TEORIA DO CONTROLE DISCRETO

2022.1

MODELO DE TANQUES ACOPLADOS

Aluno: Douglas Lima Militão Pinheiro

Matrícula: 476854

Professor: Fabrício Nogueira

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ / CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
PROF. DR FABRÍCIO NOGUEIRA

TRABALHO –MODELO DE TANQUES ACOPLADOS

1. OBJETIVOS

- Identificar o modelo ARX de tanques acoplados com controle de vazão por uma válvula;
- Projetar um controlador para o sistema;
- Verificar via MATLAB e SIMULINK os resultados do controlador.

2. INTRODUÇÃO

Uma planta de controle de nível é muito utilizada em sistemas industriais, possuindo diversas aplicações práticas. A não linearidade de um tanque é devido a sua vazão de saída, que pela equação de Bernoulli, varia de acordo com a raiz quadrada da altura e, portanto, apesar de ser estável, não é um sistema linear e não é possível aplicar a transformada de Laplace.

Para a solução deste problema é possível duas abordagens, linearizar em torno de um ponto de operação para realizar a identificação do modelo e projetar um controlador linear ou projetar um controlador adaptativo capaz de operar em todos os pontos de operação do modelo, sendo este segundo método o adotado para este projeto.

2.1 MODELAGEM FENOMENOLÓGICA DE UM TANQUE

A equação que rege os fenômenos físicos envolvendo o problema de um tanque é dada por:

$$A\frac{dh}{dt} = Q_e - Q_s$$

- A é a área da base do tanque em m^2;
- h é o nível do tanque m;
- Q_e é a vazão de entrada em m^3/s;
- Q_s é a vazão de saída do tanque em m^3/s

A vazão de saída Q_s pode ser modelada pela equação de Bernoulli, sendo definida por:

$$Q_s = a_s\sqrt{2gh}$$

- a_s é a seção de saída em m^2;
- h é o nível do tanque em m;
- Q_s é a vazão de saída do tanque em m^3/s.

Portanto a relação de entrada Q_e e nível h é não linear.

$$A\frac{dh}{dt} + a_s\sqrt{2gh} = Q_e$$

O sistema proposto consiste de dois tanques acoplados, o que o torna consequentemente não linear também, não podendo ser aplicada, portanto, a transformada de Laplace.

3. DESENVOLVIMENTO

3.1 MODELAGEM FENOMENOLÓGICA DE UM TANQUE

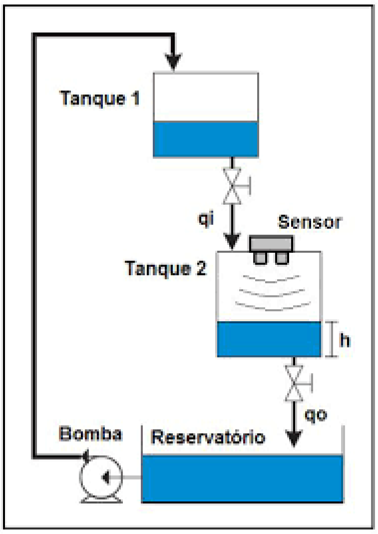

Figura 1. Modelo dos tanques a serem controlados. Fonte: ALPI, Lucas B (UFRS).

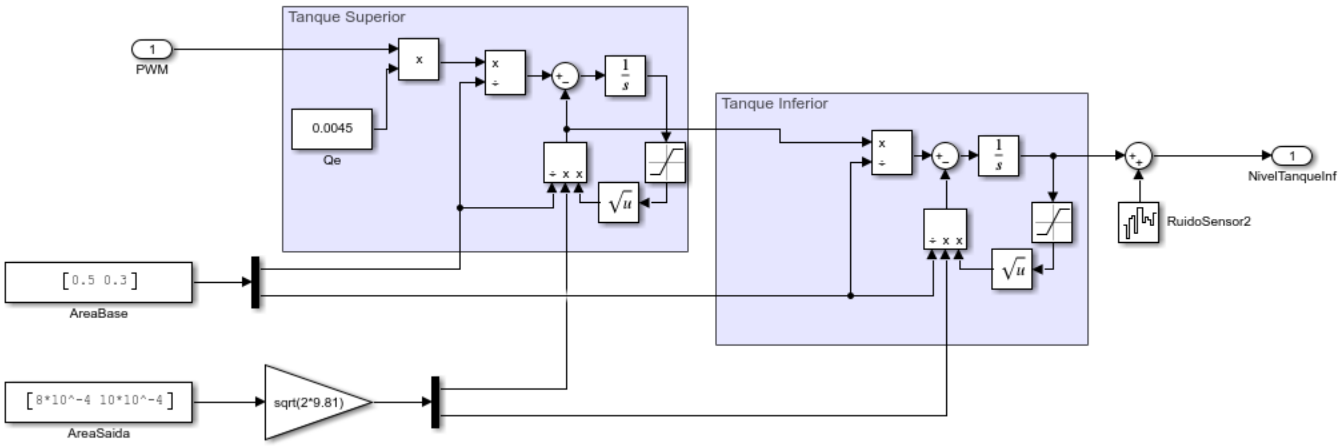

Figura 2. Modelo dos tanques no SIMULINK. Fonte: Autor.

Para o modelo montado no SIMULINK (*Figura 2*) serão feitas algumas considerações para o sistema, que serão utilizados tanto para facilitar a simulação, como o método de controle, sendo elas:

- As válvulas *qi* e *qo* serão mantidas em aberto, com vazão máxima, e o controle será feito apenas pela vazão de entrada a partir da bomba.
- A relação Vazão/DC_{PWM} será linear, com DC_{PWM} variando de 0 a 1.

$$Q_e = Q_{enom} \cdot DC_{PWM}$$

- Serão desconsiderados atrasos de transporte tanto da bomba como do tanque 1.

