



CONTROLE DE SISTEMAS DINÂMICOS 2021.2

MODELO DE UM TANQUE

Aluno: Douglas Lima Militão Pinheiro

Matrícula: 476854

Professor: Fabrício Nogueira

Turma: 1C

TRABALHO – MODELO DE UM TANQUE

1 OBJETIVOS

- Identificar e linearizar o modelo físico de um tanque com controle de vazão por uma válvula
- Projetar dois controladores para o sistema
- Verificar via MATLAB e SIMULINK os resultados do controlador

2 DESENVOLVIMENTO

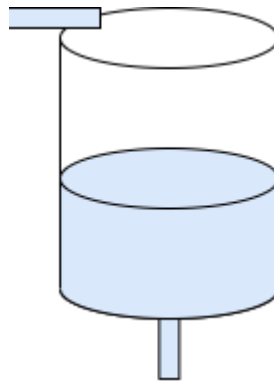


Figura 1. Modelo do tanque a ser controlado. Fonte: Autor.

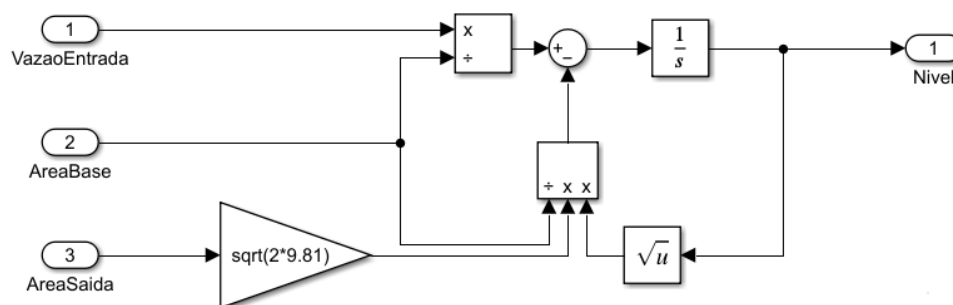


Figura 2. Modelo do tanque no SIMULINK. Fonte: Autor.

2.1 MODELAGEM FENOMENOLÓGICA

A soma de vazão do sistema pode ser descrita como:

$$Q_e(t) = \frac{dV(t)}{dt} + Q_s(t)$$

$Q_e(t)$ – Vazão de entrada

$V(t)$ – Volume do tanque

$Q_s(t)$ – Vazão de saída

A vazão de saída pode ser descrita, pela equação de Bernoulli como:

$$P_1 + \rho gh_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = P_2 + \rho gh_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

Aplicando as simplificações:

$$P_1 = P_2$$

$$v_1 \approx 0 \text{ (desprezada)}$$

$$h_2 = 0$$



Portanto

$$gh_1 = \frac{v_2^2}{2} \rightarrow v_2 = \sqrt{2gh_1}$$

$$Q_s(t) = A_s v_2 = A_s \sqrt{2gh}$$

A_s – Área de saída

h – Nível do tanque

O volume do tanque pode ser escrito como:

$$V(t) = A_b h(t) \rightarrow \frac{dV(t)}{dt} = A_b \frac{dh(t)}{dt}$$

A vazão de entrada pode ser escrita como:

$$Q_e(t) = D(t)Q_{enom}$$

$D(t)$ – Razão de proporção, varia de 0 a 1

Q_{enom} – Vazão nominal de entrada

Substituindo na equação inicial de vazão, obtemos:

$$Q_{enom}D(t) = A_b \frac{dh(t)}{dt} + A_s \sqrt{2g} \sqrt{h(t)}$$

Trata-se de um sistema não linear, pois depende de \sqrt{h} . Devemos, portanto, linearizar em torno de um ponto de operação para que possamos aplicar as técnicas de controle vistas em sala de aula. Para isso, temos os seguintes parâmetros para o sistema:

$$Q_{enom} = 0,0045 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$A_b = 0,5 \text{ m}^2$$

$$D_{op} = 0,5$$

$$r_s = 12,7 \text{ mm} \rightarrow A_s = 5,067 * 10^{-4} \text{ m}^2$$

Com isso conseguimos obter o nível de equilíbrio, fazendo com que a derivada do nível seja igual a zero.

$$\frac{dh(t)}{dt} = 0 \rightarrow Q_{enom}D_{op} = A_s \sqrt{2g} \sqrt{h} \rightarrow h_{eq} = \left(\frac{Q_{enom}D_{op}}{A_s \sqrt{2g}} \right)^2 = 1,005 \text{ m}$$

A partir desses dados podemos linearizar em torno do ponto de operação h_{eq} e D_{op} . Assumindo uma função $f(h, D)$ sendo:

$$f(h, D) = A_b \frac{dh}{dt} = Q_{enom}D(t) - A_s \sqrt{2g} \sqrt{h}$$

Fazendo a expansão de $f(h, D)$ pela série de Taylor

$$f(h, D) \approx f(h_{eq}, D_{op}) + \frac{\partial f(h, D)}{\partial h} \Big|_{h_{eq}, D_{op}} \Delta h + \frac{\partial f(h, D)}{\partial D} \Big|_{h_{eq}, D_{op}} \Delta D$$



$$f(h, D) - f(h_{eq}, D_{op}) = \frac{\partial f(h, D)}{\partial h} \Big|_{h_{eq}, D_{op}} \Delta h + \frac{\partial f(h, D)}{\partial D} \Big|_{h_{eq}, D_{op}} \Delta D$$

