

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI
BOUMEDIENE



CONCEPTION ET COMPLEXITÉ DES ALGORITHMES

Rapport de Travaux Pratiques N°5
Projet : Algorithmes de Tri.

Binôme
DJEBRI MOUNIRA
RAMOUL SAMY RAYAN

13 décembre 2018

Matériel

Tout d'abord il est important de noter que les résultats obtenus dépendent de la machine utilisée, ici nous travaillons sur une machine ayant les caractéristiques suivantes :

Intel Core i7-8550U de 8e génération (8 Mo de mémoire cache, jusqu'à 4 GHz) avec 16 Go de mémoire DDR4. OS : Windows 10.

Pile sous Windows

Pour les besoins du TP nous avons dû augmenter la taille de la pile attribuée par défaut par Windows, pour cela nous avons suivi les étapes suivantes : Dans CodeBlocks : aller dans les paramètres - *compilateur* - *Accéder à l'onglet Linker Settings et ajouter la commande* " - *Wl, -stack, taille* "

1 Les algorithmes de Tri

En informatique, un algorithme de tri est un algorithme qui place les éléments d'une liste dans un certain ordre. Le tri est extrêmement important en informatique pour la même raison qu'il l'est au quotidien. Il est plus facile et plus rapide de rechercher des éléments dans une liste triée que dans une liste non triée. Trier une liste d'éléments par ordre croissant ou décroissant peut aider un humain ou un ordinateur à trouver rapidement les éléments dans cette dernière. La plupart des données que nous traitons, qu'il s'agisse de chiffres ou de texte, impliquent la saisie et la récupération d'informations pertinentes de manière efficace. Le tri devient crucial dans de tels cas. Il existe plusieurs algorithmes de tri pouvant être utilisés dans un programme pour trier un tableau. Lors de la conception ou du choix d'un algorithme de tri, l'un des objectifs est de minimiser la quantité de travail nécessaire pour trier la liste des éléments. Le coût du tri peut être mesuré par le nombre d'éléments de tableau devant être comparés les uns aux autres ou par le nombre de fois où deux éléments de tableau doivent être permutés. Dans certains cas, les comparaisons coûtent plus cher que les échanges alors que dans d'autres cas, les échanges peuvent être plus coûteux que les comparaisons. Dans ce projet nous étudierons 5 méthodes de tri (Tri par Insertion, Tri à Bulles, Tri Fusion, Tri Rapide et enfin le Tri par Tas), que nous comparerons afin de voir lequel choisir selon nos besoins.

2 Partie I :

3 Tri par Insertion

1 Description de la méthode de tri par insertion :

Le tri par sélection est un algorithme de tri simple qui consiste à diviser une liste en deux parties, la partie triée à l'extrémité gauche et la partie non triée à l'extrémité droite. Initialement, la partie triée est vide et la partie non triée est la liste complète. Le plus petit élément est sélectionné dans le tableau non trié et échangé avec l'élément le plus à gauche, et cet élément devient une partie du tableau trié. Ce processus continue de déplacer les limites de tableau non triées d'un élément vers la droite.



2 Développement de l'algorithme.

```

Algorithme Tri Insertion ;
Entrée: tab[1..n] d'entier;
Sortie: tab trié;
VAR i,j,v,stock :entier;

DEBUT
  i:=0;
  int v:=0;
  int j:=0;
  int stock:=0;
  Pour (i=1 à n)
    Faire
      SI(tab[i]<tab[i-1]) Alors

        j:=i-1;
        stock:=tab[i];
        Tantque(tab[j]>stock && j>=0)
          Faire
            tab[j+1]:=tab[j];
            j--;
          Fait
        tab[j+1]:=stock;

      Fsi
    Fait
  FIN ;

```

3 Calcul de Complexité :

3.1 Calcule des complexités temporelles en notation asymptotique de Landau O (Grand O :

1. Au Pire Cas : Le pire cas est quand tableau est trié dans l'ordre inverse.

Il y a au pire i comparaisons pour chaque i variant de 2 à n , (i étant la longueur de la partie déjà rangée) La complexité au pire cas est donc égale à la somme $i = 2+3+...+N$.

$$CT(n) = 2 + 3 + 4 + ... + N = \frac{N(N+1)}{2} - 1$$

$$CT(n) = \frac{N^2+N-2}{2}$$

La complexité au pire cas en nombre de comparaison est de l'ordre de N^2 .

Ce qui donne en notation Landau $O(N^2)$.

2. Au Meilleur Cas :

Le meilleur des cas est lorsque le tableau est déjà trié. Pour l'itération, le premier élément restant de l'entrée est comparé à l'élément le plus à droite de la sous-liste triée du tableau uniquement. Dans ce cas l'algorithme ne rentre jamais dans la boucle tant que, il y a donc $N-1$ comparaisons et au pire N affectations. $CT(n) = N + (N+1) = 2N + 1$

La complexité au meilleur cas en nombre de comparaison est de l'ordre de N ,

Ce qui donne en notation landau $O(N)$.

3. La complexité moyenne :

Pour $i=2$ à N , le nombre moyen total de comparaison est égal à : $CT(n) = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n i + 1$

$$CT(n) = \frac{N^2+3N-4}{4}$$

La complexité moyenne est de l'ordre de N^2 .

Ce qui donne en notation landau $O(N^2)$.

3.2 Calcule des complexités spatiales en notation exacte et en notation asymptotique de Landau O (Grand O)

L'algorithme de tri par insertion n'utilise que le tableau à trier de taille N ainsi que 4 variables de type entier.

Sur CodeBlocks un entier est sur 8 octets. Nous obtenons la complexité spatiale suivante :

$$CS(N) = 8(N + 4) \text{ octets}$$

Ainsi $CS(n) = O(N)$.

4 Développement de programme correspondant avec le langage C.

```
int tri_insertion(int tab [], int n)
{
    int i=0;
    int v=0;
    int j=0;
    int stock=0;
    for(i=1;i<n;i++)
    {
        if(tab[i]<tab[i-1])
        {
            j=i-1;
            stock=tab[i];
```

```

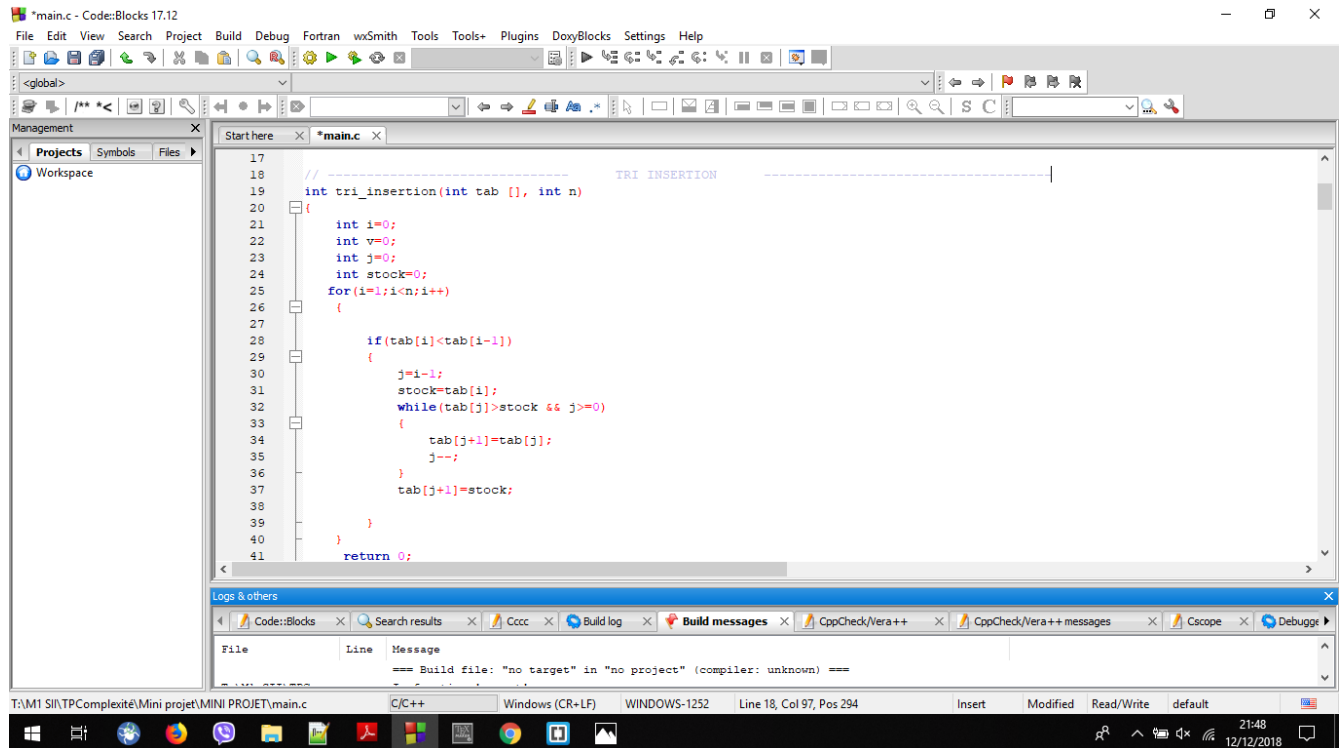
        while(tab[j]>stock && j>=0)
        {
            tab[j+1]=tab[j];
            j--;
        }
        tab[j+1]=stock;

    }

}

return 0;
}

```

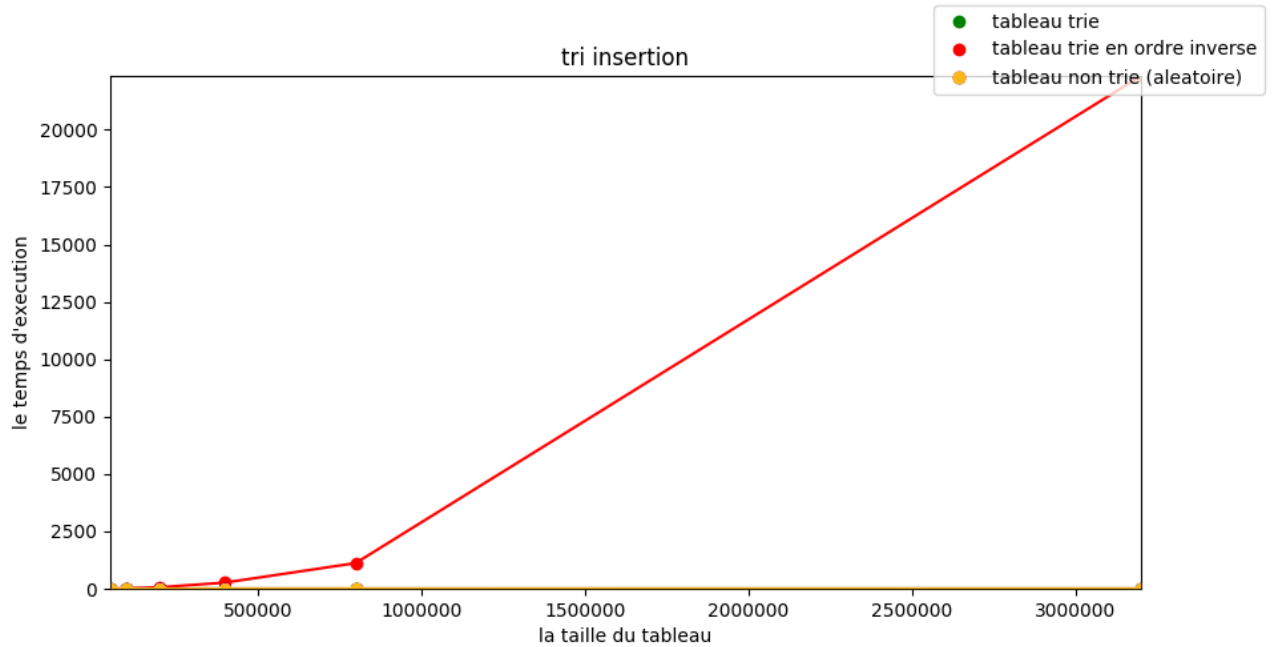


5 Mesure des temps d'exécution.

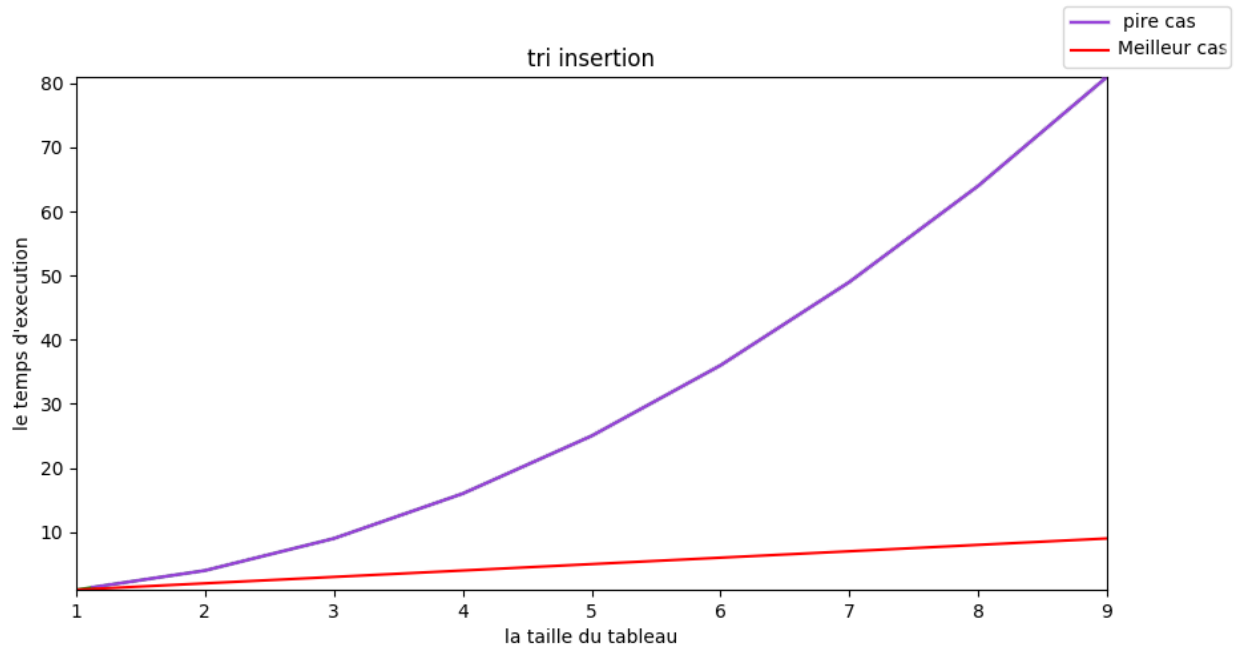
Taille du Tableau (N) :	50000	100000	200000	400000	800000	1600000	
Temps (bon ordre) :	0.000115	0.000190	0.000896	0.001033	0.003880	0.006765	
Temps (Aléatoire) :	0.000701	0.003007	0.006067	0.016099	0.033002	0.086016	
Temps (inverse) :	3.943	16.847	62.723	267.101	1099.756	4700.372	