3.2 RESPOSTA AO DEGRAU

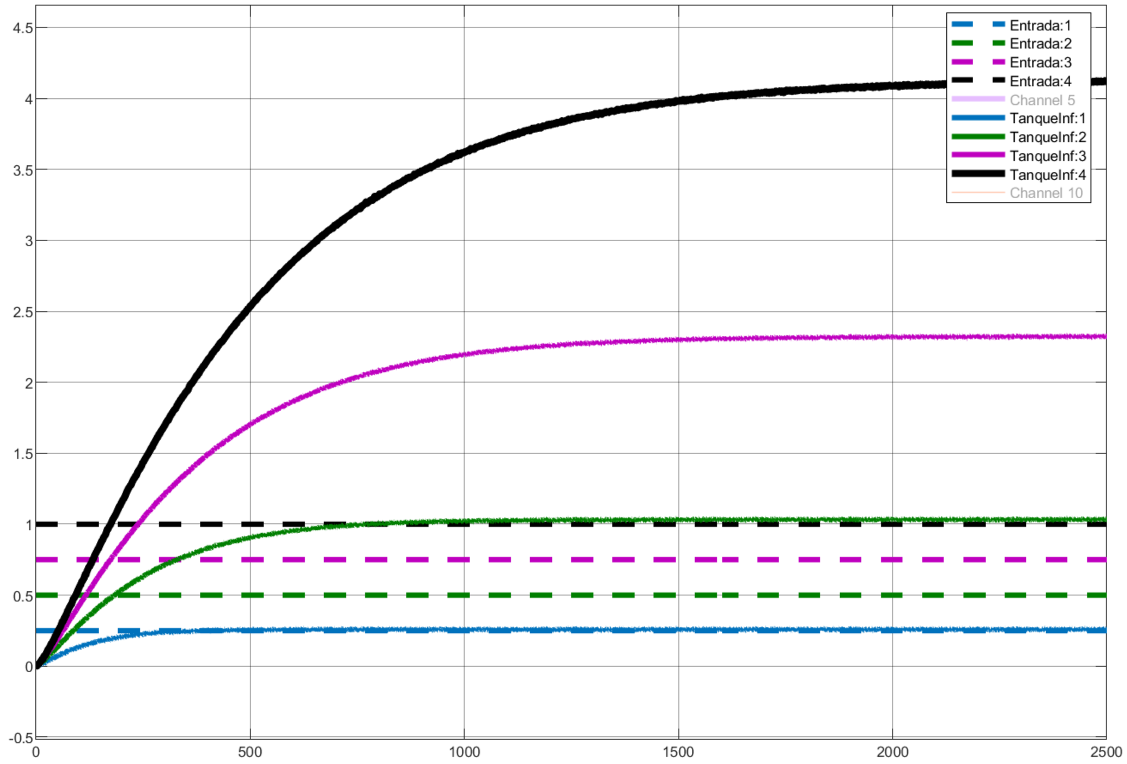

Figura 3. Resposta ao degrau para diferentes valores de PWM. Fonte: Autor.

As curvas da *Figura 3* demonstram a não linearidade do sistema através da resposta ao degrau. As curvas em azul correspondem a um degrau de entrada de *0,25*, as curvas em verde a um degrau de entrada de *0,5*, enquanto as curvas em violeta e preto, correspondem a um degrau de entrada de 0,75 e 1, respectivamente. Observando apenas as curvas para o degrau de 0,5 e 1, já torna possível perceber que a relação de ganho estático não é correspondente, pois um aumento de 2 vezes no sinal de entrada, resultou em um aumento de cerca de 4 vezes no sinal de saída.

4. IDENTIFICAÇÃO DO MODELO ARX

4.1 MODO DOMINANTE DO SISTEMA

O sistema apresenta características de dois modelos diferentes, podendo ser aproximado como:

- Modelo de primeira ordem;
- Modelo de segunda ordem com polos reais idênticos;

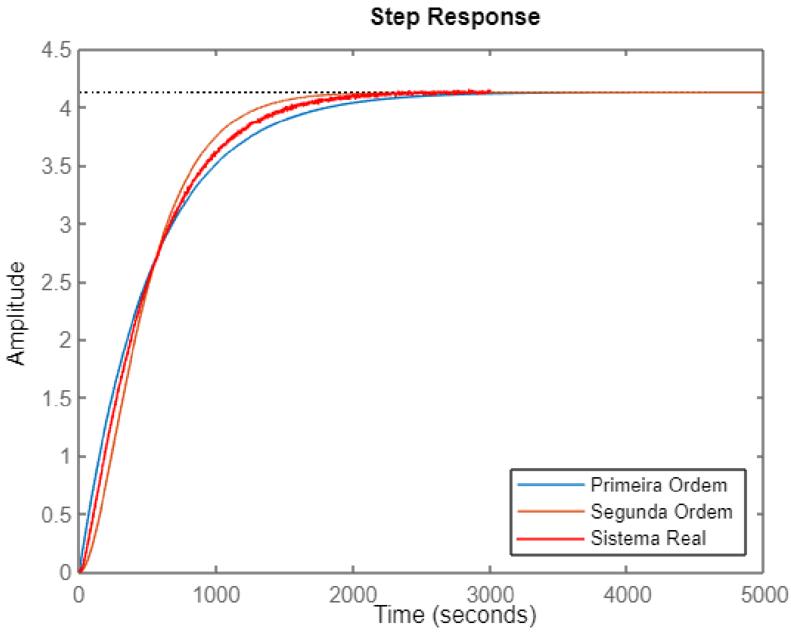

Figura 4. Resposta ao degrau dos modelos e do sistema real. Fonte: Autor

Como um modelo de primeira ordem, possui a seguinte equação aproximada:

$$G_1 = \frac{4{,}125}{525{,}4s + 1}$$

Como modelo de segunda ordem, possui o seguinte modelo:

$$G_2 = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-5}}{s^2 + 0{,}008s + 1{,}6 \cdot 10^{-5}}$$

A frequência dominante para o modelo de primeira ordem é dada por:

$$f_{dom1} = \frac{1}{525{,}4} = 1{,}9 \cdot 10^{-3} Hz$$

Para o modelo de segunda ordem é dado por:

$$f_{dom2} = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{\sqrt{1{,}6 \cdot 10^{-5}}}{2\pi} = 6{,}37 \cdot 10^{-4} Hz$$

A resposta em malha fechada do sistema desejada é de segunda ordem, no formato:

$$H_{mf}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

É desejado que a resposta em malha fechada seja, pelo menos 5 vezes mais rápida que a resposta em malha aberta. O valor escolhido para assentamento foi de 400 s, com amortecimento igual a 1.

$$T_{ass} = 400s = \frac{4}{\xi\omega_n} \rightarrow \; \omega_n = 0{,}01$$

A taxa de amostragem para sistemas de segunda ordem é definida por:

$$0{,}25 \leq \omega_n t_s \leq 1{,}75$$

$$25 \leq t_s \leq 175$$

Portanto a taxa de amostragem será de 40 segundos, que satisfaz as condições.

