VII 원의 성질

VII

원의 성질

1 원과 직선

2 원주각의 성질

학습한 내용	본 단원의 내용	학습할 내용
중학교 수학 ❶ 평면도형의 성질	1. 원과 직선 2. 원주각의 성질	고등학교 수학 I 도형의 방정식
중학교 수학 ❷ 삼각형의 성질 도형의 닮음		
중학교 수학 ❸ 피타고라스 정리		

단원 배경

원은 동서양을 막론하고 오랜 옛날부터 많은 사람들의 관심의 대상이었다. 사람들은 원의 성질에 대해 연구할 뿐만 아니라 원을 이용하여 상품을 담는 용기를 만들거나 동전, 맨홀 뚜껑 등의 생활 용품을 만들 때에도 활용하였다. 이와 같이 원은 실용적인 면에서 매우 뛰어나기 때문에 디자인이나 그래프, 천문학 모형, 스포츠 과학에 이르기까지 다양하게 이용된다.

❶ 단원을 들어가면서

인간들이 인위적으로 만든 물체들에는 사각형 모양이 많지만 자연적으로 만들어진 물체들에서는 원 모양을 많이 볼 수 있다. 이러한 원이 직선과 만나면서 나타나는 여러 가지 성질들을 통하여 원과 삼각형, 원과 사각형 사이의 관계를 이해할 수 있다.

이 단원은 원과 직선, 원주각의 성질로 구성되어 있다. 원과 직선에서는 현의 수직이등분선과 현의 길이에 대한 성질, 원의 접선에 대한 성질을 이해할 수 있도록 한다. 원주각의 성질에서는 원주각과 중심각, 접선과 현이 이루는 각 사이의 관계를 이해하고, 원에 내접하는 사각형의 성질과 원의 두 할선의 선분의 길이의 관계를 이해할 수 있도록 한다.

❷ 단원의 지도 목표

1. 원과 직선

(1) 원의 현에 관한 성질을 이해하게 한다.

(2) 원의 접선에 관한 성질을 이해하게 한다.

2. 원주각의 성질

(1) 원주각의 성질을 이해하게 한다.

(2) 원주각의 성질을 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있게 한다.

③ 단원의 교수·학습상의 유의점

1. 원과 직선

(1) 접선의 길이는 교수 · 학습 상황에서 다룰 수 있다.

2. 원주각의 성질

(1) 원의 성질을 이해하고 설명하는 활동은 학생의 수준에 따라 다르게 할 수 있다.
(2) 공학적 도구나 다양한 교구를 활용하여 원의 성질을 추론할 수 있게 한다.

④ 단원의 지도 계통

학습한 내용		본 단원의 내용	학습할 내용	
중학교 수학 ❶	- 부채꼴의 중심각과 호 - 원의 접선과 반지름	**1. 원과 직선** 1-1 원과 현 1-2 원의 접선 **2. 원주각의 성질** 2-1 원주각 2-2 원주각의 활용	고등학교 수학 Ⅰ	- 도형의 방정식
중학교 수학 ❷	- 삼각형의 성질 - 이등변삼각형의 성질 - 삼각형의 닮음조건			
중학교 수학 ❸	- 피타고라스 정리			

⑤ 단원의 이론적 배경

1. 원의 역사

원의 성질은 인류 역사가 시작된 이래로 연구되어 왔다.

17세기경 고대 이집트의 수학자인 아메스(Ahmes ; ? B.C. 1680∼? B.C. 1620)는 파피루스에 산술, 대수, 기하 등을 기록한 최초의 수학책을 저술하였는데, 이 책에는 “지름이 9인 원의 넓이는 한 변의 길이가 8인 정사각형의 넓이와 같다.”라고 기록되어 있다.

기원전 6세기경 그리스의 도시 국가 밀레투스에서 활동한 탈레스(Thales ; ? B.C. 640∼? B.C. 546)는 ‘반원에서 원주각은 항상 직각이다.’, ‘원은 임의의 지름에 의하여 이등분된다.’ 즉, ‘지름을 한 변으로 하고 원주 위에 한 점을 가진 삼각형은 직각삼각형이다.’와 같은 원과 관련된 명제를 최초로 이론적으로 증명한 사람으로 알려져 있다.

원의 성질을 체계적으로 연구한 사람은 기원전 5세기경의 그리스 수학자 히포크라테스(Hippocrates ; ?B.C. 460∼?B.C. 377)로 알려져 있다.

그가 집필한 책들은 오늘날에는 전해지지 않고 있지만 기원전 3세기경에 활동한 유클리드(Euclid ; ?B.C. 325∼? B.C.265)가 그의 연구에 기초하여 “원론”을 집필한 것으로 알려져 있다.

유클리드의 “원론”은 총 13권으로 구성되어 있는데, 이 중에서 제3권에 원의 성질 37개가 증명되어 있으며, 제4권에서 원에 내접 또는 외접하는 도형에 대한 명제 16개가 다루어지고 있다.

유클리드의 “원론”에 제시된 원의 성질들은 대부분 중학교 3학년 과정에서 다루는 내용과 유사하다. 다만 오늘날과 같은 기호나 그림을 사용하지 않았다는 데 차이점이 있다.

그리스의 수학자 아르키메데스(Archimedes ; B.C. 287∼B.C. 212)는 원의 둘레의 값이 원의 외접다각형과 내접다각형의 둘레의 값 사이에 있음을 이용하여 ‘$\frac{223}{71}<(\text{원주율})<\frac{22}{7}$’임을 알아냈고, 또 ‘구에 외접하는 원기둥의 부피는 그 구의 부피의 1.5배이다.’라는 사실을 발견하였다.

2. 수학자와 원

가. 아르키메데스의 원

시칠리아 섬에 있는 시라쿠스에서 태어나 천문학자인 아버지의 영향으로 어려서부터 수학과 과학에 관심이 많았던 아르키메데스는 수학 분야에서 많은 업적을 남겼다. 아르키메데스는 수학의 여러 영역 중 도형, 즉 기하학에 관심이 많았는데, 이를 활용하여 지레의 원리를 발견하였고, 무게중심, π의 값, 구의 부피와 겉넓이 등을 구하였다. 그는 원에 대해 아주 직관적으로 접근했으면서도 자신의 생각을 논리적으로 설명하였다.

아르키메데스는 평소에 자기가 발견한 위대한 기하학적 도형에 대하여 대단한 긍지를 가지고 있었으며, 또 자신의 책 "구와 원기둥에 대하여"를 굉장히 자랑스럽게 생각했다. 그래서 그는 자기가 죽으면 묘비 위에 구에 외접한 원기둥을 그린 그림을 새겨달라는 말을 남기기도 했다.

나. 아폴로니오스의 원

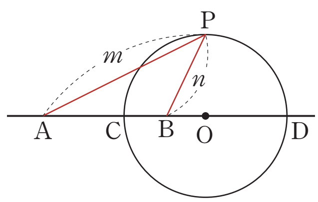
고대 그리스의 천문학자이자 수학자인 아폴로니오스(Apollonios ; ?B.C. 262~?B.C. 190)는 원뿔곡선을 연구하여 타원, 포물선, 쌍곡선이라는 이름을 만든 것으로 유명하다.

그 당시 그리스 사람들은 아폴로니오스를 위대한 기하학자로 불렀는데, 그 이유는 자신이 저작한 "원뿔곡선론"에서 원뿔에 대한 연구를 집대성함으로써 후세에 이차곡선론이라고 불리는 대부분의 것을 해석기하학의 방법으로 풀어내었기 때문이다.

원뿔곡선이란 평면이 원뿔과 만나서 만들어내는 여러 가지 아름다운 곡선을 말하는 것으로, 평면이 원뿔의 밑면과 평행하게 만나면 원, 평면이 원뿔의 밑면과 비스듬하게 만나면 타원, 모선과 평행하게 만나면 포물선, 밑면과 수직으로 만나면 쌍곡선이 만들어진다.

아폴로니오스의 원은 평면 위에서 두 정점에 이르는 거리의 비가 1이 아닌 일정한 값을 가지면서 움직이는 점 전체의 집합이다.

오른쪽 그림에서 정점을 A, B라 하면

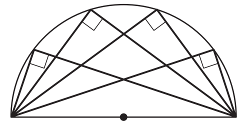


$$m : n = \overline{AP} : \overline{BP} = \overline{AC} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{BD}$$

이다. 이를 만족하며 평면 위를 움직이는 점 P 전체의 집합은 지름을 $\overline{CD}$로 하는 원이 된다. 이 원을 아폴로니오스의 원이라고 한다.

다. 탈레스의 원

탈레스는 그리스의 7명의 현인 중 한 명으로 일컬어질 정도로 유명한 수학자이자 철학자로서, 경험적이며, 실용적인 지식을 바탕으로 그림자를 이용하여 피라미드의 높이를 재는 등 기하학을 확립한 인물이다.



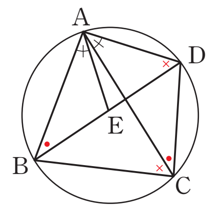
크고 작은 반원 등 무수히 많은 종류의 반원이 있을 뿐만 아니라. 한 반원 위의 원주각도 무수히 많다. 따라서 이 무수히 많은 반원의 원주각이 직각이라는 사실을 일일이 확인해야만 비로소 '지름 위의 원주각은 직각이다.' 라고 주장할 수 있는데, 이렇게 하는 것은 사실상 불가능하다. 이에 탈레스는 일일이 조사하지 않고도 지름 위의 모든 원주각의 크기는 항상 직각이라는 사실을 확인할 수 있는 방법을 찾아냈다. 그 방법은 반원의 대표와 반원 둘레 위의 원주각의 대표로서 한꺼번에 처리하는 것이다.

3. 원의 정리

가. 톨레미의 정리

'원에 내접하는 사각형의 두 쌍의 대변의 길이의 곱의 합은 두 대각선의 길이의 곱과 같다.' 는 것이 톨레미의 정리이다.

즉, 오른쪽 그림에서



$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$

이다. 이 정리의 증명은 다음과 같다.

원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여 대각선 BD 위에

$\angle CAD = \angle BAE$가 되게 점 E를 잡으면 $\triangle ABE \backsim \triangle ACD$에서 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BE} : \overline{CD}$

즉, $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AC} \cdot \overline{BE}$

$\triangle ABC \backsim \triangle AED$에서 $\overline{AC} : \overline{AD} = \overline{BC} : \overline{ED}$

즉, $\overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{ED}$

$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$

프톨레마이오스는 삼각비의 덧셈정리를 이끌어내고 삼각비의 값을 계산하는데 이 정리를 이용하였다.

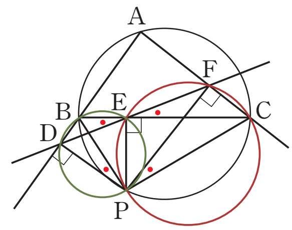
나. 심슨의 정리

'삼각형의 외접원 위의 한 점에서 세 변 또는 그 연장선에 내린 수선의 발은 한 직선 위에 있다.' 는 것이 심슨의 정리이다. 이 정리의 증명은 다음과 같다.

□ABPC가 원에 내접하므로 내대각의 성질에 의하여

$\angle ACP = \angle DBP$

그런데 $\triangle BDP$와 $\triangle CFP$는 모두 직각삼각형이므로



$$\angle BPD = 90^\circ - \angle DBP = 90^\circ - \angle ACP = \angle FPC$$

또 □BDPE는 한 쌍의 대각의 크기의 합이 180° 이므로 원에 내접하고, $\angle PEC = \angle PFC$이므로 □CFEP는 원에 내접한다.

$\angle$BPD$=\angle$BED, $\angle$FPC$=\angle$FEC,

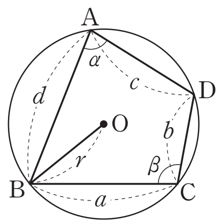
$\angle$BED$=\angle$FEC이므로 두 각은 맞꼭지각이 된다.

따라서 세 점 D, E, F는 한 직선 위에 있다.

4. 원과 사각형

사각형의 네 꼭짓점이 한 원 위에 있을 때, 이 사각형은 원에 내접한다고 한다.

오른쪽 그림과 같이 원 O에 내접하고, 네 변의 길이가 각각 a, b, c, d인 사각형의 한 쌍의 대각을 각각 α, β라 하면 $\alpha+\beta=180°$이다.



또 사각형의 넓이를 S라 할 때,

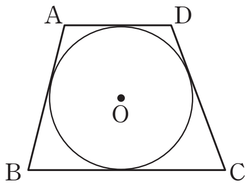
$s=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$라 하면

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

$$r=\frac{1}{4s}\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}$$

이다.

오른쪽 그림과 같이 사각형의 네 변 사이에 $\overline{\text{AB}}+\overline{\text{CD}}=\overline{\text{AD}}+\overline{\text{CB}}$이면 사각형 ABCD는 원에 외접한다. 특히 정다각형은 각 변의 길이가 모두 같으므로 내접원과 외접원이 모두 존재한다.



참고 문헌

• 이종우, 기하학의 역사적 배경과 발달, 경문사, 2011.
• 일본 수학 SEMINER 편집부(류시규 역), 수학 100의 정리, 일본 수학 SEMINAR, 2000.

