

硕士研究生课程 《智能信息处理》

形式概念分析

大连海事大学信息科学技术学院

第3章

格

概念格

概念格的应用

客观世界：事物及其相互联系

表示

对象-关系图

元表示

两对象-二元关系图

二元关系

传递关系

非传递关系

关系 有序对的集合。

二元关系 二元有序对的集合。

$\langle x, y \rangle$

$x \in X$



基本二元关系数量

$y \in Y$

$xR_c y$

$$C_n^1 \cdot C_m^1 = nm$$

$R_c \subseteq X \times Y$

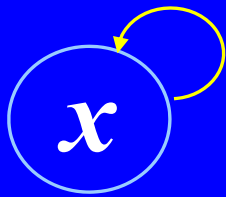
组合二元关系数量

$$R_c = \{ \langle x_i, y_j \rangle \mid x_i \in X \wedge y_j \in Y \}$$

$(i=1, \dots, n; j=1, \dots, m; c=1, \dots, k)$

$$C_{nm}^0 + C_{nm}^1 + C_{nm}^2 + \dots + C_{nm}^{nm} = 2^{nm}$$

一对象 二元关系



$$R_0 = \emptyset$$

空关系

$$R_1 = \{ \langle x, x \rangle \}$$

恒等关系
全域关系

R_1 具有自反性

两对象

$$R_0 = \emptyset$$

空关系

$$\text{基本关系 } C_2^1 \cdot C_2^1 = 4$$

自反关系



$$R_1 = \{ \langle x, x \rangle \}$$

$$R_2 = \{ \langle x, y \rangle \}$$

$$R_3 = \{ \langle y, x \rangle \}$$

反对称关系



组合关系

$$C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 2^4 = 16$$

反对称关系



$$R_4 = \{ \langle y, y \rangle \}$$

$$R_5 = \{ \langle x, x \rangle, \langle x, y \rangle \}$$

$$R_6 = \{ \langle x, x \rangle, \langle y, x \rangle \}$$

$$R_7 = \{ \langle x, x \rangle, \langle y, y \rangle \}$$

$$R_8 = \{ \langle x, y \rangle, \langle y, x \rangle \}$$

$$R_9 = \{ \langle x, y \rangle, \langle y, y \rangle \}$$

$$R_{10} = \{ \langle y, x \rangle, \langle y, y \rangle \}$$

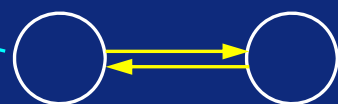
自反关系



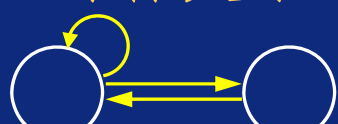
反对称关系



对称关系



对称关系



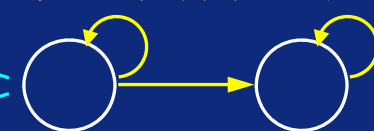
$$R_{11} = \{ \langle x, x \rangle, \langle x, y \rangle, \langle y, x \rangle \}$$

$$R_{12} = \{ \langle x, x \rangle, \langle x, y \rangle, \langle y, y \rangle \}$$

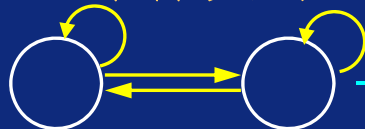
$$R_{13} = \{ \langle x, x \rangle, \langle y, x \rangle, \langle y, y \rangle \}$$

$$R_{14} = \{ \langle x, y \rangle, \langle y, x \rangle, \langle y, y \rangle \}$$

自反关系
反对称关系



自反关系
对称关系



$$R_{15} = \{ \langle x, x \rangle, \langle x, y \rangle, \langle y, x \rangle, \langle y, y \rangle \}$$

全域关系

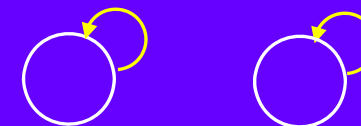
反自反关系

$$x \longrightarrow x \text{ ~~R~~ } x$$



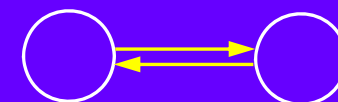
自反关系

$$x \longrightarrow x R x$$

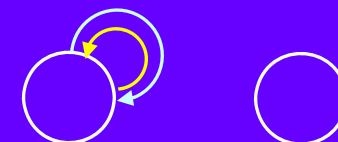


对称关系

$$x R y \wedge x \neq y \longrightarrow y R x$$

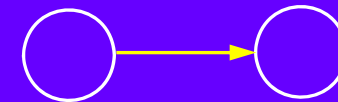


$$x R y \wedge x = y \longrightarrow x R x$$

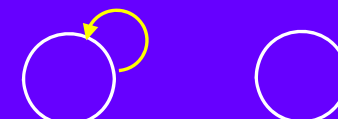


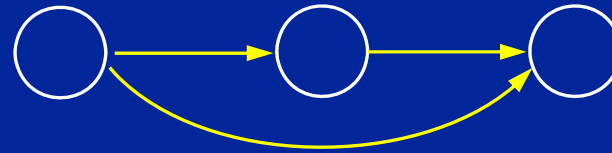
反对称关系

$$x R y \wedge x \neq y \longrightarrow y \text{ ~~R~~ } x$$



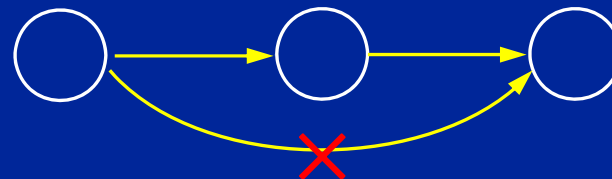
$$x R y \wedge y R x \longrightarrow x = y$$

