V 피타고라스 정리

V

피타고라스
정리

1 피타고라스 정리
2 피타고라스 정리의 활용

학습한 내용	본 단원의 내용	학습할 내용
중학교 수학 ❶ 작도와 합동 평면도형의 성질 입체도형의 성질 **중학교 수학 ❷** 삼각형과 사각형의 성질	1. 피타고라스 정리 2. 피타고라스 정리의 활용	**고등학교 수학 Ⅰ** 도형의 방정식

단원 배경

옛사람들은 새끼줄에 매듭을 지어 직각삼각형을 만든 후, 측량을 하거나 건축물을 지을 때 직각을 활용하였다고 한다. 실제로 고대의 건축물이나 터널, 피라미드 등에서 그 사용 흔적을 찾을 수 있다. 피타고라스 정리는 실용적인 가치와 학문적 가치를 동시에 지니며, 많은 사람들이 그 정리를 여러 가지 방법으로 설명함으로써 수학적 아름다움을 보여주고 있다. 현대에도 피타고라스 정리는 다양한 분야와 결합하여 폭넓게 활용되고 있다.

❶ 단원을 들어가면서

피타고라스 학파에 의하여 '직각삼각형에서 빗변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 나머지 두 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형의 넓이의 합과 같다.'라고 하는 피타고라스 정리가 알려졌다. 또한 이후에 유클리드(Euclid; ?B.C. 325 ~ ?B.C. 265)가 쓴 "원론"에서 피타고라스 정리의 증명을 찾아볼 수 있다. 그 이후 현재까지 발표된 피타고라스 정리에 대한 증명은 수백 가지가 넘는다고 한다.

이 단원은 피타고라스 정리와 피타고라스 정리의 활용으로 구성되어 있다. 피타고라스 정리에서는 피타고라스 정리를 이해하고, 이것이 성립함을 설명할 수 있는 방법을 알아보며, 피타고라스 정리의 활용에서는 평면도형과 입체도형에서 피타고라스 정리를 활용하는 방법을 알 수 있도록 한다.

❷ 단원의 지도 목표

1. 피타고라스 정리

(1) 피타고라스 정리를 이해할 수 있게 하고, 이를 설명할 수 있게 한다.

2. 피타고라스 정리의 활용

(1) 피타고라스 정리를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있게 한다.

③ 단원의 교수·학습상의 유의점

1. 피타고라스 정리

(1) 피타고라스 정리가 성립함을 간단한 방법으로 설명할 수 있게 한다.
(2) 피타고라스 정리의 역은 직관적으로 이해하게 한다.

2. 피타고라스 정리의 활용

(1) 평면도형과 입체도형에서 피타고라스 정리를 활용하여 문제를 풀 때, 그림을 통하여 이해한 후 풀도록 지도한다.

④ 단원의 지도 계통

학습한 내용		본 단원의 내용	학습할 내용	
초등학교 수학 5~6	- 겉넓이와 부피	1. 피타고라스 정리 1-1 피타고라스 정리 2. 피타고라스 정리의 활용 2-1 평면도형에의 활용 2-2 입체도형에의 활용	고등학교 수학 I	- 도형의 방정식
중학교 수학 ❶	- 삼각형의 합동조건 - 다각형의 성질 - 다면체의 뜻과 그 성질 - 입체도형의 겉넓이와 부피			
중학교 수학 ❷	- 이등변삼각형의 성질			

⑤ 단원의 이론적 배경

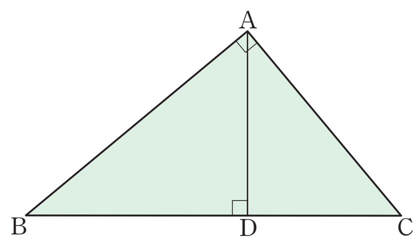
1. 피타고라스 정리의 역사적 배경

피타고라스 정리에 대한 내용은 바빌로니아나 이집트뿐만 아니라 중국에서도 이미 알려져 있었다는 기록이 있다. 하지만 그 당시 사람들은 삼각형의 변의 길이가 3, 4, 5이면 직각삼각형이 되는 것을 수학적으로 증명하지는 않았다. 단지 피타고라스 학파 사람들이 최초로 이 정리를 증명했으므로 '피타고라스 정리'라는 이름으로 널리 퍼진 것으로 보여진다.

피타고라스 학파는 논리성을 매우 중요하게 생각했으므로 피타고라스 정리는 논리적인 증명이라는 점에서 그 의미가 크다고 할 수 있다.

그 당시에는 닮은 삼각형의 정리가 알려져 있었다고 하므로 피타고라스 정리를 다음과 같이 증명했으리라고 전해지고 있다.

다음 그림에서 △ABC, △DBA, △DAC는 각각 닮은 도형이다.



따라서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}\cdot\overline{BD}$, $\overline{AC}^2=\overline{BC}\cdot\overline{CD}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2+\overline{AC}^2&=\overline{BC}\cdot\overline{BD}+\overline{BC}\cdot\overline{CD}\\&=\overline{BC}(\overline{BD}+\overline{CD})\\&=\overline{BC}\cdot\overline{BC}\\&=\overline{BC}^2\end{aligned}$$

이다.

2. 피타고라스 학파

피타고라스(Pythagoras ; ?B.C. 569∼?B.C. 475)는 기하학의 창시자이고 스승인 탈레스(Thales ; ?B.C. 640∼?B.C. 546)의 뒤를 이어 고대 기하학의 발전에 크게 기여하였다.

피타고라스는 탈레스의 권고로 이집트와 메소포타미아와 이집트에 유학한 후 여러 나라를 순방하다가 이탈리아 남부에 위치한 크로톤에서 피타고라스 학교를 세웠다. 이 학교의 사람들을 피타고라스 학파라고 부른다. 피타고라스 학파의 철학은 ‘수가 만물의 근원이다.’ 라는 것이었다. 따라서 이들은 수의 성질에 대한 연구를 바탕으로 기하학, 음악, 천문학, 산술 등을 연구하였다. 피타고라스는 피타고라스 학파가 발견한 새로운 내용이나 지식을 일체 외부에 발표하지 못하게 하였다.

따라서 이들의 업적은 피타고라스 학파가 해체된 후에야 외부에 알려지게 되었다.

피타고라스 학파의 업적 중 가장 위대한 것은 ‘피타고라스 정리’ 이며, 그 밖에 중요한 내용은 다음과 같다.

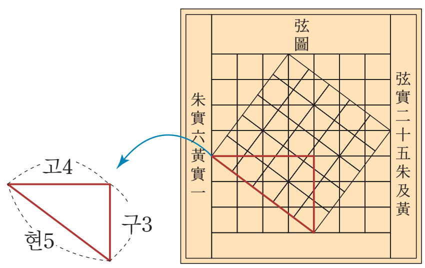
– 자연수를 짝수와 홀수로 분리
– 삼각수 1, 3, 6, 10, ……과 사각수 1, 4, 9, 16, ……의 발견
– 무리수의 발견
– 삼각형의 내각의 크기의 합은 180°임을 발견
– 황금비의 작도법
– 정오각형의 작도법
– 평면을 합동인 정다각형으로 덮는 문제
– 정다면체는 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체뿐인 사실의 증명

등이 전해지고 있다.

3. 피타고라스 정리의 증명

가. 구, 고, 현

고대 중국의 천문학책인 “주비산경(周髀算經)”에는 ‘구(句)를 3, 고(股)를 4라 할 때, 현(弦)은 5가 된다.’ 라는 ‘구고현의 정리’ 가 실려 있다.



직각삼각형에서 직각을 낀 두 변 중 짧은 변을 ‘구’, 긴 변을 ‘고’, 빗변을 ‘현’이라고 불렀다. “주비산경”에는 직관적으로 통찰할 수 있는 한 장의 그림으로 나타내어져 있어, 논리보다는 직관을 중시했던 동양적 사상을 엿볼 수 있다.

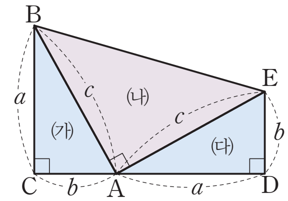
나. 가필드의 증명

미국의 20대 대통령 가필드(Garfield, J. A.;1831∼1881)는 상원의원 시절에 다음 그림과 같은 사다리꼴을 이용하여 피타고라스 정리를 증명하였다고 한다.

다음 그림에서

(사다리꼴의 넓이)=(가)+(나)+(다)

이므로



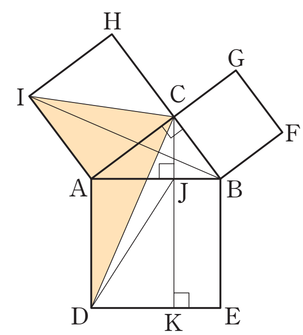
$$\frac{1}{2}(a+b)^2=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}ab$$

$$a^2+b^2=c^2$$

다. 유클리드의 증명

그리스의 수학자 유클리드(Euclid ; ?B.C. 325∼?B.C. 265)가 삼각형의 합동을 이용하여 다음과 같이 증명한 것이 유클리드 “원론” 제1권에 실려 있다.

다음 그림과 같이 직각삼각형 ABC의 세 변을 각각 한 변으로 하는 세 정사각형 ADEB, CBFG, ACHI를 그린다. 또 점 C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 J라 하고, 그 연장선과 $\overline{DE}$가 만나는 점을 K라 하자.



$\square$ACHI$=2\triangle$IAC …… ①

그런데 △IAC와 △IAB의 밑변의 길이와 높이가 각각 같으므로

$\triangle$IAC$=\triangle$IAB …… ②

한편 $\triangle$IAB와 $\triangle$CAD에서 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 각각 같으므로

$$\triangle IAB \equiv \triangle CAD \qquad \cdots\cdots ③$$

이고, $\triangle$ADC와 $\triangle$ADJ의 밑변의 길이와 높이가 각각 같으므로

$$\triangle CAD = \triangle ADJ \qquad \cdots\cdots ④$$

또 $$2\triangle ADJ = \square ADKJ \qquad \cdots\cdots ⑤$$

①, ②, ③, ④, ⑤에서 $\square ACHI = \square ADKJ$ $\cdots\cdots$ ⑥

마찬가지 방법으로 $\square CBFG = \square JKEB$ $\cdots\cdots$ ⑦

⑥, ⑦을 더하면

$$\square ACHI + \square CBFG = \square ADKJ + \square JKEB$$
$$= \square ADEB$$

따라서 $\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 = \overline{AB}^2$이다.

참고 문헌

- 김응태, 수학 교육 교재론, 경문사, 1997.
- 김용운, 중국수학사, 민음사, 1996.
- 칼 B. 보이어(Carl B. Boyer) 외, (양영오, 조윤동 역), 수학의 역사, 경문사, 2002.

6 단원의 지도 계획

본문 내용		지도 내용	용어와 기호	쪽수	차시
1. 피타고라스 정리	이야기로 들려주는 피타고라스 정리, 준비하기			186～188	1
	1-1. 피타고라스 정리	• 피타고라스 정리의 뜻 • 직각삼각형의 변의 길이 • 직각삼각형의 세 변의 길이 사이의 관계	피타고라스 정리	189～195	3
	중단원 마무리하기, 창의 · 인성 키우기, 컴퓨터로 하는 수학, 수학으로 세상 읽기			196～201	1
2. 피타고라스 정리의 활용	준비하기			202	1
	2-1. 평면도형에의 활용	• 직사각형의 대각선의 길이 • 삼각형의 높이와 넓이 • 좌표평면의 두 점 사이의 거리		203～208	3
	2-2. 입체도형에의 활용	• 직육면체의 대각선의 길이 • 뿔의 높이와 부피		209～213	2
	중단원 마무리하기, 창의 · 인성 키우기			214～217	1
	단원 마무리하기			218～220	1
	수행 과제, 수학으로 세상 읽기, 스스로 평가하기			221～223	1
	소계				14

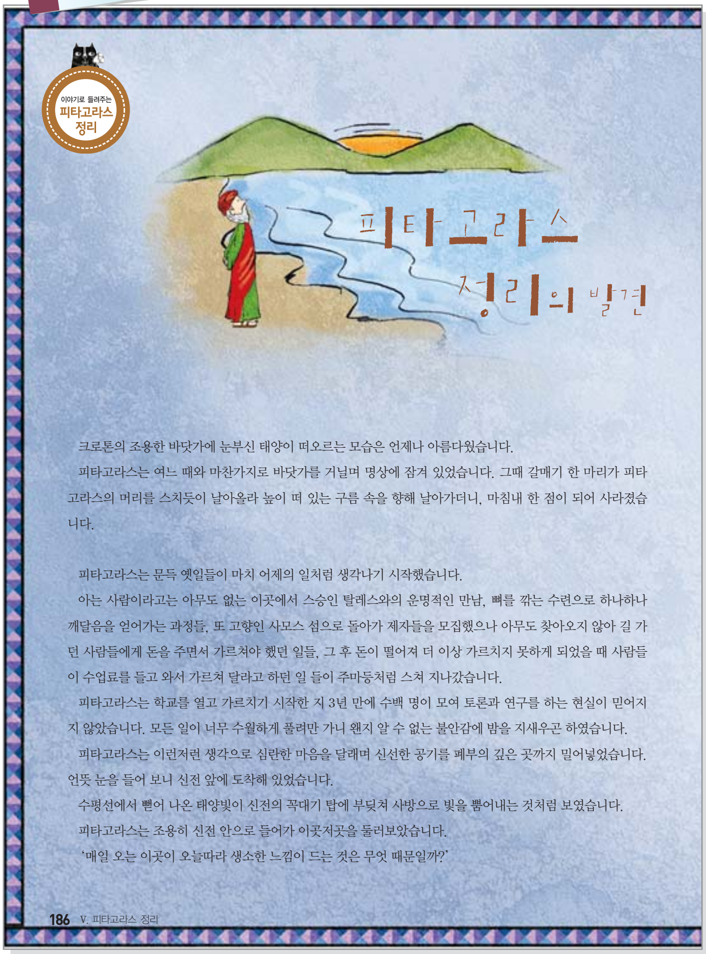
7 교수 · 학습 과정 예시안

단원	Ⅴ. 피타고라스 정리 1. 피타고라스 정리 01. 피타고라스 정리	교과서 쪽수	191~192	차시	3/14
학습 주제	직각삼각형에서 변의 길이는 어떻게 구할까?	학습 목표	두 변의 길이를 알 때 피타고라스 정리를 이용하여 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있다.		
준비물	PPT 자료, 형성 평가지, 과제물			교과 관련	

단계(시간)	학습 내용 및 학습 방법	교수 · 학습 활동		학습 자료 및 유의점
		교사	학생	
도입(8분)	**개념 학습**(전체 학습) – 전시 학습 제시	준비하기 문제를 통해 학생들의 학습 정도를 파악한다.	배운 내용을 상기하며 준비하기 문제를 해결한다.	빗변이 $\overline{AB}$인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$임을 확인하도록 개별 지도한다.
	탐구 학습(전체 학습) – 생각 열기	실생활 소재를 통해 동기 유발이 될 수 있도록 지도하며 직관적으로 그 방법을 말할 수 있도록 한다.	피타고라스 정리를 활용하여 터널의 거리를 구하는 방법을 말하여 본다.	▶ PPT 자료
	– 학습 목표 제시	**생각 열기**와 관련지어 학습 목표를 학생들이 각자 생각해 보게 한 후 제시한다.	이번 시간에 배울 내용이 무엇인지 **생각 열기**와 관련지어 생각해 보고, 학습 목표를 확인한다.	▶ PPT 자료
전개(30분)	**문제 해결 학습**(전체 학습) – 함께 풀기 1	• 직각삼각형에서 두 변의 길이를 알면 피타고라스 정리를 이용하여 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있음을 알게 한다. • 적절한 발문을 통해 구하는 방법을 알 수 있도록 지도한다.	직각삼각형에서 두 변의 길이를 알면 피타고라스 정리를 이용하여 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있음을 이해한다.	직각삼각형의 한 변의 길이를 구할 때, 구하는 방법을 공식화 하지 말고, 피타고라스 정리를 이용하도록 유도한다.
	수준별 학습(개별 학습)	하 피타고라스 정리에서 $a^2+b^2=c^2$ 이 의미하는 것을 정확히 알고 있는지와 직각삼각형에서 빗변을 찾을 수 있는지를 확인한다.		

