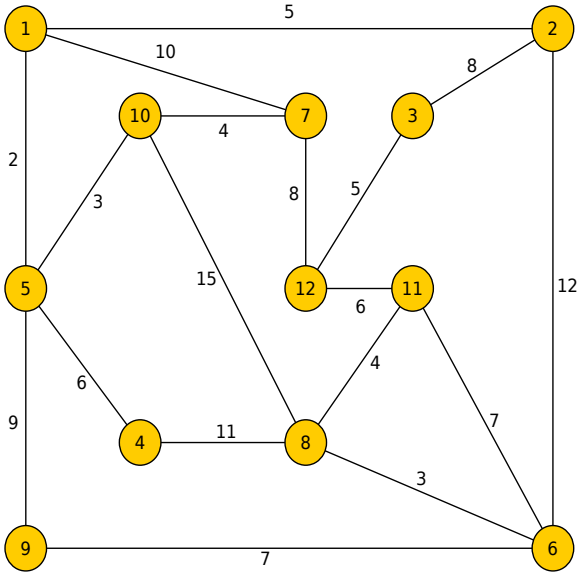
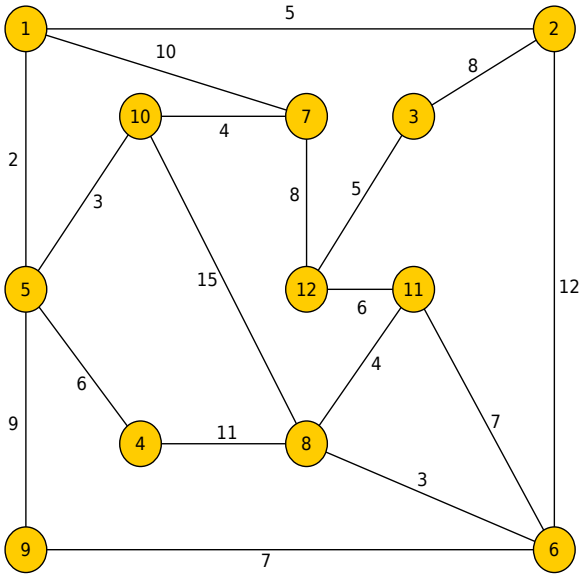
Построение минимального остовного дерева. Алгоритм Краскала.

Пример пошагового исполнения



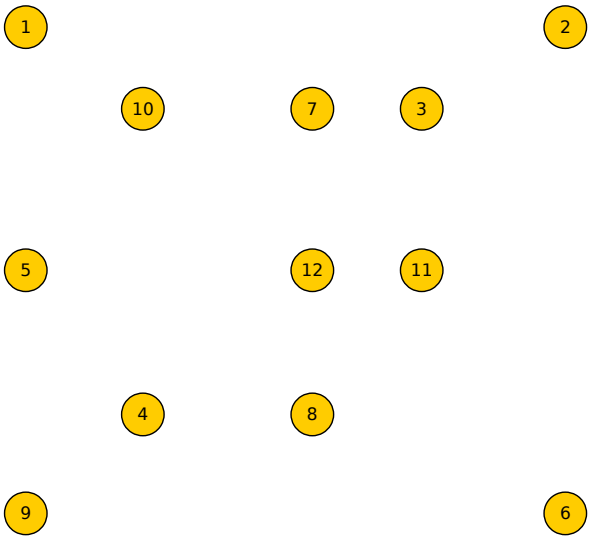
Сформируем список ребер в виде матрицы

v1	v2	weight
1	2	5
1	5	2
1	7	10
2	3	8
2	6	12
3	12	5
4	5	6
4	8	11
5	9	9
5	10	3
6	8	3
6	9	7
6	11	7
7	10	4
7	12	8
8	10	15
8	11	4
11	12	6



Отсортируем ребра по весу

v1	v2	weight
1	5	2
5	10	3
6	8	3
7	10	4
8	11	4
1	2	5
3	12	5
4	5	6
11	12	6
6	9	7
6	11	7
2	3	8
7	12	8
5	9	9
1	7	10
4	8	11
2	6	12
8	10	15



