는 경우 $\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$ 임을 설명하는 과정이다. ☐ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

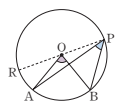
오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O를 지나는 지름 PR을 그으면 앞의 1의 경우가 되므로

$$\angle RPB = \frac{1}{2}\angle ROB, \angle RPA = \frac{1}{2}\angle ROA$$

따라서

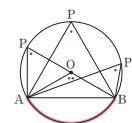
$$\begin{aligned}\angle APB &= \angle RPB - \angle RPA \\ &= \frac{1}{2}(\angle ROB - \angle ROA) \\ &= \frac{1}{2}\angle AOB\end{aligned}$$

즉, $\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$ 이다.



앞에서 알아보았듯이 원 O의 호 AB에 대한 원주각 $\angle APB$ 의 크기는 점 P의 위치에 관계없이 호 AB에 대한 중심각 $\angle AOB$ 의 크기의 $\frac{1}{2}$ 임을 알 수 있다.

- 4 또 원 O에서 호 AB에 대한 원주각은 여러 개 있지만 호 AB에 대한 원주각의 크기는 모두 같음을 알 수 있다.

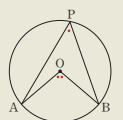


이상을 정리하면 다음과 같다.

원주각과 중심각

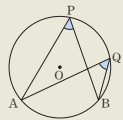
- 1 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$ 이다.

$$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$$



- 2 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같다.

$$\angle APB = \angle AQB$$



- 2 한 호에 대한 원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$ 임을

설명할 때, 원의 중심 O가 원주각 APB의

(i) 한 변 위에 있는 경우

(ii) 안에 있는 경우

(iii) 밖에 있는 경우

로 나누어 증명하는 이유를 이해하게 한다.

즉, 한 경우의 증명은 다른 경우에 적용할 수 없다.

- 3 원주각 $\angle APB$ 의 한 변 위에 원의 중심이 있을 경우, 이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같고 삼각형의 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같음을 이용하므로 이에 대하여 먼저 확인하게 한다.

문제 1 원주각 $\angle APB$ 의 밖에 원의 중심 O가 있을 때, 원주각과 중심각의 크기 사이의 관계 설명하기

풀이 중심 O를 지나는 지름 PR을 그으면 1에 의하여

$$\angle RPB = \frac{1}{2}\angle ROB, \angle RPA = \frac{1}{2}\angle ROA$$

따라서

$$\begin{aligned}\angle APB &= \angle RPB - \angle RPA \\ &= \frac{1}{2}\angle ROB - \frac{1}{2}\angle ROA \\ &= \frac{1}{2}(\angle ROB - \angle ROA) \\ &= \frac{1}{2}\angle AOB\end{aligned}$$

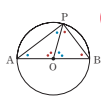
즉, $\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$ 이다.

- 4 원 O에서 호 AB에 대한 원주각은 여러 개 있지만 그에 대한 중심각의 크기는 모두 같으므로 원주각의 크기는 모두 같음을 알 수 있게 한다.

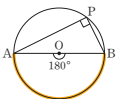
한개 풀기

다음 그림의 원 O에서 $\angle APB$ 의 크기를 구하여라.

풀이 (1) $\angle APB$ 는 호 AB에 대한 원주각이고, 호 AB에 대한 중심각의 크기는 120° 이므로 $\angle APB = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$ 이다.
 (2) $\angle APB$ 는 호 AB에 대한 원주각이고, 호 AB에 대한 중심각의 크기는 190° 이므로 $\angle APB = \frac{1}{2} \times 190^\circ = 95^\circ$ 이다.

답 (1) 60° (2) 95° 문제 2 다음 그림의 원 O에서 $\angle x$ 의 크기를 구하여라.

5 오른쪽 그림과 같이 현 AB가 원 O의 지름일 때, 호 AB에 대한 중심각 $\angle AOB$ 의 크기가 180° 이므로 원주각 $\angle APB$ 의 크기는 90° 이다.
 즉, 반원에 대한 원주각의 크기는 90° 이다.

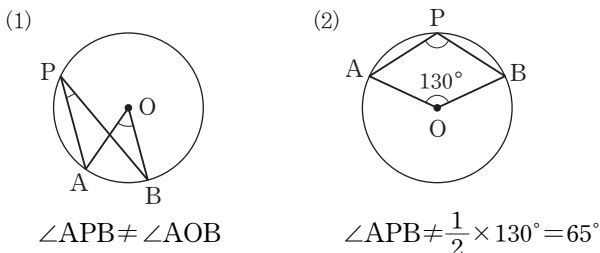
문제 3 다음 그림에서 \overline{AB} 가 원 O의 지름일 때, $\angle x$ 의 크기를 구하여라.

288 VII. 원의 성질

문제 2 원주각과 중심각의 크기 구하기

풀이 (1) $\angle x = 2\angle APB = 2 \times 50^\circ = 100^\circ$
 (2) $\angle x = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2} \times 230^\circ = 115^\circ$

오개념 진단 · 지도



5 반원에 대한 중심각의 크기는 180° , 원주각의 크기는 90° 임을 원주각과 중심각의 크기 사이에 대한 특수한 경우임을 확인시킨다. 반원에 대한 원주각의 크기가 90° 임은 원의 중요한 성질 중 하나이다. 특히 직각삼각형의 외접원을 다룰 때, 유용한 수단이 된다. 또한 직각삼각형의 빗변의 중점이 외접원의 중심임을 알게 한다.

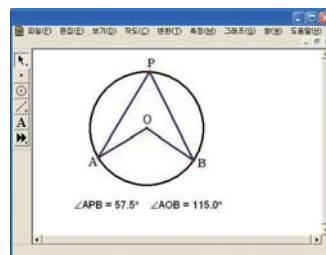
문제 3 반원에 대한 원주각과 중심각의 크기 구하기

풀이 (1) \overline{AB} 가 원 O의 지름이므로 $\angle APB = 90^\circ$
 따라서 $\angle x = 180^\circ - (90^\circ + 25^\circ) = 65^\circ$ 이다.
 (2) $\triangle ACB$ 에서 \overline{AB} 가 원 O의 지름이므로 $\angle ACB = 90^\circ$
 $\angle ABC = 180^\circ - (90^\circ + 40^\circ) = 50^\circ$
 따라서 $\angle x = \angle ABC = 50^\circ$ 이다.



참고 자료

컴퓨터 기하 프로그램을 사용하여 원주각과 중심각의 크기 사이의 관계를 확인하게 한다.

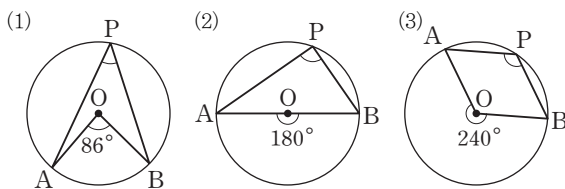


- 1 를 선택하여 원 O를 그린다.
- 2 를 선택하여 \overline{OA} , \overline{OB} , \overline{PA} , \overline{PB} 를 그린다.
- 3 를 선택한 후, 세 점 A, P, B를 차례로 선택한다.
- 4 측정(M) 메뉴의 각의 크기(A)를 선택하여 $\angle APB$ 의 크기를 측정한다.
- 5 3, 4를 선택하여 원 $\angle AOB$ 의 크기를 측정한다.
- 6 점 P의 위치를 움직여 보며 $\angle APB$ 의 크기와 $\angle AOB$ 의 크기를 비교하면 항상 $\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$ 임을 알 수 있다.

수준별 교수·학습 방법

원주각과 중심각의 크기 사이의 관계를 이해할 수 있다.

하 원주각의 크기를 예각, 직각, 둔각인 경우로 나누어 원주각의 크기를 구할 수 있도록 지도한다.

[문제] 다음 그림의 원 O에서 $\angle APB$ 의 크기를 구하여라.답 (1) 43° (2) 90° (3) 120°

상 원주각과 중심각의 크기 사이의 관계를 활용한 문제를 해결할 수 있도록 지도한다. (교과서 296쪽 확인 문제 4번 참조)

활동하기	학생들이 조작 활동을 통하여 흥미를 유발할 수 있도록 유도한다.
본문	전체 학습으로 학습 내용을 충분히 이해할 수 있도록 설명한다.
문제 4	원주각의 크기가 같으면 호의 길이가 같음을 문제를 통하여 이해할 수 있도록 설명한다.
문제 5, 6	스스로 문제를 풀 수 있도록 하며 친구들과 결과를 비교해 볼 수 있도록 한다.

원주각의 크기와 호의 길이 사이에는 어떤 관계가 있을까?

활동하기 원 모양의 색종이를 접는 활동을 통하여 같은 길이로 겹쳐지는 호의 길이와 같은 크기로 겹쳐지는 원주각의 크기를 비교하게 하여 이들의 길이와 크기가 같음을 직관적으로 이해하게 하는 활동하기이다.

- 호 AQ와 호 BQ의 길이는 같다.
- $\angle APQ$ 와 $\angle BPQ$ 의 크기는 같다.

6 한 원에서 중심각의 크기가 같은 두 부채꼴의 호의 길이는 같으므로 길이가 같은 호에 대한 중심각의 크기가 같음을 이용하여, 같은 길이의 호에 대한 원주각의 크기가 같음을 설명한다.

문제 4 원주각의 크기에 대한 호의 길이 구하기

풀이 원 O에서

$$\angle AOB = 2\angle APB, \angle COD = 2\angle CQD$$

$$\angle APB = \angle CQD \text{ 이므로}$$

$$\angle AOB = \angle COD$$

따라서 $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ 이다.

문제 5 원주각의 크기와 호의 길이 구하기

풀이 (1) 두 원주각에 대한 호의 길이가 같으므로

$$\angle x = 40^\circ \text{ 이다.}$$

(2) 두 원주각에 대한 호의 길이가 같으므로

$$\angle x = 30^\circ \text{ 이다.}$$

원주각의 크기와 호의 길이 사이에는 어떤 관계가 있을까?

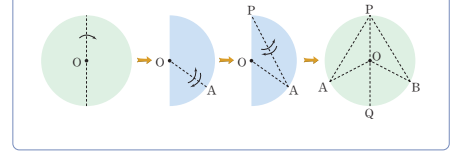
2/4차시

활동하기

다음과 같이 활동을 하여 보자.

준비물
색종이, 가위

- 색종이로 원 O를 만들고, 반으로 접는다.
- 반지름 OA를 기준으로 접었다가 펼친다.
- PA를 기준으로 접었다가 펼친다.



- 호 AQ와 호 BQ의 길이가 같은지 말하여 보자.
- $\angle APQ$ 와 $\angle BPQ$ 의 크기가 같은지 말하여 보자.

활동하기의 원 O에서 $\widehat{AQ} = \widehat{BQ}$ 이고, $\angle APQ = \angle BPQ$ 임을 알 수 있다.

6 한 원에서 호의 길이가 같으면 그에 대한 중심각의 크기는 같다.

오른쪽 그림과 같은 원 O에서 $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ 라 하면

$$\angle AOB = \angle COD$$

이다.

두 호 AB, CD에 대한 각각의 원주각 $\angle APB$, $\angle CQD$

를 잡으면 원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$$

$$\angle CQD = \frac{1}{2}\angle COD$$

이다.

따라서 $\angle APB = \angle CQD$ 이다.

그러므로 한 원에서 길이가 같은 호에 대한 원주각의 크기는 서로 같음을 알 수 있다.

2. 원주각의 성질 289

문제 6 원주각의 크기와 호의 길이 구하기

풀이 (1) $x : 6 = 60^\circ : 30^\circ$ 에서 $x : 6 = 2 : 1$ 이므로

$$x = 12 \text{ 이다.}$$

(2) $x : 16 = 28^\circ : 56^\circ$ 에서 $x : 16 = 1 : 2$ 이므로

$$x = 8 \text{ 이다.}$$

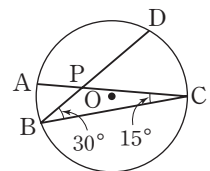
수준별 교수·학습 방법

한 원에서 길이가 같은 호에 대한 원주각의 크기가 같음을 알 수 있다.

하 길이가 같은 호에 대한 중심각의 크기가 같음을 설명하고, 중심각과 원주각 사이의 관계를 이해하도록 설명한다.

상 원주각의 크기와 호의 길이 사이의 관계를 활용한 문제를 해결할 수 있도록 지도한다.

[문제] 오른쪽 그림의 원 O에서 반지름의 길이가 4cm일 때, $\widehat{AB} + \widehat{CD}$ 의 길이를 구하여라.



답 2π cm

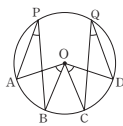
문제 4 다음은 오른쪽 그림과 같은 원 O에서 $\angle APB = \angle CQD$ 이면 $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ 임을 설명하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

오른쪽 그림의 원 O에서

$$\angle AOB = 2 \square, \angle COD = 2 \square$$

$$\angle APB = \angle CQD \text{ 이므로 } \angle AOB = \square$$

따라서 $\widehat{AB} = \square$ 이다.



이상을 정리하면 다음과 같다.

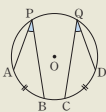
원주각과 호의 길이

① 한 원에서 길이가 같은 호에 대한 원주각의 크기는 같다.

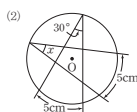
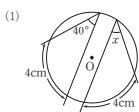
$$\widehat{AB} = \widehat{CD} \text{ 이면 } \angle APB = \angle CQD \text{ 이다.}$$

② 한 원에서 크기가 같은 원주각에 대한 호의 길이는 같다.

$$\angle APB = \angle CQD \text{ 이면 } \widehat{AB} = \widehat{CD} \text{ 이다.}$$

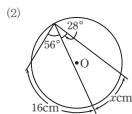
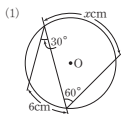


문제 5 다음 그림의 원 O에서 $\angle x$ 의 크기를 구하여라.



문제 6 다음 그림의 원 O에서 x 의 값을 구하여라.

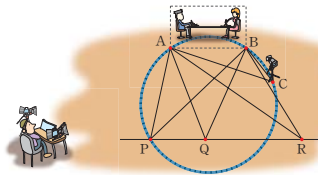
□ 한 원에서 원주각의 크기와 호의 길이는 정비례한다.



3/4차시 네 점이 한 원 위에 있을 조건은 무엇일까?

생각 열기

두 배우 A, B가 식사를 하는 모습을 카메라를 이용하여 촬영하려고 한다. 한 대의 카메라는 다음 그림과 같이 C지점에 설치되어 있다.



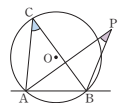
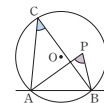
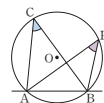
- (1) $\angle ACB$ 의 크기를 재어 보자.
- (2) 세 대의 카메라를 세 지점 P, Q, R에 설치하려고 할 때, $\angle APB$, $\angle AQB$, $\angle ARB$ 의 크기를 재어 보자.
- (3) $\angle APB$, $\angle AQB$, $\angle ARB$ 중에서 $\angle ACB$ 와 크기가 같은 각을 말하여 보자.

생각 열기에서 $\angle ARB < \angle APB < \angle AQB$ 이고, $\angle ACB = \angle APB$ 임을 알 수 있다.

네 점이 한 원 위에 있을 조건에 대하여 알아보자.

7 세 점 A, B, C가 한 원 O 위에 있고 직선 AB에 대하여 점 C와 같은 쪽에 점 P가 있을 때, 점 P의 위치에 따라 다음과 같이 세 가지로 나눌 수 있다.

- ① 점 P가 원 O 위에 있다.
- ② 점 P가 원 O의 안에 있다.
- ③ 점 P가 원 O의 밖에 있다.



①의 경우 $\angle APB$ 와 $\angle ACB$ 는 호 AB에 대한 원주각이므로 $\angle APB = \angle ACB$ 이다.

3/4차시 차시별 지도 방법

생각 열기

그림을 이용하여 직관적으로 느껴지는 각의 크기를 발표하게 한 후, 각의 크기를 재어 보게 하여 흥미를 유발할 수 있도록 한다.

본문, 문제 7

전체 학습으로 학생들이 결과를 찾아낼 수 있도록 발문을 한다. 점 P가 원 O 안과 밖에 있을 때를 설명하는 과정이므로 학생들이 이해할 수 있도록 함께 설명한다.

문제 8

수학적 의사소통을 활성화시키는 과제이므로 자신의 풀이를 설명할 수 있도록 지도한다.

네 점이 한 원 위에 있을 조건은 무엇일까?

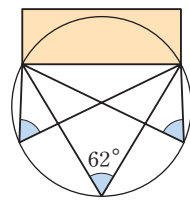
생각 열기

카메라로 촬영할 수 있는 각을 재어 보는 활동을 통하여 네 점이 한 원 위에 있을 조건을 알게 하려는 생각 열기이다.

- (1) $\angle ACB = 33^\circ$
- (2) $\angle APB = 33^\circ$, $\angle AQB = 44^\circ$, $\angle ARB = 23^\circ$
- (3) $\angle ACB = \angle APB$

보충 자료

카메라의 렌즈는 그 종류가 다양하다. 35 mm 렌즈를 사용하여 사진을 찍을 때, 찍을 수 있는 최대 각은 62° 라고 한다. 이 사진기로 어떤 경치의 양끝을 바라본 각의 크기가 62° 가 되는 지점들은 모두 한 원 위에 있다.

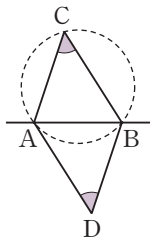


- 7** $\triangle ABC$ 의 외접원 O를 그리고, 점 P가 원 O 위에 있는 경우, 안에 있는 경우, 밖에 있는 경우로 나누어 $\angle ACB$ 와 $\angle APB$ 의 크기를 각각 비교하여 점 P가 외접원 O 위에 있을 조건을 알게 한다. 이때 삼각형의 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같음을 이용한다.

- 8 네 점이 한 원 위에 있지 않은 경우 각의 크기의 대소 관계를 이해하게 한다. 특히 두 점 C, D가 직선 AB에 같은 쪽에 있지 않으면

$$\angle ACB = \angle ADB$$

이어도 네 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있지 않음을 오른쪽 그림과 같이 그림을 그려서 이해할 수 있게 한다.



문제 7 네 점이 한 원 위에 있는 경우 찾기

풀이 (1) $\angle A \neq \angle D$ 이므로 네 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있지 않다.

$$(2) \angle BDC = 180^\circ - (95^\circ + 30^\circ) = 55^\circ, \angle BAC = 55^\circ$$

이므로 네 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있다.