6 단원의 지도 계획

본문 내용		지도 내용	용어와 기호	쪽수	차시
1. 원과 직선	이야기로 들려주는 원의 성질, 준비하기			268～270	1
	1-1. 원과 현	• 원의 중심과 현의 수직이등분선 • 현의 길이		271～275	2
	1-2. 원의 접선	• 원의 접선		276～279	1
	중단원 마무리하기, 창의 · 인성 키우기			280～283	1
2. 원주각의 성질	준비하기			284	1
	2-1. 원주각	• 원주각과 중심각 • 원주각과 호의 길이 • 네 점이 한 원 위에 있을 조건 • 원의 접선과 현이 이루는 각	원주각	285～296	4
	2-2. 원주각의 활용	• 원에 내접하는 사각형 • 두 할선의 선분의 길이의 비	할선	297～302	2
	중단원 마무리하기, 창의 · 인성 키우기, 컴퓨터로 하는 수학			303～307	1
	단원 마무리하기			308～309	1
	수행 과제, Fun Fun 수학, 수학으로 세상 읽기, 스스로 평가하기			310～313	1
	소계				15

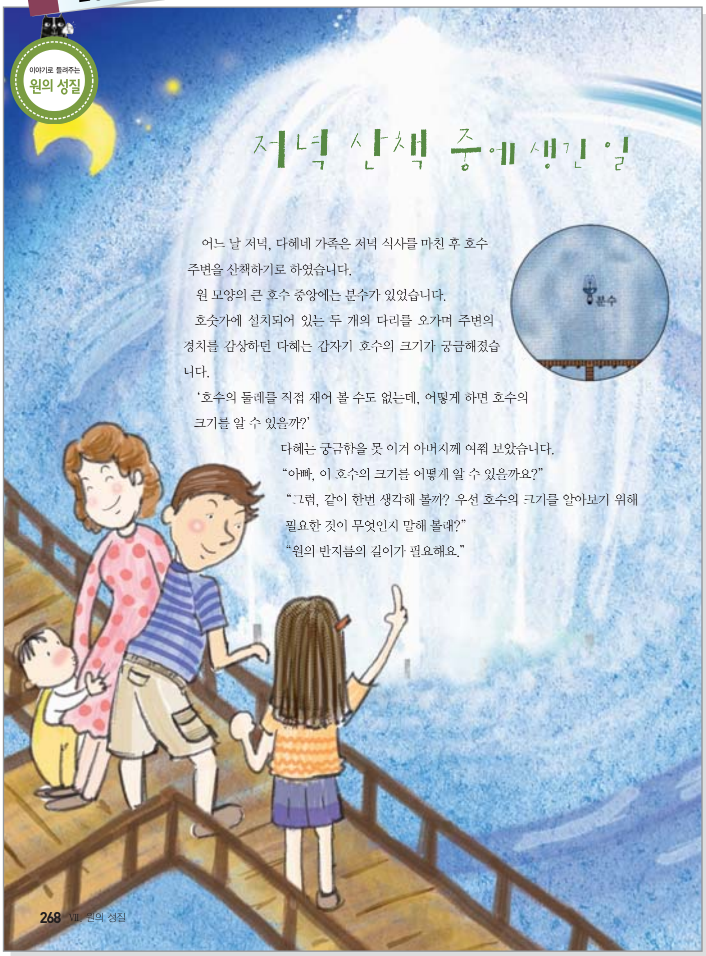
7 교수 · 학습 과정 예시안

단원	Ⅶ. 원의 성질 1. 원과 직선 01. 원과 현	교과서 쪽수	271～272	차시	2/15
학습 주제	원의 중심과 현의 수직이등분선 사이에는 어떤 관계가 있을까?	학습 목표	원의 중심과 현의 수직이등분선과의 관계를 이해할 수 있다.		
준비물	교과서, 활동지, PPT 자료, 학습 준비물, 색종이, 자, 가위			교과 관련	

단계(시간)	학습 내용 및 학습 방법	교수 · 학습 활동: 교사	교수 · 학습 활동: 학생	학습 자료 및 유의점
도입(10분)	**개념 학습**(전체 학습) – 전시 학습 제시	직각삼각형의 합동조건을 활용하는 문제를 제시하고, 학생들의 학습 정도를 파악한다.	배운 내용을 상기하며 준비학습 문제를 해결한다.	
	탐구 학습(전체 학습) – 활동하기	원 모양의 색종이를 접는 조작 활동을 통해 원의 중심과 현 사이의 관계에 대하여 흥미를 유발할 수 있도록 유도한다. – 발문: 두 점 A, B를 겹쳐서 접어 나타난 수직인 선은 어디를 지날까요?	각자 접은 색종이를 보고 접혀진 선이 원의 중심을 지나는지 생각해 본다. – 예상 답변 ① 원의 중심 ② 원의 지름	• 현의 수직이등분선이 원의 중심을 지난다는 사실을 직관적으로 이해하게 한다. ▶ 색종이, 자, 가위, 학습 준비물 ▶ PPT 자료
	– 학습 목표 제시	활동하기와 관련하여 학습 목표를 각자 생각해 보게 한 후 학습 목표를 제시한다.	이번 시간에 배울 내용이 무엇인지 생각해 보고, 학습 목표를 선생님과 함께 생각해 본다.	▶ PPT 자료
전개(28분)	**개념 학습**(전체 학습) – 원의 중심과 현의 수직이등분선과의 관계	• 원의 중심 O에서 현 AB에 내린 수선 OH는 현 AB를 이등분함을 $\triangle OAH$와 $\triangle OBH$가 합동임을 이용하여 설명한다. • 원 O에서 현 AB의 중점을 M이라 할 때, $\overline{AB}\perp\overline{OH}$임을 설명한다.	• 원의 중심과 현의 수직이등분선의 관계에 대해서 생각해 보고 이해한다. • 현의 수직이등분선이 원의 중심을 지나는 것을 합동을 이용하여 이해하고 설명한다.	
	수준별 학습(개별 학습)	하 직관적인 방법을 통해 이해할 수 있도록 지도한다. 예 색종이를 원 모양으로 잘라서 접은 후 $\overline{AH}$와 $\overline{BH}$의 길이를 비교하도록 한다.		

단계(시간)	학습 내용 및 학습 방법	교수 · 학습 활동		학습 자료 및 유의점
		교사	학생	
	문제 해결 학습(개별 학습) – 문제 1	• 여러 가지 문제를 통해 원과 현의 수직이등분선의 관계를 정확히 인지할 수 있도록 지도한다. • 학생들이 칠판에서 문제를 풀어 보도록 한다.	각자 문제를 풀고 풀지 못하는 학생은 손을 들어 선생님께 질문한다	학생들이 문제를 해결하는 동안 순회하며 지도한다.
정리 및 평가 (7분)	**개념 정리**(전체 학습) – 내용 정리	학생들과 함께 배운 내용을 정리한다.	선생님과 함께 학습한 내용을 정리한다.	▶ PPT 자료
	문제 해결 학습(개별 학습) – 형성 평가 문제 (기초 1문제 / 기본 1문제 / 실력 1문제)	형성 평가를 통해 학생의 수업에 대한 이해도를 파악한다.	형성 평가 문제를 각자 스스로 해결해 본다.	▶ 형성 평가지
	수준별 수업(개별 학습) – 수준별 과제 제시	수준별 과제를 부여한다.	수준별 과제를 받아간다.	• 수준별 과제는 학생들의 인성을 고려하여 과제에 가급적 수준별 표시는 삼간다. ▶ 과제물
	차시 예고 – 원의 중심에서 현까지의 거리와 현의 길이 사이에는 어떤 관계가 있을까?	다음 시간에 배울 내용을 안내한다.	다음 시간에 배울 내용을 확인한다.	

268쪽



이야기로 들려주는 원의 성질

저녁 산책 중에 생긴 일

어느 날 저녁, 다혜네 가족은 저녁 식사를 마친 후 호수 주변을 산책하기로 하였습니다.

원 모양의 큰 호수 중앙에는 분수가 있었습니다.

호숫가에 설치되어 있는 두 개의 다리를 오가며 주변의 경치를 감상하던 다혜는 갑자기 호수의 크기가 궁금해졌습니다.

'호수의 둘레를 직접 재어 볼 수도 없는데, 어떻게 하면 호수의 크기를 알 수 있을까?'

다혜는 궁금함을 못 이겨 아버지께 여쭤 보았습니다.

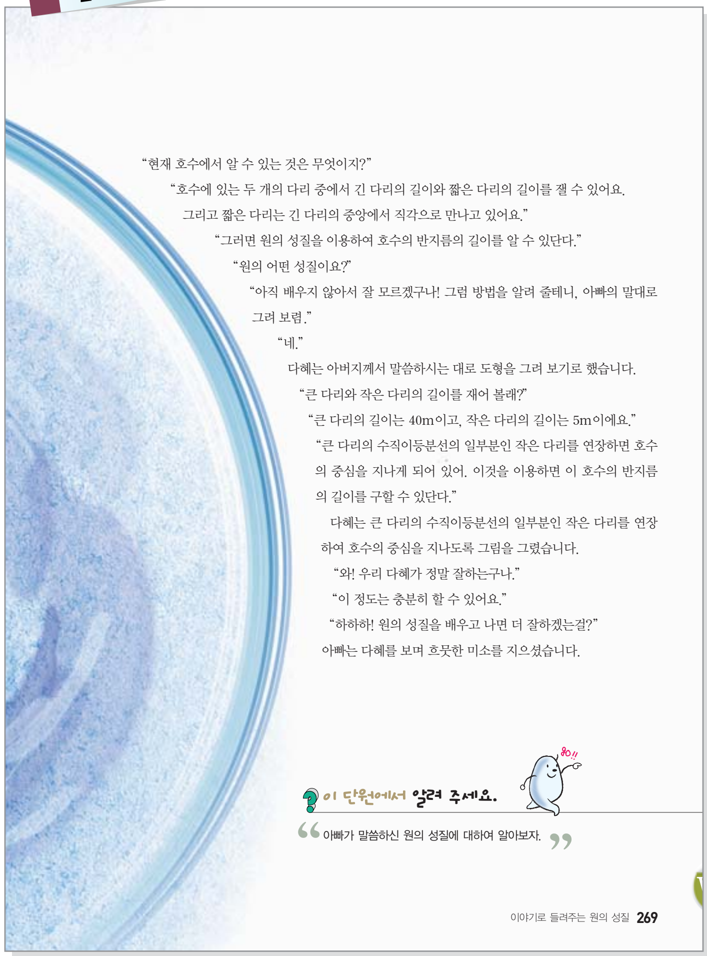
"아빠, 이 호수의 크기를 어떻게 알 수 있을까요?"

"그럼, 같이 한번 생각해 볼까? 우선 호수의 크기를 알아보기 위해 필요한 것이 무엇인지 말해 볼래?"

"원의 반지름의 길이가 필요해요."

268 Ⅶ. 원의 성질

269쪽



"현재 호수에서 알 수 있는 것은 무엇이지?"

"호수에 있는 두 개의 다리 중에서 긴 다리의 길이와 짧은 다리의 길이를 잴 수 있어요. 그리고 짧은 다리는 긴 다리의 중앙에서 직각으로 만나고 있어요."

"그러면 원의 성질을 이용하여 호수의 반지름의 길이를 알 수 있단다."

"원의 어떤 성질이요?"

"아직 배우지 않아서 잘 모르겠구나! 그럼 방법을 알려 줄테니, 아빠의 말대로 그려 보렴."

"네."

다혜는 아버지께서 말씀하시는 대로 도형을 그려 보기로 했습니다.

"큰 다리와 작은 다리의 길이를 재어 볼래?"

"큰 다리의 길이는 40m이고, 작은 다리의 길이는 5m이에요."

"큰 다리의 수직이등분선의 일부분인 작은 다리를 연장하면 호수의 중심을 지나게 되어 있어. 이것을 이용하면 이 호수의 반지름의 길이를 구할 수 있단다."

다혜는 큰 다리의 수직이등분선의 일부분인 작은 다리를 연장하여 호수의 중심을 지나도록 그림을 그렸습니다.

"와! 우리 다혜가 정말 잘하는구나."

"이 정도는 충분히 할 수 있어요."

"하하하! 원의 성질을 배우고 나면 더 잘하겠는걸?"

아빠는 다혜를 보며 흐뭇한 미소를 지으셨습니다.

이 단원에서 알려 주세요.

"아빠가 말씀하신 원의 성질에 대하여 알아보자."

이야기로 들려주는 원의 성질 269

이야기로 들려주는 원의 성질

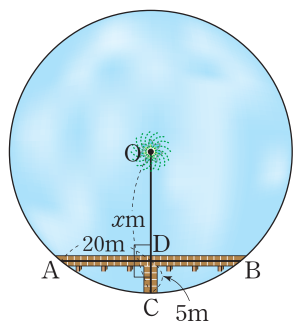
"이야기 배경"

이 이야기는 일상생활에서 원의 성질이 어떻게 활용되고 있는지를 보여 주는 예이다.

원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을 이등분하며, 현의 수직이등분선은 원의 중심을 지난다. 이러한 원의 성질을 이용하면 일부가 파손된 원 모양 물체의 나머지 부분을 복원할 수 있으며, 스프링클러에 의해 나타난 원 모양의 물 자취를 보고 감춰진 스프링클러의 위치를 찾아낼 수도 있다. 또한 작은 줄자를 이용해 줄자로 잴 수 있는 길이보다 지름의 길이가 더 긴 큰 원형 탁자의 지름의 길이도 계산해 낼 수 있다.

위에서 언급한 예 이외에도 원의 접선, 원주각에 관한 성질, 두 할선의 선분의 길이의 관계 등을 활용하여 실생활 속에서의 많은 문제를 해결할 수 있다.

이 이야기에서 두 다리의 길이를 이용하여 호수의 반지름의 길이를 구해 보면 다음과 같다.



선분 AB의 수직이등분선 CD는 원 O의 중심 O를 지나며 원 O의 반지름의 길이를 x m라 하면 직각삼각형 OAD에서

$\overline{AD}=20$m, $\overline{CD}=5$m

이때 $\overline{OA}=x$m라 하면 $\overline{OD}=(x-5)$m이므로

피타고라스 정리에 의하여

$x^2=20^2+(x-5)^2$

$x^2=20^2+x^2-10x+25$

$10x=425$

$x=42.5$

따라서 호수의 반지름의 길이는 42.5m이다.

1 원과 직선

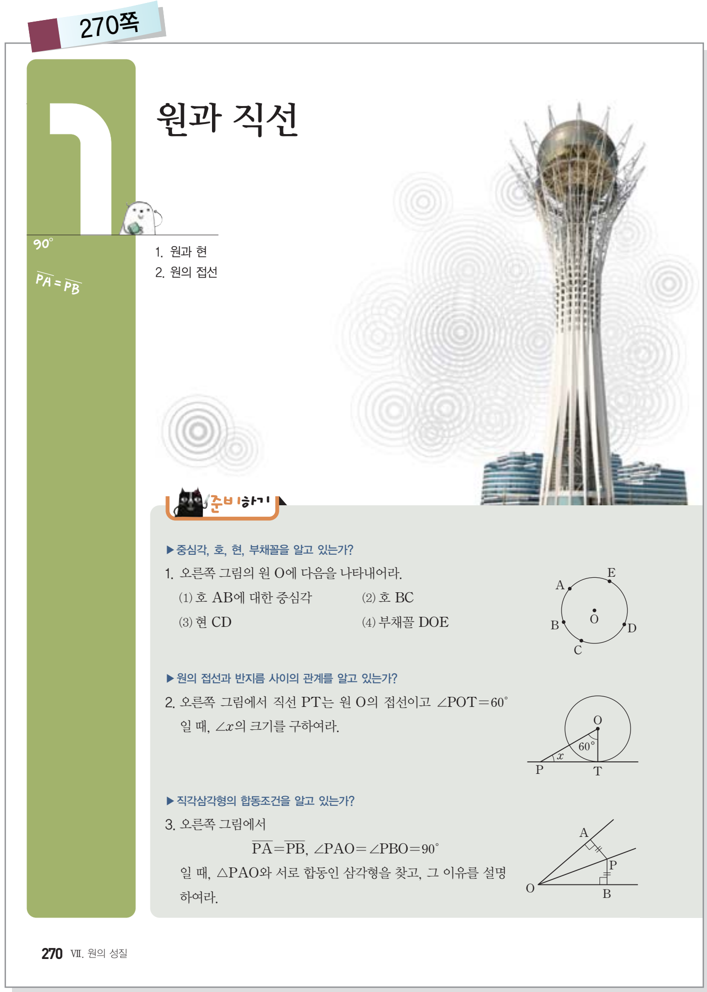
중단원 지도 목표

1. 원의 중심과 현의 수직이등분선 사이의 관계를 알 수 있게 한다.
2. 원의 중심에서 현까지의 거리와 현의 길이 사이의 관계를 알 수 있게 한다.
3. 원의 접선과 반지름에 대한 성질을 알 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원 명	지도 내용
1. 원과 현	• 원의 중심과 현의 수직이등분선 사이의 관계 • 원의 중심에서 현까지의 거리와 현의 길이 사이의 관계
2. 원의 접선	• 원의 접선의 길이
중단원 마무리하기	• 스스로 정리하기 • 기초 다지기, 기본 익히기, 실력 기르기
창의 · 인성 키우기	• 개념 바루기 • 생각 키우기

270쪽


1 원과 직선

준비하기

▶중심각, 호, 현, 부채꼴을 알고 있는가?