Portanto, a equação dinâmica do sistema pode ser escrita linearizada como:

$$A_b \frac{d\Delta h}{dt} = \frac{\partial f(h, D)}{\partial D} \Big|_{h_{eq}, D_{op}} \Delta D + \frac{\partial f(h, D)}{\partial h} \Big|_{h_{eq}, D_{op}} \Delta h$$

$$\frac{\partial f(h, D)}{\partial D} \Big|_{h_{eq}, D_{op}} = K_1 = 9 * 10^{-3}$$

$$\frac{\partial f(h, D)}{\partial h} \Big|_{h_{eq}, D_{op}} = -K_2 = 2,238 * 10^{-3}$$

Aplicando a transformada de Laplace, temos que:

$$A_b s \Delta h(s) = K_1 \Delta D(s) - K_2 \Delta h(s) \rightarrow \frac{\Delta h(s)}{\Delta D(s)} = \frac{K_1}{A_b s + K_2} = \frac{\frac{K_1}{K_2}}{\frac{A_b}{K_2} s + 1}$$

$$G(s) = \frac{4,02}{223,4s + 1}$$

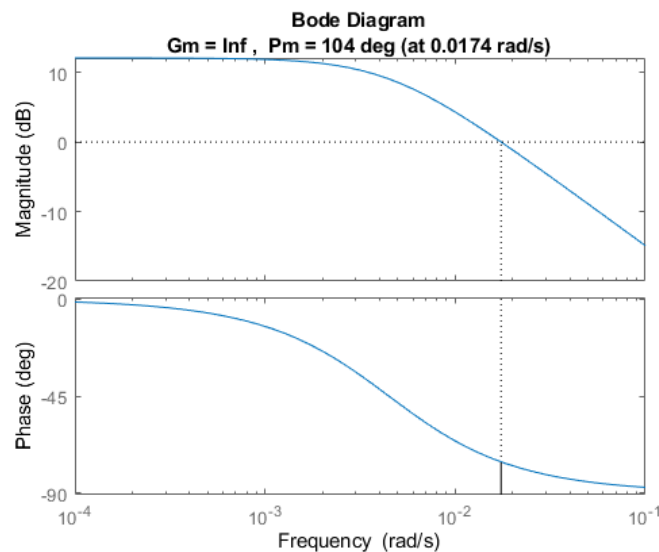


Figura 3. Diagrama de Bode da planta linearizada. Fonte: Autor.

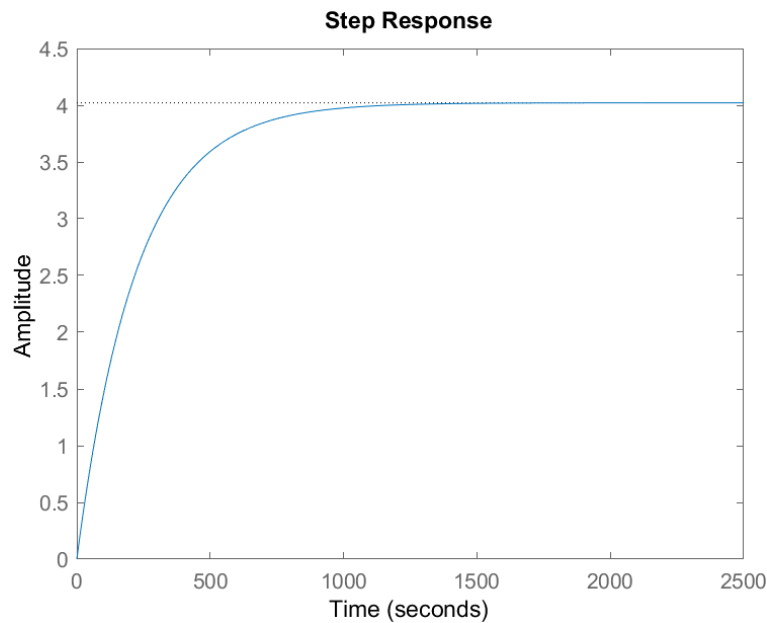


Figura 4. Resposta ao degrau da planta. Fonte: Autor.

2.2 PROJETO DO CONTROLADOR

2.2.1 PROJETANDO POR ALOCAÇÃO DE POLOS

O primeiro controlador a ser projetado será do tipo PI, pois com um sistema de primeira ordem gera um zero e dois polos em malha fechada.

Em malha fechada a resposta seria:

$$G_{mf}(s) = \frac{G(s) \left(\frac{K_p s + K_i}{s} \right)}{1 + G(s) \frac{(K_p s + K_i)}{s}} = \frac{\frac{4,02}{223,4} (K_p s + K_i)}{s^2 + \frac{1 + 4,02 K_p}{223,4} s + \frac{4,02 K_i}{223,4}}$$

Podemos fazer a alocação de polos com base na forma canônica da equação de 2ª ordem, do tipo

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n^2 s + \omega_n^2}$$

O zero presente na planta ocasionará um problema de *overshoot*, exceto se o zero estiver muito distante dos polos.