단계(시간)	학습 내용 및 학습 방법	교수 · 학습 활동		학습 자료 및 유의점
		교사	학생	
	문제 해결 학습(개별 학습) – 문제 2, 3, 4	• 여러 가지 문제를 통해 직각삼각형의 한 변의 길이를 구할 수 있도록 한다. • 실생활에서 나타나는 예를 통하여 직각삼각형의 한 변의 길이를 구할 수 있음을 이해하고 이에 대한 식을 세울 수 있도록 지도한다. • **문제** 4와 같이 피타고라스 정리가 실생활에서 유용하게 사용되고 있음을 인식하게 함으로써 수학에 대한 긍정적인 태도가 형성될 수 있게 한다.	• 각자 문제를 풀고 풀지 못하는 학생은 손을 들어 선생님께 질문한다. • 실생활에서 나타나는 예를 통하여 피타고라스 정리의 활용을 이해하고 이에 대한 식을 세워 본다.	개별 문제를 해결하는 동안 순회하며 지도한다.
	수준별 학습(개별 학습)	하 세 변의 길이가 간단한 직각삼각형에서 피타고라스 정리를 이용하여 변의 길이를 구한다. 상 주변에 직각삼각형 모양을 찾아보고, 그것의 한 변의 길이를 구하는 문제를 만들어 풀게 한다.		학생들이 피타고라스 정리를 어느 정도 이해하는지 파악하고 이에 따라 수준별로 접근 방식을 다르게 한다.
정리 및 평가 (7분)	**개념 정리**(전체 학습) – 내용 정리	• 학생들과 함께 배운 내용을 정리한다. • 질문을 통하여 학생들의 이해 정도를 파악하고, 적절한 피드백을 제공한다.	선생님과 함께 배운 내용을 정리한다.	▶ PPT 자료
	문제 해결 학습(개별 학습) – 형성 평가 문제 (기초 1문제 / 기본 1문제 / 실력 1문제)	형성 평가를 통해 학생의 수업에 대한 이해도를 파악한다.	형성 평가 문제를 각자 스스로 해결해 본다.	• 학생들이 문제를 푸는 동안 순회하며 스스로 풀어 보도록 지도한다. ▶ 형성 평가지
	수준별 수업(개별 학습) – 수준별 과제 제시	수준별 과제를 부여한다.	수준별 과제를 받아간다.	• 학생들의 인성을 고려하여 과제에 가급적 수준별 표시는 삼간다. ▶ 과제물
	차시 예고 – 삼각형의 세 변의 길이 사이에 어떤 관계가 있으면 직각삼각형이 될까?	다음 시간에 배울 내용을 안내한다.	다음 시간에 배울 내용을 확인한다.	

186쪽



이야기로 들려주는 피타고라스 정리

피타고라스 정리의 발견

크로톤의 조용한 바닷가에 눈부신 태양이 떠오르는 모습은 언제나 아름다웠습니다.

피타고라스는 여느 때와 마찬가지로 바닷가를 거닐며 명상에 잠겨 있었습니다. 그때 갈매기 한 마리가 피타고라스의 머리를 스치듯이 날아올라 높이 떠 있는 구름 속을 향해 날아가더니, 마침내 한 점이 되어 사라졌습니다.

피타고라스는 문득 옛일들이 마치 어제의 일처럼 생각나기 시작했습니다.

아는 사람이라고는 아무도 없는 이곳에서 스승인 탈레스와의 운명적인 만남, 뼈를 깎는 수련으로 하나하나 깨달음을 얻어가는 과정들, 또 고향인 사모스 섬으로 돌아가 제자들을 모집했으나 아무도 찾아오지 않아 길 가던 사람들에게 돈을 주면서 가르쳐야 했던 일들, 그 후 돈이 떨어져 더 이상 가르치지 못하게 되었을 때 사람들이 수업료를 들고 와서 가르쳐 달라고 하던 일 들이 주마등처럼 스쳐 지나갔습니다.

피타고라스는 학교를 열고 가르치기 시작한 지 3년 만에 수백 명이 모여 토론과 연구를 하는 현실이 믿어지지 않았습니다. 모든 일이 너무 수월하게 풀려만 가니 왠지 알 수 없는 불안감에 밤을 지새우곤 하였습니다.

피타고라스는 이런저런 생각으로 심란한 마음을 달래며 신선한 공기를 폐부의 깊은 곳까지 밀어넣었습니다. 언뜻 눈을 들어 보니 신전 앞에 도착해 있었습니다.

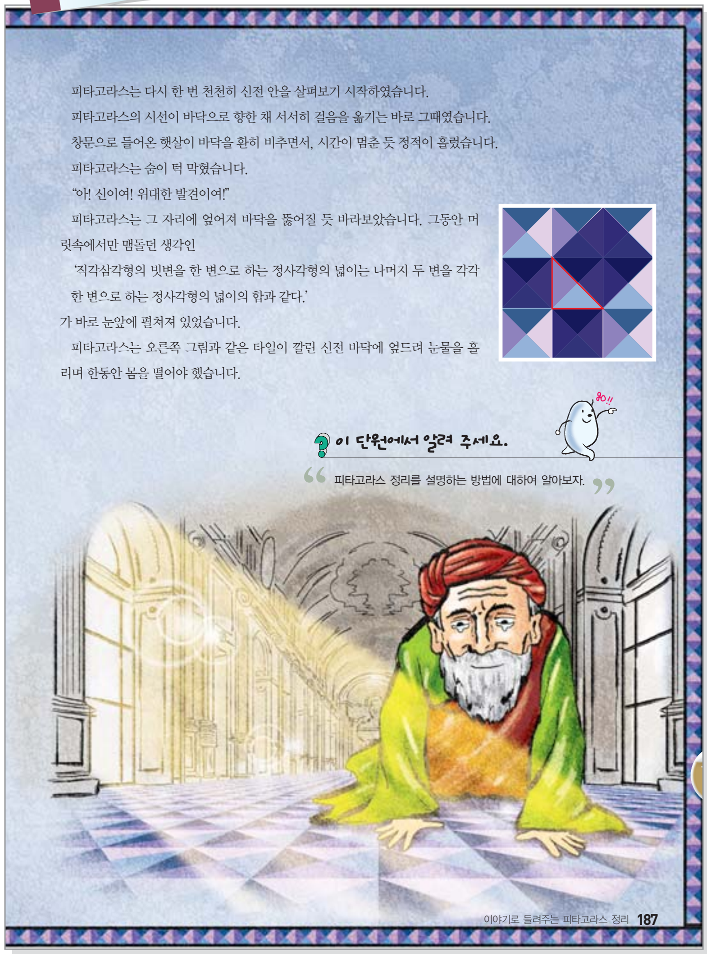
수평선에서 뻗어 나온 태양빛이 신전의 꼭대기 탑에 부딪쳐 사방으로 빛을 뿜어내는 것처럼 보였습니다.

피타고라스는 조용히 신전 안으로 들어가 이곳저곳을 둘러보았습니다.

'매일 오는 이곳이 오늘따라 생소한 느낌이 드는 것은 무엇 때문일까?'

186 V. 피타고라스 정리

187쪽



피타고라스는 다시 한 번 천천히 신전 안을 살펴보기 시작하였습니다.

피타고라스의 시선이 바닥으로 향한 채 서서히 걸음을 옮기는 바로 그때였습니다.

창문으로 들어온 햇살이 바닥을 환히 비추면서, 시간이 멈춘 듯 정적이 흘렀습니다.

피타고라스는 숨이 턱 막혔습니다.

"아! 신이여! 위대한 발견이여!"

피타고라스는 그 자리에 엎어져 바닥을 뚫어질 듯 바라보았습니다. 그동안 머릿속에서만 맴돌던 생각인

'직각삼각형의 빗변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 나머지 두 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형의 넓이의 합과 같다.'

가 바로 눈앞에 펼쳐져 있었습니다.

피타고라스는 오른쪽 그림과 같은 타일이 깔린 신전 바닥에 엎드려 눈물을 흘리며 한동안 몸을 떨어야 했습니다.

이 단원에서 알려 주세요.

"피타고라스 정리를 설명하는 방법에 대하여 알아보자."

이야기로 들려주는 피타고라스 정리 187

이야기로 들려주는 피타고라스 정리

"이야기 배경"

피타고라스는 오랫동안 여러 나라를 유학하면서 수학과 철학적인 지식을 쌓은 후, 고향인 사모스 섬으로 돌아와 학생들을 가르치려 하였으나 정적의 박해로 고향을 떠나게 되었다. 그의 나이 40세가 되었을 때 이탈리아 남부인 크로톤에 정착하게 되었고, 그곳에 학교를 열어 피타고라스 학파를 만들었다.

피타고라스 학파는 약 150년에 걸쳐 명맥이 이어져 내려왔고, 훌륭한 수학자들을 많이 배출하였다. 유명한 수학자로는 히포크라테스, 테오도로스, 필로라오스, 아르키다스, 히파소스 등이 있다.

피타고라스 학파는 '피타고라스 학도' 라는 정식 학생과 청강생으로 나누어져 있었는데, 그 당시 공식석상에 나오지 못했던 여자들도 그의 강의를 들을 수 있었다고 한다.

피타고라스는

'그리스인 중에서 가장 현명하고 용감한 자'

라는 존경을 받으며, 별 모양의 황금관을 쓰고 강단에 섰다고 전해지고 있다.

피타고라스 학교에서의 교육은 말로만 행해지고 새로운 내용이나 지식은 기록하지 않았으며, 그 지식을 외부에 알리지도 못하게 하였다고 한다. 또 새로운 업적이나 발견은 모두 피타고라스의 공로가 되었다고 한다. 피타고라스 학교는 공제 조합과 같아서 이 학교에서 배운 사람들은 평생 서로 돕고 단결하며 살았다고 하며, 엄격한 규율에 따라 검소하게 생활하면서 신비한 의식을 행하기도 하였다고 전해진다.

교과서 본문의 이야기는 피타고라스가 '피타고라스 정리'를 발견하는 모습을 상상하여 쓴 글이다.

실제로 피타고라스는 신전의 타일 바닥에서 힌트를 얻어 '피타고라스의 정리' 를 발견하였고, 그 기쁨이 대단히 컸다고 전해지고 있다.

1 피타고라스 정리

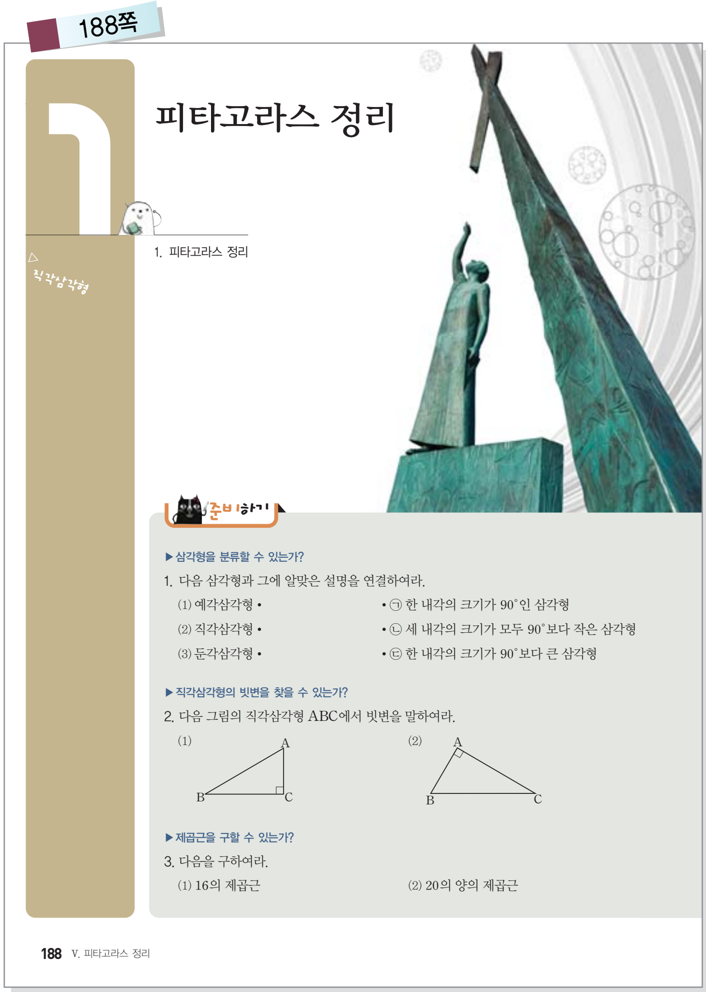
중단원 지도 목표

1. 피타고라스 정리를 이해하고, 이를 설명할 수 있게 한다.
2. 피타고라스 정리의 역을 알게 한다.

중단원의 구성

소단원 명	지도 내용
1. 피타고라스 정리	• 피타고라스 정리의 뜻 • 피타고라스 정리의 정당화 • 직각삼각형에서 변의 길이 구하기 • 삼각형의 세 변의 길이와 직각삼각형의 관계
중단원 마무리하기	• 스스로 정리하기 • 기초 다지기, 기본 익히기, 실력 기르기
창의 · 인성 키우기	• 개념 바루기 • 문제 만들기 • 생각 키우기
컴퓨터로 하는 수학	• 삼각형의 각의 크기와 변의 길이 사이의 관계

188쪽



1 피타고라스 정리

1. 피타고라스 정리

직각삼각형

준비하기

▶삼각형을 분류할 수 있는가?

1. 다음 삼각형과 그에 알맞은 설명을 연결하여라.

(1) 예각삼각형 • • ㉠ 한 내각의 크기가 90°인 삼각형

(2) 직각삼각형 • • ㉡ 세 내각의 크기가 모두 90°보다 작은 삼각형

(3) 둔각삼각형 • • ㉢ 한 내각의 크기가 90°보다 큰 삼각형

▶직각삼각형의 빗변을 찾을 수 있는가?

2. 다음 그림의 직각삼각형 ABC에서 빗변을 말하여라.

(1) A B C (2) A B C

▶제곱근을 구할 수 있는가?

3. 다음을 구하여라.

(1) 16의 제곱근 (2) 20의 양의 제곱근

188 V. 피타고라스 정리

준비하기

1. ▶삼각형을 분류할 수 있는가?

이 단원에서는 직각삼각형의 세 변의 길이 사이의 관계를 학습하므로 직각삼각형에 대하여 알고 있어야 한다.

풀이 (1) 예각삼각형 – ㉡ 세 각의 크기가 모두 90°보다 작은 삼각형

(2) 직각삼각형 – ㉠ 한 내각의 크기가 90°인 삼각형

(3) 둔각삼각형 – ㉢ 한 내각의 크기가 90°보다 큰 삼각형

답 (1) – ㉡ (2) – ㉠ (3) – ㉢

2. ▶직각삼각형의 빗변을 찾을 수 있는가?

이 단원에서는 직각삼각형의 변 사이의 관계를 학습하므로 직각삼각형에서 빗변을 찾을 수 있어야 한다.

풀이 빗변은 직각인 각의 대변이므로

(1) $\angle C=90^\circ$이므로 빗변은 $\overline{AB}$이다.

(2) $\angle A=90^\circ$이므로 빗변은 $\overline{BC}$이다.

답 (1) $\overline{AB}$ (2) $\overline{BC}$

3. ▶제곱근을 구할 수 있는가?

이 단원에서는 직각삼각형의 두 변을 알 때 나머지 한 변을 구해야 하므로 제곱근을 알고 있어야 한다.

풀이 (1) 16의 제곱근은 ±4이다.

(2) 20의 양의 제곱근은 $2\sqrt{5}$이다.

답 (1) ±4 (2) $2\sqrt{5}$

보충 문제

다음 중 주어진 길이의 세 선분으로 삼각형을 만들 수 있는 것을 모두 찾아라.

(1) 2cm, 3cm, 5cm

(2) 3cm, 4cm, 6cm

(3) 6cm, 9cm, 14cm

답 (2), (3)

01 피타고라스 정리

지도 목표

1. 피타고라스 정리를 이해하고, 이를 설명할 수 있게 한다.
2. 직각삼각형에서 두 변의 길이를 알 때 나머지 한 변의 길이 구할 수 있게 한다.
3. 피타고라스 정리의 역을 알게 한다.

지도상의 유의점

1. 피타고라스 정리를 설명한 방법을 이해할 수 있게 한다.
2. 피타고라스 정리의 역은 직관적으로 이해하게 한다.
3. 피타고라스 정리를 설명할 수 있는 방법은 수없이 많이 있지만 그 중 간단한 몇 가지만을 소개하고, 활용에 중점을 두도록 지도한다.
4. 피타고라스 정리를 이용하여 직각삼각형의 한 변의 길이를 구할 때, 어떤 수의 제곱근은 2개이지만 길이는 양수이므로 양의 값만을 택할 수 있도록 지도한다.