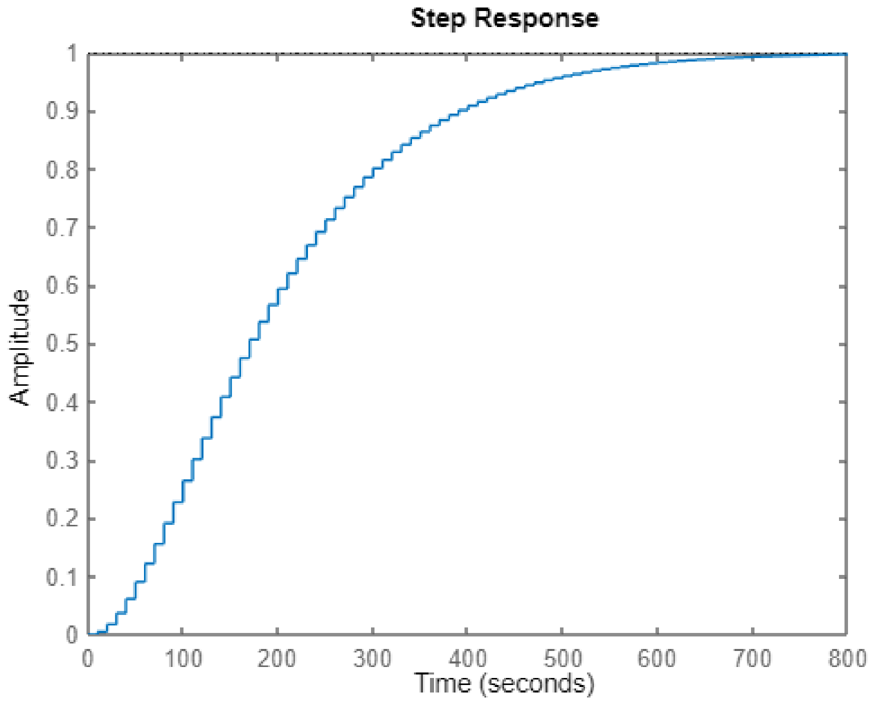

Figura 5. Resposta desejada em malha fechada para o sistema. Fonte: Autor.

5. SINAL PRBS

Como se trata de um modelo não-linear que pode ser aproximado por dois modelos diferentes, de primeira ou de segunda ordem, o sinal PRBS a ser criado englobará os dois possíveis, portanto a região plana de frequência do PRBS terá frequência mínima menor que $6{,}33 \cdot 10^{-4}\ Hz$ e frequência máxima maior que $1{,}9 \cdot 10^{-3} Hz$.

Para dimensionar o sinal PRBS foram utilizadas 5 células e Tb igual a 200s e concatenados dois ciclos do sinal. As frequências mínimas e máximas, de acordo com o equacionamento de um PRBS, são iguais a:

$$\frac{1}{Tb(2^N - 1)} \leq f_{pbrs} \leq \frac{0,44}{Tb}$$

$$3,94 \cdot 10^{-4} Hz \leq f_{prbs} \leq 2,2 \cdot 10^{-2} Hz$$

Como engloba as duas frequências dispostas anteriormente, podemos utilizar essa configuração. Com isso foram obtidos os seguintes sinais:

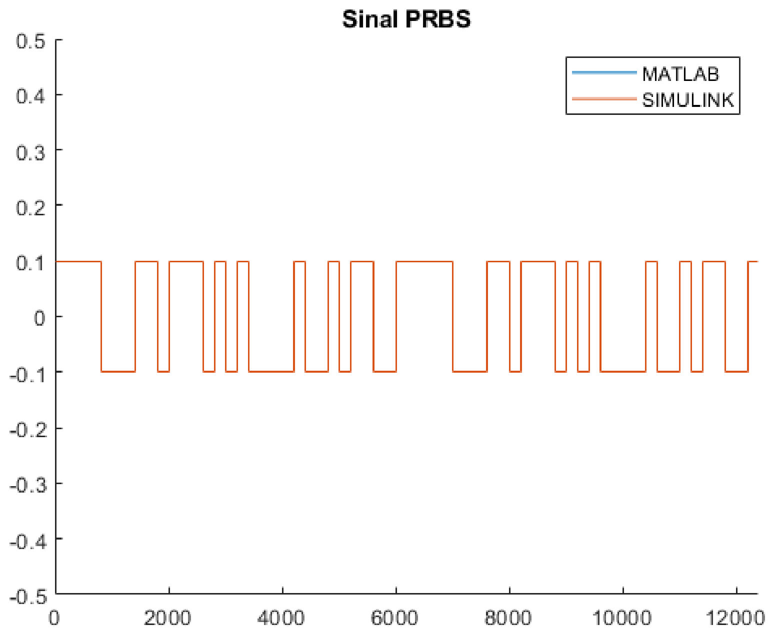

Figura 6. Sinal PRBS no domínio do tempo. Fonte: Autor

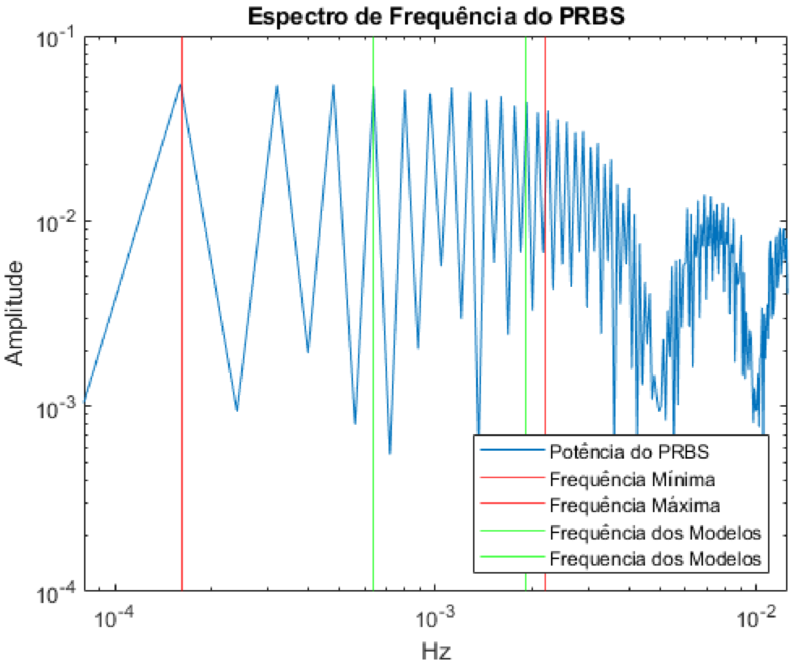

Figura 7. Sinal PRBS no domínio da frequência. Fonte: Autor

O *PRBS* foi aplicado na entrada quando o sistema estava em regime permanente com um degrau de amplitude *0,7* aplicado na entrada anteriormente, e a partir da resposta de saída, os sinais foram filtrados e retirados os *offsets* para a utilização correta do algoritmo dos mínimos quadrados.