Taille du Tableau (N) :	3200000	6400000	12800000	25600000	51200000	10240000	20480000
Temps (bon ordre) :	0.0160000	0.032600	0.052272	0.167922	0.400770	0.74150	1.48089
Temps (Aléatoire) :	0.179991	0.358023	0.746764	1.65260	3.794566	7.589934	16.182
Temps (inverse) :	19904.098	86700.329	346755.319	1508777.938	6789653.703		

5.1 Représentation des graphes de la variation du temps d'exécution :



5.2 Représentation du graphe Gf de la complexité théorique :



6 Interprétation des résultats.

6.1 Remarque et déduction d'une fonction $T(n)$ reliant n au temps d'exécution.

On peut constater que les temps d'exécution T sont à peu près multipliés par 4 lorsque N est multiplié par 2 dans le cas des tableaux en ordre inverse.

$$T1(x * N) = x^2 * T(N), N \text{ appartenant à l'intervalle } [50000 - 2048000000]$$

Alors que dans le cas d'un tableau dans le bon ordre ou aléatoire lorsque la taille du tableau est doublée, le temps d'exécution est lui aussi doublé.

On en déduit que le temps d'exécution est proportionnel à N , ce que l'on peut représenter par la formule suivante :

$$T2(x * N) = x * T(N), N \text{ appartenant à l'intervalle } [50000 - 2048000000]$$

6.2 Comparaison de la complexité théorique et expérimentale.

Comme les résultats expérimentales sont majorées par les données du pire cas et minorées par les données au meilleur cas et se rapprochent donc de la complexité moyenne, on en conclue que les mesures expérimentales sont conformes au modèle théorique étudié.

4 Tri à Bulles

7 Description de la méthode de tri à bulles :

Une variante du tri par sélection est le tri à bulle. L'algorithme de tri à bulle est un algorithme basé sur la comparaison qui effectue plusieurs passages dans une liste. Il compare les éléments adjacents et échange ceux qui ne sont pas en ordre. Chaque passage dans la liste place la valeur suivante la plus grande à sa place. Autrement dit, l'algorithme suit les étapes suivantes :

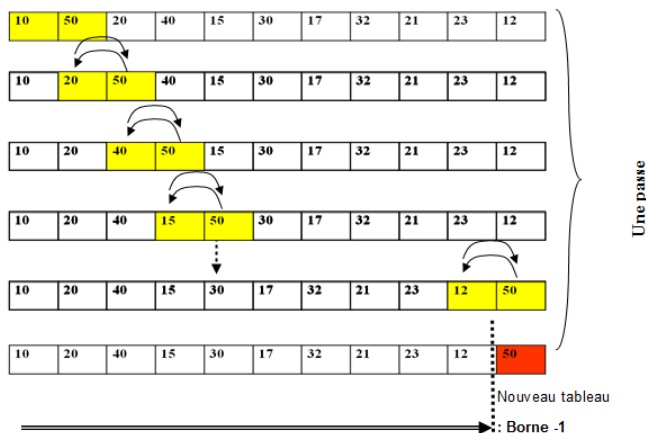
- Il parcourt le tableau et compare les éléments consécutifs. Lorsque deux éléments consécutifs ne sont pas dans l'ordre, ils sont échangés.

- Après un premier parcours complet du tableau, le plus grand élément est forcément en fin de tableau, à sa position définitive.

- On reparcourt le tableau à nouveau, en s'arrêtant à l'avant-dernier élément.

- Après ce deuxième parcours, les deux plus grands éléments sont à leur position définitive.

Il faut donc répéter les parcours du tableau, jusqu'à ce que tous les éléments sont à leurs positions



8 Développement de l'algorithme.

```

Algorithme Tri à Bulles ;
Entrée: tab[1..n] d'entier;
Sortie: tab trié;
VAR i,j,v,stock :entier;

```

```

DEBUT

```

```

    i:=0;

```

```

    v:=0;
    j:=0;
    stock:=0;
Pour(i=1 à n)
    Faire
        SI(tab[i]<tab[i-1])
        Alors
            stock:=tab[i];
            tab[i]:=tab[i-1];
            tab[i-1]:=stock;
            i:=0;

    Fsi
Fait
FIN ;

```

9 Calcul de Complexité :

9.1 Calcule des complexités temporelles en notation asymptotique de Landau O (Grand O :

1. Au Pire Cas :

Le pire cas (N itérations) est atteint lorsque le plus petit élément est à la fin du tableau, c-à-d lorsque le tableau est trié dans l'ordre inverse. En effet, N-1 comparaisons seront faites sur lors du premier passage, N-2 lors du second, et ainsi de suite. $CT(n) = \sum_{i=2}^N i - 1$

$$CT(n) = \frac{N^2 - N}{2}$$

Ce qui donne en notation landau $O(N^2)$.

2. Au Meilleur Cas :

Le meilleur cas est atteint quand le tableau est déjà trié. Dans ce cas, le tri à bulle fera N comparaisons et 0 échange. Par conséquent, la complexité est linéaire. Ce qui donne en notation landau $O(N)$.

3. La complexité moyenne :

Le nombre total d'itérations de l'algorithme est égal à : $CT(n) = \sum_{i=2}^n i$

$$CT(n) = \frac{N^2 + N - 2}{2}$$

En effet, le nombre d'échanges de paires d'éléments successifs est égal au nombre d'inversions, c'est-à-dire de couples (i, j) tels que $i > j$ et $T(i) < T(j)$. Ce nombre est indépendant de la manière d'organiser les échanges. Lorsque l'ordre initial des éléments du tableau est aléatoire, il est en moyenne égal à $n(n-1)/4$. Donc la complexité moyenne est de l'ordre de N^2 .

Ce qui donne en notation landau $O(N^2)$.

9.2 Calcule des complexités spatiales en notation exacte et en notation asymptotique de Landau O (Grand O)

L'algorithme de tri par bulles n'utilise que le tableau à trier de taille N ainsi que 4 variables de type entier.

Sur CodeBlocks un entier est sur 8octets. Nous obtenons la complexité spatiale suivante :

$$CS(N) = 8(N + 4) \text{ octets}$$

Ainsi $CS(n) = O(N)$.

10 Développement de programme correspondant avec le langage C.

```

int tri_bulles(int tab [], int n)
{

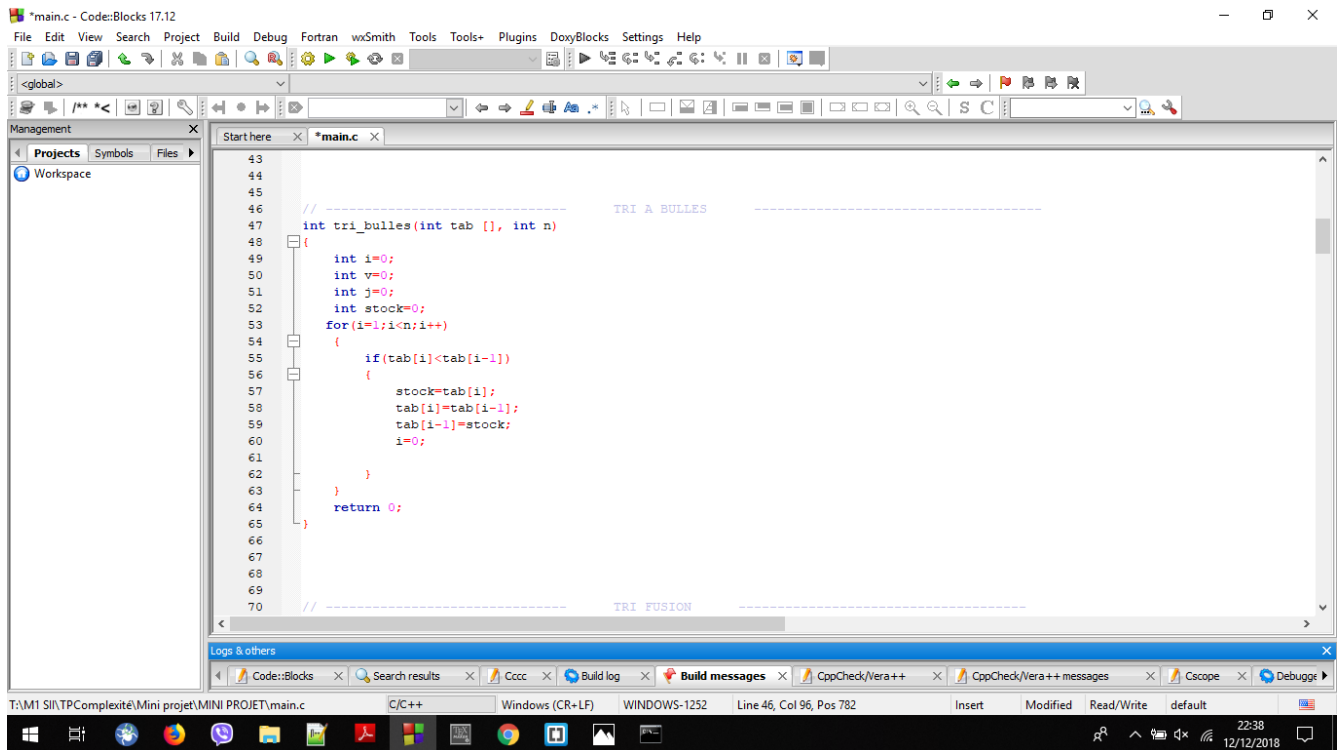
```



```

int i=0;
int v=0;
int j=0;
int stock=0;
for(i=1;i<n;i++)
{
    if(tab[i]<tab[i-1])
    {
        stock=tab[i];
        tab[i]=tab[i-1];
        tab[i-1]=stock;
        i=0;
    }
}
return 0;
}