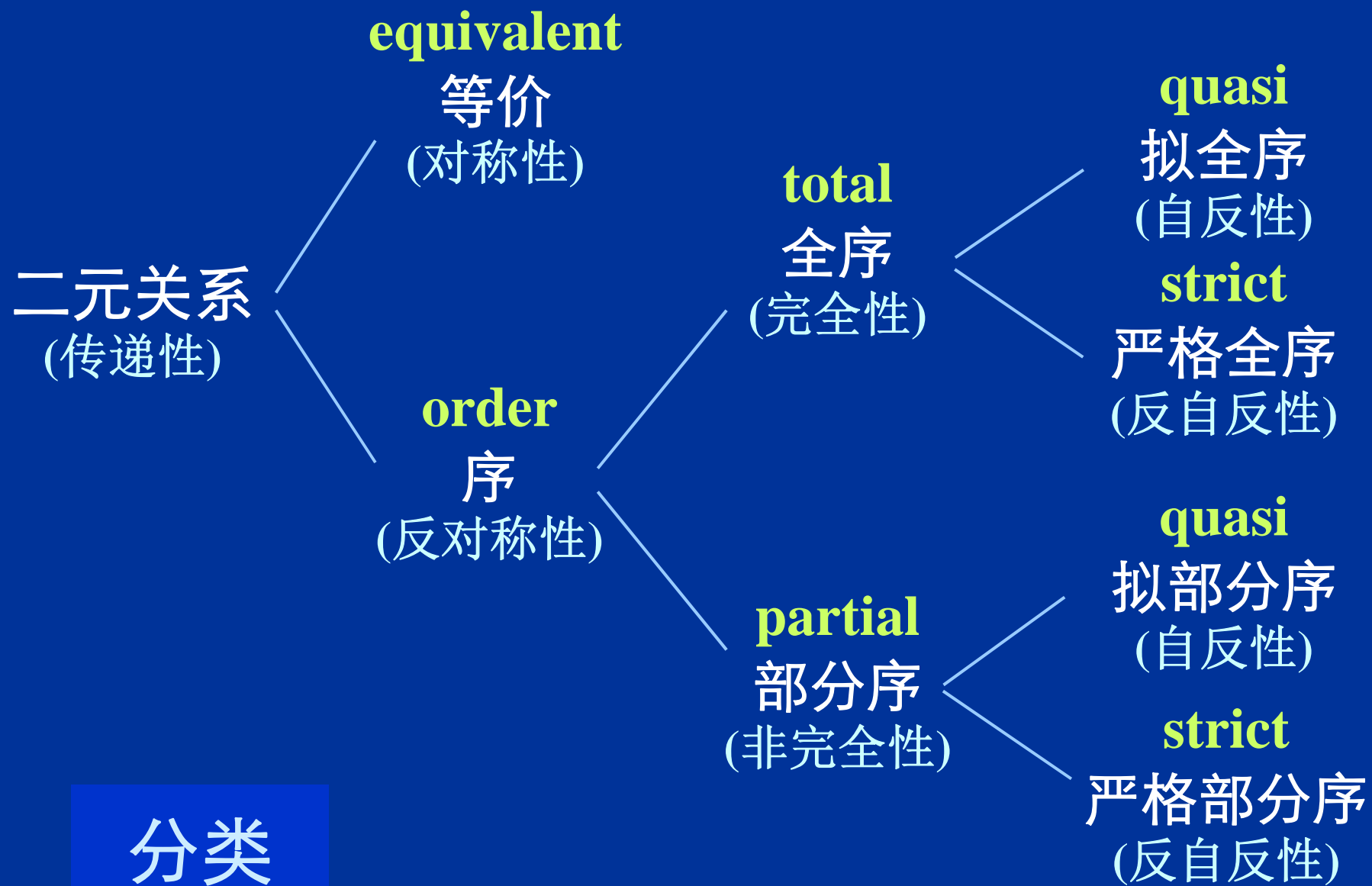




传递关系 $xRy \wedge yRz \longrightarrow xRz$

非传递关系 $xRy \wedge yRz \longrightarrow x\cancel{R}z$





分类

客观世界：事物及其相互联系

表示

二元关系

传递性 1

传递关系 5

非传递关系

对称性 2 等价关系

序关系

完全性 3

全序关系

偏序关系

自反性 4

拟全序

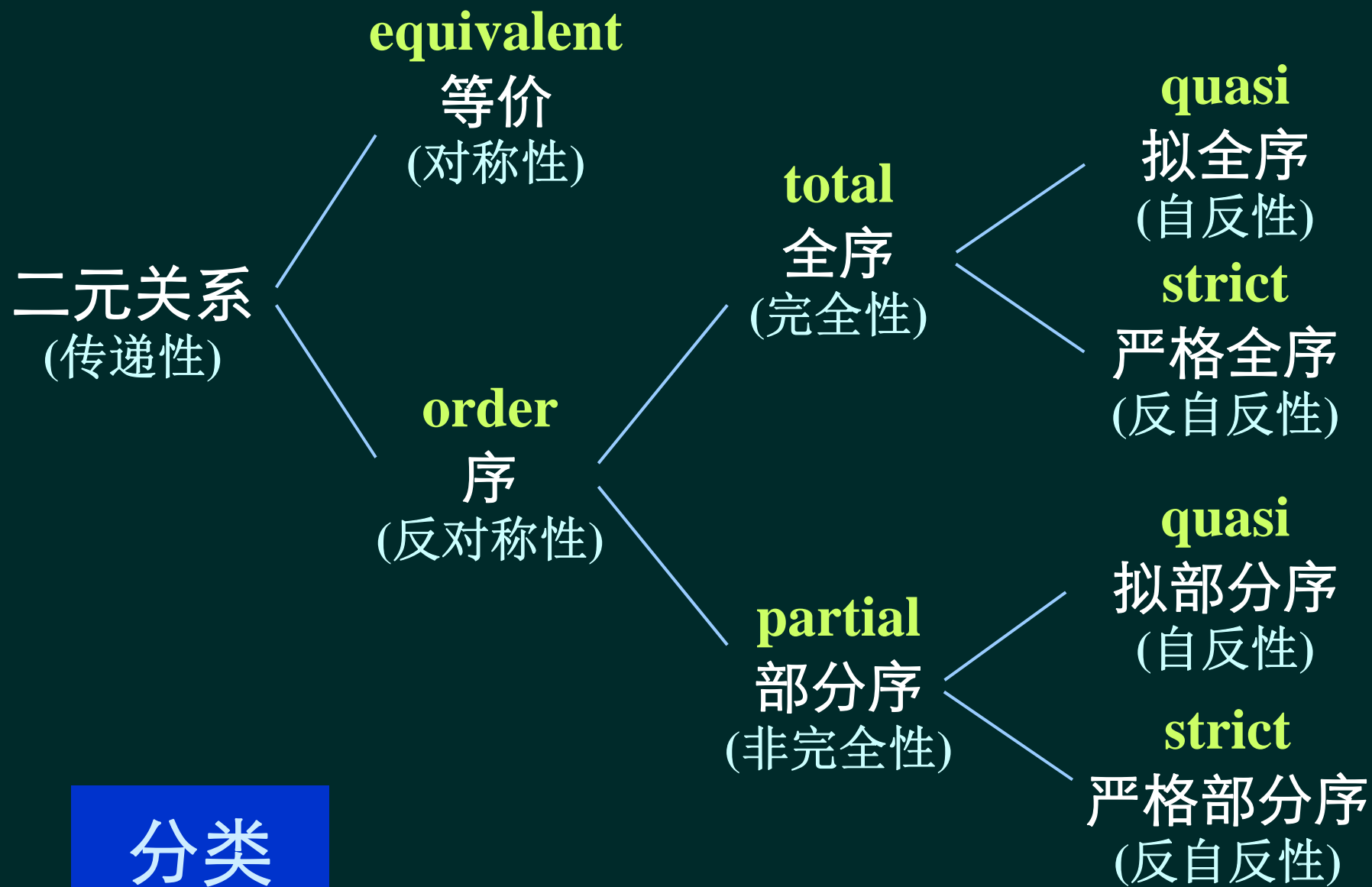
严格全序

拟偏序

严格偏序

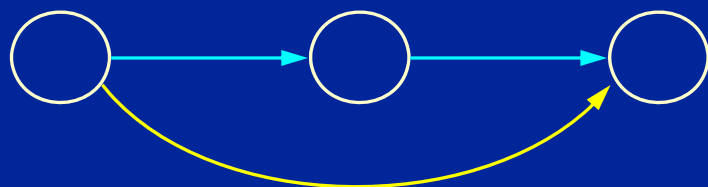
6

(传递性、反对称性、非完全性)



分类

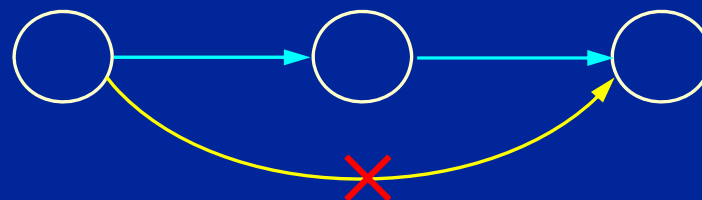
传递性



传递关系

- 传递性

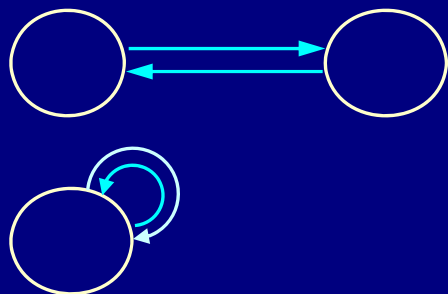
非传递性



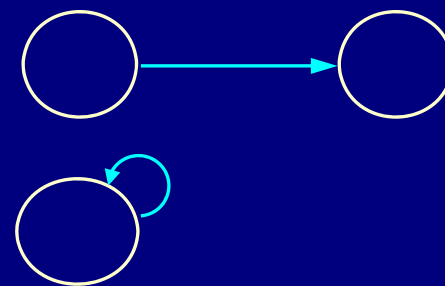
非传递关系

- 非传递性

对称性



反对称性



等价关系

- 传递性
- 对称性

序关系

- 传递性
- 反对称性

举例

等于关系 $=$
相似关系 \sim

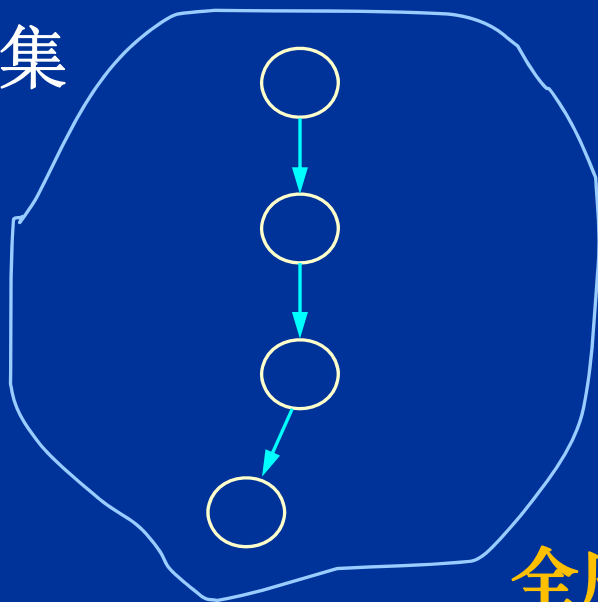
等于关系 $=$
大于等于关系 \geq



完全性

(任何两个对象都可比较)

对象集



全序集

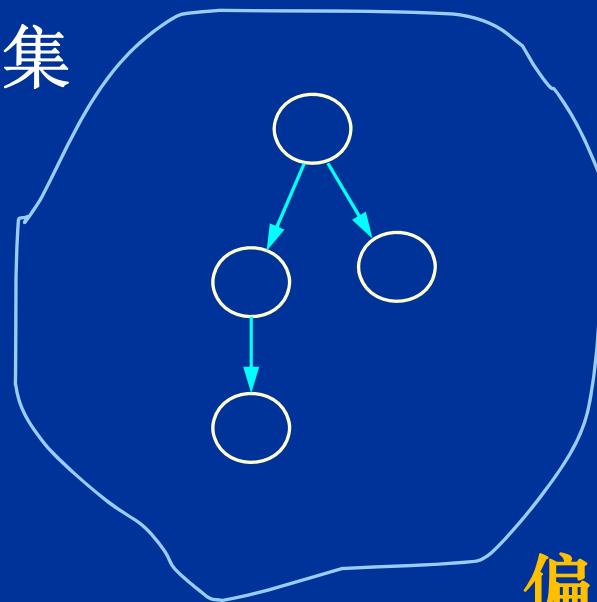
全序关系

- 传递性
- 反对称性
- 完全性

非完全性

(存在两个对象不可比较)

对象集



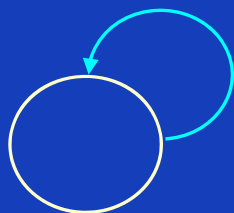
偏序集

偏序关系

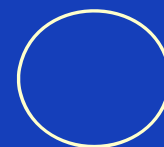
- 传递性
- 反对称性
- 非完全性



自反性



反自反性



拟序关系

- 自反性

严格序关系

- 反自反性

非完全性 传递性
反对称性

偏序关系 (partial order)

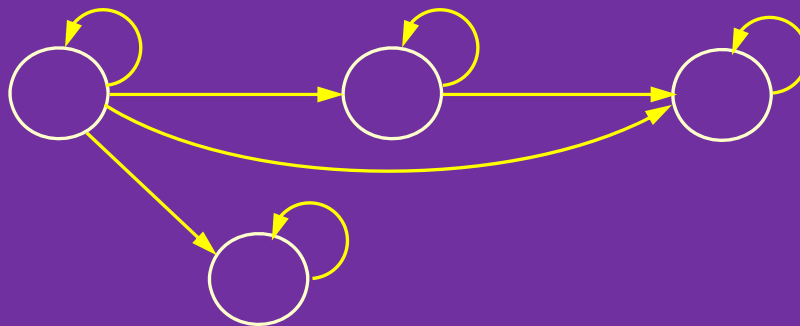
↓ 定义

偏序: 具有下列性质的二元关系

- (1) 非完全性;
- (2) 反对称性;
- (3) 传递性;
- (4) 自反性/反自反性。

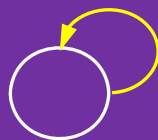
拟偏序 严格偏序

拟偏序集

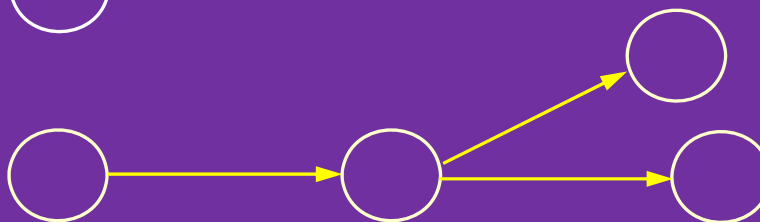


拟偏序关系(quasi partial order relation)