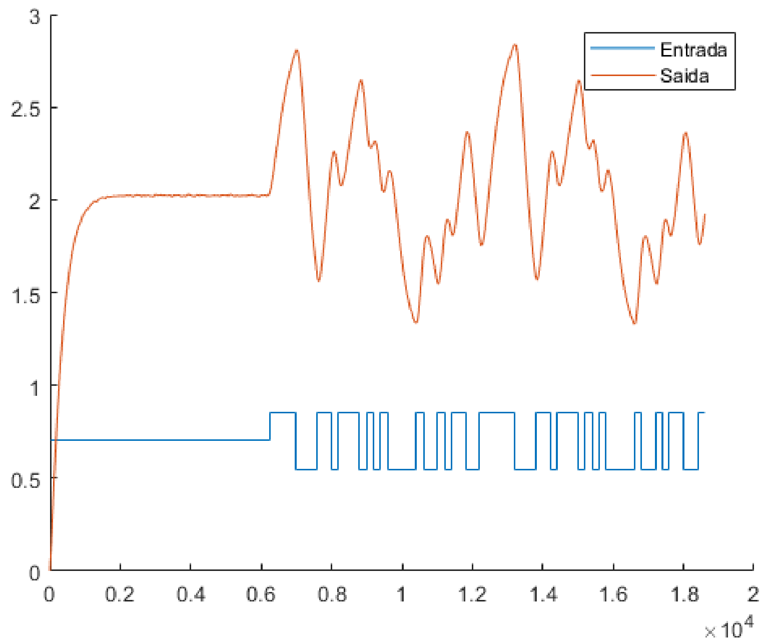

Figura 8. Curvas do sistema. Fonte: Autor

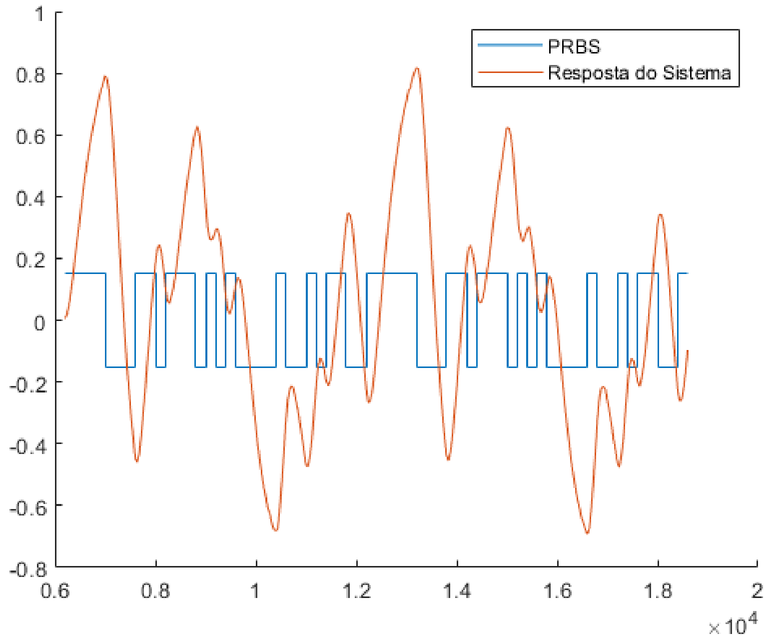

Figura 9. Sinal PRBS e resposta do sistema. Fonte: Autor

Os sinais da Figura 7 foram utilizados para realizar a identificação do sistema utilizando o método dos mínimos quadrados, sendo 75% dos dados para identificação e 25% para validação.

6. MÍNIMOS QUADRADOS

Foram considerados polinômios de quarta ordem para A e B sem atraso, sendo obtidos os seguintes resultados:

Função de Transferência:

$$G_{ma}(z) = \frac{0{,}08806z^{-1} + 0{,}1278z^{-2} + 0{,}064z^{-3} + 0{,}01584z^{-4}}{1 - 0{,}9822z^{-1} - 0{,}2845z^{-2} + 0{,}2047z^{-3} + 0{,}1114z^{-4}}$$

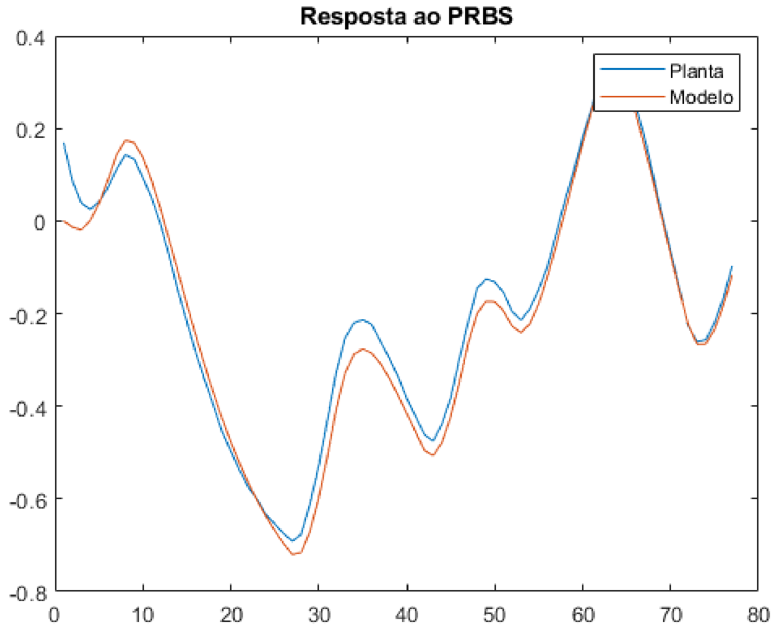

Figura 10. Resposta do Modelo e da Planta real para validação. Fonte: Autor

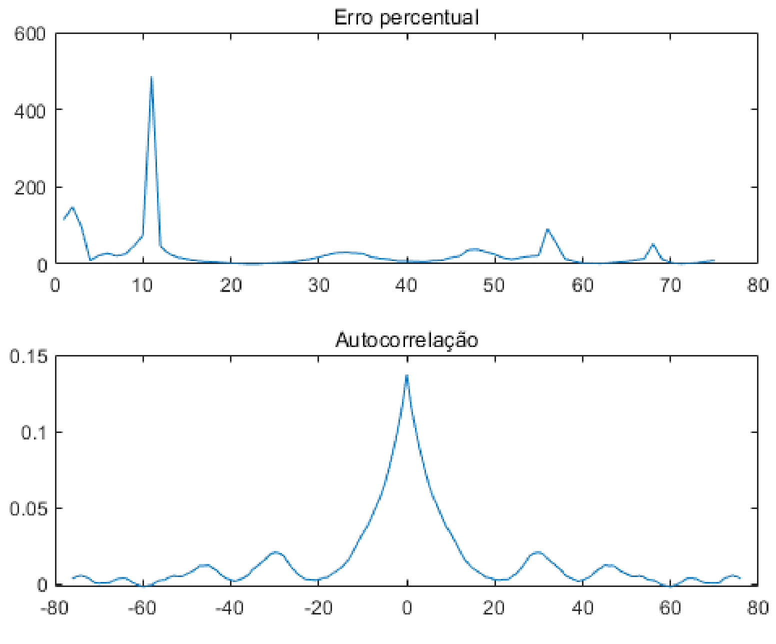

Figura 11. Erro percentual e autocorrelação do erro. Fonte: Autor

Com esses resultados, é possível perceber que os resultados da identificação foram satisfatórios, visto que a autocorrelação do erro se aproxima com a autocorrelação de um ruído branco, ou seja, há pouca informação relevante perdida na identificação.