따라서 네 점 A, B, C, D가 한 원 위에 있는 것은 (2)이다.

문제 8 네 점이 한 원 위에 있을 조건 찾기

풀이 평행사변형 ABCD에서 $\angle B = \angle D$ 이고, $\angle B = \angle B'$ 이다. 따라서 두 점 B', D가 직선 AC에 대하여 같은 쪽에 있고, $\angle D = \angle B'$ 이므로 네 점 A, C, D, B'은 한 원 위에 있다.

창의·인성 수학적인 방법을 활용하여 자신의 생각을 논리적으로 정확하게 표현하고, 다른 사람을 이해시킬 수 있도록 한다.

수준별 교수·학습 방법

네 점이 한 원 위에 있을 조건을 알 수 있다.

하 삼각형의 외접원과 한 호에 대한 원주각의 크기를 이용하여 네 점이 한 원 위에 있을 조건을 이해하게 한다.

[문제] 오른쪽 그림에서

$$\angle ACB = \angle ADB$$

일 때, 물음에 답하여라.

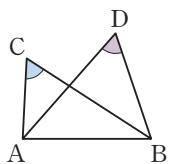
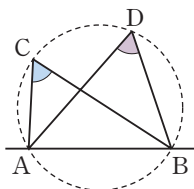
(1) $\triangle ABC$ 의 외접원을 그려라.

(2) $\angle ADB$ 의 크기는 $\angle ACB$ 의 크기와 같은가?

(3) 네 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있는가?

답 (1)

(2) 같다. (3) 한 원 위에 있다.



한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않은 두 내각의 크기의 합과 같다.

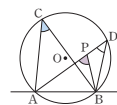
2의 경우에 오른쪽 그림과 같이 \overline{AP} 를 연장하여 원 O와 만나는 점을 D라 하면

$$\angle ADB = \angle APB - \angle DBP$$

이고, $\angle ADB = \angle ACB$ 이므로

$$\angle ACB = \angle APB - \angle DBP$$

이다. 따라서 $\angle APB > \angle ACB$ 이다.



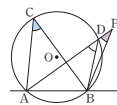
3의 경우에 오른쪽 그림과 같이 원 O와 만나는 점을 D라 하면

$$\angle ADB = \angle APB + \angle PBD$$

이고, $\angle ADB = \angle ACB$ 이므로

$$\angle ACB = \angle APB + \angle PBD$$

이다. 따라서 $\angle APB < \angle ACB$ 이다.



위의 1, 2, 3의 세 가지 경우 중에서 $\angle APB = \angle ACB$ 인 것은 1과 같이 점 P가 원 O 위에 있는 경우뿐이다.

따라서 $\angle APB = \angle ACB$ 이면 네 점 A, B, C, P는 한 원 위에 있음을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

네 점이 한 원 위에 있을 조건

두 점 C, D가 직선 AB에 대하여 같은 쪽에 있을 때,

$$\angle ACB = \angle ADB$$

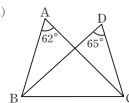
이면 네 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있다.



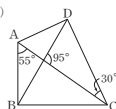
문제 7

다음 그림에서 네 점 A, B, C, D가 한 원 위에 있는 것을 찾아라.

(1)



(2)

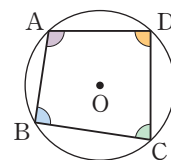


292 VII. 원의 성질

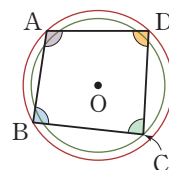
중

다음과 같은 문항을 준비하여 네 점이 한 원 위에 있을 조건을 설명할 수 있도록 지도한다.

[문제] 삼각형의 세 꼭짓점에 서로 다른 색을 칠하고, 외심을 중심으로 삼각형을 회전시키면 항상 하나의 원이 보인다. 그러나 사각형의 네 꼭짓점에 서로 다른 색을 칠하고 점 O를 중심으로 회전시키면 [그림 1]과 같은 경우는 하나의 원으로 보이지만, [그림 2]와 같은 경우는 두 개의 원이 보인다. 그 이유는 무엇일까?



[그림 1]



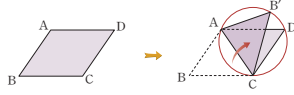
[그림 2]

답 [그림 2]에서 $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OD} \neq \overline{OC}$ 이므로 $\triangle ABC$ 의 외접원과 \overline{OC} 를 반지름으로 하는 원이 그려진다.

의사소통

문제 8

다음 그림의 평행사변형 ABCD에서 대각선 AC를 접는 선으로 하여 접었을 때, 점 B에 대응하는 점을 B'이라 하자. 네 점 A, C, D, B'은 한 원 위에 있음을 설명하여라.



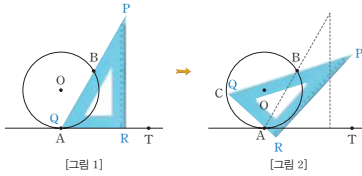
4/4차시 ② 원의 접선과 현이 이루는 각의 크기 사이에는 어떤 관계가 있을까?

활동하기!

다음과 같이 활동을 하여 보자.

준비물
삼각자, 컴퍼스

- ❶ 원 O를 그리고, 원 위의 한 점 A를 지나는 접선 AT를 그린다.
- ❷ [그림 1]과 같이 삼각자 PQR의 \overline{QR} 이 반직선 AT 위에 있도록 놓고, 선분 PQ가 원 O와 만나는 점을 B라 한다.
- ❸ [그림 2]와 같이 PQ와 \overline{QR} 이 각각 원 O 위의 두 점 B, A를 지나도록 삼각자를 옮긴다.



- (1) [그림 2]에서 삼각자의 점 Q가 원 O 위에 있는지 말하여 보자.
- (2) $\angle BAT$ 와 $\angle BCA$ 의 크기가 같은지 말하여 보자.

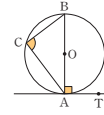
활동하기에서 $\angle BAT = \angle BCA$ 임을 알 수 있다.

2. 원주각의 성질 293

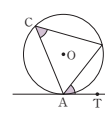
원 O 위의 한 점 A를 지나는 접선 AT와 현 AB가 이루는 각인 $\angle BAT$ 의 크기가 $\angle BAT$ 의 안에 있는 호에 대한 원주각 $\angle BCA$ 의 크기와 같은지 알아보자.

- 9 $\angle BAT$ 의 크기는 각의 크기에 따라 직각, 예각, 둔각인 세 가지 경우로 나눌 수 있다.

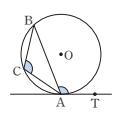
❶ 직각인 경우



❷ 예각인 경우



❸ 둔각인 경우



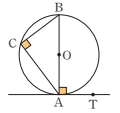
- ❶의 경우 오른쪽 그림과 같이 $\angle BAT = 90^\circ$ 일 때, 현 AB는 원 O의 지름이다.

이때 $\angle BCA$ 는 반원에 대한 원주각이므로 $\angle BCA = 90^\circ$ 이다.

따라서

$$\angle BAT = \angle BCA$$

이다.



함께 풀기 4

위의 ②와 같이 $\angle BAT$ 가 예각인 경우에 $\angle BAT = \angle BCA$ 임을 설명하여라.

풀이» 오른쪽 그림과 같이 점 A를 지나는 지름 AD를 두고 두 점 C, D를 연결하면

$$\angle DCA = 90^\circ, \angle DAT = 90^\circ$$

그러면 \widehat{BD} 에 대한 원주각의 크기는 모두 같으므로

$$\angle DAB = \angle DCB$$

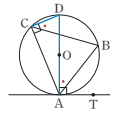
이다. 이때

$$\angle BAT = \angle DAT - \angle DAB = 90^\circ - \angle DAB$$

$$\angle BCA = \angle DCA - \angle DCB = 90^\circ - \angle DCB$$

이다.

따라서 $\angle BAT = \angle BCA$ 이다.



답» 풀이 참조

294 VII. 원의 성질

4/4차시 차시별 지도 방법

[교과 교실]

활동하기

원과 직각삼각자를 이용하는 조작 활동을 통하여 학생들이 흥미를 유발할 수 있도록 유도한다.

본문

세 가지 경우 중 반원에 대한 원주각의 크기에 대한 발문으로 반원에 대한 원주각의 크기를 알 수 있도록 유도한다.

함께 풀기 4, 문제 9

$\angle BAT$ 가 예각과 둔각인 경우를 설명하는 과정이므로 학생들이 이해할 수 있도록 함께 풀면서 설명한다.

문제 10, 11

스스로 문제를 풀 수 있도록 하며, 풀이 과정을 설명하도록 유도한다.

② 원의 접선과 현이 이루는 각의 크기 사이에는 어떤 관계가 있을까?

활동하기 원의 접선과 직각삼각자를 이용하여 원의 접선과 현이 이루는 각의 크기와 그 각의 안에 있는 원주각의 크기가 같음을 알게 하려는 활동하기이다.

- (1) 점 Q는 원 O 위에 있다.

- (2) $\angle BAT = \angle BCA$

- 9 $\angle BCA = \angle BAT$ 임을 직관적으로 이해하고 이것을 직각, 예각, 둔각인 경우로 나누어 연역적으로 설명한다. 이때 직각인 경우를 먼저 설명하고 이를 근거로 예각인 경우와 둔각인 경우를 설명할 수 있게 한다. 또 설명은 내용보다는 결과의 활용에 중점을 두고 지도한다.

문제 9 접선과 현이 이루는 각의 크기 구하기

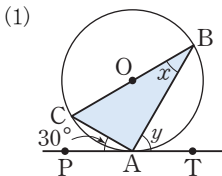
풀이 점 A를 지나는 지름 AD를 긋고, 두 점 C, D를 연결하면
 $\angle DCA = 90^\circ$, $\angle DAT = 90^\circ$
 그런데 \widehat{BD} 에 대한 원주각의 크기는 모두 같으므로
 $\angle BAD = \angle BCD$
 $\angle BAT = 90^\circ + \angle BAD$
 $\angle BCA = 90^\circ + \angle BCD$
 따라서 $\angle BAT = \angle BCA$ 이다.

문제 10 접선과 현이 이루는 각의 크기 구하기

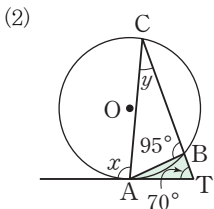
풀이 (1) $\angle ACB = \angle BAT$ 이므로
 $\angle x = 60^\circ$ 이다.
 (2) $\angle x = \angle ABC = 120^\circ$

문제 11 접선과 현이 이루는 각의 크기 구하기

풀이 접선과 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 안에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같으므로



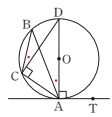
위의 그림에서 $\angle x = \angle PAC = 30^\circ$
 $\triangle ABC$ 에서 \widehat{BC} 가 원 O의 지름이므로
 $\angle BAC = 90^\circ$
 $\angle ACB = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 60^\circ$
 $\angle y = \angle ACB = 60^\circ$ 이다.



위의 그림에서 $\angle x = \angle CBA = 95^\circ$
 $\triangle BAT$ 에서 $95^\circ = \angle BAT + 70^\circ$
 $\angle BAT = 95^\circ - 70^\circ = 25^\circ$
 $\angle y = \angle BAT = 25^\circ$ 이다.

문제 9 다음은 앞의 그림과 같이 점 A를 지나는 지름 AD를 긋고, 두 점 C, D를 연결하면

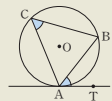
오른쪽 그림과 같이 점 A를 지나는 지름 AD를 긋고,
 두 점 C, D를 연결하면
 $\angle DCA = \square$
 $\angle DAT = 90^\circ$
 그런데 \widehat{BD} 에 대한 원주각의 크기는 모두 같으므로
 $\angle BAD = \square$
 이때 $\angle BAT = \square + \angle BAD$, $\angle BCA = 90^\circ + \square$ 이다.
 따라서 $\angle BAT = \angle BCA$ 이다.



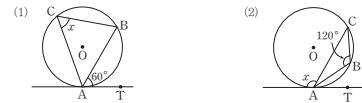
이상을 정리하면 다음과 같다.

접선과 현이 이루는 각

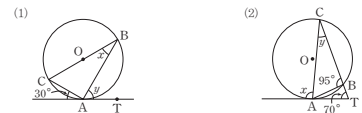
원의 점선과 그 점들을 지나는 현이 이루는 각의 크기는
 그 각의 안에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다.
 $\angle BAT = \angle BCA$



문제 10 다음 그림의 원 O에서 직선 AT가 접선일 때, $\angle x$ 의 크기를 구하여라.



문제 11 다음 그림의 원 O에서 직선 AT가 접선일 때, $\angle x$, $\angle y$ 의 크기를 구하여라.



2. 원주각의 성질 295

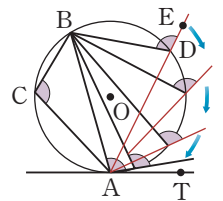
수준별 교수·학습 방법

원의 접선과 현이 이루는 각의 크기는 그 각 안에 있는 원주각의 크기와 같음을 알 수 있다.

하 다음의 문항을 이용하여 접선과 현이 이루는 각의 크기를 직관적으로 이해하게 한다.

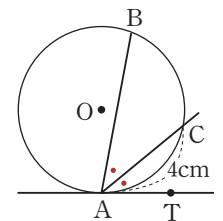
[문제] 오른쪽 그림과 같이 원 O에 내접하는 $\square BCAD$ 에서 반직선 AD가 접선 AT에 가까워지면 $\angle BDE$ 의 크기는 $\angle C$ 의 크기에 가까워질까?

답 가까워진다.



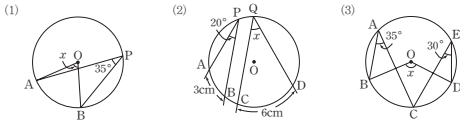
상 호의 길이와 원주각의 크기의 관계를 활용한 문제를 해결할 수 있도록 지도한다.

[문제] 오른쪽 그림과 같이 직선 AT가 원 O의 접선이고 $\angle BAT$ 의 이등분선과 원 O가 만나는 점을 C라 하자. $\widehat{AC} = 4\text{cm}$ 일 때, \widehat{BC} 의 길이를 구하여라. **답** 4cm





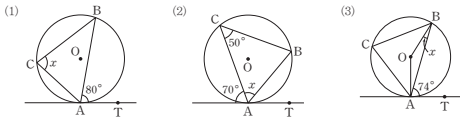
1 다음 그림의 원 O에서 $\angle x$ 의 크기를 구하여라.



2 다음 그림에서 네 점 A, B, C, D가 한 원 위에 있을 때, $\angle x$ 의 크기를 구하여라.



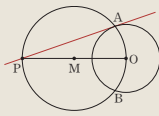
3 다음 그림의 원 O에서 직선 AT가 접선일 때, $\angle x$ 의 크기를 구하여라.



수익의 과정 의사소통 | 주문 | 문제 해결

4 다음 그림은 원 O 밖의 한 점 P에서 원 O에 접선을 긋는 과정을 나타낸 것이다. 이때 $\angle PAO = 90^\circ$ 이다. 그 이유를 말하여 보자.

- PO의 중점 M을 잡는다.
- MO를 반지름으로 하는 원 M을 그린다.
- 두 원 M과 O의 교점을 각각 A, B라 하고 직선 PA를 그린다.



확인하기

1 평가의 주안점 원주각과 중심각의 크기를 구할 수 있다.

- 풀이 (1) $\angle AOB = 2\angle APB$ 이므로 $\angle x = 70^\circ$
 (2) $x : 20^\circ = 6 : 3$ 에서 $3x = 120^\circ$ 이므로 $x = 40^\circ$ 이다.
 (3) 점 O와 점 C를 연결하면
 $\angle BOC = 2\angle BAC = 2 \times 35^\circ = 70^\circ$
 $\angle COD = 2\angle CED = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$
 $\angle BOD = \angle BOC + \angle COD = 70^\circ + 60^\circ = 130^\circ$ 이다.

2 평가의 주안점 네 점이 한 원 위에 있을 조건을 찾을 수 있다.

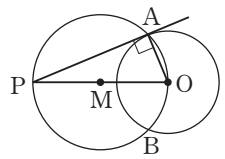
- 풀이 네 점 A, B, C, D가 한 원 위에 있을 때,
 (1) $\angle ABD = \angle ACD = 40^\circ$ 이므로 $\angle x = 180^\circ - (60^\circ + 40^\circ) = 80^\circ$ 이다.
 (2) $\angle ABD = \angle ACD = 80^\circ$ 이므로 $\angle x + 80^\circ = 110^\circ$, $\angle x = 30^\circ$ 이다.

3 평가의 주안점 접선과 현이 이루는 각의 크기를 구할 수 있다.

- 풀이 (1) $\angle BCA = \angle BAT$ 이므로 $\angle x = 80^\circ$
 (2) $\angle B = 70^\circ$ 이고, $\triangle ABC$ 에서 세 내각의 합은 180° 이므로 $\angle x = 180^\circ - (50^\circ + 70^\circ) = 60^\circ$ 이다.
 (3) $\angle BCA = \angle BAT = 74^\circ$
 이때 $\angle AOB = 2\angle ACB = 2 \times 74^\circ = 148^\circ$
 $\triangle OAB$ 에서 $\overline{OA} = \overline{OB}$ 이므로 $\angle x = \frac{1}{2}(180^\circ - 148^\circ) = 16^\circ$ 이다.

4 평가의 주안점 반원에 대한 원주각의 크기가 90° 임을 이용하여 원의 밖의 한 점 P에서 원에 접선을 작도하는 과정을 설명할 수 있다.

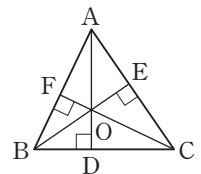
- 풀이 오른쪽 그림에서 두 점 A와 O를 이어 보면 원 M은 $\triangle PAO$ 의 외접원이다.
 이때 \overline{PO} 는 원 M의 지름이므로 $\triangle PAO$ 는 $\angle PAO = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다. 즉, $\overline{PA} \perp \overline{OA}$ 이므로 직선 PA는 원 O의 접선이다.