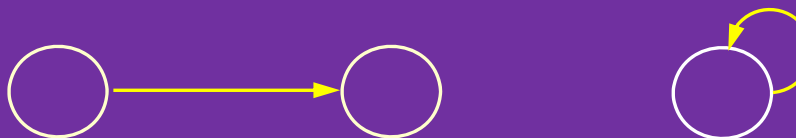
自反性



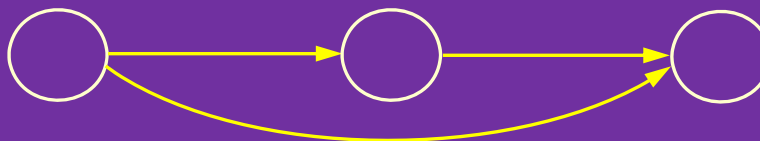
非完全性



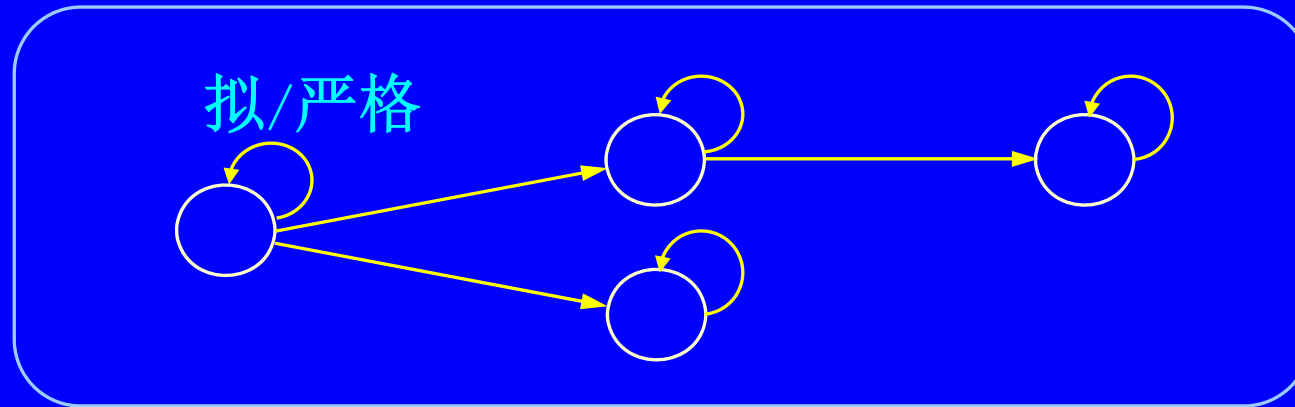
反对称性



传递性



偏序关系 (简称偏序, 用 \leq 表示)



举例

等于关系	=	
大于等于关系	\geq	大于关系 $>$
小于等于关系	\leq	小于关系 $<$
子集关系	\subseteq	真子集关系 \subset
同学关系		上下级关系

优势

扩展对象集为层级结构的系统

客观世界的基本特征

客观世界：事物及其相互联系

表示

表示

论域 U

对象集

偏序关系

偏序 \leq

偏序集

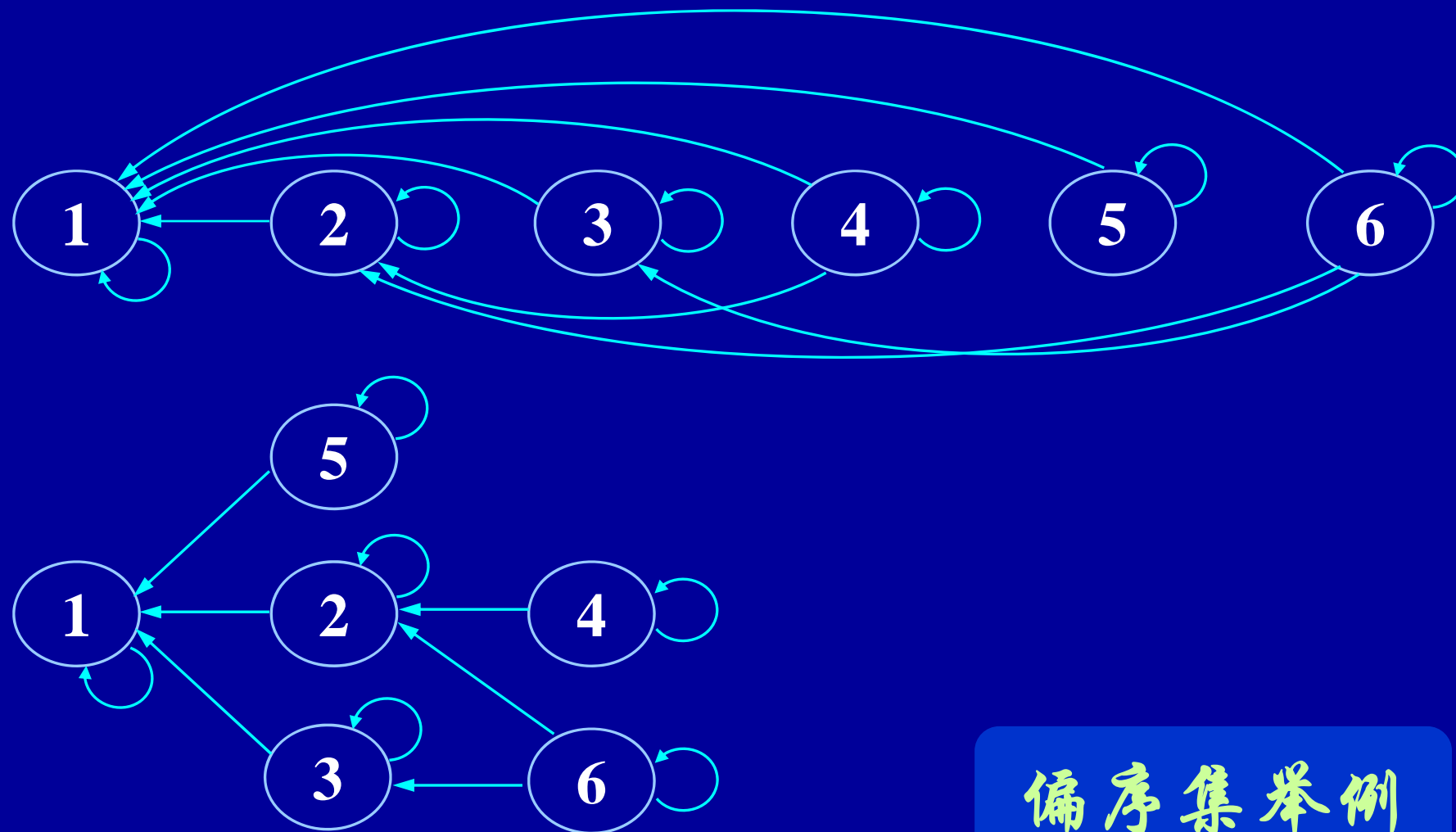
1

(U, \leq)

偏序集的Hasse图

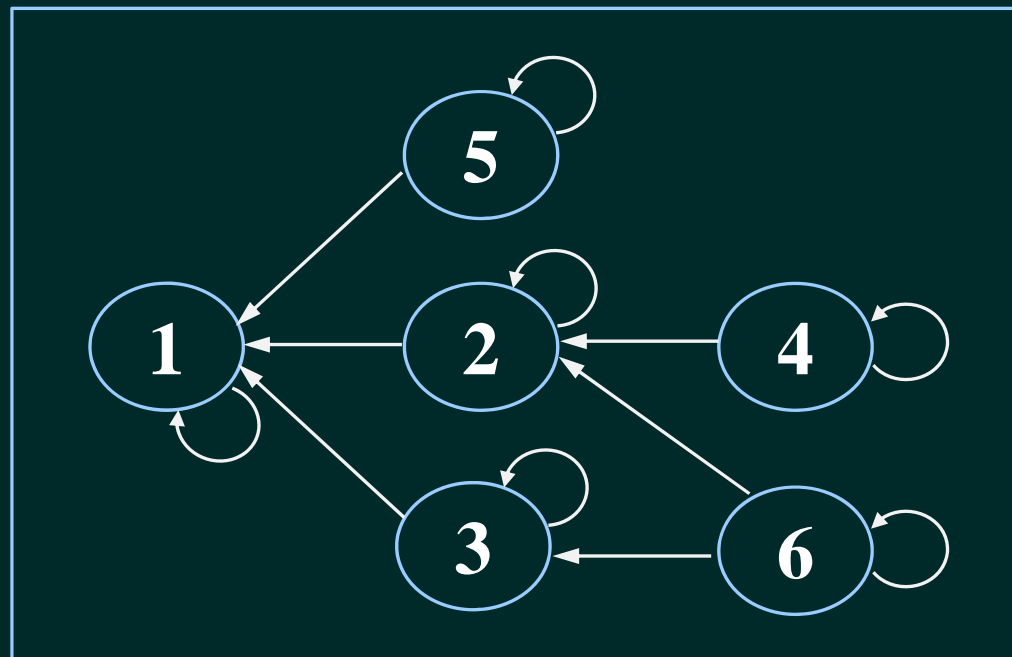
2

已知：论域 $U \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 偏序 \leq 整除关系
求解：偏序集

