|  |  |
| --- | --- |
| Gerb-BMSTU_01 | **Министерство образования и науки Российской Федерации**  **Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**  **высшего образования**  **«Московский государственный технический университет**  **имени Н.Э. Баумана**  **(национальный исследовательский университет)»**  **(МГТУ им. Н.Э. Баумана)** |

ФАКУЛЬТЕТ Информатика и системы управления (ИУ)

КАФЕДРА Системы обработки информации и управления (ИУ5)

**РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА**

***К ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЕ***

***НА ТЕМУ:***

***Исследование векторного представления метаграфов***

Студент ИУ5-41М **\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_** А.А. Фадеев

(Группа) (Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Руководитель ВКР **\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_** Ю.Е. Гапанюк

(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Консультант **\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Консультант **\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Нормоконтролер **\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

*2022 г.*

**РЕФЕРАТ**

Данная выпускная квалификационная работа магистра посвящена исследованию векторного представления метаграфа, анализу возможностей и определение подходов для решения задачи вложения метаграфа, используя существующие алгоритмы эмбеддинга плоских графов.

Актуальность работы подтверждается следующими моментами: отсутствие методик для проведения процедуры вложения для метаграфа и, как следствие, отсутствие примеров практического применения метаграфовой модели знаний, как входных данных для моделей машинного обучения. Сама метаграфовая модель знаний является комплексной и универсальной, позволяет описывать связи любого рода, однако без эмбеддинга её невозможно использовать в качестве входных данных для моделей машинного обучения.

Создание алгоритма преобразования модели метаграфа к модели плоского графа занимает самое важное место в этой работе, поскольку это позволяет использовать существующие алгоритмы эмбеддинга плоских графов и получать векторное представление. Особое внимание уделяется полному сохранению всей исходной информации метаграфа и её корректности после осуществления операции эмбеддинга и получения векторного представления, а также корректности интерпретации иерархии. Также в работе исследуется возможность получения векторных представлений из метаграфа.

Недостатками данной работы являются небольшое количество исследований, применённых алгоритмов эмбеддинга графов и небольшой размер метаграфа, используемого в качестве демонстрационного примера.

**СОДЕРЖАНИЕ**

[ВВЕДЕНИЕ 6](#_Toc106542164)

[1 Анализ предметной области 9](#_Toc106542165)

[1.1. Средства обработки графовых моделей данных 9](#_Toc106542166)

[1.2. Графовые модели данных 10](#_Toc106542167)

[1.3. Метаграфовая модель данных 11](#_Toc106542168)

[1.4. Операции над метаграфом 17](#_Toc106542169)

[1.5. Представление метаграфа 19](#_Toc106542170)

[1.6. Предикатное представление метаграфа 20](#_Toc106542171)

[2 Разработка метода эмбеддинга метаграфов 27](#_Toc106542172)

[2.1. Особенности эмбеддинга метаграфов 27](#_Toc106542173)

[2.2. Преобразование метаграфа в многодольный граф 27](#_Toc106542174)

[2.3. Алгоритм преобразования метаграфа в трёхдольный граф 32](#_Toc106542175)

[2.4. Подходы к эмбеддингу графов 35](#_Toc106542176)

[2.5. Входные данные эмбеддинга графов 39](#_Toc106542177)

[2.6. Особенности многодольных (трёхдольных) графов 40](#_Toc106542178)

[2.7. Выходные данные эмбеддинга графов 42](#_Toc106542179)

[2.8. Алгоритмы эмбеддинга 44](#_Toc106542180)

[2.8.1. Встраивание с сохранением близости высокого порядка (HOPE – High-Order Proximity preserved Embedding) 46](#_Toc106542181)

[2.8.2. Собственные карты Лапласа (Laplacian Eigenmaps) 47](#_Toc106542182)

[2.8.3. Node2Vec 49](#_Toc106542183)

[3 Экспериментальная часть 51](#_Toc106542184)

[3.1. Используемый метаграф 51](#_Toc106542185)

[3.2. Преобразование метаграфа в трёхдольный плоский граф 62](#_Toc106542186)

[3.3. Эксперименты 64](#_Toc106542187)

[3.3.1. Эксперимент с алгоритмом Встраивание с сохранением близости высокого порядка (High-Order Proximity preserved Embedding, HOPE) 65](#_Toc106542188)

[3.3.2. Эксперимент с алгоритмом Собственные карты Лапласа (Laplacian Eigenmaps, LE) 69](#_Toc106542189)

[3.3.3. Эксперимент с алгоритмом Node2Vec 79](#_Toc106542190)

[3.4. Обобщение результатов экспериментов 82](#_Toc106542191)

[ЗАКЛЮЧЕНИЕ 84](#_Toc106542192)

[СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 86](#_Toc106542193)

[ПРИЛОЖЕНИЕ А 92](#_Toc106542194)

# ВВЕДЕНИЕ

Графы широко и разнообразно представлены в реальной жизни: социальный граф, диффузионный граф в социальных сетях, граф цитирования в областях исследований, граф транспортно-пересадочных узлов, граф интересов пользователей в области электронной торговли, граф знаний и т. д. Анализ этих графов дает представление о том, как использовать информацию, скрытую в них, как именно делать это правильно, как оптимизировать эти графы с разных точек зрения. Эти вопросы с момента появления понятия «граф» привлекали много внимания, а с началом информационной эпохи графы буквально окружили нас. В настоящее время многие из сетей и графов, которыми мы окружены, не оптимальны. В течение своей истории они развивались поэтапно, и довольно часто развитие производилось не с прицелом на будущие изменения, а для получения краткосрочного результата. Появление вычислительных возможностей анализировать такие сложные сетевые, иерархические структуры подстегнуло интерес к разного рода исследованиям: уже несколько десятилетий развивается графовая аналитика. Графовая аналитика может принести пользу многим приложениям, таким как классификация узлов [1], кластеризация узлов [2], поиск и рекомендация узлов [3], прогнозирование связей [4] и так далее. Например, путем анализа графа, построенного на основе взаимодействия с пользователями в социальной сети, мы можем классифицировать пользователей, обнаруживать сообщества, рекомендовать друзей и прогнозировать взаимодействие между двумя пользователями. Также можно проанализировать граф транспортно-пересадочных узлов, обнаружить несовершенства в маршрутах различных видов транспорта, выяснить, какие ТПУ нуждаются в расширении и модернизации и так далее.

Для решения задачи вложения графа входные данные должны представлять собой графы, чтобы над ними можно было произвести операцию эмбеддинга. Стоит обратить внимание на факт того, что любой объект является конструкцией из каких-то составляющих. Следовательно, объекты можно описывать с помощью графовых структур. Сложность объекта влияет на сложность вида графа, которым его можно представить. Следовательно, метаграф должен быть использован тогда, когда сам объект является слишком сложным для осуществления корректного описания с помощью различных видов плоских графов. Очень важно соблюдать прямую связь описания с данными решаемой задачи, чтобы в графе или метаграфе не было лишней информации, но при этом не было потеряно никаких фактов, влияющих на решение задачи. Наиболее удобен такой подход для решения задач с разнообразными сетями, где исходные данные изначально описаны различными графовыми структурами: социальные сети, веб-графы, биологические сети, сеть транспортных путей и так далее. Эти сети являются очень большими и сложными для обработки, поэтому для них очень актуальны вопросы обобщения графовых структур и векторного представления элементов графа (желательно небольшой размерности). Конечно, самое важное, чтобы векторное представление позволяло использовать себя в качестве входных данных для алгоритмов машинного обучения. Желательно, чтобы формат таких данных не ограничивал набор возможных моделей машинного обучения.

Преимущества описанного выше подхода обосновывают его выбор в данной работе: размерность входных данных сокращается без потери информации; уровень абстракции исследуемого объекта повышается; за счёт этого промежуточные данные и конечное векторное представление легко интерпретируются, а также появляется возможность смены задачи или используемых при исследовании методов.

Метаграфовая модель данных предлагает существенный уровень абстракции описания объектов, который позволяет реализовать описанный выше подход. Абстракция актуальна в сложных сетях, которые, как оговаривалось выше, в настоящее время обычно сложно структурированы и которые из-за этого сложно анализировать. Представленная в работе методика вложения (эмбеддинга) сложной метаграфовой модели, позволяет представлять иерархичную и максимально общую формализованную модель метаграфа в виде набора низкоразмерных векторов. Такие вектора являются структурно-сохраненным сетевым представлением, «удобным» и частым типом входных данных в большинстве алгоритмов машинного и глубокого обучения.

# Анализ предметной области

## Средства обработки графовых моделей данных

Последние исследования и разработки известных производителей электронных микросхем, доказали, что будущие микропроцессоры и большие высокопроизводительные вычислительные машины будут гибридными [56]. В их основу будут положены компоненты 2 основных типов:

1. мультиядерные и многоядерные центральные процессоры: так как уже достигнут физический предел размеров транзисторов и технологического процесса, количество ядер процессоров будет и дальше увеличиваться для повышения мощности выпускаемых чипов;
2. специализированное оборудование и массивно-параллельные ускорители: графические процессоры в последние годы превзошли центральные процессоры в плане производительности вычислений над числами с плавающей точкой. Программирование графических профессоров стало таким же простым, как и программирование центральных процессоров.

Раньше любые задачи решали на центральных процессорах. Теперь же всё большее число задач можно решать на графическом процессоре, а некоторые задачи решаются на них эффективнее, чем на центральных процессорах. Лучшая эффективность объясняется повышенной пропускной способностью современных графических процессоров по сравнению с центральными. Благодаря повышенной пропускной способности сокращается время выполнения задач. Как правило, к задачам, решение которых возлагают на графические процессоры, относятся задачи, которые позволяют вести вычисления параллельно.

В данной работе ведётся исследование путей создания алгоритма, который бы формировал векторные представления метаграфов для обработки процессором, которая могла бы производиться независимо от его типа. Операции линейной алгебры над матрицами уже успешно выполняются на различных процессорах. В данной работе предполагается: так как разнообразные операции линейной алгебры над матрицами уже успешно выполнятся, то было бы разумным представить метаграфовую модель в виде набора тензоров или многомерных векторов.

Для плоских графов уже существует множество алгоритмов вложения (эмбеддинга) в векторное пространство, однако, не существует алгоритма для сложной иерархической метаграфовой модели знаний. Поэтому центральной частью работы является поиск и построение алгоритма эмбеддинга метаграфа в векторное представление, чтобы в дальнейшем эти результаты могли использоваться для создания систем по обработке метаграфов.

## Графовые модели данных

Данный раздел посвящён обзору различных нестандартных, сложных графовых моделей, описывающих сложные сети.

С точки зрения обработки данных графы можно поделить на три категории: простые небольшие графы, плоские графы большой размерности и графы, обладающие комплексным и разнообразным описанием узлов. Обработка простых графов в настоящее время без проблем ведётся с помощью реляционных или графовых СУБД.

Со вторым видом графов всё не так просто из-за их огромного размера. Такие графы включают в себя миллионы вершин и рёбер, которые могут быть направленными и ненаправленными. Вершины в таких графах (имеющих специальное название «мультиграф») могут соединяться двумя и более рёбрами, и чаще всего в литературе именно такие сложные графы и называют сложной сетью, поскольку в ней максимально широко используются возможности классической графовой модели знаний.

Графы третьего вида – графы, в которых используется сложное описание вершин, рёбер и/или их расположения. Как правило, в таких моделях элементы располагаются не на плоскости, а в n-мерном пространстве, где . Часто в таких моделях вводятся уникальные понятия, описывающие элементы модели. Такие свойства этого вида графов могут быть наиболее полезны при описании сложных моделей данных и знаний. Из подобных моделей на сегодняшний день лучше всего изучены три: гиперграф, гиперсеть и метаграф. В данной квалификационной работе исследуется только метаграфовая модель данных.

В настоящее время во многих прикладных задачах необходимо рассматривать графы очень большой размерности. Обработка такого графа (или мультиграфа) является чрезвычайно затратной с точки зрения использования памяти компьютера и вычислительных ресурсов в целом. В случае обработки метаграфов задача ещё больше усложняется за счет комплексного описания моделей.

## Метаграфовая модель данных

В данном разделе представлено общее описание метаграфовой модели данных.

А. Базу и Р. Блэннинг в 2007 году издали монографию [5], в которой обобщили концепцию метаграфа на основе своих более ранних статей. Данная монография считается научным сообществом основополагающей в теории метаграфов.

Метаграфовая модель данных, описанная в работе [5], была адаптирована в рамках научных работ на кафедре «Системы обработки информации и управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана и описана в статьях [6-9]. Применять данную модель следует для описания сложных сетей [10], семантики и прагматики различных информационных систем [11]. Также в работе [6] предлагается использовать метаграфовую модель данных как как средство для описания гибридных интеллектуальных информационных систем. Ниже представлено формализованное описание метаграфовой модели данных в чётком соответствии с [6-9].

Матаграф определяется в виде сущности:

где – метаграф; – множество вершин метаграфа; – множество метавершин метаграфа; – множество рёбер метаграфа; – множество метарёбер метаграфа.

Вершина метаграфа характеризуется множеством атрибутов:

где – вершина метаграфа; – атрибут.

Ребро метаграфа характеризуется множеством атрибутов, исходной и конечной вершиной и признаком направленности:

где – ребро метаграфа; – исходная вершина (метавершина) ребра; – конечная вершина (метавершина) ребра; – признак направленности ребра ( – направленное ребро, – ненаправленное ребро); ­– атрибут.

Метавершина характеризуется следующим образом:

где – метавершина метаграфа; – атрибут, – элемент, принадлежащий объединению множеств вершин, метавершин, рёбер и метарёбер метаграфа.

Таким образом, метавершина в дополнение к свойствам вершины включает вложенный фрагмент метаграфа. В рамках такой модели рёбра и метарёбра метавершин должны быть ненаправленными ().

Метаребро характеризуется следующим образом:

где – ребро метаграфа; – исходная вершина (метавершина) ребра; – конечная вершина (метавершина) ребра; – признак направленности метаребра ( – направленное метаребро, – ненаправленное метаребро); ­ – атрибут, – элемент, принадлежащий объединению множеств вершин, метавершин, рёбер и метарёбер метаграфа.

Таким образом, метаребро в дополнение к свойствам ребра включает вложенный фрагмент метаграфа. При этом ребра и метарёбра этого фрагмента могут быть только направленными, . Это свойство позволяет легче описывать процессы. Если его использование не нужно, то лучше вместо метаребра использовать метавершину, комплекс метавершин или разделить метарёбро на более мелкие составляющие, поскольку рёбра (или метарёбра) со свойством прерывает цепочку процесса, отображаемого метаребром.

Стоит заметить, что определения метавершины и метарёбра означают, что в их непосредственный состав не могут входить одни и те же рёбра и метарёбра, поскольку в метавершину могут включаться только ненаправленные рёбра и метарёбра, а в метаребро – только направленные. Такое требование оригинальной модели показывает, что метавершина предназначена для описания данных и знаний, а метаребро – для описания процесса. Таким образом, метаграфовая модель позволяет в рамках единой модели описывать данные, знания и процессы.

Описание процесса не всегда является необходимостью, поэтому метарёбра полагается считать необязательным элементом метаграфовой модели знаний. В данной квалификационной работе рассматривается создание алгоритма эмбеддинга метаграфа, включающего вершины, рёбра и метавершины. В рамках научной работы на Кафедре подразумевается усовершенствовать определение метаребра для более корректного и полного описания процессов, и предлагаемый в работе алгоритм планируется, по возмоности, усовершенствовать путём добавления способа эмбеддинга метавершин.

Для осуществления операций изменения метаграфа в модели вводится понятие фрагмента метаграфа:

где – фрагмент метаграфа; – элемент, принадлежащий объединению множеств вершин, метавершин, рёбер и метарёбер метаграфа.

Таким образом, фрагмент метаграфа в общем виде может содержать произвольные вершины, метавершины, рёбра и метарёбра без ограничений. Ограничения вводятся лишь на фрагменты метаграфа, входящие в метавершину и метаребро.

Пример описания небольшого метаграфа без метарёбер показан ниже на рисунке 1.



Рисунок 1 – Пример метаграфа

Данный метаграф содержит вершины, метавершины и ребра. На рис. 1 показаны четыре метавершины: , , и . Метавершина содержит вершины , , и связывающие их ребра , , . Метавершина содержит вершины , и связывающее их ребро . Ребра , соединяющее вершину с вершиной , и , соединяющее вершины и , являются примерами ребер, соединяющих вершины, включенные в различные метавершины. В данном случае это метавершины и . Ребро соединяет метавершины и между собой. На рисунке также есть ребро , которое соединяет вершину и метавершину . Метавершина включает метавершины и , вершины , и ребро из метавершины а также ребра , и . Метавершина включает не соединенные ребрами вершины и .

Пример описания метаребра, наложенного на метаграф с рисунка 1, показан ниже на рисунке 2.

  
Рисунок 2 – Пример метаребра

Метаребро содержит метавершины и связывающие их ребра. Исходная метавершина содержит фрагмент метаграфа. В процессе преобразования исходной метавершины в конечную метавершину происходит дополнение содержимого метавершины, добавляются новые вершины, связи, вложенные метавершины. При этом стоит обратить внимание, что направление обхода вершин метаребра строго задано. Такое метаребро удобно рассматривать как средство сохранения информации об изменениях состояний объектов во времени. Таким образом метаграфовая модель знаний за счёт этой вспомогательной конструкции позволяет сохранять информацию о различных версиях модели.

Метавершина, имея набор атрибутов, обладает собственным набором свойств. Это позволяет метаграфовой модели данных обладать свойством эмерджентности, которое является ключевым для сложных сетей и которое позволяет описывать многоуровневые модели, их сложную иерархию и вложенность. Это свойство заключается в возможности обладания уникальными свойствами какой-либо совокупностью объектов модели. Обладая своими уникальными атрибутами, метавершина может выступать как единое целое в составе целого.

Метаграфовая модель является далеко не единственной для описания сложных сетей. В работах [12-13] подробно описаны модели гиперграфа и гиперсети. В работе [7] приводится описания этих моделей и детальное сравнение с метаграфовой моделью, которое выявило следующие различия между моделями: По результатам сравнения моделей можно сделать следующие выводы:

* Модель гиперсети и гиперграфа фактически представляет собой попытку описания «сверху-вниз» (по уровням), а модель метаграфа попытку описания «снизу-вверх» (путем «выращивания» метавершин из более простых элементов);
* Модели гиперсети и гиперграфа, в отличие от метаграфовой модели, позволяют связывать только соседние слои;
* Модель метаграфа является более простой в описании, так как состоит из однородных элементов (метавершин и связей, как элементов метавершин);
* Модель метаграфа является более гибкой, так как не требует регулярности уровней. Произвольный подграф может быть превращен в метавершину.

Метаграфовая модель данных за счёт своей гибкости и простоты позволяет использовать её в более широком наборе задач, чем модели гиперграфа и гиперсети, поэтому в данной работе исследуется именно эта модель.

Однако, в данной квалификационной работе используется не оригинальная метаграфовая модель, описанная выше, а немного изменённая. Метаребро в оригинальной модели имеет ограничение, связанное с тем, что рёбра и метарёбра, входящие в её непосредственный состав, не могут быть направленными. В данной работе предлагается избавиться от этого условия. Определение фрагмента метаграфа уже удовлетворяет ему. Следовательно, переопределим понятие метавершины, которое будет использоваться в рамках данной работы.

где – метавершина метаграфа; – атрибут, – фрагмент метаграфа, – элемент, принадлежащий объединению множеств вершин, метавершин, рёбер и метарёбер метаграфа.

Изменение оригинальной модели сделано не просто так. Целью оригинального ограничения является явное разделение ролей метавершины и метаребра. Однако, учитывая, что метаграф это в первую очередь модель данных, нет необходимости ограничивать возможности описания ключевой сущностью модели. Во многих областях знаний, например, в области логистических или транспортных сетей, рёбра обязаны быть направленными, но они всё ещё будут описывать лишь данные и объекты. Введённое изменение касается лишь исследовательской части данной работы.

## Операции над метаграфом

Как и говорилось выше, метаграф, как модель данных, не может существовать без возможности редактирования данных.

В работе [11] были рассмотрены основные операции над метаграфами на основе «информационных элементов метаграфа» (ИЭМ). В дальнейшем в работе [14] в качестве модели представления метаграфа вместо ИЭМ было предложено использование предикатного описания.

В качестве активного элемента метаграфовой модели используется метаграфовые агенты, рассмотренные в работе [14]. Определим метаграфовой агент следующим образом:

где , , на основе которого выполняются правила агента, т.е. рабочий метаграф. стартовое условие выполнения агента (фрагмент метаграфа, который используется для стартовой проверки правил, или стартовое правило).

Структура правила метаграфового агента:

.

где – правило; – фрагмент метаграфа, на основе которого выполняется правило; – множество операций, выполняемых над метаграфом.

Существует два вида метаграфовых агентов: замкнутые и разомкнутые.

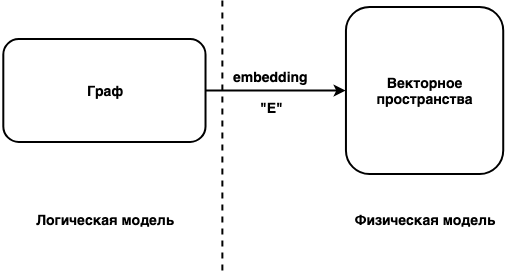
Разомкнутые правила в своей правой части не меняют фрагмент метаграфа, относящийся к левой части правила. Такие правила позволяют разделить входной и выходной фрагменты метаграфа и являются аналогом шаблона, который порождает выходной метаграф на основе входного.

Замкнутые правила в своей правой части меняют фрагмент метаграфа, относящийся к левой части правила. Изменение метаграфа в правой части правил заставляет срабатывать левые части других правил. Такое свойство опасно зацикливанием метаграфового агента, если замкнутые правила были разработаны некорректно.

Таким образом, метаграфовый агент позволяет генерировать один метаграф на основе другого (с использованием разомкнутых правил) или модифицировать метаграф (с использованием замкнутых правил).

## Представление метаграфа

При обработке графов большой размерности следует отказаться от традиционного представления графа непосредственно при его обработке, что показано на рисунке 3 ниже.

  
Рисунок 3 – Модель графа с точки зрения его обработки

Подходя к обработке метаграфа рекомендуется перевести его в вид, соответствующий оригинальной модели и постановке задачи. По аналогии с терминами реляционных баз данных, этот вид можно назвать «физической» моделью, а его оригинальный вид – «логической».