```

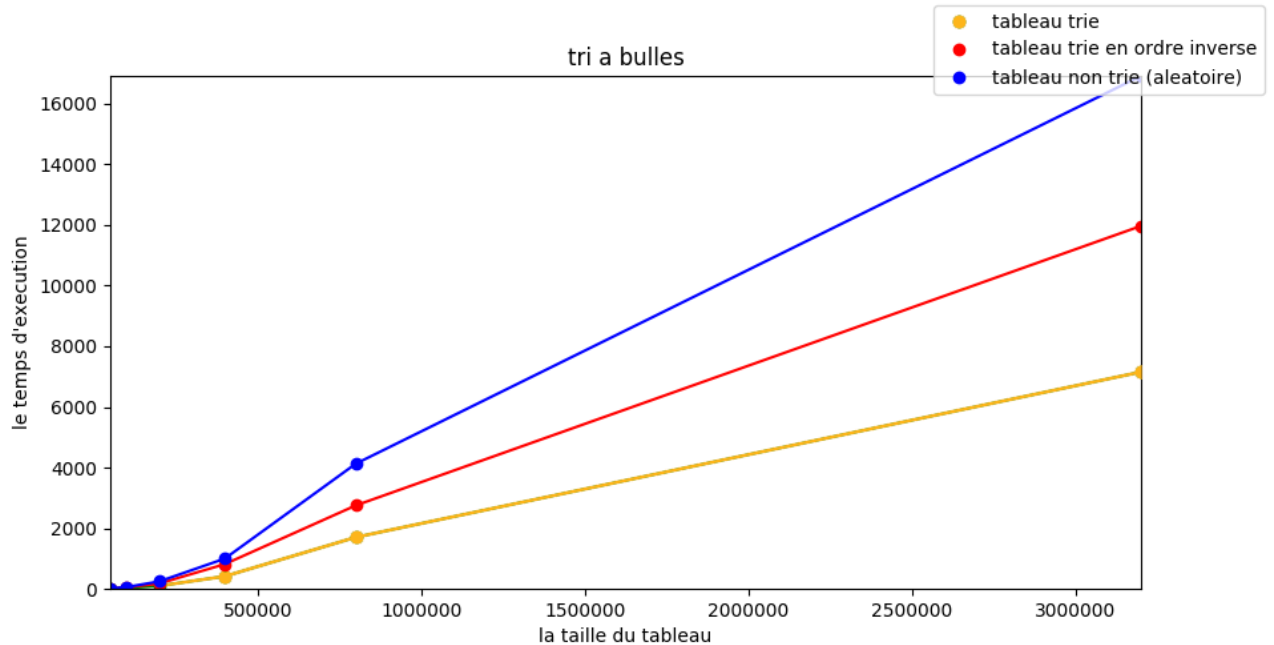


11 Mesure des temps d'exécution.

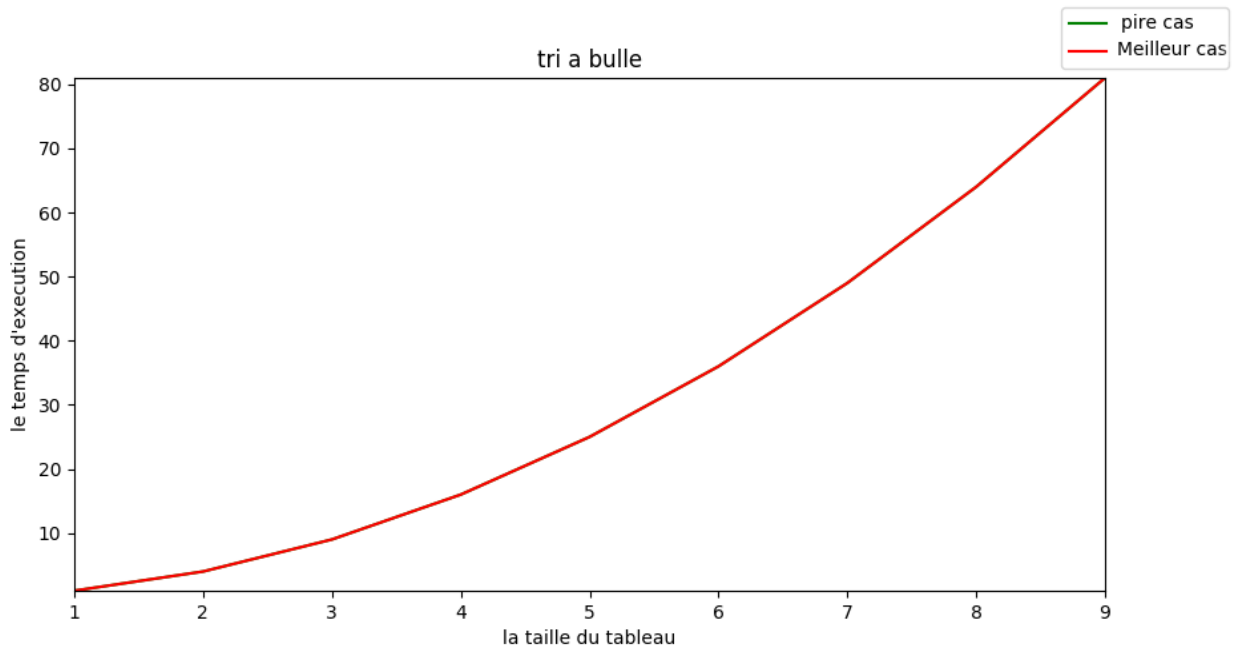
Taille du Tableau (N) :	50000	100000	200000	400000	800000	1600000
Temps (bon ordre) :	6.402	23.349	100.354	390.419	1698.248	7152.6874
Temps (Aléatoire) :	15.629	60.603	248.038	1008.726	4110.610	16915.0017
Temps (inverse) :	10.7899	51.5167	160.093	816.74278	2749.2962	11968.141

Taille du Tableau (N) :	3200000	6400000	12800000	25600000	51200000
Temps (bon ordre) :	30100.023	120468.012	503126.6300	2124209.017	8098673.092
Temps (Aléatoire) :	66013.204	279403.476	1108020.906	4349074.095	17396596.370
Temps (inverse) :	47902.567	191096.632	870844.156	3188029.524	12309318.120

11.1 Représentation des graphes de la variation du temps d'exécution :



11.2 Représentation du graphe Gf de la complexité théorique :



12 Interprétation des résultats.

12.1 Remarque et déduction d'une fonction $T(n)$ reliant n au temps d'exécution.

On peut constater que les temps d'exécution T sont à peu près multipliés par 4 lorsque N est multiplié par 2 et cela quelque soit l'ordre des éléments du tableau (ordonnés, inverses ou aléatoire)

$$T(x * N) = x^2 * T(N), \text{ avec } N \in [50000 - 2048000000]$$

(x étant la tangente d'un point sur le graphe).

12.2 Comparaison de la complexité théorique et expérimentale.

Comme les résultats expérimentale sont majorées par les données du pire cas et minorées par les données au meilleur cas et se rapprochent donc de la complexité moyenne, on en conclue que les mesures expérimentales sont conformes au modèle théorique étudié.

5 Tri par Fusion

13 Description de la méthode de tri par fusion :

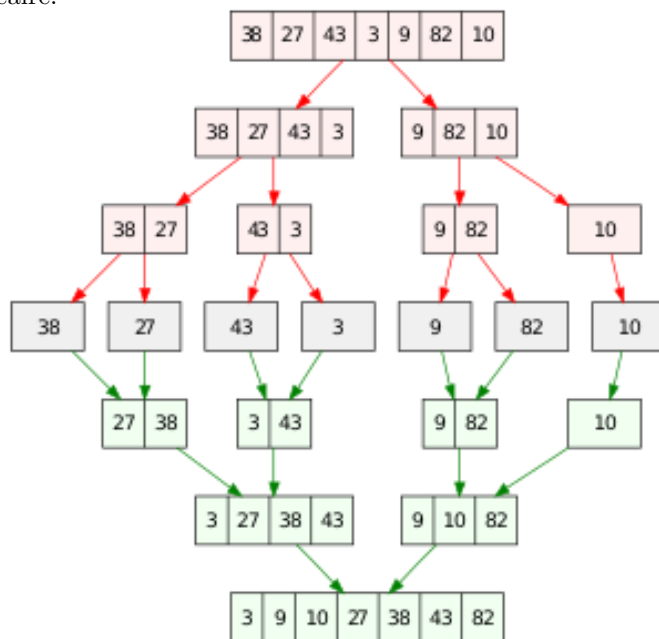
Le tri par fusion suit la règle de Diviser pour Régner. Lors du tri par fusion, la liste non triée est divisée en N sous-listes, chacune comportant un élément, car une liste d'un élément est considérée comme triée. Ensuite, il fusionne à plusieurs reprises ces sous-listes pour produire de nouvelles sous-listes triées, et enfin, une liste triée est produite. Le principe de tri par fusion est résumé dans ces points :

-On divise en deux moitiés la liste à trier jusqu'à ce qu'elle ne puisse plus être divisée.

-On trie chacune d'entre elles.

-On fusionne les deux moitiés obtenues pour reconstituer la liste triée.

Le tri fusion repose fondamentalement sur l'algorithme de fusionnement de deux listes triées qui est de complexité linéaire.



14 Développement de l'algorithme.

Algorithme Tri par Fusion ;

Entrée: tab[1..n] d'entier; debut, fin: entiers;

Sortie: tab trié;

VAR i :entier;

DEBUT

SI (debut < fin)

Alors

i := debut+(fin-debut)/2;

tri_fusion(tab, debut, i); //Appel de la fonction Tri par Fusion

tri_fusion(tab, i+1, fin); //Appel de la fonction Tri par Fusion

fusion(tab, debut, i, fin); //Appel de la fonction Fusion qui se charge de fusionner les tableaux tr

Fsi

FIN;

15 Calcul de Complexité :

15.1 Calcule des complexités temporelles en notation asymptotique de Landau O (Grand O :

Comme le Tri par Fusion a une complexité stable, il n'y a ni pire ni meilleur cas. Le tri par fusion est un algorithme récursif et la complexité temporelle peut être exprimée par la relation de récurrence suivante.

$$T(n) = 2T(n/2) + O(n)$$

On peut aussi voir le problème comme s'il s'agissait d'un algorithme itératif, ainsi on a : Le tri par fusion est un algorithme qui se base sur la politique de « diviser pour régner ». On résume ça en 3 étapes – La première étape de division calcule le milieu du tableau. Chacune de ces étapes se fait en $O(1)$ fois. L'étape « conquérir » trie récursivement deux sous-tableaux de $N/2$ éléments. L'étape de fusion fusionne n éléments, ce qui prend un temps $O(N)$. pour chaque niveau de haut en bas, la méthode de fusion au niveau 2 s'effectue sur 2 sous-tableaux de longueur $n/2$ chacun. La complexité est ici de $2 * (cN/2) = cN$. La fusion au niveau 3 s'effectue sur 4 sous-tableaux de longueur $N/4$ chacun. La complexité ici est $4 * (cN/4) = cN$ et ainsi de suite ... Maintenant, la hauteur de cet arbre est $(\log N + 1)$ pour un n donné. La complexité globale est donc de $(\log N + 1) * (cN)$. C'est $O(N \log N)$ pour l'algorithme de tri par fusion. **Ce qui donne en notation landau $O(N \log(N))$.**

15.2 Calcule des complexités spatiales en notation exacte et en notation asymptotique de Landau O (Grand O)

L'algorithme de tri par fusion n'utilise que le tableau à trier de taille N ainsi que 4 variables de type entier.

Sur CodeBlocks un entier est sur 8 octets. Nous obtenons la complexité spatiale suivante :

$CS(N) = 8(N + 3)$ octets

Ainsi $CS(n) = O(N)$.

16 Développement de programme correspondant avec le langage C.

```
int * concat(int arr [], int nbr ,int j,int n)
{
    int tab2[n+1];
    int i=0;
    if(j==1)
    {
        tab2[0]=nbr;
        for(i=1;i<n+1;i++)
        {
            tab2[i]=arr[i-1];
            j++;
        }
        return tab2;
    }
    else if(j==2)
    {
        for(i=0;i<n-1;i++)
        {
            tab2[i]=arr[i];
        }
        tab2[n]=j;
        return tab2;
    }
}
```

```

    return tab2;
}

void fusion(int tab[],int l,int m, int r)
{
    int i, j, k;
    int n1 = m - l + 1;
    int n2 = r - m;
    int tab1[n1], tab2[n2];
    for (i = 0; i < n1; i++)
        tab1[i] = tab[l + i];
    for (j = 0; j < n2; j++)
        tab2[j] = tab[m + 1 + j];
    i = 0;
    j = 0;
    k = l;
    while (i < n1 && j < n2)
    {
        if (tab1[i] <= tab2[j])
        {
            tab[k] = tab1[i];
            i++;
        }
        else
        {
            tab[k] = tab2[j];
            j++;
        }
        k++;
    }
    while (i < n1)
    {
        tab[k] = tab1[i];
        i++;
        k++;
    }

    while (j < n2)
    {
        tab[k] = tab2[j];
        j++;
        k++;
    }
}

void tri_fusion(int tab[],int debut,int fin)
{
    if (debut < fin)
    {
        int i = debut+(fin-debut)/2;

        tri_fusion(tab, debut, i);
        tri_fusion(tab, i+1, fin);
        fusion(tab, debut, i, fin);
    }
}

```

*main.c - Code::Blocks 17.12

File Edit View Search Project Build Debug Fortran wxSmith Tools Tools+ Plugins DoxyBlocks Settings Help

<global> tri_bules(int tab[], int n): int

Management

Projects Symbols Files

Workspace

```

70 // TRI FUSION
71 int * concat(int arr [], int nbr ,int j,int n)
72 {
73     int tab2[n+1];
74     int i=0;
75     if(j==1)
76     {
77         tab2[0]=nbr;
78         for(i=1;i<n+1;i++)
79         {
80             tab2[i]=arr[i-1];
81             j++;
82         }
83         return tab2;
84     }
85     else if(j==2)
86     {
87         for(i=0;i<n-1;i++)
88         {
89             tab2[i]=arr[i];
90         }
91         tab2[n]=j;
92         return tab2;
93     }
94     return tab2;
95 }
96
97 void fusion(int tab[],int l,int m, int z)

```

Logs & others

Code::Blocks Search results Cccc Build log Build messages CppCheck/Vera++ CppCheck/Vera++ messages Cscope Debugge

T:\M1 SI\TPComplexité\Mini projet\MINI PROJET\main.c C/C++ Windows (CR+LF) WINDOWS-1252 Line 47, Col 1, Pos 783 Insert Modified Read/Write default 23:14 12/12/2018

*main.c - Code::Blocks 17.12

File Edit View Search Project Build Debug Fortran wxSmith Tools Tools+ Plugins DoxyBlocks Settings Help