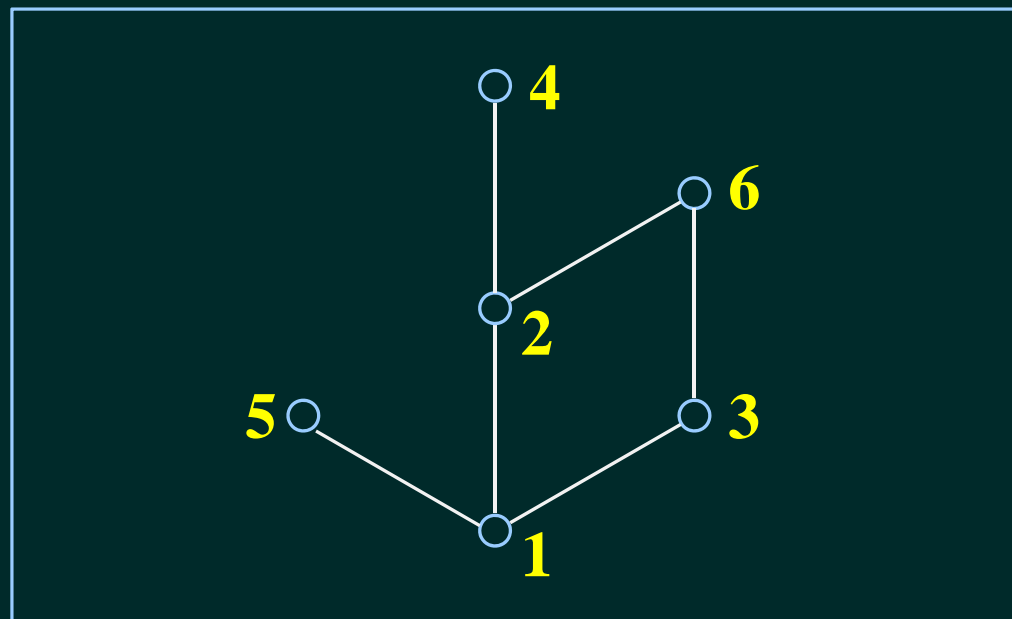


偏序集举例

偏序集



哈斯图



- 结点即对象
- 省略自反
- 省略箭头
- 指向朝下

客观世界：事物及其相互联系

表示

偏序集 (U, \leq)

常用 **Hasse** 图表示

任两元素的上、下确界存在 1

格 (U, \leq, \vee, \wedge)

2

任一子集的上、下确界存在 3

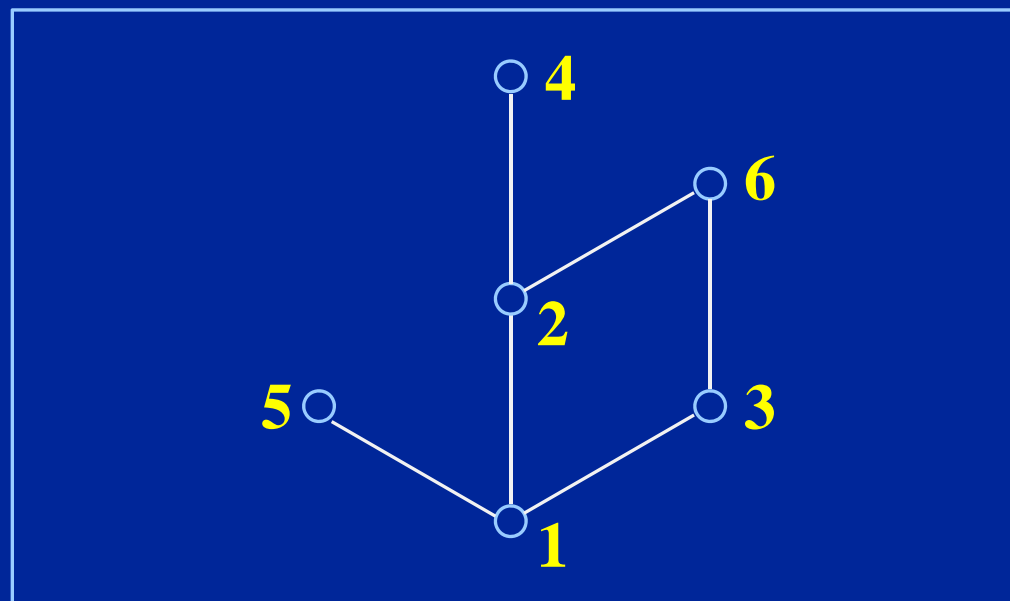
完备格 (U, \leq, \vee, \wedge)

4

偏序集中一个元素的上确界 \vee 和下确界 \wedge

元素 s 的上界 元素 a ($s \leq a$) 元素 s 的上确界 最小上界
元素 s 的下界 元素 a ($a \leq s$) 元素 s 的下确界 最大下界

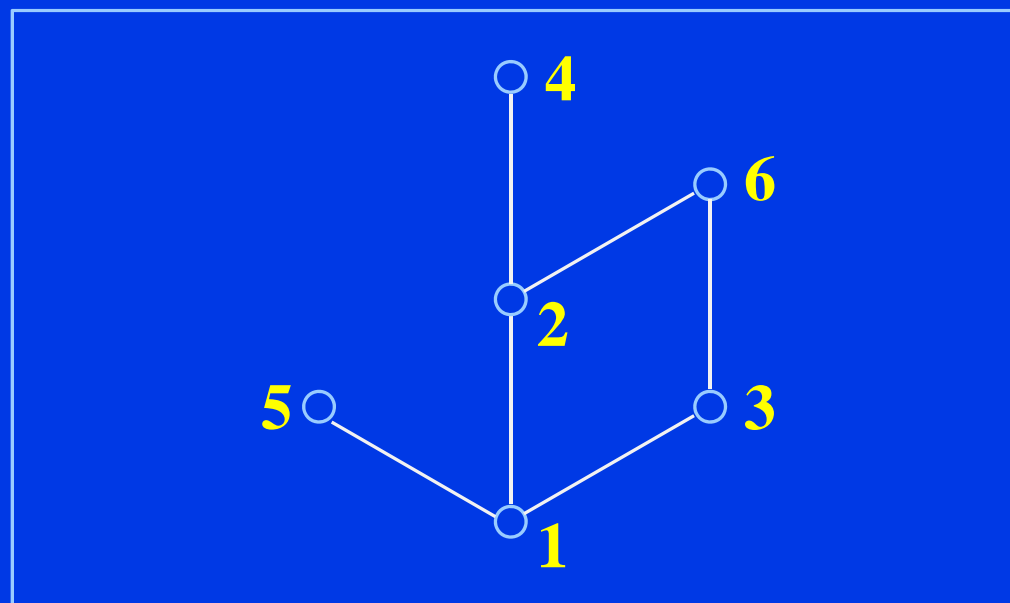
举例



结点4 上界: 4 下界: 4、2、1 上确界: 4 下确界: 4
结点2 上界: 6、4、2 下界: 2、1 上确界: 2 下确界: 2

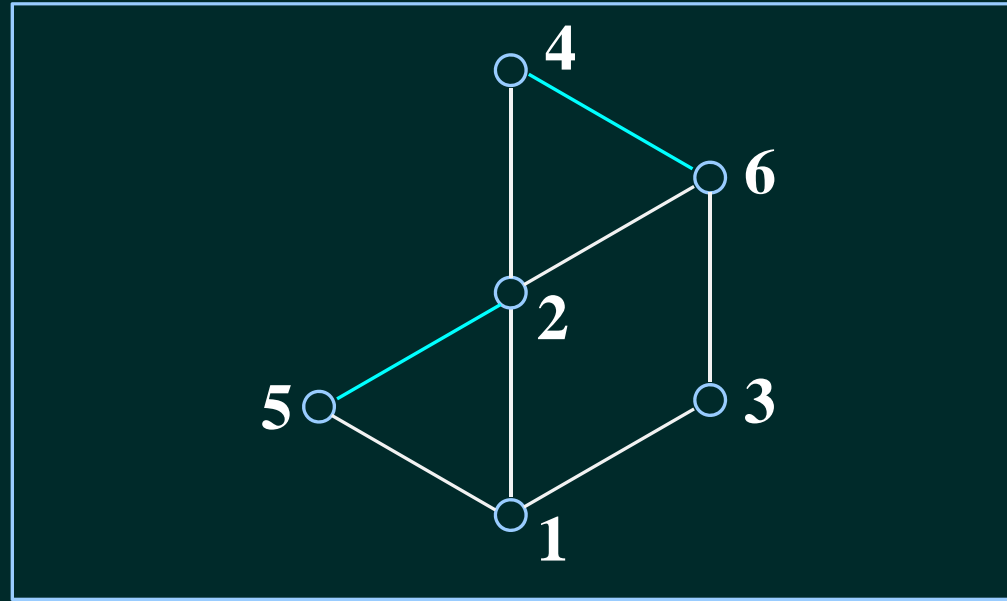
偏序集中两个元素的上确界 \vee 和下确界 \wedge

举例



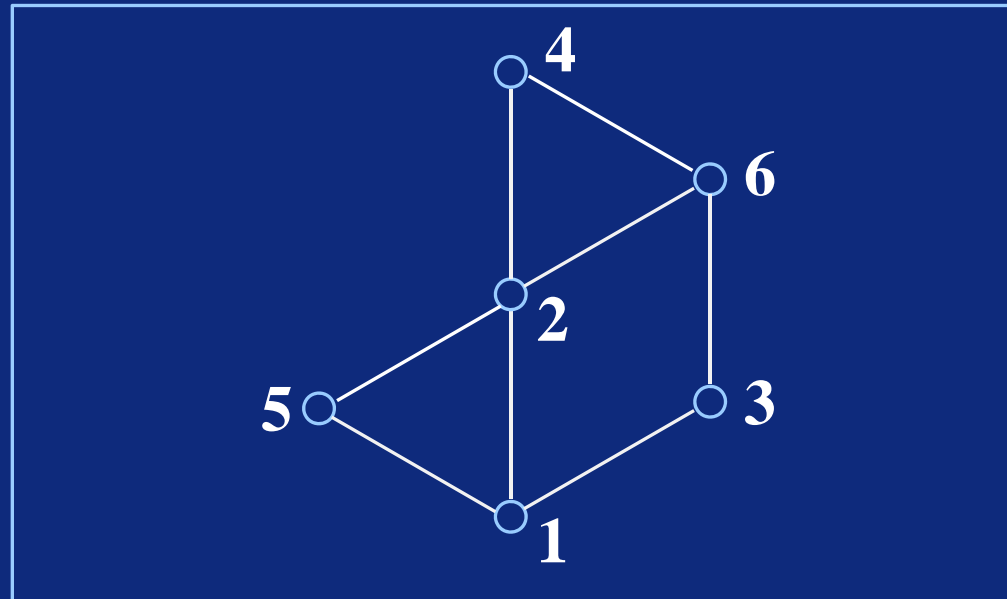
$\{4, 2\}$	上界: 4	下界: 2、1	上确界: 4	下确界: 2
$\{6, 2\}$	上界: 6	下界: 2、1	上确界: 6	下确界: 2
$\{3, 2\}$	上界: 6	下界: 1	上确界: 6	下确界: 1
$\{5, 2\}$	上界: \times	下界: 1	上确界: \times	下确界: 1