Логическая модель графа – это традиционная модель плоского графа или мультиграфа, включающая множества вершин и ребер. Тогда для метаграфа это определение звучит так: логическая модель метаграфа – это традиционная модель метаграфа, включающая множества вершин, рёбер, метавершин и метарёбер.

В качестве физической модели графа традиционно используются непрерывные векторные пространства. При этом нет никаких ограничений на использование других видов пространств. Операция преобразования графа в векторное пространство называется «векторным представлением» (связь “E” на рисунке 3). В англоязычной литературе для обозначения такого преобразования традиционно используется термин «embedding», то есть «встраивание» или «вложение» графа в векторное пространство. В данной работе предлагается использовать именно этот подход для создания физической модели метаграфовой модели данных.

## Предикатное представление метаграфа

В работе [14] в качестве модели представления метаграфа предлагается использовать предикатное описание. Язык Пролог на основе предикатов является классическим, он использует следующую форму предикатного описания: . В работе [14] предлагается следующим образом расширить исходную форму предикатного описания языка Пролог: . Помимо атомов, предлагаемых базовой формой предикатов, данная форма содержит пары ключ-значение и вложенные предикаты, что отлично подходит метаграфовой модели данных. Ниже, в таблице 1, представлены различные варианты предикатного описания различных элементов метаграфовой модели данных.

Таблица 1 – Соответствие метаграфовой модели предикатному описанию

| **Вариант** | **Фрагмент метаграфа** | **Предикатное описание** |
| --- | --- | --- |
| 1 |  | Metavertex(Name=mv1, v1, v2, v3) |
| 2 |  | Edge(Name=e1, v1, v2, eo=false) |
| 3 |  | 1. Edge(Name=e1, v1, v2, eo=true)  2. Edge(Name=e1, vS=v1, vE=v2, eo=true) |
| 4 |  | Metavertex(Name=mv2, v1, v2, v3,  Edge (Name=e1, v1, v2),  Edge(Name=e2, v2, v3),  Edge(Name=e3, v1, v3)) |
| 5 |  | Metavertex(Name=mv2, v1, v2, v3, Edge(Name=e1, vS=v1, vE=v2, eo=true), Edge(Name=e2, vS=v2, vE=v3, eo=true), Edge(Name=e3, vS=v1, vE=v3, eo=true)) |
| 6 |  | Attribute(количество, 5) |
| 7 |  | Vertex(Name=v1,  Attribute(количество, 5), Attribute(ссылка, mv2)) |
| 8 |  | Metaedge(Name=me1, vS=v2, vE=mv3, Metavertex(Name=mv4, …), eo=true) |
| 9 |  | Metagraph(Name=mg0,  Vertex(Name=v2, …), Metavertex(Name=mv3, …), Metavertex(Name=mv5, …), Metaedge(Name=me1, vS=v2, vE=mv3, Metavertex(Name=mv4, …), eo=true)) |

В таблице 1, в пункте 1 показан пример метавершины , которая содержит 3 вложенных несвязных вершины Именем предиката служит соответствующий элемент метаграфовой модели. В случае метавершины «Metavertex», в случае вершины «Vertex» и в случае ребра «Edge». Имя элементов задается именованным параметром «Name». Данный случай является простейшим, поскольку вложенные вершины не связаны друг с другом.

Пример ненаправленного ребра, который полностью соответствует формальному определению, показан в таблице 1, в пункте 2. В этом случае метавершина помечается соответствующей аннотацией направленности, а предикат добавляется именованный параметр, соответствующий признаку направленности.

Пример направленного ребра показан в таблице 1, в пункте 3. В предлагаемой модели все параметры могут быть именованными. В пункте 3 именованные параметры соответствуют параметрам из формального определения ребер метаграфа.

Метавершина, содержащая вершины и ребра, может быть представлена с использованием предикатов более высоких порядков. В таблице 1, в пункте 4 имеется пример метавершины с ненаправленными ребрами, а в пункте 5 – пример метавершины с направленными ребрами. Метаграфовая модель данных предполагает описание вершин и рёбер на одном уровне вложенности, что отражено и в предикатной модели. Фрагмент метаграфа может содержать произвольное количество вершин, метавершин и ребер.

Любой атрибут метаграфа может быть представлен как частный случай метавершины, куда вложены две связные вершины. Одна вершина представляет из себя ключ атрибута, а вторая – его значение. В таблице 1, в пункте 6 представлен атрибут, содержащий целое число. Для Атрибута используется имя предиката «Attribute». Значения атрибутов могут иметь строковые, числовые и другие значения. Однако ключи могут быть только строковые. В пункте 7 показан пример вершины , содержащей атрибут из пункта 6, а также атрибут, ссылающийся на метавершину .

Метаребро метаграфа также представляется с помощью предикатов высоких порядков. В пункте 8 таблицы 1 содержится пример метаребра , исходной вершиной которого является вершина , конечной метавершиной , при этом метаребро содержит вложенную метавершину . Для метаребра используется имя предиката «Metaedge».

Фрагмент метаграфа может содержать произвольное количество вершин, метавершин, ребер и метаребер метаграфа. Пункт 9 таблицы 1 содержит пример фрагмента метаграфа , в который включена вершина , метавершины и , метаребро . Для фрагмента метаграфа используется имя предиката «Metagraph», для вершины – «Vertex».

Предикатное описание позволяет привести метаграфовую модель к текстовому виду. Также к преимуществам предикатной модели можно отнести простоту и взаимную независимость составных частей предикатного описания. Однако предикатное описание позволяет описать лишь данные и процессы, записанные в модели метаграфа, и не предоставляет инструментария для обработки этой информации.

Ниже, на рисунке 4, приведён пример предикатного описания метаграфа, приведённого выше на рисунке 1.

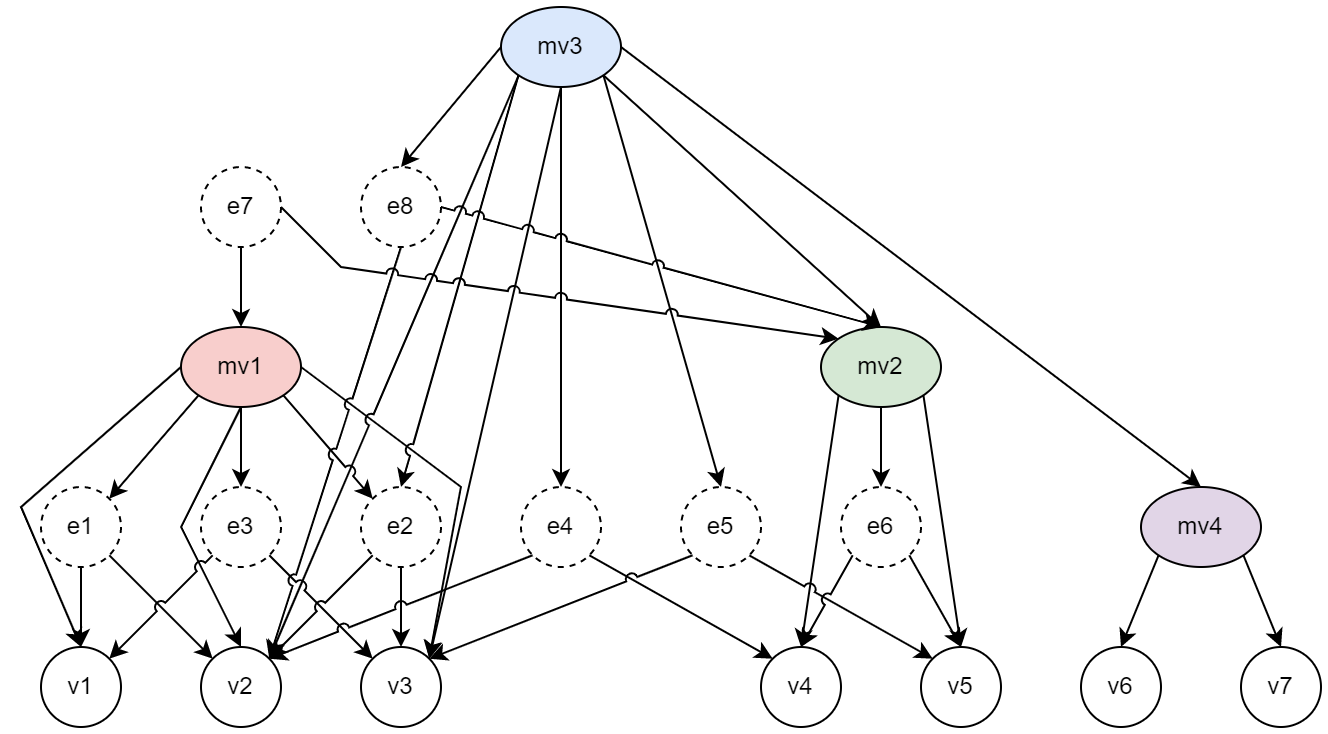


Рисунок 4 – Иерархическое предикатное представление метаграфа

На рисунке 4 предикаты показаны в виде вершин плоского графа. Вершины представляют собой белые круги, метавершины – цветные эллипсы, а рёбра – пунктирные круги. Иерархическая зависимость между предикатами сохранятся за счёт стрелок, которые всегда направлены к предикатам более низкого уровня. Поэтому изображение метаграфа с помощью предикатов позволяет подготовить метаграф к проведению операции эмбеддинга.

Граф, представленный на рисунке 4, является стратифицированным. Он разделён на слои, на уровни, хоть и довольно условным образом. Нижний уровень содержит предикаты-вершины. Второй уровень включает предикаты, соответствующие связям между элементами первого уровня. Более высокие уровни содержат метавершины и связи между ними. Данный пример условный потому, что метаграфовая модель данных позволяет, в отличие от моделей гиперграфа и гиперсети связывать не только соседние уровни. Это означает, что объект третьего и более высокого уровня может быть напрямую связан с объектом нижнего уровня. Между тем, количество уровней такого плоского графа косвенно указывает на сложность метаграфа и сложность его эмбеддинга.

Предикатное представление метавершин и ребер не имеет существенных различий. В данном примере получается так, что второй уровень графа содержит шесть ребер и метавершину . Ребро обладает атрибутом направленности и может включать только два вложенных предиката, которые могут представлять из себя как метавершины, так и вершины. Метавершина же не имеет атрибута направленности и ограничения на количество вложенных предикатов. Таким образом ребро можно считать частным случаем метавершины.

Этот вывод может показаться парадоксальным с точки зрения классической теории графов, где вершины и рёбра считаются принципиально различными объектами. Однако это очень удобно и потенциально упрощает алгоритм эмбеддинга: можно рассматривать ребро как совокупность двух вложенных вершин.

Разница между двумя парами вершин, соединёнными и не соединёнными ребром, состоит в том, что первая пара вместе с ребром обладает свойством эмерджентности. Такая конструкция представляет собой отдельный объект, более высоко организованный чем две отдельные вершины.

Тогда метавершина обладает своством эмерджентности в более высокой степени, ведь она включает как исходные вершины, так и соединяющие их ребра, и, возможно, метавершины и метарёбра нижнего уровня.

Как видно из описания различных вариантов метаграфовых предикатов элементарные вершины представляют собой ноль-эмерджентность, то есть рассматриваются как атомарные элементы. Рёбра обеспечивают эмерджентность первого порядка, метавершины – второго, а метарёбра – третьего. Рассмотренный подход представляет собой основу метаграфового исчисления.

Все предлагаемые далее операторы предназначены для построения эмерджентных структур из вершин-предикатов.

# Разработка метода эмбеддинга метаграфов

## Особенности эмбеддинга метаграфов

Метаграфовая модель данных является молодой и, следовательно, неизученной и даже несовершенной. В настоящее время не существует методов прямого эмбеддинга метаграфов. Работа [13] предлагает метод изоморфного преобразования метаграфа в n-дольный граф, который в свою очередь возможно преобразовать в вектора с помощью алгоритмов, приведенных в работах [11-12].

В данной работе исследуется возможность эмбеддинга метаграфа через его плоский n-дольный граф.

## Преобразование метаграфа в многодольный граф

Модель метаграфа не предоставляет информации о том, каким образом хранить его в какой-либо информационной системе. Эта модель знаний создавалась высокоуровневой для того, чтобы иметь возможность решать задачи как можно более широкого круга и хранить данные как можно более разноплановые. Метаграф молодая модель данных, она развивается и в будущем она наверняка потерпит изменения для улучшения представления данных о процессах.

Как и говорилось выше: метаграф является лишь логической моделью данных. Для использования метаграфов в реальной жизни необходимо иметь хотя бы одну физическую модель, к которой метаграф можно привести для хранения в базе данных. На данный момент такой общепринятой модели нет.

Ниже, на рисунке 5, изображён предикатный плоский граф из предыдущего раздела (см. рисунок 4) с небольшими изменениями, о введении которых говорится далее.

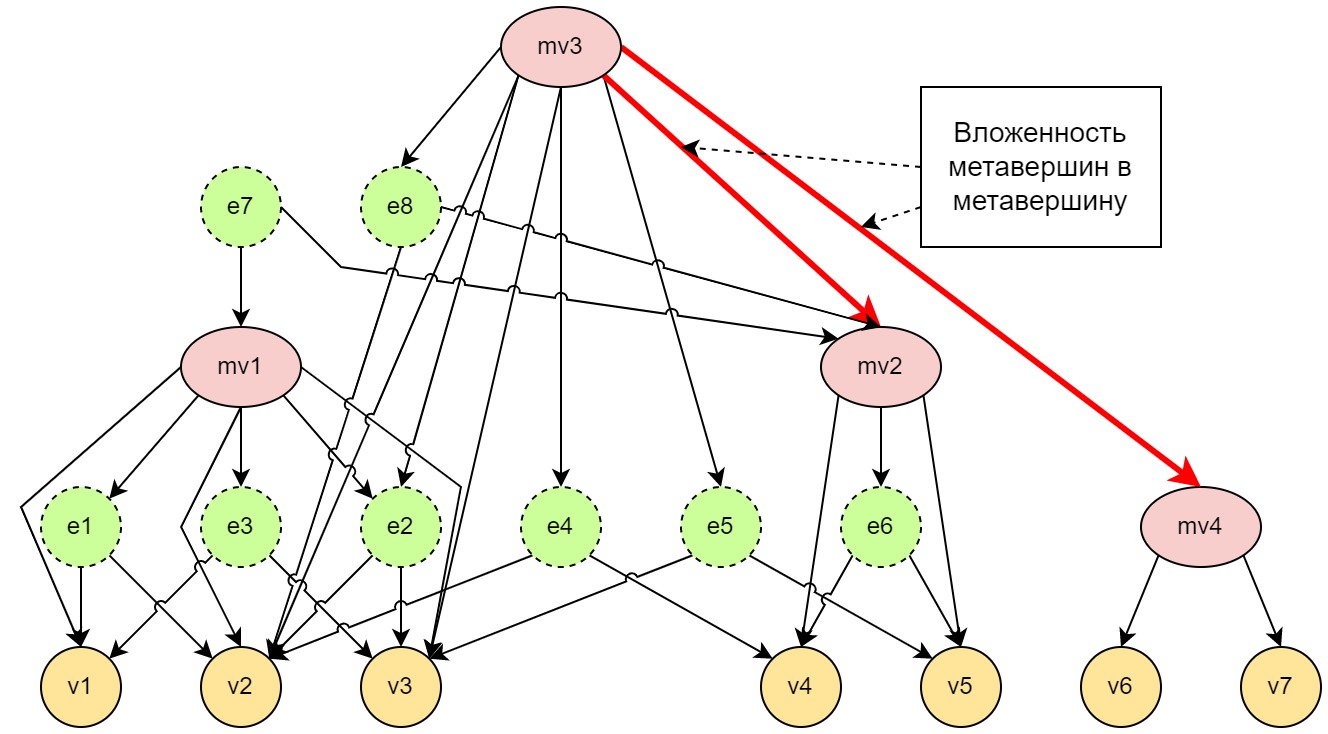


Рисунок 5 – Попытка разделения метаграфа на 3-дольный плоский граф

Как говорилось в предыдущем разделе, метавершину можно представить в виде композиции из обычной вершины и набора связей с другими вершинами, метавершинами и рёбрами.

Ни одна вершина не связана напрямую ни с одной из других вершин, поэтому объекты типа Вершина («Vertex») можно выделать в отдельный класс. Выделение классов производится для преобразования метаграфа в n-дольный граф.

Также очевидно, что ни одно ребро не связано с другими рёбрами, поэтому объекты типа Ребро («Edge») тоже выделяются в отдельный класс.

К сожалению, про метавершины из оригинальной метаграфовой модели такое сказать нельзя, однако, судя по всему, это не мешает использованию модели в начальном виде. На рисунке 5 отображены две связи между метавершинами и , а также и , которые говорят о включённости метавершин и в метавершину . Это говорит о том, что выделение метавершин в отдельный класс при формировании n-дольного графа не в полной мере отвечает определению n-дольного графа.

Преобразование в n-дольный граф должно сохранять топологию оригинального метаграфа и позволять выделять классы узлов, кардинально различающихся по свойствам, и, к счастью, модель данных позволяет это сделать без введения незнакомых элементов. Для организации n-дольного графа, можно использовать фрагмент метаграфа как обёртку над элементами, входящими в состав метавершины. Этот элемент метаграфовой модели описан выше в разделах 1.3 и 1.6. Изменённый плоский граф с выделенными долями показан ниже, на рисунке 6.

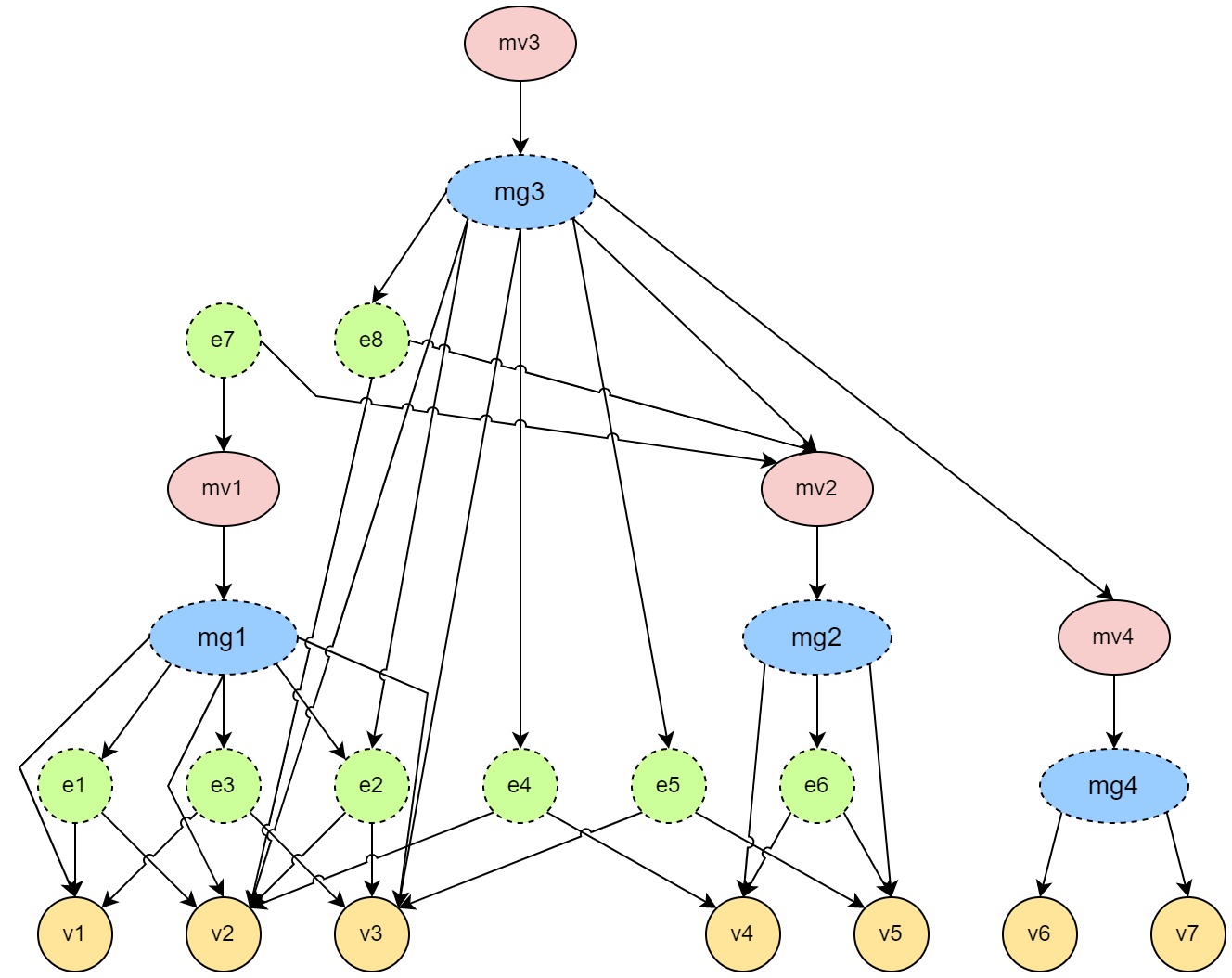


Рисунок 6 – Четырёхдольный граф

Подграфы, Фрагменты («Fragment») , не могут быть связаны друг с другом, поскольку каждая метавершина может иметь в своём составе только один фрагмент. С другой стороны, возможна ситуация, при которой один и тот же фрагмент будет находиться в составе двух и более метавершин. Такое может произойти не тогда, когда элементы одного фрагмента содержатся в другом, более крупном фрагменте, а когда две метавершины различаются только набором атрибутов.

Метавершины благодаря введению элементов класса Фрагмент также образуют отдельный класс узлов плоского графа, поскольку могут быть связаны друг с другом только через посредничество элемента класса Фрагмент и таким образом теперь тоже не могут быть смежными узлами в «плоском» представлении.

С введением дополнительной «прослойки» на данном этапе преобразования метаграфа был получен полноценный четырёхдольный граф, состоящих из элементов четырёх типов: Вершина, Ребро, Метавершина, Фрагмент. Рисунок 6 показывает вариант преобразования метаграфа к плоскому четырёхдольному графу. На основании этого рисунка становится понятно, что графовые СУБД могут использоваться для хранения метаграфов. Рёбра, Метавершины и Фрагменты легко «преобразовать» в вершины.