1. 오른쪽 그림의 원 O에 다음을 나타내어라.
   (1) 호 AB에 대한 중심각 (2) 호 BC
   (3) 현 CD (4) 부채꼴 DOE

▶원의 접선과 반지름 사이의 관계를 알고 있는가?

2. 오른쪽 그림에서 직선 PT는 원 O의 접선이고 $\angle POT=60^\circ$ 일 때, $\angle x$의 크기를 구하여라.

▶직각삼각형의 합동조건을 알고 있는가?

3. 오른쪽 그림에서
$\overline{PA}=\overline{PB}$, $\angle PAO=\angle PBO=90^\circ$
일 때, $\triangle PAO$와 서로 합동인 삼각형을 찾고, 그 이유를 설명하여라.

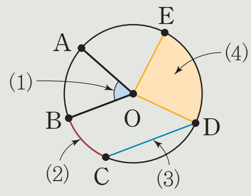
270 Ⅶ. 원의 성질

준비하기

▶중심각, 호, 현, 부채꼴을 알고 있는가?

1. 이 단원에서는 원의 기본적인 성질을 이용하여 원의 중심과 현의 수직이등분선, 현의 길이 사이의 관계를 학습한다. 따라서 원의 기본적인 용어를 알고 있어야 한다.

답



▶원의 접선과 반지름 사이의 관계를 알고 있는가?

2. 이 단원에서는 원의 접선과 반지름 사이의 관계를 이용하여 접선의 길이를 구하게 된다. 따라서 원의 접선과 그 접점을 지나는 반지름과의 관계를 알고 있어야 한다.

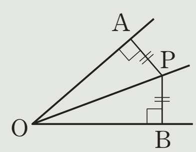
풀이 $\angle PTO=90^\circ$이므로 $\angle x=30^\circ$이다.

답 30°

▶직각삼각형의 합동조건을 알고 있는가?

3. 이 단원에서는 직각삼각형의 합동조건을 이용하여 설명하는 원의 중심과 현 사이의 성질을 학습하게 된다. 따라서 직각삼각형의 합동조건을 알고 있어야 한다.

풀이 $\triangle PAO$와 $\triangle PBO$에서
$\overline{PA}=\overline{PB}$, $\angle PAO=\angle PBO=90^\circ$,
$\overline{OP}$는 공통인 변
두 직각삼각형에서 빗변의 길이와 다른 한 변의 길이가 서로 같으므로 $\triangle PAO\equiv\triangle PBO$이다.



답 풀이 참조

01 원과 현

지도 목표

1. 원의 중심과 현의 수직이등분선 사이의 관계를 이해할 수 있게 한다.
2. 원의 중심에서 현까지의 거리와 현의 길이 사이의 관계를 이해할 수 있게 한다.

지도상의 유의점

1. 원의 중심과 현 사이의 관계는 관찰이나 조작을 통하여 알게 하고, 그 설명은 이해하는 정도로만 다룬다.
2. 원의 중심과 현 사이의 관계에 대한 설명에서는 직각삼각형의 합동조건을 이용하고, 그 활용에서는 피타고라스 정리를 이용함을 알게 한다.

1/2차시 차시별 학습 지도 방법 [교과 교실]

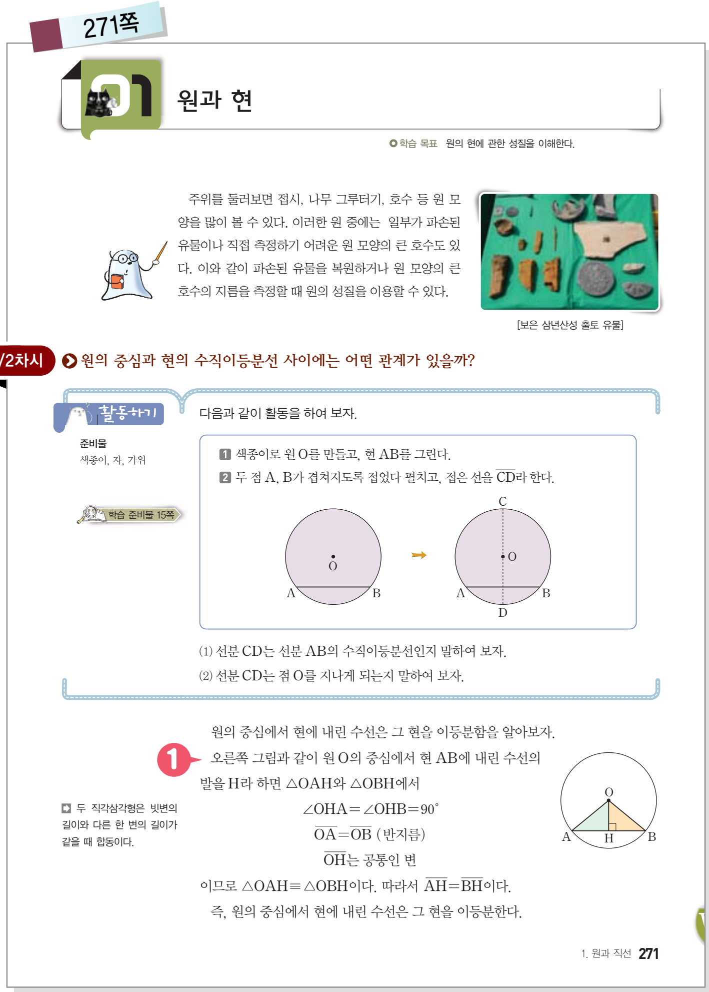
활동하기	원 모양의 색종이를 접는 조작 활동을 통하여 원의 중심과 현 사이의 관계에 대하여 흥미를 유발할 수 있도록 유도한다.
본문	전체 학습(설명식 수업)으로 현의 수직이등분선에 대한 성질을 이해할 수 있도록 내용을 설명한다.
문제 1	스스로 문제를 풀 수 있도록 하며, 친구들과 결과를 비교해 볼 수 있도록 한다.
문제 2	주변에서 볼 수 있는 스프링클러에서 나온 물 자국을 보고 원의 중심을 찾는 방법을 학생들이 설명할 수 있도록 한다.

원의 중심과 현의 수직이등분선 사이에는 어떤 관계가 있을까?

활동하기 원 모양의 색종이에서 현의 수직이등분선을 접는 활동을 통하여 현의 수직이등분선의 성질을 알게 하려는 활동하기이다.

(1) 선분 AB를 반으로 접었으므로 선분 CD는 선분 AB의 수직이등분선이다.

(2) 선분 CD는 원의 중심 O를 지난다.


271쪽

01 원과 현

학습 목표 원의 현에 관한 성질을 이해한다.

주위를 둘러보면 접시, 나무 그루터기, 호수 등 원 모양을 많이 볼 수 있다. 이러한 원 중에는 일부가 파손된 유물이나 직접 측정하기 어려운 원 모양의 큰 호수도 있다. 이와 같이 파손된 유물을 복원하거나 원 모양의 큰 호수의 지름을 측정할 때 원의 성질을 이용할 수 있다.

[보은 삼년산성 출토 유물]

1/2차시 원의 중심과 현의 수직이등분선 사이에는 어떤 관계가 있을까?

활동하기 다음과 같이 활동을 하여 보자.

준비물
색종이, 자, 가위

학습 준비물 15쪽

1 색종이로 원 O를 만들고, 현 AB를 그린다.
2 두 점 A, B가 겹쳐지도록 접었다 펼치고, 접은 선을 $\overline{CD}$라 한다.

(1) 선분 CD는 선분 AB의 수직이등분선인지 말하여 보자.
(2) 선분 CD는 점 O를 지나게 되는지 말하여 보자.

원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분함을 알아보자.

1 오른쪽 그림과 같이 원 O의 중심에서 현 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 △OAH와 △OBH에서

$\angle OHA = \angle OHB = 90^\circ$

$\overline{OA} = \overline{OB}$ (반지름)

$\overline{OH}$는 공통인 변

이므로 △OAH≡△OBH이다. 따라서 $\overline{AH} = \overline{BH}$이다.

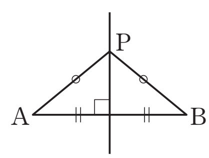
즉, 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분한다.

두 직각삼각형은 빗변의 길이와 다른 한 변의 길이가 같을 때 합동이다.

1. 원과 직선 271

1 원의 중심 O에서 현 AB에 내린 수선 OH는 현 AB를 이등분함을 △OAH와 △OBH가 합동임을 이용하여 설명한다.

2 선분 AB의 수직이등분선 위의 점 P에서 선분 AB의 양 끝점에 이르는 거리가 같음을 이용하여 현의 수직이등분선은 원의 중심을 지나는 것을 설명한다.



문제 1 현의 수직등분선의 성질을 이용하여 현의 길이 구하기

풀이 (1) $\overline{AH} = \overline{BH}$이므로 $x=5$

(2) △OBH에서 $\overline{BH} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$(cm)이므로

$\overline{AB} = 2\overline{BH} = 2 \times 8 = 16$(cm)

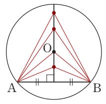
따라서 $x=16$이다.

272쪽

❷ 한편 선분 AB의 양 끝점으로부터 같은 거리에 있는 점은 그 선분의 수직이등분선 위에 있다.

그런데 원 O에서 현 AB의 양 끝점으로부터 원의 중심 O까지의 거리가 같으므로 중심 O는 현 AB의 수직이등분선 위에 있다.

즉, 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지난다.



선분 AB의 중점을 지나고 선분 AB에 수직인 직선을 선분 AB의 수직이등분선이라고 한다.

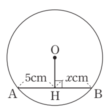
이상을 정리하면 다음과 같다.

원의 중심과 현의 수직이등분선

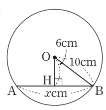
① 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분한다.
② 원에서 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지난다.

문제 1 다음 그림의 원 O에서 x의 값을 구하여라.

(1)



(2)



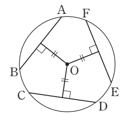
의사소통

문제 2 잔디밭에 설치되어 있는 스프링클러는 평소에 지면 아래 감추어져 있다가 필요한 경우 다음 그림과 같이 위로 올라와 회전하면서 마른 잔디밭에 물을 뿌려 준다. 스프링클러가 내려간 후 잔디밭에 뿌려진 원 모양의 물 자국만을 보고 스프링클러가 있는 위치를 찾는 방법을 말하여 보자.

273쪽

2/2차시 **원의 중심에서 현까지의 거리와 현의 길이 사이에는 어떤 관계가 있을까?**

생각 열기 오른쪽 그림은 원 O의 중심에서 같은 거리에 있는 세 현 AB, CD, EF를 그린 것이다. 세 현 AB, CD, EF의 길이를 재어 보자.



한 원에서 원의 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 서로 같은지 알아보자.

❸ 원의 중심 O에서 두 현 AB, CD에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 할 때, $\overline{OM}=\overline{ON}$이면

△OAM과 △ODN에서

$$\angle OMA=\angle OND=90^\circ$$
$$\overline{OA}=\overline{OD}\ (\text{반지름})$$
$$\overline{OM}=\overline{ON}$$

이므로 △OAM≡△ODN이다.

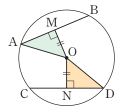
따라서 $\overline{AM}=\overline{DN}$이다.

그런데 $\overline{AB}=2\overline{AM}$, $\overline{CD}=2\overline{DN}$이므로

$$\overline{AB}=\overline{CD}$$

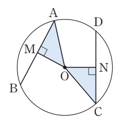
이다.

따라서 원의 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현 AB와 CD의 길이는 서로 같다.



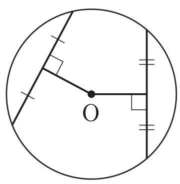
문제 3 다음은 원의 중심 O에서 두 현 AB, CD에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 할 때, $\overline{AB}=\overline{CD}$이면 $\overline{OM}=\overline{ON}$임을 설명하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

> △OAM과 △OCN에서
> $\angle OMA=\angle ONC=90^\circ$, $\overline{OA}=$ □ (반지름)
> 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분하므로
> $\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AB}$, $\overline{CN}=\frac{1}{2}$ □
> 이때 $\overline{AB}=\overline{CD}$이므로 $\overline{AM}=$ □
> 따라서 △OAM≡ □ 이므로 $\overline{OM}=\overline{ON}$



문제 2 **현의 수직이등분선의 성질을 이용하여 원의 중심 찾기**

풀이 현의 수직이등분선은 원의 중심을 지나므로 오른쪽 그림과 같이 원 모양의 물 자국을 원으로 생각하고 두 현을 그어 본다. 이때 이 두 현의 수직이등분선의 교점이 원의 중심 O이므로 스프링클러가 있는 위치이다.



수준별 교수·학습 방법

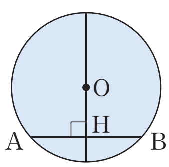
원의 중심과 현의 수직이등분선 사이의 관계를 이해할 수 있다.

하 다음 문항을 이용하여 원의 중심과 현의 수직이등분선 사이의 관계를 직관적으로 이해하게 한다.

[문제] 오른쪽 그림과 같이 원 모양으로 색종이를 잘라서 접은 후, 물음에 답하여라.

(1) $\overline{AH}$와 $\overline{BH}$의 길이를 비교하여라.

(2) (1)에서 구한 결과가 친구들과 일치하는지 확인하여라.