1/3차시 차시별 학습 지도 방법 [교과 교실]

생각 열기	모눈종이의 한 눈금의 크기를 이용하여 정사각형의 넓이를 구하고, 비교해 볼 수 있도록 한다.
본문	직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이의 제곱의 합은 빗변의 제곱과 같음을 이해할 수 있도록 본문의 사각형을 이용하여 설명한다. 수업 상황 및 학습자 수준에 부합하는 다양하고 적절한 보충 과제를 활용할 수 있다.
문제 1	스스로 문제를 풀 수 있도록 하며, 친구들과 결과를 비교해 볼 수 있도록 한다.

직각삼각형과 세 변의 길이 사이의 관계는 어떤 관계가 있을까?

생각 열기 모눈종이 위의 직각삼각형의 세 변의 길이를 각각 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 비교하는 생각 열기이다.

(1) 한 눈금의 크기가 1이고, 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이는 $\sqrt{2}$이므로

(가)의 넓이)$=\overline{AB}\times\overline{AB}=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$

(나)의 넓이)$=\overline{BC}\times\overline{BC}=1\times1=1$

(다)의 넓이)$=\overline{AC}\times\overline{AC}=1\times1=1$

이다.

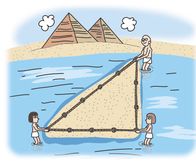
(2) (가)의 넓이는 (나)와 (다)의 넓이를 합한 것이다.

189쪽

01 피타고라스 정리

학습 목표 피타고라스 정리를 이해하고 설명할 수 있다.
배울 용어 피타고라스 정리

피타고라스 정리는 고대 이집트와 바빌로니아에서 뿐만 아니라, 인도와 중국에서도 널리 알려져 있었다. 고대 사람들은 거리를 재거나 건물을 짓고 돌을 쌓을 때 직각을 이용하였다. 그러나 오늘날과 같은 측정 기구가 없었으므로 일정한 간격으로 12개의 매듭을 지은 끈을 이용하여 매듭의 간격이 3 : 4 : 5가 되는 직각삼각형을 만든 후, 그 직각을 이용하였다고 한다.

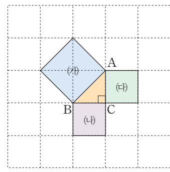


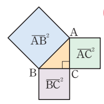
1/3차시 직각삼각형의 세 변의 길이 사이에는 어떤 관계가 있을까?

생각 열기 오른쪽 그림은 한 눈금의 크기가 1인 모눈종이 위에 직각삼각형 ABC의 세 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형 (가), (나), (다)를 그린 것이다.

(1) 정사각형 (가), (나), (다)의 넓이를 각각 구하여 보자.

(2) (1)에서 구한 (가)의 넓이와 (나), (다)의 넓이를 비교하여 보자.





생각 열기에서 정사각형 (가)의 넓이는 2이고, 정사각형 (나), (다)의 넓이는 각각 1이다. 이때 정사각형 (가)의 넓이는 정사각형 (나), (다)의 넓이의 합과 같다.

❶ 즉, 세 정사각형 (가), (나), (다)의 넓이는 각각 $\overline{AB}^2$, $\overline{BC}^2$, $\overline{AC}^2$이므로

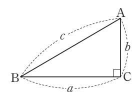
❷ $$\overline{BC}^2+\overline{AC}^2=\overline{AB}^2$$

으로 나타낼 수 있다.

이제 오른쪽 그림과 같이 $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$라 할 때,

$$a^2+b^2=c^2$$

이 성립함을 알아보자.



1. 피타고라스 정리 189

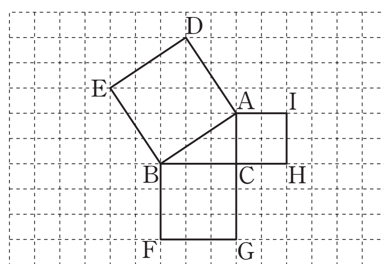
❶ △ABC에서 세 정사각형 (가), (나), (다)의 넓이는 각각

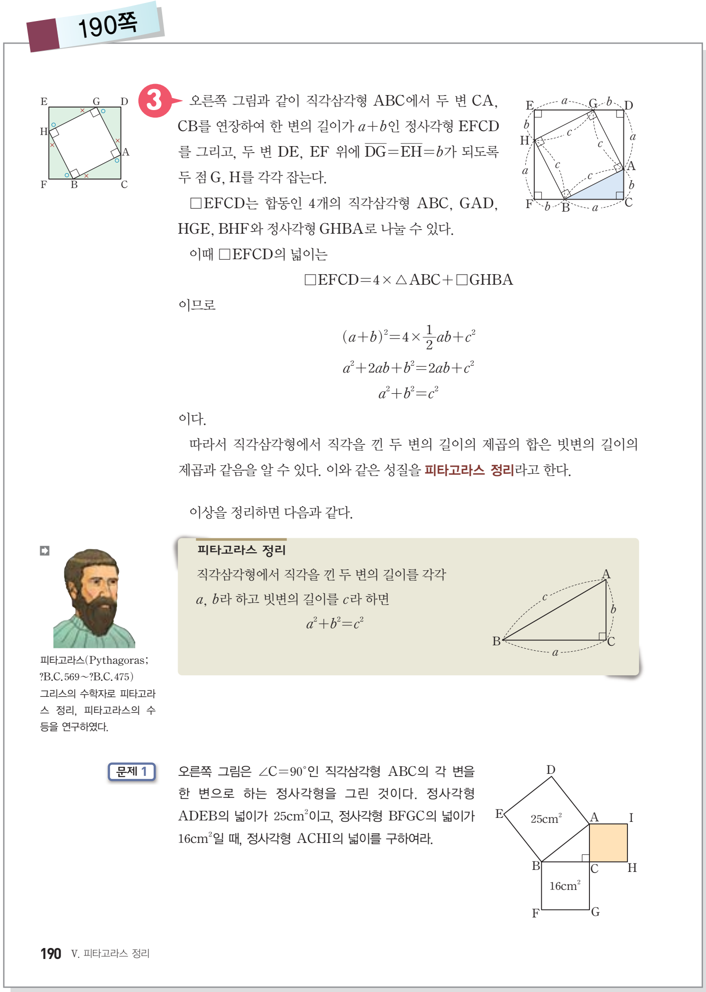
$$\overline{AB}^2,\ \overline{BC}^2,\ \overline{AC}^2$$

이므로 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$임을 알 수 있다.

이와 같이 피타고라스 정리를 설명할 때에는 직각삼각형의 각 변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이 사이의 관계를 이용한다. 왜냐하면 정사각형의 넓이의 관계가 다른 도형에 비하여 피타고라스 정리를 설명하는 것이 쉽기 때문이다. 하지만 피타고라스 정리는 넓이를 이용하여 설명하더라도 결국은 직각삼각형의 세 변의 길이 사이의 관계임을 유의하게 한다.

❷ 생각 열기의 그림 대신 다음과 같이 한 눈금의 크기가 1인 그림을 이용하여도 같은 결과를 얻는다.





190쪽

3 오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 ABC에서 두 변 CA, CB를 연장하여 한 변의 길이가 $a+b$인 정사각형 EFCD를 그리고, 두 변 DE, EF 위에 $\overline{DG}=\overline{EH}=b$가 되도록 두 점 G, H를 각각 잡는다.

□EFCD는 합동인 4개의 직각삼각형 ABC, GAD, HGE, BHF와 정사각형 GHBA로 나눌 수 있다.

이때 □EFCD의 넓이는

$$\square EFCD=4\times\triangle ABC+\square GHBA$$

이므로

$$(a+b)^2=4\times\frac{1}{2}ab+c^2$$
$$a^2+2ab+b^2=2ab+c^2$$
$$a^2+b^2=c^2$$

이다.

따라서 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이의 제곱의 합은 빗변의 길이의 제곱과 같음을 알 수 있다. 이와 같은 성질을 **피타고라스 정리**라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

피타고라스 정리

직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a, b라 하고 빗변의 길이를 c라 하면

$$a^2+b^2=c^2$$

피타고라스(Pythagoras; ?B.C.569~?B.C.475) 그리스의 수학자로 피타고라스 정리, 피타고라스의 수 등을 연구하였다.

문제 1 오른쪽 그림은 ∠C=90°인 직각삼각형 ABC의 각 변을 한 변으로 하는 정사각형을 그린 것이다. 정사각형 ADEB의 넓이가 25cm²이고, 정사각형 BFGC의 넓이가 16cm²일 때, 정사각형 ACHI의 넓이를 구하여라.

190 V. 피타고라스 정리

□ACHI=4, □BFGC=9, □ADEB=13이므로

□ACHI+□BFGC=□ADEB

이다.

따라서 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$이다.

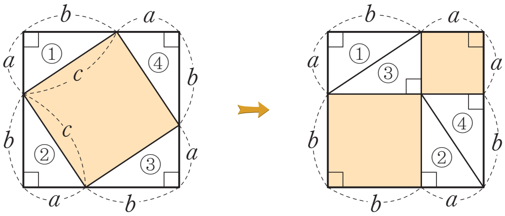
연구 자료

피타고라스 정리 $a^2+b^2=c^2$를 만족하는 세 자연수 쌍 (a, b, c)를 피타고라스 수(phythagoras number)라 한다.

이때 a, b, c가 서로 서로소인 피타고라스 수를 원시 피타고라스 수라고 하는데, c가 100보다 작은 원시 피타고라스 수는 다음과 같은 16쌍이 있다.

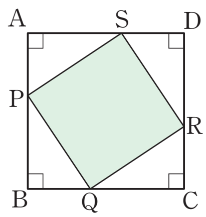
(3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (8, 15, 17),
(9, 40, 41), (11, 60, 61), (12, 35, 37), (13, 84, 85)
(16, 63, 65), (20, 21, 29), (28, 45, 53), (33, 56, 65)
(36, 77, 85), (39, 80, 89), (48, 55, 73), (65, 72, 97)

3 본문의 그림에서 $a^2+b^2=c^2$이 성립하는 것을 보이면 다음 그림과 같다.



삼각형 ①, ③과 삼각형 ②, ④를 옮겨 붙이면 위의 오른쪽 그림이 되어, 색칠한 부분의 넓이는 같다.
따라서 $a^2+b^2=c^2$이 성립한다.

참고 □ABCD의 넓이에서 네 개의 직각삼각형 APS, BQP, CRQ, DSR의 넓이를 빼면 □PQRS의 넓이를 구할 수 있다.



문제 1 직각삼각형에서 두 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 알 때, 나머지 정사각형의 넓이를 구하기

풀이 □BFGC=16cm², □ADEB=25cm²이므로

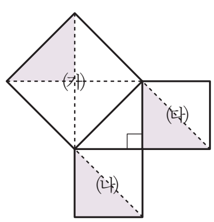
□ACHI=□ADEB−□BFGC
=25−16=9(cm²)

이다.

수준별 교수·학습 방법

피타고라스 정리를 이해하고, 이를 설명할 수 있다.

하 생각 열기의 모눈종이에서 사각형 속에 나타나는 같은 크기의 삼각형의 개수를 세어서 사각형의 넓이를 비교해 볼 수 있게 한다. 예를 들어 사각형 (가)에는 삼각형이 4개 있고, 사각형 (나)는 삼각형 2개, 사각형 (다)는 삼각형 2개가 있다.
따라서 (가)=(나)+(다)이다.



상 피타고라스 정리를 설명할 수 있는 방법을 인터넷을 통하여 찾아보게 한다. 또한 그 방법을 설명하고, 친구들과 토의할 수 있게 한다.

2/3차시 차시별 학습 지도 방법 [교과 교실]

생각 열기	실생활 소재를 통해 동기 유발이 될 수 있도록 지도한다.
본문, 함께 풀기 1	직각삼각형에서 두 변의 길이를 알면 피타고라스 정리를 이용하여 나머지 한 변을 구할 수 있음을 알게 하고, **함께 풀기 1**을 통하여 푸는 방법을 설명한다.
문제 2, 3	학생들 스스로 풀어 보게 함으로써 피타고라스 정리를 이용한 계산에 익숙해지도록 지도한다.
문제 4	학생들이 스스로 문제를 해결할 수 있도록 유도한다. 또한 피타고라스 정리가 실생활에서 유용하게 사용되고 있음을 인식하게 함으로써 수학에 대한 긍정적인 태도가 형성될 수 있게 한다.

직각삼각형에서 변의 길이는 어떻게 구할까?

생각 열기 실생활에서 소재를 택하여 학생들에게 피타고라스 정리에 대한 활용과 쓰임을 알게 하려는 것이다. 즉, 두 변의 길이를 알 때, 피타고라스 정리를 이용하여 푸는 생각 열기이다.

유의점 먼저 빗변이 어떤 변인지 생각하고, 피타고라스 정리를 이용한 식을 세울 수 있도록 지도한다.

직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}$의 직선거리를 x로 놓고, 피타고라스 정리를 이용하여 푼다.

4 직각삼각형의 한 변의 길이를 구할 때, 구하는 길이를 x로 놓으면

$x^2=2^2+2^2$, $x^2=8$

$x=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

여기에서 x의 제곱근은 양수와 음수로 2개이지만 구하는 길이는 항상 양수임에 주의하도록 지도한다.

또 세 변의 길이가 유리수가 아닌 무리수가 나올 수 있음을 문제 풀이를 통하여 자연스럽게 이해하도록 지도한다.

5 직각삼각형의 한 변의 길이를 구할 때, 구하는 방법을 공식화하지 말고 피타고라스 정리를 이용하도록 유도한다.

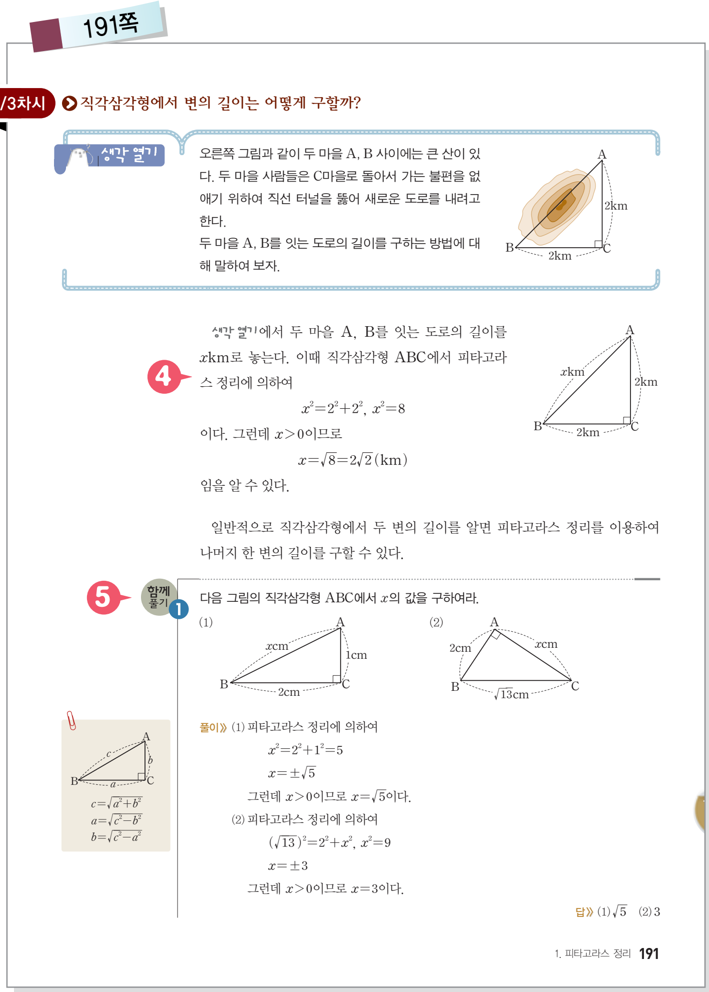
문제 2 직각삼각형의 한 변의 길이 구하기

풀이 피타고라스 정리에 의하여

(1) $4^2+3^2=x^2$이므로 $x^2=4^2+3^2=25$

$x=\pm 5$

그런데 $x>0$이므로 $x=5$이다.


191쪽

2/3차시 직각삼각형에서 변의 길이는 어떻게 구할까?

생각 열기 오른쪽 그림과 같이 두 마을 A, B 사이에는 큰 산이 있다. 두 마을 사람들은 C마을로 돌아서 가는 불편을 없애기 위하여 직선 터널을 뚫어 새로운 도로를 내려고 한다.
두 마을 A, B를 잇는 도로의 길이를 구하는 방법에 대해 말하여 보자.