偏序集中两个元素的上确界 \vee 和下确界 \wedge



判断	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{1, 4\}$	$\{1, 5\}$	$\{1, 6\}$
		$\{2, 3\}$	$\{2, 4\}$	$\{2, 5\}$ \times	$\{2, 6\}$
			$\{3, 4\}$ \times	$\{3, 5\}$ \times	$\{3, 6\}$
				$\{4, 5\}$ \times	$\{4, 6\}$ \times
					$\{5, 6\}$ \times
添加	2 - 5	4 - 6			

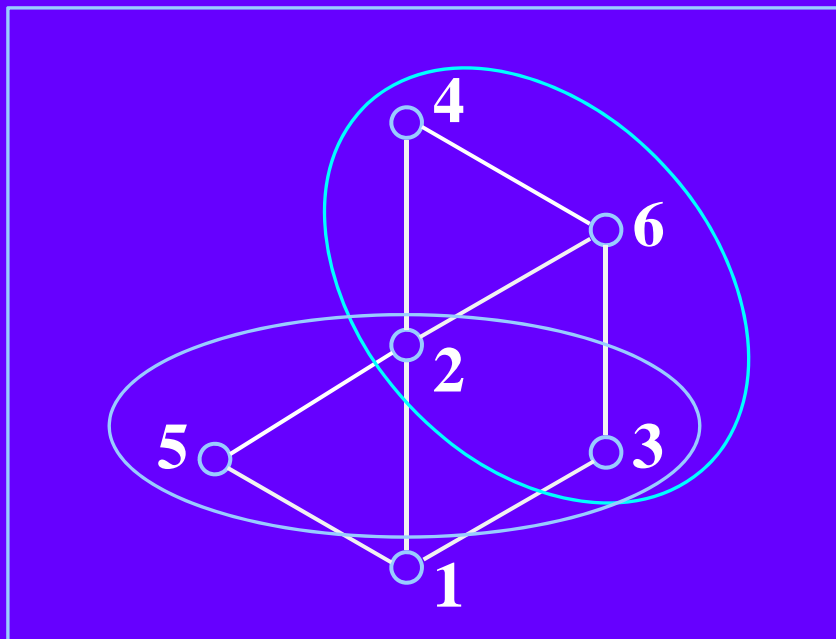
偏序集中两个元素的上确界 \vee 和下确界 \wedge



格(lattice)

任两个元素的上确界和下确界都存在的偏序集。

偏序集的子集的上确界 \vee 和下确界 \wedge



子集: $C_0 = 1$

$C_1 = 6$

$C_2 = 15$ ■

$C_3 = 20$ $2^n = 64$

$C_4 = 15$

$C_5 = 6$

$C_6 = 1$

$\{2, 3, 5\}$

上确界: 6

下确界: 1

$\{2, 3, 4, 6\}$

上确界: 4

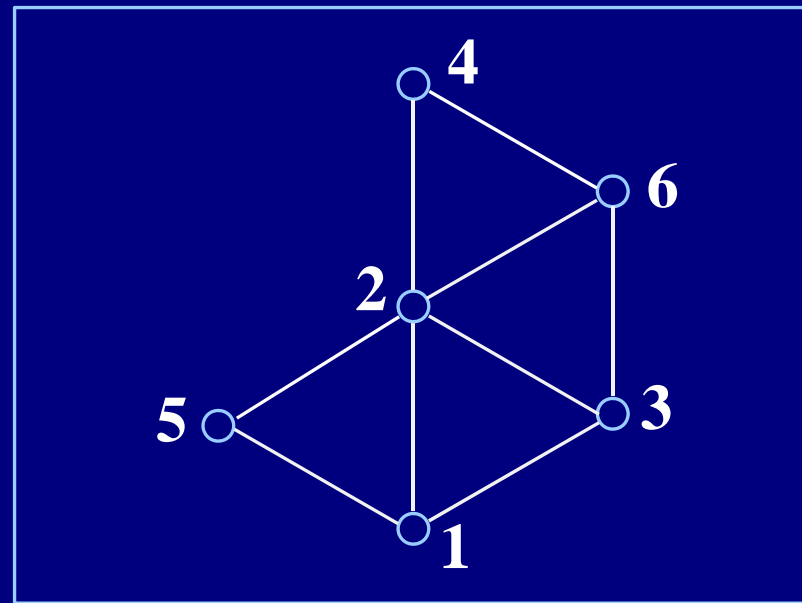
下确界: 1

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

上确界: 4

下确界: 1

完备格：任何子集均有直接上司和直接下属



一个最高点
一个最低点
任何两点连通

任何子集的上确界和下确界都存在的偏序集。

(完备性)

(向下方向)

客观世界：事物及其相互联系

表示

完备格 (U, \leq, \vee, \wedge)

子集的上确界 \vee 、下确界 \wedge 都存在的偏序集

偏序关系连接的对象集

非完全的反称的传递的二元关系



概念格的定义

概念格的构建

客观世界：事物及其相互联系

表示

表示

概念集

偏序关系

概念偏序集

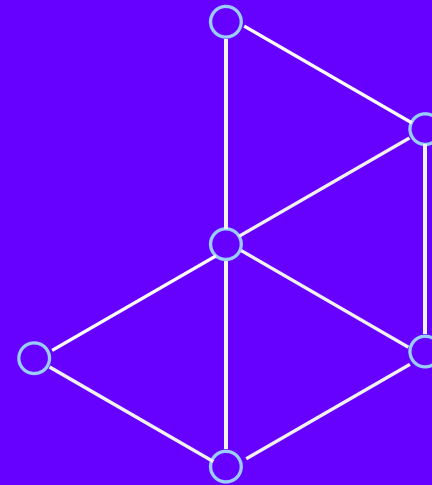
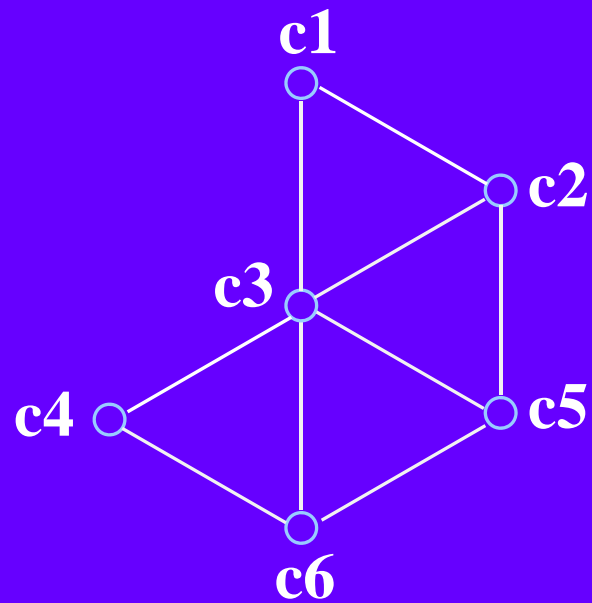
子集的上、下确界存在

概念格



(对象, 属性集)