답 생략

2/2차시 **차시별 학습 지도 방법** [교과 교실]

생각 열기	자로 실제 길이를 재어 보는 활동을 통하여 자연스럽게 원의 중심에서 현까지의 거리와 현의 길이 사이의 관계를 비교할 수 있도록 유도한다.
본문	현의 수직이등분선에 관한 성질을 이해할 수 있도록 삼각형의 합동을 이용하여 설명한다.
문제 3	학생들과 함께 풀면서 길이가 같은 두 현이 원의 중심에서 같은 거리에 있음을 자연스럽게 이해할 수 있도록 설명한다.
즐거운 활동하기	일정한 규칙에 따라 두 점을 자로 연결하는 활동을 통하여 원과 직선에 대하여 흥미를 갖도록 지도하며 수학의 심미성을 느낄 수 있도록 한다. 또한 활동 결과에 대하여 학생들이 자신의 생각이나 느낌을 발표할 수 있도록 한다.

➊ 원의 중심에서 현까지의 거리와 현의 길이 사이에는 어떤 관계가 있을까?

생각 열기 원의 중심에서 현까지의 거리와 현의 길이를 자로 직접 재어 보는 활동을 통하여 원의 중심에서 같은 거리에 있는 현의 길이가 같음을 직관적으로 확인하게 하는 생각 열기이다.

원의 중심 O에서 세 현까지의 거리는 모두 1cm이며, $\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{EF}=1.9$cm이다.

3 원의 중심 O에서 같은 거리에 있는 두 현 AB, CD의 길이가 같음을 원의 중심에서 현에 내린 수선이 현을 이등분하는 것과 △OAM과 △ODN이 합동임을 이용하여 설명한다.

문제 3 **한 원에서 길이가 같은 두 현은 원의 중심에서 같은 거리에 있음을 설명하기**

풀이 △OAM과 △OCN에서

$\angle OMA=\angle ONC=90^\circ$, $\overline{OA}=\boxed{\overline{OC}}$ (반지름)

원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분하므로

$\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AB}$, $\overline{CN}=\frac{1}{2}\boxed{\overline{CD}}$

이때 $\overline{AB}=\overline{CD}$이므로 $\overline{AM}=\boxed{\overline{CN}}$

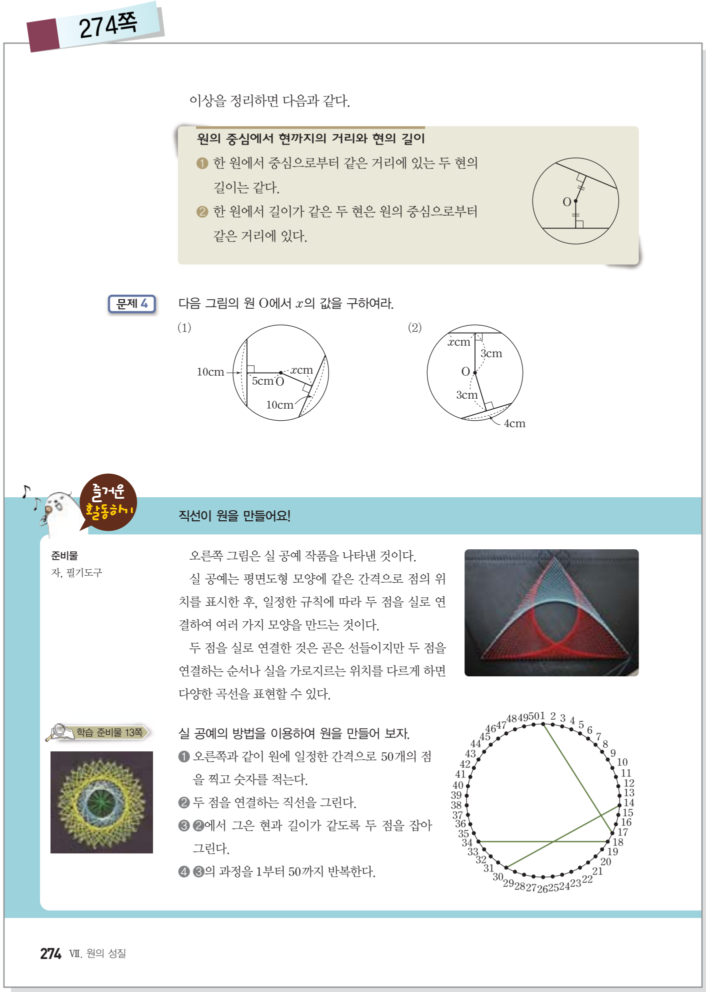
따라서 $\triangle OAM\equiv\boxed{\triangle OCN}$이므로 $\overline{OM}=\overline{ON}$이다.

문제 4 **원의 중심에서 현까지의 거리와 현의 길이 구하기**

풀이 (1) 두 현의 길이가 같으므로 $x=5$

(2) 원의 중심에서 현까지의 거리가 같고, 원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을 이등분하므로

$x=\frac{1}{2}\times4=2$이다.


274쪽

이상을 정리하면 다음과 같다.

원의 중심에서 현까지의 거리와 현의 길이
❶ 한 원에서 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같다.
❷ 한 원에서 길이가 같은 두 현은 원의 중심으로부터 같은 거리에 있다.

문제 4 다음 그림의 원 O에서 x의 값을 구하여라.

(1) (2)

즐거운 활동하기 직선이 원을 만들어요!

준비물 자, 필기도구

오른쪽 그림은 실 공예 작품을 나타낸 것이다.
실 공예는 평면도형 모양에 같은 간격으로 점의 위치를 표시한 후, 일정한 규칙에 따라 두 점을 실로 연결하여 여러 가지 모양을 만드는 것이다.
두 점을 실로 연결한 것은 곧은 선들이지만 두 점을 연결하는 순서나 실을 가로지르는 위치를 다르게 하면 다양한 곡선을 표현할 수 있다.

학습 준비물 13쪽

실 공예의 방법을 이용하여 원을 만들어 보자.
❶ 오른쪽과 같이 원에 일정한 간격으로 50개의 점을 찍고 숫자를 적는다.
❷ 두 점을 연결하는 직선을 그린다.
❸ ❷에서 그은 현과 길이가 같도록 두 점을 잡아 그린다.
❹ ❸의 과정을 1부터 50까지 반복한다.

274 Ⅶ. 원의 성질

(1), (2), (3)의 경우 나타나는 원의 반지름의 길이는 두 점 사이의 간격이 가장 넓은 (3)이 가장 짧다.

창의 · 인성 원에서 배운 수학적 지식을 활용하여 학생 스스로 새로운 사실을 깨닫고, 수학적 사고를 향상시킬 수 있도록 한다.

즐거운 활동하기

직선이 원을 만들어요!

지도상의 유의점 학습 준비물을 이용하여 선분을 이어 보게 하거나 하드보드지를 이용하여 실 공예를 완성시켜 활동 결과를 발표하게 한다. 이때 원 모양이 나타난다는 것은 반지름의 길이가 현까지의 거리가 됨을 이해하게 한다.

준비물 자, 필기도구, 학습 준비물

다음과 같은 번호를 나타내는 두 점을 연결하는 선분을 그으면

(1) 1−17, 2−18, 3−19, 4−20, ……, 49−15, 50−16

(2) 1−7, 2−8, 3−9, 4−10, ……, 49−5, 50−6

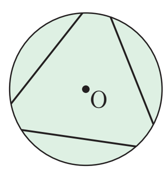
(3) 1−20, 2−21, 3−22, 4−23, ……, 49−18, 50−19

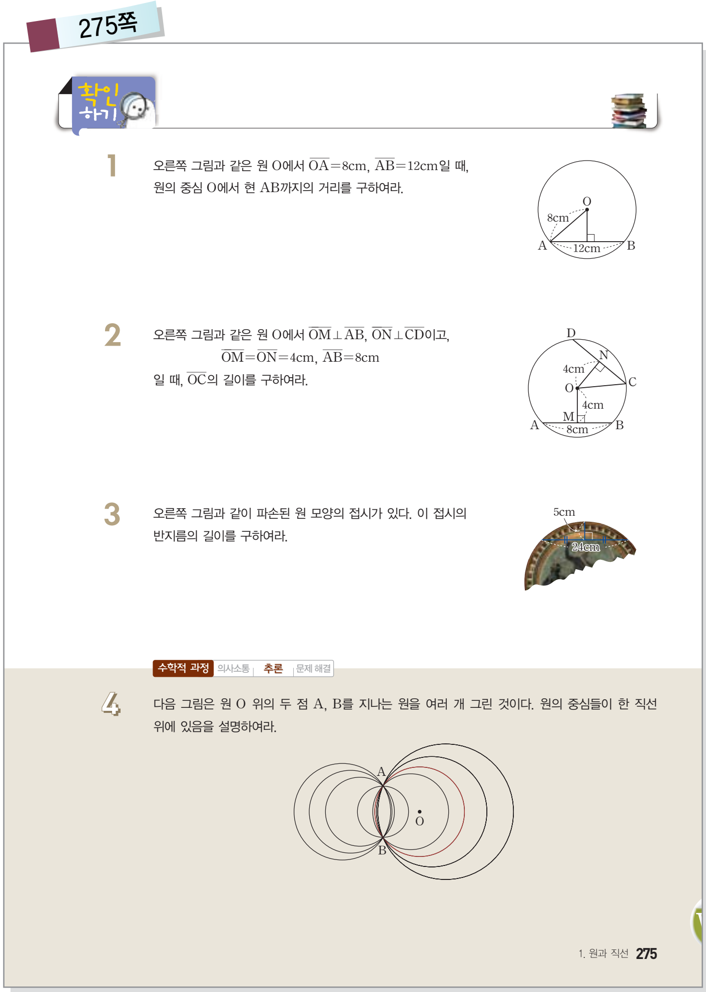
수준별 교수 · 학습 방법

원의 중심에서 현까지의 거리와 현의 길이 사이의 관계를 이해할 수 있다.

하 직관적인 방법을 통해 이해할 수 있도록 다음과 같이 직접 활동을 해 보게 한다.

오른쪽 그림과 같이 색종이를 원 모양으로 잘라서 길이가 같은 세 현을 그리게 한다. 원의 중심에서 세 현에 수선을 그리고 원의 중심에서 현까지의 거리를 재어 보게 하여 그 길이가 같음을 알게 한다.




275쪽

확인하기

1 오른쪽 그림과 같은 원 O에서 $\overline{OA}=8cm$, $\overline{AB}=12cm$일 때, 원의 중심 O에서 현 AB까지의 거리를 구하여라.

2 오른쪽 그림과 같은 원 O에서 $\overline{OM}\perp\overline{AB}$, $\overline{ON}\perp\overline{CD}$이고, $\overline{OM}=\overline{ON}=4cm$, $\overline{AB}=8cm$ 일 때, $\overline{OC}$의 길이를 구하여라.

3 오른쪽 그림과 같이 파손된 원 모양의 접시가 있다. 이 접시의 반지름의 길이를 구하여라.

수학적 과정 의사소통 추론 문제 해결

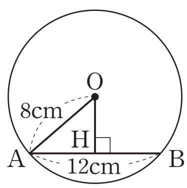
4 다음 그림은 원 O 위의 두 점 A, B를 지나는 원을 여러 개 그린 것이다. 원의 중심들이 한 직선 위에 있음을 설명하여라.

1. 원과 직선 275

확인하기

1 평가의 주안점 원의 중심에서 현까지의 거리를 구할 수 있다.

풀이 다음 그림에서 $\overline{OH}\perp\overline{AB}$이므로



$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times12=6(cm)$

직각삼각형 OAH에서

$\overline{OH}=\sqrt{8^2-6^2}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}(cm)$

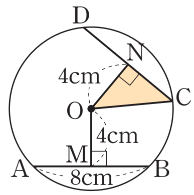
이다.

지도상의 유의점 $\overline{OA}=8cm$, $\overline{AH}=6cm$이므로 $\overline{OH}$의 길이를 $\sqrt{8^2+6^2}=10(cm)$와 같이 계산하지 않도록 주의하게 한다.

2 평가의 주안점 원의 중심에서 같은 거리에 있는 두 현의 길이가 같음을 이용하여 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.

풀이 $\overline{AB}\perp\overline{OM}$, $\overline{CD}\perp\overline{ON}$, $\overline{OM}=\overline{ON}=4cm$이므로

$\overline{CD}=\overline{AB}=8cm$



$\overline{CN}=\frac{1}{2}\overline{CD}$

$=\frac{1}{2}\times8=4(cm)$

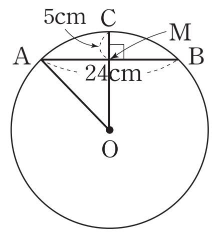
$\triangle OCN$에서

$\overline{OC}=\sqrt{4^2+4^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}(cm)$

이다.

3 평가의 주안점 현의 수직이등분선은 원의 중심을 지남을 이용하여 접시의 반지름의 길이를 구할 수 있다.

풀이 오른쪽 그림에서



$\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AB}$

$=\frac{1}{2}\times24=12(cm)$

원 모양의 접시의 중심을 O, 접시의 반지름의 길이를 $x$cm라 하면

$\overline{OA}=x$cm

$\overline{OM}=\overline{OC}-\overline{CM}=(x-5)$cm

$\triangle OAM$은 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$x^2=12^2+(x-5)^2$

$x^2=144+x^2-10x+25$

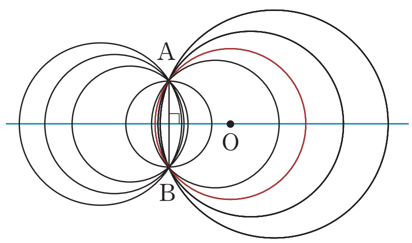
$10x=169$

$x=16.9$

따라서 접시의 반지름의 길이는 16.9cm이다.

4 평가의 주안점 현의 수직이등분선은 원의 중심을 지나는 성질을 이용하여 두 점을 지나는 원의 공통된 성질을 추론할 수 있다.

풀이 주어진 모든 원은 두 점 A, B를 지나므로 $\overline{AB}$는 모든 원의 현이며, 현 AB의 수직이등분선은 원의 중심을 지난다. 따라서 원의 중심들은 한 직선 위에 있다.



02 원의 접선

지도 목표

1. 원의 접선에 관한 성질을 이해할 수 있게 한다.
2. 사각형에 내접하는 원의 선분의 길이를 구할 수 있게 한다.

지도상의 유의점

1. 원의 접선은 그 접점을 지나는 반지름과 서로 수직인 것을 직관적으로 이해하도록 지도한다.
2. 원 밖의 한 점에서 그을 수 있는 접선은 두 개임을 직관적으로 이해하도록 지도한다.