Компоненты связности

№	Вершины, входящие в состав
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	10
11	11
12	12

Создадим список компонент связности. В начале алгоритма число компонент равно числу вершин графа

AdComps < - list(c(1), c(2), c(3), … , c(11), c(12))

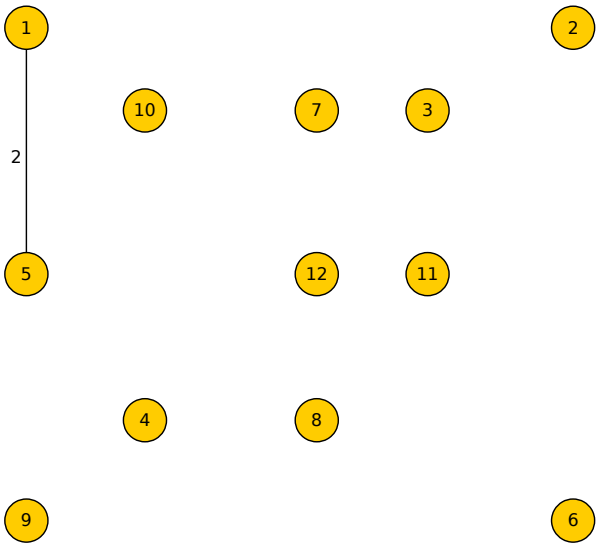
v1	v2	weight
1	5	2
5	10	3
6	8	3
7	10	4
8	11	4
1	2	5
3	12	5
4	5	6
11	12	6
6	9	7
6	11	7
2	3	8
7	12	8
5	9	9
1	7	10
4	8	11
2	6	12
8	10	15

Количество компонент связности: **12**

Алгоритм завершится, когда либо

а) *количество компонент связности станет равно 1;*

б) *закончатся ребра (в случае несвязного графа G).*



Компоненты связности

№	Вершины, входящие в состав
1	**{1, 5}**
2	2
3	3
4	4
6	6
7	7
8	8
9	9
10	10
11	11
12	12

Вершины 1 и 5 находятся в разных компонентах связности. Добавляем ребро в дерево. Объединяем компоненты связности 1 и 5. Удаляем компоненту связности 5.

AdComps < - list(c(1, AdComps[[5]]), c(2), … , c(12))
AdComps < - AdComps[-5]

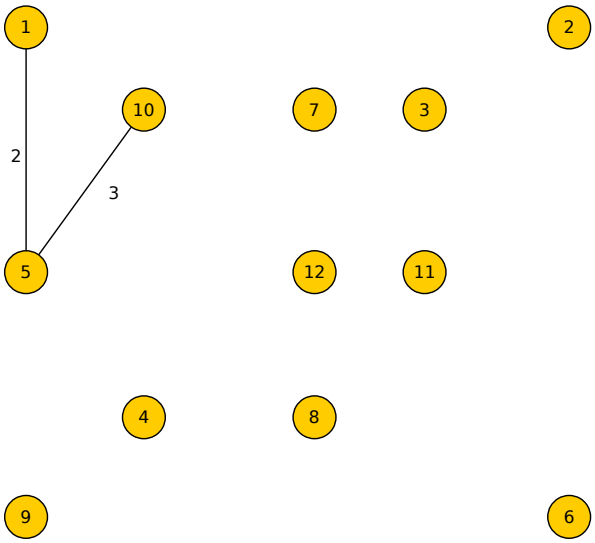
Отсортированный по весу список ребер графа

v1	v2	weight	
1	**5**	**2**	←
5	10	3	
6	8	3	
7	10	4	
8	11	4	
1	2	5	
3	12	5	
4	5	6	
11	12	6	
6	9	7	
6	11	7	
2	3	8	
7	12	8	
5	9	9	
1	7	10	
4	8	11	
2	6	12	
8	10	15	

Удаленные компоненты связности

№	Вершины, входящие в состав
5	***5***

Новое количество компонент связности: **11**



Компоненты связности

№	Вершины, входящие в состав
1	**{1, 5, 10}**
2	2
3	3
4	4
5	6
6	7
7	8
8	9
10	11
11	12

Вершины 5 и 10 находятся в разных компонентах связности. Добавляем ребро в дерево. Объединяем компоненты связности 1 и 9. Удаляем компоненту связности 9.