Para ter 0% de *overshoot* em um sistema de segunda ordem, $\xi = 1$. O tempo de subida será colocado em 400 segundos, portanto:

$$t_{rr} = 400 = \frac{4}{\xi\omega_n} \rightarrow \omega_n = \frac{4}{400} = 0,01$$

Igualando os dois polinômios temos que os ganhos K_p e K_i são, respectivamente, 0,863 e 0,005557.

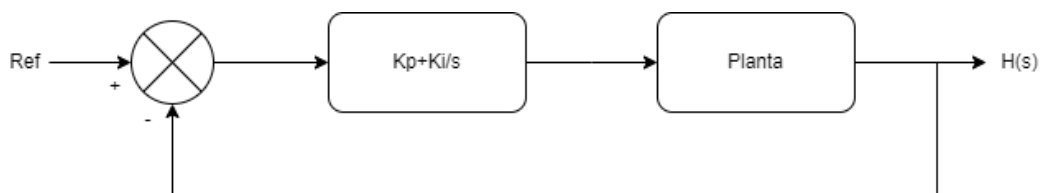


Figura 5. Topologia utilizada para o primeiro controlador. Fonte: Autor.

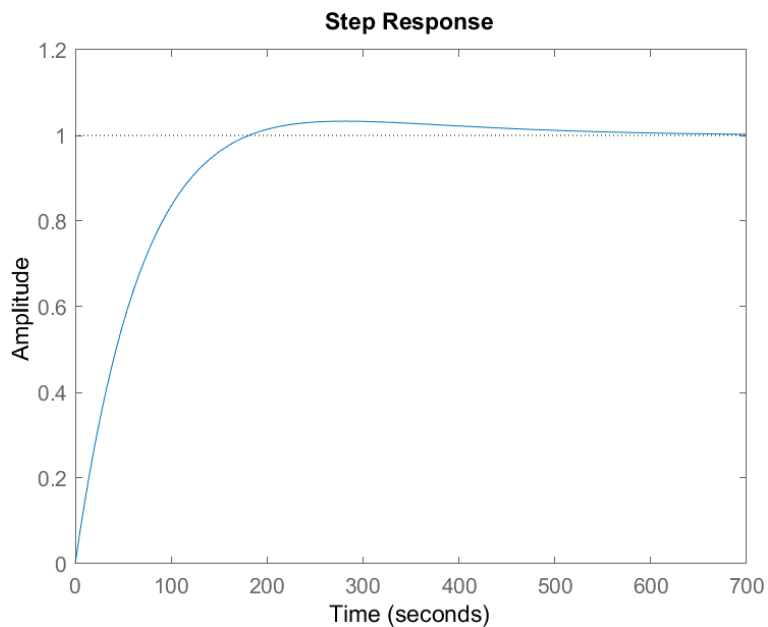


Figura 6. Resposta em malha fechada. Fonte: Autor.

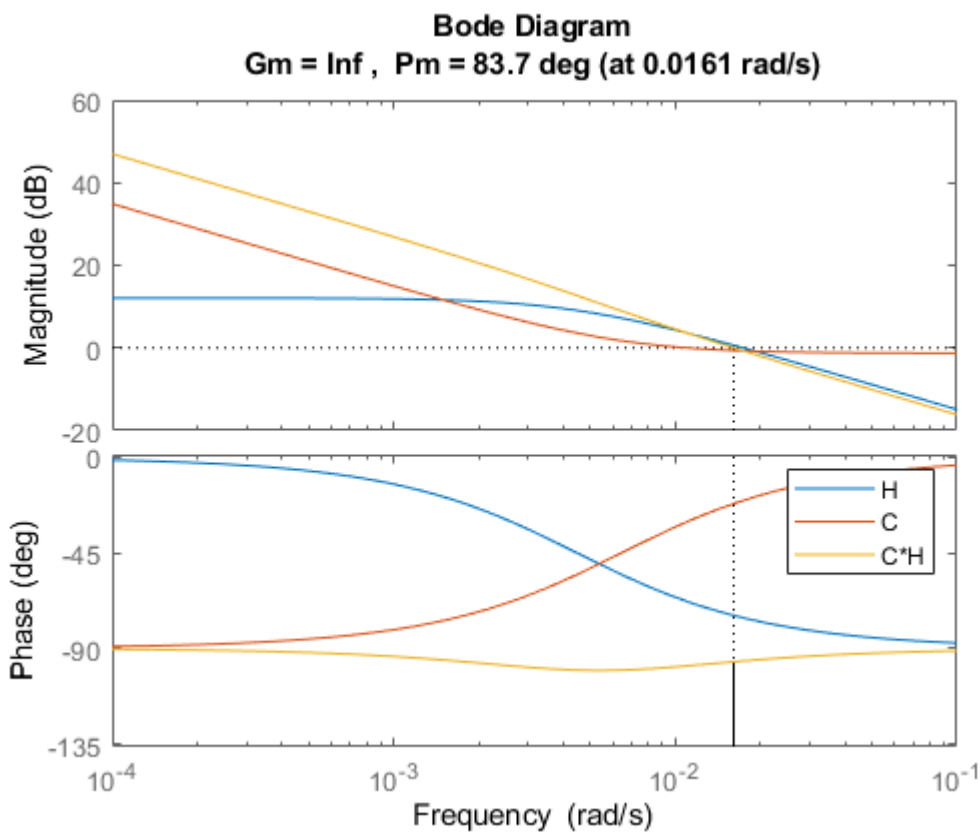


Figura 7. Resposta em frequência do controlador projetado. Fonte: Autor.