1/1차시 차시별 학습 지도 방법

생각 열기	지게 위에 놓여 있는 원통의 사진을 보면서 원과 접선을 생각하게 하고, 점 P에서 접점까지의 길이를 재어 보는 활동을 통하여 직관적으로 이해하게 하도록 한다.
본문	전체 학습(설명식 수업)으로 직각삼각형의 합동조건을 이용하여 점 P에서 접점까지의 길이가 같음을 이해할 수 있도록 설명한다.
문제 1	스스로 문제를 풀 수 있도록 하며, 친구들과 결과를 비교해 볼 수 있도록 한다.
문제 2	난이도가 높은 문항이므로 단계별 힌트를 제공하고, 실생활과 관련된 문제를 통하여 수학의 가치를 알 수 있게 한다.
함께 풀기 1, 문제 3, 4	삼각형에 내접하는 원 O에서 삼각형의 꼭짓점에서 접점까지의 거리가 같음을 이용하도록 지도하고, 문제를 스스로 푼 후 풀이 방법을 설명하도록 한다.
함께 풀기 2, 문제 5	사각형에 내접하는 원 O에서 네 꼭짓점 A, B, C, D에서 원 O에 그은 접점까지의 길이가 같은 것을 기호를 사용해 직접 표시해 보도록 지도한다.

원의 접선은 어떤 성질을 가지고 있을까?

생각 열기 우리 민족이 발명한 운반 기구 중 하나인 지게에 원통을 올려 놓은 모습에서 원의 접선에 관한 성질을 알게 하려는 생각 열기이다.

(1) 두 직선 PA, PB는 원 O와 한 점에서 만나므로 원 O의 접선이다.

(2) 두 선분 PA, PB의 길이는 9mm로 그 길이는 서로 같다.

276쪽

02 원의 접선

학습 목표 원의 접선에 관한 성질을 이해한다.

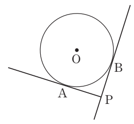
세계 자연 유산으로 지정된 제주도에는 해발 1950m인 한라산이 있다. 날씨가 맑은 날 한라산에서 볼 수 있는 수평선까지의 거리는 얼마나 될까?

원과 접선의 관계를 이용하면 그 거리를 계산할 수 있다.

1/1차시 원의 접선은 어떤 성질을 가지고 있을까?

생각 열기

지게는 우리 민족이 발명한 대표적인 운반 기구 중의 하나이다. 오른쪽 그림은 원통이 실려 있는 지게를 옆에서 본 단면이고, 두 점 A, B는 원 O 밖의 한 점 P에서 원 O에 그은 두 접선의 접점이다.



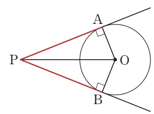
(1) 두 직선 PA, PB가 원 O의 접선인지 말하여 보자.

(2) 두 선분 PA, PB의 길이를 비교하여 보자.

생각 열기에서 두 직선 PA, PB는 원 O의 접선이며, $\overline{PA}$와 $\overline{PB}$의 길이가 같음을 알 수 있다.

원 O 밖의 한 점 P에서 이 원에 그을 수 있는 접선은 두 개이다.

오른쪽 그림과 같이 두 접점을 각각 A, B라 할 때, $\overline{PA}$와 $\overline{PB}$의 길이가 같은지 알아보자.



원의 접선은 그 접점을 지나는 반지름에 수직이다.

$\triangle PAO$와 $\triangle PBO$에서

$$\angle PAO = \angle PBO = 90^\circ$$
$$\overline{OA} = \overline{OB}\text{(반지름)}$$
$$\overline{OP}\text{는 공통인 변}$$

이므로 $\triangle PAO \equiv \triangle PBO$이다. 따라서 $\overline{PA} = \overline{PB}$이다.

276 VII. 원의 성질

문제 1 원의 접선의 성질을 이용하여 선분의 길이 구하기

풀이 (1) $\overline{PB} = \overline{PA} = 6\text{cm}$

따라서 $x = 6$이다.

(2) $\overline{PA} = \overline{PB} = 12\text{cm}$, $\angle PAO = 90^\circ$인 직각삼각형 PAO에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{OP} = \sqrt{6^2 + 12^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}\,(\text{cm})$

따라서 $x = 6\sqrt{5}$이다.

문제 2 원의 성질을 이용하여 선분의 길이 구하기

풀이 애드벌룬의 단면의 중심을 O라 하면 $\triangle OAP$에서

$\angle OAP = 90^\circ$, $\overline{OA} = 6\text{m}$

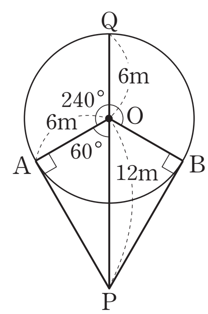
$\overline{PO} = \overline{PQ} - \overline{OQ}$

$= 18 - 6 = 12\,(\text{m})$이므로

$\overline{PA} = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}\,(\text{m})$

$\overline{AO} : \overline{PO} : \overline{AP} = 1 : 2 : \sqrt{3}$이므로

$\angle AOP = 60^\circ$



277쪽

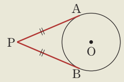
이상을 정리하면 다음과 같다.

원의 접선에 대한 성질

두 점 A, B가 원 O 밖의 한 점 P에서 원 O에 그은 두 접선의 접점일 때,

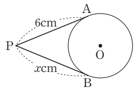
$\overline{PA}=\overline{PB}$

이다.

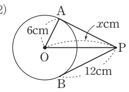


문제 1 다음 그림에서 두 점 A, B는 원 O 밖의 한 점 P에서 원 O에 그은 두 접선의 접점이다. x의 값을 구하여라.

(1)

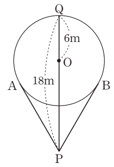


(2)



문제 해결

문제 2 오른쪽 그림은 반지름의 길이가 6m인 원 모양의 애드벌룬의 단면을 그린 것이다. 두 점 A, B는 원 O 밖의 한 점 P에서 원 O에 그은 두 접선의 접점이며, $\overline{PO}$의 연장선이 원 O와 만나는 점을 Q라 할 때, $\overline{PQ}=18$m이다. $\overline{PA}+\widehat{AQB}+\overline{BP}$의 값을 구하여라.

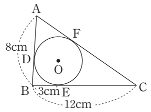


함께 풀기 1

오른쪽 그림에서 원 O는 △ABC의 내접원이고, 세 점 D, E, F는 각각 내접원과 세 변의 접점이다.

$\overline{AB}=8\text{cm}$, $\overline{BC}=12\text{cm}$, $\overline{BE}=3\text{cm}$

일 때, $\overline{AC}$의 길이를 구하여라.



풀이» 점 D, E, F가 접점이므로

$\overline{BD}=\overline{BE}=3\text{cm}$

$\overline{AF}=\overline{AD}=8-3=5(\text{cm})$

$\overline{CF}=\overline{CE}=12-3=9(\text{cm})$

$\overline{AC}=\overline{AF}+\overline{CF}=5+9=14(\text{cm})$

따라서 $\overline{AC}=14\text{cm}$이다.

답» 14cm

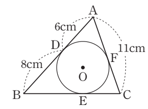
1. 원과 직선 277

278쪽

문제 3 오른쪽 그림에서 원 O는 △ABC의 내접원이고, 세 점 D, E, F는 각각 내접원과 세 변의 접점이다.

$\overline{AD}=6\text{cm}$, $\overline{BD}=8\text{cm}$, $\overline{AC}=11\text{cm}$

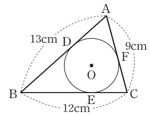
일 때, $\overline{BC}$의 길이를 구하여라.



문제 4 오른쪽 그림에서 원 O는 △ABC의 내접원이고, 세 점 D, E, F는 각각 내접원과 세 변의 접점이다.

$\overline{AB}=13\text{cm}$, $\overline{BC}=12\text{cm}$, $\overline{CA}=9\text{cm}$

일 때, $\overline{AD}$의 길이를 구하여라.

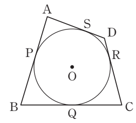


함께 풀기 2

오른쪽 그림과 같이 원 O가 □ABCD의 각 변과 네 점 P, Q, R, S에서 접할 때,

$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$

임을 설명하여라.



풀이» 원 O 밖의 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 접점까지의 거리가 같으므로

$\overline{AP}=\overline{AS}$, $\overline{BP}=\overline{BQ}$, $\overline{CQ}=\overline{CR}$, $\overline{DR}=\overline{DS}$

이다. 이때

$\overline{AB}+\overline{CD}=(\overline{AP}+\overline{BP})+(\overline{CR}+\overline{DR})$

$=(\overline{AS}+\overline{BQ})+(\overline{CQ}+\overline{DS})$

$=(\overline{AS}+\overline{DS})+(\overline{BQ}+\overline{CQ})$

$=\overline{AD}+\overline{BC}$

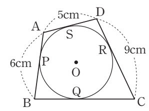
이므로 $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$이다.

답» 풀이 참조

문제 5 오른쪽 그림과 같이 원 O가 □ABCD의 각 변과 네 점 P, Q, R, S에서 접하고,

$\overline{AB}=6\text{cm}$, $\overline{AD}=5\text{cm}$, $\overline{DC}=9\text{cm}$

일 때, $\overline{BC}$의 길이를 구하여라.



278 Ⅶ. 원의 성질

이때 $\widehat{AQB}$에 대한 중심각의 크기는 240°이므로 호의 길이는

$2\times6\pi\times\dfrac{240}{360}=8\pi(\text{m})$

$\overline{PA}+\widehat{AQB}+\overline{PB}=6\sqrt{3}+8\pi+6\sqrt{3}=(12\sqrt{3}+8\pi)\text{m}$

문제 3 삼각형에 내접하는 원에서 선분의 길이 구하기

풀이 $\overline{BE}=\overline{BD}=8\text{cm}$, $\overline{AF}=\overline{AD}=6\text{cm}$

$\overline{CE}=\overline{CF}=\overline{AC}-\overline{AF}=11-6=5(\text{cm})$

따라서 $\overline{BC}=\overline{BE}+\overline{CE}=8+5=13(\text{cm})$이다.

문제 4 삼각형에 내접하는 원에서 선분의 길이 구하기

풀이 $\overline{AD}=\overline{AF}=x\text{cm}$라 하면

$\overline{BE}=\overline{BD}=(13-x)\text{cm}$

$\overline{CE}=\overline{CF}=(9-x)\text{cm}$

$\overline{BC}=\overline{BE}+\overline{CE}=(13-x)+(9-x)=12$

$2x=10$, $x=5$

따라서 $\overline{AD}=5\text{cm}$이다.

문제 5 사각형에 내접하는 원에서 선분의 길이 구하기

풀이 원 O가 □ABCD에 내접하므로

$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$이다.

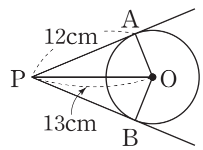
따라서 $6+9=5+\overline{BC}$이므로 $\overline{BC}=10\text{cm}$이다.

수준별 교수·학습 방법

원의 접선에 관한 성질을 이해할 수 있다.

하 학생들의 이해 정도에 따라 다음과 같이 단계를 나누어 지도한다.

[문제] 오른쪽 그림에서 두 점 A, B는 원 O 밖의 한 점 P에서 원 O에 그은 접선의 접점이고, $\overline{PA}=12\text{cm}$, $\overline{PO}=13\text{cm}$일 때, 물음에 답하여라.



(1) $\overline{PB}$의 길이를 구하여라.

(2) 원 O의 반지름의 길이를 구하여라.

(3) △POA의 넓이를 구하여라.

답 (1) 12cm (2) 5cm (3) 30cm²

Ⅶ

확인하기

1 **평가의 주안점** 원 밖의 점 P에서 접점까지의 거리를 구할 수 있다.

풀이 $\triangle$POA는 $\angle$PAO$=90^\circ$인 직각삼각형이므로
$\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{8^2-4^2}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$(cm)이다.

2 **평가의 주안점** 원의 접선에 대한 성질을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있다.

풀이 $\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AE}}=2\mathrm{cm}$
$\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{CF}}=\overline{\mathrm{CA}}-\overline{\mathrm{AF}}=5-2=3(\mathrm{cm})$
$\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{BC}}-\overline{\mathrm{CD}}=10-3=7(\mathrm{cm})$

3 **평가의 주안점** 원의 접선에 대한 성질을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있다.

풀이 $\overline{\mathrm{CE}}=\overline{\mathrm{CA}}=3\mathrm{cm}$
$\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{CD}}-\overline{\mathrm{CE}}=8-3=5(\mathrm{cm})$

4 **평가의 주안점** 원의 접선에 대한 성질을 이용하여 문제를 해결하는 과정을 설명할 수 있다.

풀이 원의 접선에 대한 성질에 의하여 원 O에서 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PC}}$이고, 원 O′에서 $\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PD}}$이다.
이때 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{PB}}-\overline{\mathrm{PA}}$, $\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{PD}}-\overline{\mathrm{PC}}$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}$이다.

중단원 마무리하기

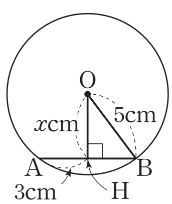
스스로 정리하기

1. (1) 이등분 (2) 중심 (3) 현
   (4) 같다 (5) $\overline{\mathrm{PB}}$

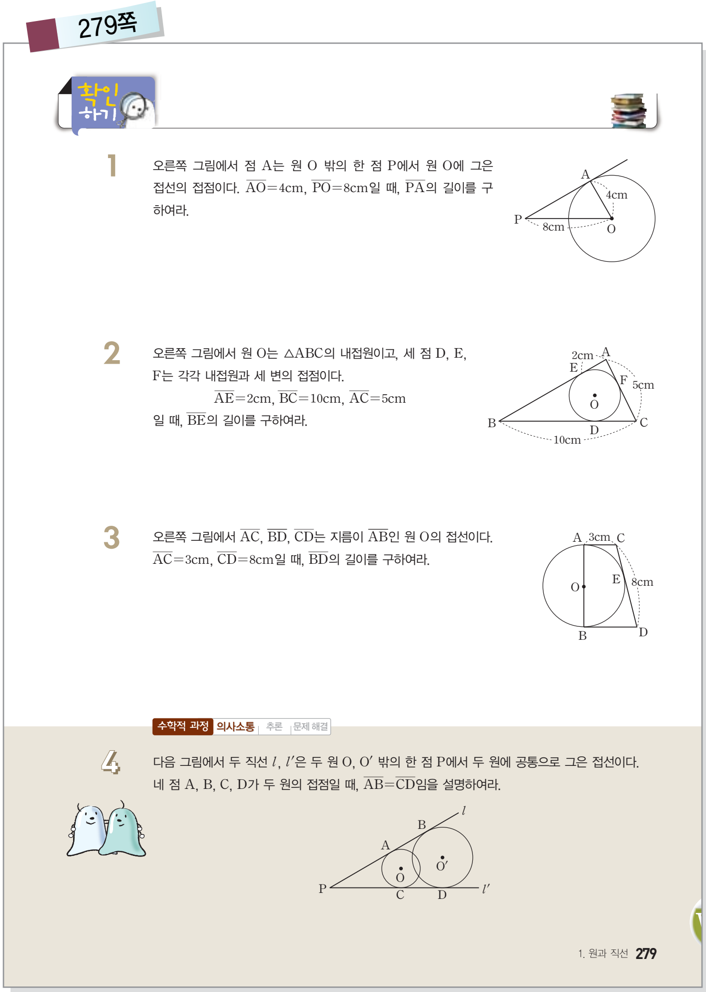
기초 다지기

1 **평가의 주안점** 현의 길이와 원의 중심에서 현에 내린 수선의 길이를 구할 수 있다.