AdComps < - list(c(1, 5, AdComps[[9]]), c(2),...,c(12))
AdComps < - AdComps[-9]

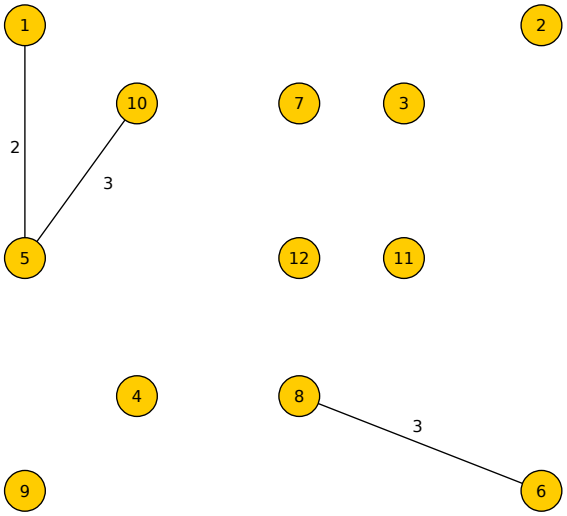
Удаленные компоненты связности

№	Вершины, входящие в состав
5	*5*
9	***10***

Отсортированный по весу список ребер графа

v1	v2	weight	
1	5	2	
5	**10**	**3**	←
6	8	3	
7	10	4	
8	11	4	
1	2	5	
3	12	5	
4	5	6	
11	12	6	
6	9	7	
6	11	7	
2	3	8	
7	12	8	
5	9	9	
1	7	10	
4	8	11	
2	6	12	
8	10	15	

Новое количество компонент связности: **10**



Компоненты связности

№	Вершины, входящие в состав
1	{1, 5,10}
2	2
3	3
4	4
5	**{6, 8 }**
6	7
8	9
9	11
10	12

Вершины 6 и 8 находятся в разных компонентах связности. Добавляем ребро в дерево. Объединяем компоненты связности 5 и 7. Удаляем компоненту связности 7.

AdComps < - list(c(1, 5, 10),…,c(6, AdComps[[7]]), … , c(12))
AdComps < - AdComps[-7]

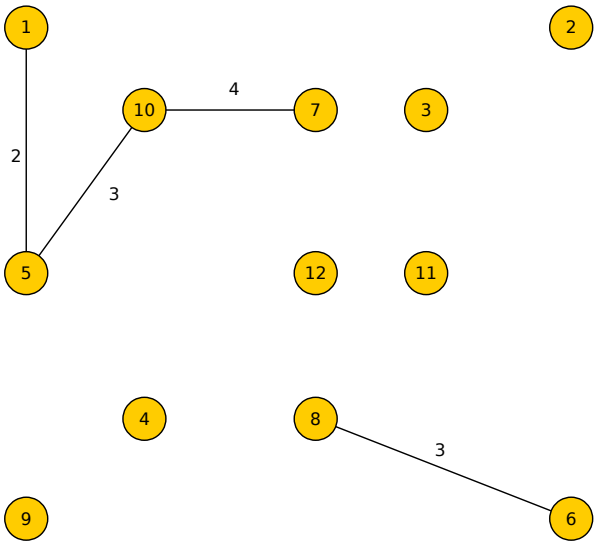
Отсортированный по весу список ребер графа

v1	v2	weight	
1	5	2	
5	10	3	
6	**8**	**3**	←
7	10	4	
8	11	4	
1	2	5	
3	12	5	
4	5	6	
11	12	6	
6	9	7	
6	11	7	
2	3	8	
7	12	8	
5	9	9	
1	7	10	
4	8	11	
2	6	12	
8	10	15	

Удаленные компоненты связности

№	Вершины, входящие в состав
5	*5*
9	*10*
7	***8***

Новое количество компонент связности: **9**



Компоненты связности

№	Вершины, входящие в состав
1	**{1, 5,10, 7 }**
2	2
3	3
4	4
5	{6, 8 }
7	9
8	11
9	12

Вершины 10 и 7 находятся в разных компонентах связности. Добавляем ребро в дерево. Объединяем компоненты связности 1 и 6. Удаляем компоненту связности 6.

