СИНТЕЗ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ЛИНЕЙНЫХ МАТРИЧНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Д.В. Баландин и М.М. Коган

Константину, Тимофею,
Инне и Яне

Оглавление

Введение

Цель этой книги – показать, как на основе численного решения линейных матричных неравенств в пакете MATLAB можно синтезировать законы управления динамическими объектами, включая и робастные законы управления в случае, когда отсутствует полная информация о математической модели объекта и действующих возмущениях.

В теории управления линейные матричные неравенства применялись очень давно. Уже известное уравнение Ляпунова [9] в теории устойчивости

$$A^T X + XA = -Q$$

при произвольной положительно определенной матрице Q можно рассматривать как линейное матричное неравенство

$$A^T X + XA < 0$$

относительно неизвестной матрицы X. Вопросы разрешимости этого неравенства и нахождения его решений легко решаются численно (например, в пакете Matlab). Условия абсолютной устойчивости динамических систем, уравнения которых содержат неизвестную нелинейную функцию, расположенную в заданном секторе, также были выражены в виде линейных матричных неравенств [14, 11]. Однако только после развития соответствующих вычислительных методов в конце 20-го века, основанных на идеях выпуклой оптимизации, и создания алгоритмов и соответствующего программного обеспечения [29, 24] линейные матричные неравенства стали активно применяться в различных областях теории систем и теории управления [19, 31]. В частности, в [23, 26] было показано, как синтез H_∞-регуляторов сводится к решению линейных матричных неравенств.

Синтезу регуляторов на основе линейных матричных неравенств в последние годы было посвящено огромное число публикаций, перечислить которые невозможно, в таких известных журналах как IEEE Transactions on Automatic Control, Automatica, Systems and Control Letters, International Journal of Control и многих других, а также в трудах всех последних конференций по теории управления (World IFAC Congresses, IEEE Conferences on Decision and Control, European Control Conferences и других).

Линейные матричные неравенства позволяют с единых позиций рассматривать и решать такие проблемы управления как стабилизация неустойчивого объекта по состоянию и по измеряемому выходу, модальное управление, оптимальное гашение внешних возмущений в рамках теории H_∞-управления, робастная устойчивость, робастная стабилизация и робастное H_∞-управление. Именно эти задачи и изучаются в данной книге.

В качестве объектов управления рассматриваются линейные непрерывные и дискретные динамические системы с известными постоянными или неизвестными и, возможно, нестационарными ограниченными параметрами. Синтезируемые регуляторы выбираются в классе линейных, в общем случае, динамических обратных связей. Основная идея, положенная в основу синтеза, заключается в следующем. Цель управления формулируется в виде неравенства относительно квадратичной функции Ляпунова замкнутой системы $V(x) = x^T X x$ и параметров регулятора Θ. Для задачи стабилизации это просто неравенство Ляпунова, а для задачи H_∞-управления это неравенство непосредственно получается путем преобразования на основе частотной теоремы [8] целевого условия, выраженного в частотной области, в эквивалентное ему матричное неравенство. В любом случае получающееся неравенство может быть представлено в виде линейного матричного неравенства относительно неизвестной матрицы Θ некоторого специального вида

$$\Psi + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0 \ , \qquad \textbf{(I)}$$

где P, Q и Ψ – матрицы соответствующих порядков, зависящие от исходных данных, причем последняя матрица зависит также от неизвестной матрицы X. Это неравенство имеет непустое множество решений Θ тогда и только тогда, когда выполнены два неравенства

$$W_P^T \Psi W_P < 0 \ , \quad W_Q^T \Psi W_Q < 0 \ , \qquad \textbf{(II)}$$

в которых столбцы матрицы W_P образуют базис ядра матрицы P, а столбцы матрицы W_Q образуют базис ядра матрицы Q. Последние два неравенства уже не содержат переменных Θ, и для регуляторов по состоянию или регуляторов по выходу полного порядка (когда порядок регулятора совпадает с порядком объекта) эти неравенства являются линейными матричными неравенствами относительно матрицы X. Таким образом, исходная задача разделяется на две задачи: сначала находится матрица X, удовлетворяющая линейным матричным неравенствам **(II)**, а затем найденная матрица подставляется в линейное матричное неравенство **(I)** и находятся параметры регулятора Θ.

В более сложных случаях, когда состояние объекта не измеряется и строится регулятор по выходу пониженного порядка, одна из матриц P или Q также зависит от матрицы X, и это приводит к тому, что соответствующие неравенства **(II)** содержат как матрицу X, так и обратную к ней матрицу $Y = X^{-1}$. Теперь эти неравенства оказываются линейными матричными неравенствами относительно двух взаимнообратных матриц X и Y, и задача сводится к оптимизации некоторой невыпуклой функции при ограничениях, задаваемых линейными матричными неравенствами, которые определяют выпуклое множество в пространстве искомых переменных. Указанное обстоятельство принципиальным образом усложняет синтез регуляторов, так как отсутствуют регулярные методы оптимизации невыпуклых функций. К настоящему времени разработаны различные алгоритмы численного решения данной задачи [1, 4, 5, 6, 15, 16, 17, 25, 27, 28, 33, 34]. Во многих практически важных случаях удается осуществить требуемый синтез, хотя ни один из известных алгоритмов не гарантирует решения любой задачи.

При написании этой книги авторы ставили перед собой задачу познакомить русскоязычного читателя с одним из современных направлений теории управления, которое в основном развивалось не в России, хотя фундамент этой теории был заложен в СССР в трудах А.И. Лурье и В.А. Якубовича. С этой целью авторы систематизировали обширный материал, содержащийся в зарубежных журнальных публикациях, привели собственные доказательства некоторых утверждений и собственные результаты, а также проиллюстрировали предлагаемые процедуры синтеза регуляторов на многочисленных примерах управления механическими системами.

Следует добавить, что некоторые из обсуждаемых в этой книге вопросов частично отражены в русскоязычной литературе в двух монографиях [10, 13] и небольшом числе журнальных статей.

Книга организована следующим образом. В части I приводятся основные сведения о линейных матричных неравенствах: определение и основные свойства; задачи разрешимости, оптимизации и обобщенного собственного значения, которые используются в синтезе регуляторов; подробное исследование специального линейного матричного неравенства **(I)**; описание основных используемых команд LMI toolbox пакета Matlab.

Часть II посвящена синтезу законов управления линейными непрерывными и дискретными динамическими объектами. Рассматриваются задачи стабилизации по состоянию и по измеряемому выходу, модальное управление, H_∞-оптимальное управление.

В части III синтезируются законы управления в условиях неопределенности относительно математической модели объекта. Описываются классы рассматриваемых неопределенностей, изучаются задачи робастной устойчивости, робастной стабилизации и робастного H_∞-управления.

В части IV приводятся некоторые алгоритмы невыпуклой оптимизации, применяемые в синтезе регуляторов на основе линейных матричных неравенств.

Часть V посвящена приложению изложенных результатов к решению задачи активного гашения колебаний высотных сооружений, подверженных действию сейсмических нагрузок.

Часть VI состоит из приложений, содержащих необходимые факты из линейной алгебры и матричного анализа [7, 12], а также частотную теорему [8], которые используются для обоснования приводимых в книге теоретических результатов.

Список литературы включает только ключевые публикации, связанные с излагаемым материалом, и не претендует на полноту.

Книга адресуется в первую очередь специалистам в области теории управления и ее приложений к синтезу регуляторов для динамических объектов различной природы. Она также доступна студентам старших курсов и аспирантам университетов и технических вузов, специализирующимся в области прикладной математики, системного анализа и теории управления.

Авторы выражают признательность А.А. Федюкову за помощь в проведении численных экспериментов по синтезу регуляторов, рассматриваемых в книге.

Часть I

Линейные матричные неравенства

Глава 1

Определения и свойства

Линейным матричным неравенством называется неравенство относительно неизвестных переменных $x = (x_1, \cdots, x_m)$ следующего вида

$$F(x) = F_0 + x_1 F_1 + \cdots + x_m F_m > 0 \ , \tag{1.1}$$

в котором $F_0, F_1, \cdots, F_m$ – действительные симметрические матрицы размера $n \times n$, т.е. $F_i = F_i^T \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $i = 0, 1, \cdots, m$. Знак > 0 означает положительную определенность матрицы в левой части неравенства, т.е.

$$u^T F(x) u > 0 \quad \forall\, u \in \mathcal{R}^n,\ u \neq 0 \ .$$

Условие положительной определенности матрицы $F(x)$ может быть эквивалентно выражено в виде $\lambda_{min}(F(x)) > 0$, где $\lambda(\cdot)$ обозначает собственное значение соответствующей матрицы.

В линейном матричном неравенстве $F(x) > 0$ функция $F(x)$ является аффинной (в связи с этим выражению $F(x) > 0$ был бы более адекватен термин "аффинное матричное неравенство") и отображает конечномерное векторное пространство $\mathcal{V}$ в множество $\mathcal{S}^n = \{M| \quad M = M^T \in R^{n \times n}\}$ действительных симметрических матриц. Так как аффинное отображение имеет вид

$$F(x) = F_0 + L(x) \ , \tag{1.2}$$

где $F_0 \in \mathcal{S}^n$ и $L(x)$ – линейное отображение $\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{S}^n$, то, выбирая базис $\{e_1, \cdots, e_m\}$ в $\mathcal{V}$, можно записать

$$L(x) = \sum_{j=1}^{m} x_j F_j \ ,$$

где

$$x = \sum_{j=1}^{m} x_j e_j \ , \quad F_j = L(e_j) \ , \quad j = 1, \cdots, m \ .$$

В приложениях часто встречаются линейные матричные неравенства, записанные относительно матричных переменных. Таковым, например, является неравенство

$$A^T X + XA + Q > 0 \ , \tag{1.3}$$

в котором $A, Q \in \mathcal{R}^{n\times n}$ – заданные матрицы, а $X \in \mathcal{R}^{n\times n}$ – неизвестная матрица. Заметим, что это неравенство будет линейным матричным неравенством только в случае симметрической матрицы Q. В этом случае векторное пространство $\mathcal{V}$ совпадает с пространством $\mathcal{S}^n$ симметрических $(n\times n)$-матриц. Выбирая в этом пространстве базис $\{E_1, \cdots, E_M\}$ и записывая $X = \sum_{j=1}^M x_j E_j$, представим это неравенство в виде

$$Q + \sum_{j=1}^{M} x_j (A^T E_j + E_j A) > 0 \ ,$$

т.е. в виде (1.1). Например, неравенство (1.3) при

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \ , \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

сводится к линейному матричному неравенству

$$x_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} > 0 \ .$$

В нестрогих линейных матричных неравенствах знак $>$ заменяется на $\geq$. Матричные неравенства $F(x) < 0$ и $F(x) > G(x)$ с аффинными функциями $F(x)$ и $G(x)$ записываются как линейные матричные неравенства $-F(x) > 0$ и $F(x) - G(x) > 0$ соответственно.

Линейное матричное неравенство (1.1) определяет нелинейное, но выпуклое ограничение на x, т.е. множество $\mathcal{F} = \{x| \quad F(x) > 0\}$ является выпуклым. Действительно, если $x_1, x_2 \in \mathcal{F}$ и $\alpha \in [0,1]$, то, учитывая, что функция $F(x)$ аффинная, имеем

$$F(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = \alpha F(x_1) + (1-\alpha)F(x_2) > 0 \ .$$

Системой линейных матричных неравенств называется конечное множество линейных матричных неравенств

$$F_1(x) > 0, \cdots, F_k(x) > 0 \ . \tag{1.4}$$

Важно отметить, что любая система линейных матричных неравенств может быть записана как одно линейное матричное неравенство. А именно, (1.4) выполняется тогда и только тогда, когда

$$F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_2(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & F_k(x) \end{pmatrix} > 0 \ .$$

Это следует из того факта, что множество собственных значений матрицы $F(x)$ есть объединение множеств собственных значений матриц $F_1(x), \cdots, F_k(x)$, и миминимальное собственное значение матрицы $F(x)$ совпадает с минимумом всех минимальных чисел матриц $F_i(x), i = 1, \cdots, k$. Следовательно, любой x, для которого $F(x) > 0$, также удовлетворяет системе (1.4) и наоборот.

В приложениях встречаются задачи с так называемыми комбинированными ограничениями, которые задаются линейными матричными неравенствами и линейными уравнениями. Например, рассматриваются области, определяемые условиями

$$\begin{cases} F(x) > 0 \\ Ax = b \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} F(x) > 0 \\ x = Ay + b \end{cases} .$$

Каждое из этих ограничений может быть представлено одним линейным матричным неравенством. Действительно, обобщая эти случаи, рассмотрим условия

$$\begin{cases} F(x) > 0 \\ x \in \mathcal{M} \ , \end{cases} \tag{1.5}$$

где $\mathcal{M}$ – аффинное подмножество $\mathcal{R}^n$, т.е.

$$\mathcal{M} = x_0 + \mathcal{M}_0 = \{x_0 + m| \quad m \in \mathcal{M}_0\} \ ,$$

$x_0 \in \mathcal{R}^n$ и $\mathcal{M}_0$ – линейное подпространство $\mathcal{R}^n$. Пусть $\{e_1, \cdots, e_k\}$ – базис в $\mathcal{M}_0$ и пусть, как и в (1.2), $F(x) = F_0 + L(x)$. Тогда

$$0 < F(x) = F_0 + L(x_0 + \sum_{j=1}^{k} x_j e_j) = F_0 + L(x_0) + \sum_{j=1}^{k} x_j L(e_j) =$$

$$= \bar{F}_0 + x_1\bar{F}_1 + \cdots + x_k\bar{F}_k = \bar{F}(\bar{x}) \ ,$$

где $\bar{F}_0 = F_0 + L(x_0)$, $\bar{F}_j = L(e_j)$, $\bar{x} = (x_1, \cdots, x_k)$. Таким образом, $x \in \mathcal{R}^n$ удовлетворяет (1.5) тогда и только тогда, когда $\bar{F}(\bar{x}) > 0$, где x и $\bar{x}$ связаны соотношением $x = x_0 + \sum_{j=1}^{k} x_j e_j$.

Следующее свойство линейных матричных неравенств очень важно для преобразования нелинейных неравенств в эквивалентные им линейные неравенства. Пусть симметрическая и неособенная матрица M представлена в блочном виде

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22} \end{pmatrix}$$

и блок $M_{11} = M_{11}^T$ невырожденный. Сделаем следующие выкладки

$$x^T M x = x_1^T M_{11} x_1 + 2 x_1^T M_{12} x_2 + x_2^T M_{22} x_2 =$$
$$= (x_1 + M_{11}^{-1} M_{12} x_2)^T M_{11} (x_1 + M_{11}^{-1} M_{12} x_2) + x_2^T (M_{22} - M_{12}^T M_{11}^{-1} M_{12}) x_2 \ ,$$

где разбиение $x = \mathrm{col}\,(x_1, x_2)$ соответствует разбиению матрицы M. Отсюда следует, что $M > 0$ тогда и только тогда, когда $M_{11} > 0$ и $S = M_{22} - M_{12}^T M_{11}^{-1} M_{12} > 0$. Это утверждение носит название леммы Шура (см. леммы A.2 и A.3 в Приложении), а матрица S называется дополнением по Шуру матрицы M_{11} в матрице M. Непосредственным следствием этой леммы является следующее утверждение для линейных матричных неравенств.

Утверждение 1.1 *Пусть $F : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{S}^n$ – аффинная функция, которая представлена в блочном виде*

$$F(x) = \begin{pmatrix} F_{11}(x) & F_{12}(x) \\ F_{21}(x) & F_{22}(x) \end{pmatrix} \ ,$$

где $F_{11}(x)$ квадратная. Тогда $F(x) > 0$ тогда и только тогда, когда

$$F_{11}(x) > 0 \ , \quad F_{22}(x) - F_{12}^T(x) F_{11}^{-1}(x) F_{12}(x) > 0 \ . \tag{1.6}$$

Отметим, что второе неравенство в (1.6) является нелинейным относительно переменных x. Таким образом, используя утверждение 1.1, нелинейные неравенства указанного вида могут быть преобразованы в линейные матричные неравенства. Кроме того, из этого утверждения также следует, что нелинейные неравенства вида (1.6) определяют выпуклые ограничения по переменным x.

В качестве примера преобразования нелинейного матричного неравенства в линейное матричное неравенство рассмотрим следующее квадратичное матричное неравенство Риккати, характерное для задач H_∞-управления

$$A^T X + XA + XBR^{-1}B^T X + Q < 0 \ . \tag{1.7}$$

Применяя лемму Шура, представим это неравенство в виде

$$\begin{pmatrix} -A^T X - XA - Q & XB \\ B^T X & R \end{pmatrix} > 0 \ .$$

Это означает, что нелинейное неравенство (1.7) является выпуклым по X, что было далеко не очевидно.

Глава 2

Основные задачи

Решение многих проблем в теории управления, как будет показано в последующих главах, сводится к решению определенных математических задач, включающих линейные матричные неравенства. Из многообразия таких задач можно выделить три основные.

Задача разрешимости: существует или нет решение x линейного матричного неравенства $F(x) > 0$. Если нет, то задача называется неразрешимой.

Задача оптимизации с линейными матричными ограничениями: для $f : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{R}$ вычислить

$$\mu_{opt} = \inf_{F(x)>0} f(x) \ .$$

Эта задача включает нахождение почти оптимального решения x, для которого $F(x) > 0$ и $\mu_{opt} \leq f(x) \leq \mu_{opt} + \varepsilon$ с заданной точностью ε.

Задача на обобщенное собственное значение: найти минимальное $\lambda \in \mathcal{R}$, для которого

$$\begin{cases} \lambda F(x) - G(x) > 0 \\ \quad F(x) > 0 \\ \quad H(x) > 0 \end{cases} .$$

Приведем несколько проблем, для решения которых применяются сформулированные задачи.

Пример 2.1 *Согласно теореме Ляпунова (см. лемму D.1) линейная динамическая система*

$$\dot{x} = Ax \ , \tag{2.1}$$

где $A \in \mathcal{R}^{n\times n}$, асимптотически устойчива, т.е. все собственные значения матрицы A лежат строго в левой комплексной полуплоскости, *тогда и только тогда, когда существует* $X = X^T > 0$ *такая, что*

$$A^T X + XA < 0 \ .$$

Таким образом, асимптотическая устойчивость системы (2.1) эквивалентна разрешимости следующего линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -A^T X - XA \end{pmatrix} > 0 \ .$$

Пример 2.2 *Согласно теореме Ляпунова (см. лемму D.2) линейная дискретная динамическая система*

$$x_{t+1} = Ax_t \tag{2.2}$$

асимптотически устойчива, т.е. все собственные значения матрицы A *лежат строго внутри единичного круга комплексной плоскости, тогда и только тогда, когда существует* $X = X^T > 0$ *такая, что*

$$A^T XA - X < 0 \ .$$

Таким образом, асимптотическая устойчивость системы (2.2) эквивалентна разрешимости следующего линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X - A^T XA \end{pmatrix} > 0 \ .$$

Пример 2.3 *Уровнем гашения возмущений в устойчивом линейном объекте*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bv \\ z &= Cx + Dv \ , \end{aligned}$$

на который действует ограниченное по норме L_2 *возмущение* $v(t)$, *т.е.*

$$\|v\| = (\int_0^\infty |v(t)|^2 \, dt)^{1/2} < \infty \ ,$$

будем называть величину

$$\gamma_* = \sup_{\|v\| \neq 0} \frac{\|z\|}{\|v\|} \ .$$

Как будет показано в разделе 7.1, уровень гашения возмущений равен минимальному γ, для которого справедливо линейное матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} A^TX + XA & XB & C^T \\ B^TX & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \ .$$

Пример 2.4 *Пусть $F : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{S}^n$ – аффинная функция. Рассмотрим задачу минимизации функции $f(x) = \lambda_{max}(F(x))$. Применяя лемму A.2, имеем*

$$\lambda_{max}(F^T(x)F(x)) < \gamma \Longleftrightarrow \gamma I - F^T(x)F(x) > 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \gamma I & F^T(x) \\ F(x) & I \end{pmatrix} > 0.$$

Если определить

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ \gamma \end{pmatrix} \ , \quad \bar{F}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \gamma I & F^T(x) \\ F(x) & I \end{pmatrix} \ , \quad \bar{f}(\bar{x}) = \gamma \ ,$$

то $\bar{F}(\bar{x})$ – аффинная функция, и задача минимизации максимального собственного значения матрицы $F(x)$ эквивалентна минимизации функции $\bar{f}(\bar{x})$ при ограничениях $\bar{F}(\bar{x}) > 0$. Таким образом, рассматриваемая задача сводится к задаче оптимизации с линейными матричными ограничениями.

Глава 3

Неравенство $\Psi + P^T\Theta^T Q + Q^T\Theta P < 0$

В задачах синтеза регуляторов ключевую роль будет играть линейное матричное неравенство вида

$$\Psi + P^T\Theta^T Q + Q^T\Theta P < 0 \ , \tag{3.1}$$

в котором Ψ – заданная симметрическая матрица порядка $(n \times n)$, а P и Q – заданные матрицы порядков $(l \times n)$ и $(k \times n)$ соответственно. Нас будут интересовать условия разрешимости этого неравенства относительно неизвестной матрицы Θ порядка $(k \times l)$.

Если ранги матриц P и Q равны n, то это неравенство всегда разрешимо. В самом деле, в этом случае уравнение $Q^T\Theta P = K$ разрешимо относительно матрицы Θ при любой матрице K соответствующего порядка (см. лемму B.2), а неравенство (3.1) выполняется, например, при $K < -(1/2)\Psi$. В этой главе будут получены условия разрешимости неравенства (3.1) и представлены в параметрической форме все его решения в двух других случаях: ранг одной из матриц P или Q равен n, а ранг другой – меньше n; ранги обеих матриц P и Q меньше n.

Утверждение 3.1 *Пусть даны симметрическая матрица $\Psi = \Psi^T \in \mathcal{R}^{n\times n}$ и две матрицы $P \in \mathcal{R}^{l\times n}$ и $Q \in \mathcal{R}^{k\times n}$, причем $\mathrm{rank}\, P = n$ и $\mathrm{rank}\, Q = r_Q < n$. Линейное матричное неравенство (3.1) разрешимо относительно матрицы $\Theta \in \mathcal{R}^{k\times l}$ тогда и только тогда, когда*

$$W_Q^T \Psi W_Q < 0 \ , \tag{3.2}$$

где столбцы матрицы W_Q образуют базис $\mathcal{N}(Q)$ – ядра матрицы Q.

Доказательство. Необходимость. Умножив (3.1) слева на W_Q^T и справа на W_Q, получим (3.2).

Достаточность. Разложим пространство $\mathcal{R}^n$ в прямую сумму

$$\mathcal{R}^n = \mathcal{R}(Q^T) \oplus \mathcal{N}(Q) \ ,$$

где $\mathcal{R}(Q^T)$ – образ матрицы Q^T, а $\mathcal{N}(Q)$ – ядро матрицы Q, и выберем соответствующий базис. В этом базисе матрица Q будет иметь следующий блочный вид

$$Q = (Q_1 \quad 0) \ ,$$

где Q_1 имеет размеры $k \times r_Q$, а нулевой блок – $k \times (n - r_Q)$. Представим также матрицы P и Ψ в этом базисе в виде

$$P = (P_1 \quad P_2) \ , \quad \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{12}^T & \Psi_{22} \end{pmatrix} \ .$$

Матрица W_Q должна быть решением уравнения $QW_Q = 0$ и иметь максимальный ранг, поэтому, учитывая структуру матрицы Q, возьмем $W_Q^T = (0 \quad I)$. Тогда условие $W_Q^T \Psi W_Q < 0$ сведется к неравенству $\Psi_{22} < 0$, а неравенство (3.1) примет вид

$$\begin{pmatrix} \Psi_{11} + P_1\Theta^T Q_1 & \Psi_{12} + Q_1^T\Theta P_2 \\ \Psi_{12}^T + P_2^T\Theta^T Q_1 & \Psi_{22} \end{pmatrix} < 0 \ . \tag{3.3}$$

Для заданной матрицы $K = (K_1 \quad K_2)$ рассмотрим следующее матричное уравнение относительно матрицы Θ

$$Q_1^T\Theta(P_1 \quad P_2) = (K_1 \quad K_2) \ . \tag{3.4}$$

Согласно лемме B.2 это уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда имеют решения Y и Z следующие два матричных уравнения

$$Q_1^T Y = K, \quad Z(P_1 \quad P_2) = K \ .$$

Так как $(r_Q \times k)$-матрица Q_1^T имеет ранг $r_Q \le k$ и $(l \times n)$-матрица $(P_1 \quad P_2)$ имеет ранг n, то оба эти уравнения разрешимы. Следовательно, для любых $K_i, i = 1, 2$ найдется матрица Θ такая, что верно (3.4). Таким образом, матрица в левой части (3.3) имеет отрицательно определенный блок Ψ_{22}, а все ее остальные блоки могут быть сделаны произвольными за счет соответствующего выбора матрицы Θ. Выбирая их такими, чтобы выполнялись условия леммы A.2, убеждаемся в справедливости сделанного утверждения.