풀이 원의 중심 O에서 현 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면



(1) $\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{AH}}=3\mathrm{cm}$이므로
$\triangle$OHB에서
$x=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4$이다.


279쪽

확인하기

1 오른쪽 그림에서 점 A는 원 O 밖의 한 점 P에서 원 O에 그은 접선의 접점이다. $\overline{\mathrm{AO}}=4\mathrm{cm}$, $\overline{\mathrm{PO}}=8\mathrm{cm}$일 때, $\overline{\mathrm{PA}}$의 길이를 구하여라.

2 오른쪽 그림에서 원 O는 $\triangle$ABC의 내접원이고, 세 점 D, E, F는 각각 내접원과 세 변의 접점이다.
$\overline{\mathrm{AE}}=2\mathrm{cm}$, $\overline{\mathrm{BC}}=10\mathrm{cm}$, $\overline{\mathrm{AC}}=5\mathrm{cm}$
일 때, $\overline{\mathrm{BE}}$의 길이를 구하여라.

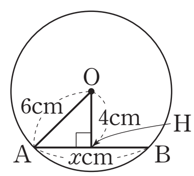
3 오른쪽 그림에서 $\overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{BD}}$, $\overline{\mathrm{CD}}$는 지름이 $\overline{\mathrm{AB}}$인 원 O의 접선이다. $\overline{\mathrm{AC}}=3\mathrm{cm}$, $\overline{\mathrm{CD}}=8\mathrm{cm}$일 때, $\overline{\mathrm{BD}}$의 길이를 구하여라.

수학적 과정 의사소통 추론 문제 해결

4 다음 그림에서 두 직선 l, l'은 두 원 O, O′ 밖의 한 점 P에서 두 원에 공통으로 그은 접선이다. 네 점 A, B, C, D가 두 원의 접점일 때, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}$임을 설명하여라.

1. 원과 직선 279

(2) $\triangle$OAH에서

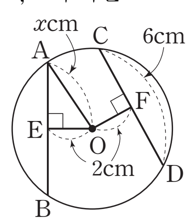


$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{6^2-4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}(\mathrm{cm})$
$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AH}}=2\times2\sqrt{5}$
$=4\sqrt{5}(\mathrm{cm})$
따라서 $x=4\sqrt{5}$이다.

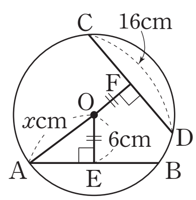
2 **평가의 주안점** 원의 중심에서 현까지의 거리와 현의 길이를 구할 수 있다.

풀이 원의 중심 O에서 두 현 AB, CD에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하면

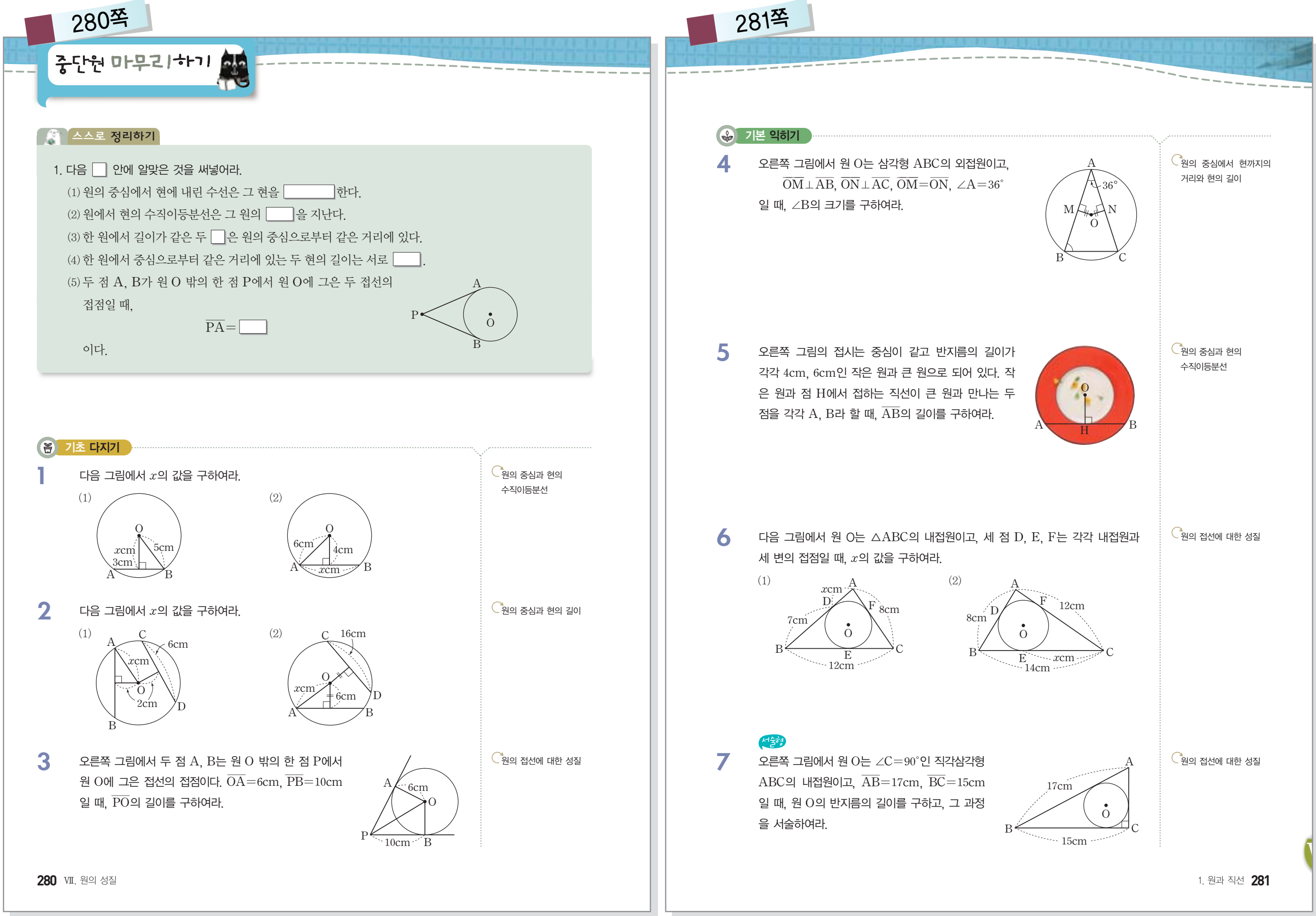
(1)



(2)



(1) $\overline{\mathrm{OE}}=\overline{\mathrm{OF}}=2\mathrm{cm}$이므로
$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}=6\mathrm{cm}$, $\overline{\mathrm{AE}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=3\mathrm{cm}$
$\triangle$OAE에서 $x=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$이다.


280쪽

중단원 마무리하기

스스로 정리하기

1. 다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

(1) 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 □한다.

(2) 원에서 현의 수직이등분선은 그 원의 □을 지난다.

(3) 한 원에서 길이가 같은 두 □은 원의 중심으로부터 같은 거리에 있다.

(4) 한 원에서 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 서로 □.

(5) 두 점 A, B가 원 O 밖의 한 점 P에서 원 O에 그은 두 접선의 접점일 때, $\overline{PA}=$□ 이다.

기초 다지기

1 다음 그림에서 x의 값을 구하여라. (원의 중심과 현의 수직이등분선)

2 다음 그림에서 x의 값을 구하여라. (원의 중심과 현의 길이)

3 오른쪽 그림에서 두 점 A, B는 원 O 밖의 한 점 P에서 원 O에 그은 접선의 접점이다. $\overline{OA}=6$cm, $\overline{PB}=10$cm일 때, $\overline{PO}$의 길이를 구하여라. (원의 접선에 대한 성질)

280 Ⅶ. 원의 성질

281쪽

기본 익히기

4 오른쪽 그림에서 원 O는 삼각형 ABC의 외접원이고, $\overline{OM}\perp\overline{AB}$, $\overline{ON}\perp\overline{AC}$, $\overline{OM}=\overline{ON}$, $\angle A=36°$일 때, $\angle B$의 크기를 구하여라. (원의 중심에서 현까지의 거리와 현의 길이)

5 오른쪽 그림의 접시는 중심이 같고 반지름의 길이가 각각 4cm, 6cm인 작은 원과 큰 원으로 되어 있다. 작은 원과 점 H에서 접하는 직선이 큰 원과 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, $\overline{AB}$의 길이를 구하여라. (원의 중심과 현의 수직이등분선)

6 다음 그림에서 원 O는 △ABC의 내접원이고, 세 점 D, E, F는 각각 내접원과 세 변의 접점일 때, x의 값을 구하여라. (원의 접선에 대한 성질)

7 서술형 오른쪽 그림에서 원 O는 $\angle C=90°$인 직각삼각형 ABC의 내접원이고, $\overline{AB}=17$cm, $\overline{BC}=15$cm일 때, 원 O의 반지름의 길이를 구하고, 그 과정을 서술하여라. (원의 접선에 대한 성질)

1. 원과 직선 281

(2) $\overline{AB}=\overline{CD}=16$cm이므로 $\overline{AE}=\frac{1}{2}\overline{AB}=8$(cm)

$\triangle$OAE에서 $x=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{100}=10$이다.

3 평가의 주안점 원의 접선에 대한 성질을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있다.

풀이 원의 접선에 대한 성질에 의하여 $\overline{PA}=\overline{PB}$이므로

$\overline{PA}=\overline{PB}=10$cm

직각삼각형 OAP에서

$\overline{PO}=\sqrt{10^2+6^2}=\sqrt{136}=2\sqrt{34}$(cm)이다.

기본 익히기

4 평가의 주안점 원의 중심에서 같은 거리에 있는 두 현의 길이가 같음을 이용하여 이등변삼각형의 밑각의 크기를 구할 수 있다.

풀이 $\overline{OM}\perp\overline{AB}$, $\overline{ON}\perp\overline{OD}$, $\overline{OM}=\overline{ON}$이므로 $\overline{AB}=\overline{AC}$

$\triangle$ABC가 이등변삼각형이므로

$\angle B=\frac{1}{2}(180°-36°)=\frac{1}{2}\times 144°=72°$이다.

5 평가의 주안점 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분하는 성질을 이용하여 현의 길이를 구할 수 있다.

풀이 $\triangle$OAH에서

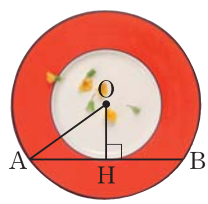
$\overline{OA}=6$cm, $\overline{OH}=4$cm이므로

$\overline{AH}=\sqrt{6^2-4^2}$

$=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$(cm)

따라서 $\overline{AB}=2\overline{AH}=4\sqrt{5}$(cm)

이다.



6 평가의 주안점 삼각형에 내접하는 원에서 선분의 길이를 구할 수 있다.

풀이 (1) $\overline{BE}=\overline{BD}=7$cm이므로

$\overline{CF}=\overline{CE}=\overline{BC}-\overline{BE}=12-7=5$(cm)

$x=\overline{AF}=\overline{AC}-\overline{CF}=8-5=3$

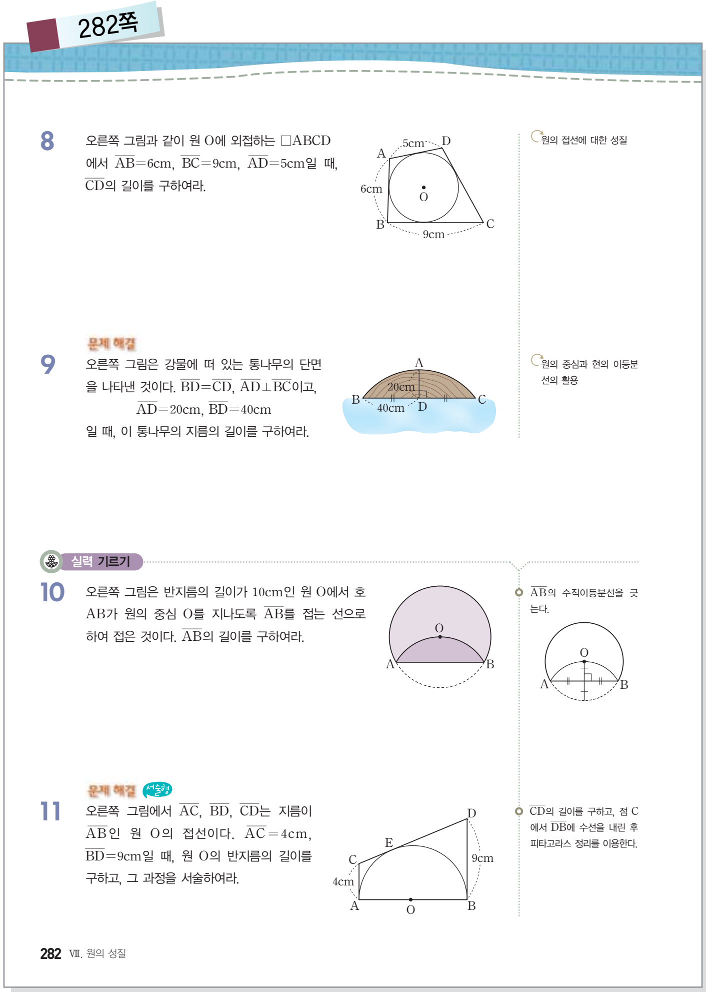
(2) $\overline{CF}=\overline{CE}=x$cm이므로

$\overline{AF}=\overline{AD}=(12-x)$cm, $\overline{BD}=\overline{BE}=(14-x)$cm

$\overline{AB}=8$cm이므로

$\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{BD}=(12-x)+(14-x)=8$

$2x=18$, $x=9$


282쪽

8 오른쪽 그림과 같이 원 O에 외접하는 □ABCD에서 $\overline{AB}=6cm$, $\overline{BC}=9cm$, $\overline{AD}=5cm$일 때, $\overline{CD}$의 길이를 구하여라.