AdComps < - list(c(1, 5, 10, AdComps[[6]]), c(2),..., c(12))
AdComps < - AdComps[-6]

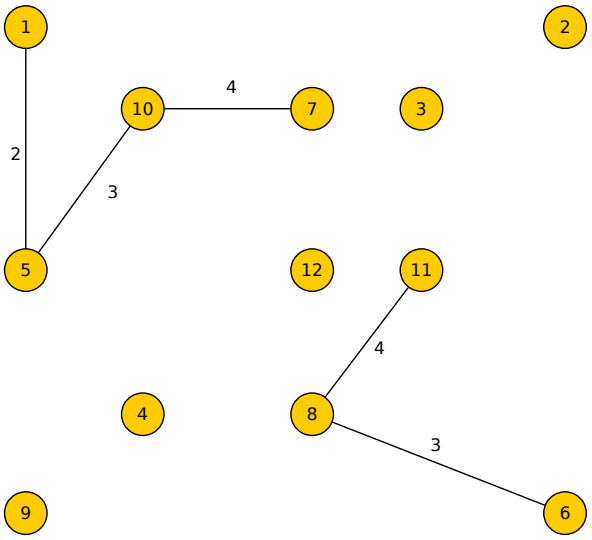
Отсортированный по весу список ребер графа

v1	v2	weight	
1	5	2	
5	10	3	
6	8	3	
7	**10**	**4**	←
8	11	4	
1	2	5	
3	12	5	
4	5	6	
11	12	6	
6	9	7	
6	11	7	
2	3	8	
7	12	8	
5	9	9	
1	7	10	
4	8	11	
2	6	12	
8	10	15	

Удаленные компоненты связности

№	Вершины, входящие в состав
5	*5*
9	*10*
7	*8*
6	***7***

Новое количество компонент связности: **8**



Компоненты связности

№	Вершины, входящие в состав
1	{1, 5,10, 7 }
2	2
3	3
4	4
5	**{6, 8, 11 }**
6	9
8	12

Вершины 8 и 11 находятся в разных компонентах связности. Добавляем ребро в дерево. Объединяем компоненты связности 5 и 7. Удаляем компоненту связности 7.

AdComps < - list(c(1, 5, 10, 7),..., c(6,8, AdComps[[7]]), ... , c(12))
AdComps < - AdComps[-7]

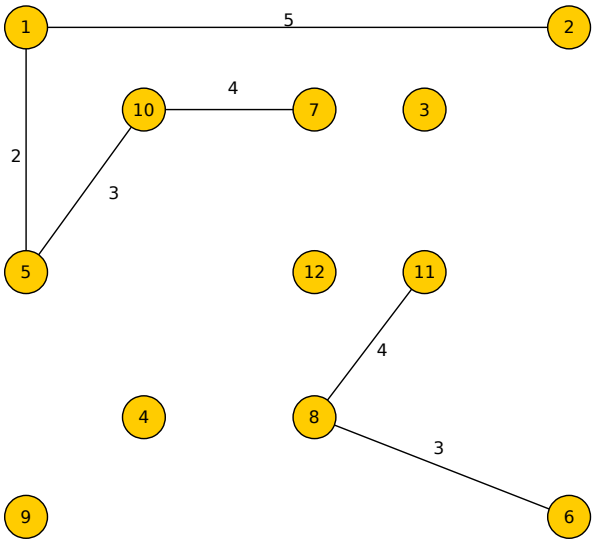
Отсортированный по весу список ребер графа

v1	v2	weight	
1	5	2	
5	10	3	
6	8	3	
7	10	4	
8	**11**	**4**	←
1	2	5	
3	12	5	
4	5	6	
11	12	6	
6	9	7	
6	11	7	
2	3	8	
7	12	8	
5	9	9	
1	7	10	
4	8	11	
2	6	12	
8	10	15	

Удаленные компоненты связности

№	Вершины, входящие в состав
5	*5*
9	*10*
7	*8*
6	*7*
7	***11***

Новое количество компонент связности: **7**



Компоненты связности

№	Вершины, входящие в состав
1	**{1, 5,10, 7, 2 }**
3	3
4	4
5	{6, 8, 11 }
6	9
7	12

Вершины 1 и 2 находятся в разных компонентах связности. Добавляем ребро в дерево. Объединяем компоненты связности 1 и 2. Удаляем компоненту связности 2.