Утверждение 3.2 *Пусть даны симметрическая матрица $\Psi = \Psi^T \in \mathcal{R}^{n\times n}$ и две матрицы $P \in \mathcal{R}^{l\times n}$ и $Q \in \mathcal{R}^{k\times n}$, причем rank $P = r_P < n$ и rank $Q = r_Q < n$. Линейное матричное неравенство (3.1) разрешимо относительно матрицы $\Theta \in \mathcal{R}^{k\times l}$ тогда и только тогда, когда*

$$W_P^T \Psi W_P < 0 \ , \quad W_Q^T \Psi W_Q < 0 \ , \tag{3.5}$$

где столбцы матрицы W_P образуют базис $\mathcal{N}(P)$ – ядра матрицы P, а столбцы матрицы W_Q образуют базис $\mathcal{N}(Q)$ – ядра матрицы Q.

Доказательство. Необходимость. Умножив (3.1) сначала слева на W_P^T и справа на W_P, а затем слева на W_Q^T и справа на W_Q, получим (3.5).

Достаточность. Разложим пространство $\mathcal{R}^n$ в прямую сумму

$$\mathcal{R}^n = \{\mathcal{N}(P)\backslash[\mathcal{N}(P)\bigcap\mathcal{N}(Q)]\} \oplus [\mathcal{N}(P)\bigcap\mathcal{N}(Q)]\oplus$$
$$\oplus\{\mathcal{N}(Q)\backslash[\mathcal{N}(P)\bigcap\mathcal{N}(Q)]\} \oplus \mathcal{M} \ ,$$

где $\mathcal{N}(P)$ и $\mathcal{N}(Q)$ – ядра матриц P и Q, а $\mathcal{M}$ – дополнение $\mathcal{N}(P)\oplus\mathcal{N}(Q)$ до $\mathcal{R}^n$, и выберем соответствующий базис. В этом базисе матрицы P и Q будут иметь следующий блочный вид

$$P = (0 \quad 0 \quad P_1 \quad P_2) \ , \quad Q = (Q_1 \quad 0 \quad 0 \quad Q_2) \ .$$

Представим также матрицу Ψ в этом базисе в виде $\Psi = (\Psi_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3, 4$. Очевидно, что в качестве матриц W_P и W_Q могут быть взяты

$$W_P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad W_Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

и тогда условия (3.5) сводятся к неравенствам

$$\begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{12}^T & \Psi_{22} \end{pmatrix} < 0 \ , \quad \begin{pmatrix} \Psi_{22} & \Psi_{23} \\ \Psi_{23}^T & \Psi_{33} \end{pmatrix} < 0 \ . \tag{3.6}$$

Требуется теперь установить разрешимость относительно Θ матричного неравенства (3.1), которое принимает вид

$$\begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} + K_{11} & \Psi_{14} + K_{12} \\ \Psi_{12}^T & \Psi_{22} & \Psi_{23} & \Psi_{24} \\ \Psi_{13}^T + K_{11}^T & \Psi_{23}^T & \Psi_{33} & \Psi_{34} + K_{21}^T \\ \Psi_{14}^T + K_{12}^T & \Psi_{24} & \Psi_{34}^T + K_{21} & \Psi_{44} + K_{22} + K_{22}^T \end{pmatrix} < 0 \ , \tag{3.7}$$

где $K_{ij} = Q_i^T \Theta P_j$, $i, j = 1, 2$.

Покажем сначала, что матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{pmatrix} \Theta \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

разрешимо относительно Θ при любой матрице в правой части. Действительно, согласно лемме B.2 для разрешимости этого уравнения необходимо и достаточно разрешимости относительно Y и Z следующих двух уравнений

$$\begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} , \quad Z \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} .$$

Так как $(k \times r_Q)$-матрица $(Q_1 \quad Q_2)$ имеет ранг $r_Q \le k$ и $(l \times r_P)$-матрица $(P_1 \quad P_2)$ имеет ранг $r_P \le l$, то оба эти уравнения разрешимы. Следовательно, для любых $K_{ij}, i, j = 1, 2$ найдется матрица Θ такая, что верно (3.8).

Обозначим

$$\Pi = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} + K_{11} \\ \Psi_{12}^T & \Psi_{22} & \Psi_{23} \\ \Psi_{13}^T + K_{11}^T & \Psi_{23}^T & \Psi_{33} \end{pmatrix}$$

левую верхнюю (3×3)-блочную подматрицу матрицы в левой части (3.7). Тогда согласно лемме A.2 для выполнения (3.7) необходимо и достаточно, чтобы имели место неравенства

$$\Pi < 0 , \quad (\Psi_{44} + K_{22} + K_{22}^T) - \begin{pmatrix} \Psi_{14} + K_{12} \\ \Psi_{24} \\ \Psi_{34} + K_{21}^T \end{pmatrix}^T \Pi^{-1} \begin{pmatrix} \Psi_{14} + K_{12} \\ \Psi_{24} \\ \Psi_{34} + K_{21}^T \end{pmatrix} < 0 .$$

Выполнение второго из этих неравенств при данных K_{11}, K_{12}, K_{21} всегда может быть обеспечено за счет соответствующего выбора K_{22}. Поэтому осталось показать, что $\Pi < 0$ при некоторой K_{11}.

Для этого сделаем следующие преобразования квадратичной формы с матрицей Π при $x = \mathrm{col}\,(x_1, x_2, x_3)$:

$$x^T\Pi x = (x_2 + \Psi_{22}^{-1}\Psi_{12}^T x_1)^T \Psi_{22}(x_2 + \Psi_{22}^{-1}\Psi_{12}^T x_1) +$$
$$+ x_1^T(\Psi_{11} - \Psi_{12}\Psi_{22}^{-1}\Psi_{12}^T)x_1 + 2x_1^T(\Psi_{13} + K_{11}^T)x_3 + 2x_2^T\Psi_{23}x_3 + x_3^T\Psi_{33}x_3 =$$
$$= (x_2 + \Psi_{22}^{-1}\Psi_{12}^T x_1 + \Psi_{22}^{-1}\Psi_{23}x_3)^T\Psi_{22}(x_2 + \Psi_{22}^{-1}\Psi_{12}^T x_1 + \Psi_{22}^{-1}\Psi_{23}x_3) +$$
$$+ x_1^T(\Psi_{11} - \Psi_{12}\Psi_{22}^{-1}\Psi_{12}^T)x_1 + x_3^T(\Psi_{33} - \Psi_{23}^T\Psi_{22}^{-1}\Psi_{23})x_3 +$$
$$+ 2x_1^T(\Psi_{13} + K_{11}^T - \Psi_{12}\Psi_{22}^{-1}\Psi_{23})x_3 \ .$$

Представим полученное выражение в виде

$$x^T\Pi x = (x_2 + \Psi_{22}^{-1}\Psi_{12}^T x_1 + \Psi_{22}^{-1}\Psi_{23}x_3)^T\Psi_{22}(x_2 + \Psi_{22}^{-1}\Psi_{12}^T x_1 + \Psi_{22}^{-1}\Psi_{23}x_3) +$$
$$+ \left(x_1^T \; x_3^T\right) \begin{pmatrix} \Psi_{11} - \Psi_{12}\Psi_{22}^{-1}\Psi_{12}^T & \Psi_{13} + K_{11}^T - \Psi_{12}\Psi_{22}^{-1}\Psi_{23} \\ (\Psi_{13} + K_{11}^T - \Psi_{12}\Psi_{22}^{-1}\Psi_{23})^T & \Psi_{33} - \Psi_{23}^T\Psi_{22}^{-1}\Psi_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Первое слагаемое этого выражения отрицательно, т.к. в силу (3.6) и леммы А.2 имеем $\Psi_{22} < 0$, а в матрице, определяющей второе слагаемое, диагональные блоки – отрицательно определенные матрицы в силу (3.6). Ясно, что за счет выбора K_{11}, положив, например,

$$\Psi_{13} + K_{11}^T - \Psi_{12}\Psi_{22}^{-1}\Psi_{23} = 0 \ ,$$

все это выражение может быть сделано отрицательным для любого x, Тем самым, справедливость утверждения 3.2 доказана.

Отметим, что с учетом леммы А.8 условия (3.5) разрешимости линейного матричного неравенства (3.1) относительно матрицы Θ могут быть эквивалентно выражены неравенствами

$$\Psi - \mu P^T P < 0 \ , \quad \Psi - \mu Q^T Q < 0 \ , \tag{3.9}$$

которые должны выполняться при некотором $\mu > 0$.

Пусть теперь условия, сформулированные в утверждении 3.2, выполняются и неравенство (3.1) разрешимо. Представим $P = P_L P_R$ и $Q = Q_L Q_R$ в виде произведения множителей полного ранга, взяв, например, в качестве столбцов левых сомножителей любые r_P и r_Q линейно независимых столбцов матриц P и Q соответственно. Так как сомножители имеют максимальный ранги, то матрицы $P_L^T P_L$, $P_R P_R^T$, $Q_L^T Q_L$, $Q_R Q_R^T$ являются неособенными. Общий вид всех решений неравенства (3.1) в параметрической форме дается в следующем утверждении.

Утверждение 3.3 *Пусть даны симметрическая матрица $\Psi = \Psi^T \in \mathcal{R}^{n\times n}$ и две матрицы $P \in \mathcal{R}^{l\times n}$ и $Q \in \mathcal{R}^{k\times n}$, причем rank $P = r_P < n$ и rank $Q = r_Q < n$. Пусть также выполнены условия*

$$W_P^T \Psi W_P < 0 \ , \quad W_Q^T \Psi W_Q < 0 \ , \tag{3.10}$$

где столбцы матрицы W_P образуют базис $\mathcal{N}(P)$ – ядра матрицы P, а столбцы матрицы W_Q образуют базис $\mathcal{N}(Q)$ – ядра матрицы Q. Тогда множество всех решений линейного матричного неравенства (3.1) определяется следующим образом

$$\Theta = (Q_L^T)^+ K P_L^+ + Z - (Q_L^T)^+ Q_L^T Z P_L P_L^+ \ , \tag{3.11}$$

где

$$K = \mu S^{1/2} L (P_R \Phi P_R^T)^{-1/2} - \mu Q_R \Phi P_R^T (P_R \Phi P_R^T)^{-1} \ ,$$

$$\Phi = (\mu Q_R^T Q_R - \Psi)^{-1} > 0 \ ,$$

$$S = \mu^{-1} I - Q_R[\Phi - \Phi P_R^T (P_R \Phi P_R^T)^{-1} P_R \Phi] Q_R^T \ ,$$

$$\mu > 0 \ , \quad \|L\| < 1 \ ,$$

а верхний индекс + отвечает операции псевдообращения.

Доказательство. Пусть Θ – решение неравенства (3.1). Тогда матрица $K = Q_L^T \Theta P_L$ удовлетворяет неравенству

$$\Psi + P_R^T K^T Q_R + Q_R^T K P_R < 0 \ ,$$

и, значит, существует такое достаточно большое $\mu > 0$, что выполняется неравенство

$$\Psi + P_R^T K^T Q_R + Q_R^T K P_R + \mu^{-1} P_R^T K^T K P_R < 0 \ .$$

Преобразуем это неравенство к виду

$$\mu(\mu^{-1} K P_R + Q_R)^T (\mu^{-1} K P_R + Q_R) + (\Psi - \mu Q_R^T Q_R) < 0 \ , \tag{3.12}$$

и обозначим $\mu Q_R^T Q_R - \Psi = \Phi^{-1}$.

Из второго из условий (3.10) следует, что $x^T \Psi x < 0$ для всех x, принадлежащих $\mathcal{N}(Q)$ – ядру матрицы Q. Так как $\mathcal{N}(Q) = \mathcal{N}(Q^T Q)$ и из $x^T Q_R^T Q_L^T Q_L Q_R x = 0$ в силу того, что матрица $Q_L^T Q_L$ неособенная, следует $Q_R x = 0$, то $x^T \Psi x < 0$ для всех x, удовлетворяющих уравнению $Q_R x = 0$. Поэтому, применяя лемму A.8, получим, что для достаточно большого $\mu > 0$ имеем $\Psi - \mu Q_R^T Q_R < 0$, т.е. введенная выше матрица Φ – положительно определенная.

Согласно лемме A.2 два неравенства $\Phi > 0$ и (3.12) эквивалентны неравенству

$$\begin{pmatrix} \mu^{-1}I & \mu^{-1}KP_R + Q_R \\ (\mu^{-1}KP_R + Q_R)^T & \Phi^{-1} \end{pmatrix} > 0 \ ,$$

которое, в свою очередь, эквивалентно неравенству

$$\mu^{-1}I > (\mu^{-1}KP_R + Q_R)\Phi(\mu^{-1}KP_R + Q_R)^T \ .$$

Раскрывая скобки в правой части этого неравенства и "выделяя полный квадрат", преобразуем его к виду

$$[\mu^{-1}K + Q_R\Phi P_R^T(P_R\Phi P_R^T)^{-1}](P_R\Phi P_R^T)[\mu^{-1}K + Q_R\Phi P_R^T(P_R\Phi P_R^T)^{-1}]^T <$$
$$< \mu^{-1}I - Q_R[\Phi - \Phi P_R^T(P_R\Phi P_R^T)^{-1}P_R\Phi]Q_R^T \ .$$

Введя обозначения

$$\begin{aligned} \bar{L} &= \mu^{-1}K + Q_R\Phi P_R^T(P_R\Phi P_R^T)^{-1} \ , \\ S &= \mu^{-1}I - Q_R[\Phi - \Phi P_R^T(P_R\Phi P_R^T)^{-1}P_R\Phi]Q_R^T \ , \end{aligned} \tag{3.13}$$

запишем последнее неравенство как

$$\bar{L}(P_R\Phi P_R^T)\bar{L}^T < S \ . \tag{3.14}$$

Покажем, что матрица в правой части этого неравенства является положительно определенной. Действительно, неравенство $S > 0$ эквивалентно неравенству

$$\mu^{-1}I - Q_R[\Phi - \Phi P_R^T(P_R\Phi P_R^T + \nu^{-1}I)^{-1}P_R\Phi]Q_R^T > 0$$

при достаточно большом $\nu > 0$. Учитывая лемму A.5 об обращении матрицы специального вида, перепишем это неравенство в виде

$$\mu^{-1}I > Q_R(\Phi + \nu P_R^T P_R)^{-1}Q_R^T \ .$$

С учетом леммы A.2 это неравенство, в свою очередь, эквивалентно неравенству

$$\Phi^{-1} + \nu P_R^T P_R - \mu Q_R^T Q^R = \nu P_R^T P_R - \Psi > 0 \ ,$$

которое выполняется при достаточно большом $\nu > 0$ в силу первого из условий (3.10) и леммы A.8.

Таким образом, исходноое неравенство (3.1) эквивалентно неравенству (3.14). Обозначая

$$L = S^{-1/2}\bar{L}(P_R\Phi P_R^T)^{1/2} \ ,$$

запишем неравенство (3.14) как

$$\|L\| < 1 \ .$$

Из (3.13) найдем

$$K = \mu S^{1/2} L (P_R \Phi P_R^T)^{-1/2} - \mu Q_R \Phi P_R^T (P_R \Phi P_R^T)^{-1} \ .$$

Наконец, так как $K = Q_L^T \Theta P_L$, то

$$\Theta = (Q_L^T)^+ K P_L^+ + Z - (Q_L^T)^+ Q_L^T Z P_L P_L^+$$

для некоторой матрицы Z. Таким образом, мы установили, что формула (3.11) задает все решения неравенства (3.1).

Глава 4

Решение линейных матричных неравенств в пакете MATLAB

В основу численных методов решения линейных матричных неравенств положены методы выпуклой оптимизации. В пакете MATLAB используются так называемые методы внутренней точки (interior point methods), разработанные в [29]. Изложим основную идею этих методов на примере задачи минимизации выпуклой функции $f(x)$ на множестве $\mathcal{F} = \{x : F(x) > 0\}$, определяемом линейным матричным неравенством. Эта задача условной оптимизации сводится к задаче безусловной оптимизации функции

$$f_r(x) = rf(x) + \phi(x) \ ,$$

где $r > 0$ - штрафной параметр, а штрафная функция определяется следующим образом

$$\phi(x) = \begin{cases} \log\det F^{-1}(x), & x \in \mathcal{F} \\ \infty, & x \notin \mathcal{F} \end{cases} .$$

Решение задачи безусловной оптимизации представляет собой итерационный процесс, на n-й итерации которого применяется метод Ньютона-Рафсона для нахождения минимума x_n функции $f_r(x)$ при $r = r_n$. Для соответствующим образом построенной последовательности $r_n \to \infty$ последовательность x_n стремится к точке x_*, являющейся решением исходной задачи условной оптимизации.

LMI Toolbox пакета MATLAB позволяет эффективно решить одну из следующих задач.

Задача разрешимости: существует или нет решение x линейного матричного неравенства $F(x) < 0$. Если нет, то задача называется неразрешимой.

Задача оптимизации линейной функции $c^T x$ при линейном матричном ограничении: вычислить

$$\mu_{opt} = \inf_{F(x)<0} c^T x \ .$$

Эта задача включает нахождение почти оптимального решения x, для которого $F(x) < 0$ и $\mu_{opt} \leq c^T x \leq \mu_{opt} + \varepsilon$ с заданной точностью ε.

Задача на обобщенное собственное значение: найти минимальное $\lambda \in \mathcal{R}$, для которого

$$\begin{cases} \lambda F(x) - G(x) < 0 \\ F(x) < 0 \\ H(x) < 0 \end{cases} .$$

В последующем будут использоваться первые две задачи, на которых мы остановимся подробнее. Задача разрешимости линейного матричного неравенства $F(x) < 0$ сводится к минимизации параметра t, для которого выполняется линейное матричное неравенство $F(x) - tI \leq 0$. Если $t_{min} \leq 0$, то исходное линейное матричное неравенство разрешимо и строго разрешимо, если $t_{min} < 0$; в противном случае, $t_{min} > 0$, неравенство неразрешимо. Для численного решения используется команда

[tmin, xfeas]=feasp(lmisys, options, target) ,

в которой tmin и xfeas суть минимальное значение параметра t и отвечающее ему решение линейного матричного неравенства. Аргументы команды feasp: lmisys – описание линейного матричного неравенства (размерность и структура матричных переменных, задание известных матриц); options – описание параметров алгоритма оптимизации; target – назначаемое значение параметра tmin такое, что при t<target алгоритм оптимизации останавливается (по умолчанию target=0).

Для решения задачи минимизации линейной функции при ограничении, задаваемом линейным матричным неравенством, используется команда

[copt, xopt]=mincx(lmisys, c, options, xinit, target) ,

в которой copt и xopt суть минимальное значение минимизируемой линейной функции и отвечающее ей значение переменных x. Аргументы команды mincx: lmisys – описание линейного матричного неравенства; c – описание вектора c, определяющего минимизируемую линейную функцию; options – описание параметров алгоритма оптимизации; xinit – описание вектора начального приближения для xopt (удачное задание этого вектора может ускорить получение результата); target – назначаемое значение параметра для величины $c^T x$ такое, что при $c^T x <$ target алгоритм оптимизации останавливается.

Для решения неравенства

$$\Psi + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0 \ ,$$

которое неоднократно будет использоваться в дальнейшем изложении, используется команда

$$\text{Xc=basiclmi}(\Psi, Q, P) \ ,$$

результатом выполнения которой является решение Xc. Команда

$$\text{X=basiclmi}(\Psi, Q, P,' Xmin')$$

вычисляет решение этого неравенства, имеющее минимальную норму.

Отметим также, что матрица W_M, столбцы которой образуют базис ядра матрицы M, находится с помощью команды

$$W_M = \text{null}(M) \ .$$

Все детали относительно использования этих и других команд в LMI Toolbox содержатся в [24].

Часть II

Синтез законов управления

Глава 5

Стабилизация

5.1 Стабилизация по состоянию

Задача стабилизации по состоянию линейного стационарного динамического объекта, описываемого дифференциальным уравнением вида

$$\dot{x} = Ax + Bu \ , \tag{5.1}$$

где $x \in R^{n_x}$ – состояние объекта, $u \in R^{n_u}$ – управление, состоит в выборе закона управления из класса линейных обратных связей по состоянию вида

$$u = \Theta x \ , \tag{5.2}$$

где Θ – матрица параметров регулятора соответствующего порядка, при котором состояние $x = 0$ замкнутой системы (5.1), (5.2) является асимптотически устойчивым по Ляпунову (см. лемму D.1 в Приложении).

Классический подход к синтезу линейных обратных связей в пространстве состояний, во всяком случае для управляемой пары (A, B), связан с каноническим представлением управляемого объекта и построением модального управления, обеспечивающего заданные собственные значения (моды) матрицы замкнутой системы. Построение модального управления сводится к нахождению характеристического полинома матрицы A, выбору канонического базиса и решению системы линейных уравнений. Вместе с тем, возможен альтернативный путь синтеза стабилизирующих регуляторов, основанный на применении теории линейных матричных неравенств и эффективных алгоритмов их решения, реализованных в пакете MATLAB. Далее на различных примерах и, в частности, на примере задачи управления высотным сооружением будет показано, что алгоритмы синтеза регуляторов, основанные на решении линейных матричных неравенств, оказываются более предпочтительными.

Изложим этот альтернативный подход. Запишем уравнение замкнутой системы

$$\dot{x} = A_c x \ , \quad A_c = A + B\Theta \tag{5.3}$$

и переформулируем задачу стабилизации как существование у этой системы квадратичной функции Ляпунова, т.е. такой $V(x) = x^T X x$ с $X = X^T > 0$, для производной которой в силу системы (5.3) выполняется

$$\dot{V} = x^T(A_c^T X + X A_c)x < 0 \ , \quad \forall x \neq 0 \ . \tag{5.4}$$

Перепишем неравенство (5.4) в виде

$$A^T X + XA + \Theta^T B^T X + XB\Theta < 0 \ , \tag{5.5}$$

или, умножая это неравенство слева и справа на матрицу X^{-1} и обозначая $Y = X^{-1}$, в виде

$$YA^T + AY + Y\Theta^T B^T + B\Theta Y < 0 \ , \quad Y > 0 \ . \tag{5.6}$$

Теперь перед нами стоит задача нахождения пары матриц (Y, Θ), удовлетворяющих матричным неравенствам (5.6). Рассмотрим последовательно два способа ее решения путем приведения нелинейного матричного неравенства к линейным матричным неравенствам, решаемым в пакете MATLAB.

Первый способ состоит в том, чтобы ввести новую матричную переменную $Z = \Theta Y$ и записать неравенства (5.6) в виде линейных матричных неравенств

$$YA^T + AY + Z^T B^T + BZ < 0 \ , \quad Y > 0 \tag{5.7}$$

относительно переменных Y и Z. Находя пару (Y, Z), удовлетворяющую (5.7), вычислим параметры искомой обратной связи $\Theta = ZY^{-1}$. Таким образом, верно следующее.

Утверждение 5.1 *Объект (5.1) стабилизируем тогда и только тогда, когда линейные матричные неравенства (5.7) разрешимы относительно переменных Y и Z. В случае стабилизируемости параметры линейной обратной связи по состоянию находятся так: $\Theta = ZY^{-1}$.*

Второй способ состоит в представлении неравенства (5.6) в виде

$$\Psi + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0$$

с $\Psi = YA^T + AY$, $P = Y$, $Q = B^T$. Тогда согласно утверждению 3.1, условия которого выполнены в силу того, что $\det P \neq 0$, это неравенство разрешимо относительно матрицы Θ тогда и только тогда, когда разрешимы неравенства

$$W_{B^T}^T (YA^T + AY) W_{B^T} < 0 \ , \quad Y > 0 \ . \tag{5.8}$$

Здесь W_{B^T} обозначает матрицу, столбцы которой составляют базис ядра матрицы B^T, т.е. матрица W_{B^T} удовлетворяет матричному уравнению $B^T W_{B^T} = 0$ и имеет максимальный ранг среди всех его решений. Подставляя решение Y неравенств (5.8) в (5.6), приходим к линейному матричному неравенству относительно параметров Θ, решая которое находим параметры линейной обратной связи. Итак, имеет место следующее.

Утверждение 5.2 *Объект (5.1) стабилизируем тогда и только тогда, когда линейные матричные неравенства (5.8) разрешимы относительно переменной Y. В случае стабилизируемости параметры линейной обратной связи по состоянию находятся как решения линейного матричного неравенства (5.6) с найденным Y относительно переменной Θ.*

Отметим, что с учетом леммы А.8 неравенства (5.8) выполняются при некоторой матрице Y тогда и только тогда, когда разрешимы линейные матричные неравенства

$$YA^T + AY - \mu BB^T < 0 \ , \quad Y > 0 \tag{5.9}$$

относительно переменных Y и $\mu > 0$.