원의 접선에 대한 성질

문제 해결

9 오른쪽 그림은 강물에 떠 있는 통나무의 단면을 나타낸 것이다. $\overline{BD}=\overline{CD}$, $\overline{AD}\perp\overline{BC}$이고, $\overline{AD}=20cm$, $\overline{BD}=40cm$일 때, 이 통나무의 지름의 길이를 구하여라.

원의 중심과 현의 이등분선의 활용

실력 기르기

10 오른쪽 그림은 반지름의 길이가 10cm인 원 O에서 호 AB가 원의 중심 O를 지나도록 $\overline{AB}$를 접는 선으로 하여 접은 것이다. $\overline{AB}$의 길이를 구하여라.

$\overline{AB}$의 수직이등분선을 긋는다.

문제 해결 서술형

11 오른쪽 그림에서 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$는 지름이 $\overline{AB}$인 원 O의 접선이다. $\overline{AC}=4cm$, $\overline{BD}=9cm$일 때, 원 O의 반지름의 길이를 구하고, 그 과정을 서술하여라.

$\overline{CD}$의 길이를 구하고, 점 C에서 $\overline{DB}$에 수선을 내린 후 피타고라스 정리를 이용한다.

282 Ⅶ. 원의 성질

7 평가의 주안점 접선에 대한 성질을 이용하여 직각삼각형에 내접하는 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.

풀이 원의 중심 O에서 △ABC의 세 변에 내린 수선의 발을 D, E, F라 하면

$\overline{AC}=\sqrt{17^2-15^2}=\sqrt{64}=8(cm)$ …… ①

□OECF가 정사각형이므로

$\overline{OE}=\overline{OF}=r$cm라 하면

$\overline{AD}=\overline{AF}=(8-r)$cm

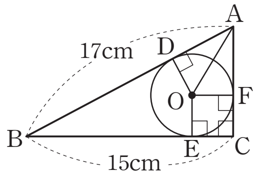
$\overline{BD}=\overline{BE}=(15-r)$cm

$\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{BD}$

$=(8-r)+(15-r)=17(cm)$ …… ②

$2r=6$, $r=3$ …… ③

따라서 원 O의 반지름의 길이는 3cm이다.



단계	채점 기준	배점 비율
①	$\overline{AC}$의 길이를 구한다.	30%
②	$\overline{AB}$를 r에 대한 식으로 나타낸다.	50%
③	원 O의 반지름의 길이를 구한다.	20%

8 평가의 주안점 사각형에 내접하는 원에서 접선에 대한 성질을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있다.

풀이 $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$이므로 $6+\overline{CD}=5+9$

따라서 $\overline{CD}=8cm$이다.

9 평가의 주안점 현의 수직이등분선의 성질을 이용하여 원의 지름의 길이를 구할 수 있다.

풀이 $\overline{AD}$를 연장하여 통나무의 중심을 O, 반지름의 길이를 $r$cm라 하면

$\overline{OB}=r$cm, $\overline{OD}=(r-20)$cm

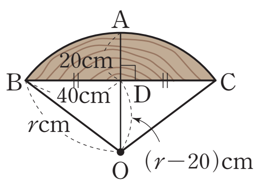
이므로 △OBD에서

$r^2=40^2+(r-20)^2$

$40r=1600+400$, $40r=2000$

$r=50$

따라서 통나무의 지름의 길이는 100cm이다.



실력 기르기

10 평가의 주안점 현의 수직이등분선의 성질을 이용하여 현의 길이를 구할 수 있다.

풀이 현 AB의 수직이등분선 $\overline{OH}$가 원의 중심 O를 지나므로

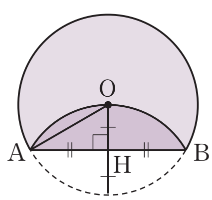
$\overline{OA}=10cm$

$\overline{OH}=\frac{1}{2}\times10=5(cm)$

이므로 △OAH에서

$\overline{AH}=\sqrt{10^2-5^2}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}(cm)$

따라서 $\overline{AB}=10\sqrt{3}cm$이다.

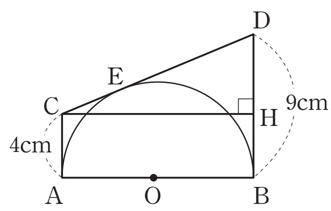


11 평가의 주안점 원의 접선의 성질을 이용하여 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.

풀이 $\overline{CE}=\overline{CA}=4cm$, $\overline{DE}=\overline{DB}=9cm$이므로

$\overline{CD}=4+9=13(cm)$ …… ①

점 C에서 $\overline{BD}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 △DCH에서



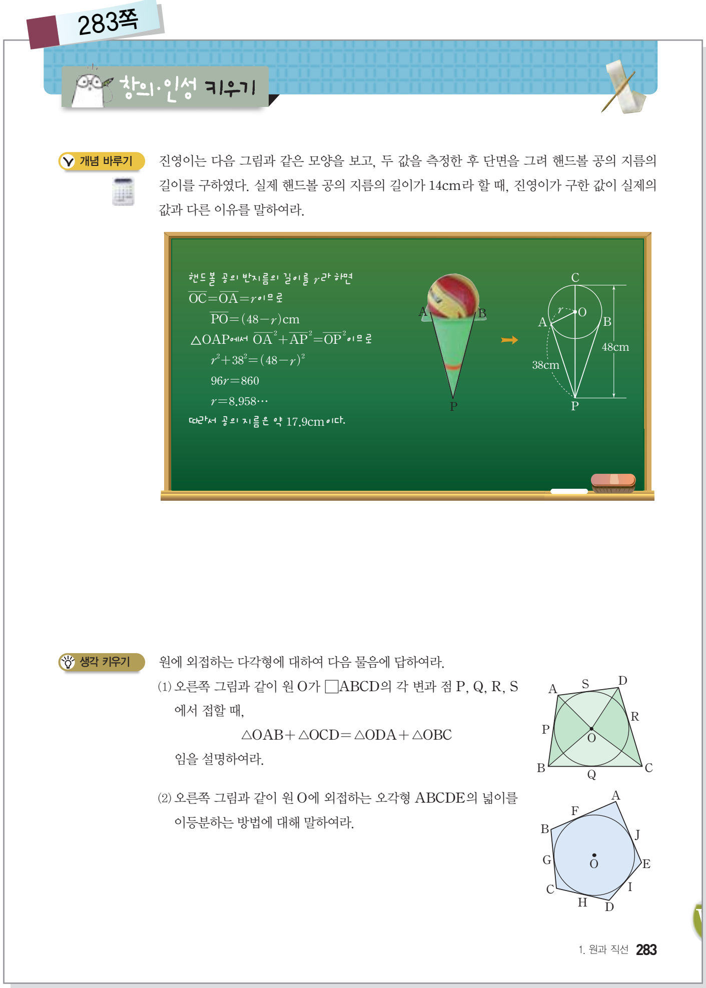
$\overline{DH}=9-4=5(cm)$이므로 …… ②

$\overline{AB}=\overline{CH}=\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{144}=12(cm)$ …… ③

따라서 원 O의 반지름의 길이는 6cm이다. …… ④

단계	채점 기준	배점 비율
①	$\overline{CD}$의 길이를 구한다.	30%
②	$\overline{DH}$의 길이를 구한다.	40%
③	$\overline{AB}$의 길이를 구한다.	20%
④	원 O의 반지름의 길이를 구한다.	10%

283쪽



창의·인성 키우기

개념 바루기 진영이는 다음 그림과 같은 모양을 보고, 두 값을 측정한 후 단면을 그려 핸드볼 공의 지름의 길이를 구하였다. 실제 핸드볼 공의 지름의 길이가 14cm라 할 때, 진영이가 구한 값이 실제의 값과 다른 이유를 말하여라.

생각 키우기 원에 외접하는 다각형에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 오른쪽 그림과 같이 원 O가 □ABCD의 각 변과 점 P, Q, R, S에서 접할 때,

$$\triangle OAB+\triangle OCD=\triangle ODA+\triangle OBC$$

임을 설명하여라.

(2) 오른쪽 그림과 같이 원 O에 외접하는 오각형 ABCDE의 넓이를 이등분하는 방법에 대해 말하여라.

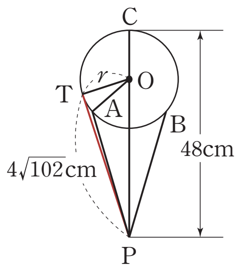
1. 원과 직선 283

창의·인성 키우기

개념 바루기

지도상의 유의점 원의 접선과 그 접점을 지나는 반지름이 수직임을 이용하여 원의 접선에 대한 성질을 확실하게 이해할 수 있도록 지도한다.

올바른 풀이 지름이 14cm이므로
$\overline{OC}=\overline{OA}=7$cm,
$\overline{PO}=48-7=41$(cm)
$\triangle OTP$에서
$\overline{PT}=\sqrt{41^2-7^2}$
$=\sqrt{1632}=4\sqrt{102}$
이때 $4\sqrt{102}=40.398\cdots$이다.



따라서 점 P에서의 거리가 38cm가 되는 점 A가 원 O의 접점이 아니라 점 P에서의 거리가 $4\sqrt{102}$cm가 되는 점 T가 원 O에 대한 접선 PT의 접점이다.

창의 · 인성 오류를 통해 비판적 사고를 키우도록 하며 학생들이 자신의 생각을 발표하게 함으로써 개념을 다질 수 있도록 한다.

생각 키우기

지도상의 유의점 원의 접선에 대한 성질을 바탕으로 다각형으로 그 개념을 확장시킨 문제이다. 풀이 방법이 여러 가지가 나올 수 있으므로 다양한 생각을 발표할 수 있도록 지도한다.

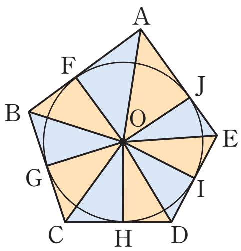
풀이 (1) $\overline{OP}\perp\overline{AB}$, $\overline{OQ}\perp\overline{BC}$, $\overline{OR}\perp\overline{CD}$, $\overline{OS}\perp\overline{AD}$이므로
$\overline{OP}=\overline{OQ}=\overline{OR}=\overline{OS}=r$라 하면

$$\triangle OAB+\triangle OCD=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{CD})r$$

$$\triangle ODA+\triangle OBC=\frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{BC})r$$

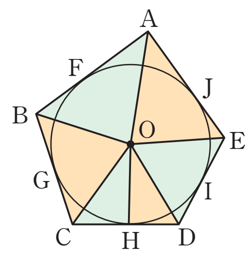
$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$이므로
$\triangle OAB+\triangle OCD=\triangle ODA+\triangle OBC$

(2) **예시 답안 1**
오른쪽 그림에서
$\triangle OAJ\equiv\triangle OAF$,
$\triangle OBF\equiv\triangle OBG$,
$\triangle OCG\equiv\triangle OCH$,
$\triangle ODH\equiv\triangle ODI$,
$\triangle OEI\equiv\triangle OEJ$
이므로 다음과 같다.



$\triangle OAJ+\triangle OBF+\triangle OCG$
$+\triangle ODH+\triangle OEI$
$=\triangle OAF+\triangle OBG+\triangle OCH+\triangle ODI+\triangle OEJ$

예시 답안 2 오른쪽 그림에서
$\triangle OAJ\equiv\triangle OAF$,
$\triangle OBF\equiv\triangle OBG$,
$\triangle OCG\equiv\triangle OCH$,
$\triangle ODH\equiv\triangle ODI$,
$\triangle OEI\equiv\triangle OEJ$
이므로 다음과 같다.



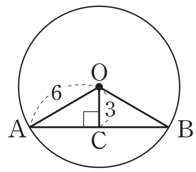
$\triangle OAB+\triangle OCH+\triangle ODE$
$=(\triangle OAF+\triangle OBF)+\triangle OCH+(\triangle ODI+\triangle OEI)$
$=\triangle OAJ+\triangle OBG+\triangle OCG+\triangle ODH+\triangle OEJ$
$=(\triangle OAJ+\triangle OEJ)+\triangle ODH+(\triangle OBG+\triangle OCG)$
$=\triangle OAE+\triangle ODH+\triangle OBC$

창의 · 인성 다양한 풀이 방법이 나올 수 있도록 격려하여 확산적 사고를 할 수 있도록 한다. (1)과 (2)를 통하여 변의 개수가 홀수 개인 다각형과 짝수 개인 다각형의 경우에 대해 수렴적 사고를 할 수 있도록 한다.

학년 반 번호:	이름:	/ 점수:

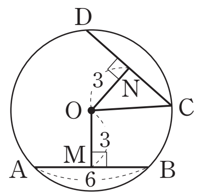
선다형은 각 5점, 나머지 문항은 각 문항에 표시함.

01 오른쪽 그림과 같은 원 O에서 $\overline{AB}$의 길이는?



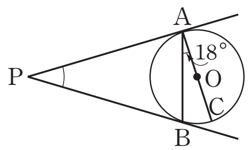
① $3\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ $5\sqrt{3}$ ④ $6\sqrt{3}$ ⑤ $7\sqrt{3}$

02 오른쪽 그림과 같은 원 O에서 $\overline{OC}$의 길이는?



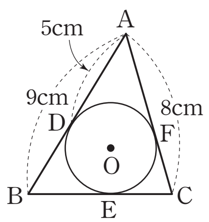
① 3 ② $3\sqrt{2}$ ③ 4 ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 5

03 오른쪽 그림에서 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$는 원 O의 접선이고, $\overline{AC}$는 원 O의 지름이다. $\angle BAC=18^\circ$일 때, $\angle P$의 크기는?



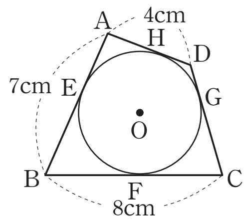
① 18° ② 24° ③ 32° ④ 36° ⑤ 48°

04 오른쪽 그림의 원 O는 $\triangle ABC$의 내접원이고, 세 점 D, E, F는 각각 내접원과 세 변의 접점이다. $\overline{AB}=9\text{cm}$, $\overline{AC}=8\text{cm}$, $\overline{AD}=5\text{cm}$일 때, $\overline{BC}$의 길이는?



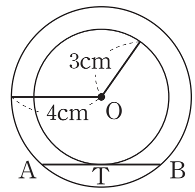
① 5cm ② 6cm ③ 7cm ④ 8cm ⑤ 9cm

05 오른쪽 그림과 같이 원 O가 □ABCD의 각 변과 네 점 E, F, G, H에 접하고, $\overline{AB}=7\text{cm}$, $\overline{BC}=8\text{cm}$, $\overline{DA}=4\text{cm}$일 때, $\overline{CD}$의 길이는?