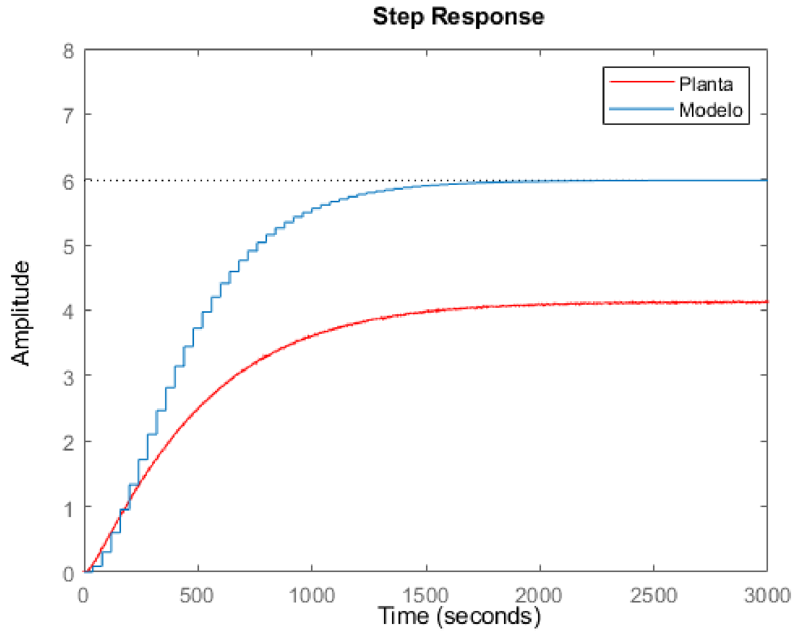

Figura 12. Resposta ao degrau da planta e do modelo. Fonte: Autor

Por se tratar de um sistema não linear, é natural que a resposta ao degrau do modelo e da planta não sejam condizentes, visto que o modelo mapeia apenas uma região de operação da planta.

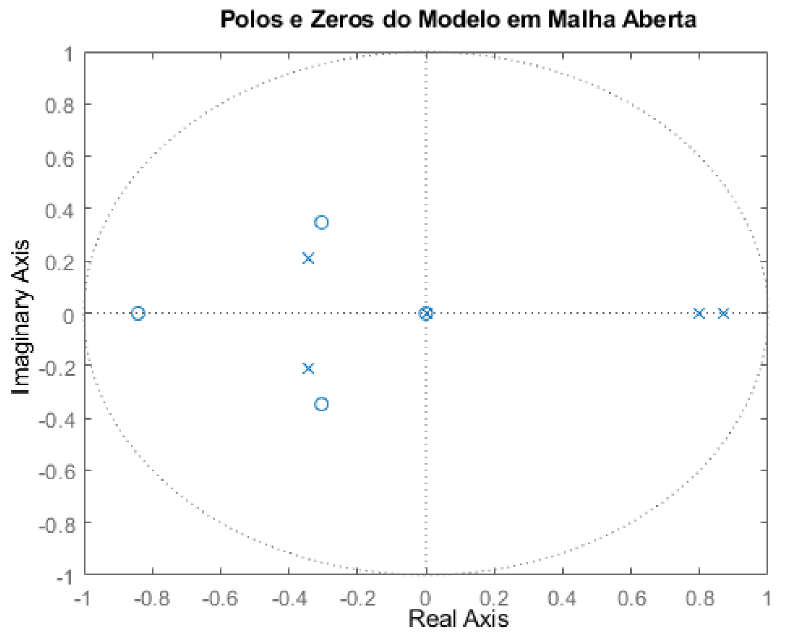

Figura 13. Mapa de polos e zeros da função do modelo. Fonte: Autor

7. CONTROLADOR COM UM GRAU DE LIBERDADE

Nesse caso a resposta a entrada e rejeição a ruídos dependem dos vetores R, S e T. A resposta em malha fechada do sistema está definida como:

$$G_{mf}(s) = \frac{0{,}0001}{s^2 + 0{,}02s + 0{,}0001}$$

No tempo discreto é definido como:

$$G_{mf}(z) = \frac{0{,}06155z^{-1} + 0{,}04714z^{-2}}{1 - 1{,}341z^{-1} + 0{,}4493z^{-2}}$$