Пример 5.1 Стабилизация перевернутого маятника: *объект описывается уравнением*

$$\ddot{\varphi} - \varphi = u \ .$$

Введем вектор $x = col(x_1, x_2)$, где $x_1 = \varphi$, $x_2 = \dot{\varphi}$, и запишем это уравнение как

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \ , \\ \dot{x}_2 &= x_1 + u \ , \end{aligned}$$

т.е. в виде (5.1), где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

В данном случае неравенства (5.7) принимают вид

$$\begin{pmatrix} 2y_{12} & y_{11}+y_{22}+z_1 \\ \star & 2(y_{12}+z_2) \end{pmatrix} < 0 \ , \quad \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ \star & y_{22} \end{pmatrix} > 0 \ , \tag{5.10}$$

где $Z = (z_1 \quad z_2)$. *Согласно условиям знакоопределенности симметрических матриц эти неравенства эквивалентны следующей системе нелинейных неравенств:*

$$\begin{aligned} & y_{12} < 0 \ , \quad 4y_{12}(y_{12}+z_2) - (y_{11}+y_{22}+z_1)^2 > 0 \ , \\ & y_{11} > 0 \ , \quad y_{11}y_{22} - y_{12}^2 > 0 \ , \end{aligned}$$

решение которых представляет определенную трудность. Вместе с тем, Y *и* Z *удовлетворяют линейным матричным неравенствам (5.7) и, следовательно, эти матрицы, а значит, и параметры регулятора* Θ, *могут быть найдены с использованием LMI Toolbox (команда feasp):*

$$Y = \begin{pmatrix} 90,9732 & -30,3244 \\ * & 90,9732 \end{pmatrix} \ , \quad Z = (-181,9464 \quad -15,1622) \ ,$$

$$\Theta = (-2,3125 \quad -0,9375) \ .$$

Таким образом, один из регуляторов по состоянию, который стабилизирует перевернутый маятник, задается уравнением

$$u = -2,3125\varphi - 0,9375\dot{\varphi} \ .$$

Решение этой задачи вторым способом предполагает нахождение матрицы W_{B^T}, *т.е. матрицы максимального ранга, удовлетворяющей уравнению*

$$B^T W_{B^T} = 0 \ .$$

Очевидно, что одним из его решений в данном случае будет

$$W_{B^T} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

Тогда первое неравенство в (5.8) примет вид

$$(1 \quad 0) \begin{pmatrix} 2y_{12} & y_{11}+y_{22} \\ \star & 2y_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2y_{12} < 0 \ .$$

Теперь, подставляя в (5.6) любую матрицу $Y > 0$, *у которой* $y_{12} < 0$, *получим линейное матричное неравенство относительно* Θ. *Решение* *этого неравенства с помощью команды feasp дает требуемый результат. Например, для*

$$Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \star & 1 \end{pmatrix}$$

было найдено $\Theta = (-3,4963 \quad -3,9925)$. *Итак, регулятор*

$$u = -3,4963\varphi - 3,9925\dot{\varphi}$$

также стабилизирует перевернутый маятник.

Конечно, в связи с этим примером может возникнуть законный вопрос: зачем нужны здесь линейные матричные неравенства, когда при линейной обратной связи $u = \Theta_1\varphi + \Theta_2\dot{\varphi}$ характеристический полином замкнутой системы, равный $s^2 - \theta_2 s - (1 + \theta_1)$, имеет корни слева от мнимой оси при $\Theta_1 < -1$, $\Theta_2 < 0$. Однако, следующий пример уже не такой тривиальный, и он показывает, что линейные матричные неравенства являются эффективным средством для синтеза регуляторов.

Пример 5.2 Стабилизация двухзвенного перевернутого маятника: *объект описывается уравнением*

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 &= 2\varphi_1 - \varphi_2 + u \ , \\ \ddot{\varphi}_2 &= -2\varphi_1 + 2\varphi_2 \ . \end{aligned}$$

Введем вектор $x = col(x_1, x_2, x_3, x_4)$, *где* $x_1 = \varphi_1$, $x_2 = \varphi_2$, $x_3 = \dot{\varphi}_1$, $x_4 = \dot{\varphi}_2$, *и запишем это уравнение как*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \ , \\ \dot{x}_2 &= x_4 \ , \\ \dot{x}_3 &= 2x_1 - x_2 + u \ , \\ \dot{x}_4 &= -2x_1 + 2x_2 \ , \end{aligned}$$

т.е. в виде (5.1), где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

Решение задачи синтеза первым способом дало следующие результаты:

$$Y = \begin{pmatrix} 136,0315 & 95,7016 & -35,9087 & -4,6735 \\ 95,7016 & 97,7976 & 3,4852 & -32,1794 \\ -35,9087 & 3,4852 & 270,8664 & 34,0661 \\ -4,6735 & -32,1794 & 34,0661 & 55,9804 \end{pmatrix} ,$$

$$Z = (-447,2277 \quad -127,6716 \quad -7,7261 \quad -101,6202) ,$$

$$\Theta = (-18,0248 \quad 19,9613 \quad -4,0071 \quad 10,5928) ,$$

а второй способ дал ту же самую матрицу Y и

$$\Theta = (-17,7036 \quad 19,5432 \quad -3,8653 \quad 10,2930) .$$

5.2 Стабилизация по выходу

Рассмотрим управляемый объект с неизмеряемым состоянием

$$\begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \ , \\ y = Cx \ , \end{array} \tag{5.11}$$

в котором $x \in R^{n_x}$ – состояние системы, $u \in R^{n_u}$ –управление, $y \in R^{n_y}$ – измеряемый выход. Требуется построить линейный динамический регулятор k-го порядка вида

$$\begin{array}{l} \dot{x}_r = A_r x_r + B_r y \ , \\ u = C_r x_r + D_r y \ , \end{array} \tag{5.12}$$

где $x_r \in R^k$ – состояние регулятора, обеспечивающий асимптотическую устойчивость замкнутой системы (5.11), (5.12). В частном случае $k = 0$ имеем статический регулятор $u = D_r y$.

Представим уравнение замкнутой системы (5.11), (5.12) в виде

$$\dot{x}_c = A_c x_c \ , \quad A_c = \begin{pmatrix} A + BD_rC & BC_r \\ B_rC & A_r \end{pmatrix} , \tag{5.13}$$

где $x_c = \mathrm{col}\,(x, x_r)$. Переформулируем цель управления в виде существования квадратичной функции Ляпунова $V(x_c) = x_c^T X x_c$, где $X^T = X > 0$, такой, что по любой траектории замкнутой системы имеет место

$$\dot{V} < 0 \ .$$

Это условие эквивалентно следующему матричному неравенству

$$A_c^T X + X A_c < 0 \ . \tag{5.14}$$

Вводя параметры регулятора

$$\Theta = \begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix} \ , \tag{5.15}$$

представим матрицу замкнутой системы в виде

$$A_c = A_0 + B_0 \Theta C_0 \ ,$$

где

$$\begin{gathered} A_0 = \begin{pmatrix} A & 0_{n_x \times k} \\ 0_{k \times n_x} & 0_{k \times k} \end{pmatrix} \ , \\ B_0 = \begin{pmatrix} 0_{n_x \times k} & B \\ I_k & 0_{k \times n_u} \end{pmatrix} \ , \quad C_0 = \begin{pmatrix} 0_{k \times n_x} & I_k \\ C & 0_{n_y \times k} \end{pmatrix} \ , \end{gathered} \tag{5.16}$$

выделяя тем самым слагаемое, содержащее матрицу Θ неизвестных параметров регулятора. Представим неравенство (5.14) в виде

$$A_0^T X + X A_0 + C_0^T \Theta^T B_0^T X + X B_0 \Theta C_0 < 0 \tag{5.17}$$

или, умножая это неравенство слева и справа на матрицу X^{-1} и обозначая $Y = X^{-1}$, в виде

$$Y A_0^T + A_0 Y + Y C_0^T \Theta^T B_0^T + B_0 \Theta C_0 Y < 0 \ , \quad Y > 0 \ . \tag{5.18}$$

Попытаемся, как и в случае измеряемого состояния, применить два способа решения этого неравенства. В соответствии с первым способом мы должны ввести новую матричную переменную

$$Z = \Theta C_0 Y \tag{5.19}$$

и получить линейные матричные неравенства

$$Y A_0^T + A_0 Y + Z^T B_0^T + B_0 Z < 0 \ , \quad Y > 0$$

относительно Y и Z. Пусть (Y, Z) – некоторое решение этой системы. Тогда для нахождения элементов матрицы Θ мы должны решить систему

(5.19), которая представляет собой систему $(n_u+k)(n_x+k)$ уравнений с $(n_u+k)(n_y+k)$ неизвестными. Как правило, размерность вектора состояния превышает размерность вектора измерений ($n_x > n_y$), поэтому в общем случае эта система является несовместной, и мы переходим ко второму способу решения рассматриваемой задачи.

Представим неравенство (5.17) в виде

$$\Psi + P^T\Theta^T Q + Q^T\Theta P < 0$$

с $\Psi = A_0^T X + XA_0$, $P = C_0$, $Q = B_0^T X$. Тогда согласно утверждению 3.2 это неравенство разрешимо относительно матрицы Θ тогда и только тогда, когда разрешимы неравенства

$$W_{B_0^T X}^T (A_0^T X + XA_0) W_{B_0^T X} < 0\ , \quad W_{C_0}^T (A_0^T X + XA_0) W_{C_0} < 0\ , \tag{5.20}$$

в которых столбцы матриц $W_{B_0^T X}$ и W_{C_0} образуют базисы ядер матриц $B_0^T X$ и C_0 соответственно. Замечая, что $W_{B_0^T X} = X^{-1} W_{B_0^T}$, где столбцы $W_{B_0^T}$ образуют базис ядра матрицы B_0^T, и подставляя это выражение в (5.20), приходим к справедливости следующего утверждения.

Утверждение 5.3 *Объект (5.11) стабилизируем с помощью регулятора по выходу (5.12) заданного порядка $k \le n_x$ тогда и только тогда, когда существует $(n_x+k)\times(n_x+k)$-матрица $X = X^T$, удовлетворяющая следующим условиям:*

$$\begin{aligned} &W_{C_0}^T (A_0^T X + XA_0) W_{C_0} < 0\ , \quad X > 0\ , \\ &W_{B_0^T}^T (X^{-1} A_0^T + A_0 X^{-1}) W_{B_0^T} < 0\ . \end{aligned} \tag{5.21}$$

Если условия (5.21) выполнены и такая матрица X найдена, то параметры Θ искомого регулятора (5.12) находятся как решения линейного матричного неравенства (5.17) относительно переменной Θ.

Введем матрицу $Y = X^{-1}$ и перепишем условия (5.21) в виде линейных матричных неравенств относительно матриц X и Y:

$$\begin{aligned} &W_{C_0}^T (A_0^T X + XA_0) W_{C_0} < 0\ , \quad X > 0\ , \\ &W_{B_0^T}^T (YA_0^T + A_0 Y) W_{B_0^T} < 0\ , \quad Y > 0\ . \end{aligned} \tag{5.22}$$

Тогда рассматриваемая проблема синтеза стабилизирующих регуляторов по выходу заданного порядка сводится к **задаче А**: найти две взаимнообратные $(n_x+k)\times(n_x+k)$-матрицы $X = X^T$ и Y ($XY = I$), удовлетворяющие линейным матричным неравенствам (5.22), или установить, что таких матриц не существует.

В части IV будут приведены алгоритмы решения **задачи А**, применение которых позволяет синтезировать регуляторы по выходу.

Пример 5.3 Стабилизация по выходу перевернутого маятника: *объект описывается уравнениями (см. также пример 5.1)*

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \ , \\
\dot{x}_2 &= x_1 + u \ , \\
y &= x_1 \ .
\end{aligned}$$

Требуется синтезировать динамический регулятор по выходу первого порядка вида (5.12).

В данном случае неизвестными элементами матрицы Θ являются четыре параметра регулятора: A_r, B_r, C_r, D_r. Они могут быть найдены как решение линейного матричного неравенства (5.17) относительно Θ, в котором

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

а матрица X порядка 3×3 в свою очередь должна удовлетворять системе неравенств (5.21), где

$$W_{B_0^T} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad W_{C_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

Для поиска требуемой матрицы X применялся алгоритм нахождения взаимнообратных матриц, удовлетворяющих системе линейных матричных неравенств (5.22). В результате были получены

$$X = \begin{pmatrix} 0.7549 & 0 & -0.6737 \\ \star & 1.5655 & 1.0186 \\ \star & \star & 4.1051 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1.6050 & -0.2044 & 0.3141 \\ \star & 0.7878 & -0.2290 \\ \star & \star & 0.3520 \end{pmatrix},$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} -0.1819 & 0.1197 \\ 0.5487 & -1.5601 \end{pmatrix} \ .$$

Таким образом, искомый регулятор описывается уравнениями

$$\begin{aligned}
\dot{x}_r &= -0.1819 x_r + 0.1197 y \ , \\
u &= 0.5487 x_r - 1.5601 y \ ,
\end{aligned}$$

и матрица замкнутой системы

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.5601 & 0 & 0.5487 \\ 0.1197 & 0 & -0.1819 \end{pmatrix}$$

имеет собственные значения

$$\lambda_{1,2} = -0.0582 \pm 0.7410i \ , \quad \lambda_3 = -0.0655 \ ,$$

лежащие слева от мнимой оси.

Пример 5.4 Стабилизация по выходу двухзвенного перевернутого маятника: *объект описывается уравнениями (см. также пример 5.2)*

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_3 \ , \\ &\dot{x}_2 = x_4 \ , \\ &\dot{x}_3 = 2x_1 - x_2 + u \ , \\ &\dot{x}_4 = -2x_1 + 2x_2 \ , \\ &y_1 = x_1 \ , \\ &y_2 = x_2 \ . \end{aligned}$$

Требуется синтезировать динамический регулятор по выходу первого порядка вида (5.12).

В данном случае неизвестными элементами матрицы Θ *являются шесть параметров регулятора:* $A_r, B_r = (B_r^{(1)}\, B_r^{(2)}), C_r, D_r = (D_r^{(1)}\, D_r^{(2)})$. *Они могут быть найдены как решение линейного матричного неравенства (5.17) относительно* Θ*, в котором*

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.23}$$

а матрица X *порядка* 5×5 *удовлетворяет системе неравенств (5.21),* *где*

$$W_{B_0^T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W_{C_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для поиска требуемой матрицы X применялся алгоритм нахождения взаимнообратных матриц, удовлетворяющих системе линейных матричных неравенств (5.22). В результате были получены

$$X = \begin{pmatrix} 3.4330 & -5.3960 & -0.0027 & -0.7563 & 2.1220 \\ \star & 13.1102 & 0.8556 & -1.5000 & -8.2465 \\ \star & \star & 0.4706 & -0.9072 & -1.0650 \\ \star & \star & \star & 3.2732 & 3.0418 \\ \star & \star & \star & \star & 7.0358 \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} 3.0358 & 2.7483 & -0.1135 & -0.3296 & 2.4310 \\ \star & 3.2966 & -0.4087 & -1.2210 & 3.5011 \\ \star & \star & 4.9399 & 1.4611 & -0.3288 \\ \star & \star & \star & 1.8501 & -1.9104 \\ \star & \star & \star & \star & 4.2886 \end{pmatrix},$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} -8.4770 & -3.8599 & 11.3614 \\ -22.7817 & -21.4799 & 40.8038 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, искомый регулятор описывается уравнениями

$$\dot{x}_r = -8.4770x_r - 3.8599y_1 + 11.3614y_2 \ ,$$
$$u = -22.7817x_r - 21.4799y_1 + 40.8038y_2 \ ,$$

и матрица замкнутой системы имеет собственные значения

$$\lambda_1 = -7.0975, \quad \lambda_{2,3} = -0.2964 \pm 2.6608i, \quad \lambda_4 = -0.7098, \quad \lambda_5 = -0.0770,$$

лежащие слева от мнимой оси.

Возможен и другой путь использования условий (5.22) для синтеза стабилизирующих регуляторов. Так как

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0_{n_x \times k} & B \\ I_k & 0_{k \times n_u} \end{pmatrix} , \quad C_0 = \begin{pmatrix} 0_{k \times n_x} & I_k \\ C & 0_{n_y \times k} \end{pmatrix}$$

и матрицы максимального ранга $W_{B_0^T}$ и W_{C_0} должны удовлетворять уравнениям $B_0^T W_{B_0^T} = 0$ и $C_0 W_{C_0} = 0$ соответственно, то непосредственно проверяется, что мы можем взять

$$W_{B_0^T} = \begin{pmatrix} W_{B^T} \\ 0 \end{pmatrix} , \quad W_{C_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ W_C \end{pmatrix} .$$

В соответствии с блочной структурой матрицы

$$A_0 = \begin{pmatrix} A & 0_{n_x \times k} \\ 0_{k \times n_x} & 0_{k \times k} \end{pmatrix}$$

представим матрицы X и Y в блочном виде

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{pmatrix} , \quad Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12}^T & Y_{22} \end{pmatrix} . \tag{5.24}$$

Тогда неравенства (5.22) примут вид

$$\begin{aligned} &W_C^T (A^T X_{11} + X_{11} A) W_C < 0 , \\ &W_{B^T}^T (Y_{11} A^T + A Y_{11}) W_{B^T} < 0 . \end{aligned} \tag{5.25}$$

Заметим, что в силу критерия Сильвестра из условий $X > 0$ и $Y > 0$ следует $X_{11} > 0$ и $Y_{11} > 0$. Таким образом, возникает задача о нахождении положительно определенных матриц X_{11} и Y_{11}, удовлетворяющих линейным матричным неравенствам (5.25) и являющихся соответствующими блоками взаимнообратных положительно определенных матриц X и Y.

Распишем условие $XY = I$ в блочном виде

$$\begin{aligned} X_{11} Y_{11} + X_{12} Y_{12}^T &= I , \\ X_{11} Y_{12} + X_{12} Y_{22} &= 0 , \\ X_{12}^T Y_{11} + X_{22} Y_{12}^T &= 0 , \\ X_{12}^T Y_{12} + X_{22} Y_{22}^T &= I . \end{aligned} \tag{5.26}$$

Из первого уравнения получим

$$I - X_{11}Y_{11} = X_{12}Y_{12}^T .$$

Так как ранг каждой из матриц в правой части этого равенства не превышает k и, следовательно, ранг произведения этих матриц также не превышает k, то отсюда следует условие

$$\operatorname{rank}(I - X_{11}Y_{11}) \le k . \tag{5.27}$$

Далее, выразим из первого уравнения

$$Y_{11} = X_{11}^{-1}(I - X_{12}Y_{12}^T)$$

и подставим в третье

$$X_{12}^T X_{11}^{-1} + (X_{22} - X_{12}^T X_{11}^{-1} X_{12})Y_{12}^T = 0 .$$

Умножим обе части этого уравнения слева на Y_{12}

$$Y_{12}X_{12}^T X_{11}^{-1} + Y_{12}(X_{22} - X_{12}^T X_{11}^{-1} X_{12})Y_{12}^T = 0 .$$

Из первого уравнения (5.26) следует, что

$$Y_{12}X_{12}^T = I - Y_{11}X_{11} .$$

Подставляя это выражение в предыдущее равенство, получим

$$(I - Y_{11}X_{11})X_{11}^{-1} + Y_{12}(X_{22} - X_{12}^T X_{11}^{-1} X_{12})Y_{12}^T = 0 .$$

Откуда следует

$$X_{11}^{-1} - Y_{11} = -Y_{12}(X_{22} - X_{12}^T X_{11}^{-1} X_{12})Y_{12}^T .$$

Так как $X > 0$, то из леммы А.2 получим

$$X_{22} - X_{12}^T X_{11}^{-1} X_{12} > 0 .$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$X_{11}^{-1} - Y_{11} \le 0 ,$$

которое в силу леммы А.3 выражается в виде линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} X_{11} & I \\ I & Y_{11} \end{pmatrix} \ge 0 . \tag{5.28}$$

Оказывается (см. лемму A.7), что условия $X_{11} > 0$, $Y_{11} > 0$, (5.27) и (5.28) эквивалентны условию существования взаимнообратных матриц $X > 0$, $Y > 0$ с данными блоками X_{11}, Y_{11}. Там же показано, как при выполнении указанных условий по данным блокам X_{11}, Y_{11} получить соответствующую матрицу X. А именно, применяя лемму A.6 и учитывая, что матрица $X_{11} - Y_{11}^{-1}$ симметрическая и неотрицательно определенная, представим

$$X_{11} - Y_{11}^{-1} = (U_1 U_2) \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{pmatrix} ,$$

где $U_1 \in \mathcal{R}^{n \times r}$, $U_2 \in \mathcal{R}^{n \times (n-r)}$, $\Sigma = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_r) > 0$. Правую часть этого равенства запишем эквивалентно в виде

$$S \begin{pmatrix} \Sigma & 0_{r \times (k-r)} \\ 0_{(k-r) \times r} & I_{k-r} \end{pmatrix} S^T , \quad S = (U_1 U_2) \begin{pmatrix} I_r & 0_{r \times (k-r)} \\ 0_{(n-r) \times r} & 0_{(n-r) \times (k-r)} \end{pmatrix}$$

и выберем

$$X_{12} = S , \quad X_{22} = \operatorname{diag}(\lambda_1^{-1}, \cdots, \lambda_r^{-1}, 1, \cdots, 1) . \tag{5.29}$$

Таким образом, синтез стабилизирующих регуляторов по выходу заданного порядка может быть также осуществлен в результате решения **задачи B**: найти две $(n_x \times n_x)$-матрицы $X_{11} = X_{11}^T > 0$, $Y_{11} = Y_{11}^T > 0$, удовлетворяющие линейным матричным неравенствам (5.25) и (5.28), а также условию (5.27), или установить, что таких матриц не существует.

Здесь только еще отметим, что в случае стабилизирующего регулятора полного порядка, т.е. когда $k = n_x$, очевидно, что условие (5.27) всегда выполнено. Следовательно, в этом случае рассматриваемая задача связана только с решениями линейных матричных неравенств, а потому является задачей выпуклого программирования.

Пример 5.5 Стабилизация по выходу двухзвенного перевернутого маятника регулятором полного порядка: *объект описывается уравнениями (см. также примеры 5.2 и 5.4)*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 , \\ \dot{x}_2 &= x_4 , \\ \dot{x}_3 &= 2x_1 - x_2 + u , \\ \dot{x}_4 &= -2x_1 + 2x_2 , \\ y &= x_1 . \end{aligned}$$

Синтезируем динамический регулятор полного (четвертого) порядка по углу отклонения нижнего маятника.

В данном случае неизвестными элементами матрицы Θ являются двадцать пять параметров регулятора, являющихся элементами матриц $A_r^{(i,j)}$, $i,j = 1,\cdots,4$; $B_r^{(i)}$, $i = 1,\cdots,4$; $C_r^{(j)}$, $j = 1,\cdots,4$; D_r. Они могут быть найдены как решение линейного матричного неравенства (5.17) относительно Θ, в котором матрицы A_0, B_0, C_0 определены в (5.23), а блочная матрица X вида (5.24) порядка 8×8 находится следующим образом. Решается система линейных матричных неравенств (5.25) и (5.28), где

$$W_{B^T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad W_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

относительно неизвестных матриц X_{11} и Y_{11} порядков 4×4 и далее матрицы X_{12} и X_{22} определяются согласно формулам (5.29).

Для данного примера были получены следующие результаты

$$X_{11} = \begin{pmatrix} 1871.7 & 165.9 & -329.8 & -51.7 \\ \star & 544.1 & 44.2 & -340.5 \\ \star & \star & 1434.8 & 522.1 \\ \star & \star & \star & 445.7 \end{pmatrix},$$

$$X_{12} = \begin{pmatrix} -0.8125 & 0.5733 & 0.0660 & -0.0819 \\ -0.1152 & 0.0103 & -0.8299 & 0.5458 \\ 0.5323 & 0.7412 & -0.2679 & -0.3090 \\ 0.2076 & 0.3491 & 0.4849 & 0.7745 \end{pmatrix},$$

$$X_{22} = \begin{pmatrix} 0.0005 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0007 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0013 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0917 \end{pmatrix},$$

$$\Theta = 10^4 \begin{pmatrix} -6.0558 & -6.3583 & 1.1637 & -58.602 & 16132.0 \\ -5.6231 & 5.9042 & 1.0805 & -54.416 & 14979.0 \\ 1.0674 & -1.1207 & -0.2052 & 10.329 & -2843.0 \\ 0.0180 & -0.0189 & -0.0035 & 0.175 & -48.0 \\ 0.0054 & 0.0056 & -0.0010 & 0.052 & -14.0 \end{pmatrix} .$$

В данном случае матрица замкнутой системы имеет следующие собственные значения

$$\lambda_1 = -1813.1 \ , \quad \lambda_2 = -5.4 \ , \quad \lambda_{3,4} = -0.4 \pm 0.9i \ ,$$

$$\lambda_{5,6} = -0.3 \pm 0.6i \ , \quad \lambda_7 = -1.1, \quad \lambda_8 = -1.2 \ ,$$

лежащие слева от мнимой оси.