<global> fusion(int tab[], int l, int m, int z): void

Management

Projects Symbols Files

Workspace

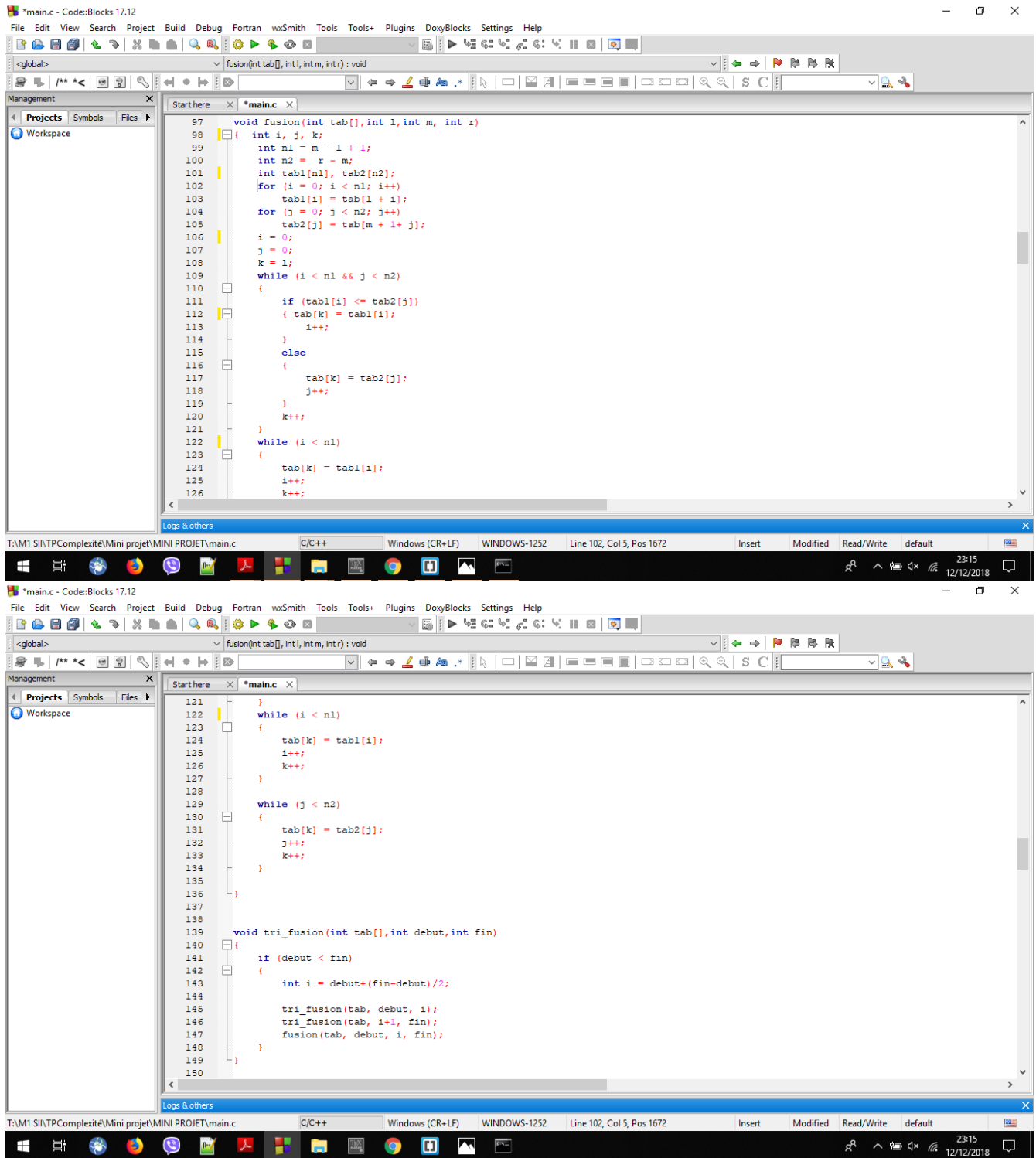
```

70 // TRI FUSION
71 int * concat(int arr [], int nbr ,int j,int n)
72 {
73     int tab2[n+1];
74     int i=0;
75     if(j==1)
76     {
77         tab2[0]=nbr;
78         for(i=1;i<n+1;i++)
79         {
80             tab2[i]=arr[i-1];
81             j++;
82         }
83         return tab2;
84     }
85     else if(j==2)
86     {
87         for(i=0;i<n-1;i++)
88         {
89             tab2[i]=arr[i];
90         }
91         tab2[n]=j;
92         return tab2;
93     }
94     return tab2;
95 }
96
97 void fusion(int tab[],int l,int m, int z)
98 { int i, j, k;
99   int n1 = m - l + 1;

```

Logs & others

T:\M1 SI\TPComplexité\Mini projet\MINI PROJET\main.c C/C++ Windows (CR+LF) WINDOWS-1252 Line 102, Col 5, Pos 1672 Insert Modified Read/Write default 23:15 12/12/2018

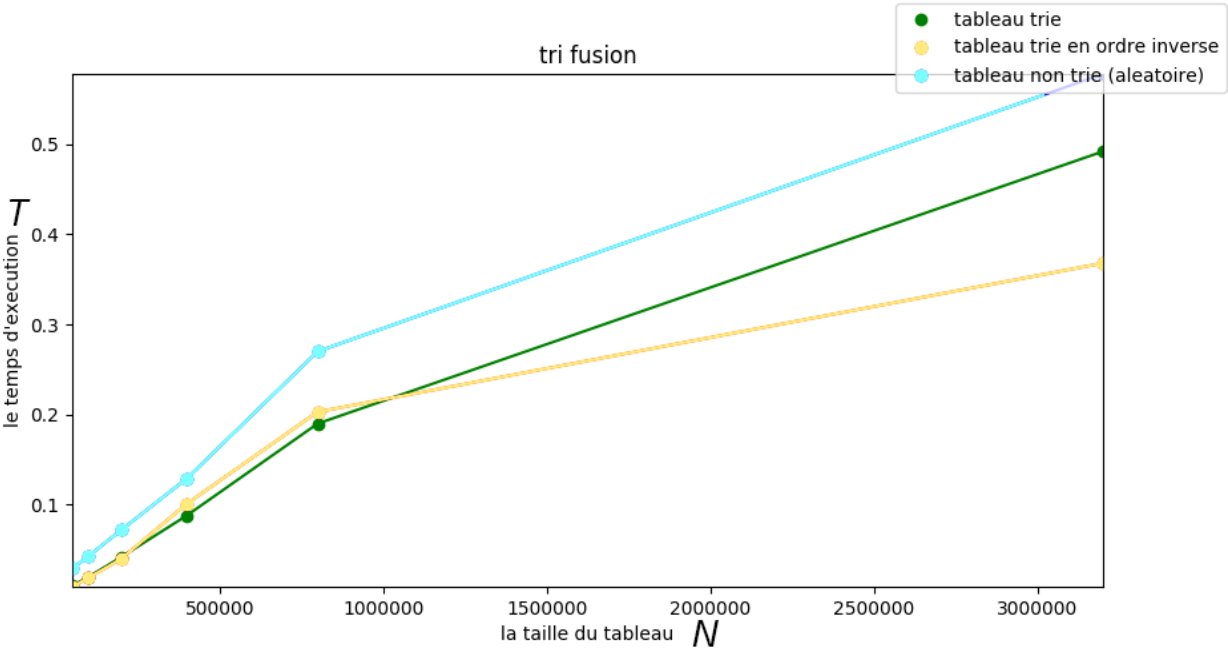


17 Mesure des temps d'exécution.

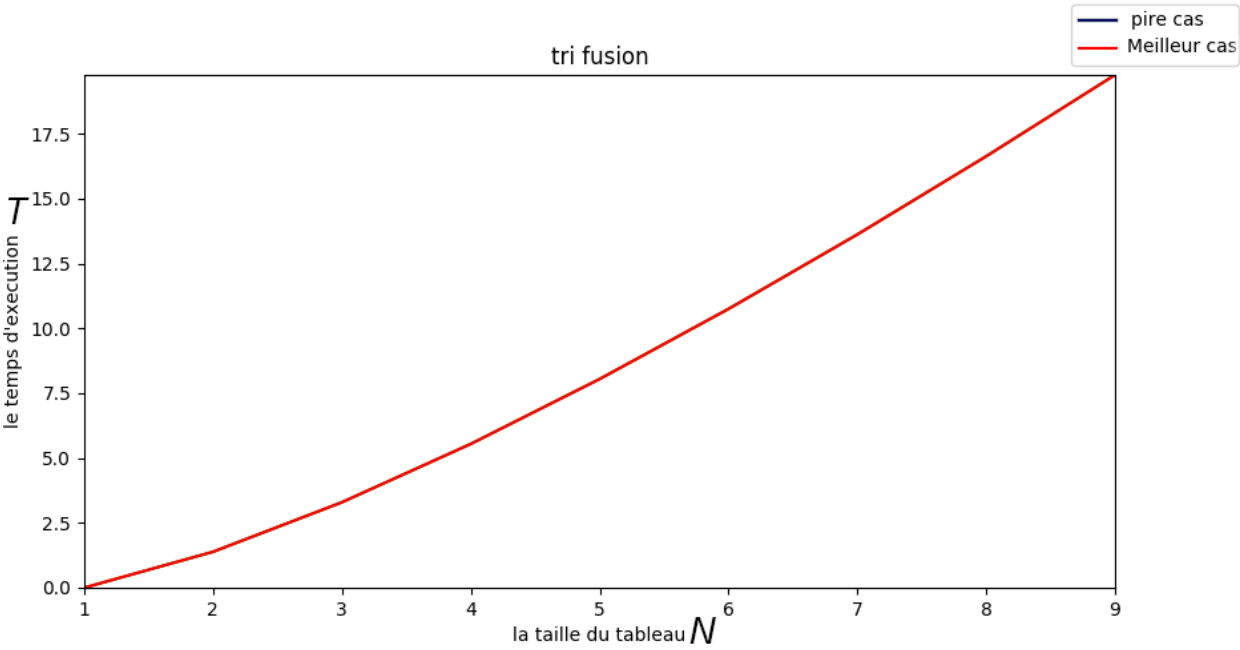
Taille du Tableau (N) :	50000	100000	200000	400000	800000	1600000
Temps (bon ordre) :	0.07	0.020	0.042	0.088	0.190	0.492
Temps (Aléatoire) :	0.019	0.043	0.042	0.139	0.270	0.577
Temps (inverse) :	0.001	0.019	0.030	0.101	0.201	0.408

Taille du Tableau (N) :	3200000	6400000	12800000	25600000	51200000	1024000	2048000
Temps (bon ordre) :	1.379	2.682	4.060	7.011	13.612	24.624	52.248
Temps (Aléatoire) :	1.160	2.415	5.543	10.062	27.367	54.734	109.462
Temps (inverse) :	0.729	1.465	3.0902	7.004	15.544	29.18	58.336

17.1
Représentation des graphes de la variation du temps d'exécution :



17.2
Représentation du graphe Gf de la complexité théorique :



18 Interprétation des résultats.

18.1 Remarque et déduction d'une fonction $T(n)$ reliant n au temps d'exécution.

On peut constater que les temps d'exécution sont approximativement multipliés par 2 lorsque N est multipliés par 2 pour les tableaux en ordre, en ordre inverse et même en ordre aléatoire.

$$T1(x * N) = x * T(N) , \text{ avec } N \text{ appartient à } [50000 - 2048000000]$$

18.2 Comparaison de la complexité théorique et expérimentale.

Comme les résultats expérimentale se rapproche de la complexité vue plus haut, on en conclue que les mesures expérimentales sont conformes au modèle théorique étudié.

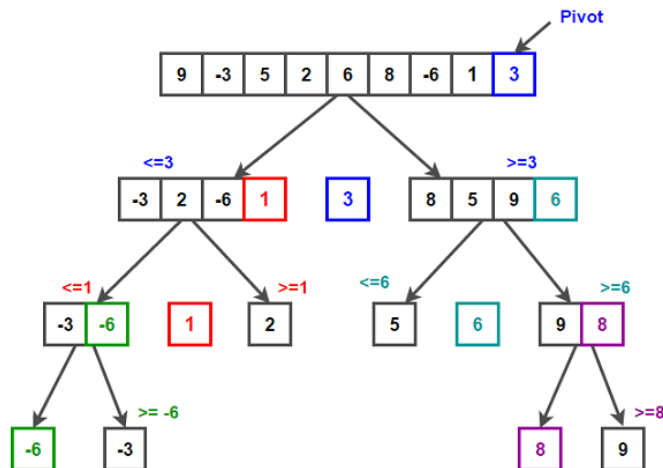
6 Tri Rapide

19 Description de la méthode de tri rapide :

Comme le tri par fusion, le tri rapide est un algorithme "Diviser pour Régner". Il sélectionne un élément en tant que pivot et partitionne le tableau donné autour du pivot sélectionné. Il existe de nombreuses versions de tri rapide qui sélectionnent le pivot de différentes manières. Le principe de cet algorithme peut être résumé comme suit :

-Placer un élément du tableau (appelé pivot) à sa place définitive, en permutant tous les éléments de telle sorte que tous ceux qui sont inférieurs au pivot soient à sa gauche et que tous ceux qui sont supérieurs au pivot soient à sa droite. Cette opération s'appelle le partitionnement.

-Pour chacun des sous-tableaux, on définit un nouveau pivot et on répète l'opération de partitionnement. Ce processus est répété récursivement, jusqu'à ce que l'ensemble des éléments soit trié.



