

《智能信息处理》课程作业

基于面向问题概念格的技能约简与推测关系

孟繁琛

| | |
|----|--------|
| 作业 | 分数[20] |
| 得分 | |

2021 年 11 月 25 日

基于面向问题概念格的技能约简与推测关系

孟繁琛

(大连海事大学 信息科学技术学院, 辽宁省大连市 中国 116026)

摘 要 知识空间理论与形式概念分析具有紧密联系. 进一步讨论技能映射与技能背景的联系. 首先, 构造技能背景的面向问题(技能)概念格, 更直接地获取知识结构. 其次, 基于面向问题概念格, 给出求解知识空间的技能约简与基的不同方法. 最后, 基于技能背景, 给出快速求解问题的推测关系的方法.

关键词 知识空间理论; 面向问题概念格; 技能背景; 技能约简; 知识基; 推测关系

中图分类号 TP182 **DOI 号** 10.16007/j.cnki.issn2095-7122.2021.02.006

Skill reduction and surmise relation based on object problem concept lattice

Meng Fanchen

(School of Information Science and Technology, Dalian maritime university, Liaoning Dalian 116026 China)

Abstract Knowledge space theory is closely related to formal concept analysis. It further discusses the relationship between skill mapping and skill context. Firstly, constructs object (skill) problem concept lattice of skill context to obtain the knowledge structure more directly. Secondly, based on the object-problem concept lattice, different methods for solving the skill reduction and basis of knowledge space are given. Finally, based on the skill context, a method for quickly solving the surmise relation of the problem is given.

Key words knowledge space theory; object-problem concept lattice; skill context; skill reduction; knowledge base; surmise relation

1 引言

知识空间理论(Knowledge space theory, 简称“KST”)[1]是 Falmagne 和 Doignon 于 1985 年首先提出的一种用数学理论进行教育评估和指导的一种数学心理框架. 目前 KST 在自适应教学与个性化学习[2-4]等领域得到广泛应用. 形式概念分析(Formal Concept Analysis, 简称“FCA”)[5]是 R.Wille 于 1982 年首先提出的一种从形式背景进行数据规则提取和分析的重要工具, 是人工智能研究[6-7]的重要方向.

1996 年 Rusch 等[8]提出知识背景概念, 首次提出由知识背景构建知识空间的方法. 2010 年 Spoto 等[9]提出技能映射概念, 并运用到心理评估上, 提出由形式背景构建技能映射在合取模型下诱导知

识结构的方法. 李进金等[10]提出形式背景与知识空间相互构建的另一种方法. 周银凤等[11]提出技能背景的概念, 进一步研究知识空间理论与形式概念分析间的联系.

知识状态与知识结构是对学习者进行知识评估和学习指导的主要工具. 如何构建学习者的知识状态与知识结构是 KST 的核心. 知识空间理论研究初期, 主要通过有丰富经验的专家来建立知识状态与知识结构. Doignon 等[12]基于问题与技能的关系, 提出由技能映射和技能多映射构建知识结构的方法.

技能的一个特定子集代表了个人对技能的掌握情况. 学习者想要解决某些问题必须要掌握某些相应的技能, 故可根据学习者对问题的解答情况来获取其知识状态. 不同问题的求解可能与同一技能集相关, 于是不同的技能集可能诱导相同的知识状

态,故有必要进行技能约简。Doignon^[13]提出极小技能集与极小技能映射的概念。高纯等^[14]提出求解极小技能集的不同方法。周银凤等^[11]提出保持知识基不变的一种技能约简方法。

问题与问题之间可能存在着某种偏序关系, Doignon 等^[1]将这种关系称为推测关系,推测关系体现了学习者能够解决问题的一个先后顺序。如何准确判断问题之间的推测关系,对评估学习者的知识水平和构建后期学习路径具有重要辅助作用。Falmagne 等^[12]将推测关系与知识结构相联系,给出了推测关系的一个等价条件。

文献^[11]运用形式背景的反背景去建立概念格,获取由技能映射诱导的知识结构,但不够直接。本文在形式背景的正背景前提下,将问题视为对象,技能视为属性,提出一种与文献^[11]不同的由技能背景构造知识与知识基的方法。首先,通过面向问题(技能)概念格,建立技能背景与知识结构的更直接的联系。其次,给出面向问题概念格的一种技能约简方法,直接获得技能约简集和知识基。最后,基于技能背景,不要求解知识结构,就可更简单、更快速的确定问题的推测关系,故有必要在技能背景下讨论问题的推测关系。