4 생각 열기에서 두 마을 A, B를 잇는 도로의 길이를 $x$km로 놓는다. 이때 직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$$x^2=2^2+2^2,\ x^2=8$$

이다. 그런데 $x>0$이므로

$$x=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\,(\text{km})$$

임을 알 수 있다.

일반적으로 직각삼각형에서 두 변의 길이를 알면 피타고라스 정리를 이용하여 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있다.

5 함께 풀기 1 다음 그림의 직각삼각형 ABC에서 x의 값을 구하여라.

(1) (2)

$c=\sqrt{a^2+b^2}$
$a=\sqrt{c^2-b^2}$
$b=\sqrt{c^2-a^2}$

풀이≫ (1) 피타고라스 정리에 의하여

$x^2=2^2+1^2=5$

$x=\pm\sqrt{5}$

그런데 $x>0$이므로 $x=\sqrt{5}$이다.

(2) 피타고라스 정리에 의하여

$(\sqrt{13})^2=2^2+x^2$, $x^2=9$

$x=\pm 3$

그런데 $x>0$이므로 $x=3$이다.

답≫ (1) $\sqrt{5}$ (2) 3

1. 피타고라스 정리 191

(2) $x^2+3^2=4^2$이므로 $x^2=4^2-3^2=7$

$x=\pm\sqrt{7}$

그런데 $x>0$이므로 $x=\sqrt{7}$이다.

문제 3 직각삼각형의 한 변의 길이 구하기

풀이 피타고라스 정리에 의하여

(1) $a^2+8^2=10^2$이므로 $a^2=10^2-8^2=36$이고,

$a=\pm\sqrt{36}=\pm 6$이다.

그런데 $a>0$이므로 $a=6$이다.

(2) $5^2+b^2=13^2$이므로 $b^2=13^2-5^2=144$

$b=\pm\sqrt{144}=\pm 12$

그런데 $b>0$이므로 $b=12$이다.

(3) $8^2+15^2=c^2$이므로 $c^2=8^2+15^2=289$

$c=\pm\sqrt{289}=\pm 17$

그런데 $c>0$이므로 $c=17$이다.

(4) $a^2+24^2=25^2$이므로 $a^2=25^2-24^2=49$

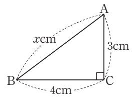
$a=\pm\sqrt{49}=\pm 7$

그런데 $a>0$이므로 $a=7$이다.

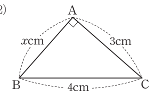
192쪽

문제 2 다음 그림의 직각삼각형 ABC에서 x의 값을 구하여라.

(1)

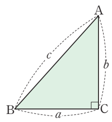


(2)



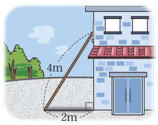
문제 3 오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 ABC에서 직각을 낀 두 변의 길이를 a, b, 빗변의 길이를 c라 할 때, 다음 빈칸에 알맞은 수를 써넣어라.

	a	b	c
(1)		8	10
(2)	5		13
(3)	8	15	
(4)		24	25



문제 해결

문제 4 오른쪽 그림과 같이 길이가 4m인 사다리를 벽면에서 2m 떨어진 지점에 놓고 벽에 기대어 놓았다. 사다리가 벽면에 닿은 지점은 지상에서 몇 m의 높이에 있는지 구하여라.

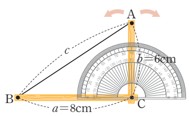


3/3차시 삼각형의 세 변의 길이 사이에 어떤 관계가 있으면 직각삼각형이 될까?

활동하기

준비물
막대, 고무줄, 압정, 각도기, 자

오른쪽 그림과 같이 길이가 6cm, 8cm인 두 막대의 한쪽 끝 C를 고정한 후, A, B를 고무줄로 연결하여 c의 길이가 다음과 같은 △ABC를 만들어 보자.



ㄱ. $c=9$cm　ㄴ. $c=10$cm　ㄷ. $c=11$cm

(1) ㄱ~ㄷ에서 a^2+b^2의 값과 c^2의 값을 각각 비교하여 보자.

(2) ㄱ~ㄷ에서 어떤 경우에 ∠C의 크기가 직각인지 각도기로 재어 보자.

192 V. 피타고라스 정리

3/3차시 차시별 학습 지도 방법 [교과 교실]

활동하기	삼각형의 빗변의 길이를 줄이고 늘리는 조작 활동을 통하여 학습에 흥미를 가지도록 하며, 그때의 빗변의 길이와 ∠C의 값을 비교해 볼 수 있도록 지도한다.
본문	삼각형의 세 변의 길이와 직각삼각형의 관계를 이해할 수 있도록 설명한다.
문제 5, 6, 7	빗변을 먼저 찾도록 간단히 설명하고, 스스로 풀어볼 수 있도록 한 후 학생들의 풀이 방법을 점검하여 오개념이 발생하지 않도록 지도한다.
함께 풀기 2, 문제 8	삼각형이 되기 위한 조건에 유의하여 문제를 풀어 볼 수 있도록 한다.
즐거운 활동하기	부록에 있는 학습 준비물을 활용하여 학생들이 직접 활동을 할 수 있도록 지도한다.

문제 4 피타고라스 정리 응용하기

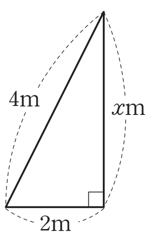
풀이 지면에서 사다리가 벽면에 닿은 지점까지의 높이를 xm로 놓으면 피타고라스 정리에 의하여 $2^2+x^2=4^2$이므로

$x^2=4^2-2^2=12$

$x=\pm\sqrt{12}=\pm2\sqrt{3}$

그런데 $x>0$이므로 $x=2\sqrt{3}$이다.

따라서 구하는 높이는 $2\sqrt{3}$m이다.



수준별 교수·학습 방법

피타고라스 정리를 이용하여 직각삼각형에서 한 변의 길이를 구할 수 있다.

하 피타고라스 정리 $a^2+b^2=c^2$에서 c가 의미하는 것을 정확히 알고 있는지와 직각삼각형에서 빗변을 찾을 수 있는지를 확인한다. 또한 세 변의 길이가 간단한 직각삼각형에서 피타고라스 정리를 이용하여 변의 길이를 구하게 한다.

상 주변에서 직각삼각형 모양을 찾아보고, 그것의 한 변의 길이를 찾는 문제를 만든 후 풀게 한다.

삼각형의 세 변의 길이 사이에 어떤 관계가 있으면 직각삼각형이 될까?

활동하기 길이가 6cm, 8cm인 두 막대기와 빗변을 고무줄로 이은 직각삼각형에서 막대기를 움직이면서 c의 길이를 9cm, 10cm, 11cm가 되게 하여 본다. 이때 각각의 경우에 ∠C가 직각인지 각을 재어 보는 활동하기이다.

지도상의 유의점 각도기와 막대를 잘 맞추어 각을 재고, 길이를 확인하도록 지도한다.

(1) $a^2+b^2=8^2+6^2=100$이다.

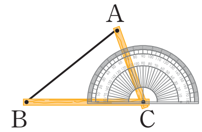
ㄱ. $c=9$cm일 때, $c^2=81$이므로 $a^2+b^2\neq c^2$이다.

ㄴ. $c=10$cm일 때, $c^2=100$이므로 $a^2+b^2=c^2$이다.

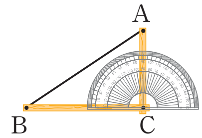
ㄷ. $c=11$cm일 때, $c^2=121$이므로 $a^2+b^2\neq c^2$이다.

(2) (1)에서 만들어지는 삼각형은 다음의 세 가지이다.

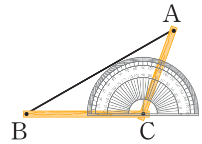
ㄱ.



ㄴ.



ㄷ.



이때 ∠C의 크기를 재어 보면 ㄴ인 경우에 ∠C=90°임을 알 수 있다.

6 피타고라스 정리의 역을 증명하지는 않지만 구체적인 예를 통하여 설명하고, 직관에 의하여 이해할 수 있도록 지도한다.

7 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형에서 길이가 가장 긴 변의 길이가 c이고, $a^2+b^2=c^2$이면 피타고라스 정리의 역에 의하여 이 삼각형은 직각삼각형임을 알도록 지도하고, 반면에 $a^2+b^2\neq c^2$이면 직각삼각형이 아님을 확인시킨다.

문제 5 **삼각형의 세 변의 길이를 알 때, 직각삼각형인지 아닌지 판단하기**

풀이 빗변이 $\overline{AB}$이므로 $\overline{AB}^2$과 $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$을 비교하면
$15^2=12^2+9^2$이다.
따라서 △ABC는 직각삼각형이다.

8 세 변의 길이가 주어진 삼각형에서 직각삼각형을 찾으려면 먼저 가장 긴 변의 길이를 찾을 수 있도록 지도한다. 이때 삼각형의 변의 길이가 무리수로 주어져 있으면 선수 학습인 제곱근의 성질을 알고 있는지 확인한다.

오개념 진단 · 지도 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형에서 길이가 가장 긴 변의 길이가 c일 때, a^2+b^2과 c^2을 비교하도록 한다. a^2+c^2과 b^2을 비교하거나 b^2+c^2과 a^2를 비교하는 오류를 범하지 않도록 지도한다.

문제 6 **세 변의 길이가 주어진 삼각형 중 직각삼각형 찾기**

풀이 (1) 삼각형의 가장 긴 변의 길이가 4cm이므로
2^2+3^2과 4^2을 비교하면
$2^2+3^2\neq 4^2$
따라서 이 삼각형은 직각삼각형이 아니다.

(2) 삼각형의 가장 긴 변의 길이가 $\sqrt{3}$cm이므로
$1^2+(\sqrt{2})^2$과 $(\sqrt{3})^2$을 비교하면
$1^2+(\sqrt{2})^2=(\sqrt{3})^2$
따라서 이 삼각형은 직각삼각형이다.

(3) 삼각형의 가장 긴 변의 길이가 $3\sqrt{2}$cm이므로
$(\sqrt{3})^2+4^2$과 $(3\sqrt{2})^2$을 비교하면
$(\sqrt{3})^2+4^2\neq(3\sqrt{2})^2$
따라서 이 삼각형은 직각삼각형이 아니다.

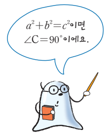
193쪽

6 활동하기에서 △ABC의 세 변의 길이가 각각 6cm, 8cm, 10cm일 때,

$$6^2+8^2=10^2$$

인 관계가 성립한다. 이때 ∠C의 크기를 각도기로 재어 보면 ∠C=90°임을 알 수 있다. 따라서 △ABC는 빗변의 길이가 10cm인 직각삼각형이다.

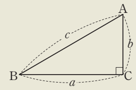
일반적으로 세 변의 길이가 각각 a, b, c인 삼각형에서 $a^2+b^2=c^2$인 관계가 성립하면 이 삼각형은 직각삼각형임이 알려져 있다.
이상을 정리하면 다음과 같다.



삼각형의 세 변의 길이와 직각삼각형의 관계
세 변의 길이가 각각 a, b, c인 삼각형에서

$$a^2+b^2=c^2$$

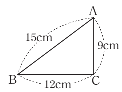
이 성립하면 이 삼각형은 c를 빗변의 길이로 하는 직각삼각형이다.



7 보기 (1) 세 변의 길이가 각각 1cm, $\sqrt{3}$cm, 2cm인 삼각형은 $1^2+(\sqrt{3})^2=2^2$이므로 빗변의 길이가 2cm인 직각삼각형이다.
(2) 세 변의 길이가 각각 1cm, 2cm, $\sqrt{6}$cm인 삼각형은 $1^2+2^2\neq(\sqrt{6})^2$이므로 직각삼각형이 아니다.

의사소통

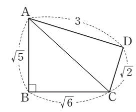
8 **문제 5** 오른쪽 그림의 △ABC가 어떤 삼각형인지 말하고, 그 이유를 설명하여라.



문제 6 세 변의 길이가 각각 다음과 같은 삼각형에서 직각삼각형인 것을 모두 찾아라.
(1) 2cm, 3cm, 4cm (2) 1cm, $\sqrt{2}$cm, $\sqrt{3}$cm
(3) $\sqrt{3}$cm, 4cm, $3\sqrt{2}$cm (4) 4cm, $2\sqrt{5}$cm, 6cm

추론

문제 7 오른쪽 그림과 같은 □ABCD에서 ∠D의 크기를 구하여라.



1. 피타고라스 정리 193

(4) 삼각형의 가장 긴 변의 길이가 6cm이므로
$4^2+(2\sqrt{5})^2$과 6^2을 비교하면
$4^2+(2\sqrt{5})^2=6^2$
따라서 이 삼각형은 직각삼각형이다.
그러므로 직각삼각형인 것은 (2), (4)이다.

문제 7 **삼각형의 한 변의 길이를 구하고, 각의 크기 구하기**

풀이 △ABC에서
$\overline{AC}^2=(\sqrt{5})^2+(\sqrt{6})^2$
이므로
$\overline{AC}=\sqrt{11}$
한편 △ACD에서 $\overline{AC}^2$과 $\overline{CD}^2+\overline{DA}^2$을 비교하면
$(\sqrt{11})^2=(\sqrt{2})^2+3^2$
이므로 △ACD는 ∠D=90°인 직각삼각형이다.

194쪽

9 함께 풀기 2 세 변의 길이가 각각 $x-1$, x, $x+1$인 삼각형이 직각삼각형이 되기 위한 x의 값을 구하여라. (단, $x>2$)

풀이» $(x-1)^2+x^2=(x+1)^2$이 성립하면 직각삼각형이 된다.
따라서 식을 정리하면
$x^2-2x+1+x^2=x^2+2x+1$
$x^2-4x=0$
$x(x-4)=0$
그런데 $x>2$이므로 $x=4$이다. 답» 4

문제 8 세 변의 길이가 각각 x, $x+2$, $x+4$인 삼각형이 직각삼각형이 되기 위한 x의 값을 구하여라. (단, $x>2$)

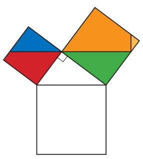
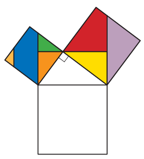
즐거운 활동하기 **색종이를 이용하여 피타고라스 정리 알아보기**

준비물
색종이, 가위

다음 [예시]는 수학 교구를 이용하여 피타고라스 정리가 성립함을 보여 준 것이다.


학습 준비물 11쪽

[예시]와 같은 방법으로 (1), (2)의 색종이를 오려 위의 두 정사각형의 조각이 아래의 큰 정사각형을 완전히 덮을 수 있는지 각각 확인하여 보자.

(1)

(2)


194 V. 피타고라스 정리

9 삼각형의 세 변의 길이를 $x-1$, x, $x+1$의 미지수로 놓고 식을 세워 이 삼각형이 직각삼각형이 되는지 확인하는 문제이다.
이때 세 변의 길이는 양수이어야 하고, 짧은 두 변의 길이의 합이 긴 변의 길이보다 길어야 함을 유의하도록 한다.

문제 8 **세 변의 길이가 미지수로 주어진 직각삼각형에서 세 변의 길이 구하기**

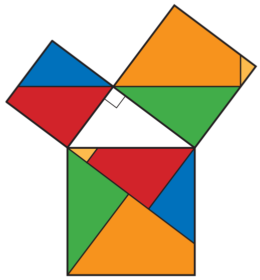
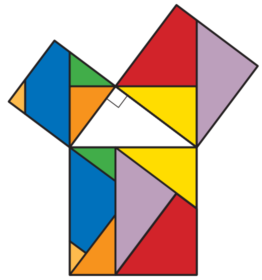
풀이 $x^2+(x+2)^2=(x+4)^2$이 성립하면 직각삼각형이 된다.
따라서 식을 정리하면
$x^2+x^2+4x+4=x^2+8x+16$
$x^2-4x-12=0$
$(x-6)(x+2)=0$
그런데 $x>2$이므로 $x=6$이다.

즐거운 활동하기
색종이를 이용하여 피타고라스 정리 알아보기

지도상의 유의점 피타고라스 정리를 색종이를 오려서 확인해 보는 활동이다. 모둠별로 정해진 시간에 해결할 수 있도록 지도한다.

준비물 색종이, 가위, 학습 준비물

풀이 문제의 결과는 다음과 같다.