AdComps < - list(c(1, 5, 10, 7, AdComps[[2]]),..., c(12))
AdComps < - AdComps[-2]

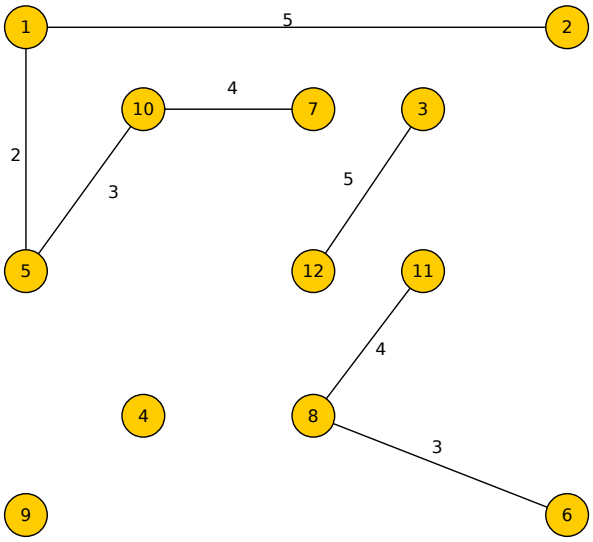
Отсортированный по весу список ребер графа

v1	v2	weight	
1	5	2	
5	10	3	
6	8	3	
7	10	4	
8	11	4	
1	**2**	**5**	←
3	12	5	
4	5	6	
11	12	6	
6	9	7	
6	11	7	
2	3	8	
7	12	8	
5	9	9	
1	7	10	
4	8	11	
2	6	12	
8	10	15	

Удаленные компоненты связности

№	Вершины, входящие в состав
5	*5*
9	*10*
7	*8*
6	*7*
7	*11*
2	***2***

Новое количество компонент связности: **6**



Компоненты связности

№	Вершины, входящие в состав
1	{1, 5,10, 7, 2 }
2	**{ 3, 12 }**
3	4
4	{6, 8, 11 }
5	9

Вершины 3 и 12 находятся в разных компонентах связности. Добавляем ребро в дерево. Объединяем компоненты связности 2 и 6. Удаляем компоненту связности 6.

AdComps < - list(c(1, 5, 10, 7, 2), c(3, AdComps[[6]]),...,c(12))
AdComps < - AdComps[-6]

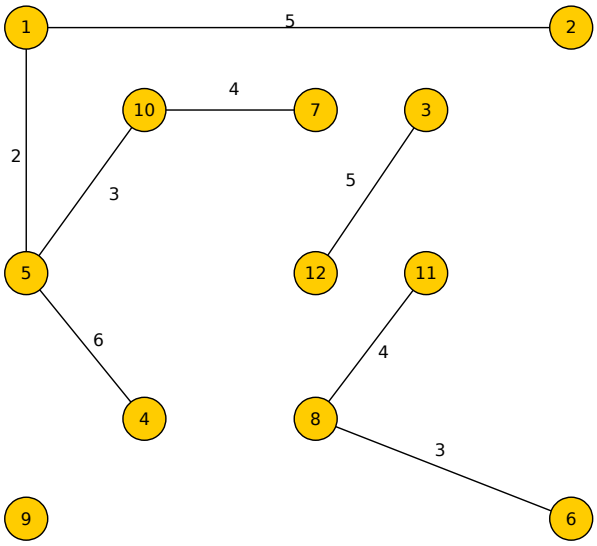
Отсортированный по весу список ребер графа

v1	v2	weight	
1	5	2	
5	10	3	
6	8	3	
7	10	4	
8	11	4	
1	2	5	
3	**12**	**5**	←
4	5	6	
11	12	6	
6	9	7	
6	11	7	
2	3	8	
7	12	8	
5	9	9	
1	7	10	
4	8	11	
2	6	12	
8	10	15	