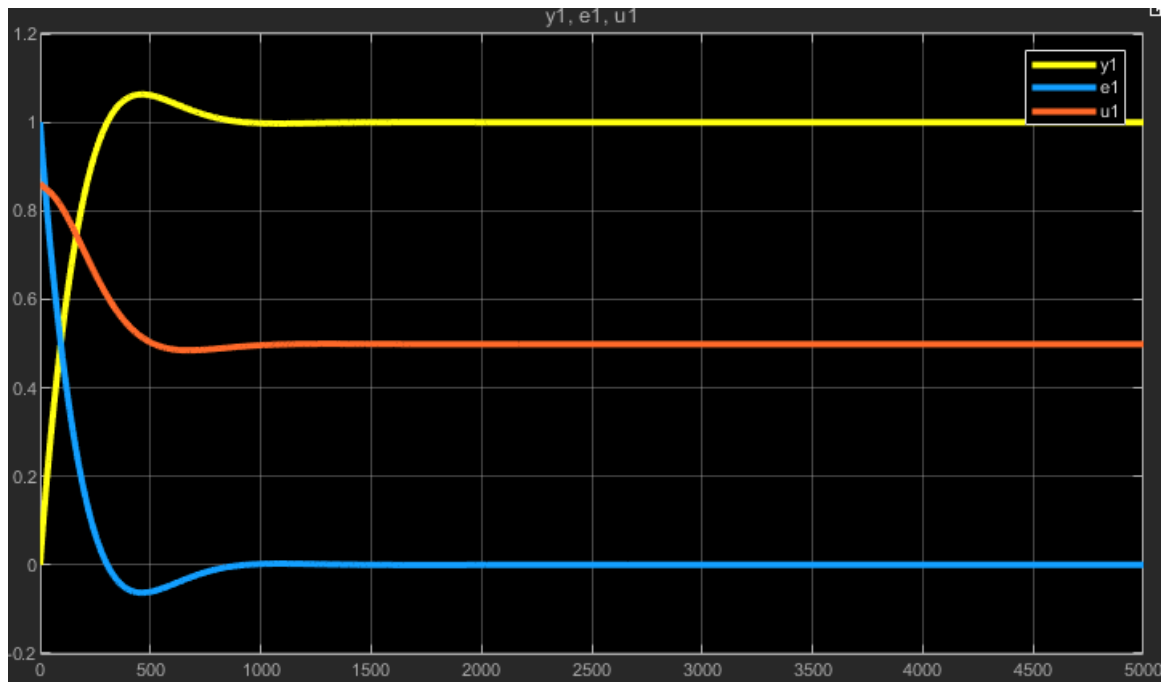


Figura 8. Resposta da planta não-linear. Fonte: Autor.

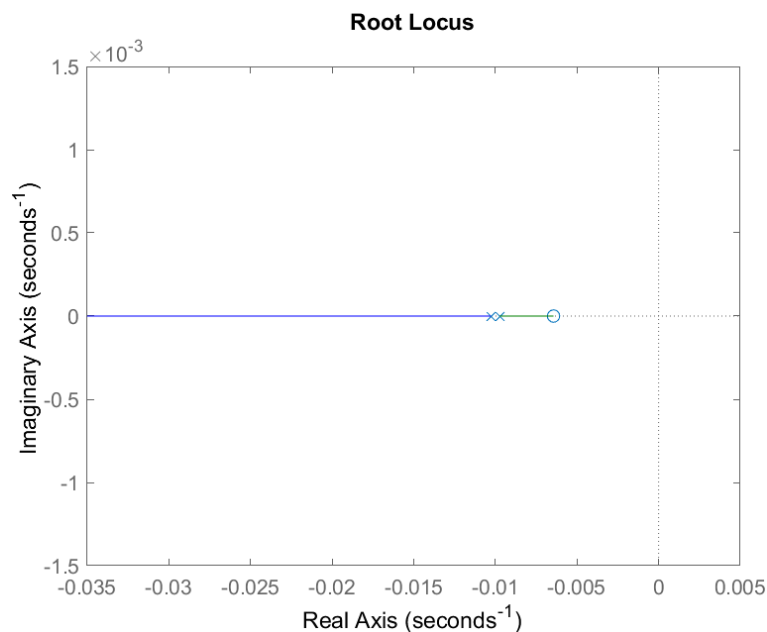


Figura 9. LGR do sistema malha fechada. Fonte: Autor.

2.2.2 PROJETANDO PI POR RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

Condições desejadas

Aumento da margem de fase no mínimo em 10° em um ponto com frequências menor que 10 rad/s .