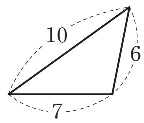
(1)

(2)


창의 · 인성 학생 스스로 문제를 해결하게 함으로써 자기 주도적 학습 능력을 향상시킨다. 또 다른 방법을 찾아 보게 하여 새롭고 가치 있는 문제를 통하여 수학적 개념을 깨닫고, 즐거움을 찾을 수 있도록 한다.

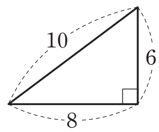
수준별 교수·학습 방법

피타고라스 정리의 역을 직관적으로 이해할 수 있다.

하
- 활동하기의 조작 활동을 충분히 하여 피타고라스 정리의 역을 직관적으로 받아들일 수 있도록 지도한다. 또 간단한 삼각형을 제시하여 삼각형의 세 변의 길이의 사이의 관계를 알아봄으로써 피타고라스 정리의 역을 이해할 수 있게 한다.

예 (1)


$10^2\neq7^2+6^2$

(2)


$10^2=8^2+6^2$

- 삼각형의 세 변의 길이가 작은 수이거나 계산이 간단한 경우만 다루어 학생들이 피타고라스 정리의 역에 대한 내용에 집중할 수 있게 한다.
예 (3, 4, 5), (5, 12, 13), ……

상
- 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형에서 길이가 가장 긴 변이 c일 때, a^2+b^2이 클 때와 c^2이 클 때에는 어떤 삼각형이 되는지 생각해 보게 한다.
- 교과서의 문제에서 주어진 조건을 변형하여 문제를 만들어 보게 한다. 이때 자신이 만든 문제를 친구들과 바꾸어 풀고, 자신의 풀이 과정을 설명하게 함으로써 수학적 의사소통 능력을 향상시킨다.

V

확인하기

1 **평가의 주안점** 직각삼각형의 각각의 변의 길이를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 구할 수 있다.

풀이 직각삼각형 ABC에서

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$이므로 $\overline{AC}^2=6^2+8^2$

$\overline{AC}=10\text{cm}$

따라서 정사각형 CHIA의 넓이는 100cm^2이다.

2 **평가의 주안점** 직각삼각형의 두 변의 길이를 알 때, 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있다.

풀이 (1) $(\sqrt{11})^2+5^2=x^2$이므로 $x^2=36$

$x=\pm 6$

그런데 $x>0$이므로 $x=6$이다.

(2) $x^2+12^2=15^2$이므로 $x^2=15^2-12^2=81$

$x=\pm 9$

그런데 $x>0$이므로 $x=9$이다.

3 **평가의 주안점** 삼각형의 세 변의 길이를 알 때, 직각삼각형을 찾을 수 있다.

풀이 (1) 삼각형의 가장 긴 변의 길이가 4이므로

$2^2+(2\sqrt{3})^2$과 4^2을 비교하면

$2^2+(2\sqrt{3})^2=4^2$

따라서 이 삼각형은 직각삼각형이다.

(2) 삼각형의 가장 긴 변의 길이가 $3\sqrt{3}$이므로

$3^2+(3\sqrt{2})^2$과 $(3\sqrt{3})^2$을 비교하면

$3^2+(3\sqrt{2})^2=(3\sqrt{3})^2$

따라서 이 삼각형은 직각삼각형이다.

(3) 삼각형의 가장 긴 변의 길이가 7이므로

5^2+5^2과 7^2을 비교하면

$5^2+5^2\neq 7^2$

따라서 이 삼각형은 직각삼각형이 아니다.

(4) 삼각형의 가장 긴 변의 길이가 $3\sqrt{5}$이므로

$(2\sqrt{5})^2+5^2$과 $(3\sqrt{5})^2$을 비교하면

$(2\sqrt{5})^2+5^2=(3\sqrt{5})^2$

따라서 이 삼각형은 직각삼각형이다.

그러므로 직각삼각형은 (1), (2), (4)이다.

4 **평가의 주안점** 세 변의 길이가 미지수로 주어진 직각삼각형에서 세 변의 길이를 구할 수 있다.

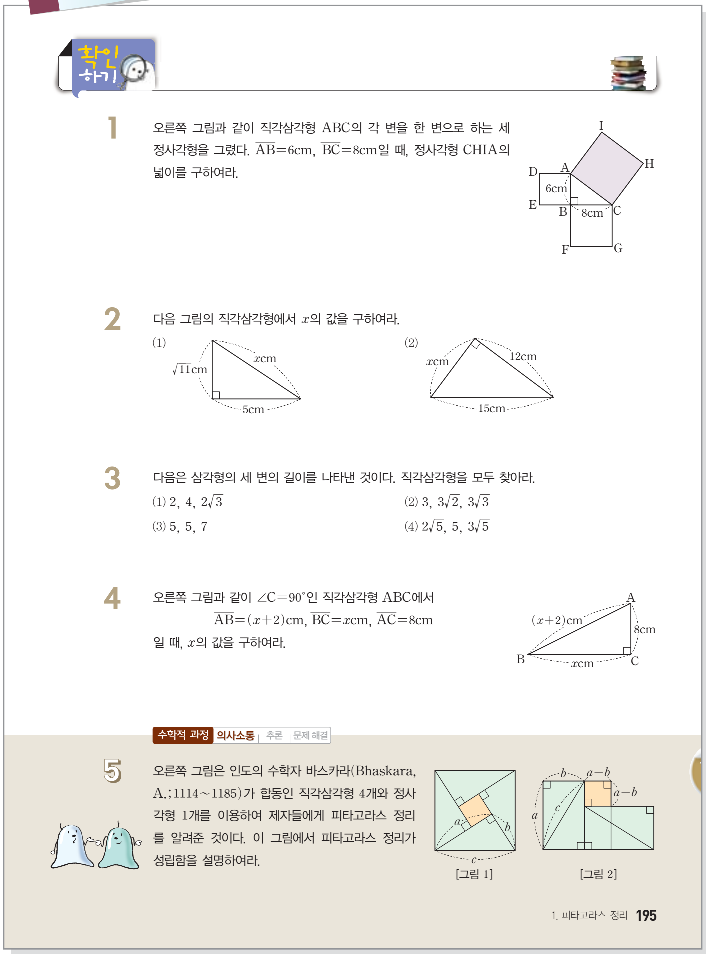
풀이 삼각형의 가장 긴 변의 길이가 $x+2$이므로

$x^2+8^2=(x+2)^2$, $x^2+64=x^2+4x+4$

$4x=60$

따라서 $x=15$이다.

195쪽


확인하기

1 오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 ABC의 각 변을 한 변으로 하는 세 정사각형을 그렸다. $\overline{AB}=6\text{cm}$, $\overline{BC}=8\text{cm}$일 때, 정사각형 CHIA의 넓이를 구하여라.

2 다음 그림의 직각삼각형에서 x의 값을 구하여라.

3 다음은 삼각형의 세 변의 길이를 나타낸 것이다. 직각삼각형을 모두 찾아라.

(1) 2, 4, $2\sqrt{3}$ (2) 3, $3\sqrt{2}$, $3\sqrt{3}$

(3) 5, 5, 7 (4) $2\sqrt{5}$, 5, $3\sqrt{5}$

4 오른쪽 그림과 같이 $\angle C=90°$인 직각삼각형 ABC에서

$\overline{AB}=(x+2)\text{cm}$, $\overline{BC}=x\text{cm}$, $\overline{AC}=8\text{cm}$

일 때, x의 값을 구하여라.

수학적 과정 의사소통 | 추론 | 문제 해결

5 오른쪽 그림은 인도의 수학자 바스카라(Bhaskara, A.;1114~1185)가 합동인 직각삼각형 4개와 정사각형 1개를 이용하여 제자들에게 피타고라스 정리를 알려준 것이다. 이 그림에서 피타고라스 정리가 성립함을 설명하여라.

[그림 1] [그림 2]

1. 피타고라스 정리 195

5 **평가의 주안점** 피타고라스 정리를 이해하고, 이를 설명할 수 있다.

풀이 [그림 1]의 넓이는 c^2이다. …… ①

[그림 2]의 넓이는 합동인 직각삼각형 4개의 넓이와 작은 정사각형의 넓이의 합과 같다.

$4\times\left(\frac{1}{2}ab\right)+(a-b)^2$ …… ②

[그림 1]을 재배치한 것이 [그림 2]이므로

①, ②에서

$4\times\left(\frac{1}{2}ab\right)+(a-b)^2=c^2$

이고, 이를 정리하면 $a^2+b^2=c^2$임을 알 수 있다.

참고 바스카라(Bhaskara, A.;1114~1185)는 인도의 수학자이면서 천문학자이다. 바스카라는 양수의 제곱근은 양수와 음수 2개가 있으며, 음수의 제곱근은 없음을 설명하였다.

바스카라의 피타고라스 정리에 대한 증명은 대수적인 증명이라는 것에 의미가 있다.

중단원 마무리하기

스스로 정리하기

1. (1) 피타고라스 정리 (2) 직각삼각형

기초 다지기

1 **평가의 주안점** 직각삼각형의 두 변의 길이를 알 때, 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있다.

풀이 $\overline{AB}=x$cm라 하면 $6^2+8^2=x^2$이므로

$x^2=100$, $x=\pm10$

그런데 $x>0$이므로 $x=10$이다.

따라서 $\overline{AB}=10$cm이다.

2 **평가의 주안점** 직각삼각형의 두 변의 길이를 알 때, 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있다.

풀이 (1) $3^2+x^2=6^2$이므로 $x^2=6^2-3^2=27$

$x=\pm3\sqrt{3}$

그런데 $x>0$이므로 $x=3\sqrt{3}$이다.

(2) $x^2+10^2=11^2$이므로 $x^2=11^2-10^2=21$

$x=\pm\sqrt{21}$

그런데 $x>0$이므로 $x=\sqrt{21}$이다.

3 **평가의 주안점** 세 변의 길이가 주어진 삼각형에서 직각삼각형을 찾을 수 있다.

풀이 ㄱ. 삼각형의 가장 긴 변의 길이가 $2\sqrt{3}$cm이므로

2^2+3^2과 $(2\sqrt{3})^2$을 비교하면

$2^2+3^2\neq(2\sqrt{3})^2$

따라서 이 삼각형은 직각삼각형이 아니다.

ㄴ. 삼각형의 가장 긴 변의 길이가 $2\sqrt{3}$cm이므로

$(\sqrt{3})^2+3^2$과 $(2\sqrt{3})^2$을 비교하면

$(\sqrt{3})^2+3^2=(2\sqrt{3})^2$

따라서 이 삼각형은 직각삼각형이다.

ㄷ. 삼각형의 가장 긴 변의 길이가 $6\sqrt{2}$cm이므로

6^2+6^2과 $(6\sqrt{2})^2$을 비교하면

$6^2+6^2=(6\sqrt{2})^2$

따라서 이 삼각형은 직각삼각형이다.

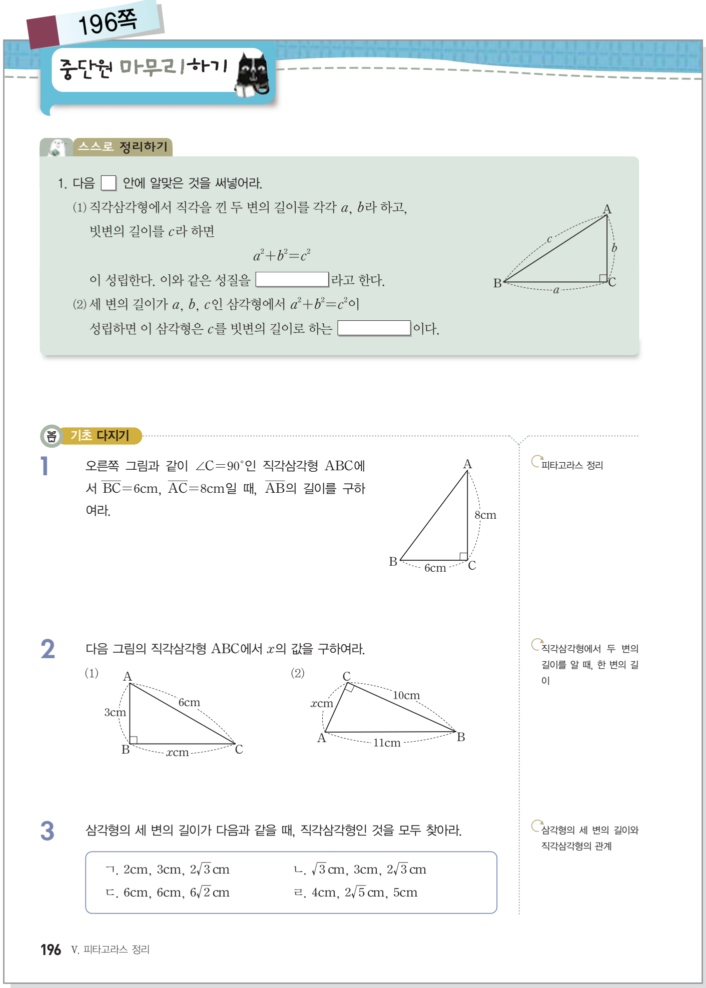
ㄹ. 삼각형의 가장 긴 변의 길이가 5cm이므로

$4^2+(2\sqrt{5})^2$과 5^2을 비교하면

$4^2+(2\sqrt{5})^2\neq5^2$

따라서 이 삼각형은 직각삼각형이 아니다.

그러므로 직각삼각형인 것은 ㄴ, ㄷ이다.


196쪽

중단원 마무리하기

스스로 정리하기

1. 다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

(1) 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a, b라 하고, 빗변의 길이를 c라 하면

$$a^2+b^2=c^2$$

이 성립한다. 이와 같은 성질을 □라고 한다.

(2) 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형에서 $a^2+b^2=c^2$이 성립하면 이 삼각형은 c를 빗변의 길이로 하는 □이다.

기초 다지기

1 오른쪽 그림과 같이 $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=6$cm, $\overline{AC}=8$cm일 때, $\overline{AB}$의 길이를 구하여라.

피타고라스 정리

2 다음 그림의 직각삼각형 ABC에서 x의 값을 구하여라.

(1) (2)

직각삼각형에서 두 변의 길이를 알 때, 한 변의 길이

3 삼각형의 세 변의 길이가 다음과 같을 때, 직각삼각형인 것을 모두 찾아라.

ㄱ. 2cm, 3cm, $2\sqrt{3}$cm ㄴ. $\sqrt{3}$cm, 3cm, $2\sqrt{3}$cm

ㄷ. 6cm, 6cm, $6\sqrt{2}$cm ㄹ. 4cm, $2\sqrt{5}$cm, 5cm

삼각형의 세 변의 길이와 직각삼각형의 관계

196 V. 피타고라스 정리

기본 익히기

4 **평가의 주안점** 직각삼각형의 두 변의 길이를 알 때, 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있다.

풀이 지혜가 이동한 거리를 xm로 놓으면

$x^2=200^2+150^2$

$x^2=62500$

$x=\pm250$

그런데 $x>0$이므로 $x=250$이다.

따라서 지혜는 250m를 이동했고, 슬기는 350m를 이동했으므로 슬기는 지혜보다 100m 더 이동하였다.

5 **평가의 주안점** 직각삼각형의 두 변의 길이를 알 때, 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있다.

풀이 $\triangle$ABC에서 $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$이므로

$\overline{AC}^2=4^2+3^2$, $\overline{AC}=5$cm

$\triangle$ACD에서 $\overline{AD}^2=\overline{AC}^2+\overline{CD}^2$이므로

$\overline{AD}^2=5^2+12^2$

따라서 $\overline{AD}=13$cm이다.

6 **평가의 주안점** 직각삼각형의 한 변의 길이를 구할 수 있다. 또 삼각형의 세 변의 길이를 알 때, 직각삼각형을 찾을 수 있다.

풀이 (1) $\triangle ABD$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BD}^2+\overline{AD}^2$이므로

$\overline{AB}^2=10^2+(4\sqrt{5})^2$

$\overline{AB}=6\sqrt{5}$cm

또 $\triangle ADC$에서 $\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{DC}^2$이므로

$\overline{AC}^2=(4\sqrt{5})^2+8^2$

$\overline{AC}=12$cm

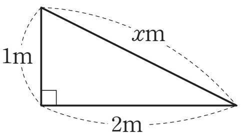
(2) $\overline{AB}=6\sqrt{5}$cm, $\overline{AC}=12$cm, $\overline{BC}=18$cm이므로

$\triangle ABC$의 가장 긴 변의 길이가 18cm이다.

이때 $(6\sqrt{5})^2+12^2=18^2$이므로 $\angle A$는 직각이다.

7 **평가의 주안점** 직각삼각형의 한 변의 길이를 구하고, 이를 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있다.