Однако, несмотря на теоретическую правильность ввода нового класса Фрагмент создание таким образом четырёхдольного, а не трёхдольного графа не может не вызывать сомнений. Ввод этого класса для удовлетворения формального определения n-дольного класса является лишним с практической и, самое главное, смысловой точки зрения.

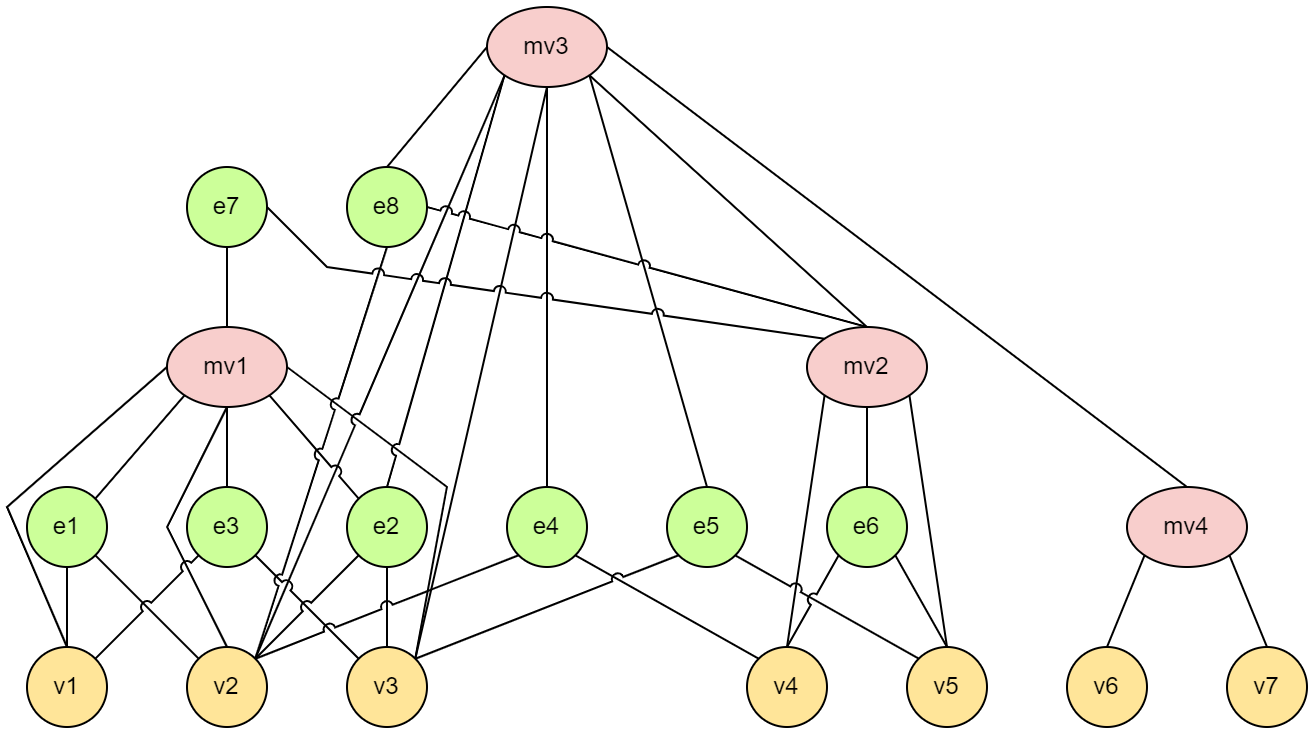
Метавершины в ходе работы с метаграфом могут меняться. Это означает, что использование несколькими из них одного и того же фрагмента станет невозможным, если изменится одна из таких метавершин. В таком случае придётся создавать копию фрагмента со всеми входящими в его состав элементами метаграфа, что не всегда удобно и может создать огромную дополнительную нагрузку на вычислительную систему.

Чтобы выделение отдельного класса узлов метаграфа имело смысл, нужно чтобы эти вершины имели какие-то свойства и были независимыми от других объектов. Фрагменты являются составными частями метавершин, что означает, что они явно привязаны к ним. Они не обладают собственными свойствами, следовательно, не обладают свойством эмерджентности, так что с точки зрения метаграфа выделение фрагментов не нужно.

Помимо этого, важно понять, что будет происходить на практике по ходу выполнения алгоритма эмбеддинга. В начале будет произведён перевод метаграфа в плоский граф путём составления матрицы смежности и списка «вершин» плоского графа. Список нужен для сохранения информации о свойствах самих вершин. Это означает, что количество вершин-фрагментов по количеству примерно равно числу метавершин, что увеличивает матрицу смежности в среднем на 20-40% по сравнению с её размерами без введения фрагментов.

Если не вводить класс Фрагмент, то связь вложенности между метавершинами сохраняется, однако стоит заметить, что эта связь сохраняется и между парами узлов типов метавершина-вершина. Такая связь не обладает ни атрибутами, ни свойством направленности, что делало бы необходимым введение дополнительных элементов.

Таким образом, целесообразным будет использование трёхдольного графа со следующими классами: Вершина, Ребро, Метавершина. Пример такого графа, составленный на основе метаграфа с рисунка 1, показан ниже, на рисунке 7.

  
Рисунок 7 – Трёхдольный граф

## Алгоритм преобразования метаграфа в трёхдольный граф

Основная идея для отображения метаграфа – преобразование иерархической модели графа в плоский граф. Однако, невозможно преобразовать иерархическую модель графа в плоский граф напрямую, поэтому ключевой идеей является использование многодольных графов.

Рассмотрим модель плоского графа как:

,

где – набор вершин графа; – набор рёбер графа.

Модель метаграфа, если учитывать исследование предыдущего раздела, рассматривается так:

,

где – метаграф; – множество вершин метаграфа; – множество метавершин метаграфа; – множество рёбер метаграфа.

Тогда плоский граф рассматриваться как трёхдольный граф метаграфа :

Набор вершин графа может мыть разделено на 3 независимых набора Существует 3 изоморфных преобразования между вершинами метаграфа, метавершинами, ребрами и соответствующими множествами:

Набор содержит информацию о связях между вершинами, метавершинами и рёбрами в исходном метаграфе.

С точки зрения n-дольных графов, не важно, является ли метаграф ориентированным, поскольку его рёбра представляются в графе как вершины и знак ориентирования может считаться атрибутом вершины-ребра в . В этом графе отношения между вершинами и метавершинами рассматриваются как специальные сущности более высокого уровня, которые включают элементы более низкого уровня.

Учитывая всё вышеизложенное логично представить алгоритм перевода метаграфовой модели в модель трёхдольного графа похожим на алгоритм поиска в глубину для плоского графа. Вложенные элементы метавершины можно представить в виде вершины плоского графа и связями между этой вершиной и вложенными элементами. Результатом работы алгоритма является матрица смежности плоского графа. Для удобства весь метаграф является .

Алгоритм преобразования модели метаграфа в трёхдольный граф состоит из двух методов:

* Обход метаграфа в глубину (Metagraph Depth-First Search, MDFS);
* Заполнение матрицы смежности (Adjacency matrix filling, AMF). Заполнение производится на основе результата на основе результатов работы метода MDFS.

Ниже представлены текстовые краткие версии этих двух алгоритмов. Пояснения к ним приведены ниже.

* MDFS: Проход в цикле по всем элементам , где :

1. Если не находится в списке , то есть если :
   * 1. Добавить в список ;
     2. Если является метавершиной, то вызвать процедуру MDFS для .

* AMF: Проход в цикле по всем элементам ( – список):

1. Если является метавершиной:
   * 1. Для каждого элемента , заполнить матрицу смежности следующим образом: и , где – индексы метавершины и элемента в списке ;
2. Если является ребром :
3. Заполнить матрицу , , и , где – индексы элементов списка : (source) – индекс элемента начальной вершины ребра , (elem) – индекс элемента ребра , (destination) – индекс элемента конечной вершины ребра .

Ниже, на рисунке 8, изображён простой метаграф. В результате работы алгоритма он будет преобразован в плоский трёхдольный граф, который изображён на рисунке 9.

  
Рисунок 8 – Пример простого метаграфа



Рисунок 9 – Полученный алгоритмом трёхдольный граф

Как видно из рисунка 9, плоский граф состоит из четырёх типов вершин: вершин-метавершин , вершин-вершин , и вершин-рёбер .

Все вершины-рёбра соединены с другими вершинами графа рёбрами, для которых не важна направленность исходных рёбер метаграфа, поскольку для вершин-рёбер устанавливается атрибут направленности. Остальные элементы полученного четырёхдольного графа соединены друг с другом в соответствии с топологией исходного метаграфа.

## Подходы к эмбеддингу графов

Описание способов эмбеддинга графов в этом и следующих разделах в основном опираются на обзоры [15-16], а также на статьи, посвящённые конкретным алгоритмам эмбеддинга.

Графовая аналитика зарекомендовала себя как практичная и важная область знаний, однако сейчас большая часть её методов страдает от высоких затрат памяти компьютера, больших вычислительных и временных затрат. Объёт затрат не позволяет сделать графовую аналитику доступной для всех. Много исследований посвящено эффективному проведению дорогостоящей графовой аналитики. Примеры такие исследований включают в себя инфраструктуры обработки данных распределенного графа (например, GraphX [17], GraphLab [18]), компактное хранилище графов [19], которое ускоряет ввод-вывод и вычислительные затраты и т. д.

Эмбеддинг графа – это эффективный способ решения задачи аналитики графов. Его эффективное использование позволяет перевести граф в низкоразмерное векторное пространство, в котором сохранится информация о графе. После получения представления можно обрабатывать сами данные так же эффективно, как и другие неграфовые данные.

Эмбеддинг графа в низкоразмерное пространство является комплексной задачей. Сложности решения задачи вложения графа зависят от постановки задачи предметной области, которая состоит, в частности, из требований к входным и выходным данным.

Результатом эмбеддинга графа является вектор, представляющий целый граф или какую-то определённую часть графа, например, только вершины или только рёбра графа. На рисунке 10 показан пример эмбеддинга вершин графа в двухмерное пространство.

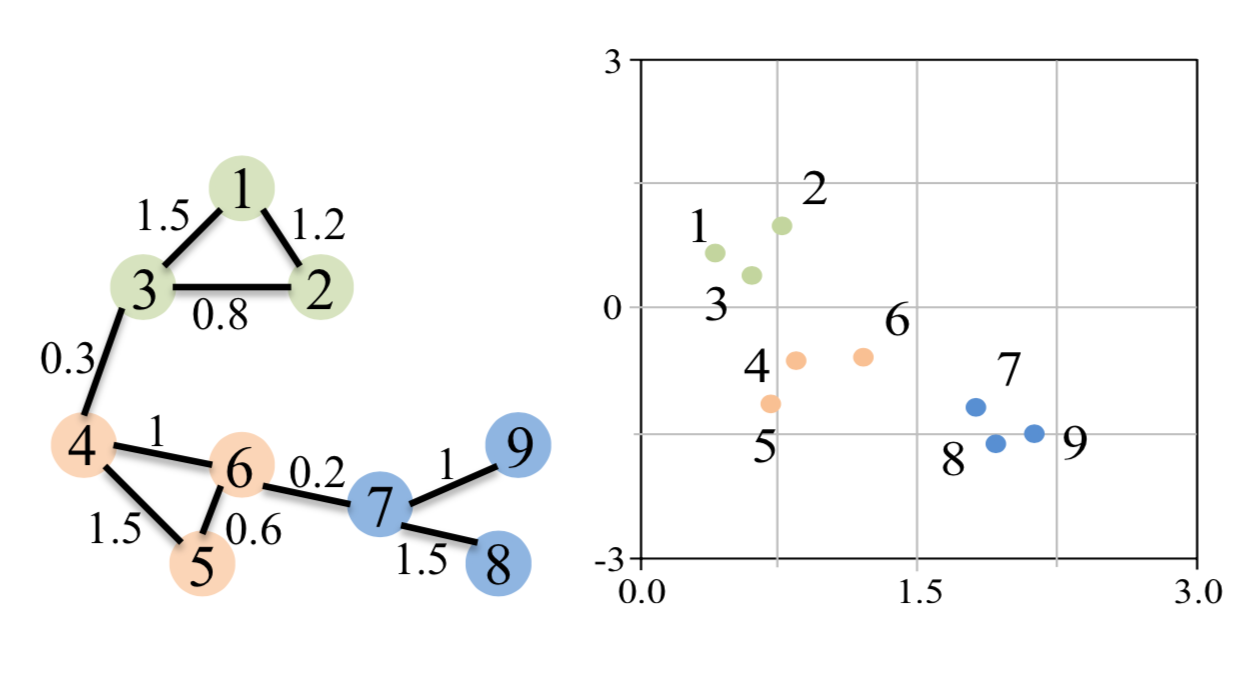


Рисунок 10 – Эмбеддинг вершин графа в двухмерное векторное пространство

Наиболее распространенный тип эмбеддинга – это эмбеддинг узлов. Он может быть полезен при решении задач, связанных с узлами, например, классификация или кластеризация узлов графа. Этот подход неизбежно представляет узлы, схожие по свойствам, близко расположенными друг к другу в векторном пространстве. Основным показателем качества такого эмбеддинга является видимость различия между векторами таких узлов графа. То есть хороший алгоритм эмбеддинга любого типа должен сохранять сходство похожих узлов, но не сливать их в один.

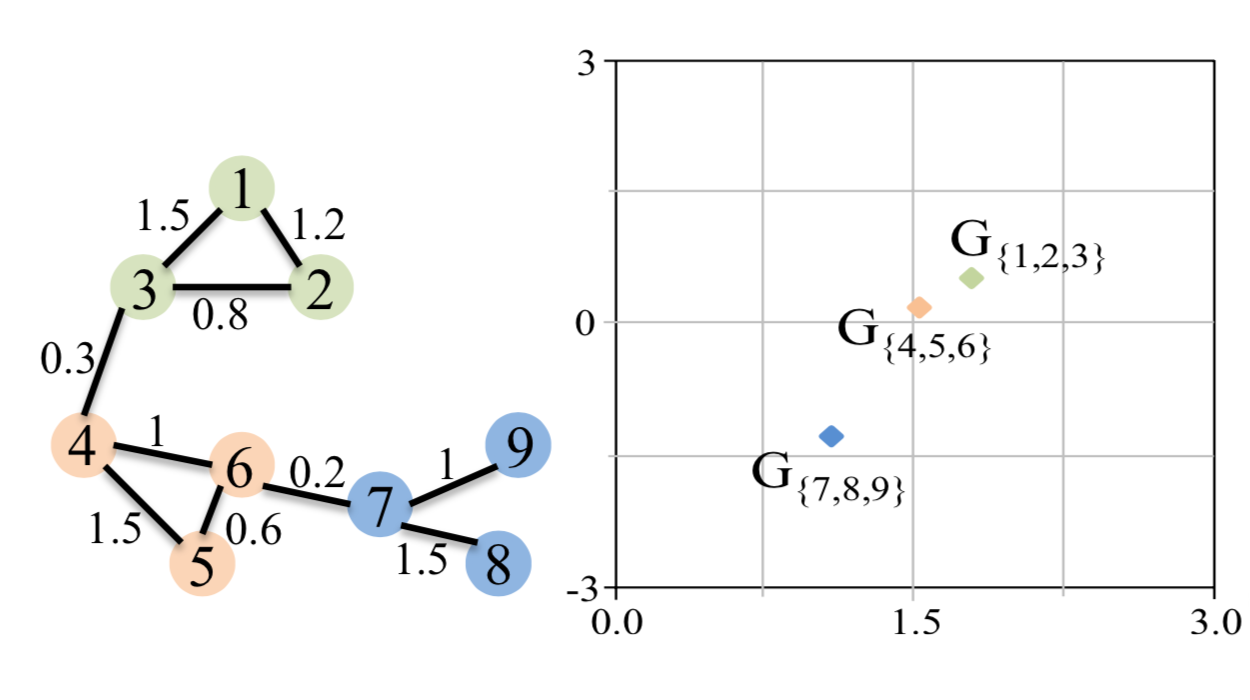
В некоторых случаях задачи могут быть более сложными и связанными, например, с какими-то комбинациями, парами, тройками узлов, подграфом или графом целиком. Следовательно, помимо самого эмбеддинга и его встраивания в общее решение, необходимо решить, какой тип выходных данных необходимо от него получить.

Существуют разные типы эмбеддинга относительно типов выходных данных: эмбеддинг узлов, рёбер, гибридный эмбеддинг и эмбеддинг целого графа. Логично, что алгоритмы разных типов сталкиваются с разными проблемами по ходу проведения операции эмбеддинга и имеют разные критерии оптимального встраивания. Например, хорошее вложение узла сохраняет сходство с соседними узлами в векторном пространстве. Напротив, хорошее вложение целого графа представляет целый граф как вектор, так что сходство на уровне графа сохраняется.

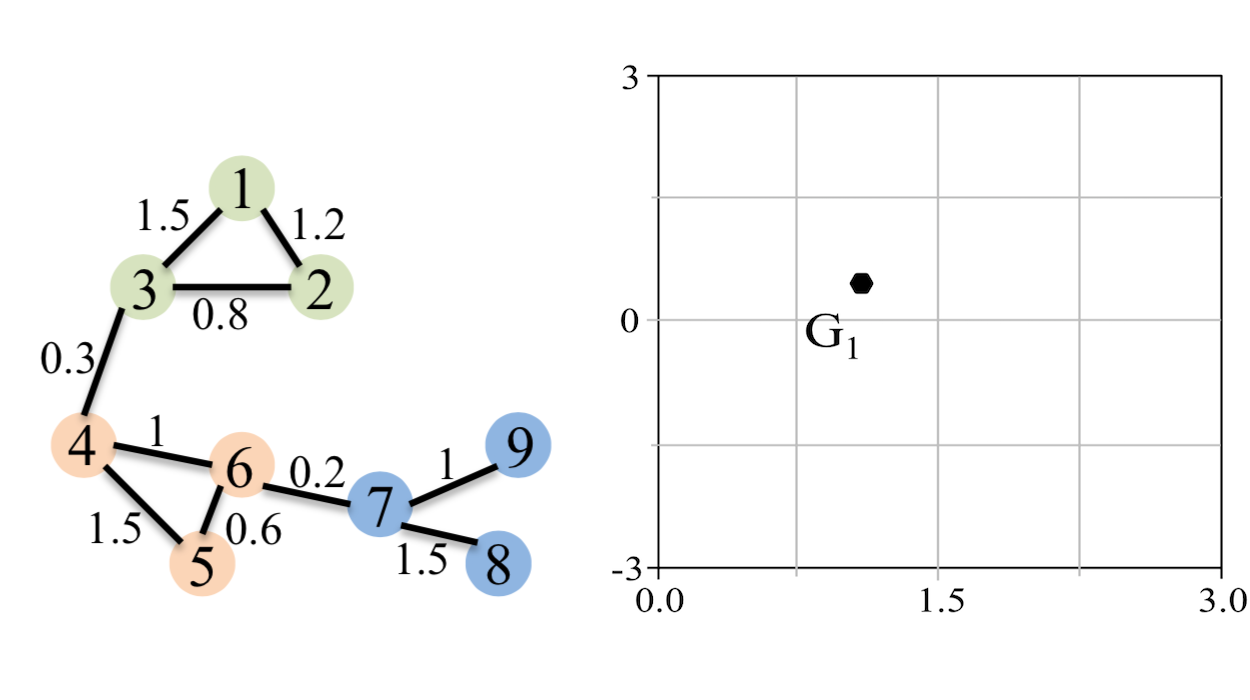
Пример вложения рёбер в двухмерное пространство показан на рисунке 11 ниже.

****Рисунок 11 – Вложение рёбер в двухмерное пространство

Пример вложения подграфа в двухмерное пространство показан на рисунке 12 ниже.

Рисунок 12 – Вложение подграфа в двухмерное пространство

Пример вложения графа в двухмерное пространство показан на рисунке 13 ниже.

Рисунок 13 – Вложение графа в двухмерное пространство

Важно отметить, что в отличие от реляционной СУБД, где преобразование логической модели в физическую является однозначным отображением, про эмбеддинг графа и, тем более, метаграфа такого сказать нельзя. На основе одной логической модели с помощью различных методов можно сформировать различные результирующие векторные пространства физической модели. Полученные модели, как правило, оптимизированы для выполнения конкретных алгоритмов над графами.

Значительная часть наиболее простых техник эмбеддинга основана на том факте, что ребрам графа приписывается определенная числовая метрика, которую можно трактовать как расстояние между вершинами графа или пропускную способность каналов, соединяющих вершины.

## Входные данные эмбеддинга графов

Входными данными для вложения графов является матрица смежности графа. При осуществлении эмбеддинга, то есть вложения графа, используются такие метрики как близость первого порядка и близость второго порядка. Если граф не взвешенный, то матрица смежности имеет одинаковые значения для связей, обычно таким ячейкам присваивается единица, а остальным – нуль. Если же он взвешенный, то в ячейку определённой связи ставится вес этого ребра.

В разделе ниже будет рассмотрен эмбеддинг многодольных графов. В соответствии с результатами исследования, завершённого в разделе 2.3 данной работы, в экспериментальной части будет произведена работа лишь с невзвешенным трёхдольным графом.

## Особенности многодольных (трёхдольных) графов

Как и говорилось выше, многодольные графы состоят из вершин разного типа (класса), которые составляют доли такого графа. Вершины в многодольных графа обычно несут разный смысл, имеют отличительные свойства или вообще описывают разные объекты. Пример трёхдольного графа представлен на рисунке 14. Вершины этого графа делятся на три класса: «зеленый», «синий» и «красный».