概念格: 元素为概念的完备格。



客观世界：事物及其相互联系

表示

表示

形式背景
形式概念表

概念集

偏序关系

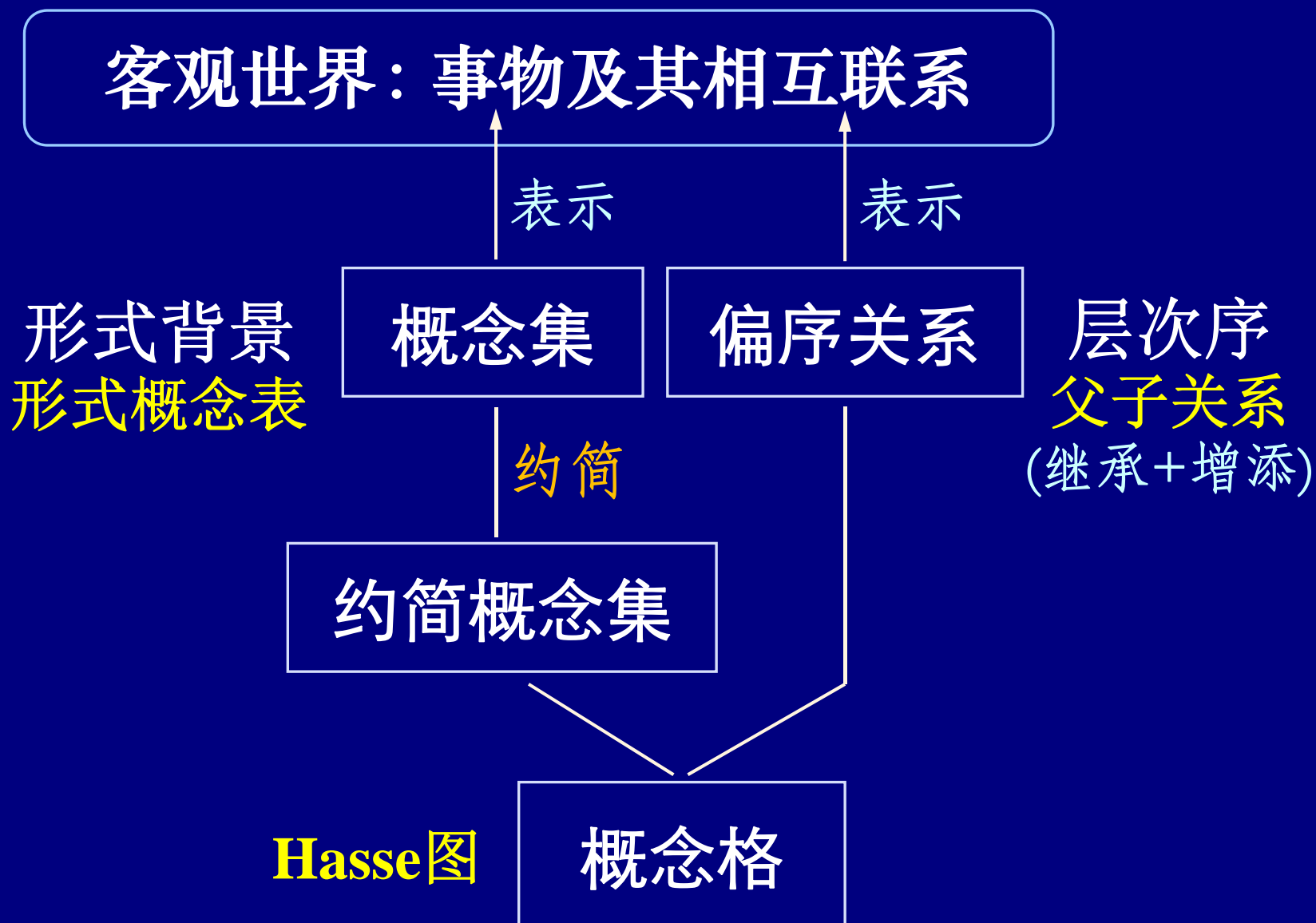
层次序
父子关系
(继承+增添)

约简

约简概念集

Hasse图

概念格



客观世界：事物及其相互联系

表示

表示

形式概念表

形式背景

父子关系

向下线段

约简

形式概念表

约简形式背景

形式概念---结点

父子关系---向下线段 ■

Hasse图


概念格

概念₁ = (对象₁, 属性集₁) 属性集₁ \subset 属性集₂ 父概念
 概念₂ = (对象₂, 属性集₂) 子概念

	a	b	c	d
1	×	×		×
2	×		×	
3		×		×



概念格的生成步骤

1. 生成形式背景
2. 约简形式背景
3. 生成单值形式背景 
4. 确定父子关系 (基于属性个数比较)
5. 绘制Hasse图
6. 补充各形式概念的上确界和下确界
7. 获得概念格

子类
属性值域 $\{1, \dots, k\}$

$n = k$ 多值

$n > k$ 多值粗糙

属性值域 $\{0, 1\}$

$n = k$ 单值

$n > k$ 单值粗糙

$n = k$ 单值模糊

$n > k$ 单值粗糙模糊

属性值域 $[0, 1]$

隶属度

$n = k$ 多值模糊

$n > k$ 多值粗糙模糊

概念格

粗糙概念格

模糊概念格

粗糙模糊概念格



基于形式背景的概念格构建实例

单值形式背景

概念格

粗糙概念格

单值粗糙形式背景

单值模糊形式背景

模糊概念格

粗糙模糊概念格

单值粗糙模糊形式背景

某办公用品销售公司的业务活动_形式背景

	设备	计算机	复印机	打字机	专用装置
咨询	Y	Y	Y	Y	Y
方案	Y	Y			
安装	Y	Y	Y	Y	Y
指导		Y	Y	Y	Y
培训		Y			
配件	Y	Y	Y	Y	Y
维修	Y	Y	Y	Y	Y
服务		Y	Y	Y	