풀이 차양을 옆에서 본 모양은 다음 그림과 같다.



…… ❶

차양의 세로의 길이를 xm라 하면 $1^2+2^2=x^2$이므로

$x^2=5$, $x=\pm\sqrt{5}$

그런데 $x>0$이므로 $x=\sqrt{5}$m이다. …… ❷

따라서 차양의 넓이는 $4\times\sqrt{5}=4\sqrt{5}(m^2)$이다. …… ❸

단계	채점 기준	배점 비율
❶	차양을 옆에서 본 모양을 직각삼각형으로 나타낸다.	40%
❷	차양의 세로의 길이를 구한다.	40%
❸	차양의 넓이를 구한다.	20%

8 **평가의 주안점** 직각삼각형을 이용하여 주어진 도형의 한 변의 길이를 구할 수 있다.

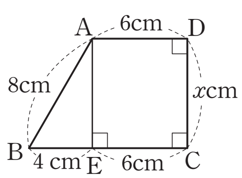
풀이 (1) 보조선 $\overline{AE}$를 그으면

$\triangle ABE$에서

$\overline{AE}^2=8^2-4^2=48$

$\overline{AE}=4\sqrt{3}$cm

따라서 $x=4\sqrt{3}$이다.



(2) 보조선 $\overline{AC}$를 그으면

$\triangle ABC$에서

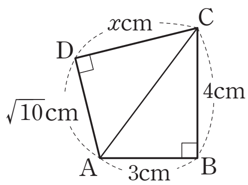
$\overline{AC}^2=3^2+4^2=25$

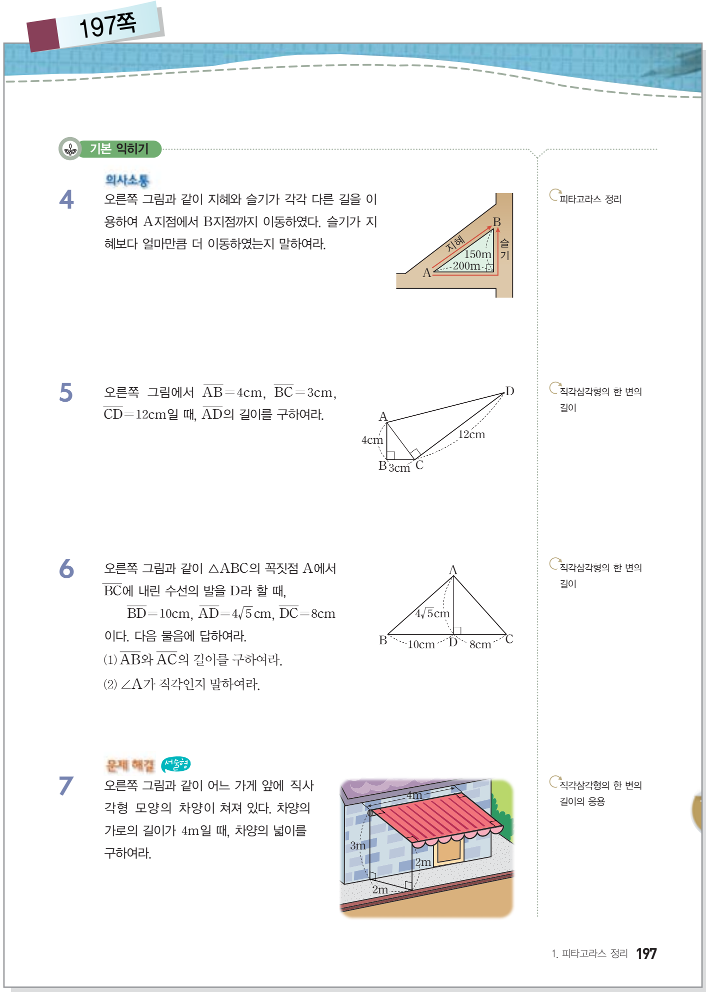
$\overline{AC}=5$cm

$\triangle ACD$에서

$x^2=5^2-(\sqrt{10})^2$

따라서 $x=\sqrt{15}$이다.




197쪽

기본 익히기

의사소통

4 오른쪽 그림과 같이 지혜와 슬기가 각각 다른 길을 이용하여 A지점에서 B지점까지 이동하였다. 슬기가 지혜보다 얼마만큼 더 이동하였는지 말하여라.

피타고라스 정리

5 오른쪽 그림에서 $\overline{AB}=4$cm, $\overline{BC}=3$cm, $\overline{CD}=12$cm일 때, $\overline{AD}$의 길이를 구하여라.

직각삼각형의 한 변의 길이

6 오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC$의 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 D라 할 때,

$\overline{BD}=10$cm, $\overline{AD}=4\sqrt{5}$cm, $\overline{DC}=8$cm

이다. 다음 물음에 답하여라.

(1) $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$의 길이를 구하여라.

(2) $\angle A$가 직각인지 말하여라.

직각삼각형의 한 변의 길이

문제 해결 서술형

7 오른쪽 그림과 같이 어느 가게 앞에 직사각형 모양의 차양이 쳐져 있다. 차양의 가로의 길이가 4m일 때, 차양의 넓이를 구하여라.

직각삼각형의 한 변의 길이의 응용

1. 피타고라스 정리 197

실력 기르기

9 **평가의 주안점** 피타고라스 정리의 설명에서 이용되는 넓이가 같은 삼각형을 찾을 수 있다.

풀이 (1) □ADEB를 대각선으로 나누면 $\triangle DEA$, $\triangle AEB$이고 넓이가 같다.

$\triangle AEB$와 $\triangle EBC$는 밑변의 길이와 높이가 각각 같으므로 넓이가 같다.

$\triangle EBC$와 $\triangle ABF$는 두 변의 길이가 같고, 그 끼인각의 크기가 같으므로 합동이다.

또 $\triangle ABF$와 $\triangle BFJ$는 밑변의 길이와 높이가 각각 같으므로 넓이가 같다.

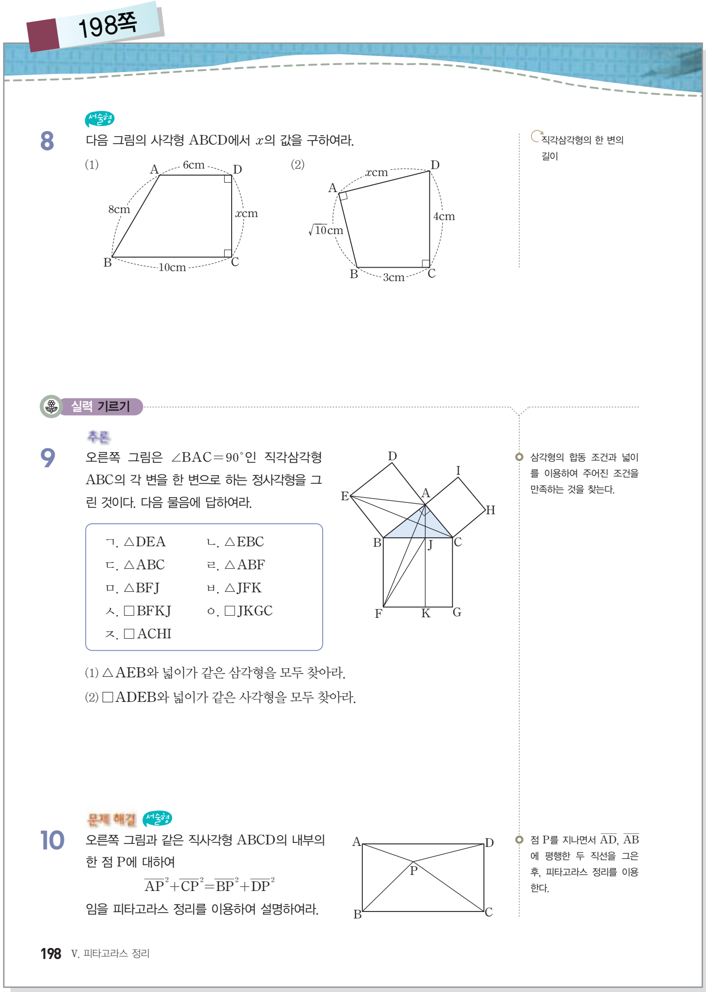
마찬가지로 $\triangle BFJ$와 $\triangle JFK$의 넓이는 같다.

따라서 $\triangle AEB$와 넓이가 같은 삼각형을 찾으면

ㄱ, ㄴ, ㄹ, ㅁ, ㅂ

이다.

(2) (1)에 의하여 □ADEB와 넓이가 같은 사각형은 ㅅ이다.


198쪽

8 서술형
다음 그림의 사각형 ABCD에서 x의 값을 구하여라.

(1) (2)

직각삼각형의 한 변의 길이

실력 기르기

9 추론
오른쪽 그림은 $\angle BAC=90^\circ$인 직각삼각형 ABC의 각 변을 한 변으로 하는 정사각형을 그린 것이다. 다음 물음에 답하여라.

ㄱ. △DEA ㄴ. △EBC
ㄷ. △ABC ㄹ. △ABF
ㅁ. △BFJ ㅂ. △JFK
ㅅ. □BFKJ ㅇ. □JKGC
ㅈ. □ACHI

(1) △AEB와 넓이가 같은 삼각형을 모두 찾아라.
(2) □ADEB와 넓이가 같은 사각형을 모두 찾아라.

삼각형의 합동 조건과 넓이를 이용하여 주어진 조건을 만족하는 것을 찾는다.

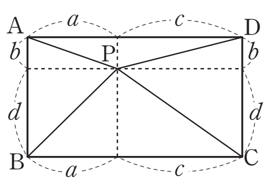
10 문제 해결 서술형
오른쪽 그림과 같은 직사각형 ABCD의 내부의 한 점 P에 대하여
$\overline{AP}^2+\overline{CP}^2=\overline{BP}^2+\overline{DP}^2$
임을 피타고라스 정리를 이용하여 설명하여라.

점 P를 지나면서 $\overline{AD}$, $\overline{AB}$에 평행한 두 직선을 그은 후, 피타고라스 정리를 이용한다.

198 V. 피타고라스 정리

10 평가의 주안점 피타고라스 정리를 활용할 수 있다.

풀이



...... ①

위의 그림과 같이 a, b, c, d를 정하면

$\overline{AP}^2+\overline{CP}^2=a^2+b^2+c^2+d^2$ ...... ②

$\overline{BP}^2+\overline{DP}^2=d^2+a^2+b^2+c^2$

$=a^2+b^2+c^2+d^2$ ...... ③

따라서 $\overline{AP}^2+\overline{CP}^2=\overline{BP}^2+\overline{DP}^2$이 성립한다. ...... ④

단계	채점 기준	배점 비율
①	점 P를 지나면서 $\overline{AD}$, $\overline{AB}$에 평행한 선을 긋는다.	30%
②	$\overline{AP}^2+\overline{CP}^2$을 식으로 나타낸다.	30%
③	$\overline{BP}^2+\overline{DP}^2$을 식으로 나타낸다.	30%
④	주어진 식이 성립함을 안다.	10%

연구 자료

'세상의 모든 것은 수학으로 해석될 수 있다.'

1998년 미국의 선댄스 영화제 감독상을 받은 대런 애로노프스키 감독(대표작 '레퀴엠')은 위와 같은 주제의 영화 '파이(π)'를 선보였다. 주식 시장의 일관된 패턴을 찾으려는 한 천재 수학자의 고뇌와 휴먼스토리를 담은 것이다.

그렇다면 몸으로 움직이는 스포츠도 수학으로 해석될 수 있을까?

최근 뉴욕타임스는 미국 메이저 리그 프로 야구팀의 승률을 도출할 수 있는 다음의 공식 하나를 소개했다.

$$(\text{야구팀 승률})=\frac{(\text{총득점})^2}{(\text{총득점})^2+(\text{총실점})^2}$$

1980년대 초 미국의 스포츠 이론가 빌 제임스가 수학의 '피타고라스 정리(직각삼각형에서 빗변의 길이의 제곱은 다른 두 변의 길이의 제곱의 합과 같다.)'를 응용해 만든 공식으로 '야구팀의 피타고라스 승률 공식'인 셈이다.

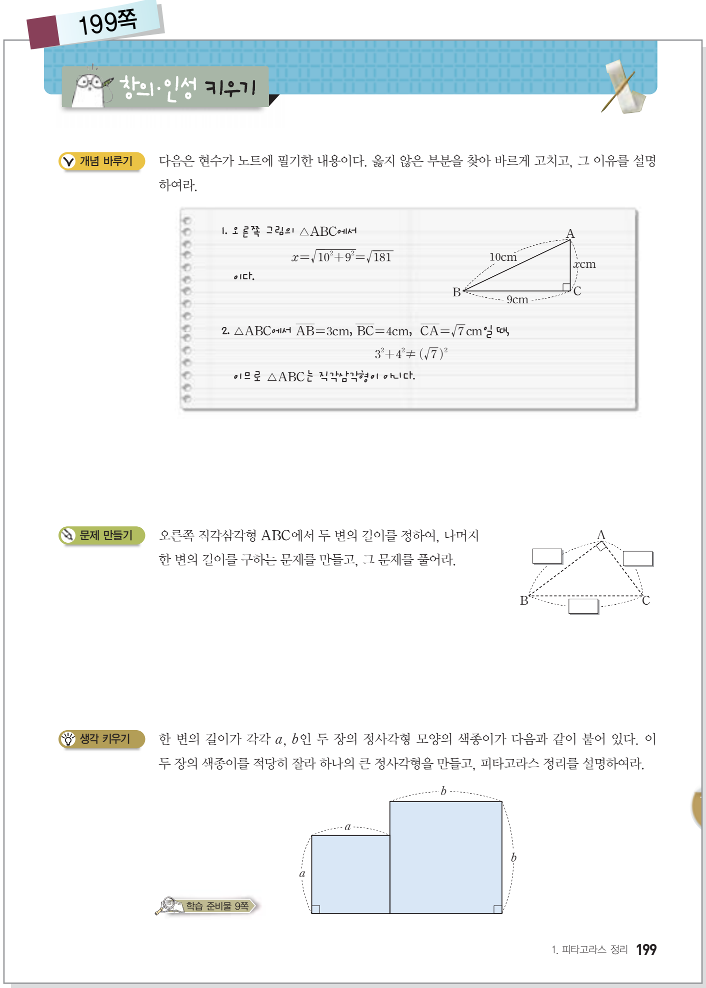
그에 따르면 이 공식으로 도출되는 승률이 팀의 '진짜 실력'이라는 것이다.

실제로 6월 30일 기준으로 메이저 리그 각 팀의 성적을 '피타고라스 승률 공식'으로 분석해 본 결과는 흥미롭다. 공식에 의한 성적이 실제 성적에 거의 근접하고 있기 때문이다. 더구나 팀의 경기 수가 늘어날수록 실제 성적과 피타고라스 승률 공식에 의한 결과와의 차이가 좁혀졌다.

아메리칸 리그 어떤 팀의 경우 지난달 30일까지 득점 431점, 실점 357점을 기록했다. 이를 공식에 적용하면 시카고의 승률은 0.593으로 44승 30패여야 한다. 하지만 실제는 41승 33패, 공식에서 나온 결과보다 3승이 적다.

그렇다면 이 팀은 후반기 남은 경기에서 선전할 가능성이 높다고 예상할 수 있다.

V


199쪽

창의·인성 키우기

개념 바루기 다음은 현수가 노트에 필기한 내용이다. 옳지 않은 부분을 찾아 바르게 고치고, 그 이유를 설명하여라.

1. 오른쪽 그림의 $\triangle ABC$에서

$x=\sqrt{10^2+9^2}=\sqrt{181}$

이다.

2. $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=3cm$, $\overline{BC}=4cm$, $\overline{CA}=\sqrt{7}cm$일 때,

$3^2+4^2\neq(\sqrt{7})^2$

이므로 $\triangle ABC$는 직각삼각형이 아니다.

문제 만들기 오른쪽 직각삼각형 ABC에서 두 변의 길이를 정하여, 나머지 한 변의 길이를 구하는 문제를 만들고, 그 문제를 풀어라.

생각 키우기 한 변의 길이가 각각 a, b인 두 장의 정사각형 모양의 색종이가 다음과 같이 붙어 있다. 이 두 장의 색종이를 적당히 잘라 하나의 큰 정사각형을 만들고, 피타고라스 정리를 설명하여라.