20 Développement de l'algorithme.

```
Algorithme Tri Rapide ;
Entrée: tab[1..n] d'entier; premier, dernier: entiers;
Sortie: tab trié;
VAR pivot :entier;
```

```
DEBUT
  SI(premier < dernier)
    Alors
      pivot = partitionner(tab, premier, dernier);
      tri_rapide(tab, premier, pivot-1);
```

```

        tri_rapide(tab, pivot+1, dernier);
    Fsi

FIN;

```

21 Calcul de Complexité :

21.1 Calcule des complexités temporelles en notation asymptotique de Landau O (Grand O :

1. Au Pire Cas : Le pire des cas se produit lorsque le pivot choisi est le plus petit ou le plus grand. Dans ce cas, le tri d'un tableau de N éléments se divise en trois catégories : un tableau de 0 élément et un tableau de N-1 éléments. Puis pour trier un tableau de N-1 on divise en un tableau de taille 0 et un tableau de taille N-2, et ainsi de suite. . .

$$CT(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i \quad CT(n) = \frac{N^2 - N}{2}$$

La complexité au pire cas est de de l'ordre de N^2 .

Ce qui donne en notation Landau $O(N^2)$.

Au Meilleur Cas : Le meilleur des cas se produit lorsque le processus de scission choisit toujours la médiane comme pivot. Dans ce cas, nous obtenons le même arbre d'appel que celui du type de fusion. La complexité au meilleure cas est de de l'ordre de $N \log(N)$.

Ce qui donne en notation Landau $O(N \log(N))$.

Au cas Moyen : Le nombre moyen de comparaison effectuées par l'algorithme de tri rapide est de $:O(N \log(N))$

21.2 Calcule des complexités spatiales en notation exacte et en notation asymptotique de Landau O (Grand O)

L'algorithme de tri rapide n'utilise que le tableau à trier de taille N ainsi que 4 variables de type entier.

Sur CodeBlocks un entier est sur 8octets. Nous obtenons la complexité spatiale suivante :

$$CS(N) = 8(N + 3) \text{ octets}$$

Ainsi $CS(n) = O(N)$.

22 Développement de programme correspondant avec le langage C.

```

void inverser(int* a, int* b)
{
    int t = *a;
    *a = *b;
    *b = t;
}

int partitionner(int T[], int premier , int dernier)
{
    int pivot = T[dernier];
    int i = (premier - 1);

    for (int j = premier; j <= dernier-1; j++)
    {
        if (T[j] <= pivot)
        {
            i++;
            inverser(&T[i], &T[j]);
        }
    }
}

```

```

    inverser(&T[i + 1], &T[dernier]);
    return (i + 1);
}
int tri_rapide(int T[], int premier, int dernier)
{
    if(premier < dernier)
    {
        int pivot;
        pivot = partitionner(T, premier, dernier);
        tri_rapide(T, premier, pivot-1);
        tri_rapide(T, pivot+1, dernier);
    }
}
}

```

The screenshot displays the Code::Blocks IDE with the following details:

- Title Bar:** *main.c - Code::Blocks 17.12
- Menu Bar:** File, Edit, View, Search, Project, Build, Debug, Fortran, wxSmith, Tools, Tools+, Plugins, DoxyBlocks, Settings, Help.
- Toolbar:** Standard IDE icons for file operations, building, and debugging.
- Left Panel (Management):**
 - Projects:** Shows a workspace.
 - Symbols:** Empty.
 - Files:** Shows the file structure.
- Code Editor:**
 - File:** tri_rapide(int T[], int premier, int dernier) : int
 - Line 151:** `// ----- TRI RAPIDE -----`
 - Line 152:** `void inverser(int* a, int* b)`
 - Line 153:** `{`
 - Line 154:** `int t = *a;`
 - Line 155:** `*a = *b;`
 - Line 156:** `*b = t;`
 - Line 157:** `}`
 - Line 158:**
 - Line 159:** `int partitionner(int T[], int premier, int dernier)`
 - Line 160:** `{`
 - Line 161:** `int pivot = T[dernier];`
 - Line 162:** `int i = (premier - 1);`
 - Line 163:** `for (int j = premier; j <= dernier-1; j++)`
 - Line 164:** `{`
 - Line 165:** `if (T[j] <= pivot)`
 - Line 166:** `{`
 - Line 167:** `i++;`
 - Line 168:** `inverser(&T[i], &T[j]);`
 - Line 169:** `}`
 - Line 170:** `inverser(&T[i + 1], &T[dernier]);`
 - Line 171:** `return (i + 1);`
 - Line 172:** `}`
 - Line 173:** `int tri_rapide(int T[], int premier, int dernier)`
 - Line 174:** `{`
 - Line 175:** `if (premier < dernier)`
 - Line 176:** `{`
 - Line 177:** `int pivot;`
 - Line 178:**
 - Line 179:**
 - Line 180:**
- Status Bar:** T:\MT\SII\TPComplexité\Mini projet\MINI PROJET\main.c C/C++ Windows (CR+LF) WINDOWS-1252 Line 177, Col 6, Pos 3004 Insert Modified Read/Write default
- Taskbar:** Shows various application icons and the system clock: 23:49 12/12/2018.

```

158 }
159
160 int partitionner(int T[], int premier , int dernier)
161 {
162     int pivot = T[dernier];
163     int i = (premier - 1);
164
165     for (int j = premier; j <= dernier-1; j++)
166     {
167         if (T[j] <= pivot)
168         {
169             i++;
170             inverser(&T[i], &T[j]);
171         }
172     }
173     inverser(&T[i + 1], &T[dernier]);
174     return (i + 1);
175 }
176
177 int tri_rapide(int T[], int premier, int dernier)
178 {
179     if(premier < dernier)
180     {
181         int pivot;
182         pivot = partitionner(T, premier, dernier);
183         tri_rapide(T, premier, pivot-1);
184         tri_rapide(T, pivot+1, dernier);
185     }
186 }
187
188 int main()
189 {
190     int T[] = {10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100};
191     tri_rapide(T, 0, 9);
192     for (int i = 0; i < 10; i++)
193     {
194         printf("%d ", T[i]);
195     }
196     printf("\n");
197     return 0;
198 }

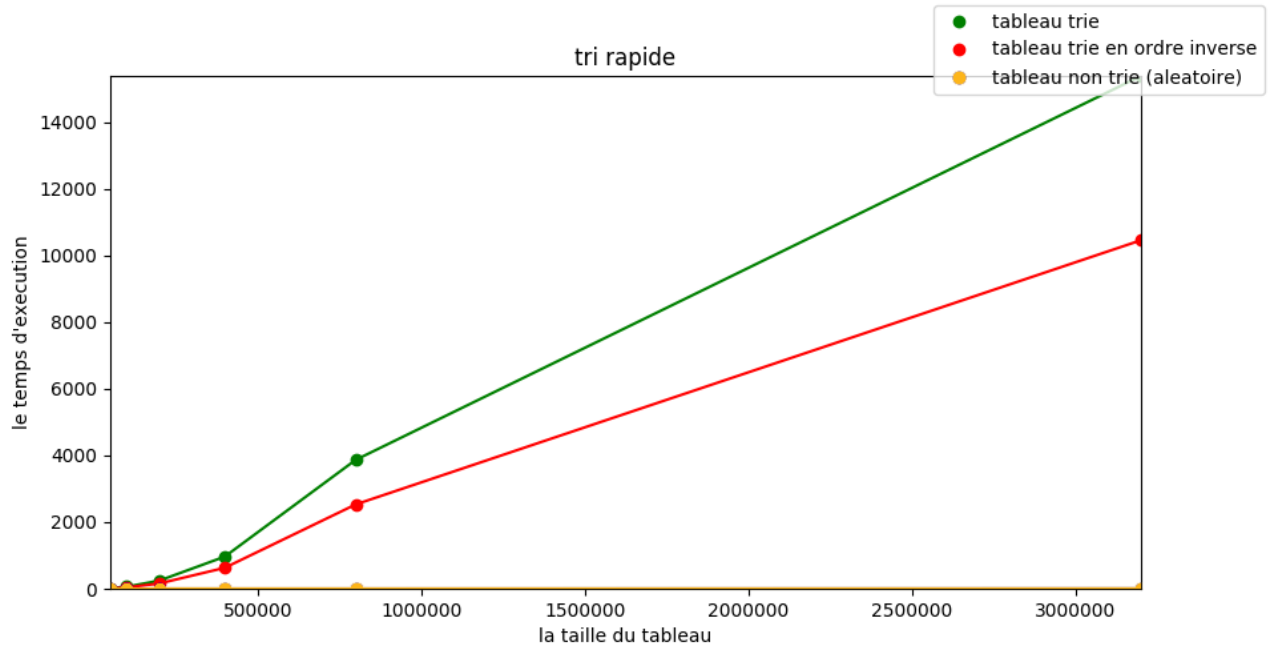
```

23 Mesure des temps d'exécution.

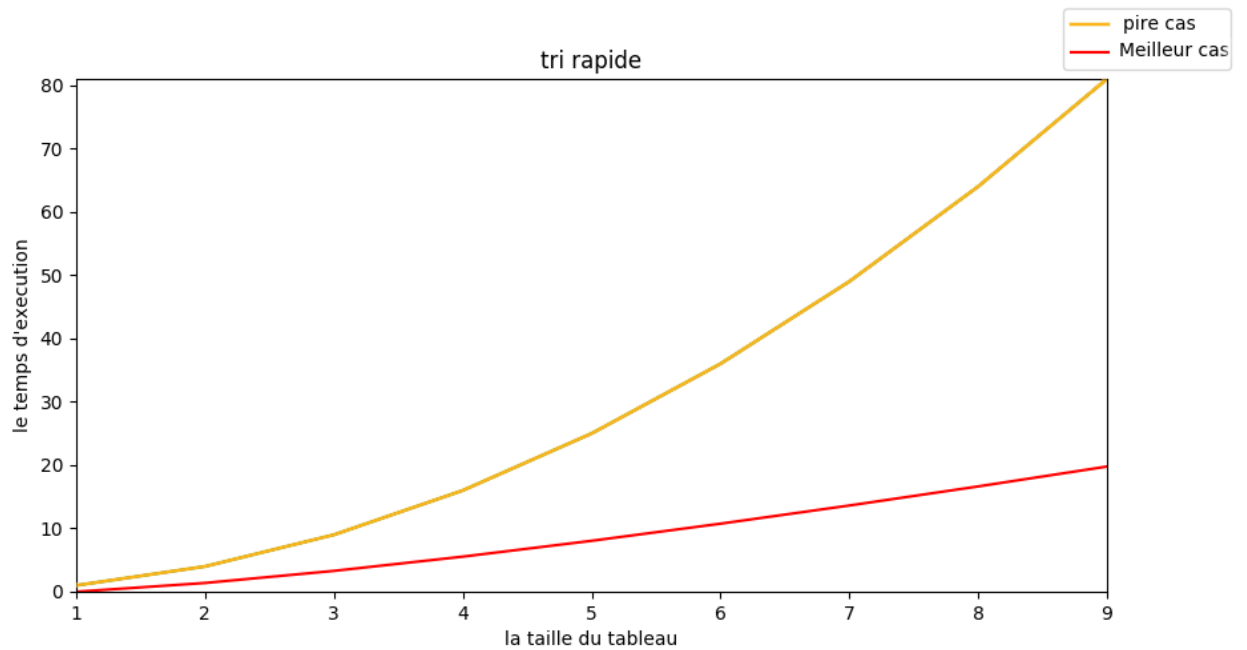
Taille du Tableau (N) :	50000	100000	200000	400000	800000	1600000
Temps (bon ordre) :	14.062	58.707	240.606	962.812	3780.310	15400.922
Temps (Aléatoire) :	0.0098	0.023	0.062	0.132	0.325	2.900
Temps (inverse) :	8.787	38.963	156.1527	617.741	2537.841	10240.6722

Taille du Tableau (N) :	3200000	6400000	12800000	25600000	51200000
Temps (bon ordre) :	61509.878	243618.654	979347.255	3917389.023	15638210.000
Temps (Aléatoire) :	9.100	32.848	124.024	458.888	1762.132
Temps (inverse) :	39947.022	181972.6423	768980.415	3107743.419	12770221.4320

23.1 Représentation des graphes de la variation du temps d'exécution :



23.2 Représentation du graphe Gf de la complexité théorique :



24 Interprétation des résultats.

24.1 Remarque et déduction d'une fonction $T(n)$ reliant n au temps d'exécution.

On peut constater que les temps d'exécution sont approximativement multipliés par 4 lorsque N est multipliés par 2 pour les tableaux en ordre, et en ordre inverse.

On en déduit que le temps d'exécution est proportionnel à N , ce que l'on peut représenter par la formule suivante :

$$T(x * N) = x^2 * T(N), N \in [50000 - 2048000000]$$

Toutefois, on remarque que lorsque la taille N du tableau en ordre aléatoire est doublé, le temps d'exécution est lui aussi multiplié par 2.

24.2 Comparaison de la complexité théorique et expérimentale.

Comme les résultats expérimentale se rapproche de la complexité moyenne et sont majoré par le pire cas et minoré par le meilleur cas, on en conclue que les mesures expérimentales sont conformement au modèle théorique étudié.

$$T(x * N) = x * T(N), N \in [50000 - 2048000000]$$

7 Tri par Tas

25 Description de la méthode de tri par tas :

Le tri par tas est l'une des meilleures méthodes de tri en place et ne présente aucun scénario d'un pire cas qui dégénère. L'algorithme de tri de tas est divisé en deux parties fondamentales :

-Création d'un tas de la liste non triée.