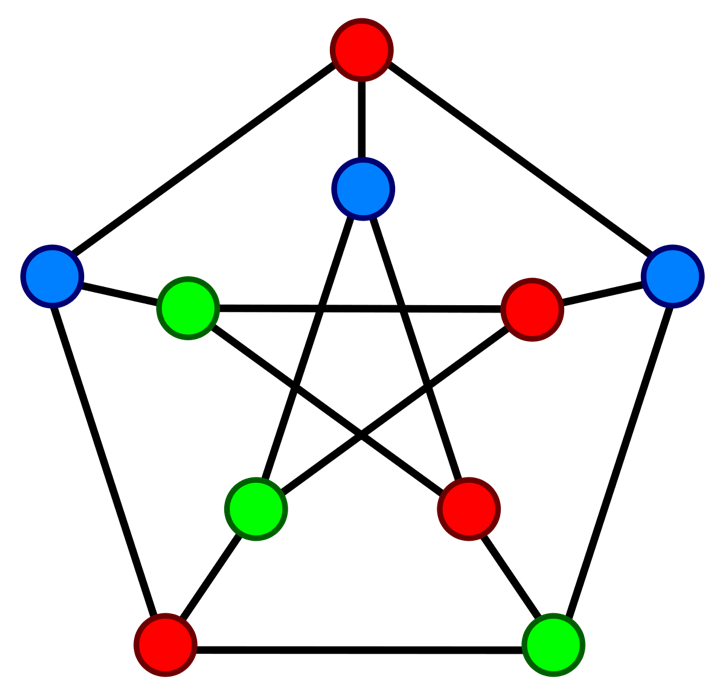


Рисунок 14 – Пример трёхдольного графа

Для многодольных графов существует много сценариев применения. Ниже приведены и кратко описаны три примера.

Сайты сообщества вопросов и ответов (cQA) – это краудсорсинговый сервис в Интернете, который позволяет пользователям размещать на веб-сайте вопросы, на которые отвечают пользователи [20]. Российским пользователям и it-специалистам, в частности, отлично известны такие ресурсы, как «Ответы Mail.ru», «StackOverFlow» или «CyberForum». Множество форумов построены по такой системе и могут действовать в интересах компании-создателя. Если представить граф cQA, то там, очевидно, будут такие типы узлов: вопрос, ответ, пользователь.

Мультимедийные сети – это сети, которые заключают в себе информацию в виде, например, изображения, текста, аудиозаписи и так далее.

В работах [21-22] рассмотрены графы, содержащие два вида узлов: изображение и текст, а также три вида ссылок: совместное появление изображения-изображения, текста-текста и изображения-текста.

В работе [23] рассматривается социальное взаимодействие с пользовательским узлом и узлом изображения. Ссылки на пользовательские изображения используются в данной работе для встраивания пользователей и изображений в одно и то же пространство. Благодаря этому подходу возможно напрямую сравнивать пользователей и изображения для получения рекомендаций по изображениям.

В работе [24] рассматривается граф кликов, который содержит изображения и текстовые запросы. Вес ребра запроса изображения указывает на количество кликов по изображению при данном запросе.

В графах знаний сущности, предстающие в виде узлов, и отношения, предстающие в виде рёбер, бывают разных типов. В работе [25] рассматривается граф знаний о фильмах. В этом графе типами сущностей могут быть «продюсер», «актёр», «фильм» и так далее. Типы отношений могут быть следующими: «производить», «финансировать», «играть в». Работы [26-28], например, посвящены внедрению графов знаний и описывают сложности, обычно сопровождающие такой процесс.

Главной задачей данной работы является представление метаграфовой модели знаний в виде многодольного графа и проведение эмбеддинга вершин этого графа. Метаграфовая модель не ограничивает количество элементов того или иного типа в своём составе, поэтому стоит учитывать возможный дисбалланс при эмбеддинге. Поскольку в рамках данной работы встраивание трёхдольного графа происходит в единое векторное пространство неизбежной сложностью становится сохранение согласованности между различными типами объектов.

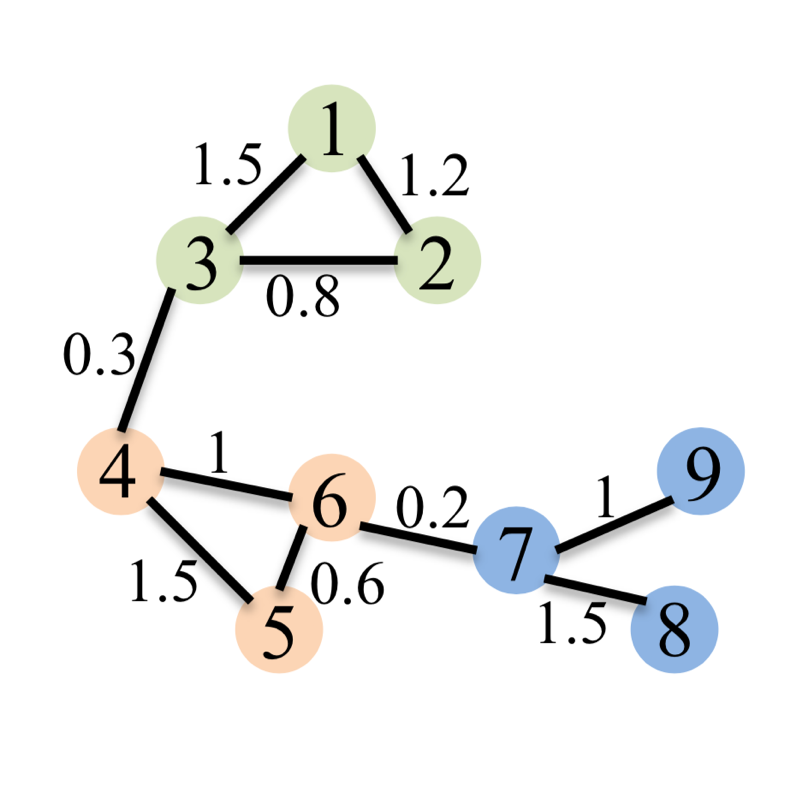
## Выходные данные эмбеддинга графов

Выходными данными эмбеддинга графов является набор векторов, представляющих граф или часть графа. На предыдущих этапах исследования был получен трёхдольный плоский граф, узлами (вершинами) которого являются вершины, рёбра и метавершины исходного метаграфа. Между новыми вершинами в плоском графе существуют лишь ненаправленные связи, благодаря которым плоский граф остаётся изоморфным с исходным метаграфом. Таким образом в данной работе стоит задача вложения вершин всех трёх типов в единое векторное пространство.

Вложение узла представляет каждый узел как вектор в низкоразмерном пространстве. Узлы, близкие в исходном метаграфе должны быть вложены так, чтобы иметь похожие векторные представления. Различия между методами вложения графов заключаются в том, как они определяют «близость» между двумя узлами.

Ниже вводится два определения на основе классической математической теории, изложенной, в частности, в работе [29].

Близостью первого порядка между вершиной и вершиной является вес . Вершины из пары тем более «близки», чем больше значение веса ребра, которым они соединены. Пусть близость первого порядка между вершиной и вершиной обозначается как . Тогда – близость первого порядка между вершиной и остальными вершинами. В таком случае для вершины с номером 7 () плоского графа, который показан на рисунке 15 ниже, .

  
Рисунок 15 – Пример плоского графа

Близость второго порядка сравнивает сходство структур соседних узлов. Чем больше схоже окружение двух узлов, тем больше значение близости второго порядка между ними. Значение близости второго порядка между вершиной и вершиной напрямую зависит от значений близости первого порядка каждой из этих вершин. Для определения такой близости в данной работе предлагается использовать косинусное сходство [29].

Исходя из рисунка 15 для довольно похожих вершин с номерами 6 и 7 вектора близости примут следующие значения: , . В таком случае косинусное расстояние определяется по формуле:

В случае вершин 6 и 7 значения метрики близости второго порядка будет равно нулю, что будет означать, что они ортогональны друг другу в векторном пространстве.

В случае вершин 5 и 6, для которых , , значение метрики близости второго порядка будет: .

Такой результат означает, что вершины 5 и 6 довольно схожи.

Итого, две эти метрики близости используются для расчета схожести узлов.

## Алгоритмы эмбеддинга

Существует множество различных алгоритмов эмбеддинга графов. Некоторые из них, рассмотренные, в частности, в работе [55], предназначены для анализа текстов.

Как правило, алгоритмы эмбеддинга графа направлены на представление его в низкоразмерном пространстве и сохранение информации о как можно большем количестве свойств графа. Разница между алгоритмами, в основном, заключается в том, как и какие свойства «хочет» сохранить алгоритм. Алгоритмы используют различные «сходства» узлов графа и представляют их в векторных пространствах тоже по-разному. Ниже будут кратко описаны механизмы работы алгоритмов, их отличительные свойства и преимущества при эмбеддинге плоских графов. Также будет пояснено, на какие свойства графа они обращают внимание.

Практически все существующие алгоритмы эмбеддинга производят встраивание графа в евклидово прострнаство, однако, как известно, существуют и другие типы пространств, неевклидовых. К таким алгоритмам относится и Riemannian TransE [53] или MuRP [54], однако он плохо работает с графами большой размерности, поэтому он и ему подобные не рассматриваются в данной работе.

Эмбеддинг на основе матричной факторизации представляет связи графа в форме матрицы и разлагает эту матрицу для получения вложения узла [30]. Матрицы, используемые для представления соединений, включают в себя: матрицу смежности узлов, матрицу Лапласа, матрицы сингулярного разложения, матрицу вероятностей перехода узлов, а также другие.

В экспериментальной части данной работы будет рассмотрен результат эмбеддинга двумя алгоритмами этого типа. Будут использованы «Cобственные карты Лапласа» (Graph Laplacian eigenmaps, Laplacian eigenmaps, LE) [31-35] и «Встраивание с сохранением близости высокого порядка» (HOPE – High-Order Proximity preserved Embedding) [36], которые описаны в подразделах 2.8.1 и 2.8.2 ниже.

Глубокое обучение (Deep Lerning, DL) показало отличную производительность в широком спектре областей знаний и исследований, таких как компьютерное зрение, языковое моделирование и т. д. Применение моделей DL давно зарекомендовало себя в области обработки естественного языка, и одним из примеров таких алгоритмов являются методы, построенные на основе моделей word2vec [37]. Однако позже исследователи показали на примерах алгоритмов DeepWalk [38] и Node2Vec [39].

В экспериментальной части данной работы будет рассмотрен результат эмбеддинга метода Node2Vec, который описан ниже в подразделе 2.8.3.

## Встраивание с сохранением близости высокого порядка (HOPE – High-Order Proximity preserved Embedding)

Существующие методы вложения графов не могут хорошо сохранить асимметричную транзитивность, которая является критическим свойством ориентированных графов. В случае метаграфа это свойство также важно учитывать. Асимметричная транзитивность показывает корреляцию между направленными ребрами, то есть, если существует направленный путь от v1 до v2, то, вероятно, существует направленное ребро от v1 до v2. Асимметричная транзитивность может помочь в захвате структур графов и восстановлении из частично наблюдаемых графов. Метод HOPE предлагает идею сохранения асимметричной транзитивности путем приближения к близости высокого порядка, основанной на асимметричной транзитивности.

Входными данными алгоритма является матрица смежности графа, размерность K векторного пространства, специальный параметр масштабности выходных векторов, а также информация о направленности рёбер. Следуя работам [36] и [40], cначала определяется разложение матрицы смежности по сингулярным значениям (Singular Value Decomposition, SVD) на матрицы и . Затем масштабируемый алгоритм вычисляет (аппроксимирует) близость высокого порядка на основе базовой матрицы смежности: сначала вычисляются вектора сингулярных значений и и соответствующие сингулярные вектора начальных и конечных узлов графа и . Затем вычисляется обобщённый вектор по формуле ниже:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Затем вычисляются набор векторов для стартовых вершин и конечных вершин в евклидовом векторном пространстве размерности K по формулам ниже:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

Таким образом метод HOPE аппроксимирует близости высокого порядка значительно лучше, чем другие алгоритмы, и по результатам экспериментов, проведённых авторами метода, превосходит другие современные алгоритмы в задачах реконструкции, прогнозирования и рекомендации связей.

## Собственные карты Лапласа (Laplacian Eigenmaps)

Свойства графа можно интерпретировать как сходство парных узлов, которые оформляются в виде матрицы смежности W, являющейся входными данными алгоритма вместе с самим графом G. Цель вложения графа - представить каждую вершину графа как низкоразмерный вектор, сохраняющий сходства между парами вершин. Чем больше вес ребра, тем больше «схожесть» двух вершин графа.

Далее последует краткое описание сути алгоритма.

Пусть – набор векторов который представляет каждый из вершин графа в низкоразмерном пространстве. Оптимальный набор пытается оптимизировать функцию (2):

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

где – элемент матрицы смежности, вес ребра между вершинами и .

Оптимизация функции происходит под соответствующим ограничение. Эта целевая функция (2) не допускает большое расстояние между соседними вершинами. Поэтому сведение к минимуму является попыткой убедиться, что если вершины и «близки», то разница между тоже маленькая [41]. Поэтому мы имеем (3):

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

где – Лапласиан графа [42]. диагональная матрица где . Чем больше значение , тем более значение .

В итоге задача состоит в минимизации (4) функции:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

где ограничение нивелирует возможность произвольного масштабирования представления.

Существуют разные алгоритмы, основанные на этом методе: MDS [43], Isomap [44], LE [45], LLP [46], AgLLP [47], ARE [48], SR [31]. Эти алгоритмы использует матрицу W с другими значениями. Выбор матриц W и D может быть очень разным, но играет ключевую роль в этих алгоритмах вложения графа. Алгоритм LGRM [51] использует модель локальной регрессии для понимания структуры графа. Алгоритм LSE [52] использует локальную сплайн-регрессию для сохранения глобальной геометрии.

Также помимо создания подобных вариаций были предприняты попытки, описанные в работах [49-50], обобщить существующие методы, однако в экспериментальной части данной работы используется именно описанная выше базовая версия алгоритма.

## Node2Vec

Алгоритмы эмбеддинга графов, основанные на методах глубокого обучения, сначала формируют набор случайных путей в графе, а потом с помощью методов глубокого обучения производят эмбеддинг на основе путей. Таким образом подобные алгоритмы, и Node2Vec в частности, сохраняют свойства путей графа.

В рамках этой работы в первую очередь необходимо сопоставить каждый узел метаграфа с точкой в низкоразмерном векторном пространстве. Совокупность точек должна максимально полно описывать структуру метаграфа, а точнее говоря, совокупность свойств его узлов и метаграфа в целом.

Метод Node2Vec основан на механизме случайных блужданий.

Ниже, на рисунке 16, приведена иллюстрация процедуры случайного блуждания в Node2Vec.

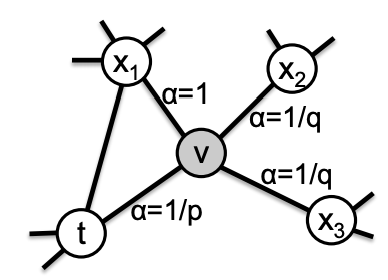


Рисунок 16 – случайное блуждание в Node2Vec

В данном алгоритме при переходе к следующему узлу учитывается не только текущее состояние блуждания, но и предыдущее состояние. Таким образом блуждание в алгоритме Node2Vec представляет собой Марковский случайный процесс второго порядка. Вводится два параметра p и q, характеризующих вероятность перехода от одних вершин к другим.

На рисунке 16 рассмотрен пример блуждания, которое прошло по пути от вершины t к вершине v и сейчас находится в вершине v. Вероятность перехода от вершины v к вершинам t и xi равна = , где

и обозначает кратчайшее расстояние между узлами и . Параметр p отвечает за немедленный возврат назад, а q за продвижение вперёд. Очевидно, что значение 0 для p и q недопустимо, но любое другое значение не гарантирует прямой проход без возврата назад и наоборот, не может дать гарантировать зацикленность блуждания. В алгоритме Node2Vec, в отличие от базового DeepWalk, вероятность перехода в каждый из соседних узлов вычисляется при попадании в очередной узел.

# Экспериментальная часть

## Используемый метаграф

В качестве тестового метаграфа для экспериментов будет использоваться неориентированный метаграф, изображенный на рисунке 17.

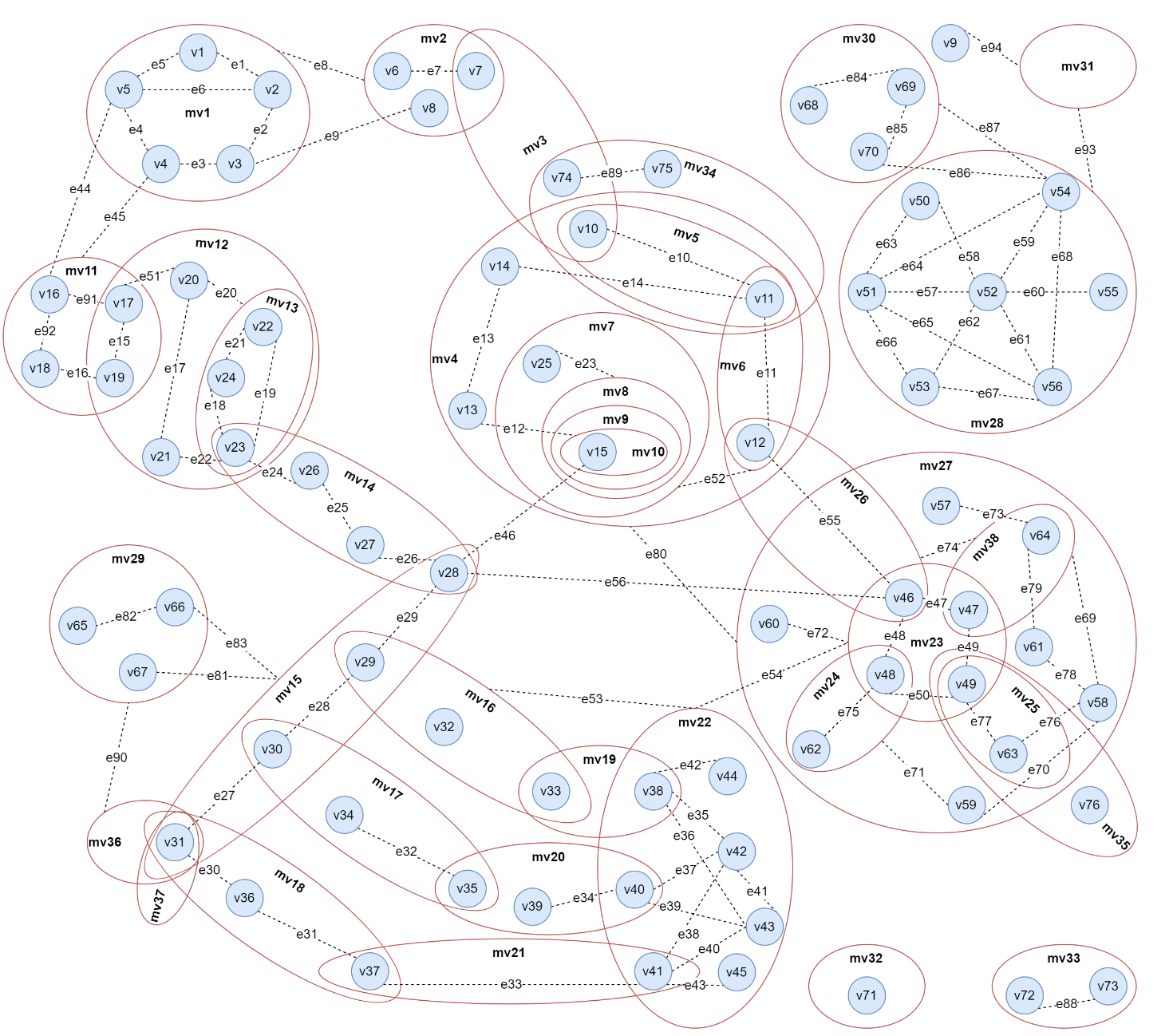


Рисунок 17 – Пример большого метаграфа

Этот метаграф состоит из 208 элементов, в число которых входят метавершины, вершины и ребра в соответствие с метаграфовой моделью, представленной в разделе 1.3 данной работы. В метаграфе, представленном на рисунке 17, имеется 38 метавершин, 76 вершин и 94 ребра.

Данный метаграф был составлен так, чтобы отразить возможные уровни вложенности и отношения между объектами метаграфа, сохраняя максимальную глубину вложенности в 6 единиц. Многие участки были составлены довольно похожими друг на друга для будущей подробной проверки корректности работы алгоритмов эмбеддинга. Ошибки могут возникнуть в том случае, если объекты имеют одинаковую структуру связей с другими объектами, то есть в случае, если близость второго порядка для них одинакова. Подробнее об этом описано в пункте 2.7 данной работы.

В данном тестовом метаграфе практически нет объектов, которые являются одинаковыми вследствие таких однотипных связей, однако, если разные алгоритмы эмбеддинга обнаружат такие узлы, это будет интересно разобрать.

Стоит отметить, что вершины v11 и v49 вложены не только в свои непосредственно родительские метавершины (пара mv5, mv6 и пара mv23, mv25 соответственно), но и в те метавершины, которые являются родительскими для одной из их непосредственных родительских метавершин. Таким образом вершина v11 включена в mv6, в mv4 и в mv5, которая включена в mv4, а вершина v49 – в mv23, mv35 и mv25, которая включена в mv35.

Ниже, в таблицах 2, 3 и 4 приведены списки всех элементов метаграфа с рисунка 17.

В таблице 2 перечислены все вершины тестового метаграфа.