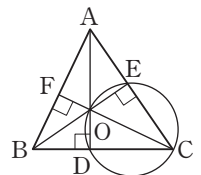
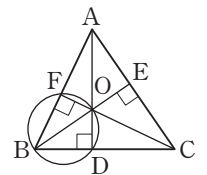
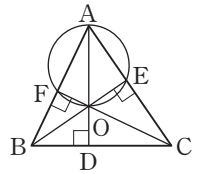
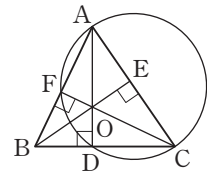
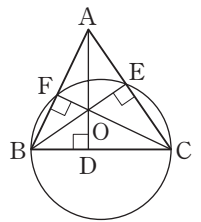
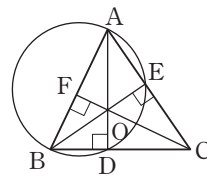
창의·인성 학생들이 자기의 생각을 자유롭게 표현할 수 있도록 분위기를 유도한다.

보충 문제

오른쪽 그림에서 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, $\overline{BE} \perp \overline{CA}$, $\overline{CF} \perp \overline{AB}$ 일 때, 원에 내접하는 사각형을 모두 찾아라.



답





지도 목표

1. 원에 내접하는 사각형의 성질을 이해하고, 이를 설명할 수 있게 한다.
2. 원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180° 임을 알 수 있게 한다.
3. 원에서 두 할선이 만나서 생기는 선분의 길이 사이의 관계를 알 수 있게 한다.
4. 원에서 할선과 접선의 선분의 길이 사이의 관계를 알 수 있게 한다.

지도상의 유의점

1. 원에 내접하는 사각형의 성질은 활용에 중점을 두어 지도한다.
2. 원에서 선분의 길이 사이의 관계는 삼각형의 닮음을 이용하여 삼각형의 닮음의 성질을 이해하고 있는지 확인한 후 지도한다.
3. 원의 두 할선이 서로 만나는 경우를 관찰할 수 있는 수학적 태도를 기르게 한다.

1/2차시 차시별 지도 방법

[교과 교실]

활동하기	원 모양의 색종이를 이용하는 조작 활동을 통하여 학생들의 흥미를 유발할 수 있도록 한다.
본문 함께 풀기 1, 2	원에 내접하는 사각형에 대한 성질을 학생들이 찾아낼 수 있도록 적절한 발문을 유도한다.
문제 1, 2, 3	문제를 푼 후 풀이 과정을 설명하도록 하고, 다른 학생의 풀이 방법을 경청하도록 지도한다.

원에 내접하는 사각형에는 어떤 성질이 있을까?

활동하기 원 모양의 색종이와 원에 내접하는 사각형의 한 내각을 잘라내는 활동을 통하여 원에 내접하는 사각형의 성질을 알게 하는 활동하기이다.

- (1) $\square ABCD$ 는 원에 내접한다.
- (2) $\angle a + \angle c$ 의 크기는 평각을 이루므로 180° 이다.



- 학습 목표 원주각의 성질을 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.
- 배울 용어 할선



원과 사각형은 기본 도형 중의 하나로서, 고대부터 여러 가지 다양한 디자인 작품에 활용되고 있다. 오른쪽 그림은 원에 내접하는 사각형을 이용한 디자인이다.

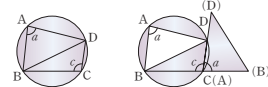


1/2차시 원에 내접하는 사각형에는 어떤 성질이 있을까?

활동하기

다음과 같이 활동을 하여 보자.

- 1 원 위에 네 점 A, B, C, D를 잡는다.
- 2 삼각형 ABD를 잘라낸다.
- 3 반직선 BC 위에 잘라낸 삼각형 ABD를 그림과 같이 놓는다.



- (1) 사각형 ABCD는 원에 내접하는지 말하여 보자.
- (2) 그림에서 $\angle a$ 와 $\angle c$ 의 크기의 합이 몇 도인지 말하여 보자.

- 1 원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180° 임을 알아보자.
오른쪽 그림과 같이 $\square ABCD$ 가 원 O에 내접할 때,
한 호에 대한 원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$ 이므로

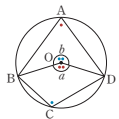
$$\angle A = \frac{1}{2} \angle a, \angle C = \frac{1}{2} \angle b$$

이다.

그런데 $\angle a + \angle b = 360^\circ$ 이므로

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2} (\angle a + \angle b) = 180^\circ$$

이다. 마찬가지로 $\angle B + \angle D = 180^\circ$ 이다.



- 1 다음과 같이 원에 내접하는 사각형의 한 쌍의 내각의 크기의 합이 180° 임을 설명할 수도 있다.

원에 내접하는 $\square ABCD$ 에서

$$\angle PCB = \angle BAC \quad \dots\dots ①$$

$$\angle QCD = \angle CAD \quad \dots\dots ②$$

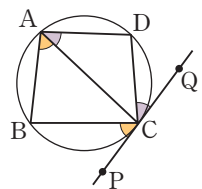
①, ②에서

$$\angle A = \angle BAC + \angle CAD$$

$$= \angle PCB + \angle QCD$$

따라서 $\angle PCB + \angle QCD + \angle C = 180^\circ$ 이므로

$$\angle A + \angle C = 180^\circ \text{이다.}$$



문제 1 원에 내접하는 사각형의 내각의 크기 구하기

풀이 사각형이 원에 내접하므로

$$(1) \angle x + 99^\circ = 180^\circ \text{이므로 } \angle x = 81^\circ \text{이다.}$$

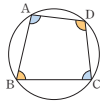
$$\angle y + 96^\circ = 180^\circ \text{이므로 } \angle y = 84^\circ \text{이다.}$$

$$(2) \angle x + 70^\circ = 180^\circ \text{이므로 } \angle x = 110^\circ \text{이다.}$$

$$\angle y + 90^\circ = 180^\circ \text{이므로 } \angle y = 90^\circ \text{이다.}$$

즉, 원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180° 이다.

$$\angle A + \angle C = 180^\circ, \angle B + \angle D = 180^\circ$$



문제 1 다음 그림의 원 O에서 $\angle x$, $\angle y$ 의 크기를 구하여라.



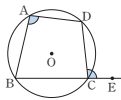
문제 2

오른쪽 그림과 같이 원 O에 내접하는 $\square ABCD$ 에서 변 BC의 연장선 위에 점 E를 잡으면

$$\angle DCE = \angle A$$

임을 설명하여라.

풀이 $\square ABCD$ 가 원에 내접하므로 $\angle A + \angle BCD = 180^\circ$
또 $\angle BCE$ 는 평각이므로 $\angle BCD + \angle DCE = 180^\circ$
따라서 $\angle DCE = \angle A$ 이다.



답 > 풀이 참조

문제 2 다음 그림의 원 O에서 $\angle x$, $\angle y$ 의 크기를 구하여라.



문제 3 다음 그림의 원 O에서 $\angle x$, $\angle y$ 의 크기를 구하여라.



문제 2 원에 내접하는 사각형의 외각의 크기를 알 때, 내각의 크기 구하기

풀이 사각형이 원에 내접하므로

$$(1) \angle x = 120^\circ, \angle y = 105^\circ$$

$$(2) \angle y = \frac{1}{2} \times 150^\circ = 75^\circ$$

$$\angle x = \angle y = 75^\circ$$

문제 3 원에 내접하는 사각형의 내각과 외각의 크기 구하기

풀이 (1) \overline{BC} 는 원 O의 지름이므로 $\triangle ABC$ 에서 $\angle BAC = 90^\circ$

$$\angle x = 180^\circ - (90^\circ + 25^\circ) = 65^\circ$$

$$\angle x + \angle y = 180^\circ \text{이므로 } \angle y = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ \text{이다.}$$

$$(2) \angle BAD = \angle DCE = 110^\circ \text{이므로 } 40^\circ + \angle CAD = 110^\circ$$

$$\angle CAD = 70^\circ$$

$$\overline{AC} \text{는 원 O의 지름이므로 } \angle ADC = 90^\circ$$

$$\triangle DAC \text{에서 } \angle ACD = 180^\circ - (90^\circ + 70^\circ) = 20^\circ$$

$$\angle x = \angle ACD = 20^\circ \text{이다.}$$

문제 2

한 쌍의 대각의 크기의 합이 180° 인 사각형은 원에 내접함을 설명하여라.

풀이 $\square ABCD$ 에서

$$\angle B + \angle D = 180^\circ \quad \dots\dots ①$$

라 하자.

오른쪽 그림과 같이 세 점 A, B, C를 지나는 원 O 위에 한 점 E를 잡으면 사각형 ABCE는 원 O에 내접하므로

$$\angle B + \angle E = 180^\circ \quad \dots\dots ②$$

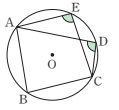
①, ②에서

$$\angle D = \angle E$$

이므로 점 D는 원 O 위에 있다.

따라서 네 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있으므로 사각형 ABCD는 원 O에 내접한다.

답 > 풀이 참조



문제 4

다음 그림에서 $\square ABCD$ 가 원에 내접하는 것을 찾아라.



2/2차시 > 원에서 두 합선의 선분의 길이 사이에는 어떤 관계가 있을까?

수학 탐구

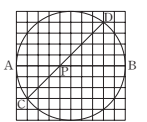
실리콘 웨이퍼 (silicon wafer)란 집적회로를 만드는 얇은 규소판이다.

오른쪽 그림은 실리콘 웨이퍼의 일부를 나타낸 것이다.

원에서 두 현 AB, CD가 만나는 점을 P, 한 눈금의 길이를 1이라 하자.

(1) PA , PB , PC , PD 의 길이를 구하여 보자.

(2) $PA \times PB$, $PC \times PD$ 의 값을 구하여 보자.



수학 탐구에서 $PA \times PB = PC \times PD$ 임을 알 수 있다.

문제 4 원에 내접하는 사각형 찾기

풀이 (1) $\angle B + \angle D = 180^\circ$ 이므로 $\square ABCD$ 는 원에 내접한다.

(2) $\angle B + \angle D = 80^\circ + 110^\circ = 190^\circ$ 이므로 $\square ABCD$ 는 원에 내접하지 않는다.

따라서 원에 내접하는 사각형은 (1)이다.

수준별 교수·학습 방법

원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180° 임을 알 수 있다.

상 원에 내접하는 사각형의 성질을 알고 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있도록 응용 문제를 제시한다.

[문제] 오른쪽 그림에서

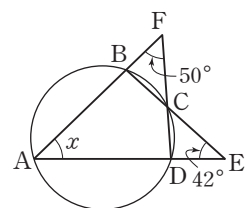
$\square ADCB$ 는 원에 내접

하고, $\angle E = 42^\circ$,

$\angle F = 50^\circ$ 일 때, $\angle x$ 의

크기를 구하여라.

답 44°



2/2차시 차시별 지도 방법

생각 열기	객관적으로 잴 수 있는 길이를 이용하여 두 할선의 선분의 길이 사이의 관계를 확인할 수 있도록 지도한다.
본문	삼각형의 닮음을 이용하여 설명하며, 하 수준의 학생을 고려하여 충분한 설명을 제공한다.
문제 5	스스로 문제를 해결할 수 있도록 시간을 여유있게 준다.
함께 풀기 3	삼각형의 닮음을 이용하여 설명하며, 다른 풀이 방법에 대하여 발표할 수 있도록 한다.
문제 6, 7	문제를 스스로 풀게 하고 친구들과 결과를 비교해 볼 수 있도록 한다.
함께 풀기 4	두 할선의 선분의 길이 사이의 관계에서 한 할선을 접선에 가깝게 이동하는 PPT 자료를 보여 주며 두 할선 사이의 길이 관계를 직관적으로 알게 한 후 삼각형의 닮음을 이용하여 설명한다.
문제 8	문제를 푼 후 풀이 과정을 설명하도록 하고, 다른 학생의 풀이에 대한 설명을 경청하도록 한다.

원에서 두 할선의 선분의 길이 사이에는 어떤 관계가 있을까?

생각 열기 원 안의 한 점에서 만나는 두 할선의 선분의 길이의 곱을 통하여 원에서의 비례 관계의 성질을 알게 하려는 생각 열기이다.

- (1) 주어진 길이를 구하면 $\overline{PA}=4$, $\overline{PB}=6$,
 $\overline{PC}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$, $\overline{PD}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$ 이다.
 (2) $\overline{PA} \times \overline{PB}=4 \times 6=24$
 $\overline{PC} \times \overline{PD}=3\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}=24$

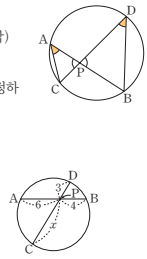
- 2** 원 O 안의 한 점 P에 대하여 점 P를 지나는 두 직선이 원과 만나는 점을 각각 A, B, C, D라 할 때, 점 P나 원 O의 위치 또는 원 O의 반지름의 길이가 달라지지 않는다면 네 점 A, B, C, D의 위치에 관계없이 $\overline{PA} \times \overline{PB}$ 의 값과 $\overline{PC} \times \overline{PD}$ 의 값은 항상 일정함을 $\triangle PAC$ 와 $\triangle PDB$ 의 닮음을 이용하여 알도록 지도한다. 이때 $\triangle PAD$ 와 $\triangle PCB$ 의 닮음을 이용하여 설명할 수도 있다.

300쪽

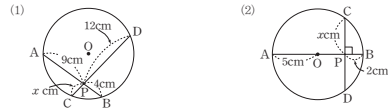
한 원에서 두 현 AB, CD가 만나는 점을 P라 할 때, $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$ 임을 알아보자.

- 2** 오른쪽 그림의 $\triangle PAC$ 와 $\triangle PDB$ 에서
 $\angle PAC = \angle PDB$ (원주각), $\angle APC = \angle DPB$ (맞꼭지각)
 이므로 $\triangle PAC \sim \triangle PDB$ 이다.
 이때 두 닮은 삼각형의 대응하는 변의 길이의 비는 일정하므로 $\overline{PA} : \overline{PD} = \overline{PC} : \overline{PB}$ 이다.
 따라서 $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$ 이다.

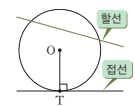
보기 오른쪽 그림에서 $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$ 이므로
 $6 \times 4 = x \times 3$ 에서 $x=8$ 이다.



문제 5 다음 그림의 원 O에서 x의 값을 구하여라.



원과 직선이 한 점에서 만날 때, 그 직선을 원의 접선이라 하고, 원과 직선이 두 점에서 만날 때, 그 직선을 원의 **할선**이라고 한다.



- 3** 오른쪽 그림의 원 O에서 두 할선 AB, CD가 만나는 점을 P라 할 때, $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$ 임을 설명하여라.

풀이 오른쪽 그림의 $\triangle PAD$ 와 $\triangle PCB$ 에서
 $\angle P$ 는 공통인 각, $\angle ADP = \angle CBP$ (원주각)
 이므로 $\triangle PAD \sim \triangle PCB$ 이다.
 이때 닮은 두 삼각형에서 대응하는 변의 길이의 비는 일정하므로
 $\overline{PA} : \overline{PC} = \overline{PD} : \overline{PB}$
 이다. 따라서 $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$ 이다.

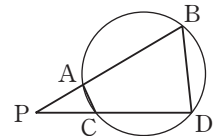
답 풀이 참조

300 VII. 원의 성질

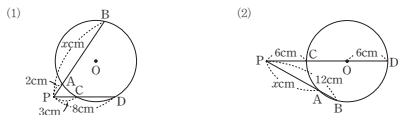
문제 5 원에서 할선의 선분의 길이 구하기

- 풀이** (1) $x \times 12 = 9 \times 4$ 에서
 $12x = 36$ 이므로 $x=3$ 이다.
 (2) $\overline{OB} \perp \overline{CD}$ 이므로 $\overline{PC} = \overline{PD}$
 $\overline{PC}^2 = \overline{PA} \times \overline{PB}$ 이므로
 $x^2 = (5+3) \times 2 = 16$
 이때 $x > 0$ 이므로 $x=4$ 이다.

- 3** 오른쪽 그림과 같이 두 선분 AC와 BD를 그어 설명하여도 된다. 이 경우에는 $\triangle PAC$ 와 $\triangle PDB$ 에서
 $\angle P$ 는 공통인 각, $\angle PCA = \angle PBD$ 이므로
 $\triangle PAC \sim \triangle PDB$ (AA 닮음)
 따라서 $\overline{PA} : \overline{PD} = \overline{PC} : \overline{PB}$ 이므로
 $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$
 이다.

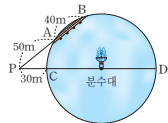


문제 6 다음 그림의 원 O에서 x 의 값을 구하여라.



문제 7

오른쪽 그림과 같이 중앙에 분수대가 있는 원 모양의 호수에 $\overline{AB}=40\text{m}$ 인 다리가 놓여 있다. 호수의 중심에 있는 분수대를 지나는 직선이 \overline{AB} 의 연장선과 만나는 점을 P라 할 때, $\overline{PA}=50\text{m}$, $\overline{PC}=30\text{m}$ 이다. 이 호수의 반지름의 길이를 구하여라.



4

문제 8

오른쪽 그림과 같이 원 O의 밖에 있는 한 점 P에서 원 O에 그은 접선의 접점을 T라 하고, 점 P를 지나는 할선이 원 O와 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때,

$$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$$

임을 설명하여라.

풀이 $\triangle PAT$ 와 $\triangle PTB$ 에서

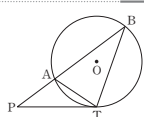
$$\angle PTA = \angle PBT, \angle P \text{는 공통인 각}$$

이므로 $\triangle PAT \sim \triangle PTB$ 이다.

이때 닮은 두 삼각형에서 대응하는 변의 길이의 비가 같으므로

$$\overline{PT} : \overline{PB} = \overline{PA} : \overline{PT}$$

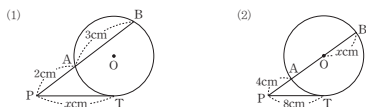
따라서 $\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$ 이다.



답 풀이 참조

문제 8

다음 그림에서 \overline{PT} 가 원 O의 접선일 때, x 의 값을 구하여라.



2. 원주의 성질 301

오개념 진단 · 지도

한 원에서 두 현 AB, CD의 연장선이 원 밖의 한 점 P에서 만날 때, $\overline{PA} \cdot \overline{AB} = \overline{PC} \cdot \overline{CD}$ 와 같이 계산하지 않도록 유의하게 한다.

문제 6 원에서 할선의 선분의 길이 구하기

풀이 (1) $3 \times 8 = 2 \times x$ 에서 $2x = 24$ 이므로 $x = 12$ 이다.

(2) $x \times 12 = 6 \times 18$ 에서 $12x = 108$ 이므로 $x = 9$ 이다.