2 预备知识

2.1 形式概念分析概述

定义 1.^[9] 三元组 (U, A, I) 称为一个形式背景,其中 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 是对象集, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ 是属性集, I 是 $U \times A$ 上的二元关系。若 $(x, a) \in I$, 则称对象 x 具有属性 a ; 若 $(x, a) \notin I$, 则称对象 x 不具有属性 a 。

定义 2.^[9] 设 (U, A, I) 为形式背景, 在对象集 $X \subseteq U$ 和属性集 $B \subseteq A$ 上分别定义运算

$$x^* = \{a \in A | (x, a) \in I\}; \quad a^* = \{x \in U | (x, a) \in I\};$$

$$X^\square = \{a \in A | a^* \subseteq X\}; \quad B^\square = \{x \in U | x^* \subseteq B\};$$

$$X^\diamond = \{a \in A | a^* \cap X \neq \emptyset\}; \quad B^\diamond = \{x \in U | x^* \cap B \neq \emptyset\}.$$

定义 3.^[9] 设 (U, A, I) 为形式背景, 若 $X^\square = B, B^\diamond = X$, 则称 (X, B) 为面向对象概念; 若 $X^\diamond = B, B^\square = X$, 则称 (X, B) 为面向属性概念。此时称 X 为面向对象(属性)概念的外延, B 为面向对象(属性)概念的内涵。

用 $oL(U, A, I)$ 表示形式背景 (U, A, I) 的全体对象概念, 用 $pL(U, A, I)$ 表示形式背景 (U, A, I) 的全体属性概念。

定义 4.^[9] 设 (U, A, I) 为形式背景, 若 $X_1 \subseteq X_2$,

记 $(X_1, B_1) \subseteq (X_2, B_2)$, 则 $oL(U, A, I)$ 与 $pL(U, A, I)$ 上的偏序关系。

在 $oL(U, A, I)$ 上定义:

$$(X_1, B_1) \vee_o (X_2, B_2) = (X_1 \cup X_2, (B_1 \cup B_2)^\diamond \square);$$

$$(X_1, B_1) \wedge_o (X_2, B_2) = ((X_1 \cap X_2)^\square, B_1 \cap B_2).$$

在 $pL(U, A, I)$ 上定义:

$$(X_3, B_3) \vee_p (X_4, B_4) = ((X_3 \cup X_4)^\square, B_3 \cup B_4);$$

$$(X_3, B_3) \wedge_p (X_4, B_4) = (X_3 \cap X_4, (B_3 \cap B_4)^\diamond \square), \quad \text{则 } (oL(U, A, I), \vee, \wedge) \text{ 与 } (pL(U, A, I), \vee, \wedge) \text{ 都是完备格, 称 } oL(U, A, I) \text{ 与 } pL(U, A, I) \text{ 分别为形式背景 } (U, A, I) \text{ 的面向对象概念格与面向属性概念格。}$$

2.2 知识空间理论概述

在知识空间理论中,把能够反映学习者在某一领域的知识水平的非空问题构成的集合称为问题域,通常记为 $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ 。基于问题域,给出如下定义。

定义 5.^[1] 学习者在理想状态下能正确解决的问题域 Q 中的问题构成的集合,称为知识状态(Knowledge state),记为 K 。

所谓理想状态是指学生在没有受到外界压力或情绪影响的情况下,没有由粗心致错和侥幸蒙对的情况。

定义 6.^[1] 设 K 是问题域 Q 的一些子集构成的知识状态集族,且 K 至少包含 \emptyset 和 Q , 则称 (Q, K) 为知识结构(Knowledge structure)。

定义 7.^[12] 设 (Q, K) 为知识结构,若 K 满足有限并封闭,即 $\forall K_i, K_j \in K \Rightarrow K_i \cup K_j \in K$, 则称 (Q, K) 为知识空间(Knowledge space); 若 K 满足有限交封闭,即 $\forall L_i, L_j \in K \Rightarrow L_i \cap L_j \in K$, 则称 (Q, K) 为闭包空间(Closure Spaces)。

定义 8.^[12] 设 G, G' 分别为两个集族,若 G' 包含 G 中所有有限个元素的并组成的集合,则称集族 G' 是 G 的张成(span),记为 $(G) = G'$ 或 G 张成 G' 。