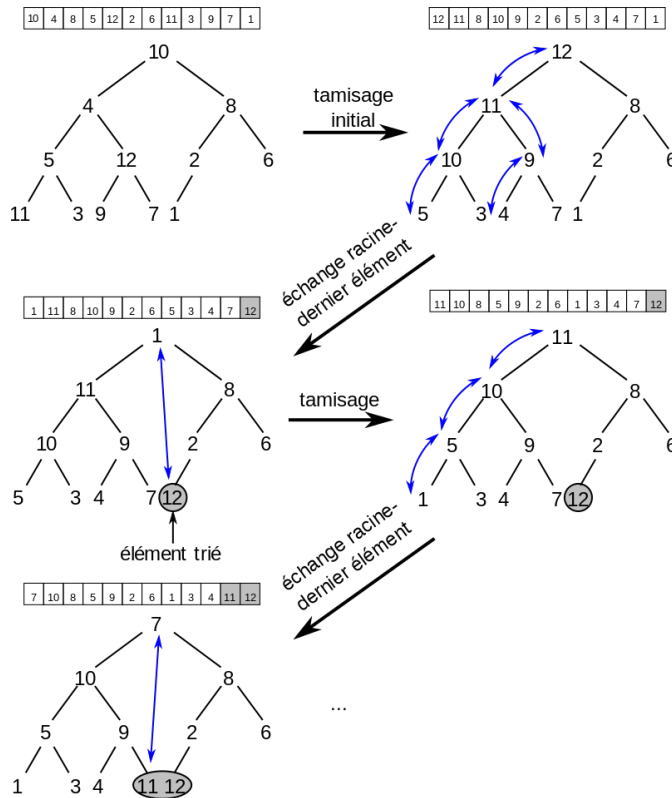
-Tri du tableau en supprimant à plusieurs reprises le plus grand élément du tas et en l'insérant dans le tableau. Le tas est reconstruit après chaque enlèvement.

Un tas, tout d'abord, est un arbre binaire dans lequel chaque élément est inférieur à tous ses descendants (selon un ordre déterminé par l'application). Un tas permet l'insertion d'un élément arbitraire et la suppression d'un élément sur une place connue avec une complexité $O(\log N)$.

Ce fait nous donne une idée simple d'algorithme de tri. On suppose que les objets à trier sont initialement dans un ensemble quelconque. Le résultat doit être une séquence triée par ordre croissant (déterminé par une fonction passée en argument). La technique comporte deux étapes.

Dans la première étape, l'ensemble initial est parcouru dans un ordre quelconque, et chaque élément est inséré dans un tas initialement vide. Le résultat de cette étape est donc un tas dont la racine (le premier élément de la représentation sous la forme de vecteur) est le plus petit élément (ou l'un des plus petits éléments).

Dans la deuxième étape, une séquence, initialement vide, est créée à partir des éléments du tas obtenu dans la première étape. Le premier élément de la séquence est la racine du tas, puis la racine du tas est supprimée. Cela donne un nouveau tas, la nouvelle racine du tas étant le second élément dans l'ordre, car il est le plus petit parmi les éléments restants. L'opération est répétée tant que le tas n'est pas vide.



26 Développement de l'algorithme.

```

Algorithme Tri par Tas ;
Entrée: tab[1..n] d'entier;n: entiers;
Sortie: tab trié;
VAR i,j :entier;
DEBUT
  Pour(i:=n/2 à 0 avec pas:=-1)
  Faire
    tamiser(tab,n,i);
  Fait

  Pour(i:=n-1 à 0 avec pas:=-1)
  Faire
    inverser(tab[i],tab[0]);
    tamiser(tab,i,0);
  Fait

FIN;
```

27 Calcul de Complexité :

27.1 Calcule des complexités temporelles en notation asymptotique de Landau O (Grand O :

Au pire, Meilleur et Moyen cas il s'agit de la même complexité, tel que

Dans cet algorithme nous faisons appel à la fonction tamiser : N fois. et dans tamiser le parcours du tableau, sous forme d'un arbre, se fait deux éléments en $\log(n)$. Ainsi nous obtenant un complexité asymptotique de Landau :

$CT(n) = O(N \log N)$;

27.2 Calcule des complexités spatiales en notation exacte et en notation asymptotique de Landau O (Grand O)

Dans la fonction *Tri_Tas* nous avons : *tab* de taille *N*, l'entier *n*, *l*, *r*, *max* ainsi que *noeud*;

Dans la fonction *tamiser* nous avons : *tab* de taille *N*, l'entier *n*, *l*, *r*, *max* ainsi que *noeud*;

on considérant que la taille d'un entier est sur 8 Octets, ainsi :

$CS(n) = 8(2N + 7)$ Octets

Ainsi $CS(n) = O(n)$.

28 Développement de programme correspondant avec le langage C.

```
void tamiser(int T[],int n,int noeud)
```

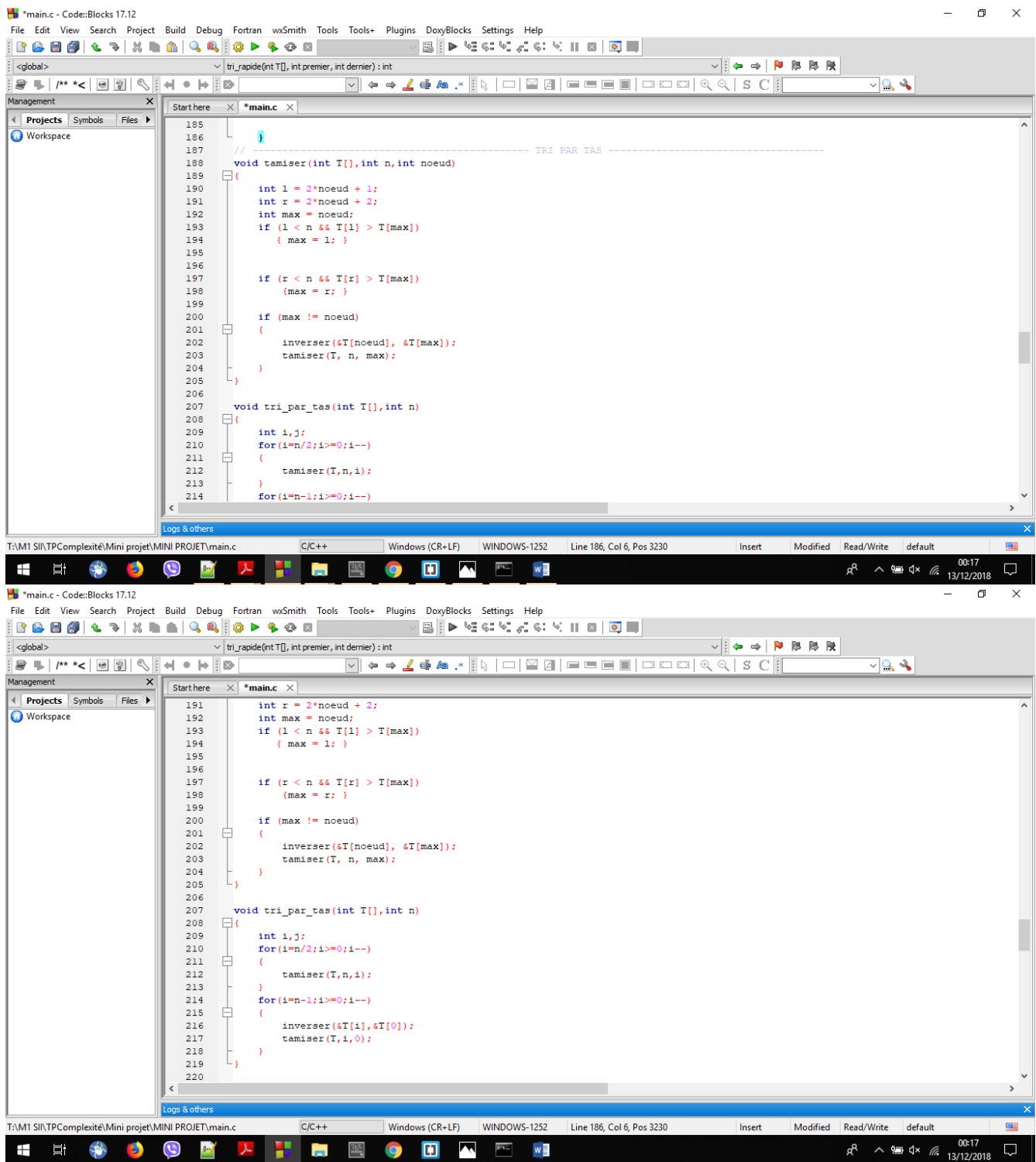
```
{
    int l = 2*noeud + 1;
    int r = 2*noeud + 2;
    int max = noeud;
    if (l < n && T[l] > T[max])
        { max = l; }

    if (r < n && T[r] > T[max])
        {max = r; }

    if (max != noeud)
    {
        inverser(&T[noeud], &T[max]);
        tamiser(T, n, max);
    }
}
```

```
void tri_par_tas(int T[],int n)
```

```
{
    int i,j;
    for(i=n/2;i>=0;i--)
    {
        tamiser(T,n,i);
    }
    for(i=n-1;i>=0;i--)
    {
        inverser(&T[i],&T[0]);
        tamiser(T,i,0);
    }
}
```

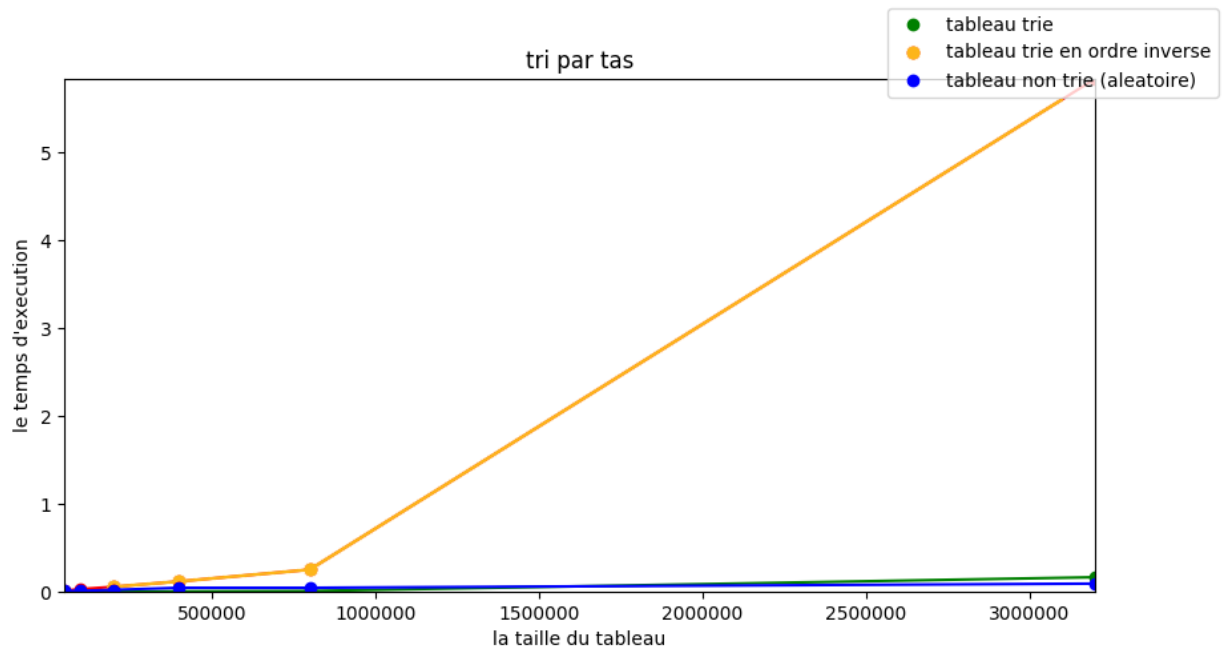



29 Mesure des temps d'exécution.

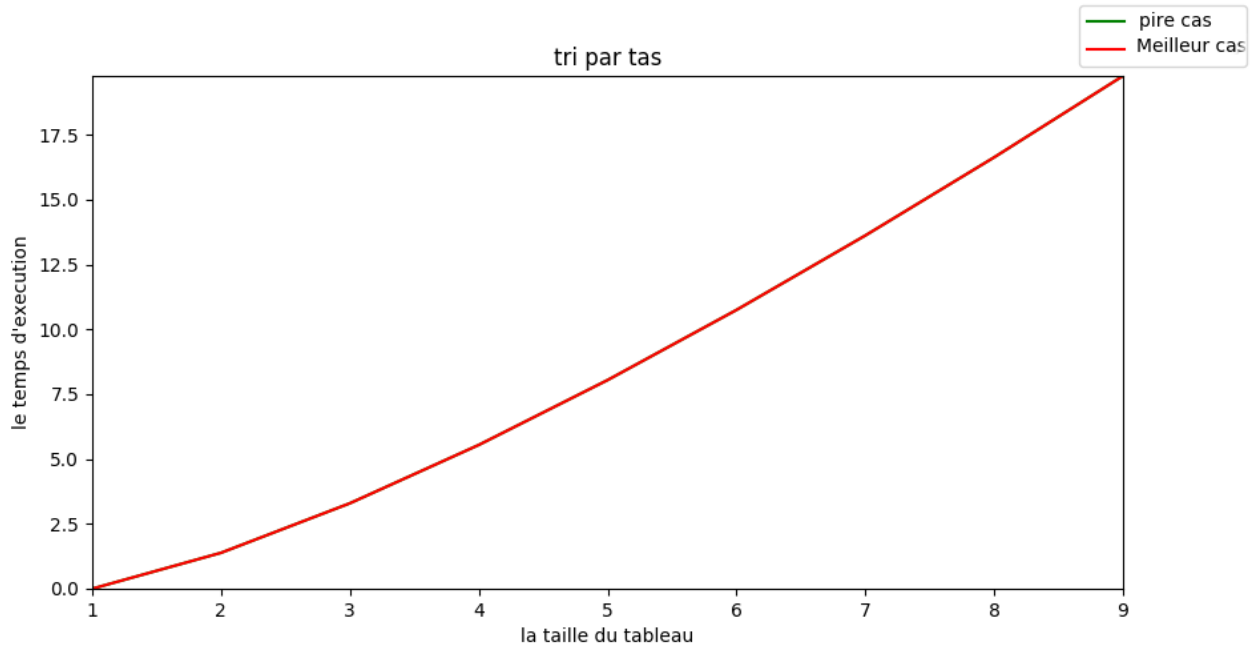
Taille du Tableau (N) :	50000	100000	200000	400000	800000	1600000
Temps (bon ordre) :	0.0005485	0.001030	0.002083	0.004566	0.008513	0.159864
Temps (Aléatoire) :	0.007636	0.011022	0.021991	0.044333	0.044333	0.089964
Temps (inverse) :	0.013000	0.030700	0.056678	0.117674	0.241907	5.906609