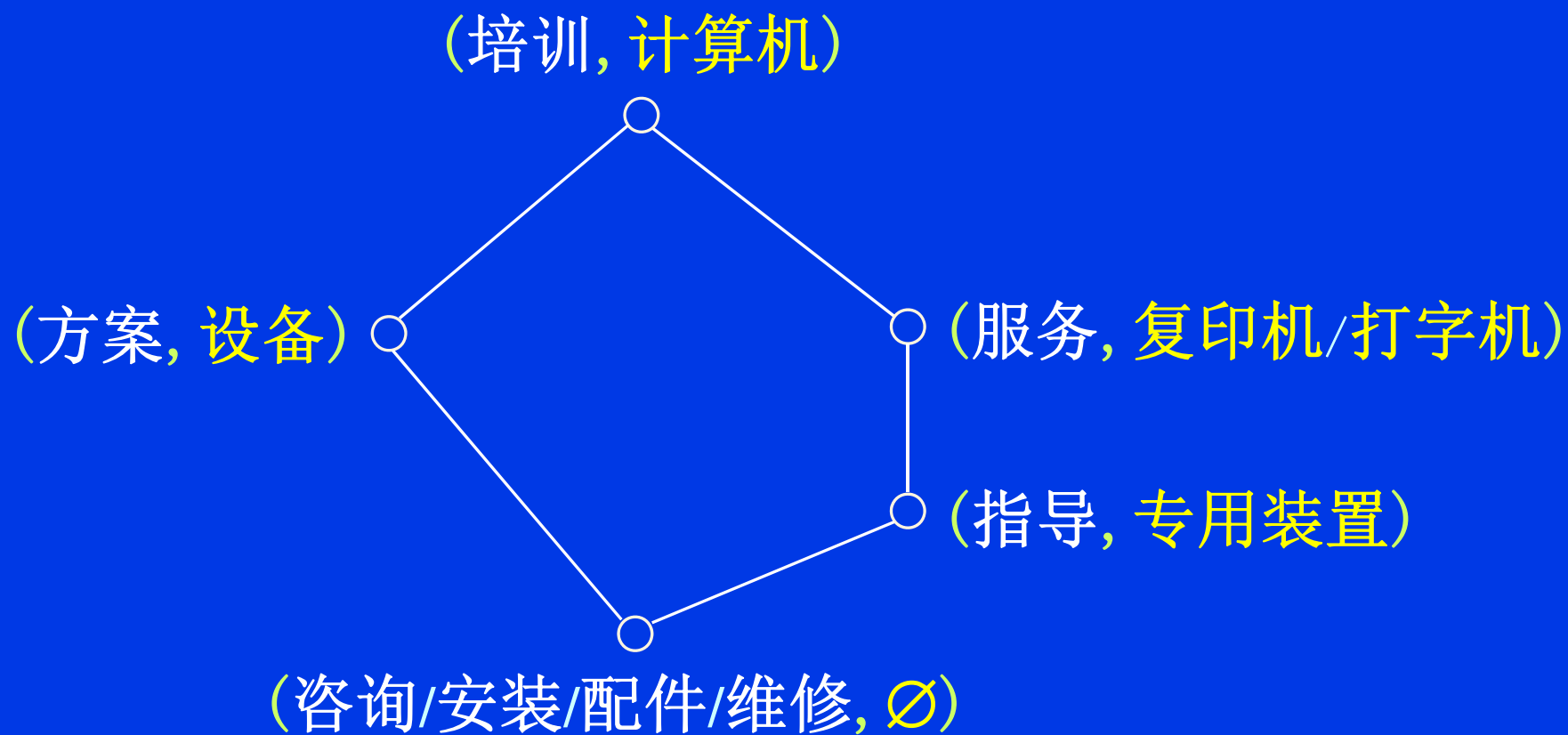
某办公用品销售公司业务活动_约简形式背景

	设备	计算机	复印机/打字机	专用装置
咨询/安装 配件/维修	Y	Y	Y	Y
方案	Y	Y		
指导		Y	Y	Y
培训		Y		
服务		Y	Y	

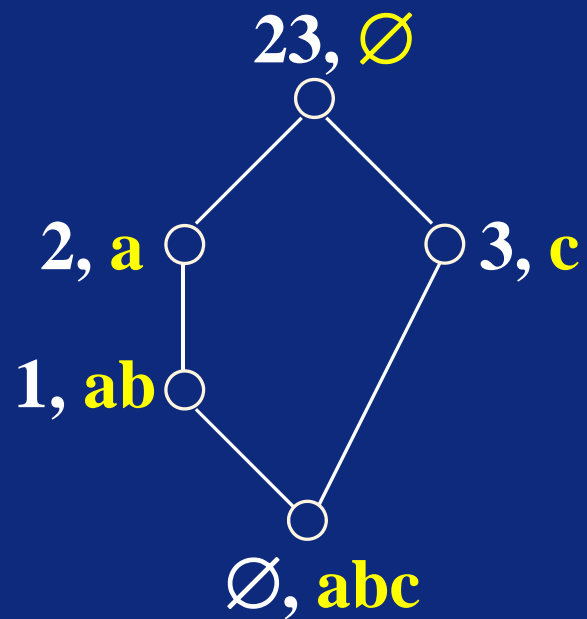
约简形式背景_基于属性个数的排序

	设备	计算机	复印机/打字机	专用装置
培训		Y		
方案	Y	Y		
服务		Y	Y	
指导		Y	Y	Y
咨询/安装 配件/维修	Y	Y	Y	Y

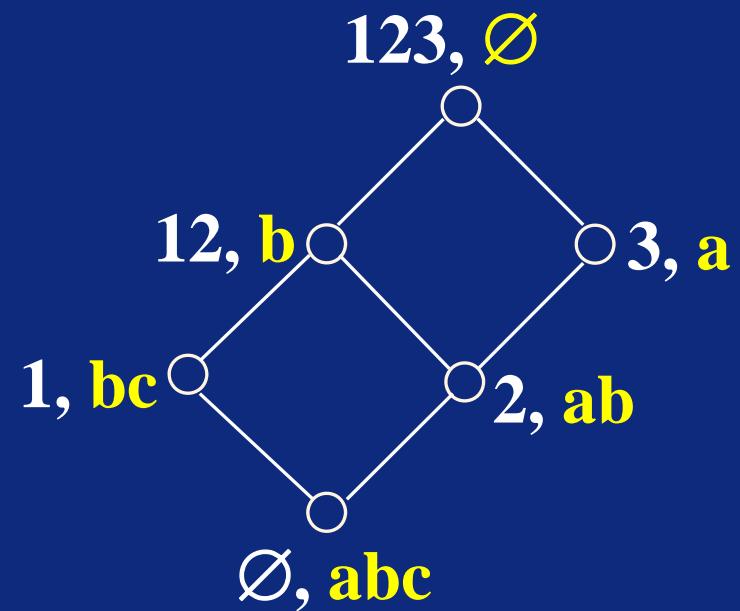
概念格：基于父子关系的渐进式构建



	a	b	c
1	×	×	
2	×		
3			×

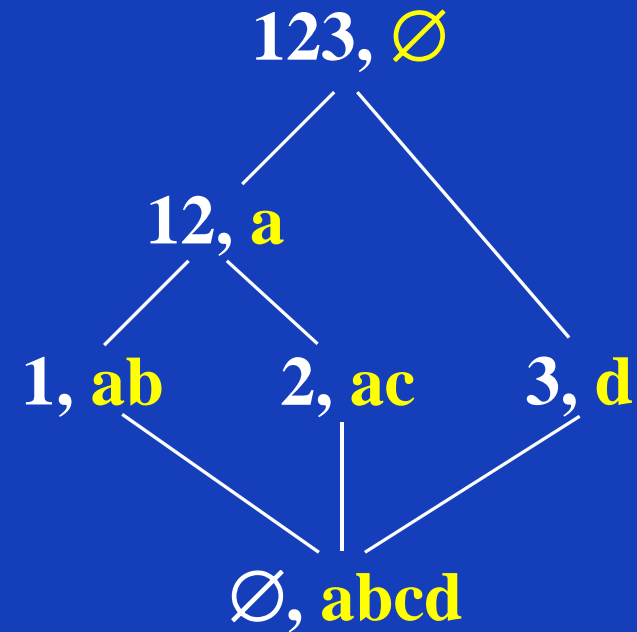
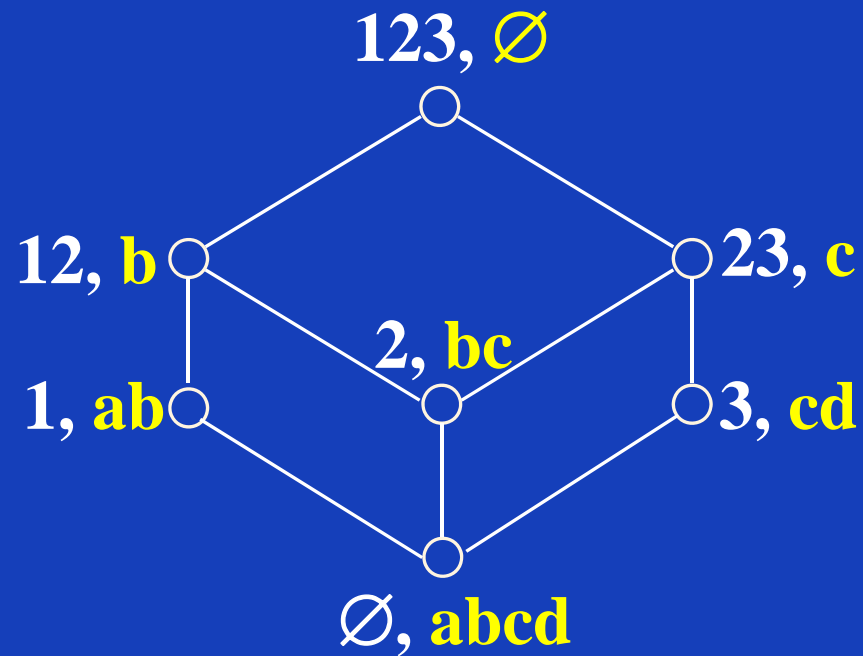


	a	b	c
1		×	×
2	×	×	
3	×		



	a	b	c	d
1	×	×		
2		×	×	
3			×	×

	a	b	c	d
1	×	×		
2	×		×	
3				×



知识库

对象	属性
x_1	1
x_2	2
x_3	2

约简知识库

等价类	属性
$\{x_1\}$	1
$\{x_2, x_3\}$	2

形式背景

形式对象	形式属性
$\{x_1\}$	1
$\{x_2\}$	可能2
$\{x_3\}$	可能2
$\{x_1, x_2\}$	1, 可能2
$\{x_1, x_3\}$	1, 可能2
$\{x_2, x_3\}$	2
$\{x_1, x_2, x_3\}$	1, 2

粗糙形式背景

粗糙形式背景

形式对象	形式属性
$\{x_1\}$	1
$\{x_2\}$	可能2
$\{x_3\}$	可能2
$\{x_1, x_2\}$	1, 可能2
$\{x_1, x_3\}$	1, 可能2
$\{x_2, x_3\}$	2
$\{x_1, x_2, x_3\}$	1, 2

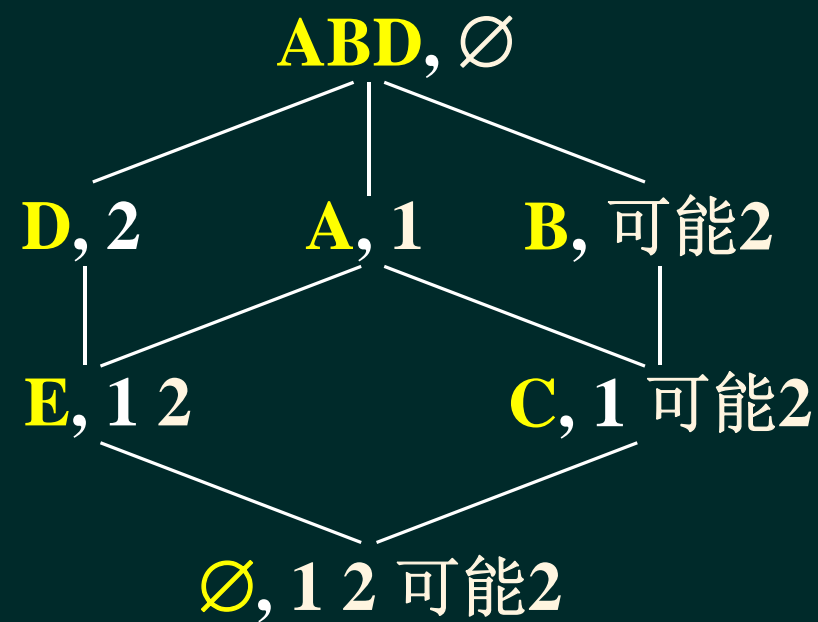
约简粗糙形式背景

形式对象	形式属性
$\{x_1\}$	1
$\{x_2\}\{x_3\}$	可能2
$\{x_1, x_2\}\{x_1, x_3\}$	1, 可能2
$\{x_2, x_3\}$	2
$\{x_1, x_2, x_3\}$	1, 2