Um controlador PI pode ser representado da seguinte forma:

$$\frac{K_p s + K_i}{s} = K_i \frac{\left(\frac{K_p}{K_i} s + 1\right)}{s} = K \frac{(as + 1)}{s}$$



Para adicionar margem de fase a planta, devemos observar o quanto o controlador incrementa em ganho e fase no sistema para estimar a nova frequência da margem de fase. Sabemos que:

Para $\omega \ll \frac{1}{a}$, o ganho do controlador será dado por uma reta que decresce $20\log(K)$ por década e cruza o eixo em $K \text{ rad/s}$

Para $\omega \gg \frac{1}{a}$, o ganho do controlador será dado por $|C(s)| = aK$

Para $\omega = \frac{1}{a}$, o ganho do controlador será dado por $|C(s)| = aK\sqrt{2}$

O ponto de frequência $\frac{1}{a}$ deve ser escolhido próximo ao da planta original para que a mesma contribua na margem de fase. O controlador PI apresenta fase de -45° no ponto $\frac{1}{a}$, para que haja um aumento na margem de fase, esse ponto deve estar localizado antes do ω_n da planta $G(s)$, além disso, no ponto onde se deseja colocar a margem ambas as plantas devem conter uma pequena fase individualmente. O ponto a ser alocado a nova posição para a margem de fase será de $0,005 \text{ rad/s}$. Nesse ponto o ganho da planta $G(s)$ é aproximadamente $8,56\text{dB}$ e tem fase de $-48,4^\circ$. Portanto, o ganho do controlador deve ser de $-8,56\text{dB}$ para adiantar o ponto. Considerando que o controlador esteja operando na situação 2, temos que:

$$aK = 10^{-\frac{8,56}{20}} = 0,373$$

O ponto $\frac{1}{a}$ foi ajustado manualmente, sendo alocado em frequências menores que o ponto da nova margem de fase, obtendo o seguinte resultado:

$$a^{-1} = 0,0015 \rightarrow a = 667$$

$$K = 5,59 * 10^{-4}$$

Ou na forma tradicional de ganhos K_p e K_i

$$K_i = 5,59 * 10^{-4}$$

$$\frac{K_p}{K_i} = a \rightarrow K_p = 0,373$$

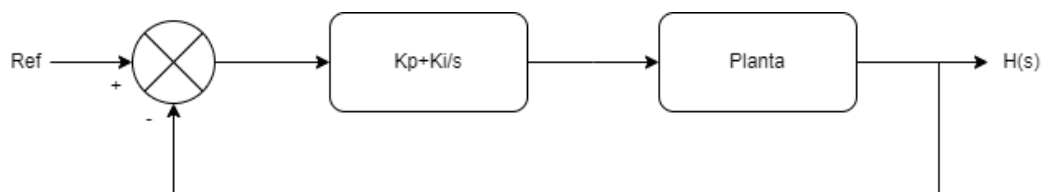


Figura 10. Topologia utilizada para o controlador projetado. Fonte: Autor.

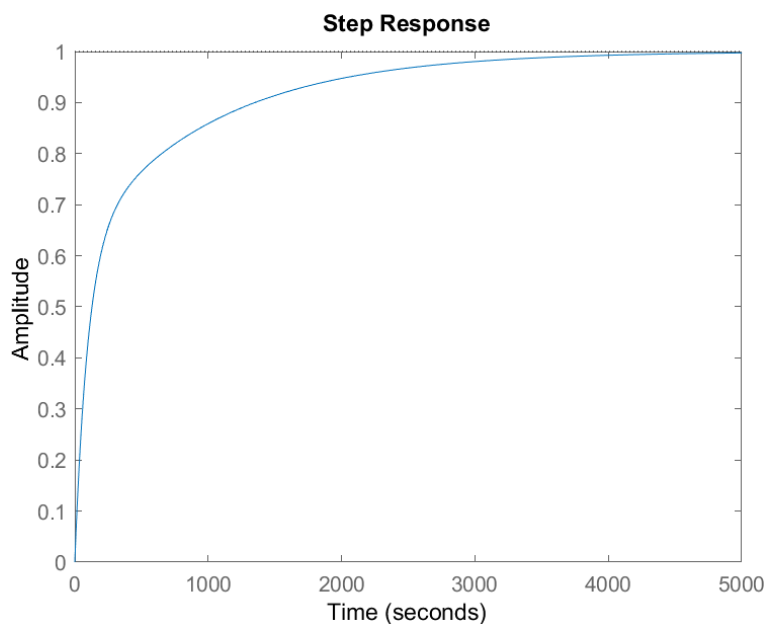


Figura 11. Resposta em malha fechada da planta linearizada. Fonte: Autor.