문제 7 원에서 할선의 선분의 길이 구하기

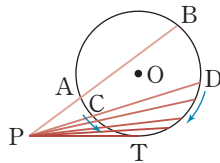
풀이 호수의 반지름의 길이를 $r\text{m}$ 라 하면 $50 \times (50 + 40) = 30 \times (30 + 2r)$

$$2r = 120, r = 60$$

따라서 호수의 반지름의 길이는 60m이다.

4 원 O의 두 할선 AB, CD가 만나는 점을 P라 하고, 점 P에서 원 O에 그은 접선의 접점을 T라 하자. 점 P를 중심으로 할선 PD를 접점 T 쪽으로 회전시키면 두 점 C, D는 접점 T가 있는 쪽으로 이동하게 되어 $\overline{PC} = \overline{PT}$, $\overline{PD} = \overline{PT}$ 가 된다.

따라서 $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD} = \overline{PT} \cdot \overline{PT} = \overline{PT}^2$ 이 성립한다.



문제 8 원에서 할선의 선분의 길이 구하기

풀이 (1) $x^2 = 2 \times (2 + 3)$, $x^2 = 10$

이때 $x > 0$ 이므로 $x = \sqrt{10}$ 이다.

(2) $4 \times (4 + 2x) = 8^2$ 에서

$8x = 48$ 이므로 $x = 6$ 이다.

수준별 교수·학습 방법

원에서 두 할선의 선분의 길이 사이의 관계를 알 수 있다.

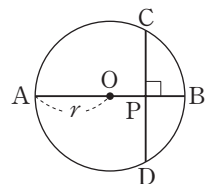
중

다양한 예시 문항을 준비하여 학생이 두 할선의 선분의 길이 사이의 관계에 대한 성질을 설명할 수 있게 한다.

[문제] 오른쪽 그림과 같은 원 O에서

$$\overline{PC}^2 = r^2 - \overline{OP}^2$$

이 성립함을 설명하여라.



답 $\overline{PC} = \overline{PD}$ 이므로

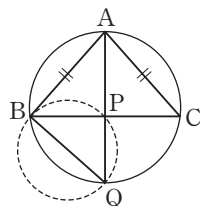
$$\overline{PC}^2 = (r + \overline{OP})(r - \overline{OP}) = r^2 - \overline{OP}^2$$

상

원의 할선과 접선의 선분의 길이 관계에 대한 성질을 활용할 수 있는 문제를 제시하여 학생의 사고를 넓힐 수 있도록 지도한다.

[문제] 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AC}$

인 이등변삼각형 ABC에서 꼭짓점 A를 지나는 직선이 밑변 BC와 만나는 점을 P, 외접원과 만나는 점을 Q라 하면 $\overline{AB}^2 = \overline{AP} \cdot \overline{AQ}$ 가 됨을 설명하여라.



답 $\triangle ABC$ 가 이등변삼각형이므로

$$\angle ABC = \angle ACB$$

이때 $\angle ACB = \angle AQB$ 이므로

$$\angle ABC = \angle AQB$$

따라서 세 점 B, P, Q는 한 원 위에 있고 \overline{AB} 는 접선이므로

$$\overline{AB}^2 = \overline{AP} \cdot \overline{AQ}$$



확인하기

1 평가의 주안점 원에 내접하는 사각형의 내각과 외각의 크기를 구할 수 있다.

- 풀이 (1) $\angle x + 65^\circ = 180^\circ$ 이므로 $\angle x = 115^\circ$ 이다.
 $\angle y + 80^\circ = 180^\circ$ 이므로 $\angle y = 100^\circ$ 이다.
 (2) $\angle x + 70^\circ = 180^\circ$ 이므로 $\angle x = 110^\circ$ 이고,
 $\angle y = \angle DAB = 105^\circ$ 이다.
 (3) $\triangle BCD$ 에서 $\angle x = 180^\circ - (60^\circ + 50^\circ) = 70^\circ$
 $\angle x + \angle y = 180^\circ$ 이므로 $70^\circ + \angle y = 180^\circ$, $\angle y = 110^\circ$ 이다.

2 평가의 주안점 원에서 할선의 선분의 길이를 구할 수 있다.

- 풀이 (1) $3 \times x = 5 \times 9$ 이므로 $x = 15$
 (2) $6 \times (6 + x) = 4 \times (4 + 11)$
 $6x = 24$
 $x = 4$
 (3) $PA = 6 - x$ 이므로 $(6 - x)(6 + x) = 4 \times 5$
 $x^2 = 16$
 이때 $x > 0$ 이므로 $x = 4$ 이다.

3 평가의 주안점 원에서 할선과 접선의 선분의 길이를 구할 수 있다.

- 풀이 (1) $x^2 = 5 \times (5 + 15) = 100$
 $x > 0$ 이므로 $x = 10$ 이다.
 (2) $x^2 = (9 - 5)(9 + 5) = 56$
 $x > 0$ 이므로 $x = 2\sqrt{14}$
 (3) 원 O의 반지름의 길이가 x 이므로
 $8 \times (8 + 2x) = 12^2$
 $16x = 80$
 $x = 5$
 이다.

4 평가의 주안점 삼각형의 내심과 외심을 이용하여 네 점이 한 원 위에 있음을 설명할 수 있다.

- 풀이 $\angle P = 60^\circ$ 이고, 점 I가 $\triangle PAB$ 의 내심이므로
 $\angle BIA = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle BPA = 90^\circ + \frac{1}{2} \times 60^\circ$
 $= 120^\circ$

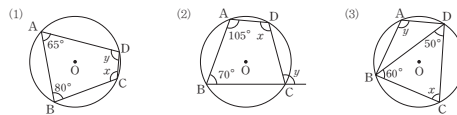
또 점 O가 $\triangle PAB$ 의 외심이므로 ①

$\angle BOA = 2 \angle BPA = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$ ②

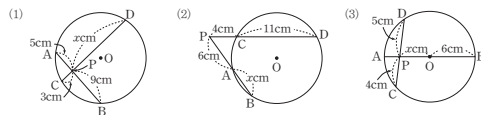
①, ②에서 $\angle BIA = \angle BOA = 120^\circ$ 이므로
 네 점 A, B, O, I는 한 원 위에 있다.



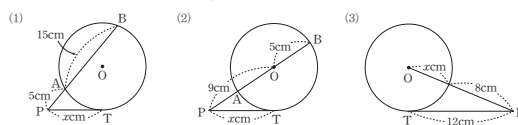
1 다음 그림의 원 O에서 $\angle x$ 와 $\angle y$ 의 크기를 구하여라.



2 다음 그림의 원 O에서 x 의 값을 구하여라.

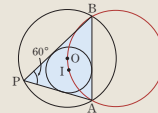


3 다음 그림에서 \overline{PT} 가 원 O의 접선일 때, x 의 값을 구하여라.



수학적 과정 | 의사소통 | 추론 | 문제 해결

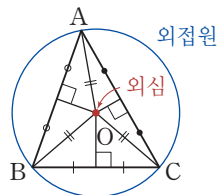
4 오른쪽 그림은 $\triangle PAB$ 의 외접원 O와 내접원 I를 그린 것이다. $\angle P = 60^\circ$ 일 때, 네 점 A, B, O, I는 한 원 위에 있음을 설명하여라.



보충 자료

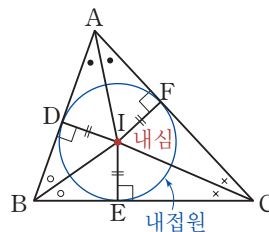
• 삼각형의 외심과 외접원

$\triangle ABC$ 의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만나고, 이 점(외심)에서 세 꼭짓점까지의 거리는 같다. ($OA = OB = OC$)



• 삼각형의 내심과 내접원

$\triangle ABC$ 의 세 내각의 이등분선은 한 점에서 만나고, 이 점(내심)에서 세 변에 이르는 거리는 같다. ($ID = IE = IF$)





스스로 정리하기

1. (1) $\frac{1}{2}$ (2) 같다
 (3) 원주각 (4) 할선
 (5) $\overline{PC} \cdot \overline{PD}$



기초 다지기

- 1 평가의 주안점 원에서 원주각과 원에 내접하는 사각형의 내각의 크기를 구할 수 있다.

풀이 (1) $\angle x = 2 \times 40^\circ = 80^\circ$
 (2) $\angle x + 72^\circ = 180^\circ$ 이므로 $\angle x = 108^\circ$ 이다.
 $\angle y + 100^\circ = 180^\circ$ 이므로 $\angle y = 80^\circ$ 이다.

- 2 평가의 주안점 원에서 접선과 현이 이루는 각의 크기를 구할 수 있다.

풀이 $\angle BAT = \angle ACB = 55^\circ$

- 3 평가의 주안점 원에서 두 할선의 선분의 길이를 구할 수 있다.

풀이 (1) $x \times 10 = 5 \times 8$
 $10x = 40, x = 4$
 (2) $4 \times (4 + x) = 3 \times (3 + 5)$
 $4 + x = 6, x = 2$



기본 익히기

- 4 평가의 주안점 원에서 접선과 현이 이루는 각의 크기를 구할 수 있다.

풀이 $\angle ABC = \angle CAT = 62^\circ$ 이므로
 $\angle AOC = 2 \times \angle ABC$
 $= 2 \times 62^\circ = 124^\circ$
 이다.



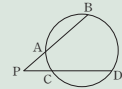
스스로 정리하기

1. 다음 ☐ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

- (1) 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 ☐이다.
 (2) 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 ☐.
 (3) 원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 안에 있는 호에 대한 ☐의 크기와 같다.
 (4) 원과 직선이 두 점에서 만날 때, 그 직선을 원의 ☐이라고 한다.
 (5) 원에서 두 할선 AB, CD가 만나는 점을 P라 하면

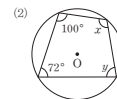
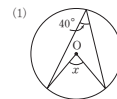
$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$

이다.

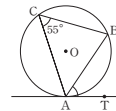


기초 다지기

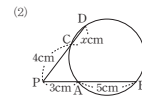
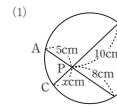
1 다음 그림의 원 O에서 $\angle x, \angle y$ 의 크기를 구하여라.



2 오른쪽 그림에서 직선 AT가 원 O의 접선이고, $\angle BCA = 55^\circ$ 일 때, $\angle BAT$ 의 크기를 구하여라.



3 다음 그림에서 x의 값을 구하여라.



원주각과 중심각, 원에 내접하는 사각형

접선과 현이 이루는 각

두 할선의 선분의 길이 사이의 관계

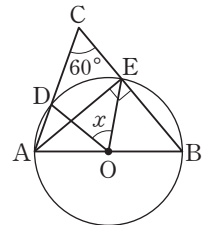
2. 원주각의 성질 303

- 5 평가의 주안점 원에서 같은 길이의 호에 대한 원주각의 크기를 구할 수 있다.

풀이 $\widehat{AB} = \widehat{BC}$ 이므로 $\angle ADB = \angle BDC = 40^\circ$,
 $\angle ADC = 80^\circ, \angle ACD = \angle ABD = 58^\circ$
 $\triangle ACD$ 의 세 내각의 크기의 합은 180° 이므로
 $\angle CAD = 180^\circ - (80^\circ + 58^\circ) = 42^\circ$ 이다.

- 6 평가의 주안점 원에서 원주각과 중심각의 크기를 구할 수 있다.

풀이 (1) 점 A와 점 E를 이으면
 \widehat{AB} 가 원 O의 지름이므로
 $\angle AEB = \angle AEC = 90^\circ$
 $\triangle CAE$ 에서
 $\angle CAE = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 30^\circ$
 $\angle x = 2 \times \angle DAE = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$
 이다.



(2) 점 A와 점 P를 이으면
 $\angle APB = \frac{1}{2} \times \angle AOB = 25^\circ$
 $\angle CPA = 60^\circ - 25^\circ = 35^\circ$
 $\angle x = \angle CPA = 35^\circ$ 이다.

- 7 평가의 주안점 원에 내접하는 사각형에서 내각의 크기를 구할 수 있다.

풀이 $\triangle DAB$ 에서 $\overline{DA} = \overline{DB}$ 이므로

$$\angle DAB = \frac{1}{2}(180^\circ - 34^\circ) = 73^\circ$$

$$\angle C + \angle A = 180^\circ \text{이므로}$$

$$\angle C + 73^\circ = 180^\circ$$

$$\angle C = 107^\circ$$

이다.

- 8 평가의 주안점 원에 내접하는 사각형에서 내각과 외각의 크기를 구할 수 있다.

풀이 $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$ 이므로

$$(\angle x + 45^\circ) + 110^\circ = 180^\circ$$

$$\angle x = 25^\circ$$

$$\triangle ABD \text{에서 } \angle BAD = 45^\circ + 25^\circ = 70^\circ$$

$$\angle y = 180^\circ - (70^\circ + 60^\circ) = 50^\circ$$

$$\angle CBD = \angle CAD = 25^\circ \text{이므로}$$

$$\angle z = \angle y + \angle CAD$$

$$= 50^\circ + 25^\circ = 75^\circ$$

이다.

- 9 평가의 주안점 원에서 할선의 선분의 길이를 구할 수 있다.

풀이 만남의 광장에서 식물원까지의 거리를 x m라 하면

$$300 \times x = 120 \times 450$$

$$3x = 540$$

$$x = 180$$

따라서 만남의 광장에서 식물원까지의 거리는 180m이다.

- 10 평가의 주안점 원에서 접선과 할선의 선분의 길이를 구할 수 있다.

풀이 (1) $x \times (x+2) = (8-4)(8+4)$ 이므로

$$x^2 + 2x - 48 = 0$$

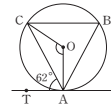
$$(x+8)(x-6) = 0$$

$$x = -8 \text{ 또는 } x = 6$$

이때 $x > 0$ 이므로 $x = 6$ 이다.

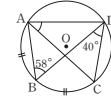
기본 익히기

- 4 오른쪽 그림에서 \overline{AT} 가 원 O의 접선이고, $\angle CAT = 62^\circ$ 일 때, $\angle AOC$ 의 크기를 구하여라.



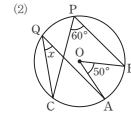
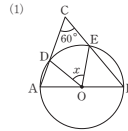
접선과 현이 이루는 각

- 5 오른쪽 그림의 원 O에서 $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\angle ABD = 58^\circ$, $\angle BDC = 40^\circ$ 일 때, $\angle CAD$ 의 크기를 구하여라.



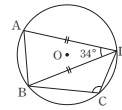
원주각과 호의 길이 사이의 관계

- 6 다음 그림의 원 O에서 $\angle x$ 의 크기를 구하여라.



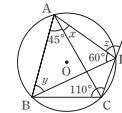
원주각과 중심각

- 7 오른쪽 그림의 원 O에서 $\overline{AD} = \overline{BD}$, $\angle ADB = 34^\circ$ 일 때, $\angle C$ 의 크기를 구하여라.



내 접이 한 원 위에 있을 조건

- 8 오른쪽 그림과 같이 사각형 ABCD가 원 O에 내접할 때, $\angle x$, $\angle y$, $\angle z$ 의 크기를 구하여라.



원에 내접하는 사각형

304 VII. 원의 성질

$$(2) x \times (x+18) = 12^2 \text{이므로}$$

$$x^2 + 18x - 144 = 0$$

$$(x+24)(x-6) = 0$$

$$x = -24 \text{ 또는 } x = 6$$

이때 $x > 0$ 이므로 $x = 6$ 이다.

- 11 평가의 주안점 원에서 할선의 선분의 길이를 구할 수 있다.

풀이 원 O의 반지름의 길이를 r cm라 하면

$$\overline{PA} = \frac{3}{2}r, \overline{PB} = \frac{1}{2}r \text{이므로}$$

..... ①

$$\frac{3}{2}r \times \frac{1}{2}r = 3 \times 8$$

..... ②

$$3r^2 = 96, r^2 = 32$$

$$r > 0 \text{이므로 } r = 4\sqrt{2}$$

따라서 원 O의 반지름의 길이는 $4\sqrt{2}$ cm이다.

..... ③

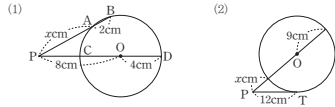
단계	채점 기준	배점 비율
①	PA, PB를 r 에 대한 식으로 나타낸다.	40%
②	PA · PB를 r 에 대한 식으로 나타낸다.	20%
③	원의 반지름의 길이를 구한다.	40%

- 9 오른쪽 그림과 같이 안내소, 박물관, 식물원, 동물원의 위치가 한 원 위에 있을 때, 만남의 광장에서 식물원까지의 거리를 구하여라.



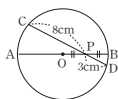
C 두 활선의 선분의 길이 사이의 관계

- 10 다음 그림의 원 O에서 x의 값을 구하여라. (단, PT는 원 O의 접선이다.)



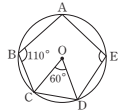
C 두 활선의 선분의 길이 사이의 관계

- 11 오른쪽 그림에서 AB는 원 O의 지름이고 OP=BP이다. PC=8cm, PD=3cm일 때, 원 O의 반지름의 길이를 구하고, 그 과정을 서술하여라.



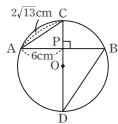
C 두 활선의 선분의 길이 사이의 관계

- 12 오른쪽 그림과 같이 원 O에 내접하는 오각형 ABCDE에서 $\angle B=110^\circ$, $\angle COD=60^\circ$ 일 때, $\angle AED$ 의 크기를 구하여라.



C CE를 그어 사각형이 원에 내접하기 위한 조건과 원주각의 성질을 이용한다.

- 13 오른쪽 그림과 같이 원 O의 두 현 AB, CD의 교점을 P라 할 때, $AP=6\text{cm}$, $AC=2\sqrt{13}\text{cm}$, $\angle CPB=90^\circ$ 이다. BD의 길이를 구하고, 그 과정을 서술하여라.



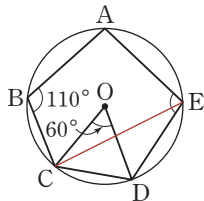
C 피타고라스 정리를 이용하여 CP의 길이를 구하고, 원에서 의 비례 관계를 이용하여 PD를 구한다.

2. 원주각의 성질 305

실력 기르기

- 12 평가의 주안점 원에 내접하는 다각형에서 내각의 크기를 구할 수 있다.