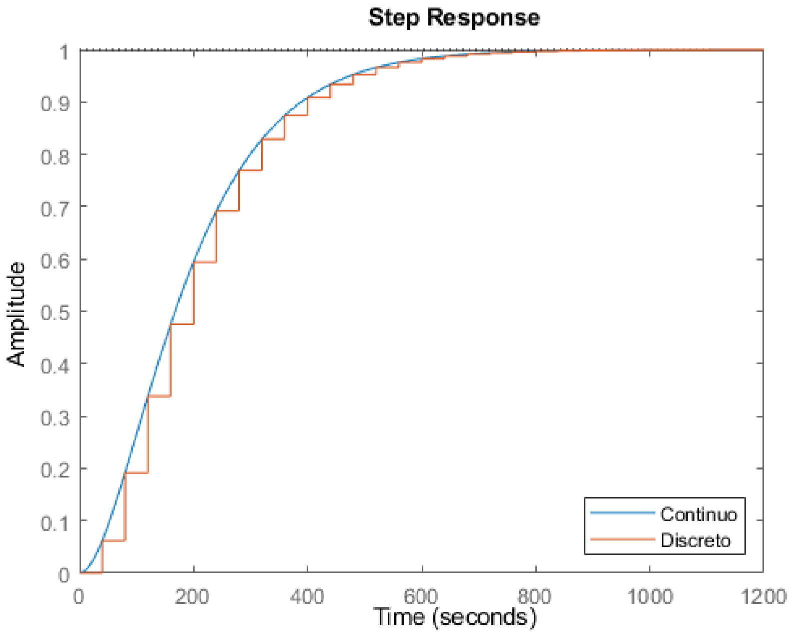

Figura 14. Resposta ao degrau do modelo em malha fechada. Fonte: Autor

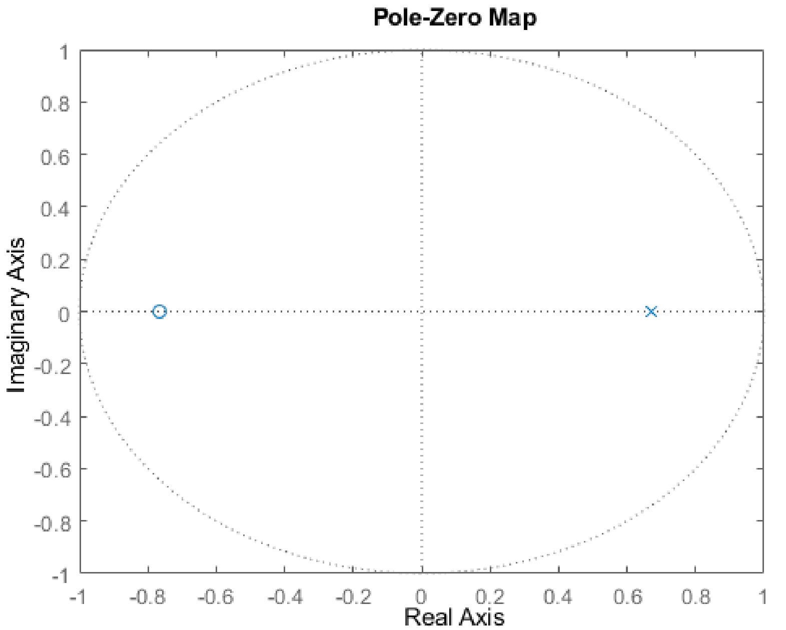

Figura 15. Mapa de polos e zeros do modelo em malha fechada. Fonte: Autor

Por alocação de polos, considerando que todos os polos auxiliares estão na origem, foi obtido as seguintes matrizes:

```
M = 9×9
     1.0000         0         0         0         0         0         0         0         0
    -1.9822    1.0000         0         0    0.0881         0         0         0         0
     0.6976   -1.9822    1.0000         0    0.1278    0.0881         0         0         0
     0.4892    0.6976   -1.9822    1.0000    0.0640    0.1278    0.0881         0         0
    -0.0933    0.4892    0.6976   -1.9822    0.0158    0.0640    0.1278    0.0881         0
    -0.1114   -0.0933    0.4892    0.6976         0    0.0158    0.0640    0.1278    0.0881
          0   -0.1114   -0.0933    0.4892         0         0    0.0158    0.0640    0.1278
          0         0   -0.1114   -0.0933         0         0         0    0.0158    0.0640
          0         0         0   -0.1114         0         0         0         0    0.0158
```

Figura 16. Matriz de polos e zeros do modelo em malha aberta. Fonte: Autor

```
p = 9×1
     1.0000
    -1.3406
     0.4493
          0
          0
          0
          0
          0
          0
```

Figura 17. Vetor de polos em malha fechada. Fonte: Autor

```
S = conv(RS(1:ns+1),[1 -1])'

 S = 1×5
       1.0000   -0.5793   -0.1244   -0.2835   -0.0127

R = RS(ns+2:end)'

 R = 1×5
       2.5083   -0.3543   -3.6734    1.7977    0.0893

T = sum(R)

T = 0.3676
```

Figura 18. Vetores R, S e T. Fonte: Autor

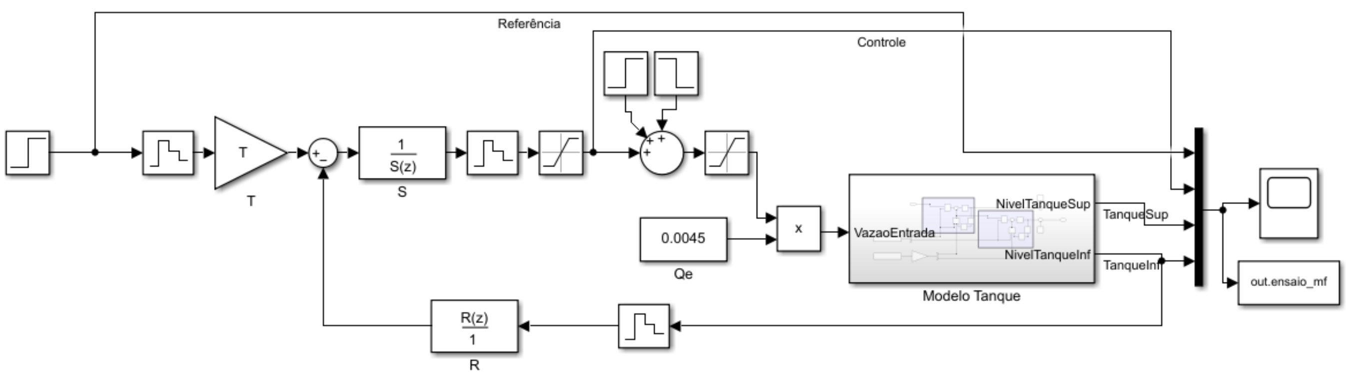

Figura 19. Arquitetura do controlador. Fonte: Autor

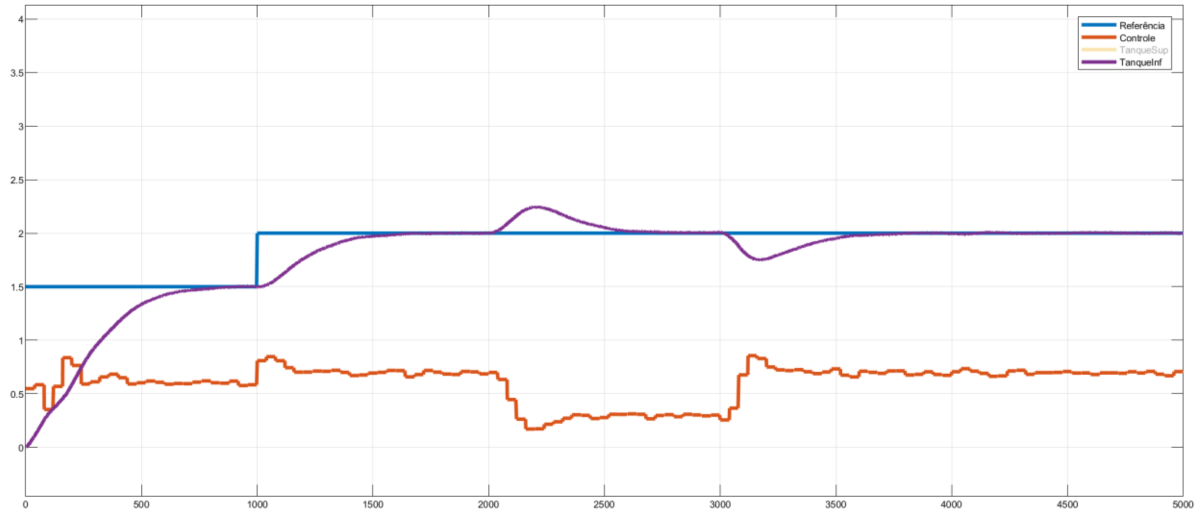

Figura 20. Resultados do ensaio com o controlador. Fonte: Autor

No ensaio fica claro o funcionamento do controlador, vale ressaltar que nesse caso foi inserida duas perturbações no sinal de controle em 2000s e 3000s, que foram rejeitadas pelo controlador.