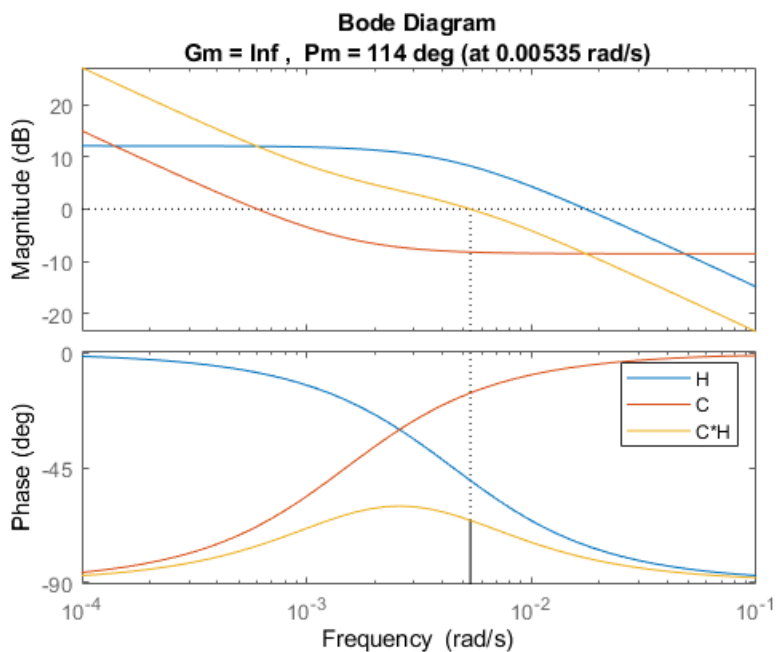


Figura 12. Resposta em frequência da planta com o controlador. Fonte: Autor.

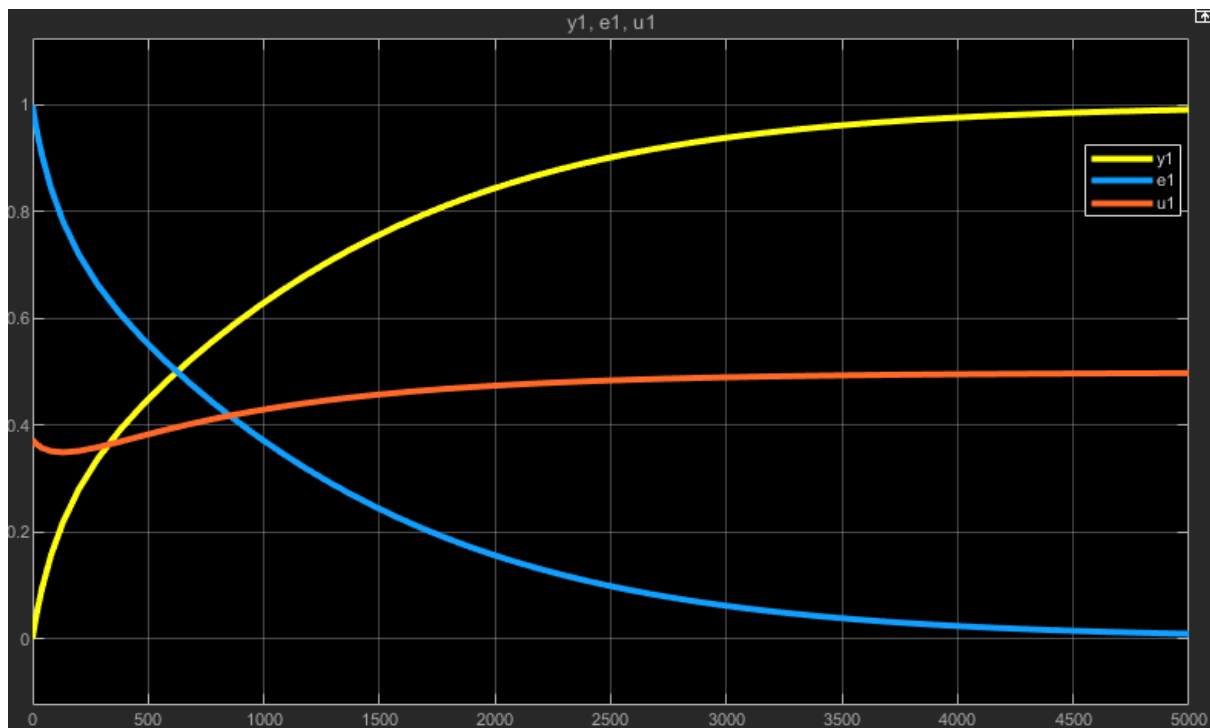


Figura 13. Resposta do sistema em malha fechada com o controlador. Fonte: Autor.

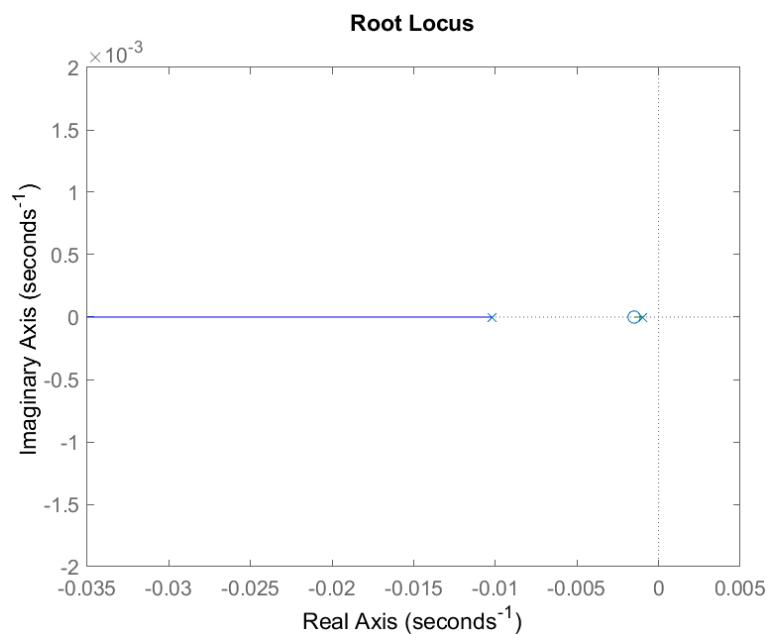


Figura 14. LGR do sistema em malha fechada. Fonte: Autor.