풀이 다음 그림과 같이 두 점 C, E를 연결하면 $\square ABCE$ 에서 $\angle ABC + \angle AEC = 180^\circ$ 이므로



$$110^\circ + \angle AEC = 180^\circ$$

$$\angle AEC = 70^\circ$$

$$\angle CED = \frac{1}{2} \angle COD = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ \text{이므로}$$

$$\angle AED = \angle AEC + \angle CED$$

$$= 70^\circ + 30^\circ$$

$$= 100^\circ$$

이다.

- 13 평가의 주안점 원에서 접선과 활선의 선분의 길이를 구할 수 있다.

풀이 $\triangle CAP$ 에서 $\angle CPA = 90^\circ$ 이므로

$$CP = \sqrt{(2\sqrt{13})^2 - 6^2}$$

$$= \sqrt{52 - 36} = 4(\text{cm})$$

..... ①

$$PA = PB = 6\text{cm} \text{이므로}$$

$$6^2 = 4 \times PD$$

$$PD = 9\text{cm}$$

..... ②

$\triangle PBD$ 에서 $\angle BPD = 90^\circ$ 이므로

$$BD = \sqrt{6^2 + 9^2} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}(\text{cm}) \text{이다.}$$

..... ③

단계	채점 기준	배점 비율
①	CP의 길이를 구한다.	20%
②	PD의 길이를 구한다.	40%
③	BD의 길이를 구한다.	40%



참고 자료

‘4’는 동양 사상, ‘원’은 서양 사상이 숨어 있다.

동양에서의 ‘사방을 살핀다.’라는 표현을 서양에서는 ‘주위를 빙 둘러 살핀다.’라는 의미로 ‘look around’라고 한다. 또한 ‘천지사방’이라는 동양적 표현에 반하여 ‘all around the world’라는 서양식 표현도 있다.

이 예들은 동양에서는 네모를, 서양에서는 원을 근간으로 생각한다는 확연한 차이를 보여 주고 있다.

옛날에 도시를 건설할 때에도 이러한 사상적 차이가 반영되었음을 알 수 있다.

예를 들어 서울은 4대문을 기준으로 사방 사십 리로 그 크기를 표현하였지만 그리스에서는 모든 길이 로마로 통하도록 로마를 중심으로 방사형으로 도로를 만들었다. 이러한 방사형적 도로 계획은 파리를 비롯하여 많은 유럽 도시들의 특징이다.

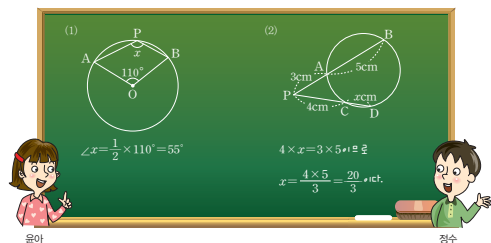
또 동양에서는 동서남북 사방의 중심에 인간인 나를 중심으로 하여 사방이 나를 둘러싸었다고 생각한 인간 중심 사상이 발달하였고, 서양에서는 둥근 원 안에 신을 모셔 놓는 신 중심주의 사상이 발달해 왔다. 이와 같이 세계를 대하는 태도에 있어 동양은 사각형, 서양은 원이었던 것이다.

그런데 이 사각형과 원의 관계는 수학 세계에서도 나타나고 있다. 즉 원과 같은 넓이를 갖는 정사각형을 그리려고 2000년 동안이나 수학자들이 노력해 왔다.

그러다가 약 100년 전에야 비로소 이는 해답이 없는 문제라는 결론을 내리게 되었다.

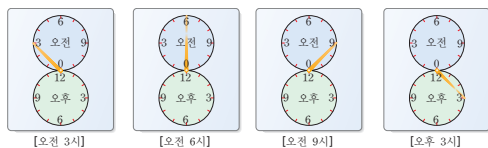
창의·인성 키우기

개념 바꾸기 다음은 윤아와 정수가 칠판에 쓰여 있는 문제에서 x 의 값을 구한 것이다. 풀이에서 옳지 않은 부분을 찾아 바르게 고치라.



생각 키우기 레이저를 쏘아 시각을 알려주는 시계가 있다. 이 시계의 레이저 장치는 다음 그림과 같이 일정하게 회전하며 레이저를 쏘아 시각을 가리킨다.

- (1) 이 시계의 레이저 장치는 한 시간에 몇 도를 회전하는지 말하여라.
- (2) 레이저의 회전 각도를 설명하는 데 적용할 수 있는 원리를 설명하여라.

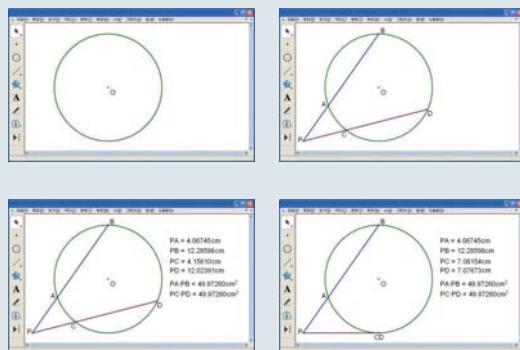


컴퓨터로 하는 수학

컴퓨터 프로그램을 이용하여 할선에 의해 생기는 선분의 길이 사이의 관계 알아보기

컴퓨터 프로그램을 이용하여 두 할선에 의해 생기는 선분의 길이 사이의 관계를 관찰하여 보자.

- ① [O]를 이용하여 원 O를 그린다.
- ② [P]를 이용하여 원 밖의 한 점에서 만나는 두 할선을 그고, [A]를 이용하여 점 P, 원 위의 교점 A, B, C, D를 표시한다.
- ③ [측정(M)] - [길이(L)]를 이용하여 \overline{PA} , \overline{PB} , \overline{PC} , \overline{PD} 의 길이를 각각 구하고, [측정(M)] - [계산(C)]을 이용하여 $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$, $\overline{PC} \cdot \overline{PD}$ 의 값을 각각 구한 다음, 두 값이 같은지 확인한다.
- ④ [P]를 이용하여 점 P의 위치와 원의 크기, 원 위의 점들의 위치 등을 변화시켜도 $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ 와 $\overline{PC} \cdot \overline{PD}$ 의 값이 같은지 확인한다.
- ⑤ $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ 와 $\overline{PC} \cdot \overline{PD}$ 의 값은 어떻게 될지 추측해 보고, [P]를 이용하여 두 점 C, D를 연결 때 그 값을 확인한다.



창의·인성 키우기

개념 바꾸기

지도상의 유의점 원주각과 중심각의 크기 사이의 관계와 두 할선의 선분의 길이 사이의 관계에 대한 개념을 알고 있는지 확인한다.

올바른 풀이 (1) 점 P를 포함하지 않는 호 AB에 대한 원주각의 크기는 $360^\circ - 110^\circ = 250^\circ$ 이므로

$$\angle x = \frac{1}{2} \times (360^\circ - 110^\circ) = \frac{1}{2} \times 250^\circ = 125^\circ$$

(2) $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$ 이므로 $3 \times (3 + 5) = 4 \times (4 + x)$

$$4x = 8, x = 2$$

창의·인성 오류를 통해 비판적 사고를 키우도록 하며 학생들에게 자신의 생각을 발표하게 함으로써 개념을 다질 수 있도록 한다.

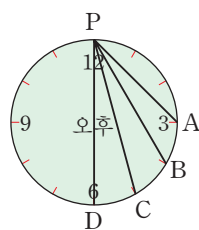
생각 키우기

지도상의 유의점 원주각과 중심각의 크기에 대한 성질을 바탕으로 같은 길이의 호에 대한 원주각의 크기의 개념을 확장시킨 문제이다. 시계의 원리에 대한 생각을 다양하게 발표할 수 있도록 한다.

풀이 (1) 원주 위에 시간을 나타내는 위치 사이의 간격은 $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD}$ 이므로 원주각 $\angle APB = \angle BPC = \angle CPD$ 이고, 시계의 레이저 장치는 한 시간에 15° 씩 일정하게 회전하므로 레이저 장치가 가리키는 위치에 나타나는 숫자가 시각을 나타낸다.

(2) 한 원에서 길이가 같은 호에 대한 원주각의 크기는 같다.

창의·인성 다양한 설명이 나올 수 있도록 격려하며 확산적 사고와 수렴적 사고를 함께 기를 수 있도록 한다.



컴퓨터로 하는 수학

지도상의 유의점 컴퓨터 프로그램을 이용하여 한 점에서 만나는 원의 두 현에 의해 생기는 선분의 길이 사이의 관계를 알아보고, 두 할선의 선분 사이의 길이 관계를 통해 할선과 접선의 길이의 관계를 유추할 수 있도록 지도한다.

창의·인성 원주각의 성질에서 배운 수학적 지식을 적절하게 활용하여 학생 스스로 탐구하게 한 후 자신의 활동 결과를 논리적으로 설명하여 다른 사람을 이해시킬 수 있도록 한다.



학년

반 번호:

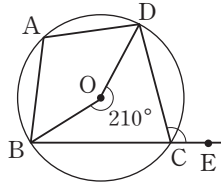
이름:

/ 점수:

선다형은 각 4점, 나머지 문항은 각 문항에 표시함.

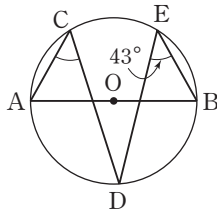
- 01 오른쪽 그림의 원 O에서 $\angle BOD = 210^\circ$ 일 때, $\angle DCE$ 의 크기는?

- ① 75° ② 85°
③ 95° ④ 105°
⑤ 115°



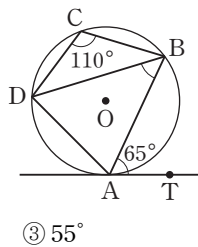
- 02 오른쪽 그림에서 \overline{AB} 는 원 O의 지름이고, $\angle BED = 43^\circ$ 일 때, $\angle ACD$ 의 크기는?

- ① 43° ② 45°
③ 47° ④ 49°
⑤ 51°



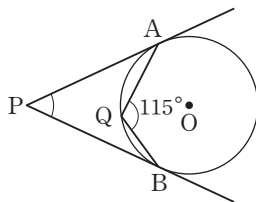
- 03 오른쪽 그림과 같이 $\square ABCD$ 는 원 O에 내접하고 직선 AT는 원 O의 접선이다. $\angle BAT = 65^\circ$, $\angle BCD = 110^\circ$ 일 때, $\angle ABD$ 의 크기는?

- ① 45° ② 50°
④ 60° ⑤ 65°



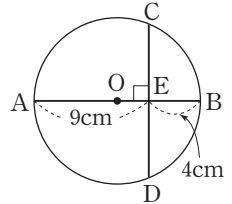
- 04 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 원 O에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 하고, \widehat{AB} 위의 한 점 Q에 대하여 $\angle AQB = 115^\circ$ 일 때, $\angle APB$ 의 크기는?

- ① 45° ② 50° ③ 55°
④ 60° ⑤ 65°



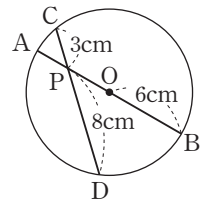
- 05 오른쪽 그림의 원 O에서 점 E는 두 현 AB, CD가 만나는 점이다. $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ 이고, $\overline{AE} = 9\text{cm}$, $\overline{EB} = 4\text{cm}$ 일 때, \overline{CE} 의 길이는?

- ① 4.5cm ② 5cm
③ 5.5cm ④ 6cm
⑤ 6.5cm



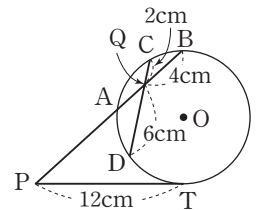
- 06 오른쪽 그림에서 점 P는 원 O의 지름 AB와 현 CD의 교점이다. $\overline{OB} = 6\text{cm}$, $\overline{PC} = 3\text{cm}$, $\overline{PD} = 8\text{cm}$ 일 때, \overline{PO} 의 길이는?

- ① 2cm ② $2\sqrt{2}\text{cm}$
③ $2\sqrt{3}\text{cm}$ ④ 4cm
⑤ $2\sqrt{5}\text{cm}$



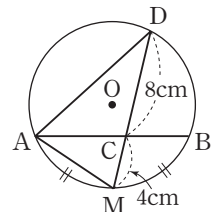
- 07 오른쪽 그림에서 \overline{PT} 는 원 O의 접선이고, $\overline{QB} = 4\text{cm}$, $\overline{QC} = 2\text{cm}$, $\overline{QD} = 6\text{cm}$ 이다. $\overline{PT} = 12\text{cm}$ 일 때, \overline{PA} 의 길이는?

- ① 8cm ② 9cm
③ 10cm ④ 12cm
⑤ 13cm



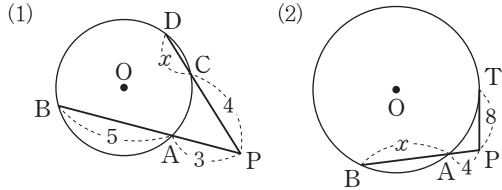
- 08 오른쪽 그림의 원 O에서 $\widehat{AM} = \widehat{BM}$ 이고, $\overline{CM} = 4\text{cm}$, $\overline{CD} = 8\text{cm}$ 일 때, \overline{AM} 의 길이는?

- ① 6cm
② $4\sqrt{3}\text{cm}$
③ 7cm
④ $5\sqrt{2}\text{cm}$
⑤ $2\sqrt{13}\text{cm}$

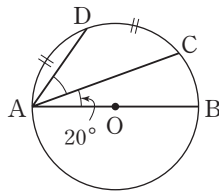


단답형

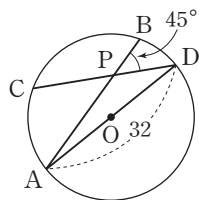
09 다음 그림에서 x 의 값을 구하여라. (단, \overline{PT} 는 원의 접선이다.) [각 3점]



10 오른쪽 그림에서 \overline{AB} 는 원 O의 지름이고, $\widehat{AD} = \widehat{CD}$, $\angle BAC = 20^\circ$ 일 때, $\angle CAD$ 의 크기를 구하여라. [8점]

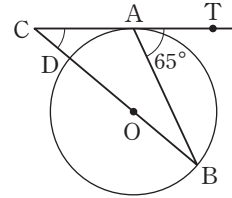


11 오른쪽 그림과 같이 원 O의 두 현 AB, CD가 점 P에서 만나고, $\overline{AD} = 32$, $\angle BPD = 45^\circ$ 일 때, $\widehat{AC} + \widehat{BD}$ 의 값을 구하여라. [8점]

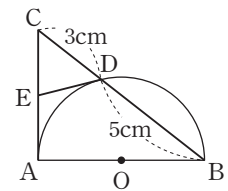


서술형

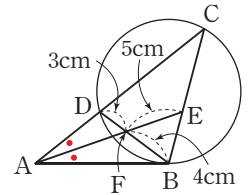
12 오른쪽 그림에서 \overline{CA} 는 원 O의 접선이고, \overline{BC} 는 원 O의 중심을 지난다. $\angle TAB = 65^\circ$ 일 때, $\angle ACD$ 의 크기를 구하고, 그 과정을 서술하여라. [10점]



13 오른쪽 그림에서 \overline{AB} 는 반원 O의 지름이고, \overline{CA} , \overline{ED} 는 접선이다. $\overline{CD} = 3\text{cm}$, $\overline{DB} = 5\text{cm}$ 일 때, \overline{EA} 의 길이를 구하고, 그 과정을 서술하여라. [10점]



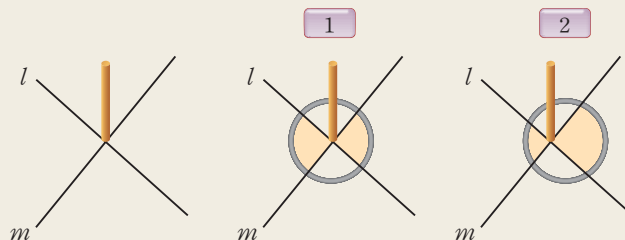
14 오른쪽 그림에서 \overline{AB} 는 원의 접선이고 $\angle BAC$ 의 이등분선과 \overline{BC} , \overline{BD} 가 만나는 점을 각각 E, F라 하자. $\overline{BF} = 4\text{cm}$, $\overline{EF} = 5\text{cm}$, $\overline{DF} = 3\text{cm}$ 일 때, \overline{BE} 의 길이를 구하고, 그 과정을 서술하여라. [12점]



수리 논술형

15 다음 제시문을 읽고 1, 2에서 색칠한 부분에 속하는 호의 길이의 합을 비교하고, 그 과정을 설명하여라. [14점]

연우와 진선은 두 직선 l , m 을 긋고, 그 교점에 나무 막대기를 세운 후 원형의 굴렁쇠를 던지는 놀이를 하고 있다. 굴렁쇠를 두 번 던졌더니 1, 2와 같은 모양이 되었다.





- | | | | |
|-----------------|------|---------------|-----------|
| 01 ④ | 02 ③ | 03 ① | 04 ② |
| 05 ④ | 06 ③ | 07 ② | 08 ② |
| 09 (1) 2 (2) 12 | | 10 35° | 11 8π |
| 12~15 풀이 참조 | | | |

- 01 **평가 기준** 원에 내접하는 사각형의 외각의 크기를 구할 수 있는가?

풀이 $\angle A$ 는 \widehat{BCD} 의 원주각이므로
 $\angle A = \frac{1}{2} \angle BOD = \frac{1}{2} \times 210^\circ = 105^\circ$
 $\square ABCD$ 가 원에 내접하므로
 $\angle DCE = \angle A = 105^\circ$ 이다.

- 02 **평가 기준** 길이가 같은 호에 대한 원주각의 크기를 구할 수 있는가?

풀이 한 호에 대한 원주각의 크기는 서로 같으므로
 $\angle ACD = \angle AED$
 $\angle AEB = \angle AED + \angle DEB$ 이므로
 $\angle AEB = \angle ACD + \angle DEB$
 \widehat{AB} 가 지름이므로 $\angle AEB = 90^\circ$
따라서 $90^\circ = \angle ACD + 43^\circ$ 이므로
 $\angle ACD = 47^\circ$ 이다.

- 03 **평가 기준** 원에 내접하는 사각형의 내각의 크기와 접선과 현이 이루는 각의 크기를 구할 수 있는가?

풀이 $\angle ADB = \angle BAT = 65^\circ$
원내에 내접하는 사각형 $ABCD$ 에서
 $\angle BAD + \angle C = 180^\circ$ 이므로
 $\angle BAD = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$
 $\triangle ABD$ 에서
 $\angle ABD = 180^\circ - (65^\circ + 70^\circ) = 45^\circ$
이다.