Полученный регулятор содержит большие по величине коэффициенты, что затрудняет его практическую реализацию. Существует возможность построить регулятор, матрица Θ *которого имеет минимальную норму. В этом случае следует использовать команду*

$$\Theta = basiclmi(\Psi, Q, P,' Xmin') \ .$$

В рассматриваемом примере это приводит к следующему результату

$$\Theta = \begin{pmatrix} 2.2561 & -4.4298 & -6.7194 & 1091.4 & 691.67 \\ 3.2879 & -3.3957 & -7.2738 & 982.0 & -686.88 \\ -0.4228 & 0.3313 & -0.1676 & -185.2 & 360.80 \\ -0.1479 & 0.1586 & 0.0361 & -4.5 & 381.11 \\ -0.0023 & 0.0029 & 0.0066 & -0.9 & -2.16 \end{pmatrix} ,$$

и тогда матрица замкнутой системы будет иметь следующие собственные значения

$$\lambda_1 = -1.5847 \ , \quad \lambda_2 = -1.1216 \ , \quad \lambda_{3,4} = -0.7534 \pm 2.3388i \ ,$$

$$\lambda_{5,6} = -0.5314 \pm 1.9128 \ , \quad \lambda_7 = -0.2723, \quad \lambda_8 = -0.2206 \ .$$

Для статического регулятора по выходу в уравнениях регулятора (5.12) имеем $A_r = 0$, $B_r = 0$, $C_r = 0$ и, следовательно, $\Theta = D_r$. В этом случае условия (5.22) разрешимости задачи управления примут вид

$$W_C^T(A^TX + XA)W_C < 0 \ , \quad X > 0 \ ,$$

$$W_{B^T}^T(YA^T + AY)W_{B^T} < 0 \ , \quad Y > 0 \ ,$$

где матрица $Y = X^{-1}$ порядка $(n_x \times n_x)$, и формулировка **задачи A** совпадает с формулировкой **задачи B**.

5.3 Стабилизация дискретных объектов

Рассмотрим дискретный управляемый объект

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= Ax_t + Bu_t \ , \\ y_t &= Cx_t \ , \end{aligned} \tag{5.30}$$

в котором $x_t \in \mathcal{R}^{n_x}$ – состояние, $u_t \in \mathcal{R}^{n_u}$ –управление, $y_t \in \mathcal{R}^{n_y}$ – измеряемый выход. Требуется построить линейный динамический регулятор k-го порядка вида

$$\begin{aligned} x_{t+1}^{(r)} &= A_r x_t^{(r)} + B_r y_t^{(r)} \ , \\ u_t &= C_r x_t^{(r)} + D_r y_t^{(r)} \ , \end{aligned} \tag{5.31}$$

где $x_t^{(r)} \in R^k$ – состояние регулятора, обеспечивающий асимптотическую устойчивость замкнутой системы (5.30), (5.31).

Представим уравнение замкнутой системы (5.30), (5.31) в виде

$$\bar{x}_{t+1} = A_c \bar{x}_t \ , \quad A_c = \begin{pmatrix} A + BD_r C & BC_r \\ B_r C & A_r \end{pmatrix} \ ,$$

где $\bar{x}_t = \mathrm{col}\,(x_t, x_t^{(r)})$. Переформулируем цель управления в виде существования квадратичной функции Ляпунова $V_t(\bar{x}_t) = \bar{x}_t^T X \bar{x}_t$ с $X^T = X > 0$ такой, что по любой траектории замкнутой системы имеет место

$$V_{t+1} - V_t = x_{t+1}^T X x_{t+1} - x_t^T X x_t = x_t^T (A_c^T X A_c - X) x_t < 0 \ .$$

Это условие эквивалентно следующему матричному неравенству

$$A_c^T X A_c - X < 0 \ ,$$

которое с учетом леммы A.2 представимо в виде

$$\begin{pmatrix} -X^{-1} & A_c \\ A_c^T & -X \end{pmatrix} < 0 \ . \tag{5.32}$$

Вводя параметры регулятора

$$\Theta = \begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix}$$

и представляя матрицу замкнутой системы в виде

$$A_c = A_0 + B_0 \Theta C_0 \ ,$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad B_0 = \begin{pmatrix} 0 & B \\ I & 0 \end{pmatrix} \ , \quad C_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ C & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

перепишем неравенство (5.32) в виде линейного матричного неравенства относительно неизвестных параметров Θ

$$\Psi + P^T\Theta^T Q + Q^T\Theta P < 0 \ , \tag{5.33}$$

в котором

$$\Psi = \begin{pmatrix} -X^{-1} & A_0 \\ A_0^T & -X \end{pmatrix} \ , \quad P = \begin{pmatrix} 0 & C_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad Q = \begin{pmatrix} B_0^T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{5.34}$$

Так как в этом случае

$$W_P = \begin{pmatrix} 0 & I \\ W_{C_0} & 0 \end{pmatrix} \ , \quad W_Q = \begin{pmatrix} W_{B_0^T} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \ ,$$

то, применяя утверждение 3.2, приходим к справедливости следующего.

Утверждение 5.4 *Дискретный объект (5.30) стабилизируем с помощью регулятора по выходу (5.31) заданного порядка тогда и только тогда, когда существует $(n_x + k) \times (n_x + k)$-матрица $X = X^T > 0$, удовлетворяющая следующим условиям:*

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} 0 & I \\ W_{C_0} & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -X^{-1} & A_0 \\ A_0^T & -X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ W_{C_0} & 0 \end{pmatrix} < 0 \ , \\ \begin{pmatrix} W_{B_0^T} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -X^{-1} & A_0 \\ A_0^T & -X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{B_0^T} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} < 0 \ . \end{gathered} \tag{5.35}$$

Если условия (5.35) выполнены и такая матрица X найдена, то параметры искомого регулятора (5.31) находятся как решения линейного матричного неравенства (5.33).

Введем матрицу $Y = X^{-1}$ и перепишем условия (5.35) в виде линейных матричных неравенств относительно матриц X и Y:

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} 0 & I \\ W_{C_0} & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -Y & A_0 \\ A_0^T & -X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ W_{C_0} & 0 \end{pmatrix} < 0 \ , \\ \begin{pmatrix} W_{B_0^T} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -Y & A_0 \\ A_0^T & -X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{B_0^T} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} < 0 \ . \end{gathered} \tag{5.36}$$

Тогда рассматриваемая задача сводится к поиску взаимнообратных матриц X и Y ($XY = I$), удовлетворяющих неравенствам (5.36), т.е. к **задаче A**, сформулированной выше.

Так как

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0_{n_x \times k} & B \\ I_k & 0_{k \times n_u} \end{pmatrix} , \quad C_0 = \begin{pmatrix} 0_{k \times n_x} & I_k \\ C & 0_{n_y \times k} \end{pmatrix}$$

и матрицы максимального ранга $W_{B_0^T}$ и W_{C_0} должны удовлетворять уравнениям $B_0^T W_{B_0^T} = 0$ и $C_0 W_{C_0} = 0$ соответственно, то непосредственно проверяется, что можно взять

$$W_{B_0^T} = \begin{pmatrix} W_{B^T} \\ 0 \end{pmatrix} , \quad W_{C_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ W_C \end{pmatrix} .$$

Тогда с учетом блочной структуры матриц A_0, B_0, C_0 и соответствующего блочного представления матриц X и Y в виде

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{pmatrix} , \quad Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12}^T & Y_{22} \end{pmatrix}$$

неравенства (5.36) приводятся к виду

$$\begin{aligned} &W_C^T (A^T X_{11} A - X_{11}) W_C < 0 \\ &W_{B^T}^T (A Y_{11} A^T - Y_{11}) W_{B^T} < 0 \ . \end{aligned} \tag{5.37}$$

Таким образом, задача синтеза регуляторов по выходу для дискретных объектов может быть также сведена к сформулированной выше **задаче B**: найти две ($n_x \times n_x$)-матрицы $X_{11} = X_{11}^T > 0$, $Y_{11} = Y_{11}^T > 0$, удовлетворяющие линейным матричным неравенствам (5.37) и

$$\begin{pmatrix} X_{11} & I \\ I & Y_{11} \end{pmatrix} \geq 0 \ ,$$

и условию

$$\operatorname{rank}(I - X_{11} Y_{11}) \leq k \ ,$$

или установить, что таких матриц не существует.

Для статического регулятора по выходу в уравнениях регулятора (5.31) имеем $A_r = 0$, $B_r = 0$, $C_r = 0$ и, следовательно, $\Theta = D_r$. В этом случае неравенство (5.32) примет вид (5.33), где

$$\Psi = \begin{pmatrix} -X^{-1} & A \\ A^T & -X \end{pmatrix} , \quad P = (0 \quad C) \ , \quad Q = \begin{pmatrix} B^T \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Тогда условия (5.35) разрешимости задачи управления примут вид

$$W_C^T(A^TXA - X)W_C < 0 \ ,$$
$$W_{B^T}^T(AYA^T - Y)W_{B^T} < 0 \ ,$$

где X – матрица порядка $(n_x \times n_x)$, и формулировка **задачи A** совпадает с формулировкой **задачи B**.

В частности, когда состояние объекта полностью измеряется, т.е. $C = I$ и $\mathrm{rank}\,(0 \quad C) = n_x$, с учетом утверждения 3.1 получим, что объект (5.30) стабилизируем тогда и только тогда, когда неравенство

$$W_{B^T}^T(AYA^T - Y)W_{B^T} < 0$$

разрешимо относительно положительно определенной матрицы $Y = Y^T$.

Глава 6

Модальное управление

Задача модального управления связана с построением регулятора, при котором полюса замкнутой системы располагаются в заданных точках или заданных областях комплексной плоскости. Значения таких характеристик замкнутой системы как время переходного процесса, демпфирование, скорость переходных процессов в регуляторе и других определяются расположением собственных значений матрицы замкнутой системы в определенных областях комплексной плоскости. Здесь мы будем рассматривать задачи модального управления относительно таких областей, которые могут быть характеризованы системой линейных матричных неравенств - такие области в дальнейшем будем называть LMI-областями (см. [20, 21]). Мы увидим, что к этим областям относятся вертикальные и горизонтальные полосы, круги, конические секторы, а также пересечения таких областей.

Пусть D - некоторая область левой комплексной полуплоскости. Динамическую систему $\dot{x} = Ax$ будем называть D-устойчивой, если все ее полюса, т.е. все собственные значения матрицы A, лежат в области D. В этом случае матрицу A также будем называть D-устойчивой. В частном случае, когда D совпадает со всей левой комплексной полуплоскостью, D-устойчивость сводится к асимптотической устойчивости, которая характеризуется неравенством Ляпунова, являющимся линейным матричным неравенством. А именно, матрица A асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда существует симметрическая матрица X, удовлетворяющая неравенствам

$$AX + XA^T < 0 \ , \quad X > 0 \ . \tag{6.1}$$

Определим класс областей, которые характеризуются в терминах линейных матричных неравенств.

Определение. Область D комплексной плоскости называется LMI-областью, если существуют симметрическая матрица $\alpha = \alpha^T \in R^{m\times m}$ и матрица $\beta \in R^{m\times m}$ такие, что

$$D = \{z \in C:\ f_D(z) < 0\}\ , \tag{6.2}$$

где $f_D(z)$ - характеристическая функция данной области, принимающая значения в пространстве эрмитовых $(m \times m)$-матриц и равная

$$f_D(z) = \alpha + z\beta + \bar{z}\beta^T\ . \tag{6.3}$$

Из этого определения следует, что LMI-область это подмножество комплексной плоскости, которое представимо линейным матричным неравенством относительно переменных z и $\bar{z}$ или относительно переменных $x = \mathrm{Re}\,(z)$ и $y = \mathrm{Im}\,(z)$. Следовательно, LMI-области – выпуклые. Кроме того, так как для любого $z \in D$ имеет место

$$f_D(\bar{z}) = \overline{f_D(z)} < 0\ ,$$

то LMI-области симметричны относительно действительной оси.

Самое существенное свойство LMI-областей состоит в том, что они полностью определяются в терминах линейных матричных неравенств относительно симметрической положительно определенной матрицы. Для того, чтобы написать эти неравенства, поставим в соответствие характеристической функции $f_D(z)$ следующую $(m \times m)$-блочную матрицу

$$M_D(A, X) = \left(\alpha_{ij}X + \beta_{ij}AX + \beta_{ji}XA^T\right)\ , \quad i, j = 1, \cdots, m\ , \tag{6.4}$$

которую, используя операцию кронекерова произведения $\otimes$, можно записать в виде

$$M_D(A, X) = \alpha \otimes X + \beta \otimes (AX) + \beta^T \otimes (AX)^T\ .$$

Отметим, что $M_D(A, X)$ в (6.4) и $f_D(z)$ в (6.3) связаны подстановкой $(X, AX, XA^T) \leftrightarrow (1, z, \bar{z})$.

Утверждение 6.1 *Пусть D - LMI-область. Тогда матрица A является D-устойчивой, если и только если существует матрица $X = X^T$, удовлетворяющая линейным матричным неравенствам*

$$M_D(A, X) < 0\ , \quad X > 0\ . \tag{6.5}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть λ и v – собственное значение и соответствующий ему левый собственный вектор матрицы A так, что $v^*A = \lambda v^*$. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что

$$(I \otimes v)^* M_D(A, X)(I \otimes v) = (v^* X v) f_D(\lambda) \ .$$

Так как по условию левая часть этого равенства – отрицательно определенная матрица и $X > 0$, то отсюда следует $f_D(\lambda) < 0$, т.е. $\lambda \in D$.

Необходимость. Приведем, ради простоты, доказательство только для диагональной матрицы $A = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, собственные значения которой лежат в области D. Распространим область определения функции $M_D(A, X)$ на множество комплексных матриц A и эрмитовых матрих $X = X^*$:

$$M_D(A, X) = \alpha \otimes X + \beta \otimes (AX) + \beta^T \otimes (AX)^* \ .$$

Непосредственно проверяется, что

$$M_D(A, I) = U^T \mathrm{diag}\,(f_D(\lambda_1), \cdots, f_D(\lambda_n)) U \ ,$$

где U – матрица перестановок. Так как по условию $f_D(\lambda_i) < 0,\ i = 1, \cdots, n$, то отсюда следует, что $M_D(A, X) < 0$ при $X = I$. Доказательство для произвольной матрицы A приведено в [20].

Рассмотрим несколько примеров. В качестве первого примера LMI-области возьмем множество $D_1 = \{z : \mathrm{Re}\, z < -\mu\}$, которое соответствует асимптотически устойчивым системам со степенью устойчивости не меньше μ. Очевидно, что характеристическая функция этой области равна $f_{D_1}(z) = z + \bar{z} + 2\mu$, и согласно утверждению 6.1 матрица A является асимптотически устойчивой со степенью устойчивости не меньше α тогда и только тогда, когда существует $X = X^T$, удовлетворяющая линейным матричным неравенствам

$$AX + XA^T + 2\mu X < 0 \ , \quad X > 0 \ . \tag{6.6}$$

Другой пример LMI-области – D_2 – внутренность круга радиуса r с центром в точке $(-q, 0)$. Эта область определяется неравенством $|z+q| < r$, которое может быть эквивалентно записано в виде

$$f_{D_2}(z) = \begin{pmatrix} -r & q+z \\ q+\bar{z} & -r \end{pmatrix} < 0 \ .$$

В этом случае линейные матричные неравенства (6.5), характеризующие эту область, принимают вид

$$\begin{pmatrix} -rX & qX + AX \\ qX + XA^T & -rX \end{pmatrix} < 0 \ , \quad X > 0 \ . \tag{6.7}$$

Вертикальной полосе $D_3 = \{z : \mu_1 < \operatorname{Re} z < \mu_2\}$ отвечает характеристическая функция

$$f_{D_3}(z) = \begin{pmatrix} (z+\bar{z}) - 2\mu_2 & 0 \\ 0 & -(z+\bar{z}) + 2\mu_1 \end{pmatrix}$$

и, соответственно, линейные матричные неравенства

$$\begin{pmatrix} AX + XA^T - 2\mu_2 X & 0 \\ 0 & -AX - XA^T + 2\mu_1 X \end{pmatrix} < 0 \ , \quad X > 0 \ ,$$

а горизонтальной полуполосе $D_4 = \{z : \operatorname{Re} z < 0 \ , -\nu < \operatorname{Im} z < \nu$ – характеристическая функция

$$f_{D_4}(z) = \begin{pmatrix} -2\nu & z - \bar{z} \\ -(z - \bar{z}) & -2\nu \end{pmatrix}$$

и линейные матричные неравенства

$$\begin{pmatrix} -2\nu X & AX - XA^T \\ -AX + XA^T & -2\nu X \end{pmatrix} < 0 \ , \quad X > 0 \ .$$

Наконец, коническому сектору $D_5 = \{z : \operatorname{Re} z \operatorname{tg} \varphi < -|\operatorname{Im} z|\}$ соответствует характеристическая функция

$$f_{D_5} = \begin{pmatrix} (z+\bar{z}) \sin\varphi & (z-\bar{z}) \cos\varphi \\ -(z-\bar{z}) \cos\varphi & (z+\bar{z}) \sin\varphi \end{pmatrix}$$

и линейные матричные неравенства

$$\begin{pmatrix} (AX + XA^T) \sin\varphi & (AX - XA^T) \cos\varphi \\ (XA^T - AX) \cos\varphi & (AX + XA^T) \sin\varphi \end{pmatrix} < 0 \ , \quad X > 0 \ . \tag{6.8}$$

Отметим важное свойство LMI-областей – они замкнуты относительно операции пересечения, т.е. пересечение LMI-областей – LMI-область. Действительно, пересечение $D_1 \bigcap D_2$ двух данных LMI-областей D_1 и D_2 с характеристическими функциями f_{D_1} и f_{D_2} имеет характеристическую функцию

$$f_{D_1 \bigcap D_2} = \operatorname{diag}(f_{D_1}, f_{D_2})$$

и, следовательно,

$$M_{D_1 \bigcap D_2}(A, X) = \operatorname{diag}(M_{D_1}(A, X), M_{D_2}(A, X)) \ .$$

Таким образом, условие того, что собственные значения матрицы A одновременно принадлежат двум заданным LMI-областям D_1 и D_2, выражается в терминах одной матрицы X, удовлетворяющей системе линейных матричных неравенств. А именно, матрица A является одновременно D_1-устойчивой и D_2-устойчивой тогда и только тогда, когда существует $X = X^T > 0$, для которой $M_{D_1}(A, X) < 0$ и $M_{D_2}(A, X) < 0$.

Для иллюстрации этого свойства на рис. изображена LMI-область, которая характеризуется линейными матричными неравенствами (6.6), (6.7) при $q = 0$ и (6.8).

Покажем теперь, как синтез модального управления по состоянию в LMI-области сводится к решению линейных матричных неравенств. Пусть объект описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax + Bu \ , \tag{6.9}$$

где $x \in R^{n_x}$ – состояние объекта, $u \in R^{n_u}$ – управление. Задача состоит в выборе закона управления из класса линейных обратных связей по состоянию вида

$$u = \Theta x \ , \tag{6.10}$$

где Θ – матрица параметров регулятора соответствующего порядка, при котором матрица замкнутой системы (6.9), (6.10) будет D-устойчивой, т.е. все ее собственные значения лежат в заданной LMI-области (6.2).

Согласно утверждению 6.1 задача сводится к нахождению матриц $X = X^T > 0$ и Θ, удовлетворяющих неравенству $M_D(A + B\Theta, X) < 0$. Обозначая $Z = \Theta X$, представим последнее неравенство в виде

$$M_D(A, X) + \beta \otimes BZ + \beta^T \otimes Z^T B^T < 0 \ , \tag{6.11}$$

которое, очевидно, является линейным матричным неравенством относительно неизвестных матриц X и Z. После того, как такие матрицы будут найдены, искомая матрица $\Theta = ZX^{-1}$.

Пример 6.1 Модальная стабилизация двухзвенного перевернутого маятника: *объект описывается уравнениями*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \ , \\ \dot{x}_2 &= x_4 \ , \\ \dot{x}_3 &= 2x_1 - x_2 + u \ , \\ \dot{x}_4 &= -2x_1 + 2x_2 \ . \end{aligned}$$

Синтезируем регулятор по состоянию, при котором все собственные значения матрицы замкнутой системы лежат внутри круга с центром в точке $z = -1$ и радиусом, равным 0.1.

Данная область является LMI-областью вида D_2, и соответствующее линейное матричное неравенство (6.11) примет вид

$$\begin{pmatrix} -0.1X & X + AX + BZ \\ X + XA^T + Z^T B^T & -0.1X \end{pmatrix} < 0 \ , \quad X > 0 \ ,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

В результате были получены следующие параметры регулятора

$$\Theta = (-10.0067, \quad 9.5078, \quad -4.0023, \quad 6.0056) \ ,$$

при которых собственные значения матрицы замкнутой системы равны

$$\lambda_{1,2} = -0.9890 \pm 0.0111i \ , \quad \lambda_3 = -1.0104 \ , \quad \lambda_4 = -1.0140 \ .$$

Глава 7

H_∞-управление

7.1 Уровень гашения возмущений в непрерывном объекте

Пусть на вход устойчивого линейного объекта

$$
\begin{array}{l}
\dot{x} = Ax + Bv \\
z = Cx + Dv \ , \quad x(0) = 0 \ ,
\end{array}
\tag{7.1}
$$

в котором $x \in \mathcal{R}^{n_x}$ и $v \in \mathcal{R}^{n_v}$, действует ограниченное по норме L_2 возмущение $v(t)$, т.е.

$$
\|v\| = (\int\limits_0^\infty |v(t)|^2 \, dt)^{1/2} < \infty \ .
$$

Будем называть уровнем гашения возмущений в объекте величину

$$
\gamma_* = \sup_{\|v\| \neq 0} \frac{\|z\|}{\|v\|} \ . \tag{7.2}
$$

Заметим, что

$$
\gamma_* = \inf_{\gamma} \{ \gamma \, : \, \frac{\|z\|}{\|v\|} < \gamma, \, \forall \, v, \, \|v\| \neq 0 \} \ ,
$$

поэтому представляет интерес выяснить, является ли уровень гашения возмущений в объекте меньше заданного числа $\gamma > 0$, т.е. выполняется ли условие

$$
\frac{\|z\|}{\|v\|} < \gamma \ , \quad \forall \, v, \quad \|v\| \neq 0 \ . \tag{7.3}
$$

Так как непосредственная проверка выполнения (7.3) не представляется возможной, преобразуем это условие. Используя равенство Парсеваля, имеем

$$\sup_{\|v\|\neq 0} \frac{\|z\|}{\|v\|} = \sup_{\omega\in(-\infty,\infty)} \|H(j\,\omega)\| = \|H\|_\infty \ ,$$

где $H(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$ – передаточная матрица объекта (7.1) от входа v к выходу z, $j = \sqrt{-1}$, $\|\cdot\|$ обозначает спектральную матричную норму, т.е.

$$\|H\| = \max_i \sigma_i(H) \ ,$$

σ_i – i-е сингулярное число матрицы H (см. лемму A.6), а $\|\cdot\|_\infty$ – ∞-норма в пространстве $H(s)$ таких, что $\sup_{\mathrm{Re}\, s\geq 0} \|H(s)\| < \infty$. Следовательно, условие (7.3) эквивалентно неравенству

$$\|H\|_\infty < \gamma \tag{7.4}$$

или, что то же, частотному неравенству

$$H^T(-j\,\omega)H(j\omega) < \gamma^2 I \ , \quad \forall\,\omega \in (-\infty,\infty) \ . \tag{7.5}$$

Таким образом, необходимо проверить выполнение этого частотного неравенства для заданного γ.

В случае объекта с одним входом и одним выходом эта задача легко решается графически: на комплексной плоскости строится годограф, т.е. кривая $H(j\,\omega)$, $\omega \in (-\infty,\infty)$, и непосредственно проверяется, лежит ли эта кривая внутри круга с центром в начале координат и радусом γ. В случае объекта со многими входами применим частотную теорему (см. лемму F.1 Калмана-Якубовича-Попова в Приложении) и сведем проверку выполнения частотного условия (7.5) к задаче о разрешимости линейного матричного неравенства.