定义 9.^[12] 设 (Q, K) 为知识空间。若 B 是张成 K 的最小子集族,则称 B 是 (Q, K) 的基(base),且约定 $\emptyset \notin B$ 。

李进金等^[15]把知识空间的基称为知识基。若知识空间 (Q, K) 是有限的,则 K 存在唯一的知识基。本文只讨论知识空间有限的情形。

定义 10.^[13] 三元组 (Q, S, τ) 称为一个技能映射,其中 Q 为问题域, S 为非空技能集, τ 是从 Q 到 $2^S \setminus \{\emptyset\}$ 的映射。若 $s \in \tau(q)$, 则表示问题 q 的求解

与技能 s 无关；若 $s \in \tau(q)$ ，则表示问题 q 的求解与技能 s 相关。

技能映射主要通过析取模型与合取模型来诱导知识结构。技能子集 $T \subseteq S$ 在析取模型下诱导的知识状态为 $K = \{q \in Q | \tau(q) \cap T \neq \emptyset\}$ 。将 T 取遍 S 的所有子集，则所有知识状态构成的集族 K 称为技能映射 (Q, S, τ) 在析取模型下诱导的知识空间。技能子集 $T \subseteq S$ 在合取模型下诱导的知识状态为 $K = \{q \in Q | \tau(q) \subseteq T\}$ 。将 T 取遍 S 的所有子集，则所有知识状态构成的集族 L 称为技能映射 (Q, S, τ) 在合取模型下诱导的闭包空间。若技能映射相同，则在析取模型下诱导的知识空间与在合取模型下诱导的闭包空间互为对偶。

定义 11.^[13] 设 (Q, S, τ) 为技能映射，若 $\forall s \in S$ ，技能映射 $(Q, S - \{s\}, \tau_{S - \{s\}})$ 诱导的知识结构与 (Q, S, τ) 诱导的知识结构都不同，则称 S 为极小技能集， (Q, S, τ) 为极小技能映射。

定义 12.^[1] 设 (Q, K) 是一个知识结构， \leq 为 Q 上的关系，记 $K_r = \{K \in K | r \in K\}$ 。若 $r \leq q \Leftrightarrow r \in \cap K_q$ 成立，则称 \leq 为推测关系。当 $r \leq q$ 时，称由 q 可推测出 r 。

$r \leq q$ 可直观理解为问题 r 比问题 q 更简单，学习者若能解决问题 q ，则必能解决问题 r 。

引理 1.^[12] 设 (Q, K) 是一个知识结构，记 $K_q = \{K \in K | q \in K\}$ 。对 $\forall r, q \in Q$ ，有 $r \leq q \Leftrightarrow K_q \subseteq K_r$ 。

引理 2.^[1] 设 (Q, K) 是一个知识结构。对 $\forall r, q \in Q, r \leq q \Leftrightarrow \forall K \in K$ ，有 $q \in K \Rightarrow r \in K$ 。

3 技能映射与技能背景

问题与技能具有某些特定的关系。例如，学生想要解决某些问题，则必须掌握一些相关的技能。

定义 13.^[11] 三元组 (Q, S, I) 称为一个技能背景，其中 Q 为问题集， S 为技能集。 $\forall q_j \in Q (j=1, 2, \dots, m)$ 为一个问题， $\forall s_i \in S (i=1, 2, \dots, n)$ 为一个技能。 I 是 $Q \times S$ 上的二元关系。若 $(q, s) \in I$ ，则表示问题 q 的求解与技能 s 相关，用 1 表示。若 $(q, s) \notin I$ ，则表示问题 q 的求解与技能 s 无关，用 0 表示。

定义 14. 设 (Q, S, I) 为技能背景，在问题集 $M \subseteq Q$ 和技能集 $T \subseteq S$ 上分别定义运算

$$q^* = \{s \in S | (q, s) \in I\}; s^* = \{q \in Q | (q, s) \in I\};$$

$$M^\square = \{s \in S | s^* \subseteq M\}; T^\square = \{q \in Q | q^* \subseteq T\};$$

$$M^\circ = \{s \in S | s^* \cap M \neq \emptyset\}; T^\circ = \{q \in Q | q^* \cap T \neq \emptyset\}.$$