- 04 **평가 기준** 원에서 원주각과 중심각의 크기를 구할 수 있는가?

풀이 \widehat{AQB} 에 대한 원주각의 크기는 $180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$ 이므로
 \widehat{AQB} 에 대한 중심각의 크기는
 $\angle AOB = 2 \times 65^\circ = 130^\circ$
 $\angle PAO = \angle PBO = 90^\circ$ 이므로 $\square APBO$ 에서
 $\angle APB = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 130^\circ) = 50^\circ$

- 05 **평가 기준** 원에서 할선의 선분의 길이를 구할 수 있는가?

풀이 $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ 이므로 $\overline{CE} = \overline{ED} = x$ cm라 하면
 $x^2 = 9 \times 4 = 36$
 $x > 0$ 이므로 $x = 6$
따라서 $\overline{CE} = 6$ cm이다.

- 06 **평가 기준** 원에서 할선의 선분의 길이를 구할 수 있는가?

풀이 $\overline{PO} = x$ cm라 하면 $\overline{PA} = (6 - x)$ cm
 $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$ 이므로
 $(6 - x)(6 + x) = 3 \times 8$
 $36 - x^2 = 24, x^2 = 12$
 $x > 0$ 이므로 $x = 2\sqrt{3}$
따라서 $\overline{PO} = 2\sqrt{3}$ cm이다.

- 07 **평가 기준** 원에서 접선과 할선의 선분의 길이를 구할 수 있는가?

풀이 $\overline{QA} \cdot \overline{QB} = \overline{QC} \cdot \overline{QD}$ 에서
 $\overline{QA} \times 4 = 2 \times 6, \overline{QA} = 3$ cm
 $\overline{PA} = x$ cm라 하면 $\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$ 에서
 $12^2 = x(x + 7)$
 $x^2 + 7x - 144 = 0$
 $(x - 9)(x + 16) = 0$
 $x > 0$ 이므로 $x = 9$
따라서 $\overline{PA} = 9$ cm이다.

- 08 **평가 기준** 원에서 접선과 할선의 선분의 길이를 구할 수 있는가?

풀이 $\triangle DAM$ 과 $\triangle ACM$ 에서
 $\angle M$ 은 공통, $\widehat{AM} = \widehat{BM}$ 이므로 $\angle ADM = \angle CAM$
따라서 $\triangle DAM \sim \triangle ACM$ 이므로
 $\overline{DM} : \overline{AM} = \overline{AM} : \overline{CM}$
 $\overline{AM}^2 = \overline{CM} \cdot \overline{DM} = 4 \times (4 + 8) = 48$
 $\overline{AM} > 0$ 이므로 $\overline{AM} = 4\sqrt{3}$ cm이다.

- 09 **평가 기준** 원에서 접선과 할선의 선분의 길이를 구할 수 있는가?

풀이 (1) $3 \times 8 = 4 \times (4 + x)$ 에서 $4 + x = 6$ 이므로
 $x = 2$ 이다.
(2) $4 \times (4 + x) = 8^2$ 에서 $4 + x = 16$ 이므로
 $x = 12$ 이다.

- 10 **평가 기준** 길이가 같은 호에 대한 원주각의 크기를 구할 수 있는가?

풀이 두 점 C, D를 연결하면

$\widehat{AD}=\widehat{CD}$ 이므로 $\angle DAC=\angle DCA$

\overline{AB} 가 원 O의 지름이므로

$\angle ACB=90^\circ$

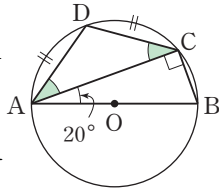
$\square ABCD$ 는 원 O에 내접하는 사각

형이므로 $\angle DAB+\angle DCB=180^\circ$

$\angle CAD=\angle x$ 라 하면 $\angle x+20^\circ+\angle x+90^\circ=180^\circ$

$2\angle x=70^\circ, \angle x=35^\circ$

따라서 $\angle CAD=35^\circ$ 이다.



- 11 **평가 기준** 원주각의 크기에 대한 호의 길이를 구할 수 있는가?

풀이 $\angle BPD=\angle PAD+\angle PDA=45^\circ$ 이고,

$\angle CDA$ 와 $\angle BAD$ 는 각각 \widehat{AC} , \widehat{BD} 에 대한 원주각이다.

이때 \widehat{AC} , \widehat{BD} 에 대한 중심각의 크기는 \widehat{AC} , \widehat{BD} 에 대한 원주각의 크기의 2배이므로 $45^\circ \times 2=90^\circ$

따라서 $\widehat{AC}+\widehat{BD}$ 는 원 O의 둘레의 길이의 $\frac{1}{4}$ 과 같으므로

$\widehat{AC}+\widehat{BD}=\frac{1}{4} \times 2 \times 16 \times \pi=8\pi$ 이다.

- 12 **평가 기준** 접선과 현이 이루는 각의 크기를 구할 수 있는가?

풀이 두 점 A, D를 연결하면

$\angle ADB=\angle TAB=65^\circ$ ①

$\angle DAB=90^\circ$ 이므로 ②

$\angle ABD=180^\circ-(90^\circ+65^\circ)=25^\circ$ ②

$\angle TAB=\angle ABD+\angle ACD$ 에서 ③

$65^\circ=25^\circ+\angle ACD, \angle ACD=40^\circ$ ③

단계	채점 기준	배점
①	$\angle ADB$ 의 크기를 구한다.	3점
②	$\angle ABD$ 의 크기를 구한다.	3점
③	$\angle ACD$ 의 크기를 구한다.	4점

- 13 **평가 기준** 원에서 접선과 할선의 선분의 길이를 구할 수 있는가?

풀이 $\overline{CA}^2=\overline{CD} \cdot \overline{CB}=3 \times (3+5)=24$

$\overline{CA}>0$ 이므로 $\overline{CA}=2\sqrt{6}\text{cm}$ ①

$\angle ADB=90^\circ$ 이므로 $\angle ADC=90^\circ$

$\angle DCE=90^\circ-\angle DAE$ ㉠

$\angle CDE=90^\circ-\angle ADE$ ㉡

그런데 $\overline{ED}=\overline{EA}$ 이므로

$\angle DAE=\angle ADE$ ㉢ ②

㉠, ㉡, ㉢에서 $\angle DCE=\angle CDE$ 이므로

$\overline{EC}=\overline{ED}$ ③

$\overline{EC}=\overline{EA}$

$\overline{EA}=\frac{1}{2} \times \overline{CA}=\frac{1}{2} \times 2\sqrt{6}=\sqrt{6}(\text{cm})$ 이다. ④

단계	채점 기준	배점
①	\overline{CA} 의 길이를 구한다.	3점
②	$\angle DAE=\angle ADE$ 임을 안다.	3점
③	$\overline{EC}=\overline{ED}$ 임을 안다.	3점
④	\overline{EA} 의 길이를 구한다.	1점

- 14 **평가 기준** 닮음과 접선과 현이 이루는 각의 크기를 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

풀이 $\triangle FAB$ 와 $\triangle EAC$ 에서

$\angle FAB=\angle EAC$ ㉠

접선과 현이 이루는 각의 크기에 의하여

$\angle ABF=\angle ACE$ ㉡ ①

㉠, ㉡에 의하여 $\triangle FAB \sim \triangle EAC$ 이므로 ②

$\angle BFE=\angle FAB+\angle ABF$

$=\angle EAC+\angle ACE=\angle BEF$ ③

따라서 $\overline{BE}=\overline{BF}=4\text{cm}$ 이다. ④

단계	채점 기준	배점
①	$\angle ABF=\angle ACE$ 임을 안다.	3점
②	$\triangle FAB \sim \triangle EAC$ 임을 안다.	3점
③	$\angle BFE=\angle BEF$ 임을 안다.	4점
④	\overline{BE} 의 길이를 구한다.	2점

- 15 **평가 기준** 굴림쇠 놀이에서 원주각의 크기를 이용하여 호의 길이의 합을 비교할 수 있는가?

풀이 오른쪽 그림과 같이 두 직

선 l, m 이 이루는 각의 크기를

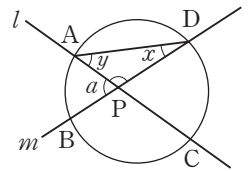
$\angle a$, \widehat{AB} 에 대한 원주각의 크기를

$\angle x$, \widehat{CD} 에 대한 원주각의

크기를 $\angle y$ 라 하면 ①

$\triangle APD$ 에서 $\angle APB$ 의 크기는 $\angle ADP$ 와 $\angle PAD$ 의 크기의 합이므로 $\angle a=\angle x+\angle y$ 와 같이 나타낼 수 있다. ②

즉, \widehat{AB} 와 \widehat{CD} 의 원주각의 크기의 합은 일정하고, 호의 길이는 원주각의 크기에 비례하므로 \widehat{AB} 와 \widehat{CD} 의 길이의 합은 일정하다. 이것은 ①, ②의 경우 모두에 해당한다. 따라서 색칠한 부분에 속하는 호의 길이의 합은 서로 같다. ③



단계	채점 기준	배점
①	\widehat{AB} , \widehat{CD} 에 대한 원주각을 이용함을 설명한다.	5점
②	$\angle APB=\angle ADP+\angle PAD$ 임을 설명한다.	5점
③	$\widehat{AB}+\widehat{CD}$ 의 값이 일정함을 설명한다.	4점



- 1 **평가의 주안점** 원의 중심에서 같은 거리에 있는 현의 길이를 구할 수 있다.

풀이 $\overline{OM} \perp \overline{AB}$, $\overline{ON} \perp \overline{AC}$, $\overline{OM} = \overline{ON}$ 이므로
 $\triangle ABC$ 는 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형이다.
 $\triangle ABC$ 에서 $\angle B = \angle C = 66^\circ$ 이므로
 $\angle BAC = 180^\circ - 2 \times 66^\circ = 48^\circ$ 이다.

- 2 **평가의 주안점** 원에서 접선과 현이 이루는 각의 크기를 구할 수 있다.

풀이 $\triangle ABC$ 에서 $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 50^\circ$ 이므로
 $\angle C = 180^\circ - (50^\circ + 60^\circ) = 70^\circ$
 $\triangle CEF$ 에서 $\overline{CE} = \overline{CF}$ 이므로
 $\angle FEC = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 70^\circ) = 55^\circ$ 이다.

- 3 **평가의 주안점** 원에 내접하는 사각형의 외각의 크기를 구할 수 있다.

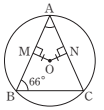
풀이 $\triangle ADB = 55^\circ$, $\angle BDC = \angle BAC = 50^\circ$ 이므로
 $\angle ABE = \angle ADC$
 $= \angle ADB + \angle BDC$
 $= 55^\circ + 50^\circ = 105^\circ$
 이다.

- 4 **평가의 주안점** 원의 접선에 대한 성질을 이용하여 직각삼각형에 내접하는 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.

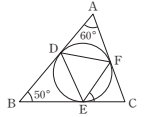
풀이 $\overline{BD} = \overline{BE} = 6\text{cm}$, $\overline{CF} = \overline{CE} = 4\text{cm}$,
 $\square ADOF$ 가 정사각형이므로
 $\overline{AD} = \overline{AF} = r\text{cm}$ 라 하면 $\triangle ABC$ 에서
 $(6+r)^2 + (4+r)^2 = 10^2$
 $2r^2 + 20r - 48 = 0$
 $r^2 + 10r - 24 = 0$
 $(r+12)(r-2) = 0$
 $r = -12$ 또는 $r = 2$
 $r > 0$ 이므로 $r = 2$
 따라서 원 O의 반지름의 길이는 2cm이다.



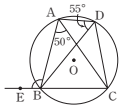
- 1 오른쪽 그림에서 원 O는 $\triangle ABC$ 의 외접원이고 $\overline{OM} \perp \overline{AB}$, $\overline{ON} \perp \overline{AC}$, $\overline{OM} = \overline{ON}$ 이다. $\angle B = 66^\circ$ 일 때, $\angle A$ 의 크기를 구하여라.



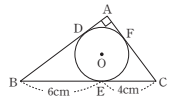
- 2 오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC$ 의 내접원이 $\triangle DEF$ 의 외접원이다. $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 50^\circ$ 일 때, $\angle FEC$ 의 크기를 구하여라.



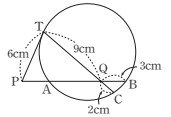
- 3 오른쪽 그림과 같이 $\square ABCD$ 가 원 O에 내접하고, $\angle BAC = 50^\circ$, $\angle ADB = 55^\circ$ 일 때, $\angle ABE$ 의 크기를 구하여라.



- 4 오른쪽 그림에서 세 점 D, E, F는 직각삼각형 ABC의 내접원의 접점이고, $\overline{BE} = 6\text{cm}$, $\overline{CE} = 4\text{cm}$ 일 때, 원 O의 반지름의 길이를 구하여라.



- 5 오른쪽 그림에서 \overline{PT} 는 원의 접선이고, $\overline{PT} = 6\text{cm}$, $\overline{QB} = 3\text{cm}$, $\overline{QC} = 2\text{cm}$, $\overline{QT} = 9\text{cm}$ 일 때, \overline{PA} 의 길이를 구하여라.



308 VII. 원의 성질

- 5 **평가의 주안점** 원에서 접선의 성질과 두 할선의 선분의 길이의 사이의 관계를 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있다.

풀이 $\overline{AQ} \times 3 = 9 \times 2$ 이므로 $\overline{AQ} = 6$
 $\overline{PA} = x$ 라 하면
 $\overline{PB} = x + 6 + 3 = x + 9$
 $\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$ 이므로 $6^2 = x \times (x + 9)$
 $x^2 + 9x - 36 = 0$
 $(x + 12)(x - 3) = 0$
 $x = -12$ 또는 $x = 3$
 $x > 0$ 이므로 $x = 3$
 따라서 \overline{PA} 의 길이는 3cm이다.

- 6 **평가의 주안점** 원에서 접선과 할선의 선분의 길이를 구할 수 있다

풀이 $\overline{OR} \perp \overline{AB}$ 이므로 $\triangle OBR$ 에서
 $\overline{BR} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4(\text{cm})$
 $\overline{AB} = 2\overline{BR} = 2 \times 4 = 8(\text{cm})$ 이므로
 $\overline{PT}^2 = 4 \times (4 + 8) = 48$
 이때 $\overline{PT} > 0$ 이므로 $\overline{PT} = 4\sqrt{3}\text{cm}$ 이다.

- 7 평가의 주안점 원에서 접선의 성질을 이용하여 응용 문제를 풀 수 있다.

풀이 $\overline{AS} = \overline{AP} = 2\text{cm}$, $\overline{BQ} = \overline{BP} = 2\text{cm}$
 $\overline{DR} = \overline{DS} = 6 - 2 = 4(\text{cm})$ ①
 $\overline{ER} = \overline{EQ} = x\text{cm}$ 라 하면 $\triangle DEC$ 에서
 $\overline{DE} = (4+x)\text{cm}$, $\overline{CE} = 6 - (2+x) = (4-x)\text{cm}$ 이므로
 $(4+x)^2 = (4-x)^2 + 4^2$
 $16x = 16$, $x = 1$ ②
따라서 $\overline{DE} = 4 + 1 = 5(\text{cm})$ 이다. ③

단계	채점 기준	배점 비율
①	DR의 길이를 구한다.	30%
②	ER의 길이를 구한다.	40%
③	DE의 길이를 구한다.	30%

- 8 평가의 주안점 원에서 접선과 현이 이루는 각의 크기를 구할 수 있다.

풀이 두 점 B와 D를 연결하면 $\angle ABD = 90^\circ$ 이므로
 $\angle ADB = 180^\circ - (90^\circ + 28^\circ) = 62^\circ$
원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 같으므로
 $\angle ACB = \angle ADB = 62^\circ$
 $\angle CAB = \angle CBT = 76^\circ$ 이므로
 $\triangle ABC$ 에서
 $\angle ABC = 180^\circ - (76^\circ + 62^\circ) = 42^\circ$ 이다.

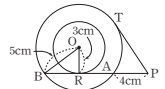
- 9 평가의 주안점 원에서 접선의 성질과 할선과 접선의 길이 사이의 관계를 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있다.

풀이 $\angle PAD = \angle QAB = \angle x$ 라 하면
 $\angle ADC = 46^\circ + \angle x$
 $\angle ABC = 26^\circ + \angle x$
 $\square ABCD$ 에서 $(46^\circ + \angle x) + (26^\circ + \angle x) = 180^\circ$
 $2\angle x = 108^\circ$
 $\angle x = 54^\circ$
따라서 $\angle BCD = \angle QAB = 54^\circ$ 이다.

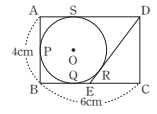
- 10 평가의 주안점 원에서 접선과 할선의 선분의 길이를 활용한 문제를 해결할 수 있다.

풀이 $\angle B = \angle PTA = 30^\circ$ 이고, $\angle ATB = 90^\circ$ 이므로
 $\overline{AT} : 10 = 1 : 2$
 $\overline{AT} = 5\text{cm}$ ①

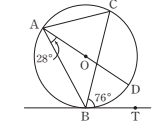
- 6 오른쪽 그림과 같이 중심이 같고, 반지름의 길이가 5cm와 3cm인 두 원이 있다. 큰 원 밖의 한 점 P에서 큰 원과 작은 원에 두 접선 PT, PR를 긋고, PR가 큰 원과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{PA} = 4\text{cm}$ 일 때, \overline{PT} 의 길이를 구하여라.



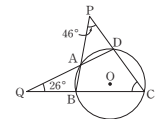
- 7 오른쪽 그림과 같이 직사각형 ABCD의 세 변에 원 O가 접하고, 점 D에서 원 O에 접선을 그어 원 O와 만나는 점을 R, \overline{BC} 와 만나는 점을 E라 하자. $\overline{AB} = 4\text{cm}$, $\overline{BC} = 6\text{cm}$ 일 때, \overline{DE} 의 길이를 구하고, 그 과정을 서술하여라.



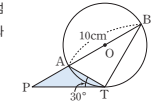
- 8 오른쪽 그림에서 $\triangle ABC$ 는 \overline{AD} 가 지름인 원 O에 내접하고, \overline{BT} 는 원 O의 접선이다. $\angle TBC = 76^\circ$, $\angle BAD = 28^\circ$ 일 때, $\angle ABC$ 의 크기를 구하여라.