Согласно частотной теореме выполнение частотного неравенства

$$\mathcal{L}[(j\,\omega I - A)^{-1}Bv, v] > 0 \ , \quad \forall\,\omega \in (-\infty,\infty) \ , \quad \forall\,|v| \neq 0 \tag{7.6}$$

для заданной эрмитовой формы $\mathcal{L}(x,v)$ векторов $x \in \mathcal{C}^{n_x}$, $v \in \mathcal{C}^{n_v}$ эквивалентно существованию квадратичной формы $V(x) = x^T X x$ с эрмитовой матрицей $X = X^*$ такой, что в силу системы (7.1) выполняется неравенство

$$\dot V - \mathcal{L}(x,v) < 0 \ , \quad \forall\, x, v, \quad |x| + |v| \neq 0$$

или, другими словами, имеет место неравенство

$$2\mathrm{Re}\, x^* X(Ax + Bv) - \mathcal{L}(x,v) < 0 \ , \quad \forall\, x, v, \quad |x| + |v| \neq 0 \ . \tag{7.7}$$

Если

$$\mathcal{L}(x,v) = (x^T, v^T)\, L \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \;, \quad L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12}^T & L_{22} \end{pmatrix} \;, \tag{7.8}$$

то неравенство (7.7) сводится к линейному матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} A^T X + XA - L_{11} & XB - L_{12} \\ B^T X - L_{12}^T & -L_{22} \end{pmatrix} < 0 \;, \tag{7.9}$$

а частотное условие (7.6) запишется в виде

$$\begin{pmatrix} (-j\,\omega I - A)^{-1} B \\ I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12}^T & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (j\,\omega I - A)^{-1} B \\ I \end{pmatrix} > 0 \;. \tag{7.10}$$

Имея ввиду частотное неравенство (7.5), возьмем эрмитову форму

$$\mathcal{L}(x,v) = \gamma^2 v^* v - (Cx + Dv)^* (Cx + Dv) \;,$$

т.е. такую, чтобы неравенство (7.10) свелось к неравенству

$$\gamma^2 I - H^T(-j\,\omega) H(j\,\omega) > 0 \;, \quad \forall\, \omega \in (-\infty, \infty) \;,$$

эквивалентному (7.5). Это условие согласно частотной теореме выполняется тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$2\mathrm{Re}\, x^* X (Ax + Bv) + (Cx + Dv)^* (Cx + Dv) - \gamma^2 v^* v < 0 \;.$$

Заменяя здесь X на γX и умножая полученное неравенство на γ^{-1}, придем к неравенству

$$x^*(A^T X + XA + \gamma^{-1} C^T C) x + 2\mathrm{Re}\, x^*(XB + \gamma^{-1} C^T D) v + v^*(\gamma^{-1} D^T D - \gamma I) v < 0 \;.$$

Так как это неравенство должно выполняться для всех x и v, то оно эквивалентно матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} A^T X + XA + \gamma^{-1} C^T C & XB + \gamma^{-1} C^T D \\ (XB + \gamma^{-1} C^T D)^T & -\gamma I + \gamma^{-1} D^T D \end{pmatrix} < 0 \;,$$

которое с учетом леммы A.2 сводится к линейному матричному неравенству

$$F_c(X,\gamma) = \begin{pmatrix} A^T X + XA & XB & C^T \\ B^T X & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \;. \tag{7.11}$$

Заметим, что при выполнении этого неравенства в силу леммы A.2 должно выполняться

$$A^T X + XA < 0 \ ,$$

из которого, учитывая, что матрица A гурвицева, в силу теоремы Ляпунова (см. лемму D.1 в Приложении) следует, что $X > 0$. Таким образом, на основании частотной теоремы мы приходим к следующему.

Утверждение 7.1 *Пусть в объекте (7.1) матрица A гурвицева. Для того, чтобы уровень гашения возмущений в этом объекте был меньше заданного числа γ необходимо и достаточно, чтобы линейное матричное неравенство (7.11) было разрешимо относительно симметрической $(n_x \times n_x)$-матрицы $X > 0$.*

Заметим, что (7.11) является линейным матричным неравенством относительно переменных X и γ. Поэтому вычисление уровня гашения возмущений в объекте сводится к решению задачи оптимизации линейной функции при ограничении, заданном линейным матричным неравенством.

Утверждение 7.2 *Определенный в (7.2) уровень гашения возмущений в устойчивом объекте (7.1) находится следующим образом*

$$\gamma_* = \inf_{F_c(X,\gamma)<0} \gamma \ ,$$

где линейное матричное неравенство $F_c(X,\gamma) < 0$ задано в (7.11).

Пример 7.1 Уровень гашения возмущений линейного осциллятора с демпфированием. *Осциллятор описывается уравнением*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \ , \\ \dot{x}_2 &= -\omega_0^2 x_1 - \delta x_2 + v \ , \\ z &= x_1 \ , \end{aligned}$$

т.е. в виде (7.1), где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\delta \end{pmatrix} \ , \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad C = (1 \quad 0) \ , \quad D = 0 \ .$$

Решая задачу минимизации γ при ограничениях (7.11), для значений $\omega_0 = 10$, $\delta = 1$ получим $\gamma_* = 0.1001$, а для $\omega_0 = 10$, $\delta = 0.1$ имеем $\gamma_* = 1.000$.

7.2 H_∞-регуляторы для непрерывных объектов

Рассмотрим управляемый объект

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 v + B_2 u \ , \\ z &= C_1 x + D_{11} v + D_{12} u \ , \\ y &= C_2 x + D_{21} v \ , \end{aligned} \qquad (7.12)$$

в котором $x \in \mathcal{R}^{n_x}$ – состояние, $v \in \mathcal{R}^{n_v}$ – возмущение, $u \in \mathcal{R}^{n_u}$ – управление, $z \in \mathcal{R}^{n_z}$ – управляемый выход, $y \in \mathcal{R}^{n_y}$ – измеряемый выход. Синтез H_∞-управления этим объектом состоит в построении регулятора, при котором уровень гашения возмущений в асимптотически устойчивой замкнутой системе меньше заданного числа γ, т.е.

$$\sup_{v \not\equiv 0} \frac{\|z\|}{\|v\|} < \gamma \ . \qquad (7.13)$$

Такие регуляторы будем называть H_∞-регуляторами с заданным γ; H_∞-оптимальным регулятором будем называть H_∞-регулятор с минимальным значением γ.

Рассмотрим сначала случай измеряемого состояния в объекте (16.3), когда $C_2 = I$, $D_{21} = 0$, и управление выбирается в виде

$$u = \Theta x \ . \qquad (7.14)$$

Уравнения замкнутой системы (16.3), (7.14) примут вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c v \ , \\ z &= C_c x_c + D_c v \ , \end{aligned} \qquad (7.15)$$

где

$$A_c = A + B_2 \Theta \ , \quad B_c = B_1 \ , \quad C_c = C_1 + D_{12} \Theta \ , \quad D_c = D_{11} \ . \qquad (7.16)$$

Для выполнения цели управления (7.13) передаточная матрица замкнутого объекта (7.15) от входа v к выходу z

$$H_c(s) = D_c + C_c (sI - A_c)^{-1} B_c$$

должна удовлетворять условию

$$\|H_c\|_\infty < \gamma \ .$$

Согласно утверждению 7.1 для этого необходимо и достаточно, чтобы линейное матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} A_c^T X + X A_c & X B_c & C_c^T \\ B_c^T X & -\gamma I & D_c^T \\ C_c & D_c & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \qquad (7.17)$$

было разрешимо относительно матрицы $X = X^T > 0$.

Умножим неравенство (7.17) слева и справа на матрицу

$$\begin{pmatrix} X^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

и с учетом (7.16) получим

$$\begin{pmatrix} Y(A+B_2\Theta)^T + (A+B_2\Theta)Y & B_1 & Y(C_1+D_{12}\Theta)^T \\ B_1^T & -\gamma I & D_{11}^T \\ (C_1+D_{12}\Theta)Y & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \ , \qquad (7.18)$$

где $Y = X^{-1}$. Очевидно, что полученное неравенство представимо в виде следующего линейного матричного неравенства относительно переменных Y, $Z = \Theta Y$ и γ:

$$F(Y, Z, \gamma) = \begin{pmatrix} YA^T + AY + Z^T B_2^T + B_2 Z & B_1 & YC_1^T + Z^T D_{12}^T \\ B_1^T & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1 Y + D_{12} Z & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \ . \qquad (7.19)$$

Утверждение 7.3 *Для существования H_∞-регулятора по состоянию с заданным γ необходимо и достаточно, чтобы существовали $n_x \times n_x$-матрица $Y = Y^T > 0$ и $n_u \times n_x$-матрица Z, удовлетворяющие линейному матричному неравенству (7.19). Если такие матрицы Y и Z найдены, то параметры Θ искомого регулятора определяются по формуле $\Theta = ZY^{-1}$. Минимальное значение γ находится из решения следующей оптимизационной задачи:*

$$\gamma_* = \inf_{F(Y,Z,\gamma)<0,\, Y>0} \gamma \ .$$

Пример 7.2 H_∞-управление по состоянию линейным осциллятором с демпфированием. *Линейный осциллятор описывается уравнением*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \ , \\ \dot{x}_2 &= -\omega_0^2 x_1 - \delta x_2 + v + u \ , \\ z_1 &= x_1 \ , \\ z_2 &= u \ , \end{aligned}$$

т.е. в виде (16.3), где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\delta \end{pmatrix} \ , \quad B_1 = B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ ,$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad D_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad D_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

Решая задачу минимизации γ при ограничениях (7.19) для значений $\omega_0 = 10$, $\delta = 0.1$, найдем $\gamma_* = 0.7071$ и соответствующие параметры $\Theta = (-0.005, -0.1)$. Таким образом, H_∞-оптимальный регулятор

$$u = -0.005x_1 - 0.1x_2$$

обеспечивает гашение колебаний осциллятора с минимально возможным уровнем $\gamma_* = 0.7071$.

Другой способ построения H_∞-регулятора по состоянию состоит в представлении неравенства (7.18) в виде

$$\Psi + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0 \ , \tag{7.20}$$

где

$$\Psi = \begin{pmatrix} YA^T + AY & B_1 & YC_1^T \\ B_1^T & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1 Y & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} \ , \qquad P = (Y \quad 0 \quad 0) \ , \quad Q = (B_2^T \quad 0 \quad D_{12}^T) \ . \tag{7.21}$$

Согласно утверждению 3.2 полученное неравенство разрешимо относительно матрицы Θ тогда и только тогда, когда

$$
\begin{aligned}
&W_P^T \begin{pmatrix} YA^T + AY & B_1 & YC_1^T \\ B_1^T & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1 Y & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} W_P < 0 \,, \\
&W_Q^T \begin{pmatrix} YA^T + AY & B_1 & YC_1^T \\ B_1^T & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1 Y & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} W_Q < 0 \,,
\end{aligned}
\tag{7.22}
$$

где

$$
W_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \,, \quad W_Q = \begin{pmatrix} W_Q^{(1)} & 0 \\ 0 & I \\ W_Q^{(2)} & 0 \end{pmatrix} \,,
$$

а столбцы матриц $W_Q^{(1)}$ и $W_Q^{(2)}$ образуют базисы ядер матриц B_2^T и D_{12}^T соответственно. Первое из неравенств (7.22) сводится к неравенству

$$
\begin{pmatrix} -\gamma I & D_{11}^T \\ D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \,, \tag{7.23}
$$

эквивалентное условию $\gamma^2 > \lambda_{max}(D_{11}^T D_{11})$, а второе – к неравенству

$$
\begin{pmatrix} N_2 & | & 0 \\ - & - & - \\ 0 & | & I \end{pmatrix}^T
\begin{pmatrix} YA^T + AY & YC_1^T & | & B_1 \\ C_1 Y & -\gamma I & | & D_{11} \\ - & - & - & - \\ B_1^T & D_{11}^T & | & -\gamma I \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} N_2 & | & 0 \\ - & - & - \\ 0 & | & I \end{pmatrix} < 0 \,, \tag{7.24}
$$

где столбцы матрицы $N_2 = \mathrm{col}\,(W_Q^{(1)}, W_Q^{(2)})$ образуют базис ядра матрицы $(B_2^T \quad D_{12}^T)$.

Утверждение 7.4 *Для существования H_∞-регулятора по состоянию с заданным γ, удовлетворяющем (7.23), необходимо и достаточно, чтобы существовали $n_x \times n_x$-матрица $Y = Y^T > 0$, удовлетворяющая линейному матричному неравенству (7.24). Если такая матрица Y найдена, то параметры Θ искомого регулятора определяются из решения линейного матричного неравенства (7.20). Минимально возможный уровень гашения возмущений находится из решения задачи минимизации γ при ограничениях, задаваемых линейными матричными неравенствами (7.23) и (7.24).*

Обратимся теперь к построению H_∞-регулятора k-го порядка по выходу в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= A_r x_r + B_r y \ , \\ u &= C_r x_r + D_r y \ , \end{aligned} \tag{7.25}$$

где $x_r \in \mathcal{R}^k$ – состояние регулятора. В частном случае $k = 0$ имеем статический регулятор $u = D_r y$. Уравнения замкнутой системы (16.3), (7.25) примут вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c v \ , \\ z &= C_c x_c + D_c v \ , \end{aligned} \tag{7.26}$$

где

$$\begin{gathered} A_c = \begin{pmatrix} A + B_2 D_r C_2 & B_2 C_r \\ B_r C_2 & A_r \end{pmatrix} \ , \quad B_c = \begin{pmatrix} B_1 + B_2 D_r D_{21} \\ B_r D_{21} \end{pmatrix} \ , \\ C_c = (C_1 + D_{12} D_r C_2 \quad D_{12} C_r) \ , \quad D_c = D_{11} + D_{12} D_r D_{21} \ . \end{gathered} \tag{7.27}$$

Для выполнения цели управления (7.13) передаточная матрица замкнутого объекта (7.26) от входа v к выходу z

$$H_c(s) = D_c + C_c(sI - A_c)^{-1} B_c$$

должна удовлетворять условию

$$\|H_c\|_\infty < \gamma \ .$$

Согласно утверждению 7.1 для этого необходимо и достаточно, чтобы линейное матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} A_c^T X + X A_c & X B_c & C_c^T \\ B_c^T X & -\gamma I & D_c^T \\ C_c & D_c & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \tag{7.28}$$

было разрешимо относительно матрицы $X = X^T > 0$.

Введем параметры регулятора

$$\Theta = \begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix} \tag{7.29}$$

и представим матрицы замкнутой системы в виде

$$A_c = A_0 + \mathcal{B} \Theta \mathcal{C} \ , \quad B_c = B_0 + \mathcal{B} \Theta \mathcal{D}_{21} \ ,$$

$$C_c = C_0 + \mathcal{D}_{12} \Theta \mathcal{C} \ , \quad D_c = D_{11} + \mathcal{D}_{12} \Theta \mathcal{D}_{21} \ ,$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} A & 0_{n_x \times k} \\ 0_{k \times n_x} & 0_{k \times k} \end{pmatrix} ,$$

$$\begin{gathered} \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0_{n_x \times k} & B_2 \\ I_k & 0_{k \times n_u} \end{pmatrix} , \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0_{k \times n_x} & I_k \\ C_2 & 0_{n_y \times k} \end{pmatrix} , \\ B_0 = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0_{k \times n_v} \end{pmatrix} , \quad C_0 = (C_1 \quad 0_{n_z \times k}) , \\ \mathcal{D}_{12} = (0_{n_z \times k} \quad D_{12}) , \quad \mathcal{D}_{21} = \begin{pmatrix} 0_{k \times n_v} \\ D_{21} \end{pmatrix} . \end{gathered} \tag{7.30}$$

Подставим эти выражения в (7.28) и представим полученное неравенство в виде линейного матричного неравенства относительно неизвестных параметров Θ

$$\Psi + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0 , \tag{7.31}$$

в котором

$$\begin{gathered} \Psi = \begin{pmatrix} A_0^T X + X A_0 & X B_0 & C_0^T \\ B_0^T X & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_0 & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} , \\ P = (\mathcal{C} \quad \mathcal{D}_{21} \quad 0_{(n_y+k) \times n_z}) , \quad Q = (\mathcal{B}^T X \quad 0_{(n_u+k) \times n_v} \quad \mathcal{D}_{12}^T) . \end{gathered} \tag{7.32}$$

Согласно утверждению 3.2 полученное неравенство разрешимо относительно матрицы Θ тогда и только тогда, когда

$$\begin{gathered} W_P^T \begin{pmatrix} A_0^T X + X A_0 & X B_0 & C_0^T \\ B_0^T X & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_0 & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} W_P < 0 , \\ W_Q^T \begin{pmatrix} A_0^T X + X A_0 & X B_0 & C_0^T \\ B_0^T X & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_0 & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} W_Q < 0 , \end{gathered} \tag{7.33}$$

где столбцы матрицы W_P образуют базис $\mathcal{N}(P)$ – ядра матрицы P, а столбцы матрицы W_Q образуют базис $\mathcal{N}(Q)$ – ядра матрицы Q. Представим

$$Q = (\mathcal{B}^T X \quad 0 \quad \mathcal{D}_{12}^T) = R \begin{pmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} , \quad R = (\mathcal{B}^T \quad 0_{(n_u+k)\times n_v} \quad \mathcal{D}_{12}^T) ,$$

откуда следует, что

$$W_Q = \begin{pmatrix} X^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} W_R \ .$$

Подставляя это выражение в (7.33), приходим к следующему.

Утверждение 7.5 *Для существования H_∞-регулятора k-го порядка с заданным γ необходимо и достаточно, чтобы существовала $(n_x + k) \times (n_x + k)$-матрица $X = X^T > 0$, удовлетворяющая следующим двум неравенствам*

$$\begin{gathered} W_P^T \begin{pmatrix} A_0^T X + X A_0 & X B_0 & C_0^T \\ B_0^T X & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_0 & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} W_P < 0 \ , \\ W_R^T \begin{pmatrix} X^{-1} A_0^T + A_0 X^{-1} & B_0 & X^{-1} C_0^T \\ B_0^T & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_0 X^{-1} & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} W_R < 0 \ . \end{gathered} \tag{7.34}$$

Если условия (7.34) выполнены и такая матрица X найдена, то параметры Θ искомого регулятора находятся как решения линейного матричного неравенства (7.31).

Введем матрицу $Y = X^{-1}$ и перепишем условия (7.34) в виде линейных матричных неравенств относительно матриц X и Y:

$$\begin{gathered} W_P^T \begin{pmatrix} A_0^T X + X A_0 & X B_0 & C_0^T \\ B_0^T X & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_0 & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} W_P < 0 \ , \\ W_R^T \begin{pmatrix} Y A_0^T + A_0 Y & B_0 & Y C_0^T \\ B_0^T & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_0 Y & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} W_R < 0 \ . \end{gathered} \tag{7.35}$$

Тогда рассматриваемая задача сводится к **задаче А**: поиску взаимнообратных матриц X и Y ($XY = I$), удовлетворяющих линейным матричным неравенствам (7.35).

Пример 7.3 **H_∞-управление по выходу линейным осциллятором с демпфированием.** *Уравнения линейного осциллятора*

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = x_2 \ , \\
&\dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1 - \delta x_2 + v + u \ , \\
&z_1 = x_1 \ , \\
&z_2 = u \ , \\
&y = x_1
\end{aligned}
$$

представим в виде (16.3), где матрицы A, B_1, B_2, C_1, D_{11}, D_{12} заданы в примере 7.2, а

$$C_2 = (1 \quad 0) \ , \quad D_{21} = 0 \ .$$

Построим сначала статический регулятор по выходу ($k = 0$) вида

$$u = \Theta y \ .$$

В данном случае параметр Θ может быть найден как решение линейного матричного неравенства (7.31), в котором

$$\Psi = \begin{pmatrix} A^T X + XA & XB_1 & C_1^T \\ B_1^T X & -\gamma I & 0 \\ C_1 & 0 & -\gamma I \end{pmatrix} \ ,$$

$$P = (C_2 \quad D_{21} \quad 0) \ , \quad Q = (B_2^T X \quad 0 \quad D_{12}^T) \ ,$$

а матрица X получается из решения **задачи А** *для линейных матричных неравенств (7.35). В результате для $\omega_0 = 10$ и $\delta = 0.1$ были получены следующие значения: $\gamma_* = 1.001$ и $\Theta = 0.0390$, а при меньших значениях γ решения найти не удалось. Очевидно, что наименьшее допустимое значение должно быть $\gamma_* = 1$ при законе управления $u = 0$ (см. пример 7.1), и полученная разница обусловлена точностью, с которой решаются линейные матричные неравенства в пакете MATLAB.*

Расчет, проведенный для динамического регулятора по выходу первого порядка, приводит к следующему результату: регулятор

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_r = -0.9572 x_r - 103.25 y \ , \\
&u = -0.092 x_r - 0.0945 y
\end{aligned}
$$

обеспечивает гашение возмущений с уровнем $\gamma_* = 0.708$, что с высокой точностью совпадает с минимально возможным значением γ, обеспечиваемым регулятором по состоянию (см. пример 7.2).

Преобразуем неравенства (7.35), учитывая блочную структуру матриц A_0, B_0, C_0 и соответствующее представление матриц X и Y в блочном виде

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{pmatrix} , \quad Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12}^T & Y_{22} \end{pmatrix} .$$

Согласно (7.30) и (7.32) имеем

$$P = \begin{pmatrix} 0_{k\times n_x} & I_k & 0_{k\times n_v} & 0_{k\times n_z} \\ C_2 & 0_{n_y\times k} & D_{21} & 0_{n_y\times n_z} \end{pmatrix} ,$$

$$R = \begin{pmatrix} 0_{k\times n_x} & I_k & 0_{k\times n_v} & 0_{k\times n_z} \\ B_2^T & 0_{n_u\times k} & 0_{n_u\times n_v} & D_{12}^T \end{pmatrix} ,$$

поэтому в качестве W_P и W_R можно взять

$$W_P = \begin{pmatrix} W_P^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \\ W_P^{(2)} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} , \quad W_R = \begin{pmatrix} W_R^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ W_R^{(2)} & 0 \end{pmatrix} ,$$

где матрицы $W_P^{(1)}$, $W_P^{(2)}$ и матрицы $W_R^{(1)}$, $W_R^{(2)}$ определяются из следующих уравнений

$$C_2 W_P^{(1)} + D_{21} W_P^{(2)} = 0 , \quad B_2^T W_R^{(1)} + D_{12}^T W_R^{(2)} = 0 .$$

С учетом этого левые части в (7.35) примут вид

$$\begin{pmatrix} W_P^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \\ W_P^{(2)} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A^T X_{11} + X_{11} A & A^T X_{12} & X_{11} B_1 & C_1^T \\ \star & 0 & X_{12}^T B_1 & 0 \\ \star & \star & -\gamma I & D_{11}^T \\ \star & \star & \star & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_P^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \\ W_P^{(2)} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} ,$$

$$\begin{pmatrix} W_R^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ W_R^{(2)} & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Y_{11} A^T + A Y_{11} & A Y_{12} & B_1 & Y_{11} C_1^T \\ \star & 0 & 0 & Y_{12}^T C_1^T \\ \star & \star & -\gamma I & D_{11}^T \\ \star & \star & \star & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_R^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ W_R^{(2)} & 0 \end{pmatrix} ,$$

и, окончательно, неравенства (7.35) сводятся к следующим линейным матричным неравенствам относительно блоков X_{11} и Y_{11} взаимнообратных матриц X и Y:

$$\begin{pmatrix} N_1 & | & 0 \\ - & - & - \\ 0 & | & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A^T X_{11} + X_{11} A & X_{11} B_1 & | & C_1^T \\ B_1^T X_{11} & -\gamma I & | & D_{11}^T \\ - & - & - & - \\ C_1 & D_{11} & | & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 & | & 0 \\ - & - & - \\ 0 & | & I \end{pmatrix} < 0 ,$$

$$\begin{pmatrix} N_2 & | & 0 \\ - & - & - \\ 0 & | & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Y_{11} A^T + A Y_{11} & Y_{11} C_1^T & | & B_1 \\ C_1 Y_{11} & -\gamma I & | & D_{11} \\ - & - & - & - \\ B_1^T & D_{11}^T & | & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_2 & | & 0 \\ - & - & - \\ 0 & | & I \end{pmatrix} < 0 , \tag{7.36}$$

где столбцы матриц $N_1 = \mathrm{col}\,(W_P^{(1)}, W_P^{(2)})$ и $N_2 = \mathrm{col}\,(W_R^{(1)}, W_R^{(2)})$ образуют базисы ядер матриц $(C_2 \quad D_{21})$ и $(B_2^T \quad D_{12}^T)$ соответственно. Таким образом, задача синтеза H_∞-регуляторов k-порядка может быть также сведена к сформулированной выше **задаче B**: найти две $(n_x \times n_x)$-матрицы $X_{11} = X_{11}^T > 0$, $Y_{11} = Y_{11}^T > 0$, удовлетворяющие линейным матричным неравенствам (7.36) и

$$\begin{pmatrix} X_{11} & I \\ I & Y_{11} \end{pmatrix} \geq 0 , \tag{7.37}$$

и условию

$$\mathrm{rank}\,(I - X_{11} Y_{11}) \leq k ,$$

или установить, что таких матриц не существует.

