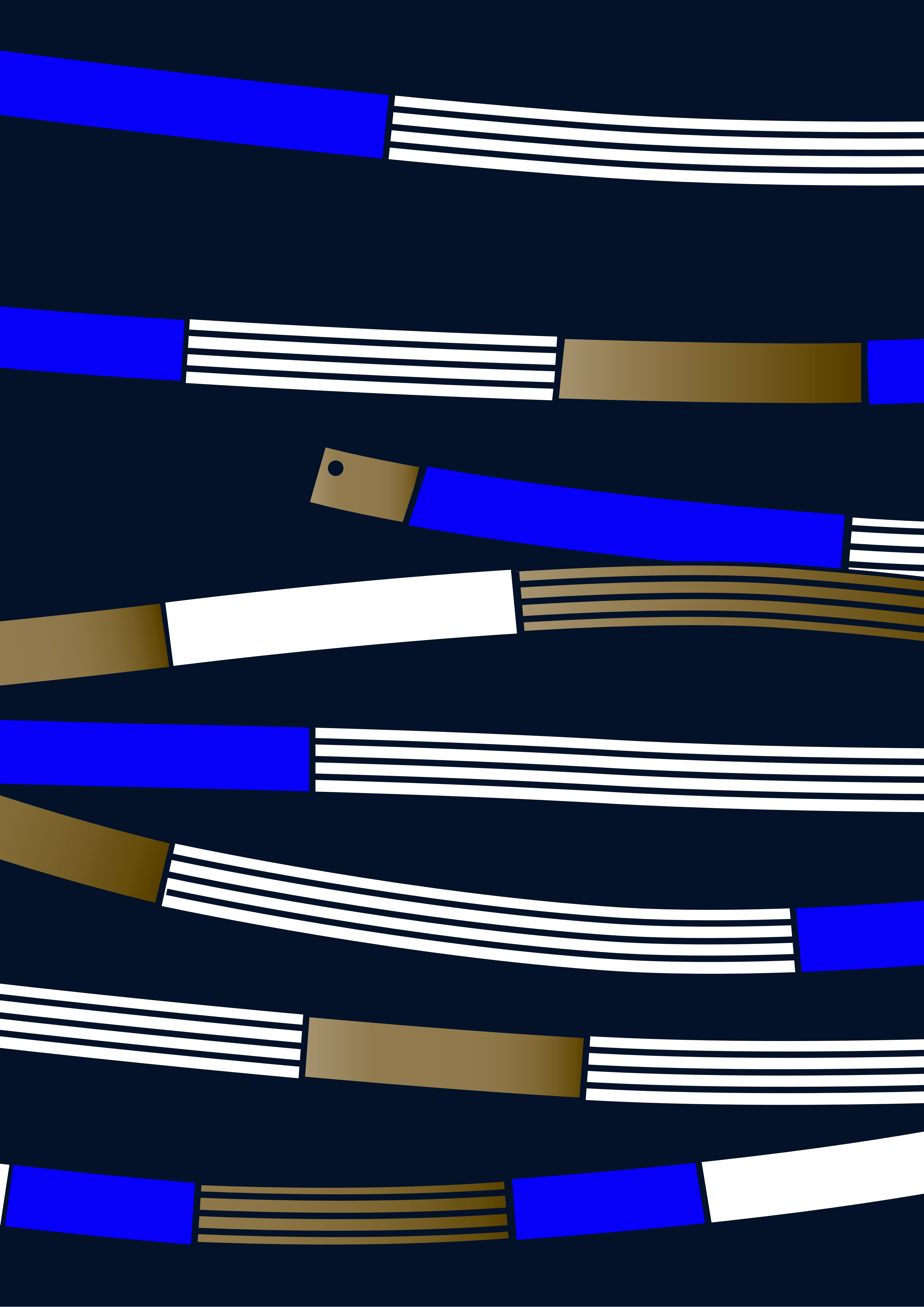

2. Запишите задачу, дуальную к описанной в материалах курса транспортной задаче (в общей постановке, не к примеру со случайными узлами).