Таблица 2 – Вершины тестового метаграфа

| **№ узла** | **Название** | **Список родительских метавершин** |
| --- | --- | --- |
| 1 | v1 | mv1 |
| 2 | v2 | mv1 |
| 3 | v3 | mv1 |
| 4 | v4 | mv1 |
| 5 | v5 | mv1 |
| 6 | v6 | mv2 |
| 7 | v7 | mv2, mv3 |
| 8 | v8 | mv2 |
| 9 | v9 | - |
| 10 | v10 | mv3, mv5 |
| 11 | v11 | mv4, mv5, mv6 |
| 12 | v12 | mv6, mv26 |
| 13 | v13 | mv4 |
| 14 | v14 | mv4 |
| 15 | v15 | mv10 |
| 16 | v16 | mv11 |
| 17 | v17 | mv11, mv12 |
| 18 | v18 | mv11 |
| 19 | v19 | mv11, mv12 |
| 20 | v20 | mv12 |
| 21 | v21 | mv12 |
| 22 | v22 | mv13 |
| 23 | v23 | mv13, mv14 |
| 24 | v24 | mv13 |
| 25 | v25 | mv7 |
| 26 | v26 | mv14 |
| 27 | v27 | mv14 |
| 28 | v28 | mv14, mv15 |
| 29 | v29 | mv15, mv16 |
| 30 | v30 | mv15, mv17 |
| 31 | v31 | mv15, mv18, mv36, mv37 |
| 32 | v32 | mv16 |
| 33 | v33 | mv16, mv19 |
| 34 | v34 | mv17 |
| 35 | v35 | mv17, mv20 |
| 36 | v36 | mv18 |
| 37 | v37 | mv18, mv21 |
| 38 | v38 | mv19, mv22 |
| 39 | v39 | mv20 |
| 40 | v40 | mv20, mv22 |
| 41 | v41 | mv21, mv22 |
| 42 | v42 | mv22 |
| 43 | v43 | mv22 |
| 44 | v44 | mv22 |
| 45 | v45 | mv22 |
| 46 | v46 | mv23, mv26 |
| 47 | v47 | mv23, mv38 |
| 48 | v48 | mv23, mv24 |
| 49 | v49 | mv23, mv25, mv35 |
| 50 | v50 | mv28 |
| 51 | v51 | mv28 |
| 52 | v52 | mv28 |
| 53 | v53 | mv28 |
| 54 | v54 | mv28 |
| 55 | v55 | mv28 |
| 56 | v56 | mv28 |
| 57 | v57 | mv27 |
| 58 | v58 | mv27 |
| 59 | v59 | mv27 |
| 60 | v60 | mv27 |
| 61 | v61 | mv27 |
| 62 | v62 | mv24 |
| 63 | v63 | mv25 |
| 64 | v64 | mv38 |
| 65 | v65 | mv29 |
| 66 | v66 | mv29 |
| 67 | v67 | mv29 |
| 68 | v68 | mv30 |
| 69 | v69 | mv30 |
| 70 | v70 | mv30 |
| 71 | v71 | mv32 |
| 72 | v72 | mv33 |
| 73 | v73 | mv33 |
| 74 | v74 | mv3, mv34 |
| 75 | v75 | mv34 |
| 76 | v76 | mv35 |

В таблице 3 ниже перечислены все рёбра тестового метаграфа.

Таблица 3 – Рёбра тестового метаграфа

| **№ узла** | **Название** | **Стартовая вершина (метавершина)** | **Конечная вершина (метавершина)** | **Список родительских метавершин** |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 77 | e1 | v1 | v2 | mv1 |
| 78 | e2 | v2 | v3 | mv1 |
| 79 | e3 | v3 | v4 | mv1 |
| 80 | e4 | v4 | v5 | mv1 |
| 81 | e5 | v5 | v1 | mv1 |
| 82 | e6 | v5 | v2 | mv1 |
| 83 | e7 | v6 | v7 | mv2 |
| 84 | e8 | mv1 | mv2 | - |
| 85 | e9 | v3 | v8 | - |
| 86 | e10 | v10 | v11 | mv5 |
| 87 | e11 | v11 | v12 | mv6 |
| 88 | e12 | v13 | mv10 | mv4 |
| 89 | e13 | v13 | v14 | mv4 |
| 90 | e14 | v14 | v11 | mv4 |
| 91 | e15 | v17 | v19 | mv11, mv12 |
| 92 | e16 | v18 | v19 | mv11 |
| 93 | e17 | v21 | v20 | mv12 |
| 94 | e18 | v24 | v23 | mv13 |
| 95 | e19 | v23 | v22 | mv13 |
| 96 | e20 | v20 | mv13 | mv12 |
| 97 | e21 | v24 | v22 | mv13 |
| 98 | e22 | v21 | v23 | mv12 |
| 99 | e23 | v25 | mv8 | mv7 |
| 100 | e24 | v23 | v26 | mv14 |
| 101 | e25 | v26 | v27 | mv14 |
| 102 | e26 | v27 | v28 | mv14 |
| 103 | e27 | v31 | v30 | mv15 |
| 104 | e28 | v30 | v29 | mv15 |
| 105 | e29 | v29 | v28 | mv15 |
| 106 | e30 | v31 | v36 | mv18 |
| 107 | e31 | v36 | v37 | mv18 |
| 108 | e32 | v34 | v35 | mv17 |
| 109 | e33 | v37 | v41 | mv21 |
| 110 | e34 | v39 | v40 | mv20 |
| 111 | e35 | v38 | v42 | mv22 |
| 112 | e36 | v38 | v43 | mv22 |
| 113 | e37 | v40 | v42 | mv22 |
| 114 | e38 | v41 | v42 | mv22 |
| 115 | e39 | v40 | v43 | mv22 |
| 116 | e40 | v41 | v43 | mv22 |
| 117 | e41 | v42 | v43 | mv22 |
| 118 | e42 | v38 | v44 | mv22 |
| 119 | e43 | v41 | v45 | mv22 |
| 120 | e44 | v5 | v16 | - |
| 121 | e45 | mv4 | mv11 | - |
| 122 | e46 | v28 | v15 | - |
| 123 | e47 | v46 | v47 | mv23 |
| 124 | e48 | v46 | v48 | mv23 |
| 125 | e49 | v47 | v49 | mv23 |
| 126 | e50 | v48 | v49 | mv23 |
| 127 | e51 | v17 | v20 | mv12 |
| 128 | e52 | mv6 | mv7 | mv4 |
| 129 | e53 | mv16 | mv22 | - |
| 130 | e54 | mv22 | mv23 | - |
| 131 | e55 | v12 | v46 | mv26 |
| 132 | e56 | v28 | v46 | - |
| 133 | e57 | v52 | v51 | mv28 |
| 134 | e58 | v52 | v50 | mv28 |
| 135 | e59 | v52 | v54 | mv28 |
| 136 | e60 | v52 | v55 | mv28 |
| 137 | e61 | v52 | v56 | mv28 |
| 138 | e62 | v52 | v57 | mv28 |
| 139 | e63 | v51 | v50 | mv28 |
| 140 | e64 | v51 | v54 | mv28 |
| 141 | e65 | v51 | v56 | mv28 |
| 142 | e66 | v51 | v53 | mv28 |
| 143 | e67 | v53 | v56 | mv28 |
| 144 | e68 | v54 | v56 | mv28 |
| 145 | e69 | mv38 | v58 | mv27 |
| 146 | e70 | v58 | v59 | mv27 |
| 147 | e71 | v59 | mv24 | mv27 |
| 148 | e72 | v60 | mv23 | mv27 |
| 149 | e73 | v57 | v64 | mv27 |
| 150 | e74 | mv26 | mv38 | mv27 |
| 151 | e75 | v62 | v48 | mv24 |
| 152 | e76 | v58 | v63 | mv27 |
| 153 | e77 | v49 | v63 | mv25 |
| 154 | e78 | v61 | v58 | mv27 |
| 155 | e79 | v61 | v64 | mv27 |
| 156 | e80 | mv27 | mv4 | - |
| 157 | e81 | v67 | mv15 | - |
| 158 | e82 | v65 | v66 | mv29 |
| 159 | e83 | v66 | mv15 | - |
| 160 | e84 | v68 | v69 | mv30 |
| 161 | e85 | v69 | v70 | mv30 |
| 162 | e86 | mv30 | v54 | - |
| 163 | e87 | v70 | v54 | - |
| 164 | e88 | v72 | v73 | mv33 |
| 165 | e89 | v74 | v75 | mv34 |
| 166 | e90 | mv29 | mv36 | - |
| 167 | e91 | v16 | v17 | mv12 |
| 168 | e92 | v18 | v16 | mv11 |
| 169 | e93 | mv31 | mv28 | - |

В таблице 4 ниже перечислены все метавершины тестового метаграфа.

Таблица 4 – Метавершины тестового метаграфа

| **№ узла** | **Название** | **Список вложенных узлов** | **Список родительских метавершин** |
| --- | --- | --- | --- |
| 169 | mv1 | v1, v2, v3, v4, v5, e1, e2, e3, e4, e5, e6 | - |
| 170 | mv2 | v6, v7, v8, e7 | - |
| 171 | mv3 | v7, v10, v74 | - |
| 172 | mv4 | mv5, mv6, mv7, v11, v13, v14, e12, e13, e14, e52 | - |
| 173 | mv5 | v11, v10, e10 | mv4, mv34 |
| 174 | mv6 | v11, v12, e11 | mv4 |
| 175 | mv7 | mv8, v25, e23 | mv4 |
| 176 | mv8 | mv9 | mv7 |
| 177 | mv9 | mv10 | mv8 |
| 178 | mv10 | v15 | mv9 |
| 179 | mv11 | v16, v17, v18, v19, e15, e16, e91, e92 | - |
| 180 | mv12 | v17, v19, e15, e51, v20, v21, e20, e22, mv13, e17 | - |
| 181 | mv13 | v22, v23, v24, e18, e19, e21 | mv12 |
| 182 | mv14 | v23, v26, v27, v28, e24, e25, e26 | - |
| 183 | mv15 | v28, v29, v30, v31, e27, e28, e29 | - |
| 184 | mv16 | v29, v32, v33 | - |
| 185 | mv17 | v30, v34, v35, e32 | - |
| 186 | mv18 | v31, v36, v37, e30, e31 | - |
| 187 | mv19 | v33, v38 | - |
| 188 | mv20 | v35, v39, v40, e34 | - |
| 189 | mv21 | v37, v41, e33 | - |
| 190 | mv22 | v38, v40, v41, v42, v43, v44, v45, e35, e36, e37, e38, e39, e40, e41, e42, e43 | - |
| 191 | mv23 | v46, v47, v48, v49, e47, e48, e49, e50 | mv27 |
| 192 | mv24 | v48, v62, e75 | mv27 |
| 193 | mv25 | v49, v63, e77 | mv27, mv35 |
| 194 | mv26 | v12, v46, e55 | - |
| 195 | mv27 | v57, v58, v59, v60, v61, mv24, mv25, mv38, mv23, e69, e70, e71, e72, e73, e74, e76, e78, e79 | - |
| 196 | mv28 | v50, v51, v52, v53, v54, v55, v56, e57, e58, e59, e60, e61, e62, e63, e64, e65, e66, e67, e68 | - |
| 197 | mv29 | v65, v66, v67, e82 | - |
| 198 | mv30 | v68, v69, v70, e84, e85 | - |
| 199 | mv31 | - | - |
| 200 | mv32 | v71 | - |
| 201 | mv33 | v72, v73, e88 | - |
| 202 | mv34 | mv5, v74, v75, e89 | - |
| 203 | mv35 | v49, mv25, v76 | - |
| 204 | mv36 | v31 | - |
| 205 | mv37 | v31 | - |
| 206 | mv38 | v47, v64 | mv27 |

## Преобразование метаграфа в трёхдольный плоский граф

Для использования алгоритмов вложения, нужно представить исходный метаграф в виде плоского графа. Необходимо реализовать алгоритмы, описанный в разделе 2.3 данной работы.

Ниже приведу повтор краткого описания алгоритмов ниже.

* MDFS: Проход в цикле по всем элементам , где :

1. Если не находится в списке , то есть если :
   * 1. Добавить в список ;
     2. Если является метавершиной, то вызвать процедуру MDFS для .

* AMF: Проход в цикле по всем элементам ( – список):

1. Если является метавершиной:
   * 1. Для каждого элемента , заполнить матрицу смежности следующим образом: и , где – индексы метавершины и элемента в списке ;
2. Если является ребром :
3. Заполнить матрицу , , и , где – индексы элементов списка : (source) – индекс элемента начальной вершины ребра , (elem) – индекс элемента ребра , (destination) – индекс элемента конечной вершины ребра .

На рисунке 18 изображены блок схемы алгоритмов преобразования метаграфа в трёхдольный граф.

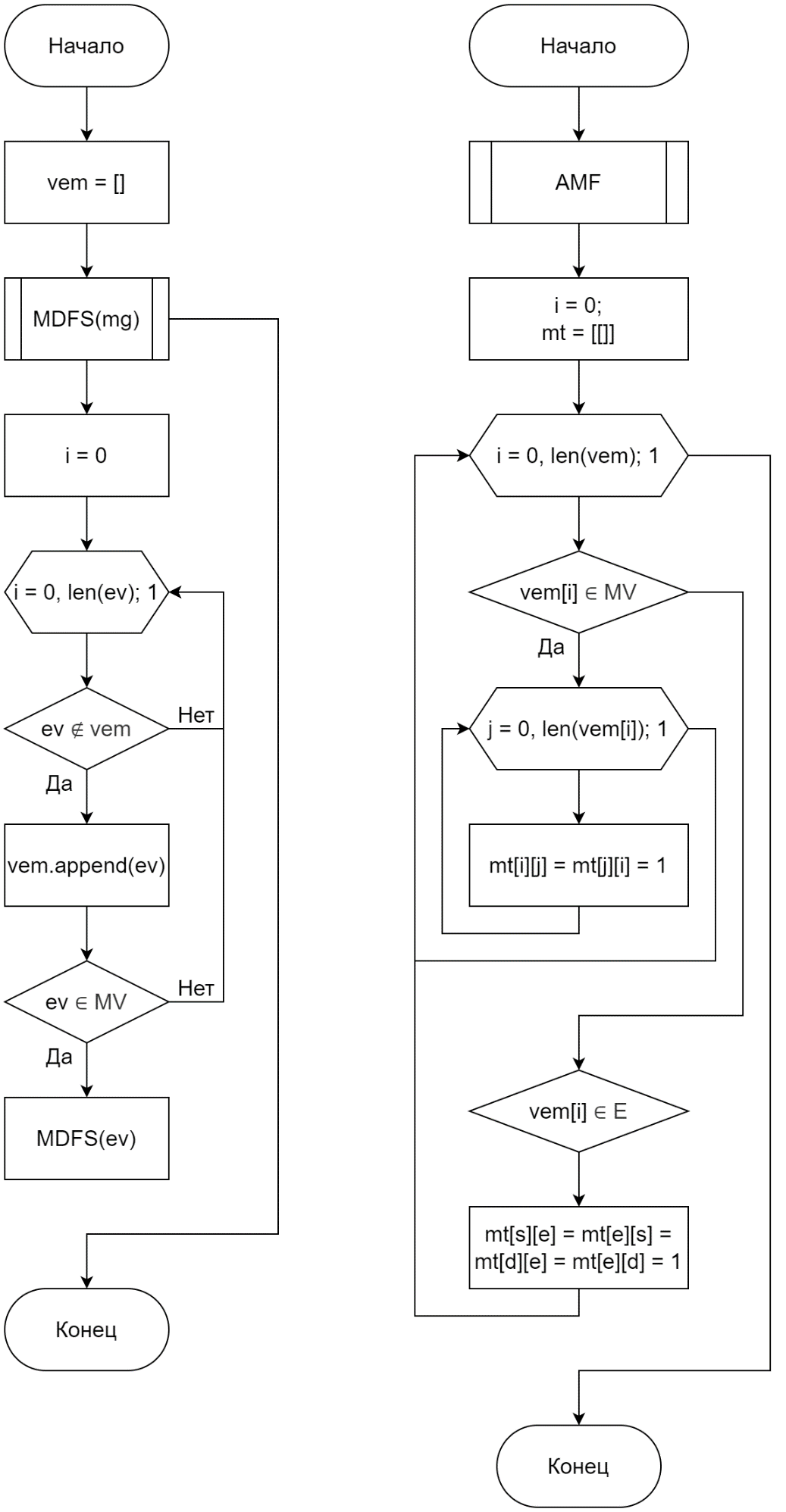


Рисунок 18 – Подпрограммы MDFS и AMF

C помощью подпрограммы MDFS все узлы метаграфа записываются в список vem. Если узел при рассмотрении оказывается метавершиной, то для этого узла сразу после записи информации в vem происходит рекурсивный вызов подпрограммы MDFS для сбора информации обо всех вложенных узлах. Таким образом алгоритм напоминает алгоритм рекурсивного обхода обычного графа в глубину.

Вторая подпрограмма AMF формирует матрицу смежности , которая отражает все связи в новом трёхдольном графе. Рёбра, метавершины и вершины все преобразуются в вершины своего класса в трёхдольном графе. При записи файла связей, который и использовался алгоритмами эмбеддинга, различным связям назначались уникальные веса: Метавершина-узел – 10, Вершина-узел – 2, Ребро-узел – 1.

## Эксперименты

В подразделах ниже будут показаны результаты работы различных популярных современных алгоритмов эмбеддинга плоских графов, которые будут работать исключительно на основе матрицы смежности и информации о классах узлов трёхдольного графа. В качестве результатов экспериментов будут визуально представлены получившиеся эмбеддинги и небольшие разборы качества каждого из них.

В эксперименте использовались следующие алгоритмы:

1. Встраивание с сохранением близости высокого порядка (HOPE – High-Order Proximity preserved Embedding);
2. Собственные карты Лапласа (LE – Laplacian Eigenmaps);
3. Node2Vec.

## Эксперимент с алгоритмом Встраивание с сохранением близости высокого порядка (High-Order Proximity preserved Embedding, HOPE)

При проведении операции вложения был получен результат, представленный на рисунке 19. Здесь и в дальнейшем метавершина обозначается красным кружком, вершина – синим квадратом поменьше, ребро – зелёным полым ромбом одного с вершиной размера.

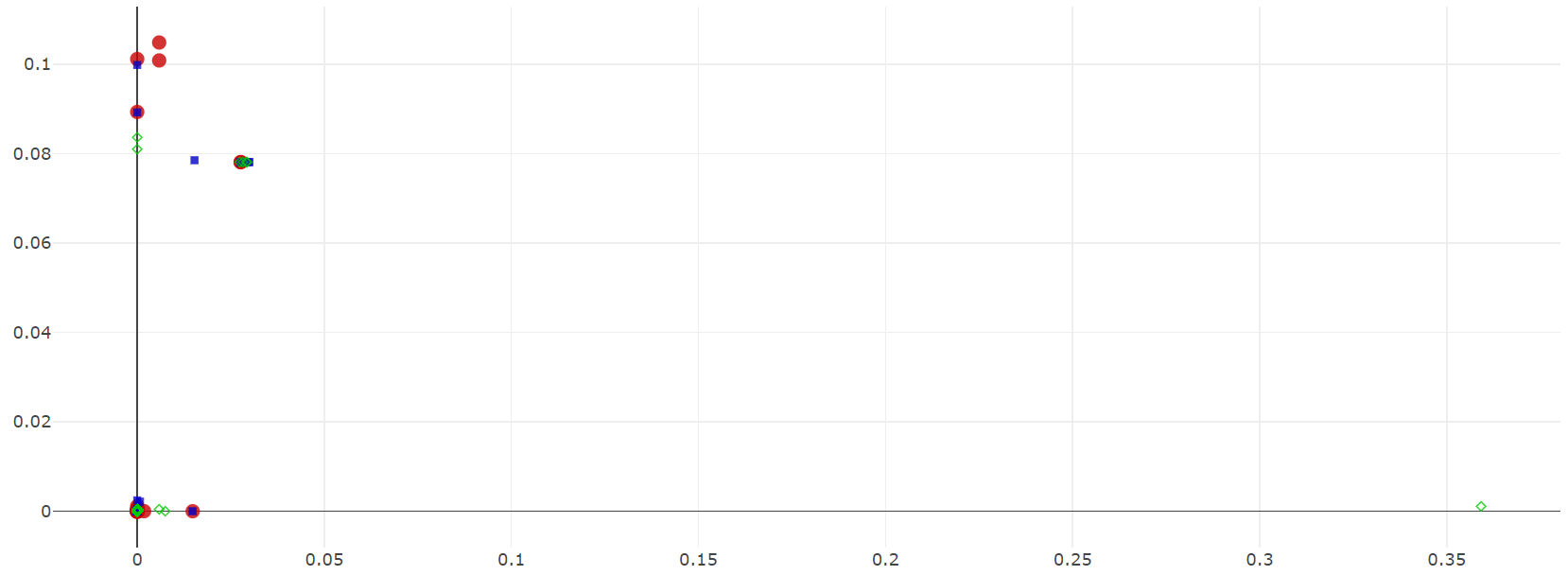


Рисунок 19 – двухмерный график эмбеддинга метаграфа алгоритмом HOPE

Как ясно из рисунка 19, результаты эмбеддинга неоднозначны, поскольку невозможно отличить друг от друга бОльшую часть узлов. Ниже, на рисунке 20, приведён укрупнённый вид левого нижнего участка.

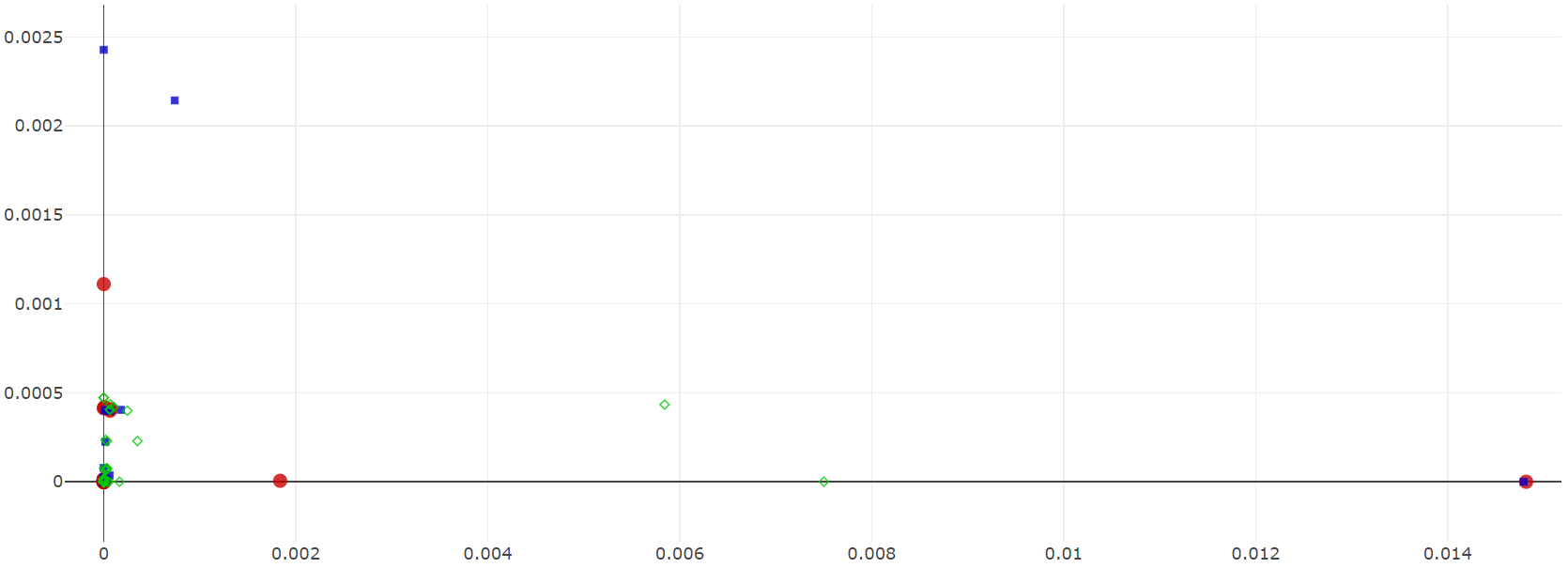


Рисунок 20 – Левый нижний участок графика с рисунка 19

Как ясно из рисунка 20, узлы находятся невероятно близко друг к другу, но не сливаются воедино даже на двухмерной плоскости. Если рассмотреть ещё ближе различные части этого графика, то можно заметить рёбра e64, e65 и e66. Они показаны на рисунке 21 ниже.