2.2.3 ADICIONANDO PERTURBAÇÕES AO SISTEMA

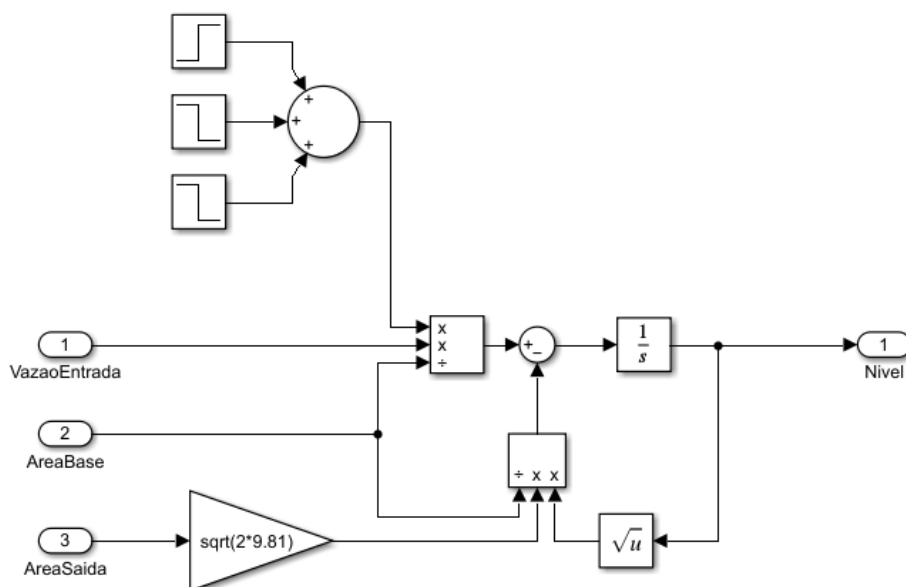


Figura 15. Perturbações adicionadas a vazão de entrada. Fonte: Autor

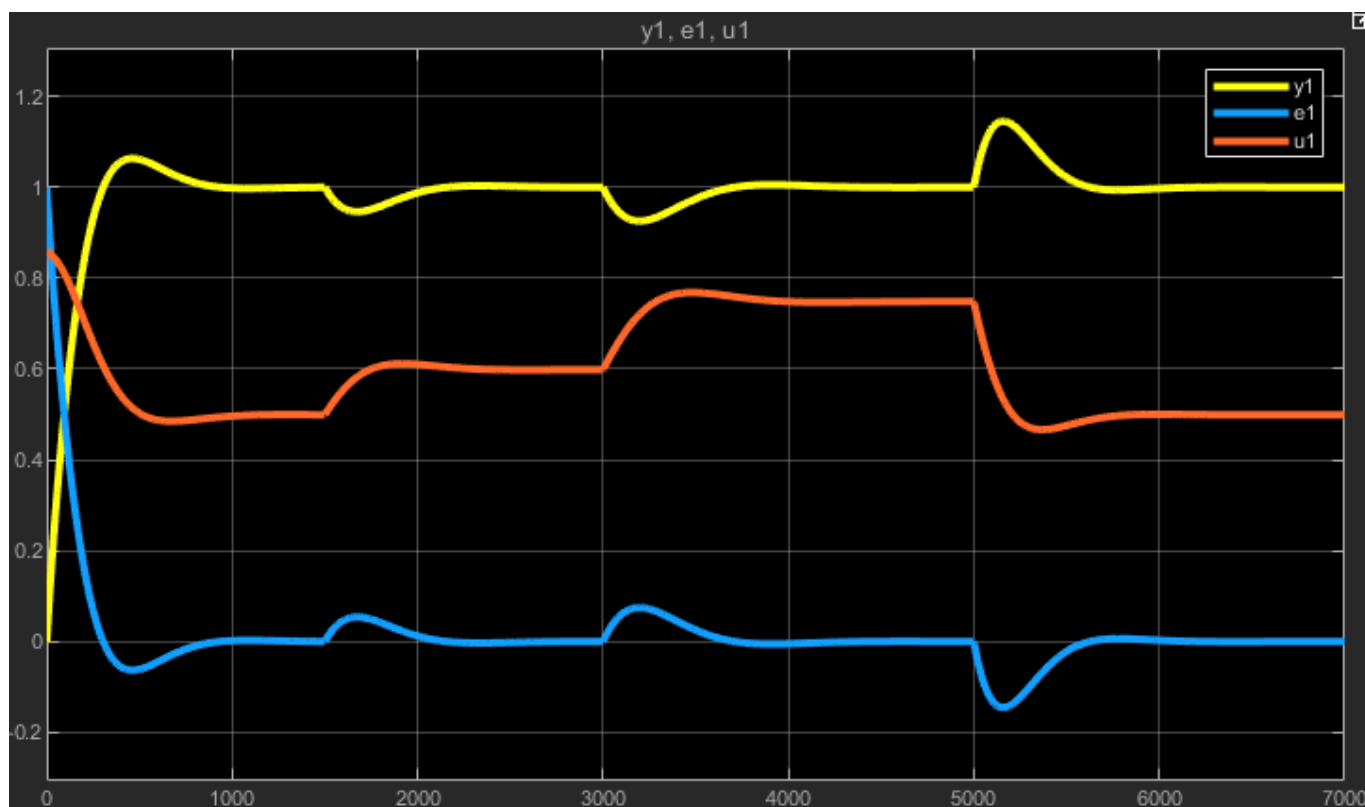


Figura 16. Resposta a perturbações utilizando o controlador projetado por alocação de polos. Fonte: Autor.