Удаленные компоненты связности

№	Вершины, входящие в состав
5	*5*
9	*10*
7	*8*
6	*7*
7	*11*
2	*2*
6	***12***

Новое количество компонент связности: **5**



Компоненты связности

№	Вершины, входящие в состав
1	**{1, 5,10, 7, 2, 4 }**
2	{ 3, 12 }
4	{6, 8, 11 }
5	9

Вершины 4 и 5 находятся в разных компонентах связности. Добавляем ребро в дерево. Объединяем компоненты связности 1 и 3. Удаляем компоненту связности 3.

AdComps < - list(c(1, 5, 10, 7, 2, AdComps[[3]]), c(3, 12),..., c(9))
AdComps < - AdComps[-3]

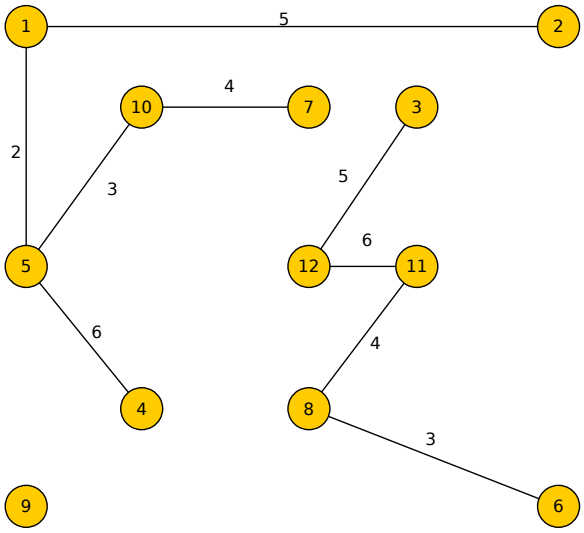
Отсортированный по весу список ребер графа

v1	v2	weight	
1	5	2	
5	10	3	
6	8	3	
7	10	4	
8	11	4	
1	2	5	
3	12	5	
4	**5**	**6**	←
11	12	6	
6	9	7	
6	11	7	
2	3	8	
7	12	8	
5	9	9	
1	7	10	
4	8	11	
2	6	12	
8	10	15	

Удаленные компоненты связности

№	Вершины, входящие в состав
5	*5*
9	*10*
7	*8*
6	*7*
7	*11*
2	*2*
6	*12*
3	***4***

Новое количество компонент связности: **4**



Компоненты связности

№	Вершины, входящие в состав
1	{1, 5,10, 7, 2, 4 }
2	{ 3, 12, 6, 8, 11 }
4	9

Вершины 11 и 12 находятся в разных компонентах связности. Добавляем ребро в дерево. Объединяем компоненты связности 2 и 3. Удаляем компоненту связности 3.

AdComps < - list(c(1,...,4), c(3, 12, AdComps[[3]]), c(6,8, 11), c(9))
AdComps < - AdComps[-3]

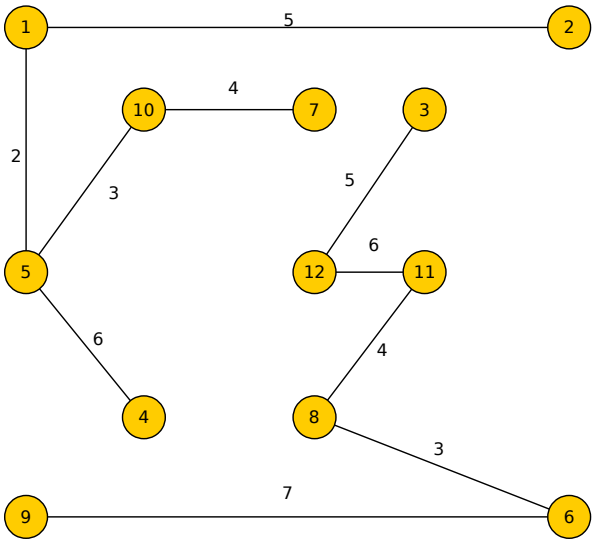
Отсортированный по весу список ребер графа

v1	v2	weight	
1	5	2	
5	10	3	
6	8	3	
7	10	4	
8	11	4	
1	2	5	
3	12	5	
4	5	6	
11	**12**	**6**	←
6	9	7	
6	11	7	
2	3	8	
7	12	8	
5	9	9	
1	7	10	
4	8	11	
2	6	12	
8	10	15	