Taille du Tableau (N) :	3200000	6400000	12800000	25600000	51200000	1024000	2048000
Temps (bon ordre) :	0.331600	0.662114	1.326228	2.397210	3.819536	7.439002	14.27804
Temps (Aléatoire) :	2.399831	5.330937	10.343	23.820600	47.164800	94.319446	188.6490
Temps (inverse) :	11.060000	23.115268	50.001054	94.977215	200.365220	400.73044	811.4600

29.1 Représentation des graphes de la variation du temps d'exécution :



29.2 Représentation du graphe Gf de la complexité théorique :



30 Interprétation des résultats.

30.1 Remarque et déduction d'une fonction $T(n)$ reliant n au temps d'exécution.

On peut constater que quelque soit l'ordre des éléments du tableau, les temps d'exécution sont approximativement doublés lorsque N est multipliés par 2.

On en déduit que le temps d'exécution est proportionnel a N , ce que l'on peut représenter par la formule suivante :

$$T(x * N) = x * T(N), N \in [50000 - 2048000000]$$

Toutefois, on remarque que lorsque la taille N du tableau en ordre aléatoire est doublé , le temps d'exécution est lui aussi multiplié par 2.

30.2 Comparaison de la complexité théorique et expérimentale.

Comme les résultats expérimentale se rapproche de la complexité moyenne/pire cas/meilleur cas, on en conclue que les mesures expérimentales sont conformes au modèle théorique étudié.

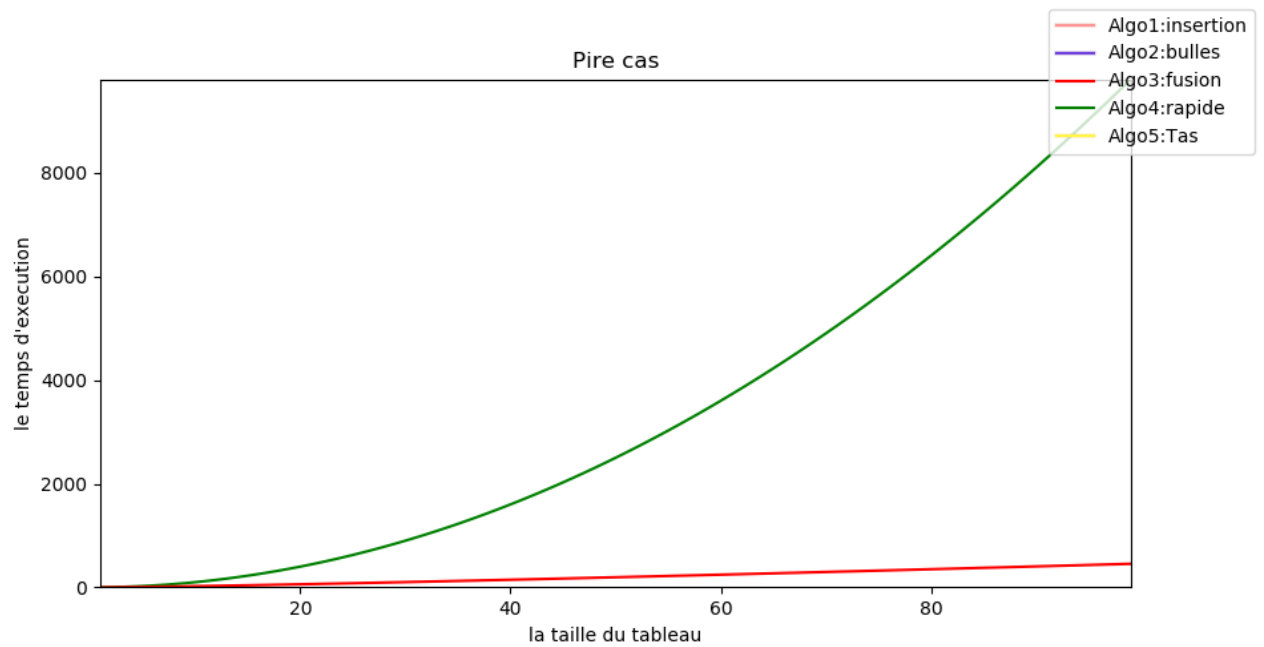
$$T(x * N) = x * T(N) , N \in [50000 - 2048000000]$$

8 PartieII :

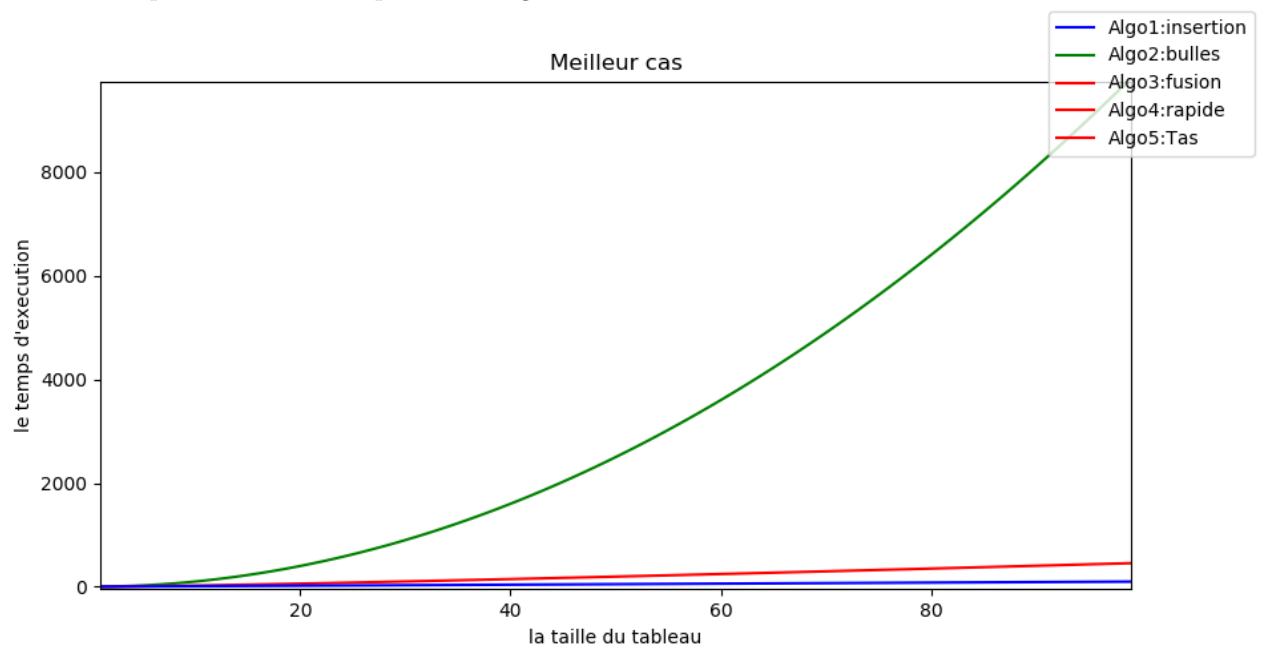
31 Représentation des graphes des complexités des cinq (5) algorithmes.

31.1 Complexité théorique.

Complexité théorique au pire cas pour les 5 algorithmes :

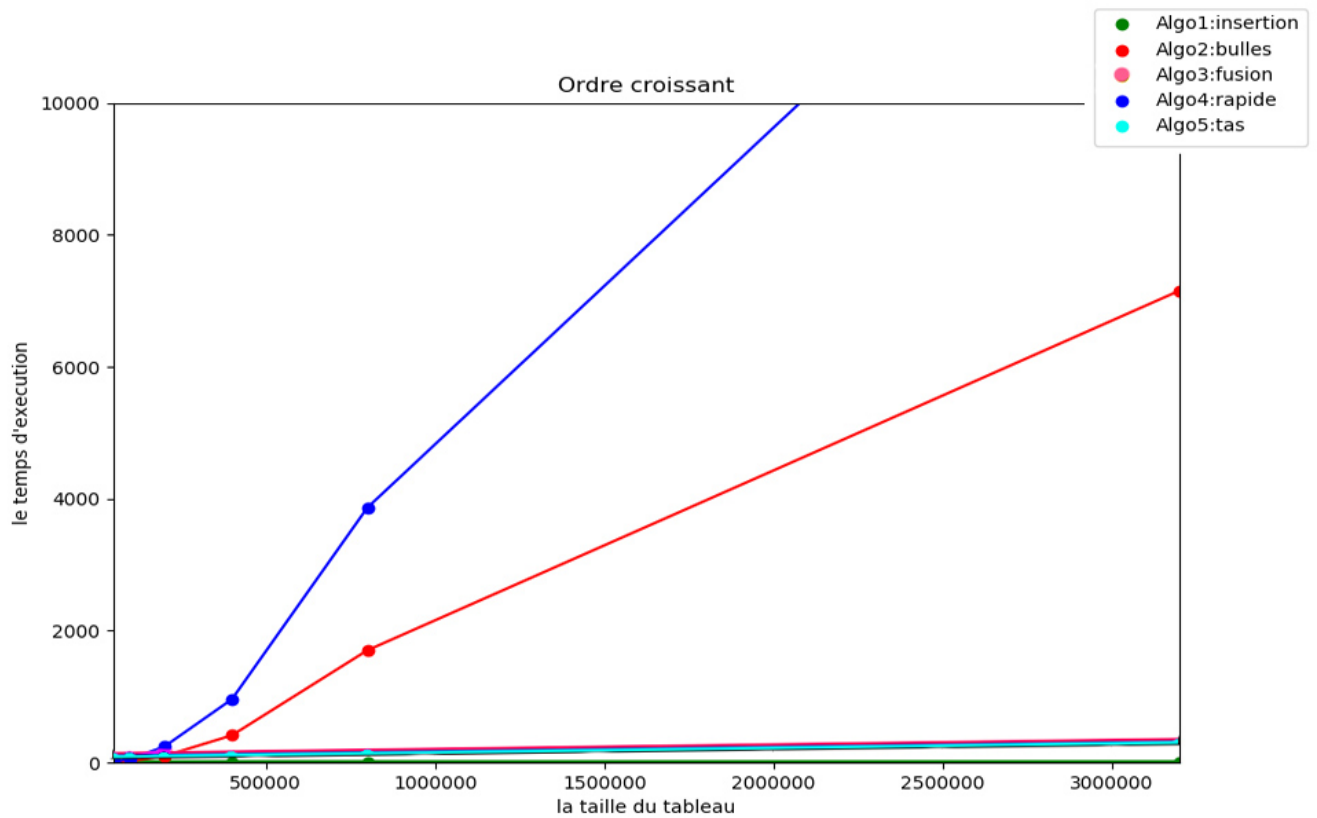


Complexité théorique au meilleur cas pour les 5 algorithmes :

