- Continuous assessment (60%) + Final Examination (40%)
- Continuous assessment ***<u>tentative, from last year)</u>***
  - Three Homework Assignments (30%)
  - One mini-project (e.g., Implement algorithms with real-world data) (10%)
  - One Midterm Exam (20%, Oct 30, 2024, tentatively)

Ω 下界
Θ 紧

ASYMPTOTIC BOUNDS FOR SOME COMMON FUNCTIONS

Polynomials.

- Let $f(n) = a_0 + a_1 n + \cdots + a_d n^d$ with $a_d > 0$. Then, $f(n) = \Theta(n^d)$.

Logarithms.

- $\log_a n = \Theta(\log_b n)$ for every constants $a > 1$ and $b > 1$.

Logarithms and polynomials.

- $\log_a n = O(n^d)$ for every $a > 1$ and $b > 0$.

Exponentials and polynomials.

- $n^d = O(r^n)$ for every $r > 1$ and every $d > 0$.

Factorials.

- $n! = 2^{\Theta(n \log n)}$.

分治 二进制乘法

$a * b$ 都分成两半
注意到分成 $x_1 y_1 * 2^n + 2^{n/2} * ((x_1 + y_0) * (x_0 + y_1) - x_1 y_1 - x_0 y_0) + x_0 y_0$

可以少一次 $T(n) = 3T(n/2) + n$
$O(n^{\log_2 3}) = O(n^{1.59})$

主定理

$T(n) = aT(n/b) + \Theta(n^c)$
$\log_b a$ 如果和 c 一样叠一个 $\log$ 否则选大的。

可满足性 SAT

- Literal：二元（字面量
- Clause：子句 逻辑表达式
- Conjunctive normal form (CNF)（子句的链接）

SAT：是否可以满足是真的存不存在一组 01
3-SAT：每个只有三个

Poly-Time Reduction 规约

Desiderata 期望

$X \leq_P Y$ 说如果 X 可以规约到 Y，就是说可以用任意一个 X 问题样例都可以调用几次 Y 来解决。
原始操作 $O(1)$

Design algorithms.

Y 可以多项式，X 就会做

Establish intractability.

X 做不了，Y 就寄了

Establish equivalence.

双向规约

SET-COVER

点覆盖全部点

VERTEX-COVER

最小点覆盖
选点吧所有边覆盖

$VERTEX-COVER \leq_P SET-COVER$
就建每个集合就是点他出去的边（度）

INDEPENDENT-SET.

最大独立集

3-SAT $\le_P$ INDEPENDENT-SET
encoding with gadgets
: m 个等式，m 个三角形，然后相反也连边，然后问题等价于能不能找到大小为 m 个独立及

难度递增：（很多时候都 equiv，所以我们之关系 decision，很多时候不行后面就不行了）

- Decision Problem
- Search Problem
- Optimization Problem
  证 点覆盖和找点覆盖 equiv

P 集合：所有多项式时间可以决定（decision）的问题。on a deterministic turing machine。
chain
NP 集合：$C(s,t)$，任意 s 都有一个 t 是 yes，certificate。多项式时间 certifier。多项式时间验证。Nondeterministic polynomial time。tree，不知道去哪，很多选择。certificate 方案?
EXP 集合：判定问题有指数复杂度。
NP-Complete：所有 NP 问题都能规约到的问题。

SAT $\in$ NP-complete （已知条件）

SAT $\le_P$ 3-SAT

所以考虑 $SAT \le_P 3 - SAT \le_P Independent - Set = Vertex_Cover \le Set - Cover$
后面这一串都是 NP-Complete

INDIVIDUAL PROJECT

You can choose ⋆***one***⋆ of the three types of projects to work on:

- ***Type I:*** Introduce one (new) algorithm and analyze why the algorithm has good performance.
- ***Type II:*** Summarize the real-world applications of an algorithm.
- ***Type III:*** Implement one algorithm on real-world data sets.

(If you have any other ideas, feel free to discuss them with me.)

INDIVIDUAL PROJECT

Report format (e.g. Introduction + Preliminaries+ Results + Discussion):

- Font: 12-point Times New Roman
- Margin and Spacing: 2.5 cm all round, single column and single-line spacing
- Page limit: no more than 3 pages, including references

Deadline: Dec 20, 2024 (two days after the exam).