Заметим, что в важном частном случае $D_{11} = 0$, т.е. когда управляемый выход не содержит в явном виде возмущение v, минимально возможный уровень гашения возмущений обеспечивается регулятором по состоянию. Действительно, в этом случае неравенство (7.23) справедливо для любых $\gamma > 0$, а второе неравенство (7.36) для регуляторов по выходу совпадает с неравенством (7.24) для регуляторов по состоянию.

Заметим также, что синтез H_∞-регуляторов по выходу полного порядка ($k = n_x$) сводится к решению только линейных матричных неравенств (7.36) и (7.37), так как ранговое условие очевидно выполняется. В этом случае минимально возможный уровень гашения возмущений находится из решения задачи минимизации γ при ограничениях, задаваемых этими линейными матричными неравенствами.

Пример 7.4 H_∞-регулятор по выходу полного порядка для линейного осциллятора с демпфированием. *Уравнения линейного осциллятора такие же, как и примере 7.3.*

Расчет, проведенный для динамического регулятора по выходу полного (второго) порядка, приводит к следующему результату: регулятор

$$\begin{aligned} \dot{x}_r^{(1)} &= 0.0592x_r^{(1)} - 0.8358x_r^{(2)} - 24.76y \ , \\ \dot{x}_r^{(2)} &= 1.0667x_r^{(1)} - 0.8604x_r^{(2)} + 20.24y \ , \\ u &= -0.2586x_r^{(1)} + 0.1836x_r^{(2)} - 0.0389y \end{aligned}$$

обеспечивает гашение возмущений с уровнем $\gamma_* = 0.7072$*, что с высокой точностью совпадает с минимально возможным значением* γ*, обеспечиваемым регулятором по состоянию (см. пример 7.2).*

7.3 Уровень гашения возмущений в дискретном объекте

Пусть на вход устойчивого линейного дискретного объекта

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= Ax_t + Bv_t \ , \\ z_t &= Cx_t + Dv_t \ , \end{aligned} \tag{7.38}$$

в котором $x_t \in \mathcal{R}^{n_x}$, $v_t \in \mathcal{R}^{n_v}$, $z_t \in \mathcal{R}^{n_z}$ и все собственные значения матрицы A лежат внутри единичного круга комплексной плоскости, действует ограниченное по норме l_2 возмущение v_t, т.е.

$$\|v\| = (\sum_{t=0}^{\infty} |v_t|^2)^{1/2} < \infty \ .$$

Как и для непрерывных систем, уровнем гашения возмущений в объекте будем называть величину

$$\gamma_* = \sup_{\|v\| \neq 0} \frac{\|z\|}{\|v\|} \ . \tag{7.39}$$

Ясно, что

$$\gamma_* = \inf_{\gamma} \{\gamma \ : \ \frac{\|z\|}{\|v\|} < \gamma, \, \forall\, v, \, \|v\| \neq 0\} \ .$$

Требуется выяснить, является ли уровень гашения возмущений в объекте меньше заданного числа $\gamma > 0$, т.е. выполняется ли условие

$$\frac{\|z\|}{\|v\|} < \gamma \ , \quad \forall\, v, \quad \|v\| \neq 0 \ . \tag{7.40}$$

Используя равенство Парсеваля, имеем

$$\sup_{\|v\|\neq 0}\frac{\|z\|}{\|v\|}=\sup_{\varphi\in[0,2\pi)}\|H(e^{j\varphi})\|=\|H\|_\infty \ ,$$

где $H(q)=D+C(qI-A)^{-1}B$ – передаточная матрица объекта (7.38) от входа v к выходу z, $j=\sqrt{-1}$, $\|\cdot\|$ обозначает спектральную матричную норму, т.е.

$$\|H\|=\max_i \sigma_i(H) \ ,$$

σ_i – i-е сингулярное число матрицы H (см. лемму A.6), а $\|\cdot\|_\infty$ – ∞-норма в пространстве $H(q)$ таких, что $\sup_{|q|\geq 1}\|H(q)\|<\infty$. Следовательно, условие (7.40) эквивалентно неравенству

$$\|H\|_\infty<\gamma \tag{7.41}$$

или, что то же, частотному неравенству

$$H^T(e^{-j\varphi})H(e^{j\varphi})<\gamma^2 I \ , \quad \forall\,\varphi\in[0,2\pi) \ . \tag{7.42}$$

Таким образом, необходимо проверить выполнение этого частотного неравенства для заданного γ.

В случае объекта с одним входом и одним выходом эта задача легко решается графически: на комплексной плоскости строится годограф, т.е. кривая $H(e^{j\varphi})$, $\varphi\in[0,2\pi)$, и непосредственно проверяется, лежит ли эта кривая внутри круга с центром в начале координат и радусом γ. В случае объекта со многими входами применим дискретный вариант частотной теоремы (см. лемму F.2 в Приложении) и сведем проверку выполнения частотного условия (7.42) к задаче о разрешимости линейного матричного неравенства.

Согласно частотной теореме выполнение по траекториям системы (7.38) неравенства

$$V_{t+1}-V_t-\mathcal{L}(x_t,v_t)<0 \ , \quad \forall\,x_t,v_t, \quad |x_t|+|v_t|\neq 0$$

для заданной эрмитовой формы $\mathcal{L}(x,v)$ векторов $x\in\mathcal{C}^{n_x}$, $v\in\mathcal{C}^{n_v}$ и некоторой $V_t=V(x_t)=x_t^TXx_t$ с эрмитовой матрицей X или, другими словами, выполнение для некоторой $X=X^*$ неравенства

$$(Ax_t+Bv_t)^*X(Ax_t+Bv_t)-x_t^TXx_t-\mathcal{L}(x_t,v_t)<0 \ , \quad \forall\,x_t,v_t, \quad |x_t|+|v_t|\neq 0 \tag{7.43}$$

эквивалентно выполнению частотного неравенства

$$\mathcal{L}[(e^{j\varphi}I-A)^{-1}Bv_t,v_t]>0 \ , \quad \forall\,\varphi\in[0,2\pi) \ , \quad \forall\,|v_t|\neq 0 \ . \tag{7.44}$$

Если

$$\mathcal{L}(x,v) = (x^T, v^T)\, L \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \ , \quad L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12}^T & L_{22} \end{pmatrix} \ ,$$

то неравенство (7.43) примет вид линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} A^TXA - X - L_{11} & A^TXB - L_{12} \\ B^TXA - L_{12}^T & B^TXB - L_{22} \end{pmatrix} < 0 \ , \qquad (7.45)$$

а частотное условие (7.44) запишется в виде

$$\begin{pmatrix} (e^{-j\varphi}I - A)^{-1}B \\ I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12}^T & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (e^{j\varphi}I - A)^{-1}B \\ I \end{pmatrix} > 0 \ . \qquad (7.46)$$

Принимая во внимание (7.42), выберем эрмитову форму

$$\mathcal{L}(x,v) = \gamma^2 v^* v - (Cx + Dv)^*(Cx + Dv) \qquad (7.47)$$

так, чтобы неравенство (7.46) свелось к эквивалентному (7.42) неравенству

$$\gamma^2 I - H^T(e^{-j\varphi})H(e^{j\varphi}) > 0 \ , \quad \forall\, \varphi \in [0, 2\pi) \ .$$

Согласно частотной теореме для выполнения этого условия необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$(Ax_t + Bv_t)^* X (Ax_t + Bv_t) - x_t^T X x_t + (Cx_t + Dv_t)^*(Cx_t + Dv_t) - \gamma^2 v_t^* v_t < 0 \ .$$

Заменяя здесь X на γX и умножая полученное неравенство на γ^{-1}, получим

$$x_t^*(A^TXA - X + \gamma^{-1}C^TC)x_t + 2\mathrm{Re}\, x_t^*(A^TXB + \gamma^{-1}C^TD)v_t +$$
$$+ v_t^*(\gamma^{-1}D^TD - \gamma I + B^TXB)v_t < 0 \ .$$

Так как это неравенство должно выполняться для всех x_t и v_t, то оно эквивалентно матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} A^TXA - X + \gamma^{-1}C^TC & A^TXB + \gamma^{-1}C^TD \\ (A^TXB + \gamma^{-1}C^TD)^T & -\gamma I + B^TXB + \gamma^{-1}D^TD \end{pmatrix} < 0 \qquad (7.48)$$

или, с учетом леммы A.2, неравенству

$$F_d(X,\gamma) = \begin{pmatrix} A^TXA - X & A^TXB & C^T \\ B^TXA & -\gamma I + B^TXB & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \ . \qquad (7.49)$$

Заметим, что при выполнении этого неравенства в силу леммы A.2 должно выполняться

$$A^T XA - X < 0 \ ,$$

из которого, учитывая, что матрица A имеет все собственные значения внутри единичного круга комплексной плоскости, в силу теоремы Ляпунова для дискретных систем (см. лемму D.2 в Приложении) следует, что $X > 0$. Таким образом, на основании дискретного варианта частотной теоремы мы приходим к следующему.

Утверждение 7.6 *Пусть в объекте (7.38) матрица A имеет все собственные значения внутри единичного круга комплексной плоскости. Для того, чтобы уровень гашения возмущений в этом объекте был меньше заданного числа γ необходимо и достаточно, чтобы линейное матричное неравенство (7.49) было разрешимо относительно симметрической $(n_x \times n_x)$-матрицы $X > 0$.*

Отметим, что (7.49) является линейным матричным неравенством относительно переменных X и γ. Поэтому вычисление уровня гашения возмущений в объекте сводится к решению задачи оптимизации линейной функции при ограничении, заданном линейным матричным неравенством.

Утверждение 7.7 *Определенный в (7.39) уровень гашения возмущений в устойчивом объекте (7.38) находится следующим образом*

$$\gamma_* = \inf_{F_d(X,\gamma)<0} \gamma \ ,$$

где линейное матричное неравенство $F_d(X, \gamma) < 0$ задано в (7.49).

7.4 H_∞-регуляторы для дискретных объектов

Рассмотрим дискретный управляемый объект

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= Ax_t + B_1 v_t + B_2 u_t \ , \\ z_t &= C_1 x_t + D_{11} v_t + D_{12} u_t \ , \\ y_t &= C_2 x_t + D_{21} v_t \ , \end{aligned} \tag{7.50}$$

в котором $x_t \in \mathcal{R}^{n_x}$ – состояние, $v_t \in \mathcal{R}^{n_v}$ – возмущение, $u_t \in \mathcal{R}^{n_u}$ – управление, $z_t \in \mathcal{R}^{n_z}$ – управляемый выход, $y_t \in \mathcal{R}^{n_y}$ – измеряемый выход. Требуется построить линейный динамический регулятор k-го порядка вида

$$\begin{aligned} x_{t+1}^{(r)} &= A_r x_t^{(r)} + B_r y_t \ , \\ u_t &= C_r x_t^{(r)} + D_r y_t \ , \end{aligned} \tag{7.51}$$

где $x_t^{(r)} \in R^k$ – состояние регулятора, обеспечивающий асимптотическую устойчивость замкнутой системы (7.50), (7.51) и выполнение условия

$$\frac{\|z\|}{\|v\|} < \gamma \ , \quad \forall\, v, \quad \|v\| \neq 0 \tag{7.52}$$

для заданного γ.

Уравнения замкнутой системы (7.50), (7.51) примут вид

$$\begin{aligned} x_{t+1}^{(c)} &= A_c x_t^{(c)} + B_c v_t \ , \\ z_t &= C_c x_t^{(c)} + D_c v_t \ , \end{aligned} \tag{7.53}$$

где

$$\begin{gathered} A_c = \begin{pmatrix} A + B_2 D_r C_2 & B_2 C_r \\ B_r C_2 & A_r \end{pmatrix} \ , \quad B_c = \begin{pmatrix} B_1 + B_2 D_r D_{21} \\ B_r D_{21} \end{pmatrix} \ , \\ C_c = (C_1 + D_{12} D_r C_2 \quad D_{12} C_r) \ , \quad D_c = D_{11} + D_{12} D_r D_{21} \ . \end{gathered} \tag{7.54}$$

Введем параметры регулятора

$$\Theta = \begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix} \tag{7.55}$$

и представим матрицы замкнутой системы в виде

$$\begin{gathered} A_c = A_0 + \mathcal{B}\Theta\mathcal{C} \ , \quad B_c = B_0 + \mathcal{B}\Theta\mathcal{D}_{21} \ , \\ C_c = C_0 + \mathcal{D}_{12}\Theta\mathcal{C} \ , \quad D_c = D_{11} + \mathcal{D}_{12}\Theta\mathcal{D}_{21} \ , \end{gathered} \tag{7.56}$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} A & 0_{n_x \times k} \\ 0_{k \times n_x} & 0_{k \times k} \end{pmatrix} \ ,$$

$$\begin{gathered} \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0_{n_x \times k} & B_2 \\ I_k & 0_{k \times n_u} \end{pmatrix} \ , \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0_{k \times n_x} & I_k \\ C_2 & 0_{n_y \times k} \end{pmatrix} \ , \\ B_0 = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0_{k \times n_v} \end{pmatrix} \ , \quad C_0 = (C_1 \quad 0_{n_z \times k}) \ , \\ \mathcal{D}_{12} = (0_{n_z \times k} \quad D_{12}) \ , \quad \mathcal{D}_{21} = \begin{pmatrix} 0_{k \times n_v} \\ D_{21} \end{pmatrix} \ . \end{gathered} \tag{7.57}$$

Для выполнения цели управления (7.52) передаточная матрица замкнутого объекта (7.53) от входа v_t к выходу z_t

$$H_c(q) = D_c + C_c(qI - A_c)^{-1}B_c$$

должна удовлетворять условию

$$\|H_c\|_\infty < \gamma \ .$$

Согласно утверждению 7.6 для этого необходимо и достаточно, чтобы линейное матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} A_c^T X A_c - X & A_c^T X B_c & C_c^T \\ B_c^T X A_c & -\gamma I + B_c^T X B_c & D_c^T \\ C_c & D_c & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \ . \tag{7.58}$$

было разрешимо относительно матрицы $X = X^T > 0$. По аналогии с синтезом H_∞-управления для непрерывного объекта далее требуется превратить это неравенство в линейное матричное неравенство относительно параметров регулятора Θ, подставляя в левую часть (7.58) выражения (7.56) для матриц замкнутой системы. Нетрудно видеть, что при этом блоки полученной матрицы будут содержать квадратичные по Θ слагаемые. Поэтому преобразуем (7.58) к эквивалентному неравенству

$$\begin{pmatrix} -X^{-1} & A_c & B_c & 0 \\ A_c^T & -X & 0 & C_c^T \\ B_c^T & 0 & -\gamma I & D_c^T \\ 0 & C_c & D_c & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \ , \tag{7.59}$$

в левую часть которого Θ входит линейно. Покажем, что неравенства (7.58) и (7.59) эквивалентны.

Действительно, согласно лемме A.2 неравенство (7.59) выполняется тогда и только тогда, когда

$$X > 0 \ , \quad \begin{pmatrix} -X & 0 & C_c^T \\ 0 & -\gamma I & D_c^T \\ C_c & D_c & -\gamma I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_c^T \\ B_c^T \\ 0 \end{pmatrix} X (A_c \quad B_c \quad 0) < 0 \ . \tag{7.60}$$

Первое из этих неравенств следует из (7.58) с учетом леммы A.2 и теоремы Ляпунова (см. лемму D.2 в Приложении), так как все собственные значения матрицы A_c должны лежать внутри единичного круга комплексной плоскости. Запишем второе неравенство (7.60) в виде

$$\begin{pmatrix} A_c^T X A_c - X & A_c^T X B_c & C_c^T \\ B_c^T X A_c & -\gamma I + B_c^T X B_c & D_c^T \\ C_c & D_c & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 ,$$

которое согласно лемме А.2 выполняется тогда и только тогда, когда

$$\begin{pmatrix} A_c^T X A_c - X & A_c^T X B_c \\ B_c^T X A_c & -\gamma I + B_c^T X B_c \end{pmatrix} + \gamma^{-1} \begin{pmatrix} C_c^T \\ D_c^T \end{pmatrix} (C_c \quad D_c) < 0 .$$

Очевидно, что полученное неравенство совпадает с неравенством (7.58).

Неравенство (7.59) представимо в виде линейного матричного неравенства относительно неизвестных параметров Θ

$$\Psi + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0 , \tag{7.61}$$

в котором

$$\begin{aligned} \Psi &= \begin{pmatrix} -X^{-1} & A_0 & B_0 & 0 \\ A_0^T & -X & 0 & C_0^T \\ B_0^T & 0 & -\gamma I & D_{11}^T \\ 0 & C_0 & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} , \\ P &= (0_{(n_y+k)\times(n_x+k)} \quad \mathcal{C} \quad \mathcal{D}_{21} \quad 0_{(n_y+k)\times n_z}) , \\ Q &= (\mathcal{B}^T \quad 0_{(n_u+k)\times(n_x+k)} \quad 0_{(n_u+k)\times n_v} \quad \mathcal{D}_{12}^T) \end{aligned} \tag{7.62}$$

и все матрицы определены в (7.57). Согласно утверждению 3.2 относительно разрешимости такого типа неравенств приходим к следующему.

Утверждение 7.8 *Для существования H_∞-регулятора k-го порядка с заданным γ необходимо и достаточно, чтобы существовала $(n_x + k) \times (n_x + k)$-матрица $X = X^T > 0$, удовлетворяющая следующим двум* *неравенствам*

$$
W_P^T \begin{pmatrix} -X^{-1} & A_0 & B_0 & 0 \\ A_0^T & -X & 0 & C_0^T \\ B_0^T & 0 & -\gamma I & D_{11}^T \\ 0 & C_0 & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} W_P < 0 \ ,
$$

$$
W_Q^T \begin{pmatrix} -X^{-1} & A_0 & B_0 & 0 \\ A_0^T & -X & 0 & C_0^T \\ B_0^T & 0 & -\gamma I & D_{11}^T \\ 0 & C_0 & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} W_Q < 0 \ . \tag{7.63}
$$

Если условия (7.63) выполнены и такая матрица X найдена, то параметры Θ искомого регулятора находятся как решения линейного матричного неравенства (7.61).

Введем матрицу $Y = X^{-1}$ и перепишем условия (7.63) в виде линейных матричных неравенств относительно матриц X и Y:

$$
W_P^T \begin{pmatrix} -Y & A_0 & B_0 & 0 \\ A_0^T & -X & 0 & C_0^T \\ B_0^T & 0 & -\gamma I & D_{11}^T \\ 0 & C_0 & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} W_P < 0 \ ,
$$

$$
W_Q^T \begin{pmatrix} -Y & A_0 & B_0 & 0 \\ A_0^T & -X & 0 & C_0^T \\ B_0^T & 0 & -\gamma I & D_{11}^T \\ 0 & C_0 & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} W_Q < 0 \ . \tag{7.64}
$$

Тогда рассматриваемая задача сводится к **задаче A**: найти две взаимнообратные матрицы X и Y ($XY = I$), удовлетворяющие неравенствам (7.64).

Преобразуем неравенства (7.64), учитывая блочную структуру матриц A_0, B_0, C_0 и соответствующее представление матриц X и Y в блочном виде

$$
X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{pmatrix} \ , \quad Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12}^T & Y_{22} \end{pmatrix} \ .
$$

Согласно (7.57) и (7.62) имеем

$$P = \begin{pmatrix} 0_{k\times n_x} & 0_{k\times k} & 0_{k\times n_x} & I_k & 0_{k\times n_v} & 0_{k\times n_z} \\ 0_{n_y\times n_x} & 0_{n_y\times k} & C_2 & 0_{n_y\times k} & D_{21} & 0_{n_y\times n_z} \end{pmatrix} ,$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0_{k\times n_x} & I_k & 0_{k\times n_x} & 0_{k\times k} & 0_{k\times n_v} & 0_{k\times n_z} \\ B_2^T & 0_{n_u\times k} & 0_{n_u\times n_x} & 0_{n_u\times k} & 0_{n_u\times n_v} & D_{12}^T \end{pmatrix} ,$$

поэтому

$$W_P = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ W_P^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ W_P^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} , \quad W_Q = \begin{pmatrix} W_Q^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ W_Q^{(2)} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

где матрицы $W_P^{(1)}$, $W_P^{(2)}$ и матрицы $W_Q^{(1)}$, $W_Q^{(2)}$ удовлетворяют следующим уравнениям

$$C_2 W_P^{(1)} + D_{21} W_P^{(2)} = 0 , \quad B_2^T W_Q^{(1)} + D_{12}^T W_Q^{(2)} = 0 .$$

С учетом этого неравенства (7.64) примут вид

$$W_P^T \begin{pmatrix} -Y_{11} & -Y_{12} & A & 0 & B_1 & 0 \\ \star & -Y_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & -X_{11} & -X_{12} & 0 & C_1^T \\ \star & \star & \star & -X_{22} & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -\gamma I & D_{11}^T \\ \star & \star & \star & \star & \star & -\gamma I \end{pmatrix} W_P < 0 ,$$

$$W_Q^T \begin{pmatrix} -Y_{11} & -Y_{12} & A & 0 & B_1 & 0 \\ \star & -Y_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & -X_{11} & -X_{12} & 0 & C_1^T \\ \star & \star & \star & -X_{22} & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -\gamma I & D_{11}^T \\ \star & \star & \star & \star & \star & -\gamma I \end{pmatrix} W_Q < 0 .$$

После умножения первое из этих неравенств запишется в виде

$$\begin{pmatrix} -W_P^{(1)^T} X_{11} W_P^{(1)} - \gamma W_P^{(2)^T} W_P^{(2)} & \star & \star \\ \begin{pmatrix} AW_P^{(1)} + B_1 W_P^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix} & -Y & \star \\ C_1 W_P^{(1)} + D_{11} W_P^{(2)} & 0 & -\gamma I \end{pmatrix} < 0,$$

которое по лемме A.4 с учетом того, что $Y > 0$, эквивалентно неравенству

$$\begin{pmatrix} -W_P^{(1)^T} X_{11} W_P^{(1)} - \gamma W_P^{(2)^T} W_P^{(2)} & W_P^{(1)^T} C_1^T + W_P^{(2)^T} D_{11}^T \\ C_1 W_P^{(1)} + D_{11} W_P^{(2)} & -\gamma I \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} W_P^{(1)^T} A^T + W_P^{(2)^T} B_1^T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y^{-1} \begin{pmatrix} AW_P^{(1)} + B_1 W_P^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} < 0 \ .$$

Так как $Y^{-1} = X$, то во второе слагаемое в левой части последнего неравенства входит только блок X_{11}. Непосредственной проверкой можно убедится, что это неравенство сводится к следующему линейному матричному неравенству относительно X_{11}:

$$\hat{W}_P^T \begin{pmatrix} A^T X_{11} A - X_{11} & A^T X_{11} B_1 & | & C_1^T \\ \star & -\gamma I + B_1^T X_{11} B_1 & | & D_{11}^T \\ - & - & | & - \\ \star & \star & | & -\gamma I \end{pmatrix} \hat{W}_P < 0 \ , \qquad (7.65)$$

где

$$\hat{W}_P = \begin{pmatrix} N_1 & | & 0 \\ - & | & - \\ 0 & | & I \end{pmatrix} \ ,$$

а столбцы матрицы $N_1 = \mathrm{col}\,(W_P^{(1)}, W_P^{(2)})$ образуют базис ядра матрицы $(C_2 \quad D_{21})$.

Аналогичным образом второе из неравенств (7.64) преобразуется к виду

$$\hat{W}_Q^T \begin{pmatrix} AY_{11}A^T - Y_{11} & AY_{11}C_1^T & | & B_1 \\ \star & -\gamma I + C_1 Y_{11} C_1^T & | & D_{11} \\ - & - & | & - \\ \star & \star & | & -\gamma I \end{pmatrix} \hat{W}_Q < 0 \ , \qquad (7.66)$$

где

$$\hat{W}_Q = \begin{pmatrix} N_2 & | & 0 \\ - & | & - \\ 0 & | & I \end{pmatrix} ,$$

а столбцы матрицы $N_2 = \mathrm{col}\,(W_Q^{(1)}, W_Q^{(2)})$ образуют базис ядра матрицы $(B_2^T \quad D_{12}^T)$. Таким образом, задача синтеза H_∞-регуляторов k-порядка для дискретных объектов может быть также сведена к сформулированной выше **задаче B**: найти две $(n_x \times n_x)$-матрицы $X_{11} = X_{11}^T > 0$, $Y_{11} = Y_{11}^T > 0$, удовлетворяющие линейным матричным неравенствам (7.65), (7.66) и

$$\begin{pmatrix} X_{11} & I \\ I & Y_{11} \end{pmatrix} \geq 0 ,$$

и условию

$$\mathrm{rank}\,(I - X_{11} Y_{11}) \leq k ,$$

или установить, что таких матриц не существует.