Удаленные компоненты связности

№	Вершины, входящие в состав
5	*5*
9	*10*
7	*8*
6	*7*
7	*11*
2	*2*
6	*12*
3	*4*
3	***{6, 8, 11 }***

Новое количество компонент связности: **3**



Компоненты связности

№	Вершины, входящие в состав
1	{1, 5,10, 7, 2, 4 }
2	{ 3, 12, 6, 8, 11, 9 }

Вершины 6 и 9 находятся в разных компонентах связности. Добавляем ребро в дерево. Объединяем компоненты связности 2 и 3. Удаляем компоненту связности 3.

AdComps < - list(c(1,..., 4), c(3,…,11, AdComps[[3]]), c(9))
AdComps < - AdComps[-3]

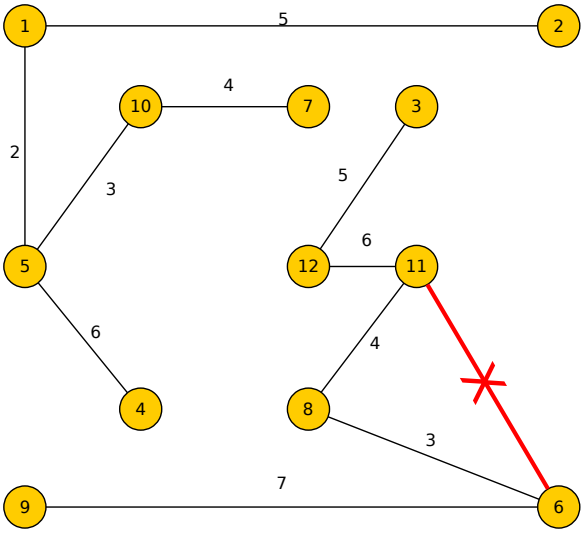
Отсортированный по весу список ребер графа

v1	v2	weight	
1	5	2	
5	10	3	
6	8	3	
7	10	4	
8	11	4	
1	2	5	
3	12	5	
4	5	6	
11	12	6	
6	**9**	**7**	←
6	11	7	
2	3	8	
7	12	8	
5	9	9	
1	7	10	
4	8	11	
2	6	12	
8	10	15	

Удаленные компоненты связности

№	Вершины, входящие в состав
5	*5*
9	*10*
7	*8*
6	*7*
7	*11*
2	*2*
6	*12*
3	*4*
3	*{6, 8, 11 }*
3	***9***

Новое количество компонент связности: **2**



Компоненты связности

№	Вершины, входящие в состав
1	{1, 5,10, 7, 2, 4 }
2	{ 3, 12, 6, 8, 11, 9 }

Вершины 6 и 11 входят в одну компоненту связности!!! Ребро (6, 11) НЕ добавляется в дерево

AdComps < - list(c(1, 5, 10, 7, 2, 4), c(3, 12, 6,8,11, 9))

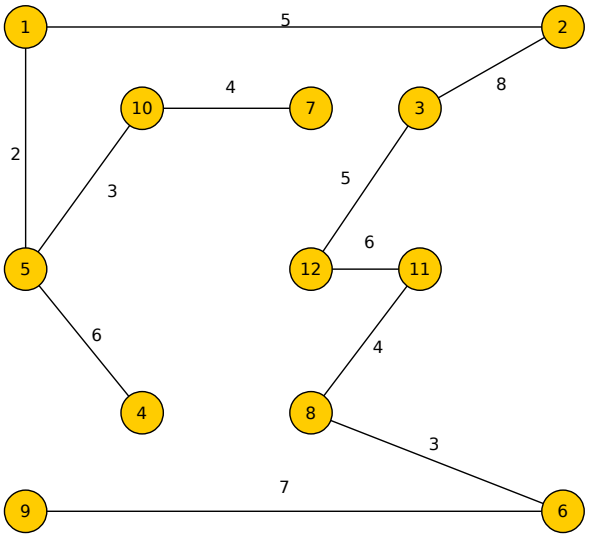
Отсортированный по весу список ребер графа