Lecture 9

问题定义：能不能找到一个 01 背包 bitset 起来和事 W

证明 $3-SAT \le_P SUBSET-SUM*$

More Story

Knapsack：重量和 $\le B$ （weight limit）价值 $\ge V$ （target value）

Partition

Subset-Sum $\le_P$ Knapsack

$3SAT \le_P SUBSET-SUM \equiv_P PARTITION \le_P KNAPSACK$
也都是 NP Hard

Six Basic NP-Complete problems

- 3-Satisfiability (3-SAT)
- ***3-Dimensional Matching (3DM)*** $3SAT \leq_p 3DM$

  Exact Cover by 3-Sets (X3C) $3DM \leq_p X3C$
- Vertex Cover (VC)
- Independent Set (IS)
- ***Hamiltonian Cycle (HC)*** $3SAT \leq_p HC$, $VC \leq_p HC$
- Partition

记不住，太多了

3-Dimensional Matching (3DM)

Exact Cover by 3-Sets (X3C)

$3DM \leq_P X3C$

和 2D 差不多，就是不覆盖全匹配上

Exact Cover by 3-Sets (X3C)

Given: a set U with $|U| = 3n$ and a collection C of 3-element subsets of U.

Question: Does C contain an exact cover for U, that is, a subcollection $C' \subseteq C$ such that every element of U occurs in exactly one member of C'?

Theorem. 3DM$\leq_p$X3C.

3DM: $T \subseteq X \times Y \times Z$

X3C: U $= X \cup Y \cup Z$ (unordered)

$M \subseteq T$ is a matching with size n for 3DM iff
$M \subseteq U$ is a 3-exact-cover for U

就是三个元素 并起来包含所有

Hamiltonian Cycle Problem 哈密顿路径

Travelling Salesman Problem (TSP) 旅行商问题

Strong NP-completeness：如果数值也是多项式，还是做不了，就是强 NPC

近似算法

线性规划

线性规划是 P 的，可以多项式解决

ellipsoid method 线性解决

Knapsack

按比例排序，选 $v_1, v_2, v_3, \dots v_i$
要么选前 v_{i-1}，要么选最大的一个，这个 ratio 肯定能做到 $1/2$

点覆盖

随便找排列，任意两个全选，但至少要选一个，所以不超过两倍

最小权点覆盖

Set 覆盖 （集合覆盖

最多 $\ln n$

最多 $n \times (1-1/k)$ （OPT = k） 一轮后
每次都可以乘 $\frac{k-1}{k}$ $\log$ 次变 1，如果 OPT 变小了会更大
用放缩 $(1-\frac{1}{k})^k < (1/e)$

TSP

满足三角形不等式

随便删一个是生成树放小

放大了，dfs 搜一遍，系数 2

随机变量

乘积可以加必须独立

MARKOV'S INEQUALITY

对于任意的 α

$Pr[X \geq \alpha \times E(x)] \leq \frac{1}{\alpha}$
得非负，退一下
$E(x) \geq \sum x \times Pr[X = x] \geq a \times Pr[X \geq a]$

Lecture 12

Union Bound

Law of Total Probability：全概率公式

(Waiting for a First Success)

THE MAX-SAT PROBLEM

满足最多的事件

因为期望 $\alpha = \frac{7}{8}$，所以至少存在一个

probabilistic method.

期望时间复杂度

$\frac{7}{8}m \leq \lfloor \frac{7}{8}m \rfloor + pm$

$\frac{1}{8} \le pm$

期望跑 $8m$ 次

Las Vegas Algorithm

期望复杂度，肯定对

Monte Carlo Algorithms

确定多项式，很小可能错

De- randomization

去随机化

按位贪心 对的对的

COMPUTATIONAL GEOMETRY

Affine Combination 仿射组合

Convex Combination: 和唯一都是正的

Lecture 13

Advanced DS

Bloom Filter

是否为集合一个元素

不在集合里可能会给错误答案 (False Positive 给的答案是为 True，但其实是 False)
False negative 不可能

就哈希一波

Online Stochastic Decision - Making

Secretary Problem

Online 必须马上决定

n/e 算概率

Prophet Inequality

比 decision making之外知道分布了

没有很好的 rule 可以比 $1/2$ 好 （Max，额可以做到 1/2吗