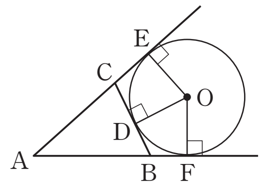
① $\frac{32}{7}$cm ② 5cm ③ $\sqrt{31}$cm ④ 6cm ⑤ 7cm

06 오른쪽 그림과 같이 중심이 같은 두 원의 반지름의 길이는 각각 3cm, 4cm이다. 큰 원의 현 AB는 작은 원의 접선이고, 점 T는 접점일 때, $\overline{AB}$의 길이는?



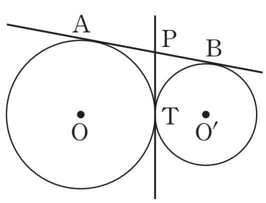
① $\sqrt{5}$cm ② $\sqrt{7}$cm ③ 3cm ④ $2\sqrt{7}$cm ⑤ 6cm

07 오른쪽 그림에서 $\overline{AE}$, $\overline{AF}$, $\overline{BC}$는 원 O의 접선이다. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?



① $\overline{AE}=\overline{AF}$
② $\overline{BD}=\overline{BF}$
③ $\angle OCD=\angle OCE$
④ $\overline{OD}=\overline{OE}=\overline{OF}$
⑤ $\triangle OCD\equiv\triangle OBD$

08 다음 그림에서 두 직선 AB, PT는 한 점 P에서 만나는 두 원 O, O′의 접선이다. **보기**에서 옳은 것을 모두 고른 것은?



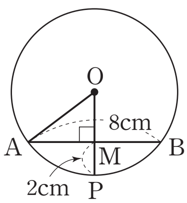
보기

ㄱ. $\overline{PA}=\overline{PB}$
ㄴ. $\angle OTP=\angle OAP$
ㄷ. $\angle PBT=\angle PTB$
ㄹ. $\angle ATB=80^\circ$

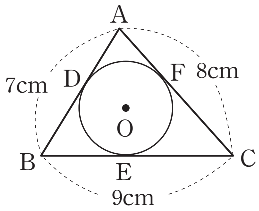
① ㄱ, ㄴ ② ㄷ, ㄹ ③ ㄱ, ㄴ, ㄷ ④ ㄱ, ㄷ, ㄹ ⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

단답형

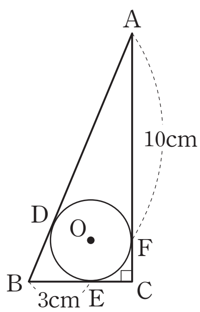
09 오른쪽 그림과 같은 원 O에서 $\overline{AB}\perp\overline{OP}$이고, $\overline{AB}=8\text{cm}$, $\overline{MP}=2\text{cm}$일 때, 원 O의 반지름의 길이를 구하여라. [7점]



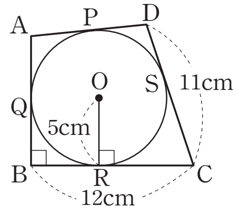
10 오른쪽 그림에서 원 O는 $\triangle ABC$의 내접원이고 세 점 D, E, F는 각각 내접원과 세 변의 접점이다. $\overline{AB}=7\text{cm}$, $\overline{BC}=9\text{cm}$, $\overline{CA}=8\text{cm}$일 때, $\overline{CF}$의 길이를 구하여라. [7점]



11 오른쪽 그림에서 원 O는 $\angle C=90°$인 직각삼각형 ABC의 내접원이고, 세 점 D, E, F는 각각 내접원과 세 변의 접점이다. $\overline{BE}=3\text{cm}$, $\overline{AF}=10\text{cm}$일 때, $\triangle ABC$의 둘레의 길이를 구하여라. [7점]

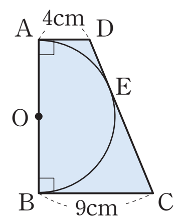


12 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 5cm인 원 O가 □ABCD의 각 변과 네 점 P, Q, R, S에서 접하고, $\angle B=90°$, $\overline{BC}=12\text{cm}$, $\overline{CD}=11\text{cm}$일 때, $\overline{DP}$의 길이를 구하여라. [7점]

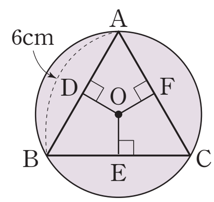


서술형

13 오른쪽 그림에서 $\overline{AD}$, $\overline{CD}$, $\overline{BC}$는 지름이 $\overline{AB}$인 반원 O의 접선이다. $\overline{AD}=4\text{cm}$, $\overline{BC}=9\text{cm}$일 때, 사다리꼴 ABCD의 넓이를 구하고, 그 과정을 서술하여라. [10점]



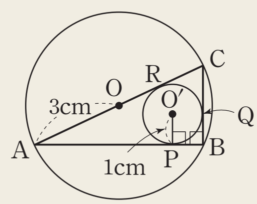
14 오른쪽 그림과 같은 원 O에서 $\overline{AB}\perp\overline{OD}$, $\overline{BC}\perp\overline{OE}$, $\overline{AC}\perp\overline{OF}$이고, $\overline{OD}=\overline{OE}=\overline{OF}$, $\overline{AB}=6\text{cm}$일 때, 원 O의 넓이를 구하고, 그 과정을 서술하여라. [10점]



수리 논술형

15 오른쪽 제시문을 읽고, $\triangle ABC$의 넓이를 구하고, 그 과정을 설명하여라. [12점]

오른쪽 그림과 같이 $\angle B=90°$인 직각삼각형 ABC가 그림과 같이 반지름의 길이가 3cm인 원 O에 내접하고 있고, 반지름의 길이가 1cm인 원 O′에 외접하고 있다.



중단원 평가 문제

01 ④	02 ②	03 ④	04 ③
05 ②	06 ④	07 ⑤	08 ③
09 5cm	10 5cm	11 30cm	
12 4cm	13~15 풀이 참조		

01 평가 기준 원에서 현의 길이를 구할 수 있는가?

풀이 $\triangle OAC$에서 $\angle OCA=90^\circ$이므로
$3^2+\overline{AC}^2=6^2$
이때 $\overline{AC}>0$이므로
$\overline{AC}=\sqrt{6^2-3^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$
따라서 $\overline{AB}=2\overline{AC}=2\times3\sqrt{3}=6\sqrt{3}$이다.

02 평가 기준 원의 중심에서 같은 거리에 있는 현의 길이를 구할 수 있는가?

풀이 $\overline{ON}=\overline{OM}$이므로 $\overline{CD}=\overline{AB}=6$
$\overline{CN}=\frac{1}{2}\overline{CD}=3$
$\triangle OCN$에서 $\angle ONC=90^\circ$이므로
$\overline{OC}=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$이다.

03 평가 기준 원의 접선에 대한 성질을 알고 있는가?

풀이 $\angle PAO=90^\circ$이므로
$\angle PAB=90^\circ-18^\circ=72^\circ$
$\overline{PA}=\overline{PB}$이므로 $\triangle PAB$에서
$\angle P=180^\circ-2\times72^\circ=36^\circ$

04 평가 기준 원의 접선에 대한 성질을 이용하여 삼각형의 변의 길이를 구할 수 있는가?

풀이 $\overline{BD}=9-5=4(\text{cm})$
$\overline{AF}=\overline{AD}=5\text{cm}$
$\overline{CF}=\overline{AC}-\overline{AF}=8-5=3(\text{cm})$
$\overline{BE}=\overline{BD}=4\text{cm}$, $\overline{CE}=\overline{CF}=3\text{cm}$이므로
$\overline{BC}=\overline{BE}+\overline{CE}=4+3=7(\text{cm})$

05 평가 기준 사각형에 내접하는 원 O에서 접선의 성질을 이용할 수 있는가?

풀이 $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{AD}$이므로
$7+\overline{CD}=8+4$
따라서 $\overline{CD}=5\text{cm}$이다.

06 평가 기준 원에서 현의 길이를 구할 수 있는가?

풀이 $\triangle OAT$에서 $\angle OTA=90^\circ$이고,
$\overline{OA}=4\text{cm}$, $\overline{OT}=3\text{cm}$이므로
$\overline{AT}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}(\text{cm})$
따라서 $\overline{AB}=2\overline{AT}=2\sqrt{7}(\text{cm})$이다.

07 평가 기준 원의 접선에 대한 성질을 알고 있는가?

풀이 ① $\overline{AE}=\overline{AF}$(접선), ② $\overline{BD}=\overline{BF}$(접선)
③ $\triangle OCD$와 $\triangle OCE$에서
$\angle ODC=\angle OEC=90^\circ$, $\overline{OC}$는 공통, $\overline{OD}=\overline{OE}$
이므로 $\triangle OCD\equiv\triangle OCE$이다.
따라서 $\angle OCD=\angle OCE$이다.
④ $\overline{OD}=\overline{OE}=\overline{OF}$(반지름)
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

08 평가 기준 원의 접선에 대한 성질을 알고 있는가?

풀이 ㄱ. $\overline{PA}=\overline{PT}=\overline{PB}$ (접선)
ㄴ. $\angle OTP=\angle OAP=90^\circ$
ㄷ. $\triangle PTB$에서 $\overline{PB}=\overline{PT}$이므로 $\angle PBT=\angle PTB$
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

09 평가 기준 현의 수직이등분선에 대한 성질을 알고 있는가?

풀이 원의 중심 O에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분하므로 $\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=4(\text{cm})$
$\triangle OAM$에서 $\angle OMA=90^\circ$이므로
$\overline{OA}=x\text{cm}$라 하면 $\overline{OM}=(x-2)\text{cm}$
$x^2=4^2+(x-2)^2$
$x^2=16+x^2-4x+4$
$4x=20$, $x=5$
따라서 원 O의 반지름의 길이는 5cm이다.

10 평가 기준 원의 접선에 대한 성질을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

풀이 $\overline{CF}=x\text{cm}$라 하면 $\overline{CE}=x\text{cm}$이고,
$\overline{AD}=\overline{AF}=(8-x)\text{cm}$, $\overline{BD}=\overline{BE}=(9-x)\text{cm}$
$\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{BD}$이므로
$7=(8-x)+(9-x)$
$2x=10$, $x=5$
따라서 $\overline{CF}$의 길이는 5cm이다.

11 **평가 기준** 원의 접선에 대한 성질을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

풀이 $\overline{BD}=\overline{BE}=3\text{cm}$, $\overline{AD}=\overline{AF}=10\text{cm}$

$\overline{CE}=\overline{CF}=x\text{cm}$라 하면

$\overline{BC}=(x+3)\text{cm}$, $\overline{AC}=(x+10)\text{cm}$

피타고라스 정리에 의하여

$(x+3)^2+(x+10)^2=13^2$

$x^2+13x-30=0$

$(x-2)(x+15)=0$

$x>0$이므로 $x=2$

따라서 $\overline{BC}=5\text{cm}$, $\overline{AC}=12\text{cm}$이므로

$\triangle ABC$의 둘레의 길이는

$13+5+12=30(\text{cm})$이다.

12 **평가 기준** 사각형에 내접하는 원의 접선에 대한 성질을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

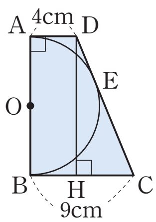
풀이 □QBRO는 한 변의 길이가 5cm인 정사각형이므로

$\overline{BR}=\overline{BQ}=5\text{cm}$

$\overline{CS}=\overline{CR}=12-5=7(\text{cm})$

따라서 $\overline{DP}=\overline{DS}=11-7=4(\text{cm})$이다.

13 **평가 기준** 원의 접선에 대한 성질을 이용하여 넓이를 구할 수 있는가?



풀이 $\overline{AD}=\overline{DE}$, $\overline{BC}=\overline{CE}$이므로

$\overline{CD}=\overline{CE}+\overline{DE}$

$=\overline{BC}+\overline{AD}$

$=13(\text{cm})$ …… ①

점 D에서 $\overline{BC}$에 수선을 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{CH}=\overline{BC}-\overline{BH}=\overline{BC}-\overline{AD}=5(\text{cm})$

$\triangle DHC$에서 $\angle DHC=90^\circ$이므로

$\overline{DH}=\sqrt{13^2-5^2}$

$=\sqrt{144}=12(\text{cm})$ …… ②

따라서 사다리꼴 ABCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(4+9)\times12=78(\text{cm}^2)$이다. …… ③

단계	채점 기준	배점
①	$\overline{CD}$의 길이를 구한다.	4점
②	사다리꼴 ABCD의 높이를 구한다.	4점
③	사다리꼴 ABCD의 넓이를 구한다.	2점

14 **평가 기준** 원의 중심에서 같은 거리에 있는 현의 길이를 구할 수 있는가?

풀이 $\overline{OD}=\overline{OE}=\overline{OF}$이므로

$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$

$\triangle ABC$가 정삼각형이므로

$\overline{AB}:\overline{AE}=2:\sqrt{3}$

$\overline{AE}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times6=3\sqrt{3}(\text{cm})$ …… ①

정삼각형의 외심, 내심, 무게중심은 모두 일치하므로

$\overline{OA}=\frac{2}{3}\overline{AE}=\frac{2}{3}\times3\sqrt{3}=2\sqrt{3}(\text{cm})$ …… ②

따라서 원 O의 넓이는

$\pi\times(2\sqrt{3})^2=12\pi(\text{cm}^2)$이다. …… ③

단계	채점 기준	배점
①	$\overline{AE}$의 길이를 구한다.	4점
②	$\overline{OA}$의 길이를 구한다.	4점
③	원 O의 넓이를 구한다.	2점

15 **평가 기준** 원의 접선에 대한 성질을 활용한 문제를 해결할 수 있는가?

풀이 $\triangle ABC$에서 $\overline{AR}=\overline{AP}=x\text{cm}$라 하면

$\overline{AC}=6\text{cm}$, $\overline{AB}=(x+1)\text{cm}$

$\overline{RC}=\overline{CQ}=(6-x)\text{cm}$

$\overline{BC}=(7-x)\text{cm}$

피타고라스 정리에 의하여

$(x+1)^2+(7-x)^2=6^2$ …… ①

이 식을 전개하여 정리하면

$x^2-6x+7=0$

이차방정식을 풀면

$x=3\pm\sqrt{2}$

$x>3$이므로 $x=3+\sqrt{2}$ …… ②

따라서 $\overline{AB}=(4+\sqrt{2})\text{cm}$, $\overline{BC}=(4-\sqrt{2})\text{cm}$이다.

…… ③

그러므로 $\triangle ABC$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(4+\sqrt{2})\times(4-\sqrt{2})=7(\text{cm}^2)$이다. …… ④

단계	채점 기준	배점
①	$\overline{AR}=\overline{AP}=x$라 놓고 이차방정식을 세우는 방법을 설명한다.	4점
②	x의 값을 구한다.	2점
③	$\overline{AB}$, $\overline{BC}$의 길이를 구한다.	각 2점
④	$\triangle ABC$의 넓이를 구한다.	2점