粗糙形式背景

	1	2	可能2
A	×		
B			×
C	×		×
D		×	
E	×	×	

粗糙概念格



单值粗糙形式背景

	性别	身高
a		
b		
c		
d		
e		
f		
g		
h		

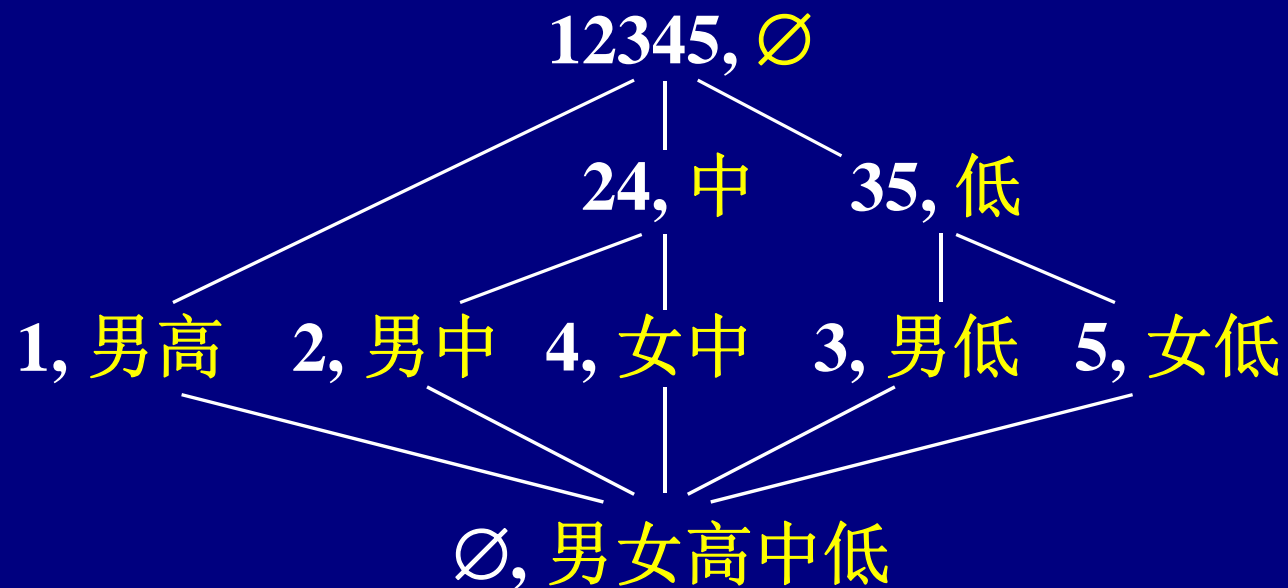


	男 女 高 中 低
1	
2	
⋮	
256	



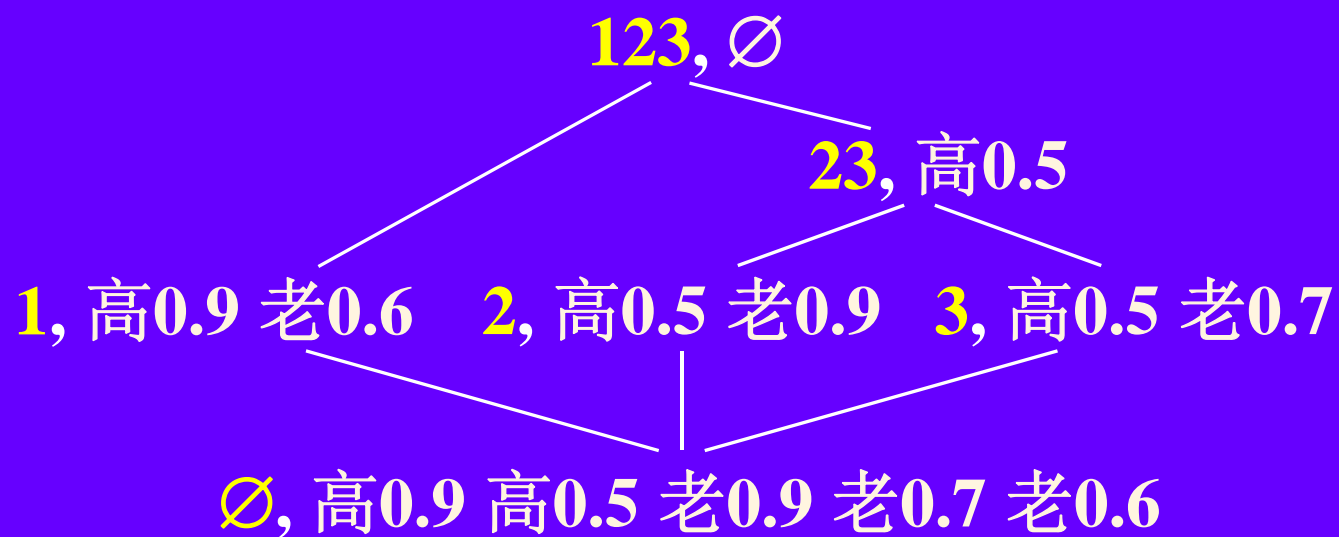
	性别	身高
1	男	高
2	男	中
3	男	低
4	女	中
5	女	低





人	高个	老年
1	0.9	0.6
2	0.5	0.9
3	0.5	0.7

	高0.9	高0.5	老0.9	老0.7	老0.6
1	×				×
2		×	×		
3		×		×	





论域

对象
1
2
3

知识库

对象	老年
{1}	0.9
{2, 3}	0.5

形式背景

对象	老年
{1}	0.9
{2}	可能0.5
{3}	可能0.5
{1, 2}	0.9, 可能0.5
{1, 3}	0.9, 可能0.5
{2, 3}	0.5
{1, 2, 3}	0.9, 0.5

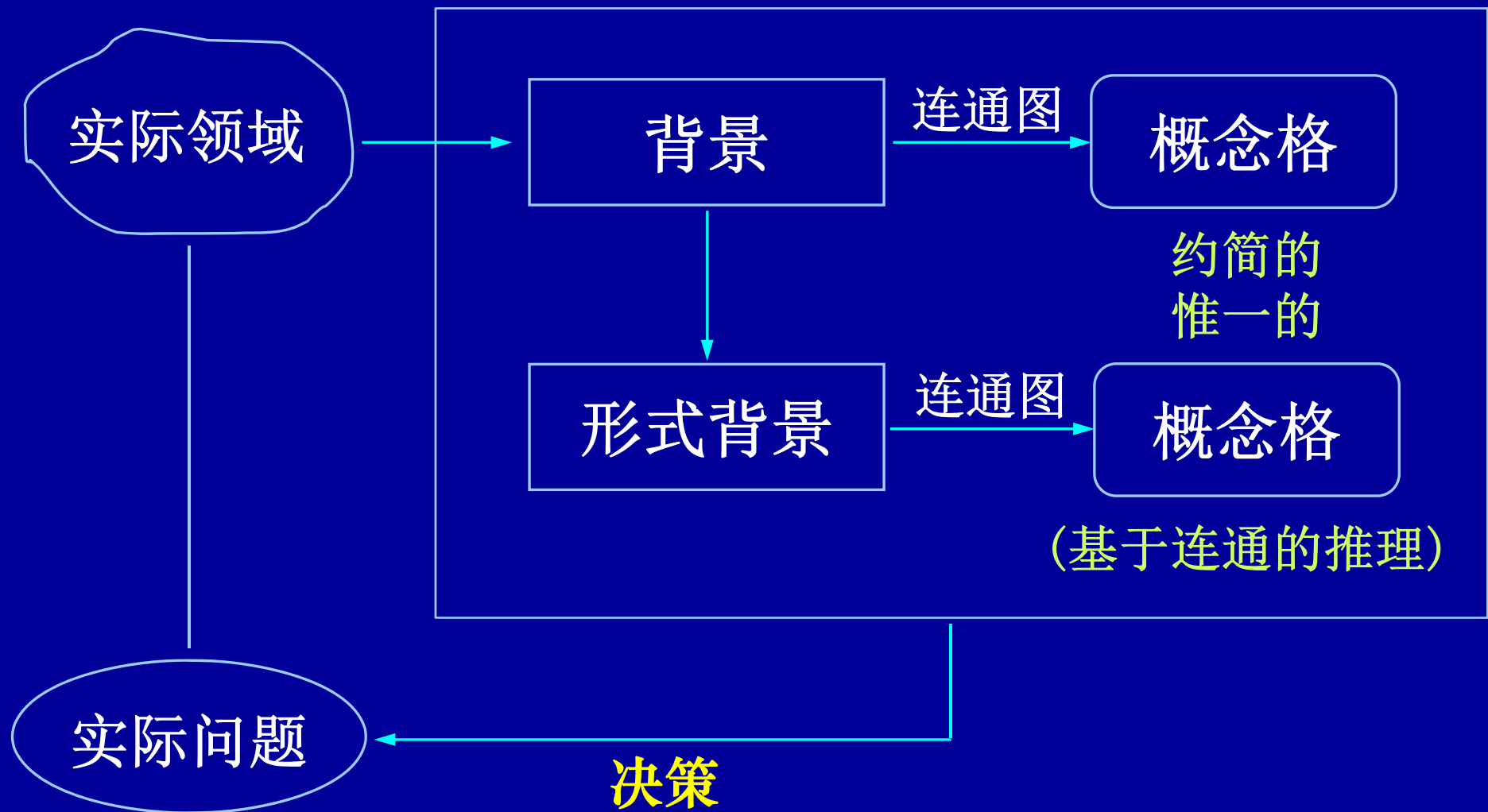
粗糙模糊形式背景



粗糙模糊概念格

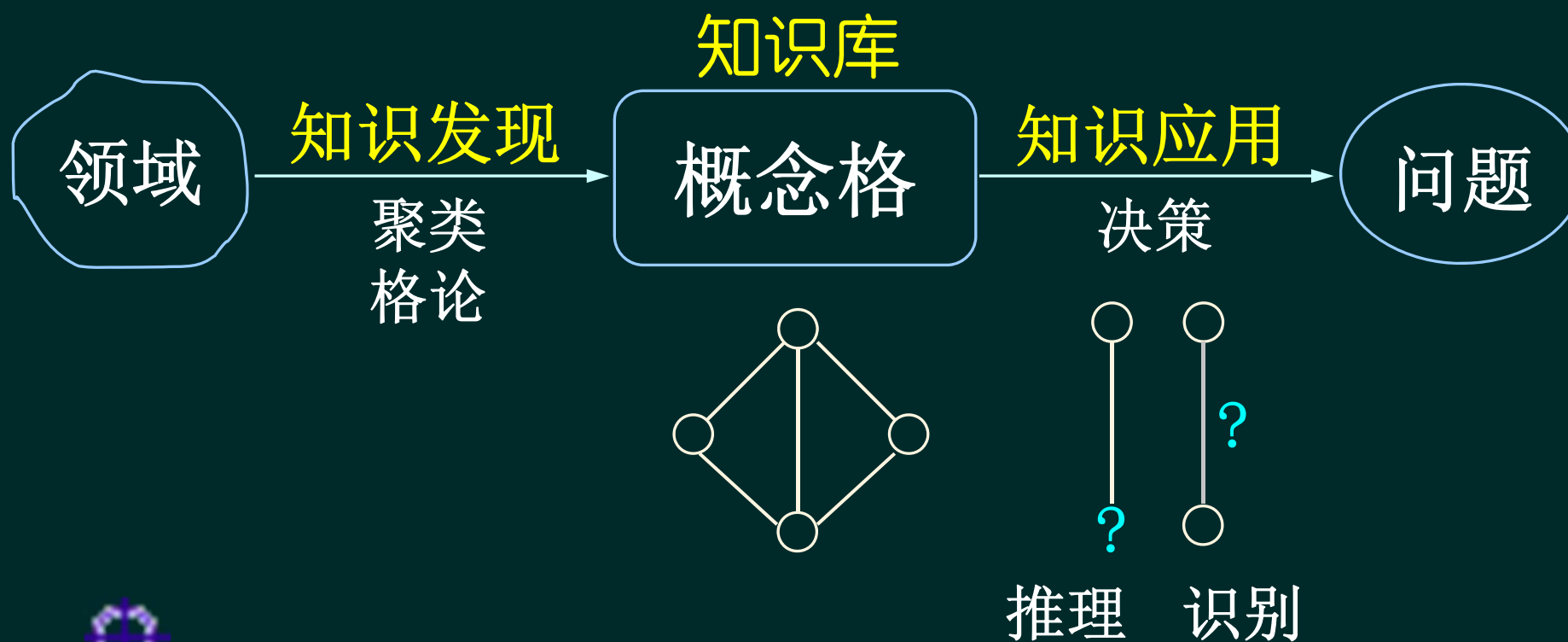


四种形式的知识库



概念格的应用

- 概念格形式的知识库
- 基于概念格的决策 —— 推理识别



课间休息



再见