Дуальная задача

Постановка:

$$\max_{u_i, v_j} \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$$

Ограничение

$u_i + v_j \le c_{ij}$ $\forall i = 1 \dots m,\ j = 1 \dots n$

Дополнение:

- u_i – ограничение для поставщиков
- v_j – ограничение потребителей

Пояснялки:)

Каждое неравенство $u_i + v_j$ означает, что совместная экономическая оценка пары поставщик-потребитель не превышает фактические издержки на перевозку между ними.

В оптимальном решении переменные u_i и v_j выступают как теневые цены (т.е. потенциалы) узлов. Именно эти потенциалы используются для нахождения оптимального плана.

3. Рассмотрим следующую задачу: имеется некоторое количество девушек и парней, причем для каждой девушки и парня известно, симпатичны они друг другу или нет. Требуется поженить максимальное количество взаимно симпатичных пар. Запишите задачу в форме задачи линейного программирования.

Подсказка: потенциальную пару удобно обозначить бинарной переменной (0 --- пара не сформирована). Так как полигамия и полиандрия в нашем обществе не приветствуются, то что мы можем сказать о сумме соответствующих переменных для каждой девушки (парня)?

ЗЛП

I - мн-во красивых девушек

J - мн-во парней

$S \subseteq I \times J$ мн-во всех пар $(i;j)$, где i и парень j взаимно симпатичны)

Бинарные переменные

$$x_{ij} \begin{cases} 1, & \text{если парень с девушкой поженены} \\ 0, & \text{другие пустые случаи} \end{cases}$$

Цель: максимизировать $Z = \sum_{ij \in S} x_{ij}$

Ограничения:

1 Для каждой девушки ограничение на парне

$$\sum_{j:(i;j)\in S} x_{ij} \le 1 \quad \forall i \in I$$

2 Для каждого парня ограничение на девушку

$$\sum_{i:(i;j)\in S} x_{ij} \le 1 \quad \forall j \in J$$

3 Ограничение на тип переменных (целочисленность и неотрицательность)

$$x_{ij} \in \{0; 1\} \quad \forall (i;j) \in S$$

4. **Задача со звездочкой** Покажите справедливость выражения $\mathrm{vec}(AXB) = (B' \otimes A)\,\mathrm{vec}(X)$

A размера $m \times n$

X размера $n \times p$ $\Rightarrow AXB \ (m \times q)$

B размера $p \times q$

Представим м-цы через базисные м-цы $E_{ij} = e_i e_j^T$, где e_i и e_j – столбцы стандартного базиса

$$X = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} x_{ij} e_i e_j^T$$

(важно x_{ij} – эл. матрицы X)

Подставим разложение X в $\mathrm{vec}(AXB)$

$$\mathrm{vec}(AXB) = \mathrm{vec}\left(A\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} x_{ij} e_i e_j^T\right) B\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{vec}(AXB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} x_{ij}\, \mathrm{vec}(A e_i e_j^T B)$$

Воспользуемся $\mathrm{vec}(AYB) = (B^T \otimes A) \cdot \mathrm{vec}(Y)$

$Y = e_i e_j^T$ – наш случай

$$\mathrm{vec}(A e_i e_j^T B) = (B^T \otimes A)(e_j \otimes e_i)$$

Подставим и преобразуем

$$vec(AXB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} x_{ij} (B^T \otimes A)(e_j \otimes e_i)$$

т.к. $B^T \otimes A$ не зависит от индексов суммирования

$$vec(AXB) = (B^T \otimes A)\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} x_{ij} (e_j \otimes e_i)\right)$$

Концовка

$$vec(X) = vec\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} x_{ij} e_i e_j^T\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} vec(e_i e_j^T) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} x_{ij} (e_j \otimes e_i)$$

Таким образом

$$vec(AXB) = (B^T \otimes A) \cdot vec(X)$$