Часть III

Законы управления при неопределенности

Изложенный выше синтез регуляторов осуществлялся в предположении, что управляемый объект описывается системами линейных дифференциальных или разностных уравнений с известными постоянными параметрами. Вместе с тем, адекватное описание многих реальных объектов управления требует включения в их математические модели неизвестных точно нестационарных параметров, изменяющихся в заданных границах, нелинейных характеристик и целых динамических блоков. Теперь задача управления такими неопределенными объектами существенно усложняется: необходимо синтезировать регулятор, который обеспечивает выполнение цели управления для всех возможных неопределенностей из заданного класса. Такие регуляторы будем называть робастными.

Глава 8

Модели неопределенности

8.1 Параметрическая неопределенность

Рассмотрим неопределенную динамическую систему вида

$$\dot{x} = \hat{A}x \ , \quad \hat{A} = A + F\Omega(t)E \ , \tag{8.1}$$

где первое слагаемое A – заданная постоянная матрица (иногда ее называют матрицей номинальной системы), а во втором слагаемом, представляющем ее возмущение, вызванное наличием неопределенности, F, E – заданные постоянные матрицы, а $\Omega(t)$ – неизвестная матричная функция с элементами, зависящими от t, которая ограничена по норме

$$\Omega^T(t)\Omega(t) \leq \eta^2 I \tag{8.2}$$

при заданном значении $\eta \neq 0$. Неопределенность этого вида будем называть параметрической неопределенностью.

Такая структура позволяет описывать различные системы с неизвестными ограниченными нестационарными параметрами. Например, пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \ ,$$

и какие-то два элемента этой матрицы возмущены на величины $\Omega_1(t)$ и $\Omega_2(t)$, связанные общим неравенством

$$\Omega_1^2(t) + \Omega_2^2(t) \leq \eta^2 \ . \tag{8.3}$$

Рассмотрим три различных случая. Пусть сначала

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} + \Omega_1(t) & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + \Omega_2(t) & a_{33} \end{pmatrix} .$$

Тогда

$$\hat{A} = A + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \end{pmatrix} (0 \quad 1 \quad 0) .$$

Пусть теперь

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} + \Omega_1(t) & a_{13} + \Omega_2(t) \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} .$$

Тогда

$$\hat{A} = A + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (\Omega_1(t)\, \Omega_2(t)) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

и неравенство (17.8) принимает вид

$$\begin{pmatrix} \Omega_1^2(t) & \Omega_1(t)\Omega_2(t) \\ \Omega_1(t)\Omega_2(t) & \Omega_2^2(t) \end{pmatrix} \leq \eta^2 I ,$$

что эквивалентно (8.3).

Пусть, наконец,

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} + \Omega_1(t) & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + \Omega_2(t) \end{pmatrix} .$$

Тогда

$$\hat{A} = A + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1(t) & 0 \\ 0 & \Omega_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

и неравенство (17.8) принимает вид

$$\begin{pmatrix} \Omega_1^2(t) & 0 \\ 0 & \Omega_2^2(t) \end{pmatrix} \le \eta^2 I \ .$$

Это неравенство сводится к двум неравенствам

$$|\Omega_1(t)| \le \eta \ , \quad |\Omega_2(t)| \le \eta \ ,$$

которые определяют более широкую область возмущений, чем исходное неравенство (8.3). Последний пример показывает, что не любые возмущения с ограничениями, удовлетворяющими квадратичным неравенствам, могут быть представлены в форме (8.1).

Будем также рассматривать неопределенные системы

$$\dot{x} = \hat{A}x \ , \quad \hat{A} = A + \sum_{i=1}^{n_c} F_i \Omega_i(t) E_i \ , \tag{8.4}$$

в которых F_i – столбцы, E_i – строки, а $\Omega_i(t)$ – неизвестные скалярные функции, удовлетворяющие неравенствам

$$|\Omega_i(t)| \le \eta \ , \quad i = 1, \ldots, n_c \tag{8.5}$$

при заданном $\eta \ne 0$. Такая форма позволяет рассматривать возмущенные матрицы, элементы которых удовлетворяют нескольким ограничениям.

Пример 8.1 *Рассмотрим линейный осциллятор с неизвестными коэффициентами демпфирования и жесткости*

$$m_0\ddot{\xi} + b_0(1 + f_1\Omega_1(t))\dot{\xi} + c_0(1 + f_2\Omega_2(t))\xi = 0 \ , \tag{8.6}$$

где m_0, b_0 и c_0 – номинальные значения массы материальной точки, коэффициентов демпфирования и жесткости, f_1 и f_2 – заданные числа, $\Omega_1(t)$ и $\Omega_2(t)$ – неизвестные функции, удовлетворяющие ограничениям

$$|\Omega_1(t)| \le 1 \ , \quad |\Omega_2(t)| \le 1 \ .$$

Обозначив $x_1 = \xi$ и $x_2 = \dot{\xi}$, запишем уравнение (8.6) в виде системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{c_0}{m_0}(1 + f_2\Omega_2(t))x_1 - \frac{b_0}{m_0}(1 + f_1\Omega_1(t))x_2 \ , \end{aligned}$$

которая представима в форме (8.4) с

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{c_0}{m_0} & -\dfrac{b_0}{m_0} \end{pmatrix} , \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ f_1 \end{pmatrix} , \quad F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ f_2 \end{pmatrix} ,$$

$$E_1 = (0 \quad -\frac{b_0}{m_0}) , \quad E_2 = (-\frac{c_0}{m_0} \quad 0) .$$

Наряду с параметрическими неопределенностями (8.1) и (8.4) будем рассматривать и другую более общую модель системы с параметрической неопределенностью

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bv_\Delta \\ z_\Delta &= Cx + Dv_\Delta \\ v_\Delta &= \Delta(t) z_\Delta . \end{aligned} \tag{8.7}$$

В этих уравнениях v_Δ будем называть входом неопределенности, z_Δ – выходом неопределенности (см. рис.), а $\Delta(t)$ – неизвестная матрица, удовлетворяющая неравенству

$$\Delta^T(t)\Delta(t) \le \eta^2 I . \tag{8.8}$$

Во многих задачах эта матрица имеет блочно-диагональную структуру вида

$$\Delta(t) = \mathrm{diag}\,(\delta_1(t) I_{k_1}, \ldots, \delta_r(t) I_{k_r}, \Delta_1(t), \ldots, \Delta_f(t)) , \tag{8.9}$$

где первые r блоков – диагональные, а последние f блоков являются полными квадратными матрицами порядков $m_1, \ldots, m_f$.

Подставляя выражение v_Δ из последнего уравнения (8.7) в первые два, найдем, что

$$\dot{x} = (A + B\Delta(t)(I - D\Delta(t))^{-1} C)x$$

при условии, что $\det\,(I - D\Delta(t)) \ne 0$. Это означает, что неопределенная система (8.7) может включать неизвестные параметры, которые входят нелинейно в уравнения объекта. В частном случае $D = 0$ система (8.7) принимает вид

$$\dot{x} = (A + B\Delta(t)C)x ,$$

совпадающий с (8.4) при

$$B = (F_1, F_2, \cdots, F_{n_c}),\ \Delta(t) = \begin{pmatrix} \Omega_1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Omega_2(t) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Omega_{n_c}(t) \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \cdots \\ E_{n_c} \end{pmatrix}.$$

Пример 8.2 *Рассмотрим линейный осциллятор с неизвестной массой и неизвестными коэффициентами демпфирования и жесткости*

$$m\ddot{\xi} + b\dot{\xi} + c\xi = 0 \ , \tag{8.10}$$

где $m = m_0(1 + w_m\delta_m)$, $b = b_0(1 + w_b\delta_b)$, $c = c_0(1 + w_c\delta_c)$, m_0, b_0, c_0 *– номинальные значения параметров,* $|\delta_m| \le \eta$, $|\delta_b| \le \eta$, $|\delta_c| \le \eta$. *Обозначая* $x_1 = \xi$ *и* $x_2 = \dot{\xi}$, *запишем это уравнение в виде*

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = x_2 \\
&\dot{x}_2 = -\frac{c_0}{m_0}x_1 - \frac{b_0}{m_0}x_2 - w_m\delta_m\,\dot{x}_2 - w_c\delta_c\frac{c_0}{m_0}\,x_1 - w_b\delta_b\frac{b_0}{m_0}\,x_2 \ .
\end{aligned}$$

Теперь, обозначив $v_\Delta = col(v_m, v_c, v_b)$ *и* $z_\Delta = col(z_m, z_c, z_b)$, *где*

$$v_m = -\delta_m\dot{x}_2 \ , \quad v_c = -\delta_c\frac{c_0}{m_0}x_1 \ , \quad v_b = -\delta_b\frac{b_0}{m_0}x_2$$

$$z_m = -\dot{x}_2 = \frac{c_0}{m_0}x_1 + \frac{b_0}{m_0}x_2 - w_mv_m - w_cv_c - w_bv_b \ ,$$

$$z_c = -\frac{c_0}{m_0}x_1 \ , \quad z_b = -\frac{b_0}{m_0}x_2 \ ,$$

представим эту систему в виде (8.7), (8.8), где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{c_0}{m_0} & -\dfrac{b_0}{m_0} \end{pmatrix} \ , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ w_m & w_c & w_b \end{pmatrix} \ ,$$

$$C = \begin{pmatrix} \dfrac{c_0}{m_0} & \dfrac{b_0}{m_0} \\ -\dfrac{c_0}{m_0} & 0 \\ 0 & -\dfrac{b_0}{m_0} \end{pmatrix} \ , \quad D = \begin{pmatrix} -w_m & -w_c & -w_b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

$$\Delta(t) = \begin{pmatrix} \delta_m(t) & 0 & 0 \\ 0 & \delta_c(t) & 0 \\ 0 & 0 & \delta_b(t) \end{pmatrix} \ .$$

8.2 Динамическая неопределенность

Другой класс неопределенных систем, который мы будем рассматривать, определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bv_\Delta \\ z_\Delta &= Cx + Dv_\Delta \\ v_\Delta &= \Delta z_\Delta \end{aligned} \tag{8.11}$$

и схематично представлен на рис. В этих уравнениях A, B, C, D – заданные матрицы, а Δ – линейный оператор с ограниченной L_2-нормой, т.е.

$$\|\Delta\| = \sup_{z_\Delta \neq 0} \frac{\|v_\Delta(t)\|_2}{\|z_\Delta(t)\|_2} \leq \eta \ , \tag{8.12}$$

где η – некоторое число.

Приведем примеры такого описания.

Пример 8.3 *Рассмотрим двухмассовую систему (см. рис.), описываемую уравнениями*

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\xi}_1 &= -b_1\dot{\xi}_1 - c_1\xi_1 - b_2(\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_2) - c_2(\xi_1 - \xi_2) \ , \\ m_2\ddot{\xi}_2 &= b_2(\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_2) + c_2(\xi_1 - \xi_2) \ , \end{aligned} \tag{8.13}$$

где m_1, m_2 – массы материальных точек, b_1, b_2 – коэффициенты демпфирования, c_1, c_2 – коэффициенты жесткости. Допустим, что отсутствует информация о значениях параметров m_2, b_2 и c_2. Введем переменные $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \dot{\xi}_1$, обозначим $v_\Delta = -m_2\ddot{\xi}_2$ и запишем первое уравнение (8.13) в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{c_1}{m_1}x_1 - \frac{b_1}{m_1}x_2 + \frac{1}{m_1}v_\Delta \ . \end{aligned}$$

Введем оператор дифференцирования $sy(t) = \dfrac{dy}{dt}$. Из второго уравнения (8.13) имеем

$$(m_2s^2 + b_2s + c_2)\ddot{\xi}_2 = (b_2s + c_2)\ddot{\xi}_1$$

и, обозначая

$$z_\Delta = -\frac{c_1}{m_1}x_1 - \frac{b_1}{m_1}x_2 + \frac{1}{m_1}v_\Delta \ ,$$

найдем

$$(m_2 s^2 + b_2 s + c_2) v_\Delta = -m_2 (b_2 s + c_2) z_\Delta \ .$$

Это дифференциальное уравнение при $v_\Delta(0) = 0$ *и* $\dot{v}_\Delta(0) = 0$ *определяет оператор* $\Delta : L_2 \to L_2$, *который функции* $z_\Delta(t)$ *ставит в соответствие функцию* $v_\Delta(t)$. *Допустимые значения неизвестных параметров определяются условием*

$$\|\Delta\| = \sup_{\omega \in (-\infty, \infty)} \|H(j\,\omega)\| = \|H\|_\infty \le \eta \ ,$$

где

$$H(s) = -\frac{m_2 (b_2 s + c_2)}{m_2 s^2 + b_2 s + c_2} \ .$$

Глава 9

Робастная устойчивость

9.1 Непрерывные системы

Будем исследовать проблему робастной устойчивости для системы с параметрической неопределенностью

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bv_\Delta \\ z_\Delta &= Cx + Dv_\Delta \\ v_\Delta &= \Delta(t) z_\Delta \ , \end{aligned} \tag{9.1}$$

где $\Delta(t)$ – неизвестная матрица, удовлетворяющая неравенству

$$\Delta^T(t)\Delta(t) \le \eta^2 I \ . \tag{9.2}$$

Предполагается, что номинальная система, определяемая матрицей A, асимптотически устойчива и $\det(I - \Delta(t)D) \ne 0$. Задача состоит в том, чтобы выяснить остается ли эта неопределенная система асимптотически устойчивой для любой матрицы $\Delta(t)$, удовлетворяющей условию (9.2) при заданном η. И второй вопрос, который нас будет интересовать, это нахождение радиуса робастной устойчивости η_{max} – максимального значения η, при котором неопределенная система (9.1), (9.2) асимптотически устойчива.

Наряду с неопределенной системой (9.1) рассмотрим вспомогательную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bv_\Delta \\ z_\Delta &= Cx + Dv_\Delta \ , \end{aligned} \tag{9.3}$$

в которой вход v_Δ и выход z_Δ в каждый момент времени связаны неравенством

$$|v_\Delta|^2 \le \eta^2 |z_\Delta|^2 \ . \tag{9.4}$$

Допустим, что выполняется следующее условие

$$I - \eta^2 D^T D > 0 \ . \tag{9.5}$$

В этом случае при $x = 0$ с учетом второго уравнения (9.3) из (9.4) следует, что

$$v_\Delta^T (I - \eta^2 D^T D) v_\Delta \le 0 \ ,$$

и, следовательно, $v_\Delta = 0$. Это означает, что $x = 0$ является состоянием равновесия вспомогательной системы (9.3), (9.4).

Очевидно, что в силу условия (9.2) вход и выход неопределенной системы (9.1) удовлетворяют неравенству (9.4). Следовательно, исходная неопределенная система "погружена"в вспомогательную систему (9.3), (9.4). Выясним условия устойчивости вспомогательной системы.

Пусть существует положительно определенная квадратичная функция $V(x) = x^T X x$, для которой в силу уравнений (9.3) при всех x, v_Δ, удовлетворяющих условию (9.4), выполняется

$$\dot{V} < 0 \ . \tag{9.6}$$

В силу неущербности S-процедуры при одном ограничении (см. Приложение) это эквивалентно существованию $V(x) = x^T X x$ с $X = X^T > 0$, для которой при всех x, v_Δ выполняется неравенство

$$\dot{V} + |z_\Delta|^2 - \eta^{-2} |v_\Delta|^2 < 0 \ , \quad |x|^2 + |v_\Delta|^2 \ne 0 \ . \tag{9.7}$$

Выражение в левой части этого неравенства представляет собой отрицательно определенную квадратичную функцию относительно переменных x, v_Δ и, следовательно,

$$\dot{V} + |z_\Delta|^2 - \eta^{-2} |v_\Delta|^2 < -\varepsilon(|x|^2 + |v_\Delta|^2) < -\varepsilon |x|^2 \ ,$$

где $\varepsilon > 0$. Это означает, что $V(x)$ является функцией Ляпунова, обеспечивающей асимптотическую устойчивость вспомогательной, а, значит, и исходной неопределенной системы. Согласно частотной теореме (см. лемму F.1), которая применима в силу того, что матрица A гурвицева (т.е. пара (A, B) стабилизируема), существование указанной функции $V(x)$, удовлетворяющей неравенству (9.7), эквивалентно выполнению частотного условия

$$\|H(s)\|_\infty < \eta^{-1} \ , \quad H(s) = D + C(sI - A)^{-1} B \ .$$

Таким образом, уровень гашения возмущений в разомкнутом объекте (9.3) не должен превышать величину η^{-1}. Учитывая теперь утверждение 7.1, которое характеризует уровень гашения возмущений в объекте в терминах линейных матричных неравенств, приходим к следующему.

Утверждение 9.1 *Если уровень гашения возмущений в объекте (9.3) меньше, чем $\zeta = \eta^{-1}$, т.е. существует матрица $X = X^T > 0$, удовлетворяющая линейному матричному неравенству*

$$F_c(X, \zeta) = \begin{pmatrix} A^T X + XA & XB & C^T \\ B^T X & -\zeta I & D^T \\ C & D & -\zeta I \end{pmatrix} < 0 \ , \tag{9.8}$$

то неопределенная система (9.1), (9.2) робастно устойчива.

Отметим, что неравенство (9.8) в силу леммы Шура (см. лемму A.2) влечет неравенство (9.5), которое предполагалось выполненным a priori. Отметим также, что утверждение 9.1 определяет лишь достаточные условия робастной устойчивости. Поэтому, находя минимальное значение ζ, при котором выполняется (9.8), получим оценку радиуса робастной устойчивости.

Утверждение 9.2 *Максимальное значение η_{max}, при котором неопределенная система (9.1), (9.2) робастно устойчива, удовлетворяет неравенству*

$$\eta_{max} \geq \eta_* \ , \quad \eta_* = \zeta_*^{-1} \ , \quad \zeta_* = \inf_{F_c(X,\zeta)<0} \zeta \ , \tag{9.9}$$

где линейное матричное неравенство $F_c(X, \zeta) < 0$ задано в (9.8).

Пример 9.1 *Найдем оценку радиуса робастной устойчивости линейного осциллятора с неизвестными коэффициентами демпфирования и жесткости*

$$m_0 \ddot{\xi} + b_0(1 + f_1 \Omega_1(t))\dot{\xi} + c_0(1 + f_2 \Omega_2(t))\xi = 0 \ ,$$

описанного в примере 8.1. При значениях $m_0 = 1$, $b_0 = 1$, $c_0 = 100$, $f_1 = f_2 = 0.1$ была получена следующая оценка радиуса робастной устойчивости $\eta_* = 0.7027$.

Пример 9.2 *Оценка радиуса робастной устойчивости линейного осциллятора с неизвестной массой и неизвестными коэффициентами демпфирования и жесткости*

$$m_0(1 + w_m \delta_m)\ddot{\xi} + b_0(1 + w_b \delta_b)\dot{\xi} + c_0(1 + w_c \delta_c)\xi = 0 \ ,$$

описанного в примере 8.2, при значениях $m_0 = 1$, $b_0 = 1$, $c_0 = 100$, $w_m = w_b = w_c = 0.1$ такова $\eta_* = 0.4013$.

В случае, когда неизвестная матрица $\Delta(t)$ порядка $n_\Delta \times n_\Delta$ имеет блочно-диагональную структуру вида

$$\Delta(t) = \mathrm{diag}\,(\delta_1(t)I_{k_1}, \ldots, \delta_r(t)I_{k_r}, \Delta_1(t), \ldots, \Delta_f(t)) \ , \tag{9.10}$$

где первые r блоков – диагональные, а последние f блоков являются полными квадратными матрицами порядков $m_1, \ldots, m_f$, приведенная выше оценка радиуса робастной устойчивости может быть улучшена.

Сопоставим заданной структуре неопределенности множество положительно определенных симметрических матриц S блочно-диагонального вида

$$S = \mathrm{diag}\,(S_1, \ldots, S_r, s_1 I_{m_1}, \ldots, s_f I_{m_f}) \ , \tag{9.11}$$

где первые r блоков являются полными квадратными матрицами порядков $k_1, \ldots, k_r$ и $k_1 + \cdots + k_r + m_1 + \cdots + m_f = n_\Delta$. Заметим, что для переменных v_Δ, z_Δ, определяемых в силу исходной неопределенной системы (9.1), (9.10), выполняется неравенство

$$v_\Delta^T S v_\Delta \le \eta^2 z_\Delta^T S z_\Delta \tag{9.12}$$

для любой матрицы S вида (9.11). Действительно, из третьего уравнения (9.1) имеем

$$v_\Delta^T S v_\Delta = z_\Delta^T \Delta^T(t) S \Delta(t) z_\Delta \ ,$$

откуда с учетом того, что для всех матриц S вида (9.11) справедливо $S\Delta = \Delta S$ и выполняется (9.2), получим (9.12).

Проведем процедуру "погружения"исходной неопределенной системы в вспомогательную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + BS^{-1/2}\tilde{v}_\Delta \\ \tilde{z}_\Delta &= S^{1/2}Cx + S^{1/2}DS^{-1/2}\tilde{v}_\Delta \ , \end{aligned} \tag{9.13}$$

в которой вход $\tilde{v}_\Delta$ и выход $\tilde{z}_\Delta$ в каждый момент времени связаны неравенством

$$|\tilde{v}_\Delta|^2 \le \eta^2 |\tilde{z}_\Delta|^2 \ . \tag{9.14}$$

Очевидно, что при $v_\Delta = S^{-1/2}\tilde{v}_\Delta$ и $z_\Delta = S^{-1/2}\tilde{z}_\Delta$ уравнения (9.1) и (9.13) совпадают. Перепишем уравнения (9.13) в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + \tilde{B}\tilde{v}_\Delta \\ \tilde{z}_\Delta &= \tilde{C}x + \tilde{D}\tilde{v}_\Delta \ , \end{aligned} \tag{9.15}$$

где $\tilde{B} = BS^{-1/2}$, $\tilde{C} = S^{1/2}C$, $\tilde{D} = S^{1/2}DS^{-1/2}$, и придем к вспомогательной задаче, аналогичной рассмотренной выше. В данном случае условие (9.5) преобразуется в неравенство

$$S - \eta^2 D^T S D > 0 \ , \tag{9.16}$$

а линейное матричное неравенство (9.8) примет вид

$$\begin{pmatrix} A^TX+XA & X\tilde{B} & \tilde{C}^T \\ \tilde{B}^TX & -\zeta I & \tilde{D}^T \\ \tilde{C} & \tilde{D} & -\zeta I \end{pmatrix} < 0 \; . \qquad (9.17)$$

С учетом введенных обозначений это матричное неравенство выполняется тогда и только тогда, когда для всех x, y и z верно неравенство

$$x^T(A^TX+XA)x + 2x^TXBS^{-1/2}y + 2x^TC^TS^{1/2}z -$$
$$-\zeta y^Ty + 2y^Ts^{-1/2}D^TS^{1/2}z - \zeta z^Tz < 0 \; .$$

Совершая в этом неравенстве замену переменных $\bar{y} = S^{-1/2}y$ и $\bar{z} = S^{-1/2}z$ и записывая соответствующее матричное неравенство, приходим к следующему результату.

Утверждение 9.3 *Если уровень гашения возмущений в объекте (9.13) меньше, чем $\zeta = \eta^{-1}$, т.е. существуют матрица $X = X^T > 0$ и матрица $S = S^T > 0$ вида (9.11), удовлетворяющие линейному матричному неравенству*

$$\begin{pmatrix} A^TX+XA & XB & C^TS \\ B^TX & -\zeta S & D^TS \\ SC & SD & -\zeta S \end{pmatrix} < 0 \; , \qquad (9.18)$$

то неопределенная система (9.1), (9.2), (9.10) робастно устойчива.

Отметим, что (9.18) является линейным матричным неравенством относительно переменных X и S при фиксированном значении ζ и не является линейным матричным неравенством относительно всех этих трех переменных. Поэтому для вычисления оценки радиуса робастной устойчивости требуется применить поисковый алгоритм (например, метод бисекции) для нахождения минимального значения ζ, при котором неравенство (9.18) разрешимо.