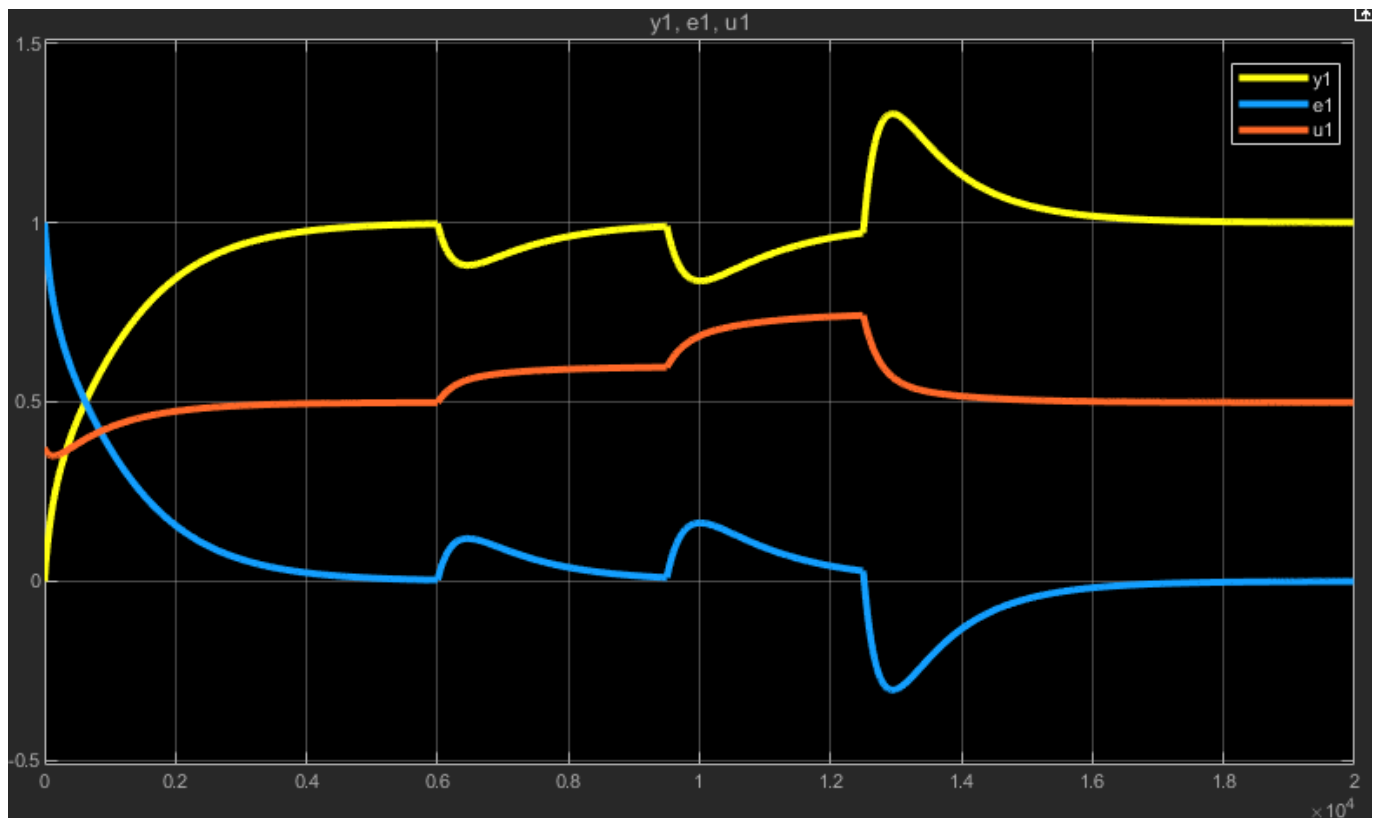


Figura 17. Resposta a perturbações utilizando o controlador projetado por resposta em frequência. Fonte: Autor.

3 CONCLUSÃO

Os controladores projetados de duas formas diferentes a partir da linearização da equação dinâmica do sistema foram capazes de atingir o objetivo de realizar controle da planta. O primeiro controlador, projetado por alocação de polos, tornou o sistema menos robusto diminuindo a margem de fase e apresentou maior overshoot, apesar da rápida resposta em relação ao controlador projetado pela resposta em frequência, que diminuiu o overshoot, entretanto tornou a resposta da planta muito mais lenta. Cabe ao projetista decidir o que é mais interessante para o seu sistema, precisão sem overshoot com mais robustez ou melhor tempo de resposta com maior robustez.