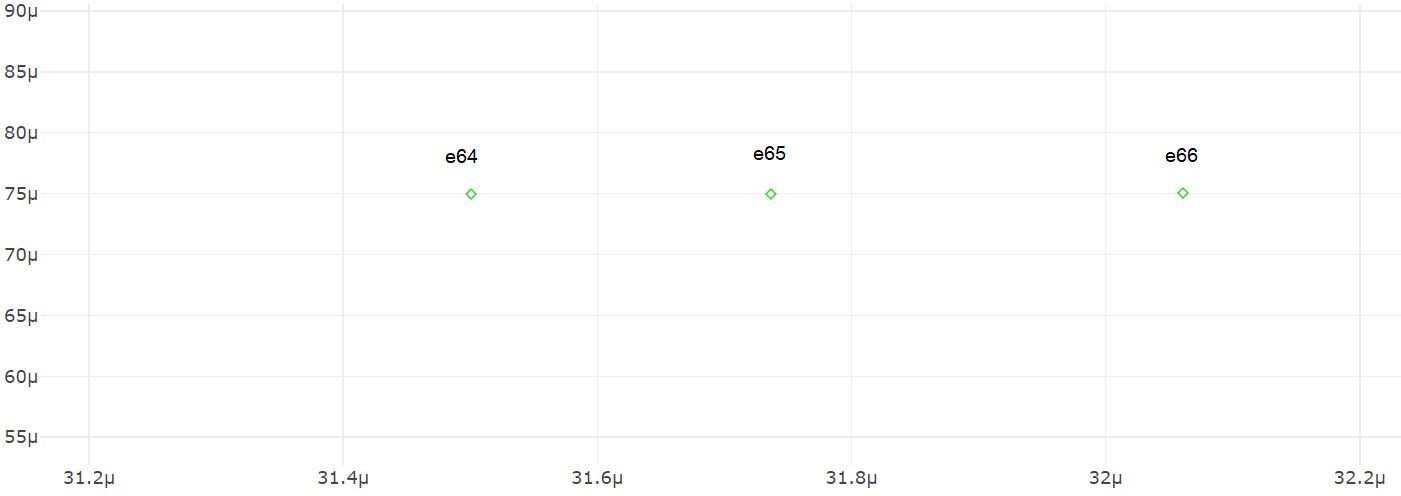


Рисунок 21 – Эмбеддинг рёбер e64, e65 и e66 по методу HOPE

На рисунке 22 ниже показаны рёбра на исходном графе. Также на рисунке обозначены некоторые ключевые закономерности, которые делают похожими эти рёбра.

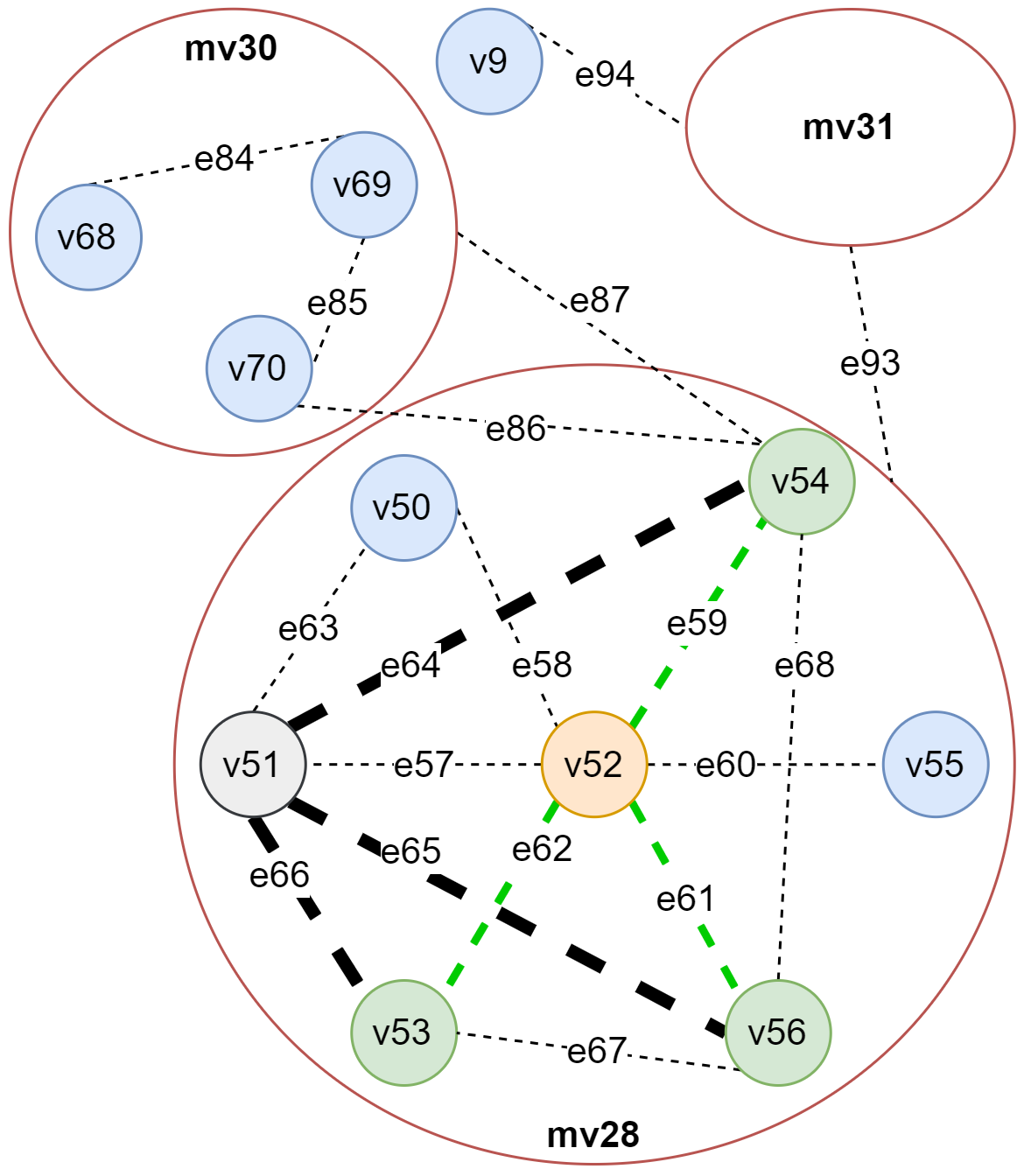


Рисунок 22 – Сходство рёбер e64-66 в исходном метаграфе

Как видно из рисунка 22 и таблицы 3, все три ребра исходят из одной вершины v51. Их цели, вершины v54, v53 и v56 соответственно вместе с исходной вершиной v51 вложены в метавершину m28 и не вложены ни в какие другие метавершины. Если рассматривать связь рёбер по степени близости более высокого порядка, то уже видны различия между рёбрами. Вершина v54 соединена с другими объектами за пределами mv28, что нельзя сказать о v53 и v56. К тому же, все три вершины в целом связаны с другими объектами разным количеством и направлением рёбер. Поэтому результат эмбеддинга для данных рёбер можно считать удовлетворительным.

Ниже приведены некоторые основные статистические данные по выборке, которую представляют собой результаты эмбеддинга методом HOPE в двухмерном евклидовом пространстве.

Таблица 5 – Статистические данные

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Статистика** | **X** | **Y** |
| Максимум | 0.3591723 | 0.1048563 |
| Минимум | -9.60831\*10-18 | -1.2197\*10-18 |
| Среднее значение | 0.003461 | 0.007815 |
| Медиана | 8.142563\*10-10 | 1.961766\*10-08 |
| Стандартное отклонение | 0.025589 | 0.0246059 |

График плотности распределения значений по осям x и y представлен на рисунках 23 и 24.

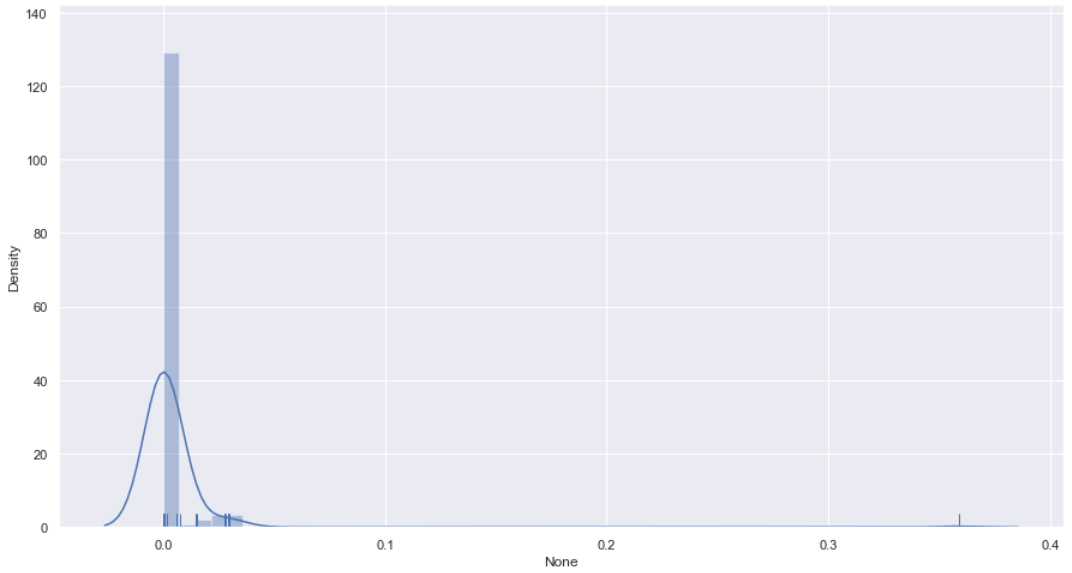


Рисунок 23 – Плотность распределения по оси X для HOPE

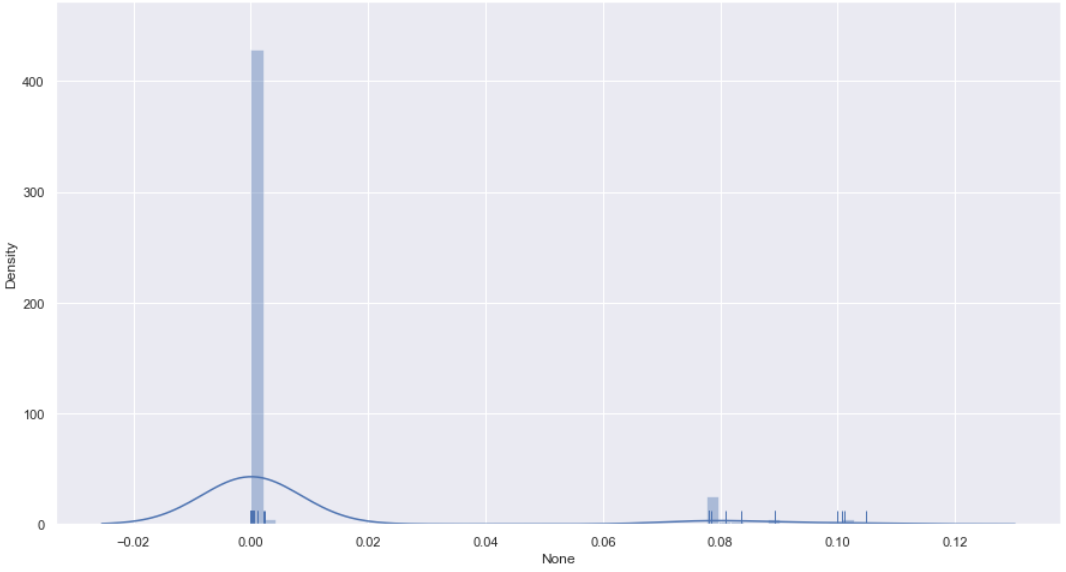


Рисунок 24 –Плотность распределения по оси Y для HOPE

Графики плотностей распределения показывают очень нестабильную плотность данных, имеющую подавляющую концентрацию на практически нулевой отметке. Данные картины плотностей распределения обусловлены алгоритмом вложения.

Ниже, на рисунке 25, приведён график плотности распределения для обеих плоскостей, что подтверждает изложенное выше.

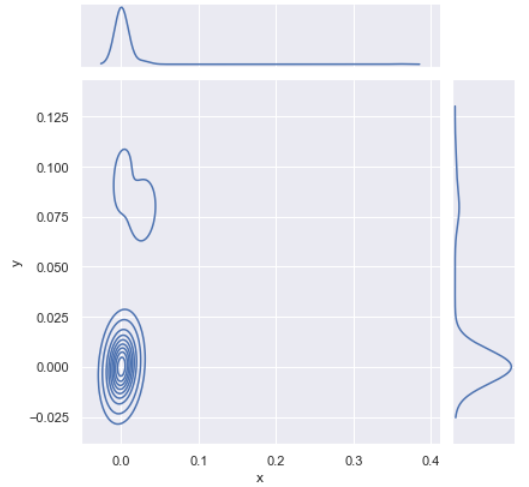


Рисунок 25 – Плотность распределения HOPE-эмбеддинга на плоскости

Такое плотное распределение, на самом деле, говорит лишь о том, насколько сильно схожи между собой узлы метаграфа. Чтобы проводить успешное обучение различных моделей машинного обучения, используя получившийся эмбеддинг, необходимо будет учитывать возможную невероятную плотность распределения исходных данных.

## Эксперимент с алгоритмом Собственные карты Лапласа (Laplacian Eigenmaps, LE)

При проведении операции вложения был получен результат, представленный на рисунке 26.

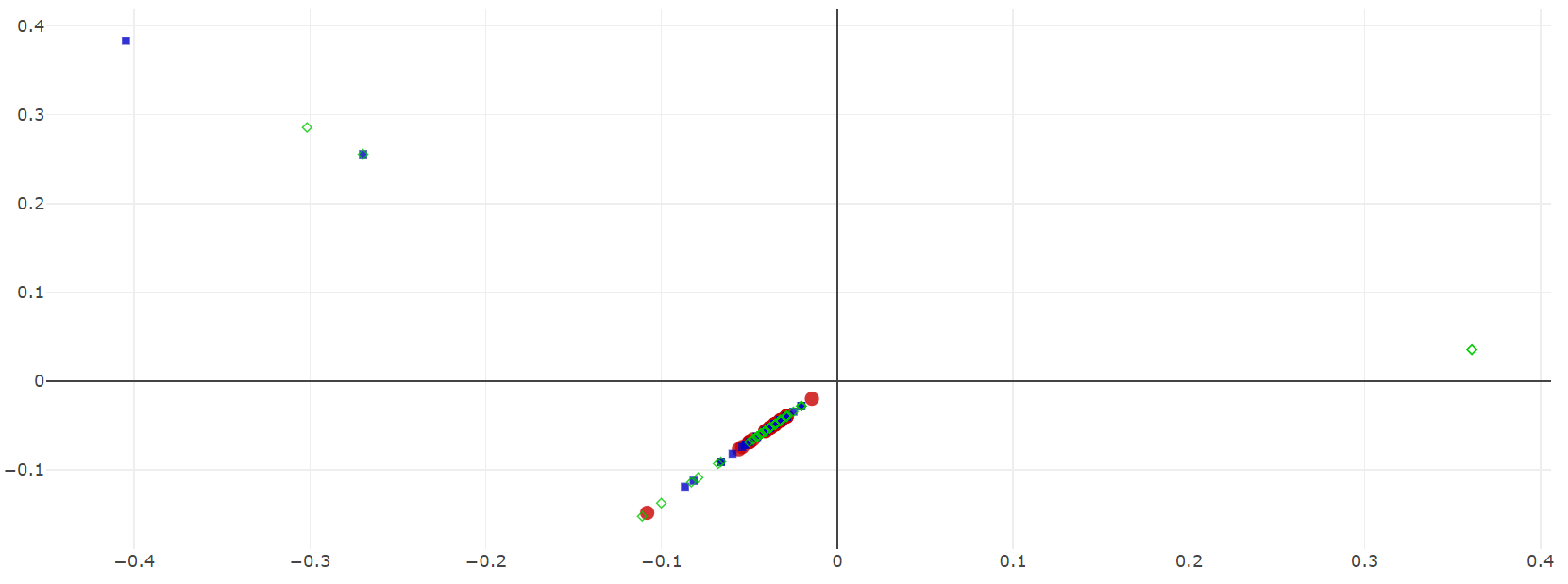


Рисунок 26 – двухмерный график эмбеддинга метаграфа алгоритмом Laplacian Eigenmaps

Как ясно из рисунка 26, результаты эмбеддинга получились более различимыми, из чего можно сразу сделать вывод, что данный алгоритм более чувствителен к различиям между близкими узлами метаграфа, а точнее трёхдольного графа, полученного из него.

Однако, сразу же видно, что данный алгоритм допускает ошибку и сливает воедино два узла e37 и v43, что представлено на рисунке 27 ниже.

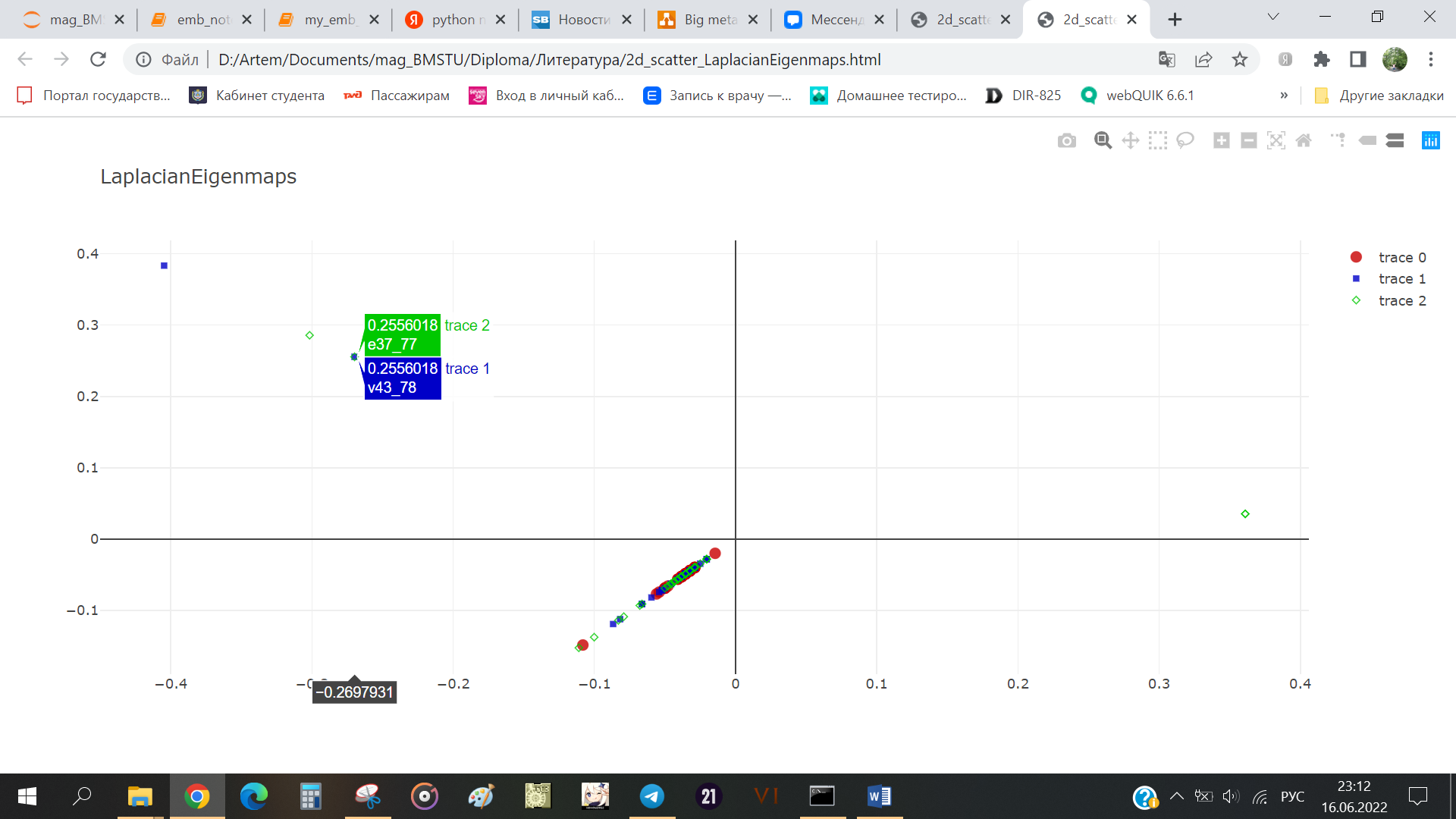


Рисунок 27 – Идентичность эмбеддинга узлов v43 и e37

Ниже на рисунке 28 ниже показан этот фрагмент в исходном метаграфе. Также на рисунке обозначены некоторые ключевые закономерности, которые делают похожими эти узлы.

