DZ 2

4. $h(k,i) = (f(k) + c_1 i + c_2 i^2) \bmod m$, $i = 0, 1, \dots, m-1$

Prvih nekoliko vrijednosti:

$$h(k,0) = f(k) + 0$$
$$h(k,1) = f(k) + 1$$
$$h(k,2) = f(k) + 3$$
$$h(k,3) = f(k) + 6$$
$$\vdots$$

Možemo uočiti da je to rekurzija: $h(k,i) = h(k, i-1) + i$

Nju zapisujemo kao: $h(k,i) = f(k) + \sum_{j=0}^{i} j = f(k) + \frac{i(i+1)}{2}$

$$= f(k) + \frac{1}{2} i + \frac{1}{2} i^2$$

Iz rekurzije i početne jednadžbe vidimo da su $\boxed{c_1 = c_2 = \frac{1}{2}}$

5. U algoritmu imamo m probijanja. Da bi pretražio svaku poziciju u tablici sve pozicije a i b prilikom svakog probijanja moraju biti različite.

Pretpostavimo suprotno, tj. da $0 < a < b < m$. Vrijedi:

$$f(k) + \frac{a(a+1)}{2} \equiv f(k) + \frac{b(b+1)}{2} \mod m$$

$$\iff \frac{a(a+1)}{2} \equiv \frac{b(b+1)}{2} \mod m \quad / \cdot 2$$

$$\iff a^2 + a \equiv b^2 + b \mod 2m$$

$$\iff b^2 - a^2 = (a+b)(b-a) \equiv b - a \mod 2m$$

$$\left(\begin{array}{c} b - a + b^2 - a^2 \\ (b-a) + (b-a)(b+a) \\ (b-a)(1 + b + a) \end{array} \right)$$

$\Longleftrightarrow \quad (b-a)(a+b+1) \equiv 0 \mod 2m$

1° $b-a$ neparan $\Longrightarrow$ $a+b+1 \equiv 0 \mod 2m$ jer je m $(2m)$ potencija broja 2 pa se $b-a$ krati jer je neparan tj. nema zaj. faktore s $2m$

iz uvjeta $0 < a < b < m$ znamo $a < b$ pa vrijedi:

$$a+b+1 \leq 2b < 2m \quad \text{pa} \quad a+b+1 \text{ mora biti } = 0$$

što je ↯ s uvjetom $0 < a < b < m$

2° $b-a$ paran $\Longrightarrow$ $a+b+1$ mora biti neparan pa nema zaj. faktore s $2m$ (jer je m potencija broja 2) te ga skratimo i ostaje:

$$b-a \equiv 0 \mod 2m$$

Iz uvjeta imamo:

$$|b-a| \leq b+a < 2b < 2m \quad \text{pa} \quad b-a \text{ mora biti } = 0$$

što je opet ↯ s uvjetom $0 < a < b < m$

Dakle, algoritam će doista pretražiti svaku poziciju u tablici.