1. 피타고라스 정리 199

창의·인성 키우기

개념 바루기

1. 직각삼각형의 빗변 찾기

지도상의 유의점 직각삼각형에서 피타고라스 정리를 이용하여 한 변의 길이를 구할 때, 직각에 대한 대변이 빗변이라는 것을 유의하도록 지도한다.

올바른 풀이 $x=\sqrt{10^2-9^2}=\sqrt{19}$

잘못 푼 이유는 직각삼각형의 빗변과 나머지 변을 착각했기 때문이다.

2. 삼각형에서 가장 긴 변 찾기

지도상의 유의점 직각삼각형인지 아닌지를 구별할 때에는 가장 긴 변의 길이의 제곱과 나머지 두 변의 길이의 제곱의 합을 비교한다는 것을 유의하도록 지도한다.

올바른 풀이 삼각형의 세 변의 길이가

$\overline{AB}=3cm$, $\overline{BC}=4cm$, $\overline{CA}=\sqrt{7}cm$일 때,

$\overline{AB}^2+\overline{CA}^2=\overline{BC}^2$

이므로 $\triangle ABC$는 직각삼각형이다.

잘못 푼 이유는 삼각형의 가장 긴 변을 확인하지 않았기 때문이다.

창의 · 인성 현수의 노트 필기에서 나타나는 오류를 통하여 비판적 사고력을 키우고, 수학적 지식을 활용하여 합리적 의사결정을 할 수 있는 능력을 키운다.

문제 만들기

지도상의 유의점 직각삼각형의 빗변의 길이에 유의하여 문제를 만들게 한다.

예시 답안 (1) $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=4$라 하면

$\overline{BC}=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$이다.

(2) $\overline{AB}=12$, $\overline{AC}=5$라 하면

$\overline{BC}=\sqrt{5^2+12^2}=13$이다.

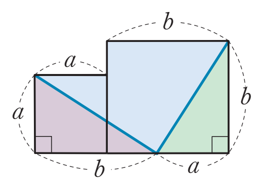
창의 · 인성 학생 스스로 문제를 만들어 풀게 함으로써 자기 주도적 학습 능력을 향상시킨다.

생각 키우기

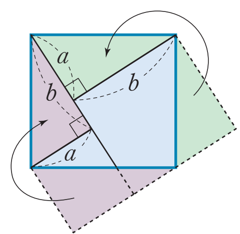
지도상의 유의점 색종이를 오려서 맞추어 보게 한 후 모둠별로 토론하여 다른 방법을 찾아보게 한다. 다른 모둠과 비교하여 보고, 모둠별로 발표할 수 있도록 한다. 이러한 과정을 통하여 피타고라스 정리를 설명할 수 있음을 알게 한다.

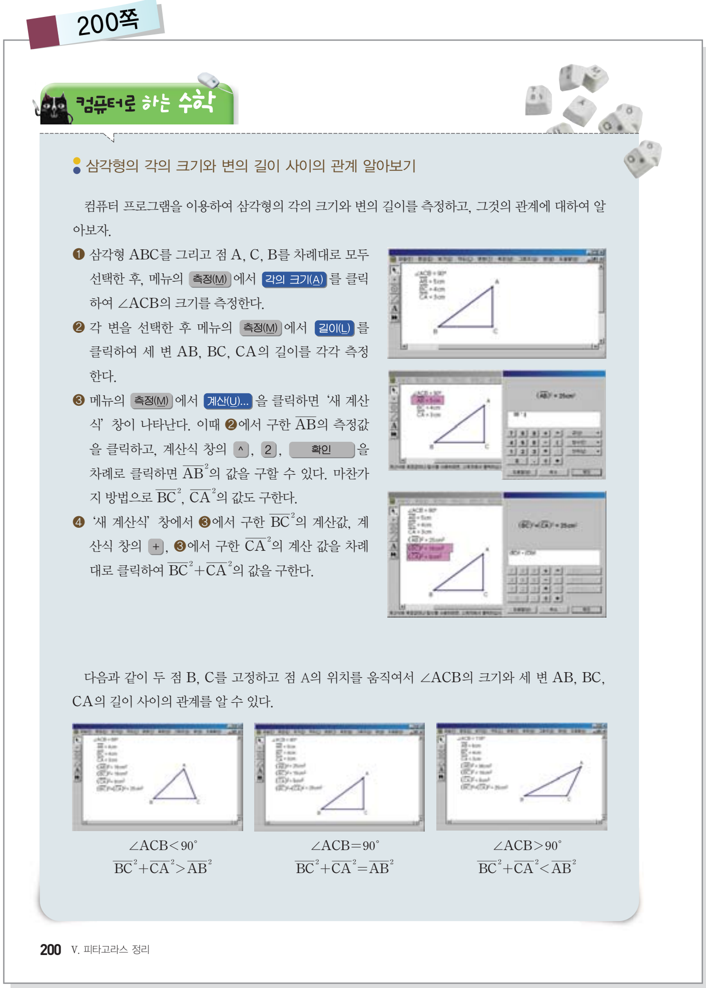
예시 답안 다음과 같은 방법으로 주어진 조건을 만족하는 정사각형을 만들면 된다.

1 직각을 낀 두 변의 길이가 a, b인 두 개의 직각삼각형을 그린다.



2 다음 그림과 같이 보라색 직각삼각형을 오려 위로 이동하고, 초록색 직각삼각형을 오려 위로 이동한다.





200쪽

컴퓨터로 하는 수학

삼각형의 각의 크기와 변의 길이 사이의 관계 알아보기

컴퓨터 프로그램을 이용하여 삼각형의 각의 크기와 변의 길이를 측정하고, 그것의 관계에 대하여 알아보자.

❶ 삼각형 ABC를 그리고 점 A, C, B를 차례대로 모두 선택한 후, 메뉴의 측정(M) 에서 각의 크기(A) 를 클릭하여 ∠ACB의 크기를 측정한다.

❷ 각 변을 선택한 후 메뉴의 측정(M) 에서 길이(L) 를 클릭하여 세 변 AB, BC, CA의 길이를 각각 측정한다.

❸ 메뉴의 측정(M) 에서 계산(U)... 을 클릭하면 '새 계산식' 창이 나타난다. 이때 ❷에서 구한 $\overline{AB}$의 측정값을 클릭하고, 계산식 창의 ^, 2, 확인 을 차례로 클릭하면 $\overline{AB}^2$의 값을 구할 수 있다. 마찬가지 방법으로 $\overline{BC}^2$, $\overline{CA}^2$의 값도 구한다.

❹ '새 계산식' 창에서 ❸에서 구한 $\overline{BC}^2$의 계산값, 계산식 창의 +, ❸에서 구한 $\overline{CA}^2$의 계산 값을 차례대로 클릭하여 $\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$의 값을 구한다.

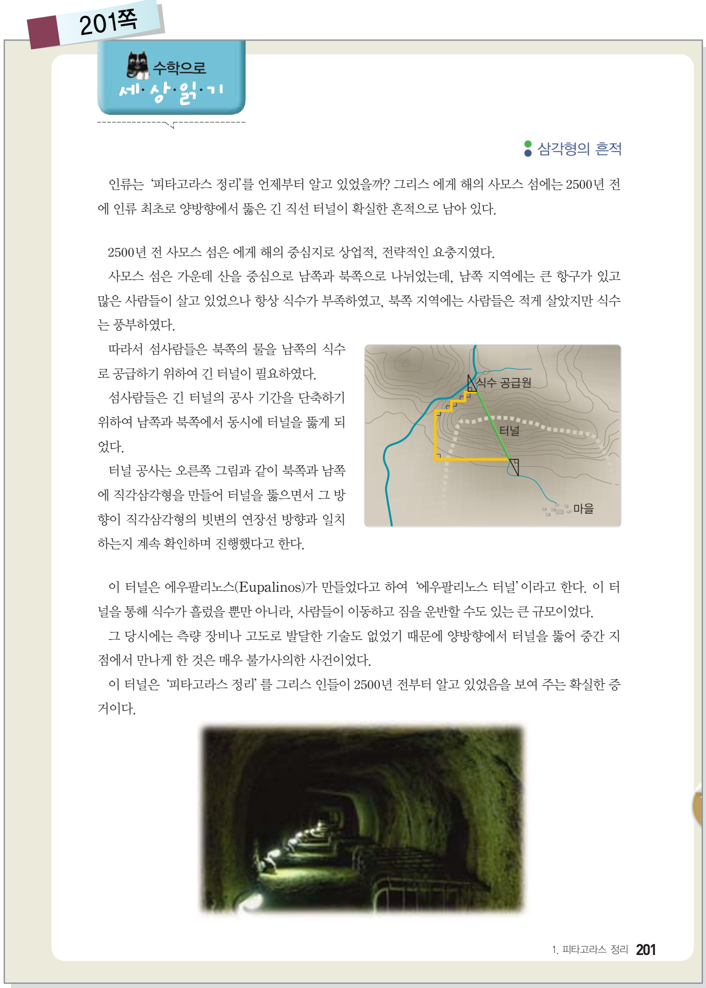
다음과 같이 두 점 B, C를 고정하고 점 A의 위치를 움직여서 ∠ACB의 크기와 세 변 AB, BC, CA의 길이 사이의 관계를 알 수 있다.

$\angle ACB < 90^\circ$, $\overline{BC}^2+\overline{CA}^2 > \overline{AB}^2$

$\angle ACB = 90^\circ$, $\overline{BC}^2+\overline{CA}^2 = \overline{AB}^2$

$\angle ACB > 90^\circ$, $\overline{BC}^2+\overline{CA}^2 < \overline{AB}^2$

200 V. 피타고라스 정리



201쪽

수학으로 세·상·읽·기

삼각형의 흔적

인류는 '피타고라스 정리'를 언제부터 알고 있었을까? 그리스 에게 해의 사모스 섬에는 2500년 전에 인류 최초로 양방향에서 뚫은 긴 직선 터널이 확실한 흔적으로 남아 있다.

2500년 전 사모스 섬은 에게 해의 중심지로 상업적, 전략적인 요충지였다.

사모스 섬은 가운데 산을 중심으로 남쪽과 북쪽으로 나뉘었는데, 남쪽 지역에는 큰 항구가 있고 많은 사람들이 살고 있었으나 항상 식수가 부족하였고, 북쪽 지역에는 사람들은 적게 살았지만 식수는 풍부하였다.

따라서 섬사람들은 북쪽의 물을 남쪽의 식수로 공급하기 위하여 긴 터널이 필요하였다.

섬사람들은 긴 터널의 공사 기간을 단축하기 위하여 남쪽과 북쪽에서 동시에 터널을 뚫게 되었다.

터널 공사는 오른쪽 그림과 같이 북쪽과 남쪽에 직각삼각형을 만들어 터널을 뚫으면서 그 방향이 직각삼각형의 빗변의 연장선 방향과 일치하는지 계속 확인하며 진행했다고 한다.

이 터널은 에우팔리노스(Eupalinos)가 만들었다고 하여 '에우팔리노스 터널'이라고 한다. 이 터널을 통해 식수가 흘렀을 뿐만 아니라, 사람들이 이동하고 짐을 운반할 수도 있는 큰 규모이었다.

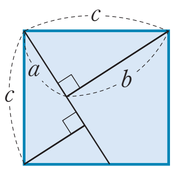
그 당시에는 측량 장비나 고도로 발달한 기술도 없었기 때문에 양방향에서 터널을 뚫어 중간 지점에서 만나게 한 것은 매우 불가사의한 사건이었다.

이 터널은 '피타고라스 정리'를 그리스 인들이 2500년 전부터 알고 있었음을 보여 주는 확실한 증거이다.

1. 피타고라스 정리 201

이때 직각을 낀 두 변의 길이가 a, b인 직각삼각형의 빗변의 길이를 c라 하면 새로 만들어진 사각형은 한 변의 길이가 c인 정사각형이다.

따라서 $a^2+b^2=c^2$임을 알 수 있다.



창의 · 인성 조작 활동을 통하여 사고를 확장시킬 수 있게 하고, 모둠별로 토론하는 과정을 통하여 상호작용하는 능력을 키우며, 서로의 경험을 공유하게 한다.

컴퓨터로 하는 수학

지도상의 유의점 컴퓨터 프로그램을 이용하여 피타고라스 정리를 알아봄으로써 삼각형과 변의 길이 사이의 관계를 흥미있게 접근할 수 있도록 하고, 수학 관련 프로그램에 친숙해지도록 지도한다.

창의 · 인성 컴퓨터 프로그램에 호기심을 가지고 접근하도록 하며, 컴퓨터를 활용하여 문제를 스스로 해결할 수 있는 능력을 기른다.

수학으로 세·상·읽·기

2500년 전 피타고라스 정리의 기원을 찾아보는 '수학으로 세상 읽기'이다.

그리스 에게 해의 사모스 섬에 2500년 전 인류 최초로 양방향에서 뚫은 직선 터널이 남아 있다. 이 터널은 북쪽과 남쪽에서 동시에 뚫기 시작하여 중간에서 만나도록 했다고 기록되어 있는데, 이것은 양쪽에서 터널을 파다가 아주 작은 오차라도 생기면 영영 만나지 못하게 되는 방법이다.

2500년 전의 기술로 이러한 오차를 내지 않고 어떻게 이 터널을 뚫었는지 신비할 따름이다. 하지만 이 터널이 어떤 설계에 의하여 완성되었는지 전해져 내려오지는 않고 다만 여러 가지 추측만이 있을 뿐이다.

500년이 지난 후 발명가인 알렉산드리아의 헤론(Heron;?10 ~ ?75)이 이 터널의 비밀은 삼각형과 관련되어 있다고 설명하고, 자신이 발명한 측량 기구로 이 문제를 해결할 수 있다고 기록했다.

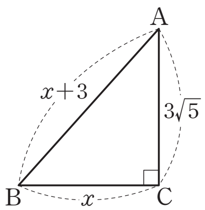
V

중단원 평가 문제

학년 반 번호:	이름:	/ 점수:

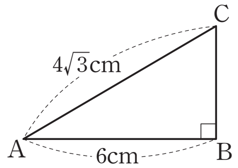
선다형은 각 4점, 나머지 문항은 각 문항에 표시함.

01 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 x의 값은?



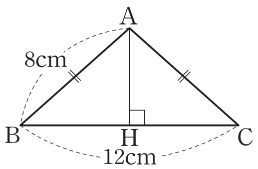
① 3　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 9

02 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC의 넓이는?



① 6cm^2　② $6\sqrt{2}\text{cm}^2$　③ $6\sqrt{3}\text{cm}^2$　④ $12\sqrt{2}\text{cm}^2$　⑤ $12\sqrt{3}\text{cm}^2$

03 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC에서 $\overline{AH}\perp\overline{BC}$이고, $\overline{AB}=8$cm, $\overline{BC}=12$cm일 때, $\overline{AH}$의 길이는?

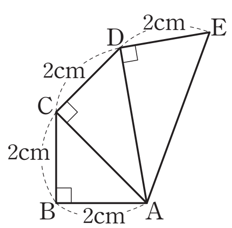


① $2\sqrt{5}$cm　② $2\sqrt{7}$cm　③ $3\sqrt{5}$cm　④ $3\sqrt{7}$cm　⑤ 10cm

04 삼각형의 세 변의 길이가 다음과 같을 때, 직각삼각형인 것은?

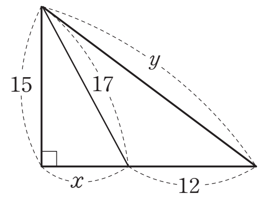
① 2cm, 3cm, 4cm　② 4cm, 5cm, 8cm　③ 6cm, 7cm, 9cm　④ 6cm, 7cm, 10cm　⑤ 5cm, 12cm, 13cm

05 오른쪽 그림에서 $\overline{AE}$의 길이는?



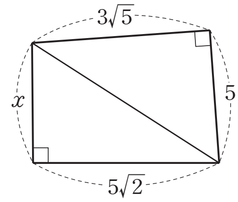
① $2\sqrt{3}$cm　② $3\sqrt{2}$cm　③ $3\sqrt{3}$cm　④ 4cm　⑤ $2\sqrt{5}$cm

06 오른쪽 그림에서 $x+y$의 값은?



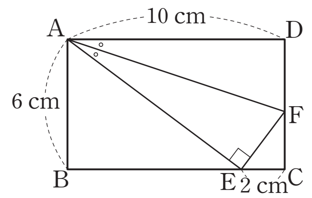
① 33　② 32　③ 30　④ 25　⑤ 20

07 오른쪽 그림에서 x의 값은?