8. CONTROLADOR COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE

Para o controlador com dois graus de liberdade o procedimento de alocação de polos é idêntico ao feito anteriormente, mas nesse caso será adotado uma planta com resposta rápida para a rejeição de perturbação, ou seja, para projetar o polinômio R e S, diferindo apenas no polinômio T.

O polinômio T é adotado como

$$T(z) = \frac{P(z)}{B(1)}$$

Onde $P(z)$ são os polos de malha fechada projetados e $B(1)$ é a soma dos coeficientes do modelo da planta para que o sistema se assemelhe a um ganho unitário, sendo inserido um novo filtro $H_m(z)$ que determinará a resposta de rastreamento do sistema, que deve ser mais lenta que a resposta de regulação.

Para rastreamento (filtro $H_m(z)$), será adotado a mesma resposta desejada no controlador de um grau de liberdade:

$$H_m(s) = \frac{0{,}0001}{s^2 + 0{,}02s + 0{,}0001}$$

No tempo discreto é definido como:

$$H_m(z) = \frac{0{,}06155z^{-1} + 0{,}04714z^{-2}}{1 - 1{,}341z^{-1} + 0{,}4493z^{-2}}$$

A resposta ao degrau e mapa de zeros e polos são os mesmos contidos na Figura 12 e 13. Entretanto o polinômio do numerador deve ser atrasado em $z^{-(k+1)}$, onde k é o atraso da planta em malha aberta, nesse caso, no modelo em questão o k é igual a 0.

Para regulação, o tempo de assentamento será reduzido em 4 vezes, portanto $T_{ass} = 100s$, o que gera as funções de transferência:

$$G_{mf}(s) = \frac{0{,}0016}{s^2 + 0{,}08s + 0{,}0016}$$

No tempo discreto é definido como:

$$G_{mf}(z) = \frac{0{,}4751z^{-1} + 0{,}1619z^{-2}}{1 - 0{,}4038z^{-1} + 0{,}04076z^{-2}}$$

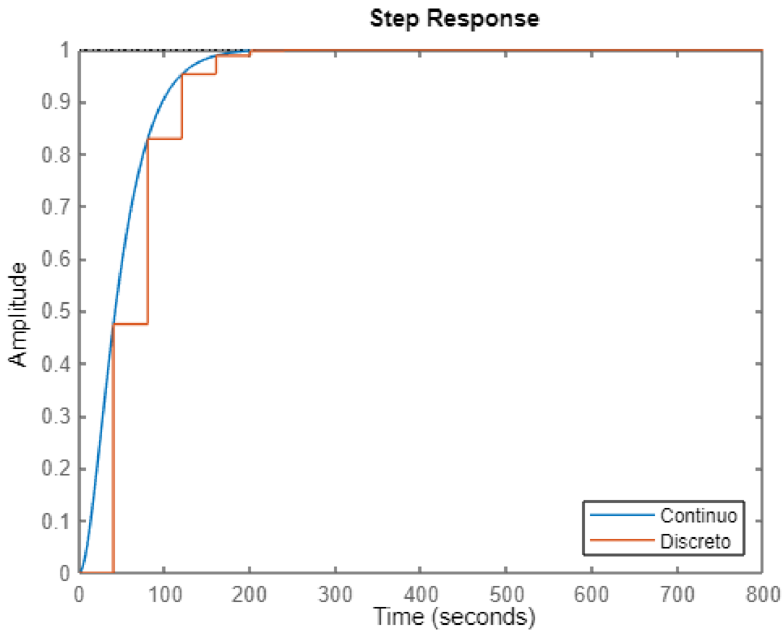

Figura 21. Resposta ao degrau do modelo em malha fechada. Fonte: Autor

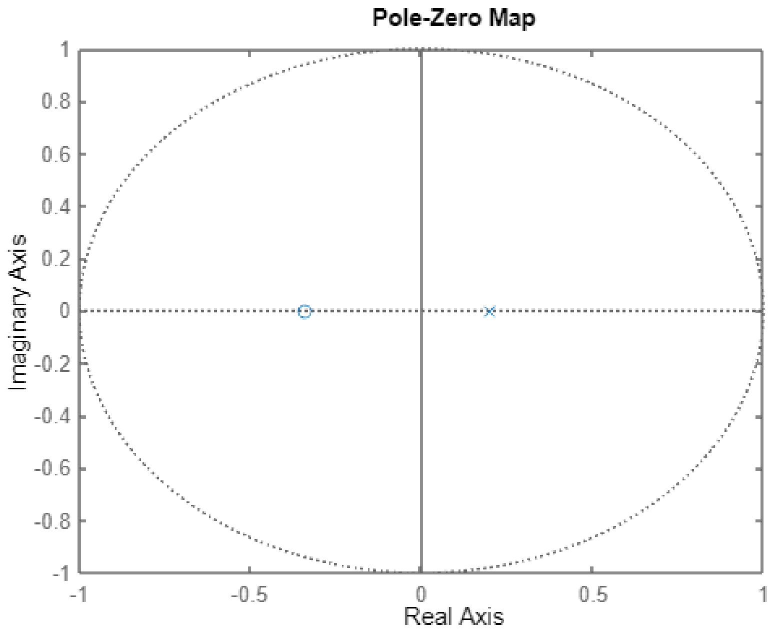

Figura 22. Mapa de polos e zeros do modelo em malha fechada. Fonte: Autor

A matriz M para alocação de polos é idêntica a da Figura 14, o que é modificado são os polos de malha fechada, visto que agora a resposta deve ser mais rápida, portanto, foram obtidos os seguintes valores para os polinômios R, S e T.

```
S = conv(RS(1:ns+1),[1 -1])'

 S = 1×5
       1.0000   -0.1114   -0.4406   -0.3590   -0.0890

R = RS(ns+2:end)'

 R = 1×5
       7.8337   -3.9118   -3.5398    1.1464    0.6258

Tnum = p'

 Tnum = 1×9
       1.0000   -0.4038    0.0408         0         0         0         0         0         0

B1 = sum(cell2mat(G.num))

B1 = 0.2957
```