其中 q^* 表示与问题 q 的求解相关的技能集； s^* 表示与技能 s 相关的问题集； M^\square 表示只能与 M 中

的问题求解相关的技能集； T^\square 表示只能与 T 中的技能相关的问题集； M° 表示与 M 中的问题求解相关的技能集； T° 表示与 T 中的技能相关的问题集。若 $M = T^\square$ ， $T = M^\square$ ，则称 (M, T) 为面向问题概念；若 $M = T^\circ$ ， $T = M^\circ$ ，则称 (M, T) 为面向技能概念。此时称 M 是面向问题（技能）概念的外延， T 是面向问题（技能）概念的内涵。将面向问题概念格 $oL(Q, S, I)$ 的所有外延构成的集族记为 $oL_Q(Q, S, I)$ ，将面向技能概念格 $pL(Q, S, I)$ 的所有外延构成的集族记为 $pL_Q(Q, S, I)$ 。

对于技能映射 (Q, S, τ) ， $s \in \tau(q)$ 表示技能 s 与问题 q 的求解相关，故 $(q, s) \in I \Leftrightarrow s \in \tau(q)$ ，即技能背景 (Q, S, I) 与技能映射 (Q, S, τ) 具有相互唯一确定的关系。

例 1 给定技能映射 (Q_1, S_1, τ_1) ，其中 $Q_1 = \{a, b, c, d, e\}$ ， $S_1 = \{s, t, u, v\}$ ， $\tau_1(a) = \{t\}$ ， $\tau_1(b) = \{t, v\}$ ， $\tau_1(c) = \{v\}$ ， $\tau_1(d) = \{s, u, v\}$ ， $\tau_1(e) = \{t, v\}$ 。由 $(q, s) \in I_1 \Leftrightarrow s \in \tau_1(q)$ 可得 (Q_1, S_1, τ_1) 对应的技能背景 (Q_1, S_1, I_1) 如表 1 所示。由文献^[15]求面向对象（属性）概念格的方法，求得其对应的面向问题概念格 $oL(Q_1, S_1, I_1)$ 如图 1 所示，面向技能概念格 $pL(Q_1, S_1, I_1)$ 如图 2 所示。

表 1 技能背景 (Q_1, S_1, I_1)

| $Q_1 \backslash S_1$ | s | t | u | v |
|----------------------|---|---|---|---|
| a | 0 | 1 | 0 | 0 |
| b | 0 | 1 | 0 | 1 |
| c | 0 | 0 | 0 | 1 |
| d | 1 | 0 | 1 | 1 |
| e | 0 | 1 | 0 | 1 |

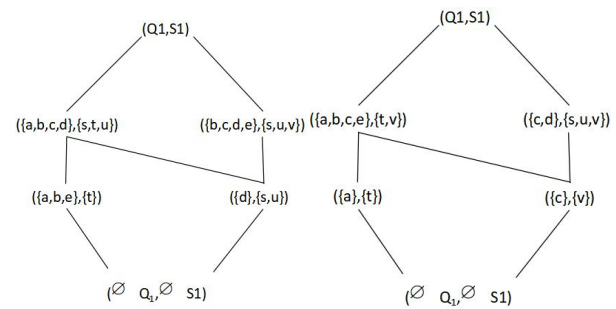


图 1 $oL(Q_1, S_1, I_1)$

图 2 $pL(Q_1, S_1, I_1)$

由图 1，面向问题概念格 $oL(Q_1, S_1, I_1)$ 的外延有 Q_1 ， $\{a, b, d, e\}$ ， $\{b, c, d, e\}$ ， $\{a, b, e\}$ ， $\{d\}$ ， \emptyset_{Q_1} ，内涵有 S_1 ， $\{s, t, u\}$ ， $\{s, u, v\}$ ， $\{s, u\}$ ， $\{t\}$ ， \emptyset_{S_1} 。由图 2，面向技能概念格 $pL(Q_1, S_1, I_1)$ 的外延有 Q_1 ， $\{a, b, c, e\}$ ， $\{c, d\}$ ， $\{a\}$ ， $\{c\}$ ， \emptyset_{Q_1} ，内涵有 S_1 ， $\{s, u, v\}$ ， $\{t, v\}$ ， $\{t\}$ ， $\{v\}$ ， \emptyset_{S_1} 。面向问题概念 $(\{a, b, d, e\}, \{s, t, u\})$ 表示与 $\{s, t, u\}$ 中的技能相关的问题是 $\{a, b, d, e\}$ 。面向