① $5\sqrt{5}$　② $5\sqrt{3}$　③ $\sqrt{70}$　④ $3\sqrt{5}$　⑤ $2\sqrt{5}$

08 오른쪽 그림과 같은 직사각형 ABCD에서 $\angle DAF=\angle EAF$이고, $\overline{AB}=6$cm, $\overline{AD}=10$cm, $\overline{EC}=2$cm, $\angle AEF=90°$일 때, $\overline{EF}$의 길이는?

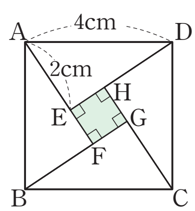


① $\dfrac{5}{2}$cm　② $\dfrac{10}{3}$cm　③ $\dfrac{7}{2}$cm　④ $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$cm　⑤ $\dfrac{13}{3}$cm

09 삼각형의 세 변의 길이가 6, 8, x일 때, 이 삼각형이 직각삼각형이기 위한 x의 값을 고르면? (정답 2개)

① $2\sqrt{7}$　② 7　③ $3\sqrt{7}$　④ $7\sqrt{2}$　⑤ 10

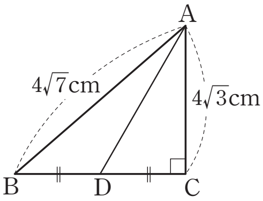
10 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 4cm인 정사각형 ABCD에서 $\overline{AE}=\overline{BF}=\overline{CG}=\overline{DH}=2$cm일 때, 정사각형 EFGH의 넓이는?



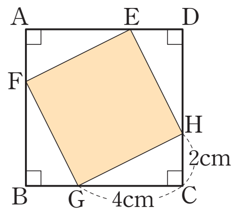
① $(8-4\sqrt{3})\text{cm}^2$
② $(12-8\sqrt{3})\text{cm}^2$
③ $(16-8\sqrt{3})\text{cm}^2$
④ $(16-4\sqrt{3})\text{cm}^2$
⑤ $(18-\sqrt{3})\text{cm}^2$

단답형

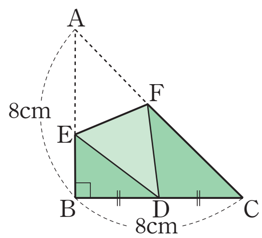
11 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 점 D가 $\overline{BC}$의 중점일 때, $\overline{AD}$의 길이를 구하여라. [6점]



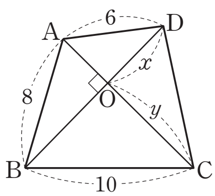
12 오른쪽 그림의 정사각형 ABCD에서 네 개의 직각삼각형 HGC, EHD, FEA, GFB는 합동이다. $\overline{HC}=2$cm, $\overline{GC}=4$cm일 때, □EFGH의 넓이를 구하여라. [6점]



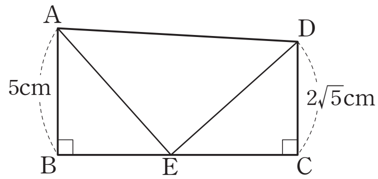
13 오른쪽 그림의 직각이등변삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=\overline{BC}=8$cm이다. $\overline{EF}$를 접는 선으로 하여 점 A가 $\overline{BC}$의 중점 D에 오도록 했을 때, $\overline{ED}$의 길이를 구하여라. [6점]



14 오른쪽 그림의 □ABCD에서 두 대각선 AC와 BD는 점 O에서 서로 수직으로 만난다. $\overline{AB}=8$, $\overline{AD}=6$, $\overline{BC}=10$일 때, x^2+y^2의 값을 구하여라. [6점]



15 다음 그림에서 △ABE, △ECD는 서로 합동인 직각삼각형이다. $\overline{AB}=5$cm, $\overline{DC}=2\sqrt{5}$cm일 때, $\overline{AD}$의 길이를 구하여라. [6점]

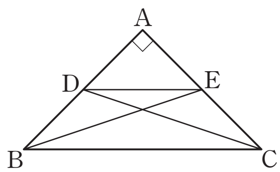


서술형

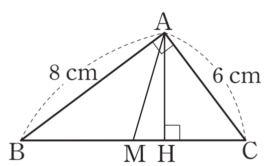
16 오른쪽 그림의 △ABC는 ∠A=90° 인 직각삼각형이다.
$\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 위의 두 점 D, E에 대하여

$$\overline{BE}^2+\overline{CD}^2=\overline{DE}^2+\overline{BC}^2$$

임을 설명하여라. [8점]

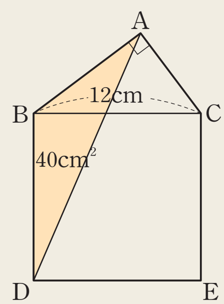


17 오른쪽 그림의 △ABC는 ∠A=90° 인 직각삼각형이다. 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H, $\overline{BC}$의 중점을 M이라 할 때, $\overline{MH}$의 길이를 구하고, 그 과정을 서술하여라. [10점]



수리 논술형

18 민주는 오른쪽 그림과 같이 ∠A=90°인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{BC}$를 한 변으로 하는 정사각형 BDEC를 그렸다.
$\overline{BC}=12$cm이고, △ABD$=40$cm^{2}일 때, $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$의 길이를 구하고, 그 과정을 설명하여라. [12점]



중단원 평가 문제

01 ③	02 ③	03 ②	04 ⑤
05 ④	06 ①	07 ⑤	08 ②
09 ①, ⑤	10 ③	11 8cm	
12 20cm^2	13 5cm	14 72	
15 $3\sqrt{10}$cm	16~18 풀이 참조		

01 평가 기준 피타고라스 정리를 이용하여 직각삼각형의 한 변의 길이를 구할 수 있는가?

풀이 직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여
$(x+3)^2=x^2+(3\sqrt{5})^2$
$6x=36$
따라서 $x=6$이다.

02 평가 기준 피타고라스 정리를 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

풀이 주어진 직각삼각형 ABC에서 $\overline{BC}$의 길이는
$\overline{BC}^2=(4\sqrt{3})^2-6^2=12$
$\overline{BC}>0$이므로 $\overline{BC}=2\sqrt{3}$cm
따라서 $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times6\times2\sqrt{3}=6\sqrt{3}(\text{cm}^2)$이다.

03 평가 기준 피타고라스 정리를 이용하여 삼각형의 높이를 구할 수 있는가?

풀이 $\triangle ABH$에서 $\overline{BH}=6$cm이므로
$\overline{AH}^2=8^2-6^2=28$
이때 $\overline{AH}>0$이므로 $\overline{AH}=2\sqrt{7}$cm이다.

04 평가 기준 피타고라스 정리의 역을 알고 있는가?

풀이 삼각형의 세 변의 길이가 피타고라스 정리를 만족해야 한다.
⑤에서 $13^2=5^2+12^2$이므로 직각삼각형이다.

05 평가 기준 직각삼각형의 한 변의 길이를 연속해서 구할 수 있는가?

풀이 $\overline{AC}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}(\text{cm})$
$\overline{AD}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+2^2}=2\sqrt{3}(\text{cm})$
$\overline{AE}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=4(\text{cm})$

06 평가 기준 피타고라스 정리를 이용하여 삼각형의 변의 길이를 구할 수 있는가?

풀이 $x=\sqrt{17^2-15^2}=\sqrt{64}=8$
$y=\sqrt{(8+12)^2+15^2}=\sqrt{625}=25$
따라서 $x+y=8+25=33$이다.

07 평가 기준 두 직각삼각형의 빗변의 길이가 같음을 이용하여 한 변의 길이를 구할 수 있는가?

풀이 $x^2+(5\sqrt{2})^2=(3\sqrt{5})^2+5^2$에서 $x^2+50=70$, $x^2=20$
이때 $x>0$이므로 $x=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$이다.

08 평가 기준 두 삼각형의 합동을 이용하여 한 변의 길이를 구할 수 있는가?

풀이 $\overline{EF}=x$cm라 하면 $\triangle ADF\equiv\triangle AEF$이므로
$\overline{DF}=x$cm, $\overline{FC}=(6-x)$cm
$\triangle FEC$에서 $x^2=2^2+(6-x)^2$
$12x=40$, $x=\frac{10}{3}$
따라서 $\overline{EF}=\frac{10}{3}$cm이다.

09 평가 기준 직각삼각형의 긴 변을 알고, 피타고라스 정리의 역을 이해하고 있는가?

풀이 가장 긴 변의 길이를 x라 하면
$x^2=6^2+8^2$이므로 $x=10$이다.
가장 긴 변의 길이를 8이라 하면
$8^2=6^2+x^2$이므로 $x=2\sqrt{7}$이다.

10 평가 기준 피타고라스 정리를 이용하여 넓이를 구할 수 있는가?

풀이 $\overline{ED}$의 길이를 구하면
$\overline{ED}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}(\text{cm})$
$\overline{EF}=\overline{FG}=\overline{GH}=\overline{HE}=(2\sqrt{3}-2)$cm
따라서 정사각형 EFGH의 넓이는
$(2\sqrt{3}-2)^2=12-8\sqrt{3}+4=(16-8\sqrt{3})\text{cm}^2$
이다.

11 평가 기준 피타고라스 정리를 이용하여 한 변의 길이를 구할 수 있는가?

풀이 $\triangle ABC$에서 $\overline{BC}$의 길이는
$\overline{BC}=\sqrt{(4\sqrt{7})^2-(4\sqrt{3})^2}=\sqrt{64}=8(\text{cm})$이므로
$\overline{DC}=4$cm이다.
$\triangle ADC$에서 $\overline{AD}$의 길이는
$\overline{AD}=\sqrt{(4\sqrt{3})^2+4^2}=\sqrt{64}=8(\text{cm})$이다.

12 평가 기준 피타고라스 정리를 이용하여 삼각형의 한 변을 구한 후, 정사각형의 넓이를 구할 수 있는가?

풀이 $\triangle$HGC에서 $\overline{\text{HG}}$의 길이를 구하면

$\overline{\text{HG}}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}\,(\text{cm})$

네 직각삼각형 HGC, EHD, FEA, GFB가 서로 합동이므로 $\overline{\text{HG}}=\overline{\text{EH}}=\overline{\text{FE}}=\overline{\text{GF}}$이다. 이때 $\angle\text{E}=\angle\text{F}=\angle\text{G}=\angle\text{H}$이므로 □EFGH는 정사각형이다.

따라서 □EFGH$=(2\sqrt{5})^2=20\,(\text{cm}^2)$이다.

13 평가 기준 피타고라스 정리를 이용하여 접힌 삼각형의 한 변의 길이를 구할 수 있는가?

풀이 $\overline{\text{ED}}=x\text{cm}$라 하면

$\overline{\text{AE}}=x\text{cm}$, $\overline{\text{EB}}=(8-x)\text{cm}$, $\overline{\text{BD}}=4\text{cm}$

$\triangle$EBD에서 $x^2=(8-x)^2+4^2$, $x=5$

따라서 $\overline{\text{ED}}=5\text{cm}$이다.

14 평가 기준 피타고라스 정리를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

풀이 □ABCD의 대각선이 서로 수직으로 만나므로

$\overline{\text{AB}}^2+\overline{\text{DC}}^2=\overline{\text{AD}}^2+\overline{\text{BC}}^2$

$8^2+x^2+y^2=6^2+10^2$

따라서 $x^2+y^2=72$이다.

15 평가 기준 피타고라스 정리와 합동을 이용하여 삼각형의 한 변의 길이를 구할 수 있는가?

풀이 $\triangle$ABE와 $\triangle$ECD가 합동이므로

$\overline{\text{BE}}=\overline{\text{DC}}=2\sqrt{5}\text{cm}$, $\overline{\text{AB}}=\overline{\text{EC}}=5\text{cm}$

$\angle\text{AEB}+\angle\text{DEC}=90^\circ$

$\angle\text{AED}=90^\circ$

$\triangle$ABE에서 $\overline{\text{AE}}=\sqrt{5^2+(2\sqrt{5})^2}=3\sqrt{5}\,(\text{cm})$

$\overline{\text{AE}}=\overline{\text{DE}}=3\sqrt{5}\text{cm}$이므로 $\triangle$AED에서

$\overline{\text{AD}}=\sqrt{(3\sqrt{5})^2+(3\sqrt{5})^2}=3\sqrt{10}\,(\text{cm})$이다.

16 평가 기준 피타고라스 정리를 이용하여 사각형에서 대각선과 변의 관계를 설명할 수 있는가?

풀이 주어진 삼각형에서

$\overline{\text{BE}}^2+\overline{\text{CD}}^2=(\overline{\text{AE}}^2+\overline{\text{AB}}^2)+(\overline{\text{AD}}^2+\overline{\text{AC}}^2)$ …… ①

$=(\overline{\text{AE}}^2+\overline{\text{AD}}^2)+(\overline{\text{AB}}^2+\overline{\text{AC}}^2)$ …… ②

$=\overline{\text{DE}}^2+\overline{\text{BC}}^2$ …… ③

이다.

단계	채점 기준	배점
①	$\triangle$ABE, $\triangle$ACD에서 피타고라스 정리를 이용한다.	3점
②	$\triangle$ADE, $\triangle$ABC에서 피타고라스 정리를 이용한다.	3점
③	식을 간단히 하여 주어진 식을 만든다.	2점

17 평가 기준 피타고라스 정리를 이용하여 삼각형의 한 변의 길이를 구할 수 있는가?

풀이 $\triangle$ABC에서

$\overline{\text{BC}}=\sqrt{8^2+6^2}=10\,(\text{cm})$ …… ①

$\overline{\text{MC}}=\overline{\text{BM}}=\frac{1}{2}\overline{\text{BC}}=5\,(\text{cm})$ …… ②

$\triangle$ABC와 $\triangle$HAC는 $\angle\text{A}=\angle\text{H}$, $\angle\text{C}$는 공통이므로 AA닮음이다. …… ③

$\overline{\text{AC}}:\overline{\text{BC}}=\overline{\text{CH}}:\overline{\text{AC}}$

$\overline{\text{AC}}^2=\overline{\text{BC}}\times\overline{\text{CH}}$

$6^2=10\times\overline{\text{CH}}$

$\overline{\text{CH}}=3.6\text{cm}$ …… ④

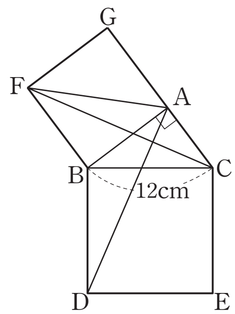
따라서

$\overline{\text{MH}}=\overline{\text{MC}}-\overline{\text{CH}}=5-3.6=1.4\,(\text{cm})$ …… ⑤

이다.

단계	채점 기준	배점
①	$\overline{\text{BC}}$의 길이를 구한다.	2점
②	$\overline{\text{MC}}$의 길이를 구한다.	2점
③	$\triangle$ABC와 $\triangle$HAC가 닮은 도형임을 안다.	2점
④	$\overline{\text{CH}}$의 길이를 구한다.	2점
⑤	$\overline{\text{MH}}$의 길이를 구한다.	2점

18 평가 기준 피타고라스 정리의 의미를 정확히 알고, 활용할 수 있는가?



예시 답안 $\overline{\text{AB}}$를 한 변으로 하는 정사각형 AGFB를 그린다.

$\triangle$ABD와 $\triangle$FBC에서

$\overline{\text{AB}}=\overline{\text{FB}}$, $\overline{\text{BC}}=\overline{\text{BD}}$,

$\angle\text{FBC}=\angle\text{ABD}$이므로

$\triangle\text{ABD}\equiv\triangle\text{FBC}$ …… ①

한편 $\triangle$AFB와 $\triangle$FCB에서 두 밑변의 길이가 같고, 높이가 같으므로

$\triangle\text{AFB}=\triangle\text{FBC}$ …… ②

즉, $\triangle\text{ABD}=\triangle\text{FBC}=\triangle\text{AFB}$

□AGFB의 넓이는 $2\times40=80\,(\text{cm}^2)$이므로

$\overline{\text{AB}}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}\text{cm}$ …… ③

따라서 $\overline{\text{AC}}=\sqrt{12^2-(4\sqrt{5})^2}=\sqrt{64}=8\,(\text{cm})$

이다. …… ④

단계	채점 기준	배점
①	$\triangle\text{ABD}\equiv\triangle\text{FBC}$임을 설명한다.	4점
②	$\triangle\text{AFB}=\triangle\text{FBC}$임을 설명한다.	4점
③	$\overline{\text{AB}}$의 길이를 구하는 방법을 설명한다.	2점
④	$\overline{\text{AC}}$의 길이를 구하는 방법을 설명한다.	2점