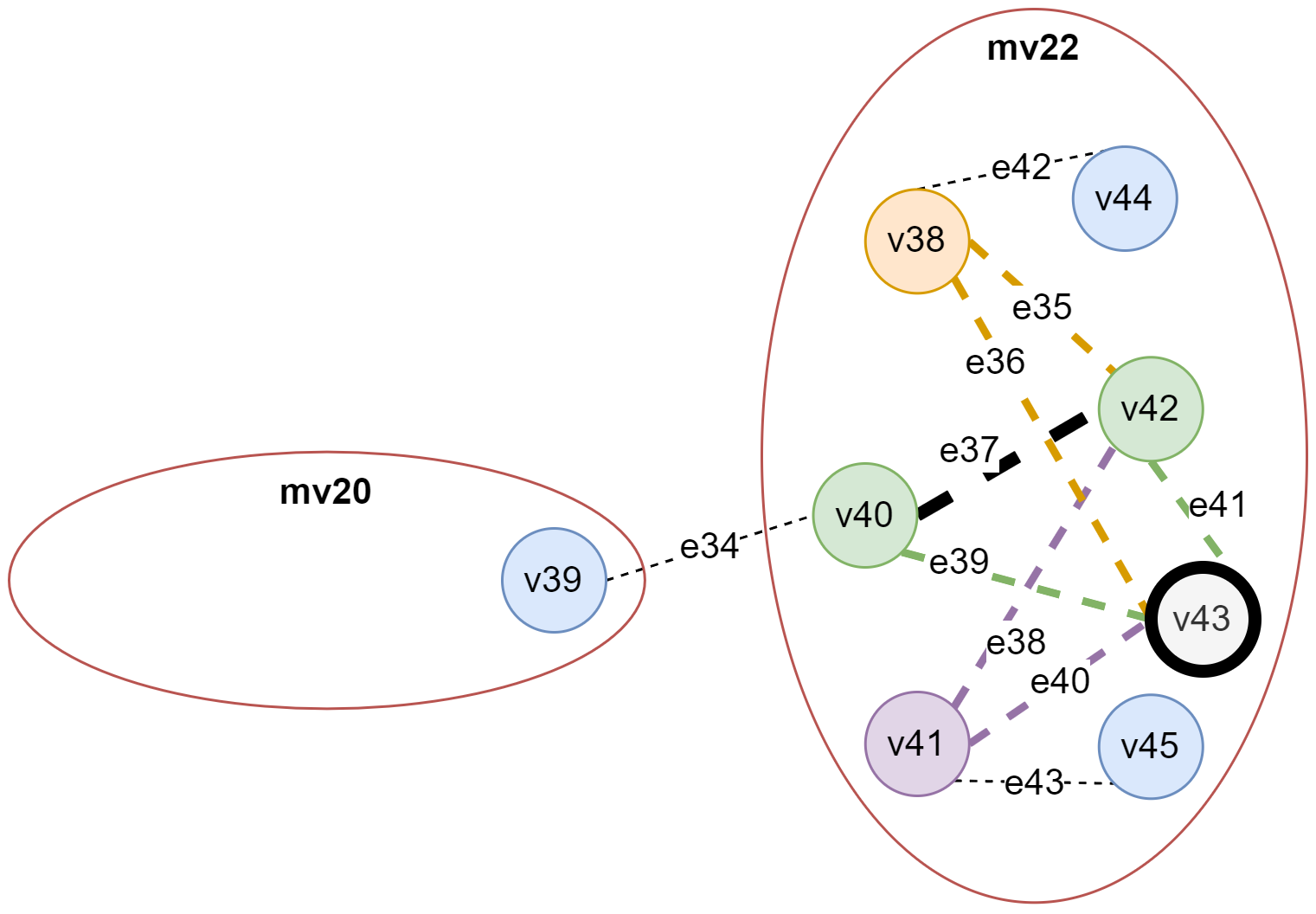


Рисунок 28 – Сходство ребра e37 и вершины v43 в исходном метаграфе

Очень сложно понять, чем схожи ребро e37 и вершина v43, кроме симметричной связи друг с другом соответственно через пары узлов e39 с v40 и v42 с e41, обозначенные на рисунке выше зелёным цветом. Кажущаяся симметрия относительно связей с другими вершинами показывает, что для связи с вершинами v38 и v41 ребру e37 необходимо пройти через соответствующие узлы вершин и рёбер, а вершине v43 только через рёбра (e36 и e40 соответственно).

Аналогично произошло и с другой парой вершины и ребра v20 и e29, не похожими друг на друга, с парой вершины и метавершины v6, mv10 и так далее. На рисунке 29 ниже показаны другие подобные, часто встречающиеся примеры одинаковых эмбеддингов неизбежно разноклассовых узлов.

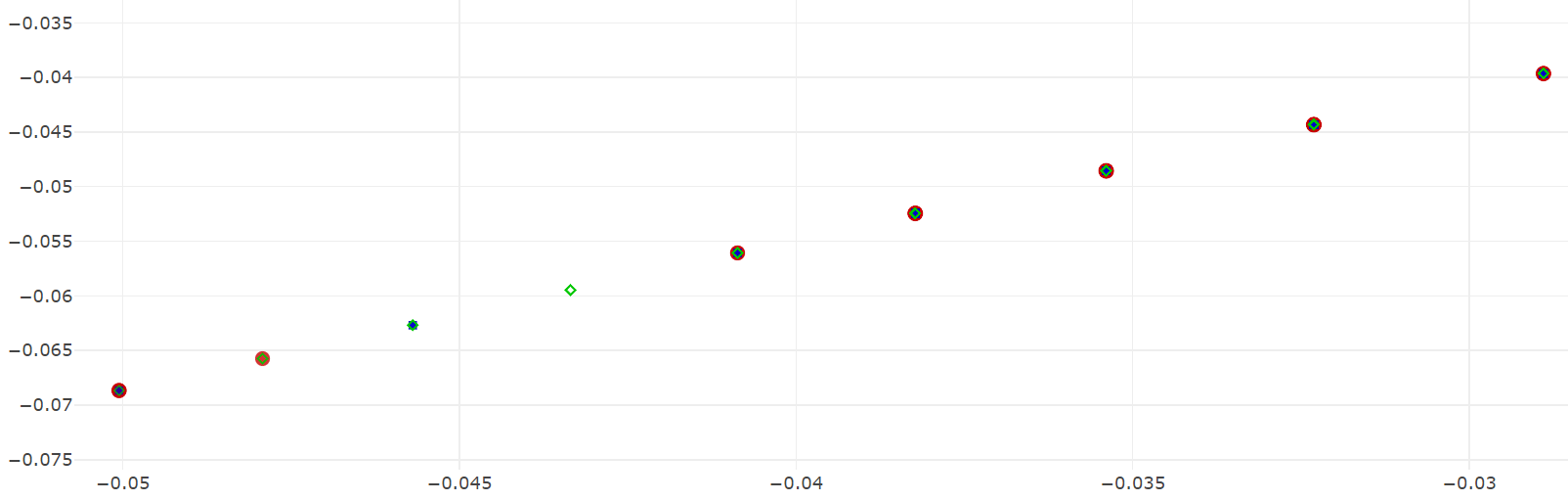


Рисунок 29 – Сливающиеся пары (тройки) разноклассовых узлов

На первый взгляд кажется, что эта ошибка фатальна, однако стоит заметить, что сливаются объекты разных классов, что лишь означает, что данный алгоритм специфическим образом учитывает, к какому классу принадлежит узел. Самое главное, что данный алгоритм не делает одинаковыми эмбеддинги узлов из разных классов. Это позволяет эффективно использовать алгоритм для получения входных данных моделей машинного обучения.

Ниже, на рисунке 30, приведён график трёхмерного эмбеддинга этим же алгоритмом этого же трёхдольного графа.

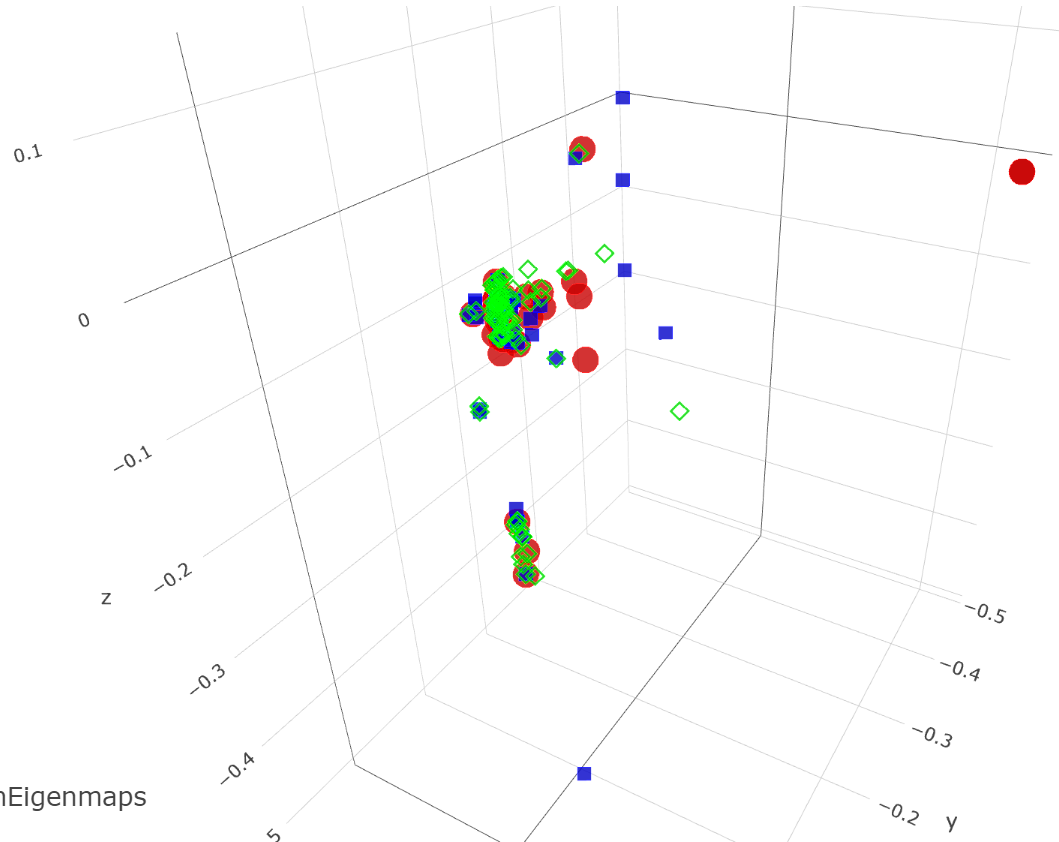


Рисунок 30 – Трёхмерный LE-эмбеддинг

Поскольку модель, производящая операцию вложения, была перезапущена, то эмбеддинг получился несколько другим, чем во время эксперимента с плоским вложением. Однако и здесь наблюдается сосредоточение бОльшей части узлов на одной плоскости (предыдущий алгоритм собирал узлы на одной прямой), что отлично видно на рисунке 31 ниже.

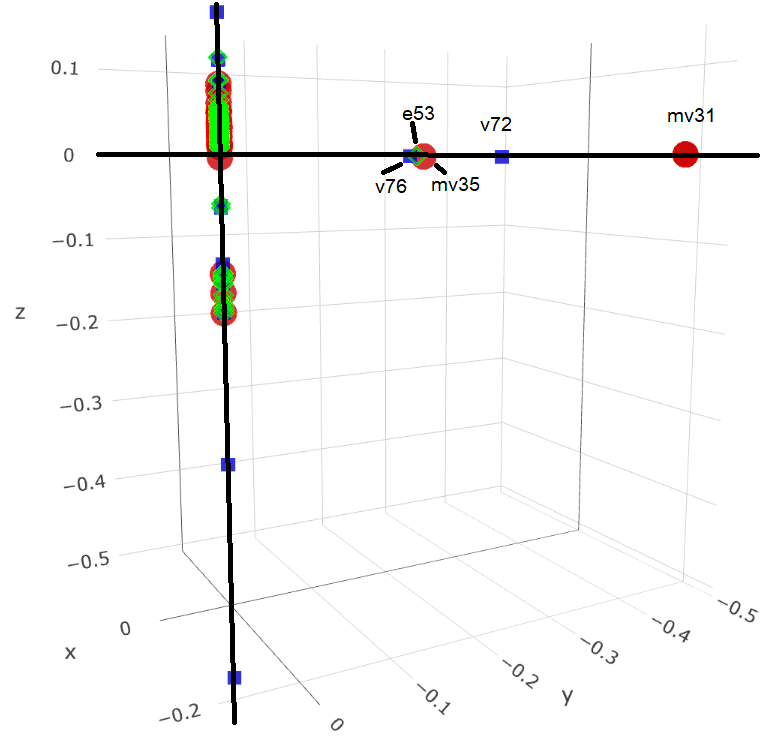


Рисунок 31 – Трёхмерный LE-эмбеддинг под другим углом

Отдельно стоит отметить, что узлы v76, v72, mv31, mv35 и e53 находятся не на одной плоскости, а лишь имеют значение координаты Y близкое к нулю. Если подробно рассматривать получившийся график, то становятся видны совпадения координат в векторном пространстве для узлов, принадлежащих разным классам, что не является помехой для алгоритмов машинного обучения.

Ниже, на рисунке 32, близко рассмотрен один из участков «плоского» скопления, показанного на рисунке 31 почти вертикальной чёрной линией. На этом участке очень близко друг к другу располагаются две метавершины: mv8 и mv9. Интересны они тем, что в исходном метаграфе они идентичны по сути состава вложенного фрагмента, но не по связям с другими узлами метаграфа.

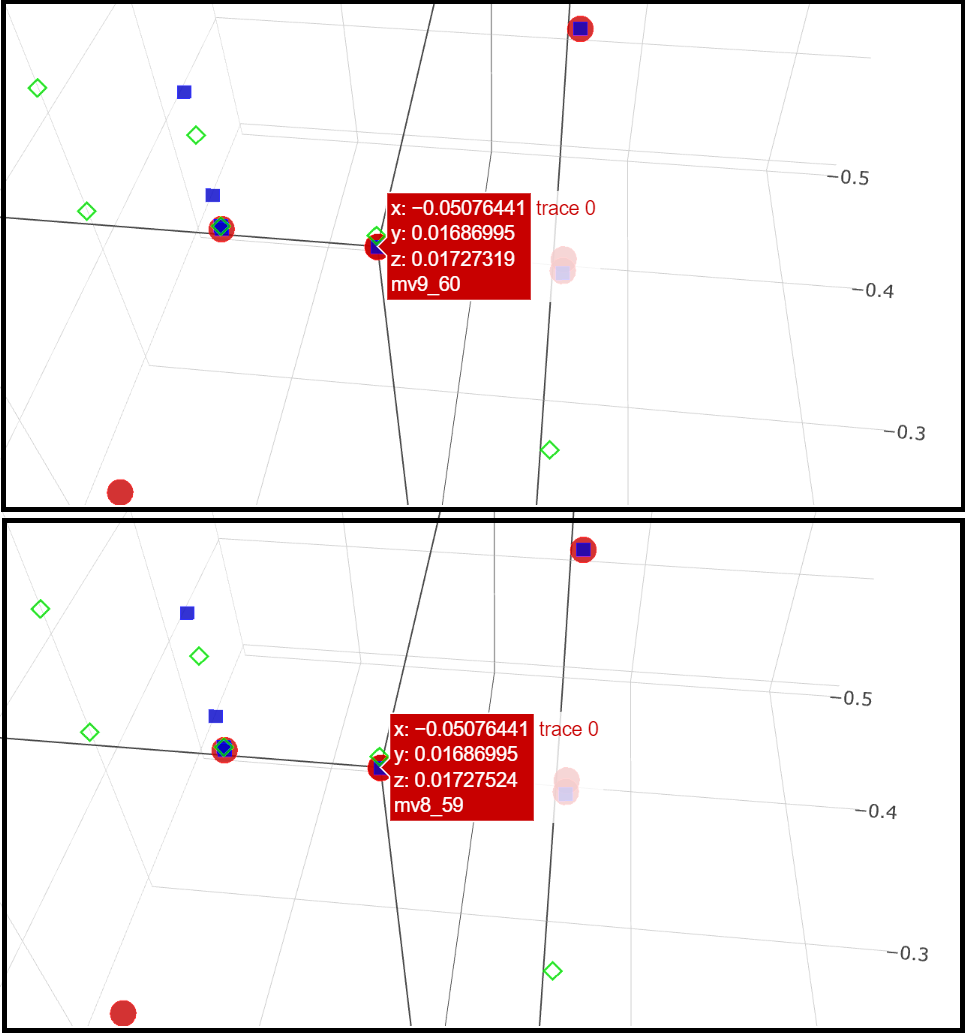


Рисунок 32 – Практически слившиеся метавершины mv8 и mv9

Ниже, на рисунке 33, приведён участок с этими метавершинами в исходном метаграфе.

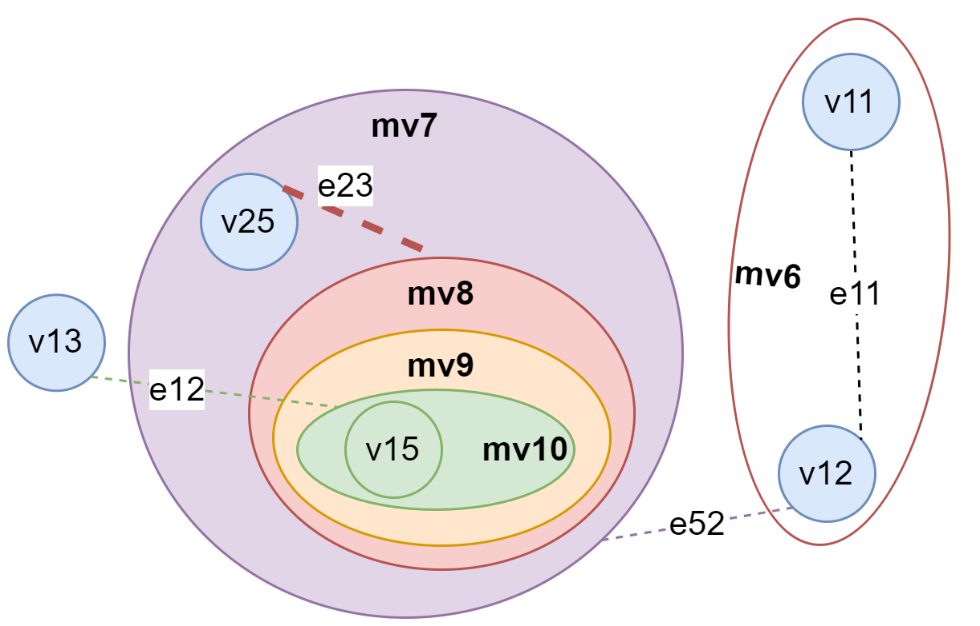


Рисунок 33 – Выделенные метавершины mv8 и mv9

Стоит отметить, что между метавершинами mv8 и mv9 достаточно много различий и главными из них являют вложенность mv9 в mv8 и непосредственная связь mv8 с ребром e23. Однако, стоит заметить, что близость второго порядка не учитывает непосредственную связь между узлами графа, следовательно, и алгоритм не учёл этой вложенности, как разницу между узлами. mv9 не связана с другими узлами посредством рёбер, в отличие от mv8 - это их явное отличие друг от друга. Также нельзя забывать, что трёхдольный граф не позволяет оценить, какая метавершина является вложенной, а какая родительской, следовательно, связи с вершинами v12 и v13 для mv8 (через mv7 и e52) и mv9 (через mv10 и e12) соответственно, являются по сути одинаковыми.

Ниже приведены некоторые основные статистические данные по выборке, которую представляют собой результаты эмбеддинга методом Laplacian Eigenmaps в двухмерном евклидовом пространстве.

Таблица 6 – Статистические данные

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Статистика** | **X** | **Y** | **Z** |
| Максимум | 0.17502 | 0.06466 | 0.12427 |
| Минимум | -0.234463 | -0.48418 | -0.4906 |
| Среднее значение | -0.05667438 | 0.0078882 | -7.94877\*10-6 |
| Медиана | -0.05268 | 0.017507 | 0.0219 |
| Стандартное отклонение | 0.0400427 | 0.06905 | 0.069505 |

График плотности распределения значений по осям x, y и z представлен на рисунках 34, 35 и 36.

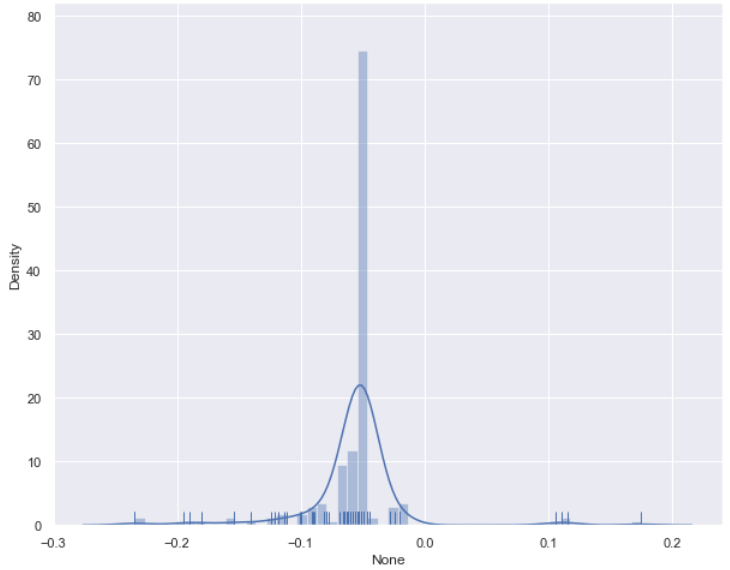


Рисунок 34 – Плотность распределения по оси X для LE

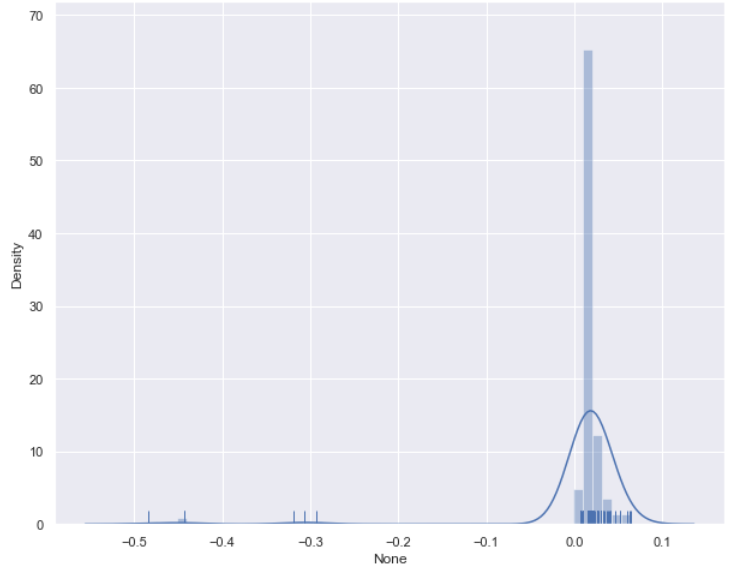


Рисунок 35 – Плотность распределения по оси Y для LE

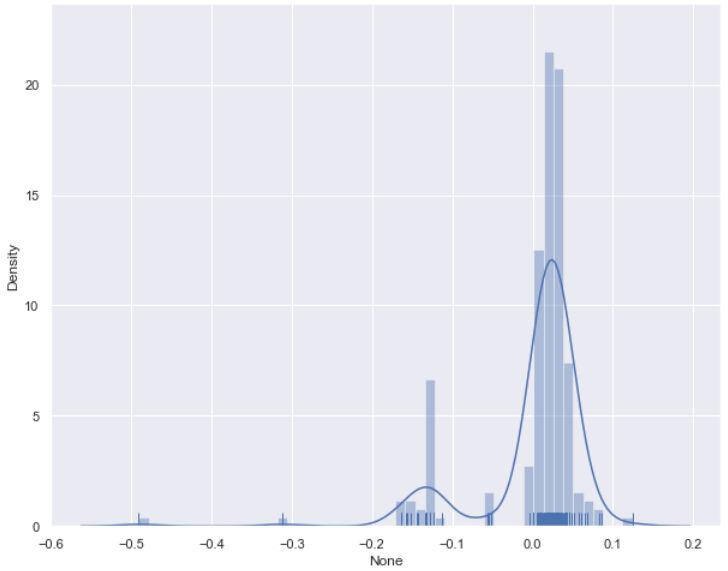


Рисунок 36 – Плотность распределения по оси Z для LE

Графики плотностей распределения показывают высокую плотность данных, более подходящую для успешного применения методов машинного обучения, чем та, что показана на соответствующих графиках по методу HOPE. Ниже, на рисунках 37.1-3, приведён график плотностей распределения для трёх пар плоскостей, что подтверждает достаточно высокий уровень плотности данных. Это необходимо учитывать при создании моделей машинного обучения, которые будут использовать этот эмбеддинг.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 1 | 2 | 3 |

Рисунок 37 – Плотность распределения LE-эмбеддинга на плоскости

## Эксперимент с алгоритмом Node2Vec

В результате работы алгоритма Node2Vec получен многообещающий трёхмерный график, представленный ниже на рисунке 38. По сравнению с предыдущими экспериментами бросается в глаза, насколько хорошо это векторное представление передаёт топологию исходного графа. И при этом, благодаря очевидно равномерному распределению узлов в пространстве, отсутствуют узлы с одинаковыми координатами.