v1	v2	weight	
1	5	2	
5	10	3	
6	8	3	
7	10	4	
8	11	4	
1	2	5	
3	12	5	
4	5	6	
11	12	6	
6	9	7	
6	**11**	**7**	←
2	3	8	
7	12	8	
5	9	9	
1	7	10	
4	8	11	
2	6	12	
8	10	15	

Удаленные компоненты связности

№	Вершины, входящие в состав
5	*5*
9	*10*
7	*8*
6	*7*
7	*11*
2	*2*
6	*12*
3	*4*
3	*{6, 8, 11 }*
3	*9*

Новое количество компонент связности: **2**



Компоненты связности

№	Вершины, входящие в состав
1	**{1, 5,10, 7, 2, 4, 3, 12, 6,8,11, 9 }**

Вершины 2 и 3 находятся в разных компонентах связности. Добавляем ребро в дерево.Объединяем компоненты связности 1 и 2. Удаляем компоненту связности 2.

AdComps < - list(c(1,...,4, AdComps[[2]]), c(3, 12, 6,8,11, 9))
AdComps < - AdComps[-2]

Отсортированный по весу список ребер графа

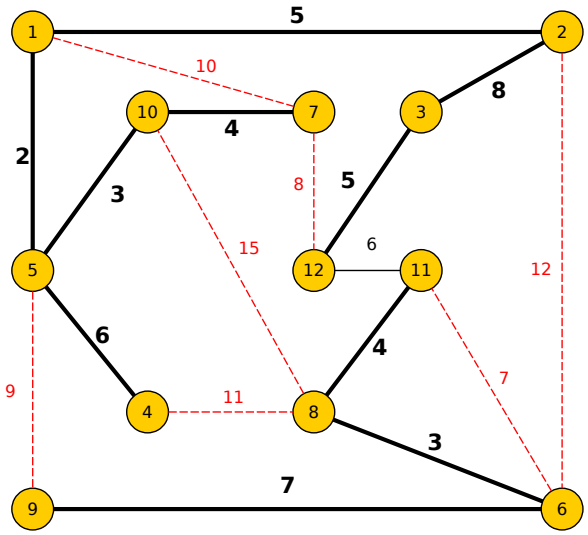
v1	v2	weight	
1	5	2	
5	10	3	
6	8	3	
7	10	4	
8	11	4	
1	2	5	
3	12	5	
4	5	6	
11	12	6	
6	9	7	
6	11	7	
2	**3**	**8**	←
7	12	8	
5	9	9	
1	7	10	
4	8	11	
2	6	12	
8	10	15	

Удаленные компоненты связности

№	Вершины, входящие в состав
5	*5*
9	*10*
7	*8*
6	*7*
7	*11*
2	*2*
6	*12*
3	*4*
3	*{6, 8, 11 }*
3	*9*
2	***{ 3, 12, 6, 8, 11, 9 }***

Новое количество компонент связности: **1**

Минимальное остовное дерево построено.



Компоненты связности

№	Вершины, входящие в состав
1	**{1, 5,10, 7, 2, 4, 3, 12, 6,8,11, 9 }**

Алгоритм завершен. Красным пунктиром показаны ребра, не вошедшие в дерево

AdComps < - list(c(1, 5, 10, 7, 2, 4, 3, 12, 6,8,11, 9))

length (AdComps) == 1

Дерево построено, если количество компонент связности равно единице

v1	v2	weight	
1	5	2	
5	10	3	
6	8	3	
7	10	4	
8	11	4	
1	2	5	
3	12	5	
4	5	6	
11	12	6	
6	9	7	
6	11	7	
2	3	8	←
7	12	8	
5	9	9	
1	7	10	
4	8	11	
2	6	12	
8	10	15	