技能概念($\{a,b,c,e\}$, $\{t,v\}$)表示只能与 $\{t,v\}$ 中的技能相关的问题是 $\{a,b,c,e\}$ 。

4 结束语

本文将知识空间理论与形式概念分析中的面向对象(属性)概念格相联系。基于面向问题(技能)概念格,快速确定技能映射诱导的知识结构。此外,对知识基、技能约简以及推测关系与面向问题(技能)概念格的关系进行了研究。本文主要运用形式概念分析讨论了知识空间和闭包空间,今后将进一步研究知识空间理论中的其他知识结构与形式概念分析的联系。

参考文献

- [1] DOIGNON J P, FALMAGNE J C. Spaces for the assessment of knowledge[J]. International Journal of Manmachine Studies, 1985, 23(2): 175-196.
- [2] Zhou Xian, Xie Shenquan. Adaptive testing process based on knowledge space theory [J]. Computer applications, 2007, 27: 68-72.
(周弦, 谢深泉. 基于知识空间理论的自适应测试过程[J]. 计算机应用, 2007, 27: 68-72.)
- [3] COSYN E, DOBLE C, FALMAGNE J C, et al. Assessing mathematical knowledge in a learning space[M]//Springer, Berlin, Heidelberg. Knowledge Spaces. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013: 27-50.
- [4] DOBLE C, MATAYOSHI J, COSYN E, et al. A data-based simulation study of reliability for an adaptive assessment based on knowledge space theory[J]. International Journal of Artificial Intelligence in Education, 2019, 29(2): 258-282.
- [5] WILLE R. Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts[M]//Rival I. Ordered Sets. Dordrecht: Reidel, 1982: 445-470.
- [6] ZUPA B, BOHANCE M. Learning by discovering concept hierarchies[J]. Artificial Intelligence, 1999, 109: 211-242.
- [7] VALTCHEV P, MISSAOUI R, GODIN R, et al. Generating frequent item sets incrementally: Two novel approaches based on Galois lattice theory[J]. Journal of Experimental and Theoretical Artificial Intelligence, 2002, 14: 115-142.
- [8] RUSCH A, WILLE R. Knowledge spaces and formal concept analysis[M]//Data Analysis and Information Systems. Berlin, Heidelberg: Springer, 1996: 427-436.
- [9] SPOTO A, STEFANUTTI L, VIDOTTO G. Knowledge space theory, formal concept analysis, and computerized psychological assessment[J]. Behavior Research Methods, 2010, 42(1): 342-350.
- [10] Li Jinjin, Sun Wen. Knowledge space, formal background and knowledge base [J]. JOURNAL OF NORTHWEST UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE EDITION), 2019 (4): 517-526
(李进金, 孙文. 知识空间、形式背景和知识基[J]. 西北大学学报(自然科学版), 2019(4): 517-526.)
- [11] Zhou Yinfeng, Li Jinjin. Skill reduction and evaluation in formal context [J/OL]. Computer science and exploration: 1-10 [2021-03-16] <http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.5602.tp.20210128.0926.002.html>.
(周银凤, 李进金. 形式背景下的技能约简与评估[J/OL]. 计算机科学与探索: 1-10[2021-03-16]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.5602.tp.20210128.0926.002.html>.)
- [12] DOIGNON J P, FALMAGNE J C. Learning spaces: interdisciplinary applied mathematics[M]. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011: 22-107.
- [13] DOIGNON J P. Knowledge spaces and skill assignments[M]//Contributions to Mathematical Psychology, Psychometrics, and Methodology. New York: Springer, 1994: 111-121.
- [14] Gao Chun, Wang Ruizhi. Generation of minimum skill set under disjunctive model of knowledge space theory [J]. Computer science and exploration, 2010 (12): 1109-1114.
(高纯, 王睿智. 知识空间理论析取模型下最小技能集的生成[J]. 计算机科学与探索, 2010(12): 1109-1114.)
- [15] Li Jinjin, Li Kedian, Wu Duangong. Knowledge system model based on rough set and concept lattice [M]. Beijing: Science Press, 2013.
(李进金, 李克典, 吴端恭. 基于粗糙集与概念格的知识系统模型[M]. 北京: 科学出版社, 2013.)