Figura 23. Vetores R, S e T. Fonte: Autor

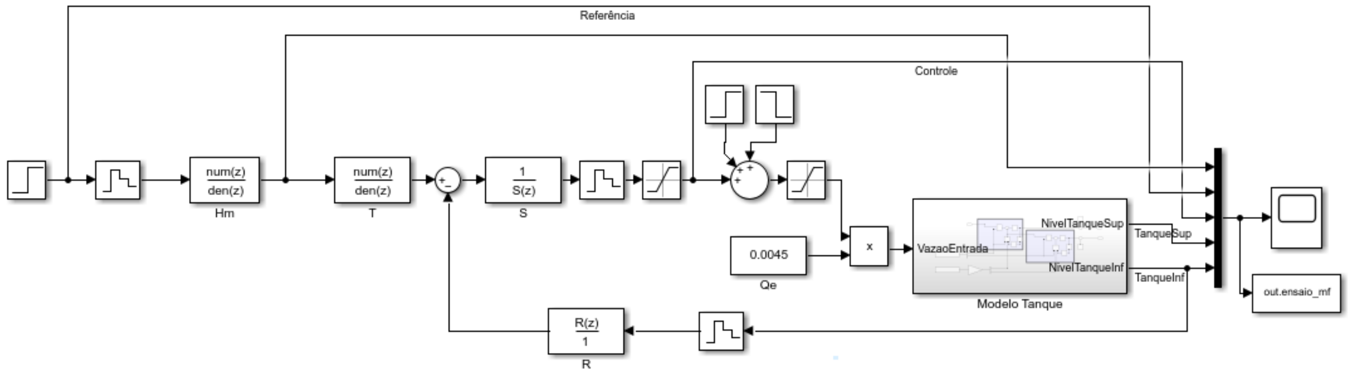

Figura 24. Resultados do ensaio com o controlador. Fonte: Autor

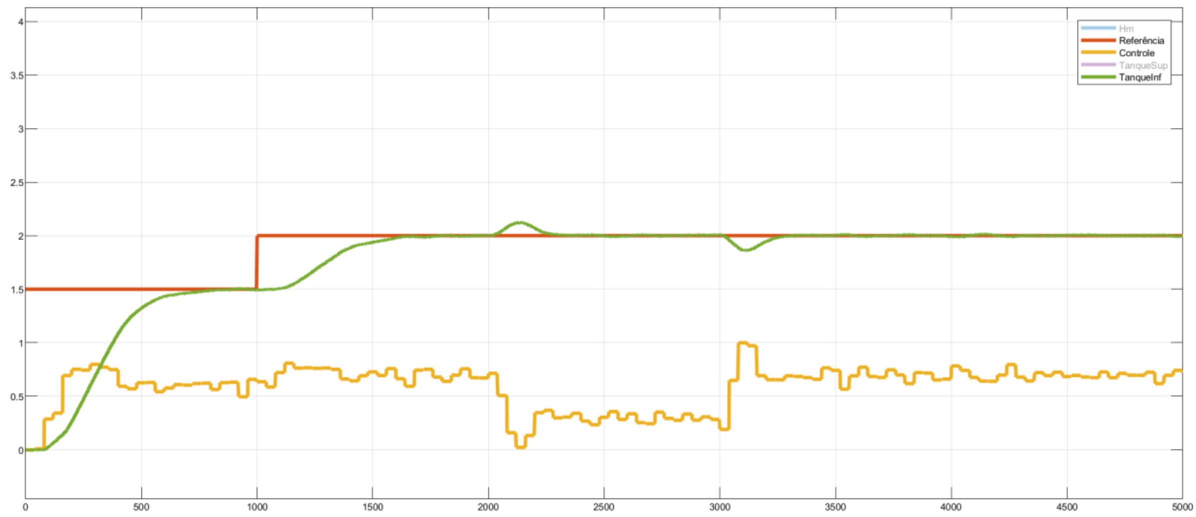

Figura 25. Resultados do ensaio com o controlador. Fonte: Autor

Novamente foi realizado um ensaio utilizando o novo controlador com duas perturbações no sinal de controle em 2000s e 3000s, que foram rejeitadas pelo controlador de forma mais rápida que o da Figura 18, conforme foi desejado inicialmente.

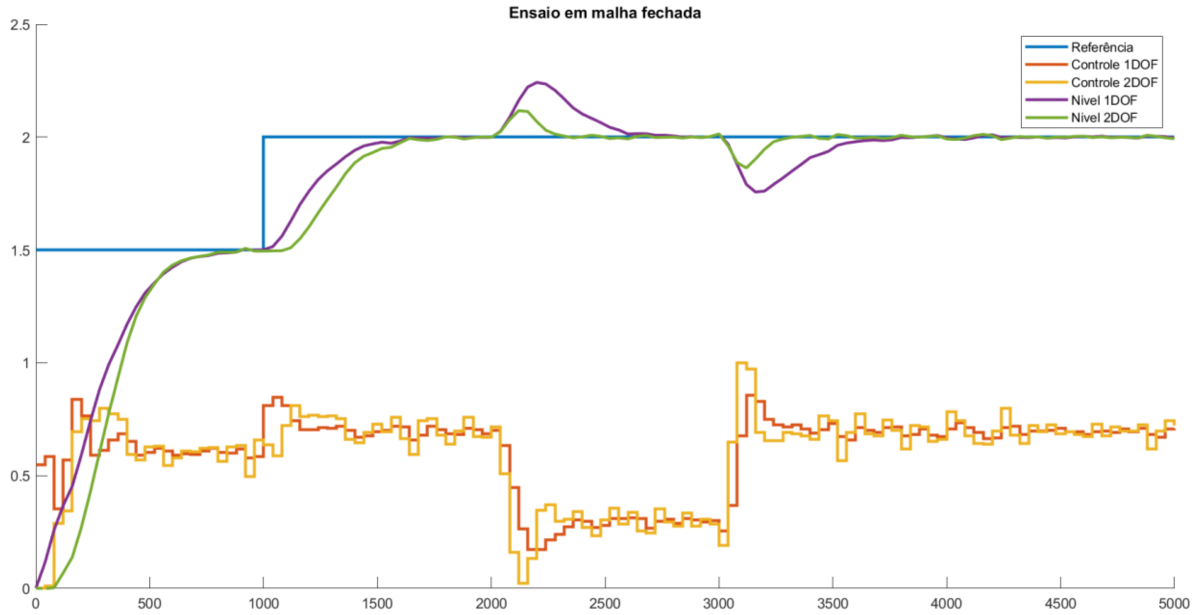

Figura 26. Comparativo dos resultados dos controladores de 1DOF e 2DOF. Fonte: Autor.

9. CONCLUSÃO

Por meio do software MATLAB e Simulink foi possível modelar um sistema, projetar um controlar RST e verificar sua eficiência no controle de sistemas a partir da modelagem ARX com entrada de um sinal PRBS projetada especificamente para o sistema. Além disso, o controlador RST se mostrou bastante versátil principalmente na variação com 2DOF, que se mostrou mais eficaz tanto para seguimento de referência como para rejeição de perturbações em relação a versão mais simples 1DOF, no entanto, ambos os controladores apresentaram bons resultados, operando diretamente no sistema não-linear simulado no Simulink, atuando conforme designado pelo projetista.