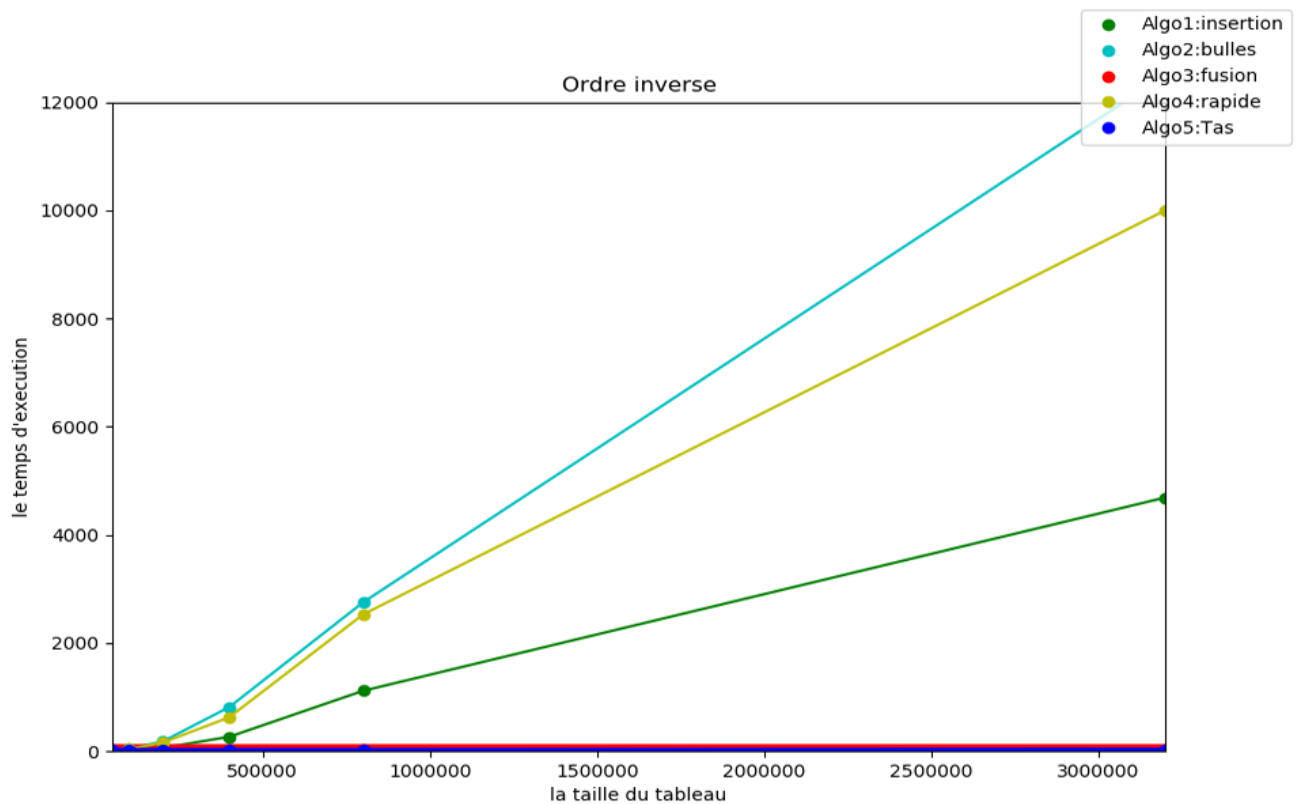


31.2 Complexité expérimentale.

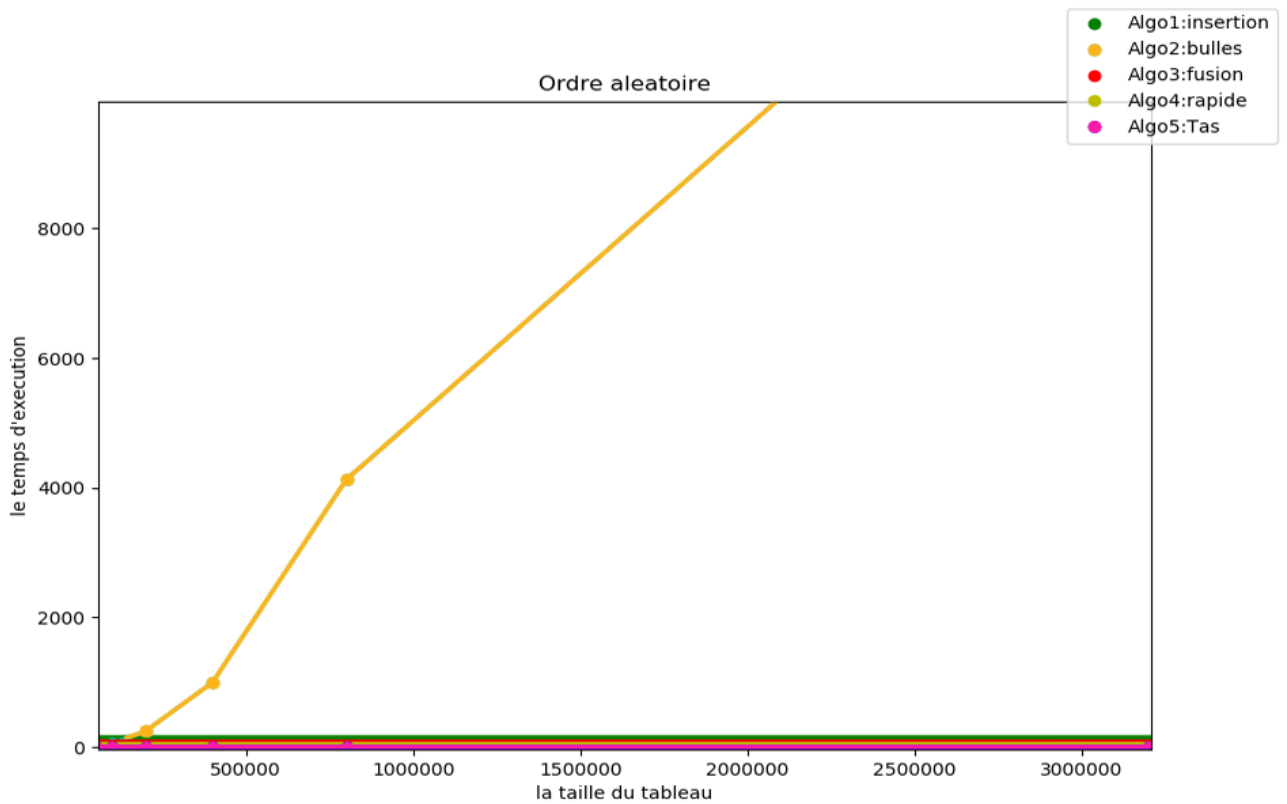
Complexité expérimentale dans le cas d'un tableau ordonné pour les 5 algorithmes :



Complexité expérimentale dans le cas d'un tableau dans l'ordre inverse pour les 5 algorithmes :



Complexité expérimentale dans le cas d'un tableau ordonné aléatoirement pour les 5 algorithmes :



32 Tableaux comparatifs : des complexités et des temps d'exécution des 5 algorithmes.

32.1 Complexité théorique.

Algorithme	Complexité meilleur cas	au	Complexité au cas moyen	Complexité au pire cas	Stabilité
Tri par insertion	N		N^2	N^2	Stable
Tri à bulles	N		N^2	N^2	Stable
Tri fusion	$N * \log_2(N)$		$N * \log_2(N)$	$N * \log_2(N)$	Stable
Tri rapide	$N * \log_2(N)$		$N * \log_2(N)$	N^2	NonStable
Tri par tas	$N * \log_2(N)$		$N * \log_2(N)$	$N * \log_2(N)$	NonStable

32.2 Temps d'exécution.

1. Pire Cas :

Taille du Tableau (N) :	50000	100000	200000	400000	800000	1600000
Tri par insertion	$2.5 * 10^9$	10^{10}	$4 * 10^{10}$	$1.6 * 10^{11}$	$6.4 * 10^{11}$	$2.56 * 10^{12}$
Tri à bulles	$2.5 * 10^9$	10^{10}	$4 * 10^{10}$	$1.6 * 10^{11}$	$6.4 * 10^{11}$	$2.56 * 10^{12}$
Tri fusion	540988,914	1151292,546	2441214,529	5159687,930	10873893,605	22856822,699
Tri rapide	$2.5 * 10^9$	10^{10}	$4 * 10^{10}$	$1.6 * 10^{11}$	$6.4 * 10^{11}$	$2.56 * 10^{12}$
Tri par tas	540988,914	1151292,546	2441214,529	5159687,930	10873893,605	22856822,699

Taille du Tableau (N) :	3200000	6400000	12800000	25600000	51200000	1024000	2048000
Tri par insertion	1.24*10 ¹³	4.096*10 ¹³	1.6384*10 ¹⁴	6.5536*10 ¹⁴	2.62144*10 ¹⁵	1048576000000	4194304000000
Tri à bulles	1.24*10 ¹³	4.096*10 ¹³	1.6384*10 ¹⁴	6.5536*10 ¹⁴	2.62144*10 ¹⁵	1048576000000	4194304000000
Tri fusion	47931716,376	100299574,709	209471433,329	436687434,481	908864004,608	154547,15559	12925603,74231
Tri rapide	1.24*10 ¹³	4.096*10 ¹³	1.6384*10 ¹⁴	6.5536*10 ¹⁴	2.62144*10 ¹⁵	1048576000000	4194304000000
Tri par tas	47931716,376	100299574,709	209471433,329	436687434,481	908864004,608	154547,15559	12925603,74231

2. Meilleur cas :

Taille du Tableau (N) :	50000	100000	200000	400000	800000	1600000	
Tri par insertion	50000	100000	200000	400000	800000	1600000	
Tri à bulles	50000	100000	200000	400000	800000	1600000	
Tri fusion	540988,914	1151292,546	2441214,529	5159687,930	10873893,605	22856822,699	
Tri rapide	540988,914	1151292,546	2441214,529	5159687,930	10873893,605	22856822,699	
Tri par tas	540988,914	1151292,546	2441214,529	5159687,930	10873893,605	22856822,699	
Taille du Tableau (N) :	3200000	6400000	12800000	25600000	51200000	1024000	2048000
Tri par insertion	3200000	6400000	12800000	25600000	51200000	1024000	2048000
Tri à bulles	3200000	6400000	12800000	25600000	51200000	1024000	2048000
Tri fusion	47931716,376	100299574,709	209471433,329	436687434,481	908864004,608	154547,15559	12925603,74231
Tri rapide	47931716,376	100299574,709	209471433,329	436687434,481	908864004,608	154547,15559	12925603,74231
Tri par tas	47931716,376	100299574,709	209471433,329	436687434,481	908864004,608	154547,15559	12925603,74231

33 Comparaison des 5 Algorithmes.

Comme on peut le constater des graphes, les résultats sont approximativement similaires pour le tri par insertion et le tri à bulle. En revanche, le temps d'exécution du tri par fusion, tri rapide et tas, reste proche de zéro même pour les très grands ensembles de données. Cela correspond parfaitement à leurs complexités théoriques. Depuis, le tri par insertion et le tri à bulle ont une complexité quadratique ; ils sont les plus inefficaces en termes d'exécution.

En effet, le Tri par Insertion et Tri à bulles sont les plus instinctifs et donc les plus simples à implémenter. Comparé aux trois autres qui demandent un peu plus de maîtrise mais restent toutefois les moins rapide en temps d'exécution et donc les moins performants.

Quant au tri fusion il est nettement plus performant et donne de meilleurs résultats que les précédents algorithmes, suivie du Tri qui peut quand à lui dégénérer vu que son efficacité dépend du choix du pivot, car si ce dernier est mal choisi on se retrouve avec un temps d'exécution similaire à celui des deux premiers algorithmes traités.

Enfin, le tri par tas est jusqu'au jour d'aujourd'hui considéré comme le plus intéressant des algorithmes de tri , il donne les meilleurs temps d'exécution !

9 Programme Principal :

```
void test(int n)
{
    printf("<----- TAILLE TABLEAU : %d----->\n",n);
    clock_t start,end;
    time_t t;
    srand((unsigned) time(&t));
    double time;
    int tab[n];
    int i=0;
```

```

for(i=0;i<n;i++)
{

    tab[i]=rand()%n;
}
print_array(tab,n);
start=clock();
tri_insertion(tab,n);
end = clock();
time=(double)(end-start)/CLOCKS_PER_SEC;
printf("TRI INSERTION   : %fs\n");
print_array(tab,n);
printf("\n");

for(i=0;i<n;i++)
{

    tab[i]=rand()%n;
}
print_array(tab,n);
start=clock();
tri_bulles(tab,n);
end = clock();
time=(double)(end-start)/CLOCKS_PER_SEC;
printf("TRI BULLES    : %fs\n");
print_array(tab,n);
printf("\n");

for(i=0;i<n;i++)
{

    tab[i]=rand()%n;
}
print_array(tab,n);
start=clock();
tri_fusion(tab,0,n-1);
end = clock();
time=(double)(end-start)/CLOCKS_PER_SEC;
printf("TRI FUSION     : %fs\n");
print_array(tab,n);
printf("\n");

for(i=0;i<n;i++)
{

    tab[i]=rand()%n;
}
print_array(tab,n);
start=clock();
tri_rapide(tab,0,n-1);
end = clock();
time=(double)(end-start)/CLOCKS_PER_SEC;
printf("TRI RAPIDE      : %fs\n");
print_array(tab,n);
printf("\n");

```



```

    for(i=0;i<n;i++)
    {

        tab[i]=rand()%n;
    }
    print_array(tab,n);
    start=clock();
    tri_par_tas(tab,n);
    end = clock();
    time=(double)(end-start)/CLOCKS_PER_SEC;
    printf("TRI TAS : %fs\n");
        print_array(tab,n);
        printf("\n");
}

int main()
{

    double n[12];
    n[0]=pow(10,6)+3;
    n[1]=pow(10,6)*2+3;
    n[2]=pow(10,6)*4+37;
    n[3]=pow(10,6)*8+9;
    n[4]=pow(10,6)*16+57;
    n[5]=pow(10,6)*32+11;
    n[6]=pow(10,6)*64+31;
    n[7]=pow(10,6)*128+3;
    n[8]=pow(10,6)*256+1;
    n[9]=pow(10,6)*512+9;
    n[10]=pow(10,6)*1024+9;
    n[11]=pow(10,6)*2048+11;

    int i=0;
    for(i=0;i<12;i++)
    {
        test((int)n[i]);
    }

    return 0;
}

```