- 9 오른쪽 그림과 같이 원 O에 내접하는 $\square ABCD$ 에서 \overline{BA} 와 \overline{CD} 의 연장선의 교점을 P, \overline{DA} 와 \overline{CB} 의 연장선의 교점을 Q라 하자. $\angle DPA = 46^\circ$, $\angle AQB = 26^\circ$ 일 때, $\angle BCD$ 의 크기를 구하여라.



- 10 오른쪽 그림과 같이 \overline{AB} 가 지름인 원 O에서 \overline{PT} 는 접선이고 점 T는 접점이다. $\overline{AB} = 10\text{cm}$, $\angle ATP = 30^\circ$ 일 때, $\triangle APT$ 의 넓이를 구하고, 그 과정을 서술하여라.



단원 마무리하기 309

$\triangle APT$ 에서 $\angle BAT = \angle APT + \angle ATP$

$$60^\circ = \angle APT + 30^\circ$$

$$\angle APT = 30^\circ$$

$\triangle APT$ 는 이등변삼각형이므로

$$\overline{PA} = \overline{AT} = 5\text{cm}$$
 ②

\overline{PT} 는 원 O의 접선이므로

$$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB} = 5 \times (5 + 10) = 75$$

$$\overline{PT} > 0 \text{이므로 } \overline{PT} = 5\sqrt{3}\text{cm}$$
 ③

$$\triangle APT = \frac{1}{2} \times 5\sqrt{3} \times 5 \times \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 5\sqrt{3} \times 5 \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{25}{4}\sqrt{3}(\text{cm}^2)$$
 ④

단계	채점 기준	배점 비율
①	AT의 길이를 구한다.	10%
②	AP의 길이를 구한다.	40%
③	PT의 길이를 구한다.	30%
④	$\triangle APT$ 의 넓이를 구한다.	20%

지도상의 유의점 원의 접선에 대한 성질을 이용하여 원 모양의 지구 위에서 관측할 수 있는 최대 직선거리를 계산기를 사용하여 구해봄으로써 생활 주변에서 발생하는 많은 정보를 수학적으로 해석하고, 자료를 분류, 조직, 정리하여 처리하면 다양한 분야의 실생활 문제를 해결할 수 있음을 느낄 수 있도록 지도한다.

풀이 **과제 1** (1) 직각삼각형 ABO에서 $(r+h)^2 = l^2 + r^2$

$$l = \sqrt{2rh + h^2}$$

(2)	배의 높이(m)	3	6	9	12	30
	볼 수 있는 거리(m)	6186	8748	10715	12372	19562

(3)	비행기의 높이(m)	1000	2000	3000	4000	10000
	볼 수 있는 거리(m)	112947	159737	195645	225920	357295

(4) 위의 표에서 관측할 수 있는 거리가 2배가 되는 것은, 배의 3m 높이에서 6186m까지 관측할 수 있고, 12m 높이에서 12372m까지 볼 수 있으므로 높이가 4배가 될 때이다. 또 비행기의 1000m 높이에서 112947m까지 볼 수 있고, 4000m 높이에서 225920m까지 볼 수 있으므로 높이가 4배가 될 때이다.

배의 높이(m)	볼 수 있는 거리(m)	비행기의 높이(m)	볼 수 있는 거리(m)
10	11294	100	35716
20	15972	200	50510
30	19562	300	61862
40	22589	400	71432
50	25255	500	79864
60	27665	600	87487
70	29882	700	94497
80	31945	800	101022
90	33883	900	107150
100	35716	1000	112947

식으로 알아보면 $l = \sqrt{2rh + h^2}$ 에서 관측 거리 l 이 두 배이므로 양변에 2를 곱하면

$$2l = 2\sqrt{2rh + h^2} = \sqrt{4(2rh + h^2)} = \sqrt{2r(4h) + 4h^2}$$

이때 r 의 값에 비하여 h 의 값이 매우 작으므로 $4h^2$ 의 값을 0으로 놓으면 $2l$ 의 값은 약 $\sqrt{2r(4h)}$ 이다.

따라서 관측할 수 있는 거리가 2배가 되려면 4배 되는 높이에서 바라보아야 한다.

과제 2 성인봉 정상 위치를 A, 서도의 해수면 위치를 B라 하면

$$(r + 948)^2 = \overline{AB}^2 + r^2 \text{ 이므로}$$

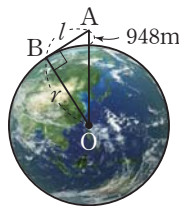
$$\overline{AB}$$

$$= \sqrt{2 \times 948 \times r + 948^2}$$

$$= \sqrt{2 \times 948 \times 6378000 + 948^2}$$

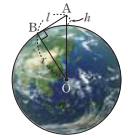
$$= 109971. \dots (\text{m})$$

따라서 성인봉 정상에서 직선거리로 약 110km까지 볼 수 있으므로 성인봉 정상에서 서도 전체를 관측할 수 있다.



지름이 12756km인 지구에 살고 있는 우리는 얼마나 멀리까지 볼 수 있을까? 평평한 곳이라면 시력이 허락하는 거리까지 볼 수 있었지만 지구는 둥글기 때문에 아무리 시력이 좋아도 수평선이나 지평선 너머는 볼 수 없다. 원의 접선을 이용하여 실제로 얼마나 멀리 볼 수 있는지 알아보자.

과제 1 오른쪽 그림과 같이 지구의 중심을 O, A 지점에서 바라볼 수 있는 최대 지점을 B라 할 때, A 지점과 B 지점 사이의 거리를 l , 지구의 반지름의 길이를 r , 지면으로부터 관측 지점인 A 지점까지의 거리를 h 라 하자.



(1) l 을 r , h 에 대한 식으로 나타내어라.

(2) 다음과 같이 항해사가 배 위에서 관측할 수 있는 최대 직선거리 l 을 구하여 보자.

배의 높이(m)	3	6	9	12	30
볼 수 있는 거리(m)					

(3) 다음과 같이 비행기에 탑승한 조종사가 관측할 수 있는 최대 직선거리 l 을 구하여 보자.

비행기의 높이(m)	1000	2000	3000	4000	10000
볼 수 있는 거리(m)					

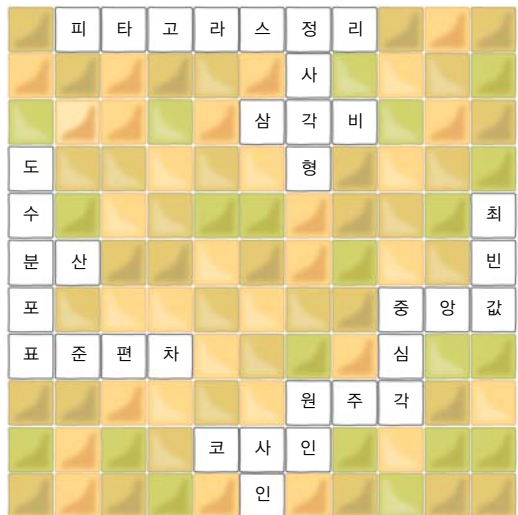
(4) (2), (3)에서 바라볼 수 있는 최대 직선거리가 2배가 되려면 관측 지점은 몇 배가 높아져야 하는지 추측하여 보자.

과제 2 우리나라 울릉도의 성인봉은 해발 948m이고, 독도의 서도는 해발 168m, 울릉도에서 독도까지의 거리는 90km이다. 맑은 날 울릉도의 성인봉에서 독도의 서도를 관측할 수 있는지 설명하여 보자.



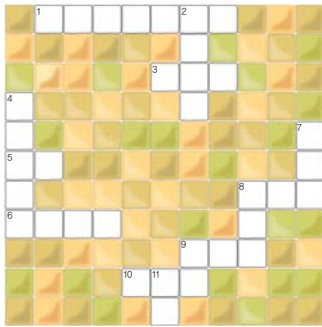
원의 접선에 대한 수학적 지식을 활용하여 실생활 문제를 해결하는 과정에서 수학적으로 의사소통을 할 수 있다.

창의·인성 다양한 풀이 방법과 결과가 나올 수 있도록 격려하여 확산적 사고와 수렴적 사고를 함께 기를 수 있도록 한다.





다음 가로와 세로의 열쇠를 읽고, 알맞은 용어를 아래 표에 써넣어라.



가로 열쇠

- 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이의 제곱의 합은 빗변의 길이의 제곱과 같음을 나타내는 정리
- $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ 를 통틀어 $\angle A$ 의 $\square\square\square$ 라고 한다.
- 산포도에서 편차의 제곱의 평균
- 분산의 음이 아닌 제곱근
- 자료를 작은 값부터 크기순으로 나열할 때 중앙에 위치한 값
- 호 AB 위에 있지 않은 원 위의 한 점을 P라 할 때, $\angle APB$ 를 호 AB에 대한 $\square\square\square$ 이라고 한다.
- $\angle B$ 가 직각인 삼각형 ABC에서 $\frac{AB}{CA}$ 를 $\angle A$ 의 $\square\square\square$ 이라고 한다.

세로 열쇠

- 네 내각의 크기가 모두 같고, 네 변의 길이가 모두 같은 사각형
- 자료를 몇 개의 계급으로 나누고, 각 계급에 속하는 도수를 조사하여 나타낸 표
- 자료의 값 중에서 가장 많이 나타나는 값
- 부채꼴 AOB에서 $\angle AOB$ 를 호 AB에 대한 $\square\square$ 이라고 한다.
- 40~50만 년 전의 제2간빙기에 살았던 것으로 추정되는 화석 인류
- $\angle B$ 가 직각인 삼각형 ABC에서 $\frac{CB}{AC}$ 를 $\angle A$ 의 $\square\square$ 이라고 한다.



맨홀 덮개에서 보는 수학



맨홀 덮개의 모양을 살펴보면 사각형이나 삼각형인 맨홀 덮개도 일부 있지만 나ראה다. 지역마다 대부분의 맨홀 덮개 모양은 원이다.

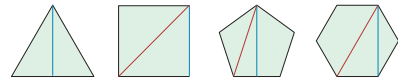


왜 다각형 모양의 맨홀 덮개보다 원 모양의 맨홀 덮개가 더 많을까?

맨홀은 도로 표면에서 지하로 사람이 들어갈 수 있도록 만든 구멍이므로 맨홀 덮개의 모양은 제작, 운반, 안전 등을 모두 고려하여 만들어야 한다. 그중에서도 특히 안전한 덮개를 만들려면 어떤 도형이 되어야 하는지 생각해 보자.

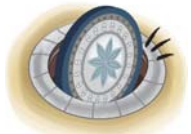
도형 중에서 가장 기본이 되는 정다각형과 원을 수학적으로 비교해 보자.

맨홀의 덮개 모양이 정삼각형일 경우에는 높이가 한 변의 길이보다 짧아 삼각형 모양의 맨홀 덮개를 수직으로 세우면 맨홀 덮개가 안으로 빠지게 된다. 정사각형일 경우에는 한 변의 길이가 대각선의 길이보다 짧고, 정오각형과 정육각형일 경우에도 마찬가지이다.



그러나 맨홀 덮개 모양이 원일 경우에는 조금 다르다. 원은

중심에서 같은 거리에 있는 점을 연결한 도형이다. 따라서 맨홀 덮개 모양이 원인 경우에는 구멍에 빠지지 않는 안전한 덮개가 된다. 바로 이런 이유 때문에 맨홀 덮개 모양은 대부분 원이다.



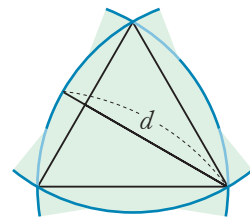
수학으로 세상 읽기

맨홀 뚜껑이 둥근 이유는 무엇일까?

- 넓이를 최대화 하기 위해서이다. 원은 모든 모양의 도형 중 일정한 길이로 최대의 넓이를 가질 수 있다. 즉, 같은 길이로 더 넓은 공간을 만들 수 있기 때문에 경제적으로 비용을 절감할 수 있다.
- 맨홀 뚜껑을 열었을 때 뚜껑이 구멍에 빠지지 않게 하기 위해서이다. 삼각형이나 사각형으로 맨홀 뚜껑을 만들면 재는 위치에 따라 폭이 달라지므로 뚜껑과 구멍의 폭의 차이로 구멍에 빠질 수 있다. 예를 들면 정사각형이나 직사각형의 경우는 대각선의 길이가 변의 길이보다 길기 때문에 세로로 세우면 빠지게 된다. 그런데 원의 지름은 어느 방향으로 재어도 길이가 똑같기 때문에 원 모양의 뚜껑은 구멍에 빠지지 않는다.
- 운반에 있어서 용이한 점이 있다. 맨홀 뚜껑을 원 모양으로 하여 운반할 때 굴러서 이동하기가 쉬운 점이 있다.
- 어느 방향으로 보아도 같은 모양이다. 삼각형, 사각형은 보는 각도에 따라 모양이 일정하지 않지만 원은 어느 방향으로 보아도 같은 원이기 때문에 식별하기가 쉽다.

원 모양이 아닌 맨홀 뚜껑은 없을까?

아래 그림과 같이 만든 볼록한 삼각형은 어느 방향에서도 폭이 일정하기 때문에 이렇게 만든 맨홀 덮개는 구멍에 빠지지 않는다.



볼록한 삼각형은 18세기 독일의 공학자 프란츠 뮐로(Franz Reuleaux, 1829~1905)가 기계장치에 쓰면서 고안한 도형으로 '뮐로삼각형'이라고 부르며 폭이 d 일 때 넓이가 $\frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3})d^2$ 으로 같은 폭을 가진 원보다 넓이가 10% 이상 작다.

제공근표(1)

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	1.000	1.005	1.010	1.015	1.020	1.025	1.030	1.034	1.039	1.044
1.1	1.049	1.054	1.058	1.063	1.068	1.072	1.077	1.082	1.086	1.091
1.2	1.095	1.100	1.105	1.109	1.114	1.118	1.122	1.127	1.131	1.136
1.3	1.140	1.145	1.149	1.153	1.158	1.162	1.166	1.170	1.175	1.179
1.4	1.183	1.187	1.192	1.196	1.200	1.204	1.208	1.212	1.217	1.221
1.5	1.225	1.229	1.233	1.237	1.241	1.245	1.249	1.253	1.257	1.261
1.6	1.265	1.269	1.273	1.277	1.281	1.285	1.288	1.292	1.296	1.300
1.7	1.304	1.308	1.311	1.315	1.319	1.323	1.327	1.330	1.334	1.338
1.8	1.342	1.345	1.349	1.353	1.356	1.360	1.364	1.367	1.371	1.375
1.9	1.378	1.382	1.386	1.389	1.393	1.396	1.400	1.404	1.407	1.411
2.0	1.414	1.418	1.421	1.425	1.428	1.432	1.435	1.439	1.442	1.446
2.1	1.449	1.453	1.456	1.459	1.463	1.466	1.470	1.473	1.476	1.480
2.2	1.483	1.487	1.490	1.493	1.497	1.500	1.503	1.507	1.510	1.513
2.3	1.517	1.520	1.523	1.526	1.530	1.533	1.536	1.539	1.543	1.546
2.4	1.549	1.552	1.556	1.559	1.562	1.565	1.568	1.572	1.575	1.578
2.5	1.581	1.584	1.587	1.591	1.594	1.597	1.600	1.603	1.606	1.609
2.6	1.612	1.616	1.619	1.622	1.625	1.628	1.631	1.634	1.637	1.640
2.7	1.643	1.646	1.649	1.652	1.655	1.658	1.661	1.664	1.667	1.670
2.8	1.673	1.676	1.679	1.682	1.685	1.688	1.691	1.694	1.697	1.700
2.9	1.703	1.706	1.709	1.712	1.715	1.718	1.720	1.723	1.726	1.729
3.0	1.732	1.735	1.738	1.741	1.744	1.746	1.749	1.752	1.755	1.758
3.1	1.761	1.764	1.766	1.769	1.772	1.775	1.778	1.780	1.783	1.786
3.2	1.789	1.792	1.794	1.797	1.800	1.803	1.806	1.808	1.811	1.814
3.3	1.817	1.819	1.822	1.825	1.828	1.830	1.833	1.836	1.838	1.841
3.4	1.844	1.847	1.849	1.852	1.855	1.857	1.860	1.863	1.865	1.868
3.5	1.871	1.873	1.876	1.879	1.881	1.884	1.887	1.889	1.892	1.895
3.6	1.897	1.900	1.903	1.905	1.908	1.910	1.913	1.916	1.918	1.921
3.7	1.924	1.926	1.929	1.931	1.934	1.936	1.939	1.942	1.944	1.947
3.8	1.949	1.952	1.954	1.957	1.960	1.962	1.965	1.967	1.970	1.972
3.9	1.975	1.977	1.980	1.982	1.985	1.987	1.990	1.992	1.995	1.997
4.0	2.000	2.002	2.005	2.007	2.010	2.012	2.015	2.017	2.020	2.022
4.1	2.025	2.027	2.030	2.032	2.035	2.037	2.040	2.042	2.045	2.047
4.2	2.049	2.052	2.054	2.057	2.059	2.062	2.064	2.066	2.069	2.071
4.3	2.074	2.076	2.078	2.081	2.083	2.086	2.088	2.090	2.093	2.095
4.4	2.098	2.100	2.102	2.105	2.107	2.110	2.112	2.114	2.117	2.119
4.5	2.121	2.124	2.126	2.128	2.131	2.133	2.135	2.138	2.140	2.142
4.6	2.145	2.147	2.149	2.152	2.154	2.156	2.159	2.161	2.163	2.166
4.7	2.168	2.170	2.173	2.175	2.177	2.179	2.182	2.184	2.186	2.189
4.8	2.191	2.193	2.195	2.198	2.200	2.202	2.205	2.207	2.209	2.211
4.9	2.214	2.216	2.218	2.220	2.223	2.225	2.227	2.229	2.232	2.234
5.0	2.236	2.238	2.241	2.243	2.245	2.247	2.249	2.252	2.254	2.256
5.1	2.258	2.261	2.263	2.265	2.267	2.269	2.272	2.274	2.276	2.278
5.2	2.280	2.283	2.285	2.287	2.289	2.291	2.293	2.296	2.298	2.300
5.3	2.302	2.304	2.307	2.309	2.311	2.313	2.315	2.317	2.319	2.322
5.4	2.324	2.326	2.328	2.330	2.332	2.335	2.337	2.339	2.341	2.343

제공근표(2)