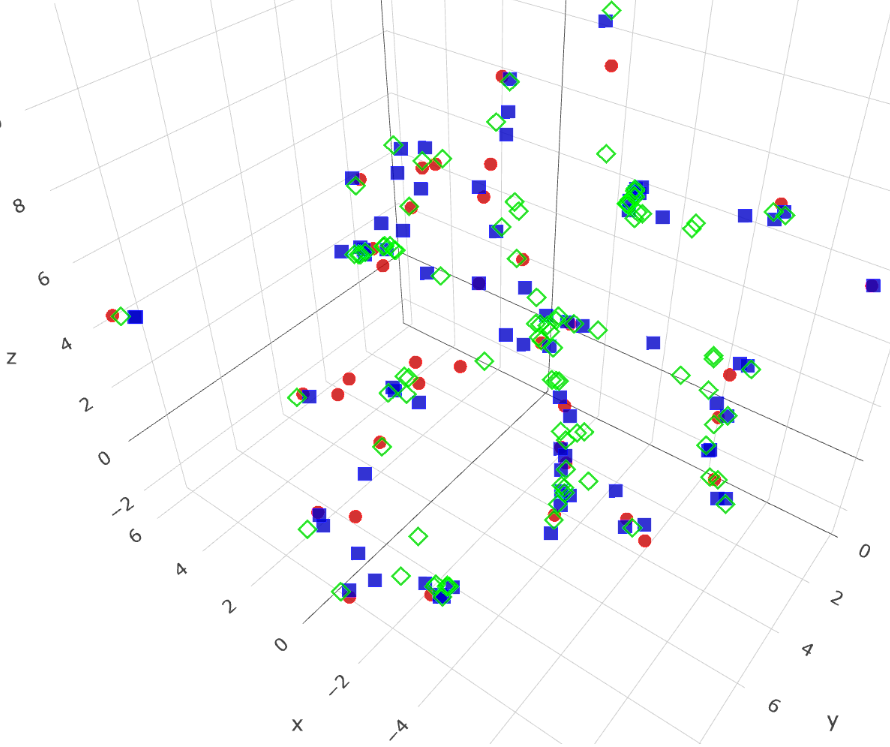


Рисунок 38 – 3d-график эмбеддинга алгоритмом Node2Vec

Ниже, на рисунках 39.1-2, представлен эмбеддинг фрагмента метаграфа и сам фрагмент в оригинальном метаграфе.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 1 | 2 |

Рисунок 39 – Фрагмент метаграфа и его Node2Vec-эмбеддинг

В верхней части эмбеддинга находится вершина v9, рядом ребро e94, далее вниз и налево (см. рисунок 39.2) mv31 и ребро e93. Около метавершины mv30 (справа на рисунке 39.2) собраны соответствующие вложенные в неё узлы, около mv28 – аналогично. Между этими двумя скоплениями узлов видны две ребра e86 и e87, которые связывают одно скопление с другим в оригинальном метаграфе. Такая же кучность сохраняется и для других узлов, благодаря чему положение узла в векторном пространстве уникально для каждого узла и легко угадывается при сравнении графика и метаграфа.

Ниже, на рисунках 40.1-2 показаны эмбеддинги метавершин mv32 и mv33 (и включенных в них рёбер и вершин) и фрагменты в оригинальном метаграфе. Стоит подчеркнуть, что данные узлы и в исходном метаграфе, и в получившемся векторном представлении удалены/отделены от остальных объектов, что видно и на рисунке 38, и на рисунке 17.

|  |  |
| --- | --- |
| D:\Artem\Documents\mag_BMSTU\Diploma\графики\n2v_v71.png | D:\Artem\Documents\mag_BMSTU\Diploma\графики\n2v_v73.png |
|  |  |
| 1 | 2 |

Рисунок 40 – Отдельные фрагменты трёхмрного Node2Vec-эмбеддинга

Ниже, на рисунках 41.X-Z, представлены графики плотности распределения по осям x, y и z.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| X | Y | Z |

Рисунок 41 – Плотность распределения Node2Vec эмбеддинга по осям

Ниже приведены рисунки 42.XY, 42.XZ, 42.YZ, которые показывают плотности распределения по соответствующим плоскостям.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| XY | XZ | YZ |

Рисунок 42 – Плотность распределения Node2Vec эмбеддинга по плоскостям

## Обобщение результатов экспериментов

Все алгоритмы эмбеддинга дают результаты откровенно разного качества для данного примера.

Алгоритм HOPE сохраняет близость узлов метаграфа, похожих друг на друга. Этот метод направлен на сохранение близости высоких порядков между узлами графа, и он справляется со своей задачей: похожие узлы, расположенные рядом в исходном метаграфе остаются рядом и в векторном представлении. Однако, несмотря на возможность масштабировать полученные значения координат векторов, они получились очень близкими к нулю. Около 10% узлов отдалены от нуля на 0.35-1.1, остальные 90% скопились в области нуля плоскости XY, а разница между значениями их координат составляет от 0.05 до 10-9, что категорически неудобно для большинства алгоритмов машинного обучения. Следовательно, полученное векторное представление будет нуждаться в предобработке, в масштабировании значений координат перед началом обучения. Из-за значений близости порядка 10-9 получается так, что многие узлы всё равно практически одинаковые, что повышает риск недообучения или переобучения моделей, использующих такое вложение.

Алгоритм Laplacian Eigenmaps лучше сохраняет структуру графа, хотя и не ориентируется на сохранение близости высокого порядка. Этот метод ориентируется на сохранение прямой связи (близости) между объектами, поэтому для метаграфа, узлы которого достаточно похожи между собой, результаты получились довольно «плоскими». 95% узлов скопились практически на одной плоскости в трёхмерном пространстве, скопились достаточно близко друг к другу. При этом наблюдалось множество ситуаций (при встраивании и в двухмерное, и в трёхмерное пространство), когда узлы разного типа получали одинаковые координаты в векторном пространстве. Из-за тех 5% узлов, что не встраиваются в эту «плоскость», результаты могут оказаться не очень хорошими для методов машинного обучения. Также важным недостатком является одинаковость координат узлов разного класса. Несмотря на то, что есть возможность задать класс узла как признак в наборе данных для моделей машинного обучения, это может вызвать проблемы в процессе обучения.

Алгоритм Node2Vec показал себя наилучшим образом. координаты узлов в векторном пространстве чётко различаются между собой, не скапливаются в одной точке или на одной плоскости, а достаточно равномерно распределяются в векторном пространстве. При этом алгоритм не допускает излишнего масштабирования, слишком сильного отдаления, в частности, узлов-метавершин от остальной части метаграфа, если они не связаны с ним рёбрами или вложенностью. Наоборот, чем сильнее связь между объектами, тем узлы ближе друг к другу, а чем связь слабее - тем они дальше друг от друга. И речь идёт не только о соседних узлах, но и о узлах соединённых через множество разных связей с узлами разного класса. В частности, узлы, включённые в метавершину, располагаются рядом с ней в векторном пространстве. Таким образом сохраняется не только соседство по принципу соседства, но и по принципу вложенности. Благодаря этому алгоритм сохраняет близость высокого порядка, а также равномерную структуру метаграфа.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе исследования была поставлена задача найти пути к решению задачи вложения метаграфа в векторные пространства для дальнейшего успешного использования различными методами машинного обучения. Было выдвинуто предположение, что если преобразовать метаграф в изоморфный исходному метаграфу четырёхдольный граф, то получится выполнить операцию встраивания этого графа в какое-либо векторное пространство существующими алгоритмами эмбеддинга. Однако, в результате этого этапа исследования был сделан вывод, что трёхмерного пространства достаточно, чтобы передать классическую структуру метаграфа.

В процессе исследования было решено, что существующие алгоритмы эмбеддинга в неевклидовы пространства не оправдывают себя при вложении графов большой размерности, поэтому в основной части работы рассматривались только те алгоритмы, которые встраивают графы в евклидово векторное пространство.

Эмбеддинг производился с использованием лишь данных о связях между узлами трёхдольного графа (матрица смежности). Также связям были назначены веса с учётом класса того или иного узла и связи, которая идёт от него или к нему.

Из существующего множества алгоритмов эмбеддинга плоских графов в евклидово векторное пространство были выбраны три алгоритма, действующих по-разным принципах и делающих упор на сохранение разных свойств графа: HOPE, Laplacian Eigenmaps и Node2Vec. Лучше всего структуру метаграфа и близость между узлами графа сохранил алгоритм Node2Vec, основанный на методах глубокого обучения.

Данное направление исследований метаграфовой модели данных требует дальнейших исследований. Для создания полноценного и проверенного метода эмбеддинга метаграфов, необходимо применение и других алгоритмов эмбеддинга, использование множества самых разных примеров метаграфов, разработка прямого алгоритма эмбеддинга метаграфов или хотя бы иная манипуляция с весами рёбер трёхдольного графа. Также в будущем возможно усовершенствование самой метаграфовой модели, уточнение модели метаребра. Однако всё это, как и поиски наиболее оптимальных путей для решения тех или иных задач со сложными сетями различных предметных областей, уже темы для других будущих исследований.

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. X. Wang, P. Cui, J. Wang, J. Pei, W. Zhu, and S. Yang, “Community preserving network embedding,” in AAAI, 2017, pp. 203–209.
2. F. Nie, W. Zhu, and X. Li, “Unsupervised large graph embedding,” in AAAI, 2017, pp. 2422–2428.
3. C. Zhou, Y. Liu, X. Liu, Z. Liu, and J. Gao, “Scalable graph embedding for asymmetric proximity,” in AAAI, 2017, pp. 2942– 2948.
4. X. Wei, L. Xu, B. Cao, and P. S. Yu, “Cross view link prediction by learning noise-resilient representation consensus,” in WWW, 2017, pp. 1611–1619.
5. Basu A., Blanning R. Metagraphs and their applications. Springer, 2007. 174 p.
6. Черненький В.М., Терехов В.И., Гапанюк Ю.Е*.* Структура гибридной интеллектуальной информационной системы на основе метаграфов. Нейрокомпьютеры: разработка, применение. 2016. Выпуск №9. С. 3-14.
7. Черненький В.М., Гапанюк Ю.Е., Ревунков Г.И., Терехов В.И., Каганов Ю.Т. Метаграфовый подход для описания гибридных интеллектуальных информационных систем. Прикладная информатика. 2017. № 3 (69). Том 12. С. 57–79.
8. Черненький В.М., Терехов В.И., Гапанюк Ю.Е.Представление сложных сетей на основе метаграфов // Нейроинформатика-2016. XVIII Всероссийская научно-техническая конференция. Сборник научных трудов. Ч. 1. М.: НИЯУ МИФИ, 2016. C. 173-178
9. Самохвалов Э.Н., Ревунков Г.И., Гапанюк Ю.Е*.* Использование метаграфов для описания семантики и прагматики информационных систем. Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Приборостроение». 2015. Выпуск №1. С. 83-99.
10. Chernenkiy V.M., Terekhov V.I., Gapanyuk Yu.E. Predstavleniye slozhnikh setey na osnove metagrafov [Metagraph representation of complex networks]. Trudi XVIII vserossiyskoy konferencii “Neuroinformatics-2016” [Proc. XVIII all-russian conference “Neuroinformatics-2016”], Moscow, 2016, pp. 173-178.
11. Samokhvalov E.N., Revunkov G.I. Gapanyuk Yu.E. Ispolzovaniye metagraphov dlya opisaniya semantiki i pragmatiki informatsionnykh sistem [Metagraphs for information systems semantics and pragmatics definition]. Vestnik MGTU im. N.E. Baumana, seriya “Priborostroeniye” [Herald of the Bauman Moscow State Technical University, “Instrument Engineering”], 2015, no. 1, pp. 83-99.
12. Voloshin Vitaly I. Introduction to Graph and Hypergraph Theory. Nova Science Publishers, Inc., 2009, 287 p.
13. Попков В.К. Математические модели связности. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2006. – 490 с.
14. Гапанюк Ю.Е., Ревунков Г.И., Федоренко Ю.С. Предикатное описание метаграфовой модели данных. Информационно-измерительные и управляющие системы. 2016. Выпуск № 12. С. 122-131.
15. Wang Q., Mao Z., Wang B., Guo L. Knowledge Graph Embedding: A Survey of Approaches and Applications. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2017, vol. 29, no. 12, pp. 2724-2743
16. Cai, Hongyun & W. Zheng, Vincent & Chen-Chuan Chang, Kevin. (2017). A Comprehensive Survey of Graph Embedding: Problems, Techniques and Applications. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering. 10.1109/TKDE.2018.2807452.
17. J. E. Gonzalez, R. S. Xin, A. Dave, D. Crankshaw, M. J. Franklin, and I. Stoica, “Graphx: Graph processing in a distributed dataflow framework,” in OSDI, 2014, pp. 599–613.
18. Y. Low, D. Bickson, J. Gonzalez, C. Guestrin, A. Kyrola, and J. M. Hellerstein, “Distributed graphlab: A framework for machine learning and data mining in the cloud,” Proc. VLDB Endow., vol. 5, no. 8, pp. 716–727, 2012.
19. P. Kumar and H. H. Huang, “G-store: High-performance graph store for trillion-edge processing,” in SC, 2016, pp. 71:1–71:12.
20. H. Fang, F. Wu, Z. Zhao, X. Duan, Y. Zhuang, and M. Ester, “Community-based question answering via heterogeneous social network learning,” in AAAI, 2016, pp. 122–128.
21. S. Chang, W. Han, J. Tang, G.-J. Qi, C. C. Aggarwal, and T. S. Huang, “Heterogeneous network embedding via deep architec- tures,” in KDD, 2015, pp. 119–128.
22. H. Zhang, X. Shang, H. Luan, M. Wang, and T. Chua, “Learning from collective intelligence: Feature learning using social images and tags,” TOMCCAP, vol. 13, no. 1, pp. 1:1–1:23, 2016.
23. X. Geng, H. Zhang, J. Bian, and T. Chua, “Learning image and user features for recommendation in social networks,” in ICCV, 2015, pp. 4274–4282.
24. F. Wu, X. Lu, J. Song, S. Yan, Z. M. Zhang, Y. Rui, and Y. Zhuang, “Learning of multimodal representations with random walks on the click graph,” IEEE Trans. Image Processing, vol. 25, no. 2, pp. 630–642, 2016.
25. K. Bollacker, C. Evans, P. Paritosh, T. Sturge, and J. Taylor, “Freebase: A collaboratively created graph database for structuring human knowledge,” in SIGMOD, 2008, pp. 1247–1250.
26. Maximilian Nickel, Kevin Murphy, Volker Tresp, Evgeniy Gabrilovich, “A Review of Relational Machine Learning for knowledge Graphs” [Электронный ресурс]. 2015. Дата обновления: 02.3.2015. URL: https://arxiv.org/abs/1503.00759 (дата обращения: 1.06.2019).
27. F. Wu, J. Song, Y. Yang, X. Li, Z. M. Zhang, and Y. Zhuang, “Structured embedding via pairwise relations and long-range interactions in knowledge base,” in AAAI, 2015, pp. 1663–1670.
28. B. Shi and T. Weninger, “Proje: Embedding projection for knowl- edge graph completion,” in AAAI, 2017, pp. 1236–1242.
29. F. Gregory Ashby and Daniel M. Ennis, Similarity measures. Scholarpedia, 2(12):4116, 2007.
30. P. Goyal and E. Ferrara, “Graph embedding techniques, applications, and performance: A survey,” CoRR, vol. abs/1705.02801, 2017.
31. D. Cai, X. He, and J. Han. “Spectral regression: a unified subspace learning framework for content-based image retrieval,” in MM, 2007, pp. 403–412.
32. S. Guattery and G. L. Miller. Graph embeddings and laplacian eigenvalues. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 21(3), 2000, pp. 703–723.
33. F. R. K. Chung. Spectral Graph Theory, Regional Conference Series in Mathematics, vol.92, AMS, 1997.
34. X. He, S. Yan, Y. Hu, P. Niyogi, and H.-J. Zhang. Face recognition using laplacian faces. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 27(3), 2005, pp. 328–340.
35. Belkin, M., & Niyogi, P. (2002). Laplacian eigenmaps and spectral techniques for embedding and clustering. In T. K. Leen, T. G. Dietterich, & V. Tresp (Eds.), Advances in neural information processing systems, 14. Cambridge, MA: MIT Press.
36. M. Ou, P. Cui, J. Pei, Z. Zhang, W. Zhu. KDD'16: Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining, 2016, pp. 1105–1114.
37. Tomas Mikolov, Kai Chen, Greg Corrado, and Jeffrey Dean. Efficient estimation of word representations in vector space. ICLR Workshop, 2013.
38. Bryan Perozzi, Rami Al-Rfou, and Steven Skiena. Deepwalk: Online learning of social representations. In Proceedings of the 20th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining, KDD ’14, pages 701–710, ACM, New York, USA, 2014.
39. Aditya Grover and Jure Leskovec. node2vec: Scalable feature learning for networks. In Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining, 2016.
40. J. Hopcroft and R. Kannan. Foundations of data science. 2014.
41. S. Guattery and G. L. Miller. Graph embeddings and laplacian eigenvalues. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 21(3):703–723, 2000.
42. F. R. K. Chung. Spectral Graph Theory, volume 92 of Regional Conference Series in Mathematics. AMS, 1997
43. T. Hofmann and J. M. Buhmann, “Multidimensional scaling and data clustering,” in NIPS, 1994, pp. 459–466.
44. M. Balasubramanian and E. L. Schwartz, “The isomap algorithm and topological stability,” Science, vol. 295, no. 5552, pp. 7–7, 2002.
45. W. N. A. Jr. and T. D. Morley, “Eigenvalues of the laplacian of a graph,” Linear and Multilinear Algebra, vol. 18, no. 2, pp. 141–145, 1985.
46. Y. Yang, F. Nie, S. Xiang, Y. Zhuang, and W. Wang, “Local and global regressive mapping for manifold learning with out-of- sample extrapolation,” in AAAI, 2010.
47. R. Jiang, W. Fu, L. Wen, S. Hao, and R. Hong, “Dimensionality reduction on anchorgraph with an efficient locality preserving projection,” Neurocomputing, vol. 187, pp. 109–118, 2016.
48. Y.-Y. Lin, T.-L. Liu, and H.-T. Chen, “Semantic manifold learning for image retrieval,” in MM, 2005, pp. 249–258.
49. M. Chen, I. W. Tsang, M. Tan, and C. T. Jen, “A unified feature selection framework for graph embedding on high dimensional data,” IEEE Trans. Knowl. Data Eng., vol. 27, no. 6, pp. 1465–1477, 2015.
50. S. Yan, D. Xu, B. Zhang, H. Zhang, Q. Yang, and S. Lin, “Graph embedding and extensions: A general framework for dimensionality reduction,” IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., vol. 29, no. 1, pp. 40–51, 2007.
51. Y. Yang, F. Nie, S. Xiang, Y. Zhuang, and W. Wang, “Local and global regressive mapping for manifold learning without-of sample extrapolation,” in AAAI, 2010.
52. S. Xiang, F. Nie, C. Zhang, and C. Zhang, “Nonlinear dimensionality reduction with local spline embedding,” IEEE Trans. Knowl. Data Eng., vol. 21, no. 9, pp. 1285–1298, 2009.
53. A. Suzuki, Y. Enokida, and K. Yamanishi. Riemannian TransE: Multi-relational Graph Embedding in Non-Euclidean Space, ICLR, 2019.
54. I. Balaževic, C. Allen, T. Hospedales, Multi-relational Poincaré Graph Embeddings, Advances in Neural Information Processing Systems 32 (NeurIPS 32), 2019.
55. Гапанюк Ю.Е., Ревунков Г.И., Злобина С.В., Кадиев З.Д. Обзор подходов к векторному представлению графов знаний и метаграфов. Динамика сложных систем - XXI век. 2019. Т. 13. № 2. С. 67-74.
56. Сандерс Дж., Кэндрот Э. Технология CUDA в примерах: введение в программирование графических процессоров: Пер. С англ. Силинкина А.А., научный редактор Борисов А.В. М.: ДМК Пресс, 2018. – 232 с.: ил. ISBN 978-5-97060-581-3

# ПРИЛОЖЕНИЕ А