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	2,345	2,347	2,349	2,352	2,354	2,356	2,358	2,360	2,362	2,364
5.6	2,366	2,369	2,371	2,373	2,375	2,377	2,379	2,381	2,383	2,385
5.7	2,387	2,390	2,392	2,394	2,396	2,398	2,400	2,402	2,404	2,406
5.8	2,408	2,410	2,412	2,415	2,417	2,419	2,421	2,423	2,425	2,427
5.9	2,429	2,431	2,433	2,435	2,437	2,439	2,441	2,443	2,445	2,447
6.0	2,449	2,452	2,454	2,456	2,458	2,460	2,462	2,464	2,466	2,468
6.1	2,470	2,472	2,474	2,476	2,478	2,480	2,482	2,484	2,486	2,488
6.2	2,490	2,492	2,494	2,496	2,498	2,500	2,502	2,504	2,506	2,508
6.3	2,510	2,512	2,514	2,516	2,518	2,520	2,522	2,524	2,526	2,528
6.4	2,530	2,532	2,534	2,536	2,538	2,540	2,542	2,544	2,546	2,548
6.5	2,550	2,551	2,553	2,555	2,557	2,559	2,561	2,563	2,565	2,567
6.6	2,569	2,571	2,573	2,575	2,577	2,579	2,581	2,583	2,585	2,587
6.7	2,588	2,590	2,592	2,594	2,596	2,598	2,600	2,602	2,604	2,606
6.8	2,608	2,610	2,612	2,613	2,615	2,617	2,619	2,621	2,623	2,625
6.9	2,627	2,629	2,631	2,632	2,634	2,636	2,638	2,640	2,642	2,644
7.0	2,646	2,648	2,650	2,651	2,653	2,655	2,657	2,659	2,661	2,663
7.1	2,665	2,666	2,668	2,670	2,672	2,674	2,676	2,678	2,680	2,681
7.2	2,683	2,685	2,687	2,689	2,691	2,693	2,694	2,696	2,698	2,700
7.3	2,702	2,704	2,706	2,707	2,709	2,711	2,713	2,715	2,717	2,718
7.4	2,720	2,722	2,724	2,726	2,728	2,729	2,731	2,733	2,735	2,737
7.5	2,739	2,740	2,742	2,744	2,746	2,748	2,750	2,751	2,753	2,755
7.6	2,757	2,759	2,760	2,762	2,764	2,766	2,768	2,769	2,771	2,773
7.7	2,775	2,777	2,778	2,780	2,782	2,784	2,786	2,787	2,789	2,791
7.8	2,793	2,795	2,796	2,798	2,800	2,802	2,804	2,805	2,807	2,809
7.9	2,811	2,812	2,814	2,816	2,818	2,820	2,821	2,823	2,825	2,827
8.0	2,828	2,830	2,832	2,834	2,835	2,837	2,839	2,841	2,843	2,844
8.1	2,846	2,848	2,850	2,851	2,853	2,855	2,857	2,858	2,860	2,862
8.2	2,864	2,865	2,867	2,869	2,871	2,872	2,874	2,876	2,877	2,879
8.3	2,881	2,883	2,884	2,886	2,888	2,890	2,891	2,893	2,895	2,897
8.4	2,898	2,900	2,902	2,903	2,905	2,907	2,909	2,910	2,912	2,914
8.5	2,915	2,917	2,919	2,921	2,922	2,924	2,926	2,927	2,929	2,931
8.6	2,933	2,934	2,936	2,938	2,939	2,941	2,943	2,944	2,946	2,948
8.7	2,950	2,951	2,953	2,955	2,956	2,958	2,960	2,961	2,963	2,965
8.8	2,966	2,968	2,970	2,972	2,973	2,975	2,977	2,978	2,980	2,982
8.9	2,983	2,985	2,987	2,988	2,990	2,992	2,993	2,995	2,997	2,998
9.0	3,000	3,002	3,003	3,005	3,007	3,008	3,010	3,012	3,013	3,015
9.1	3,017	3,018	3,020	3,022	3,023	3,025	3,027	3,028	3,030	3,032
9.2	3,033	3,035	3,036	3,038	3,040	3,041	3,043	3,045	3,046	3,048
9.3	3,050	3,051	3,053	3,055	3,056	3,058	3,059	3,061	3,063	3,064
9.4	3,066	3,068	3,069	3,071	3,072	3,074	3,076	3,077	3,079	3,081
9.5	3,082	3,084	3,085	3,087	3,089	3,090	3,092	3,094	3,095	3,097
9.6	3,098	3,100	3,102	3,103	3,105	3,106	3,108	3,110	3,111	3,113
9.7	3,114	3,116	3,118	3,119	3,121	3,122	3,124	3,126	3,127	3,129
9.8	3,130	3,132	3,134	3,135	3,137	3,138	3,140	3,142	3,143	3,145
9.9	3,146	3,148	3,150	3,151	3,153	3,154	3,15	3,158	3,159	3,161

제공근표(3)

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	3.162	3.178	3.194	3.209	3.225	3.240	3.256	3.271	3.286	3.302
11	3.317	3.332	3.347	3.362	3.376	3.391	3.406	3.421	3.435	3.450
12	3.464	3.479	3.493	3.507	3.521	3.536	3.550	3.564	3.578	3.592
13	3.606	3.619	3.633	3.647	3.661	3.674	3.688	3.701	3.715	3.728
14	3.742	3.755	3.768	3.782	3.795	3.808	3.821	3.834	3.847	3.860
15	3.873	3.886	3.899	3.912	3.924	3.937	3.950	3.962	3.975	3.987
16	4.000	4.012	4.025	4.037	4.050	4.062	4.074	4.087	4.099	4.111
17	4.123	4.135	4.147	4.159	4.171	4.183	4.195	4.207	4.219	4.231
18	4.243	4.254	4.266	4.278	4.290	4.301	4.313	4.324	4.336	4.347
19	4.359	4.370	4.382	4.393	4.405	4.416	4.427	4.438	4.450	4.461
20	4.472	4.483	4.494	4.506	4.517	4.528	4.539	4.550	4.561	4.572
21	4.583	4.593	4.604	4.615	4.626	4.637	4.648	4.658	4.669	4.680
22	4.690	4.701	4.712	4.722	4.733	4.743	4.754	4.764	4.775	4.785
23	4.796	4.806	4.817	4.827	4.837	4.848	4.858	4.868	4.879	4.889
24	4.899	4.909	4.919	4.930	4.940	4.950	4.960	4.970	4.980	4.990
25	5.000	5.010	5.020	5.030	5.040	5.050	5.060	5.070	5.079	5.089
26	5.099	5.109	5.119	5.128	5.138	5.148	5.158	5.167	5.177	5.187
27	5.196	5.206	5.215	5.225	5.235	5.244	5.254	5.263	5.273	5.282
28	5.292	5.301	5.310	5.320	5.329	5.339	5.348	5.357	5.367	5.376
29	5.385	5.394	5.404	5.413	5.422	5.431	5.441	5.450	5.459	5.468
30	5.477	5.486	5.495	5.505	5.514	5.523	5.532	5.541	5.550	5.559
31	5.568	5.577	5.586	5.595	5.604	5.612	5.621	5.630	5.639	5.648
32	5.657	5.666	5.675	5.683	5.692	5.701	5.710	5.718	5.727	5.736
33	5.745	5.753	5.762	5.771	5.779	5.788	5.797	5.805	5.814	5.822
34	5.831	5.840	5.848	5.857	5.865	5.874	5.882	5.891	5.899	5.908
35	5.916	5.925	5.933	5.941	5.950	5.958	5.967	5.975	5.983	5.992
36	6.000	6.008	6.017	6.025	6.033	6.042	6.050	6.058	6.066	6.075
37	6.083	6.091	6.099	6.107	6.116	6.124	6.132	6.140	6.148	6.156
38	6.164	6.173	6.181	6.189	6.197	6.205	6.213	6.221	6.229	6.237
39	6.245	6.253	6.261	6.269	6.277	6.285	6.293	6.301	6.309	6.317
40	6.325	6.332	6.340	6.348	6.356	6.364	6.372	6.380	6.387	6.395
41	6.403	6.411	6.419	6.427	6.434	6.442	6.450	6.458	6.465	6.473
42	6.481	6.488	6.496	6.504	6.512	6.519	6.527	6.535	6.542	6.550
43	6.557	6.565	6.573	6.580	6.588	6.595	6.603	6.611	6.618	6.626
44	6.633	6.641	6.648	6.656	6.663	6.671	6.678	6.686	6.693	6.701
45	6.708	6.716	6.723	6.731	6.738	6.745	6.753	6.760	6.768	6.775
46	6.782	6.790	6.797	6.804	6.812	6.819	6.826	6.834	6.841	6.848
47	6.856	6.863	6.870	6.877	6.885	6.892	6.899	6.907	6.914	6.921
48	6.928	6.935	6.943	6.950	6.957	6.964	6.971	6.979	6.986	6.993
49	7.000	7.007	7.014	7.021	7.029	7.036	7.043	7.050	7.057	7.064
50	7.071	7.078	7.085	7.092	7.099	7.106	7.113	7.120	7.127	7.134
51	7.141	7.148	7.155	7.162	7.169	7.176	7.183	7.190	7.197	7.204
52	7.211	7.218	7.225	7.232	7.239	7.246	7.253	7.259	7.266	7.273
53	7.280	7.287	7.294	7.301	7.308	7.314	7.321	7.328	7.335	7.342
54	7.348	7.355	7.362	7.369	7.376	7.382	7.389	7.396	7.403	7.409

제곱근표(4)

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7.416	7.423	7.430	7.436	7.443	7.450	7.457	7.463	7.470	7.477
56	7.483	7.490	7.497	7.503	7.510	7.517	7.523	7.530	7.537	7.543
57	7.550	7.556	7.563	7.570	7.576	7.583	7.589	7.596	7.603	7.609
58	7.616	7.622	7.629	7.635	7.642	7.649	7.655	7.662	7.668	7.675
59	7.681	7.688	7.694	7.701	7.707	7.714	7.720	7.727	7.733	7.740
60	7.746	7.752	7.759	7.765	7.772	7.778	7.785	7.791	7.797	7.804
61	7.810	7.817	7.823	7.829	7.836	7.842	7.849	7.855	7.861	7.868
62	7.874	7.880	7.887	7.893	7.899	7.906	7.912	7.918	7.925	7.931
63	7.937	7.944	7.950	7.956	7.962	7.969	7.975	7.981	7.987	7.994
64	8.000	8.006	8.012	8.019	8.025	8.031	8.037	8.044	8.050	8.056
65	8.062	8.068	8.075	8.081	8.087	8.093	8.099	8.106	8.112	8.118
66	8.124	8.130	8.136	8.142	8.149	8.155	8.161	8.167	8.173	8.179
67	8.185	8.191	8.198	8.204	8.210	8.216	8.222	8.228	8.234	8.240
68	8.246	8.252	8.258	8.264	8.270	8.276	8.283	8.289	8.295	8.301
69	8.307	8.313	8.319	8.325	8.331	8.337	8.343	8.349	8.355	8.361
70	8.367	8.373	8.379	8.385	8.390	8.396	8.402	8.408	8.414	8.420
71	8.426	8.432	8.438	8.444	8.450	8.456	8.462	8.468	8.473	8.479
72	8.485	8.491	8.497	8.503	8.509	8.515	8.521	8.526	8.532	8.538
73	8.544	8.550	8.556	8.562	8.567	8.573	8.579	8.585	8.591	8.597
74	8.602	8.608	8.614	8.620	8.626	8.631	8.637	8.643	8.649	8.654
75	8.660	8.666	8.672	8.678	8.683	8.689	8.695	8.701	8.706	8.712
76	8.718	8.724	8.729	8.735	8.741	8.746	8.752	8.758	8.764	8.769
77	8.775	8.781	8.786	8.792	8.798	8.803	8.809	8.815	8.820	8.826
78	8.832	8.837	8.843	8.849	8.854	8.860	8.866	8.871	8.877	8.883
79	8.888	8.894	8.899	8.905	8.911	8.916	8.922	8.927	8.933	8.939
80	8.944	8.950	8.955	8.961	8.967	8.972	8.978	8.983	8.989	8.994
81	9.000	9.006	9.011	9.017	9.022	9.028	9.033	9.039	9.044	9.050
82	9.055	9.061	9.066	9.072	9.077	9.083	9.088	9.094	9.099	9.105
83	9.110	9.116	9.121	9.127	9.132	9.138	9.143	9.149	9.154	9.160
84	9.165	9.171	9.176	9.182	9.187	9.192	9.198	9.203	9.209	9.214
85	9.220	9.225	9.230	9.236	9.241	9.247	9.252	9.257	9.263	9.268
86	9.274	9.279	9.284	9.290	9.295	9.301	9.306	9.311	9.317	9.322
87	9.327	9.333	9.338	9.343	9.349	9.354	9.359	9.365	9.370	9.375
88	9.381	9.386	9.391	9.397	9.402	9.407	9.413	9.418	9.423	9.429
89	9.434	9.439	9.445	9.450	9.455	9.460	9.466	9.471	9.476	9.482
90	9.487	9.492	9.497	9.503	9.508	9.513	9.518	9.524	9.529	9.534
91	9.539	9.545	9.550	9.555	9.560	9.566	9.571	9.576	9.581	9.586
92	9.592	9.597	9.602	9.607	9.612	9.618	9.623	9.628	9.633	9.638
93	9.644	9.649	9.654	9.659	9.664	9.670	9.675	9.680	9.685	9.690
94	9.695	9.701	9.706	9.711	9.716	9.721	9.726	9.731	9.737	9.742
95	9.747	9.752	9.757	9.762	9.767	9.772	9.778	9.783	9.788	9.793
96	9.798	9.803	9.808	9.813	9.818	9.823	9.829	9.834	9.839	9.844
97	9.849	9.854	9.859	9.864	9.869	9.874	9.879	9.884	9.889	9.894
98	9.899	9.905	9.910	9.915	9.920	9.925	9.930	9.935	9.940	9.945
99	9.950	9.955	9.960	9.965	9.970	9.975	9.980	9.985	9.990	9.995

삼각비의 표

각도	사인(sin)	코사인(cos)	탄젠트(tan)	각도	사인(sin)	코사인(cos)	탄젠트(tan)
0°	0.0000	1.0000	0.0000	45°	0.7071	0.7071	1.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.6643
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.8040
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.8807
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.9626
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.0503
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.1445
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.2460
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.3559
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.4751
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.6051
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.7475
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.9042
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.0777
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.2709
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.4874
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2588	3.7321
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.0108
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.3315
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.7046
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.1446
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.6713
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.3138
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.1154
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.1443
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.5144
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.4301
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.3007
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.0811
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.6363
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	90°	1.0000	0.0000	



■ Getty Images/멀티비츠

130쪽, 181쪽, 229쪽, 241쪽, 377쪽

■ 연합뉴스

279쪽

■ 구글 이미지

70쪽, 86쪽, 95쪽, 409쪽

■ 송은영, 교실 밖에서 배우는 재미있는 수학상식, 도서출판 맑은 창, 2003, 75쪽

■ 박교식, 수학기호 다시보기 시리즈(1), 수학사랑, 2010, 79쪽,

321쪽

■ H. Eves(이우영 · 신항균 역), 2005, 86쪽, 156쪽, 276쪽

■ 칼 B. 보이어(Carl B. Boyer) 외(양영오, 조윤동 역), 2002, 156쪽

■ 식품 의약품 안전청(<http://www.kfda.go.kr>), 241쪽

■ 동아시아언스(<http://news.dongascience.com>), 2007. 93쪽

■ 동아일보(<http://www.donga.com>), 2008, 279쪽

■ EBS, 문명과 수학, EBS, 2001, 281쪽

■ 수학동아, 수학동아 vol27, 동아시아언스, 2011, 410쪽

집필진 소개

대표 저자: 고희경

성균관대학교 사범대학 수학교육학과 졸업

단국대학교 수학교육학(박사)

조지아대학교 수학교육학(박사후 과정)

(현)아주대학교 교육대학원 수학교육과 교수

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정

연구 중등 책임자

김응환

공주대학교 사범 대학 수학교육학과 졸업

충남대학교 계산통계학(박사)

(현)공주대학교 사범대학 수학교육학과 교수

제7차 개정 교육과정 고등학교 수학 교과서 검

정 심사 위원

양순열

서울교육대학교 수학교육학과 졸업

한국국원대학교 수학교육학(박사)

(현)교학사 수학교육 연구소장

제5차 교육과정 수학 심의 위원

권세화

단국대학교 이과대학 수학과 졸업

단국대학교 수학교육학(박사)

(전)성수여중, 잠신중, 풍납중, 오륜중

(현)서일중학교 교장

권순학

KAIST 자연과학대학 수학과 졸업

Johns Hopkins Univ.정수론(박사)

(현)성균관대학교 자연과학대학 수학과 교수

정낙영

충남대학교 기계공학교육학과(수학 부전공)

졸업

충남대학교 수학교육학(석사)

(전)당곡중, 남서울중, 개포중, 반포중, 남성중,

대명중, 신구중

(현)동대문중학교 교감

제7차 개정 교육과정 중학교 수학 교과서 집필

장인선

인천대학교 자연과학대학 수학과 졸업

(현)교학사 편집 1부 수학과 부장

제7차 개정 교육과정 중학교 수학 교과서 집필

제7차 개정 교육과정 고등학교 수학 교과서 집필

임유원

서울대학교 사범대학 수학교육과 졸업

서울시립대학교 수학교육학(석사)

(전)용산중, 용강중, 창덕여중, 덕수중, 서울사대

부여중, 한강중

(현)서울특별시 동부교육지원청 장학사

제7차 개정 교육과정 중학교 수학 교과서 집필

최수영

KAIST 자연과학대학 수학과 졸업

KAIST 위상수학(박사)

오사카시립대학 JSPS 외국인박사후연구원

(현)아주대학교 수학과 교수

이성재

서울대학교 사범대학 수학교육과 졸업

(전)구정중, 연희여중, 서울사대부중, 전농중

(현)중경고등학교 교사

제7차 교육과정 중학교 수학 교과서 집필

제7차 개정 교육과정 중학교 수학 교과서 집필

노솔

고려대학교 사범대학 수학교육학과 졸업

(현)상명중학교 교사

백형운

고려대학교 사범대학 수학교육학과 졸업

고려대학교 수학교육학(석사)

(전)덕수중, 창덕여중

(현)성동고등학교 교사

홍창섭

성균관대학교 사범대학 수학교육학과 졸업

(현)경희여자중학교 교사