Подчеркнем, что в случае структурированной неопределенности оценка радиуса робастной устойчивости находится как обратная величина к минимальному значению ζ, при котором линейное матричное неравенство (9.18) разрешимо относительно переменных X и S, а в случае неструктурированной неопределенности – как обратная величина к минимальному значению ζ, при котором линейное матричное неравенство (9.8) разрешимо относительно переменной X. Так как в частном случае

$S = I$ неравенство (9.18) переходит в (9.8), то оценка радиуса робастной устойчивости при учете дополнительной информации о структуре неопределенности может быть только улучшена, о чем свидетельствует следующий пример.

Пример 9.3 *Приведем уточненную оценку радиуса робастной устойчивости линейного осциллятора с неизвестными коэффициентами демпфирования и жесткости, описанного в примере 9.1:* $\eta_* = 0.9074$.

9.2 Дискретные системы

Рассмотрим дискретную систему с параметрической неопределенностью

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= Ax_t + Bv_{\Delta t} \\ z_{\Delta t} &= Cx_t + Dv_{\Delta t} \\ v_{\Delta t} &= \Delta_t z_{\Delta t} \ , \end{aligned} \tag{9.19}$$

где Δ_t – неизвестная матрица, удовлетворяющая неравенству

$$\Delta_t^T \Delta_t \leq \eta^2 I \ . \tag{9.20}$$

Предполагается, что номинальная система, определяемая матрицей A, асимптотически устойчива и $\det(I - \Delta_t D) \neq 0$. Задача состоит в том, чтобы выяснить остается ли эта неопределенная система асимптотически устойчивой для любой матрицы Δ_t, удовлетворяющей условию (9.20) при заданном η, и оценить радиус робастной устойчивости η_{max} – максимальное значение η, при котором неопределенная система (9.19), (9.20) асимптотически устойчива.

Наряду с неопределенной системой (9.19) рассмотрим вспомогательную систему

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= Ax_t + Bv_{\Delta t} \\ z_{\Delta t} &= Cx_t + Dv_{\Delta t} \ , \end{aligned} \tag{9.21}$$

в которой вход $v_{\Delta t}$ и выход $z_{\Delta t}$ в каждый момент времени связаны неравенством

$$|v_{\Delta t}|^2 \leq \eta^2 |z_{\Delta t}|^2 \ . \tag{9.22}$$

Пусть выполнено условие

$$I - \eta^2 D^T D > 0 \ . \tag{9.23}$$

В этом случае при $x_t \equiv 0$ с учетом второго уравнения (9.21) из (9.22) следует, что

$$v_{\Delta t}^T (I - \eta^2 D^T D) v_{\Delta t} \leq 0 \ ,$$

и, следовательно, $v_{\Delta t} \equiv 0$. Это означает, что $x = 0$ является состоянием равновесия вспомогательной системы (9.21), (9.22).

В силу условия (9.20) вход и выход неопределенной системы (9.19) удовлетворяют неравенству (9.22). Следовательно, исходная неопределенная система "погружена"в вспомогательную систему (9.21), (9.22).

Пусть существует положительно определенная квадратичная функция $V(x) = x^T X x$, для которой в силу уравнений (9.21) при всех x_t, $v_{\Delta t}$, удовлетворяющих условию (9.22), выполняется

$$V_{t+1} - V_t < 0 \ . \tag{9.24}$$

В силу неущербности S-процедуры при одном ограничении (см. Приложение) это эквивалентно существованию $V(x) = x^T X x$ с $X = X^T > 0$, для которой при всех x_t, $v_{\Delta t}$ выполняется неравенство

$$V_{t+1} - V_t + |z_{\Delta t}|^2 - \eta^{-2}|v_{\Delta t}|^2 < 0 \ , \quad |x_t|^2 + |v_{\Delta t}|^2 \neq 0 \ . \tag{9.25}$$

Выражение в левой части этого неравенства представляет собой отрицательно определенную квадратичную функцию относительно переменных x_t, $v_{\Delta t}$ и, следовательно,

$$V_{t+1} - V_t + |z_{\Delta t}|^2 - \eta^{-2}|v_{\Delta t}|^2 < -\varepsilon(|x_t|^2 + |v_{\Delta t}|^2) < -\varepsilon|x_t|^2 \ ,$$

где $\varepsilon > 0$. Это означает, что $V(x)$ является функцией Ляпунова, обеспечивающей асимптотическую устойчивость вспомогательной, а, значит, и исходной неопределенной системы. Согласно частотной теореме (см. лемму F.2), которая применима в силу того, что матрица A асимптотически устойчива (т.е. пара (A, B) стабилизируема), существование указанной функции $V(x)$, удовлетворяющей неравенству (9.25), эквивалентно выполнению частотного условия

$$\|H(z)\|_\infty < \eta^{-1} \ , \quad H(z) = D + C(zI - A)^{-1}B \ .$$

Таким образом, уровень гашения возмущений в разомкнутом объекте (9.21) не должен превышать величину η^{-1}. Учитывая теперь утверждение 7.6, которое характеризует уровень гашения возмущений в дискретном объекте в терминах линейных матричных неравенств, приходим к следующему.

Утверждение 9.4 *Если уровень гашения возмущений в объекте (9.21) меньше, чем $\zeta = \eta^{-1}$, т.е. существует матрица $X = X^T > 0$, удовлетворяющая линейному матричному неравенству*

$$F_d(X, \gamma) = \begin{pmatrix} A^T X A - X & A^T X B & C^T \\ B^T X A & -\zeta I + B^T X B & D^T \\ C & D & -\zeta I \end{pmatrix} < 0 \ , \tag{9.26}$$

то неопределенная система (9.19), (9.20) робастно устойчива. Максимальное значение η_{max}, при котором неопределенная система (9.19), (9.20) робастно устойчива, удовлетворяет неравенству

$$\eta_{max} \geq \eta_* \ , \quad \eta_* = \zeta_*^{-1} \ , \quad \zeta_* = \inf_{F_d(X,\zeta)<0} \zeta \ . \tag{9.27}$$

Отметим, что неравенство (9.26) в силу леммы Шура (см. лемму А.2) влечет неравенство (9.23), которое предполагалось выполненным a priori.

В случае, когда неизвестная матрица $\Delta(t)$ имеет блочно-диагональную структуру вида

$$\Delta_t = \mathrm{diag}\left(\delta_1(t)I_{k_1}, \ldots, \delta_r(t)I_{k_r}, \Delta_1(t), \ldots, \Delta_f(t)\right) \ , \tag{9.28}$$

где первые r блоков – диагональные, а последние f блоков являются полными квадратными матрицами порядков $m_1, \ldots, m_f$, приведенная выше оценка радиуса робастной устойчивости дискретной системы может быть улучшена.

Введем вспомогательную систему

$$\begin{array}{l} x_{t+1} = Ax_t + BS^{-1/2}\tilde{v}_{\Delta t} \\ \tilde{z}_{\Delta t} = S^{1/2}Cx_t + S^{1/2}DS^{-1/2}\tilde{v}_{\Delta t} \ , \end{array} \tag{9.29}$$

в которой матрица S принадлежит множеству положительно определенных симметрических матриц блочно-диагонального вида

$$S = \mathrm{diag}\left(S_1, \ldots, S_r, s_1 I_{m_1}, \ldots, s_f I_{m_f}\right) \ , \tag{9.30}$$

где первые r блоков являются полными квадратными матрицами порядков $k_1, \ldots, k_r$ и $k_1 + \cdots + k_r + m_1 + \cdots + m_f = n_\Delta$. Аналогично тому, как было сделано в непрерывном случае, получим следующий результат.

Утверждение 9.5 *Если уровень гашения возмущений в объекте (9.29) меньше, чем $\zeta = \eta^{-1}$, т.е. существуют матрица $X = X^T > 0$ и матрица $S = S^T > 0$ вида (9.30), удовлетворяющие линейному матричному неравенству*

$$\begin{pmatrix} A^TXA - X & A^TXB & C^TS \\ B^TXA & -\zeta S + B^TXB & D^TS \\ SC & SD & -\zeta S \end{pmatrix} < 0 \ , \tag{9.31}$$

то неопределенная система (9.19), (9.20), (9.28) робастно устойчива.

Глава 10

μ-анализ

Изложение основ μ-анализа в этой главе в основном следует работе [22]. Пусть квадратная матрица M представлена в блочном виде

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \in C^{(m_1+m_2)\times(n_1+n_2)} \ , \tag{10.1}$$

и пусть заданы матрицы $\Delta_l \in C^{m_1 \times n_1}$ и $\Delta_u \in C^{m_2 \times n_2}$. Нижним и верхним дробно-линейными преобразованиями будем называть матрицы $F_l(M, \Delta_l)$ и $F_u(M, \Delta_u)$ соответственно, определяемые следующим образом

$$\begin{aligned} F_l(M, \Delta_l) &= M_{11} + M_{12}\Delta_l(I - M_{22}\Delta_l)^{-1}M_{21} \ , \\ F_u(M, \Delta_l) &= M_{22} + M_{21}\Delta_u(I - M_{11}\Delta_u)^{-1}M_{12} \ , \end{aligned} \tag{10.2}$$

предполагая при этом, что соответствующие обратные матрицы существуют. Эти преобразования позволяют описывать неопределенные системы разных типов, как будет показано в дальнейшем. В формулах (10.2) первые слагаемые M_{11} или M_{22} отвечают номинальным системам, а вторые слагаемые – их возмущениям, связанным с имеющимися неопределенностями.

Формулы (10.2) возникают естественным образом при описании систем с обратной связью, показанных на рис. и рис., где M – передаточная матрица прямого контура, а Δ_l или Δ_u – передаточные матрицы обратной связи. Очевидно, что передаточные матрицы от входов v к выходам z для систем, показанных на этих рисунках, равны соответственно $F_l(M, \Delta_l)$ и $F_u(M, \Delta_l)$. Такие системы будем в дальнейшем называть $M - \Delta$-конфигурациями.

Используя введенные преобразования, передаточные матрицы непрерывного объекта

$$\dot{x} = Ax + Bu \ ,$$
$$y = Cx + Du$$

и дискретного объекта

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t \ ,$$
$$y_t = Cx_t + Du_t$$

от входов u к выходам y, могут быть представлены как

$$H(s) = D + C(sI - A)^{-1}B = D + Cs^{-1}(I - As^{-1})^{-1}B = F_u(M, s^{-1}I)$$

и

$$H(z) = D + C(zI - A)^{-1}B = F_u(M, z^{-1}I)$$

соответственно, где

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \ .$$

Пусть матрица $\Delta \in C^{n\times n}$ имеет следующую структуру

$$\mathbf{\Delta} = \mathrm{diag}\,(\delta_1 I_{k_1}, \ldots, \delta_r I_{k_r}, \Delta_1, \ldots, \Delta_f) \ , \tag{10.3}$$

где первые r блоков – диагональные, а последние f блоков являются полными квадратными матрицами порядков $m_1, \ldots, m_f$. Множество матриц заданной структуры $\mathbf{\Delta}$, максимальные сингулярные числа которых не превышают единицу, обозначим следующим образом:

$$\mathbf{B\Delta} = \{\Delta \in \mathbf{\Delta} : \ \sigma_{max}(\Delta) \leq 1\} \ .$$

Определим структурированное сингулярное значение $\mu_{\mathbf{\Delta}}(M)$ матрицы $M \in C^{n\times n}$ по отношению к структуре $\mathbf{\Delta}$ как

$$\mu_{\mathbf{\Delta}}(M) = \frac{1}{\min\{\sigma_{max}(\Delta) : \ \Delta \in \mathbf{\Delta}, \, \det\,(I - M\Delta) = 0\}} \ , \tag{10.4}$$

а в случае, когда не существует матриц $\Delta \in \mathbf{\Delta}$, для которых $\det\,(I - M\Delta) = 0$, положим $\mu_{\mathbf{\Delta}}(M) = 0$.

В частном случае, когда

$$\mathbf{\Delta} = \{\delta I_n\} \ , \tag{10.5}$$

найдем, что $\mu_{\mathbf{\Delta}}(M) = \rho(M)$, а в случае

$$\mathbf{\Delta} = \{\Delta \in C^{n\times n}\} \tag{10.6}$$

имеем $\mu_{\mathbf{\Delta}}(M) = \sigma_{max}(M)$. Так как структура (10.3) включает в себя, в частности, все матрицы вида (10.5) (когда все матрицы $\Delta_i, i = 1, \ldots, f$ в (10.3) - диагональные) и так как любая матрица вида (10.3) является матрицей $n \times n$, то выполняются следующие неравенства

$$\rho(M) \leq \mu_{\mathbf{\Delta}}(M) \leq \sigma_{max}(M) \ . \tag{10.7}$$

Эти границы соответствуют двум крайним случаям и могут достаточно сильно различаться, поэтому для получения более точных оценок структурированного сингулярного числа применяют преобразования, которые не изменяют величины $\mu_{\mathbf{\Delta}}(M)$, но изменяют $\rho(M)$ и $\sigma_{max}(M)$. Действительно, введем множество

$$\mathbf{Q} = \{Q \in \mathbf{\Delta} : \, Q^*Q = I_n\}$$

и множество

$$\mathbf{D} = \{\mathrm{diag}\,(D_1, \ldots, D_r, d_1 I_{m_1}, \ldots, d_{f-1} I_{m_{f-1}}, I_{m_f}) : \, D_i \in C^{k_i \times k_i}, \, d_j > 0\} \ .$$

Отметим, что для любых $\Delta \in \mathbf{\Delta}$, $Q \in \mathbf{Q}$, $D \in \mathbf{D}$ выполняется следующее

$$Q^* \in \mathbf{Q} \ , \quad Q\Delta \in \mathbf{\Delta} \ , \quad \Delta Q \in \mathbf{\Delta} \ ,$$
$$\sigma_{max}(Q\Delta) = \sigma_{max}(\Delta Q) = \sigma_{max}(\Delta) \ , \quad D\Delta = \Delta D \ .$$

Следовательно,

$$\mu_{\mathbf{\Delta}}(MQ) = \mu_{\mathbf{\Delta}}(QM) = \mu_{\mathbf{\Delta}}(M) = \mu_{\mathbf{\Delta}}(DMD^{-1}) \ ,$$

и границы в (10.7) могут быть уточнены

$$\max_{Q \in \mathbf{Q}} \rho(QM) \leq \mu_{\mathbf{\Delta}}(M) \leq \inf_{D \in \mathbf{D}} \sigma_{max}(DMD^{-1}) \ . \tag{10.8}$$

Пусть матрица M разбита на блоки, как в (10.1). Пусть матрица $\Delta_1 \in C^{m_1 \times n_1}$ имеет структуру $\mathbf{\Delta_1}$, а матрица $\Delta_2 \in C^{m_2 \times n_2}$ – структуру $\mathbf{\Delta_2}$. Определим структуру

$$\mathbf{\Delta} = \{\mathrm{diag}\,(\Delta_1, \Delta_2), \, \Delta_1 \in \mathbf{\Delta_1}, \Delta_2 \in \mathbf{\Delta_2}\} \ .$$

С учетом введенных структур могут быть определены следующие структурированные сингулярные числа: $\mu_{\mathbf{\Delta_1}}(M_{11})$, $\mu_{\mathbf{\Delta_2}}(M_{22})$ и $\mu_{\mathbf{\Delta}}(M)$. Из определения структурированного сингулярного числа непосредственно следует, что преобразование

$$F_l(M, \Delta_2) = M_{11} + M_{12}\Delta_2(I - M_{22}\Delta_2)^{-1}M_{21}$$

будет определено для всех $\Delta_2 \in \mathbf{B\Delta_2}$ тогда и только тогда, когда

$$\mu_{\mathbf{\Delta_2}}(M_{22}) < 1 \ ,$$

а преобразование

$$F_u(M, \Delta_1) = M_{22} + M_{21}\Delta_1(I - M_{11}\Delta_1)^{-1}M_{12}$$

будет определено для всех $\Delta_1 \in \mathbf{B\Delta_1}$ тогда и только тогда, когда

$$\mu_{\mathbf{\Delta_1}}(M_{11}) < 1 \ .$$

Имеет место следующее фундаментальное утверждение, позволяющее применять структурированные сингулярные числа в анализе робастной устойчивости.

Утверждение 10.1 *Для введенных выше структур следующие три утверждения эквивалентны:*

$$\mu_{\mathbf{\Delta}}(M) < 1 \ ; \tag{10.9}$$

$$\mu_{\mathbf{\Delta_2}}(M_{22}) < 1 \ , \quad \max_{\Delta_2 \in \mathbf{B\Delta_2}} \mu_{\mathbf{\Delta_1}}(F_l(M, \Delta_2)) < 1 \ ; \tag{10.10}$$

$$\mu_{\mathbf{\Delta_1}}(M_{11}) < 1 \ , \quad \max_{\Delta_1 \in \mathbf{B\Delta_1}} \mu_{\mathbf{\Delta_2}}(F_u(M, \Delta_1)) < 1 \ . \tag{10.11}$$

Пусть, например,

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \ \mathbf{\Delta_1} = \{\delta_1 I_n\}, \ \mathbf{\Delta_2} = \{\Delta_2 \in C^{m\times m}\}, \ \mathbf{\Delta} = \mathrm{diag}\,(\delta_1 I_n, \Delta_2) \ .$$

Учитывая, что в данном случае $\mu_{\mathbf{\Delta_1}}(A) = \rho(A)$ и $\mu_{\mathbf{\Delta_2}}(D) = \sigma_{max}(D)$, и применяя утверждение 10.1, приходим к эквивалентности следующих трех утверждений:

$$\mu_{\mathbf{\Delta}}(M) < 1 \ ; \tag{10.12}$$

$$\sigma_{max}(D) < 1 \ , \quad \max_{\sigma_{max}(\Delta_2) \le 1} \rho(A + B\Delta_2(I - D\Delta_2)^{-1}C < 1 \ ; \tag{10.13}$$

$$\rho(A) < 1 \ , \quad \max_{|\delta_1| \le 1} \sigma_{max}(D + C\delta_1(I - A\delta_1)^{-1}B < 1 \ . \tag{10.14}$$

Отметим, что второе условие в (10.14) с учетом определения H_∞-нормы записывается как $\|H\|_\infty < 1$, где $H(z) = D + C(zI - A)^{-1}B$ – передаточная матрица дискретной системы.

Глава 11

Робастная стабилизация

11.1 Непрерывные системы

Пусть неопределенный объект задается следующими уравнениями

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = Ax + B_\Delta v_\Delta + B_2 u \ , \\
&z_\Delta = C_\Delta x + D_{\Delta\Delta} v_\Delta + D_{\Delta 2} u \ , \\
&y = C_2 x + D_{2\Delta} v_\Delta \ , \\
&v_\Delta = \Delta(t) z_\Delta \ ,
\end{aligned}
\tag{11.1}
$$

в которых $x \in R^{n_x}$ – состояние, $v_\Delta \in R^{n_{v\Delta}}$ – вход "неопределенности", $u \in R^{n_u}$ –управление, $z_\Delta \in R^{n_{z\Delta}}$ – выход "неопределенности", $y \in R^{n_y}$ – измеряемый выход. Предполагается, что $n_{v\Delta} = n_{z\Delta} = n_\Delta$. В этих уравнениях $\Delta(t)$ – неизвестный изменяемый во времени матричный параметр, имеющий блочно-диагональную структуру вида

$$
\Delta(t) = \mathrm{diag}\left(\delta_1(t) I_{k_1}, \ldots, \delta_r(t) I_{k_r}, \Delta_1(t), \ldots, \Delta_f(t)\right) \ , \tag{11.2}
$$

где первые r блоков – диагональные, а последние f блоков являются полными квадратными матрицами порядков $m_1, \ldots, m_f$, и удовлетворяющий неравенству

$$
\Delta^T(t)\Delta(t) \le \eta^2 I \ , \quad \forall\, t \ge 0 \ . \tag{11.3}
$$

Предполагается также, что $\det\left(I - \Delta(t) D_{\Delta\Delta}\right) \ne 0$.

Синтез робастного управления этим объектом состоит в построении линейного динамического регулятора заданного порядка вида

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_r = A_r x_r + B_r y \ , \\
&u = C_r x_r + D_r y \ ,
\end{aligned}
\tag{11.4}
$$

где $x_r \in R^k$ – состояние регулятора, обеспечивающего робастную устойчивость замкнутой системы (11.1), (11.4) при всех допустимых $\Delta(t)$.

Приведем уравнения замкнутой системы к виду

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c v_\Delta \ , \\ z_\Delta &= C_c x_c + D_c v_\Delta \ , \end{aligned} \tag{11.5}$$

где $v_\Delta = \Delta(t) z_\Delta$,

$$\begin{gathered} A_c = \begin{pmatrix} A + B_2 D_r C_2 & B_2 C_r \\ B_r C_2 & A_r \end{pmatrix}, \quad B_c = \begin{pmatrix} B_\Delta + B_2 D_r D_{2\Delta} \\ B_r D_{2\Delta} \end{pmatrix}, \\ C_c = (C_\Delta + D_{\Delta 2} D_r C_2 \quad D_{\Delta 2} C_r) \ , \quad D_c = D_{\Delta\Delta} + D_{\Delta 2} D_r D_{2\Delta} \ . \end{gathered} \tag{11.6}$$

Согласно утверждению 9.3 эта система робастно устойчива, если при $\zeta = \eta^{-1}$ линейное матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} A_c^T X + X A_c & X B_c & C_c^T S \\ B_c^T X & -\zeta S & D_c^T S \\ S C_c & S D_c & -\zeta S \end{pmatrix} < 0 \tag{11.7}$$

разрешимо относительно матрицы $X = X^T > 0$ и матрицы $S = S^T > 0$ вида

$$S = \mathrm{diag}\,(S_1, \dots, S_r, s_1 I_{m_1}, \dots, s_f I_{m_f}) \ , \tag{11.8}$$

где первые r блоков являются полными квадратными матрицами порядков $k_1, \dots, k_r$ и $k_1 + \dots + k_r + m_1 + \dots + m_f = n_\Delta$. Для дальнейшего исследования преобразуем неравенство (11.7) с учетом леммы Шура к виду

$$\begin{pmatrix} A_c^T X + X A_c & X B_c & C_c^T \\ B_c^T X & -\zeta S & D_c^T \\ C_c & D_c & -\zeta S^{-1} \end{pmatrix} < 0 \ . \tag{11.9}$$

Вводя параметры регулятора

$$\Theta = \begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix} \ , \tag{11.10}$$

представим матрицы замкнутой системы в виде

$$\begin{aligned} A_c = A_0 + \mathcal{B}\Theta\mathcal{C} \ , &\quad B_c = B_0 + \mathcal{B}\Theta\mathcal{D}_1 \ , \\ C_c = C_0 + \mathcal{D}_2\Theta\mathcal{C} \ , &\quad D_c = D_{\Delta\Delta} + \mathcal{D}_2\Theta\mathcal{D}_1 \ , \end{aligned} \tag{11.11}$$

где

$$
\begin{gathered}
A_0 = \begin{pmatrix} A & 0_{n_x \times k} \\ 0_{k \times n_x} & 0_{k \times k} \end{pmatrix} , \\
\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0_{n_x \times k} & B_2 \\ I_k & 0_{k \times n_u} \end{pmatrix} , \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0_{k \times n_x} & I_k \\ C_2 & 0_{n_y \times k} \end{pmatrix} , \\
B_0 = \begin{pmatrix} B_\Delta \\ 0_{k \times n_\Delta} \end{pmatrix} , \quad C_0 = (C_\Delta \quad 0_{n_\Delta \times k}) , \\
\mathcal{D}_1 = \begin{pmatrix} 0_{k \times n_\Delta} \\ D_{2\Delta} \end{pmatrix} , \quad \mathcal{D}_2 = (0_{n_\Delta \times k} \quad D_{\Delta 2}) .
\end{gathered}
\tag{11.12}
$$

Запишем неравенство (11.9) в виде линейного матричного неравенства относительно неизвестных параметров Θ

$$
\Psi + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0 , \tag{11.13}
$$

в котором

$$
\begin{gathered}
\Psi = \begin{pmatrix} A_0^T X + X A_0 & X B_0 & C_0^T \\ B_0^T X & -\zeta S & D_{\Delta\Delta}^T \\ C_0 & D_{\Delta\Delta} & -\zeta S^{-1} \end{pmatrix} , \\
P = (\mathcal{C} \quad \mathcal{D}_1 \quad 0_{(n_y+k) \times n_\Delta}) , \quad Q = (\mathcal{B}^T X \quad 0_{(n_u+k) \times n_\Delta} \quad \mathcal{D}_2^T) .
\end{gathered}
\tag{11.14}
$$

Согласно утверждению 3.2 полученное неравенство имеет решение тогда и только тогда, когда выполнены условия (3.5), которые в данном случае имеют вид

$$
\begin{gathered}
W_P^T \begin{pmatrix} A_0^T X + X A_0 & X B_0 & C_0^T \\ B_0^T X & -\zeta S & D_{\Delta\Delta}^T \\ C_0 & D_{\Delta\Delta} & -\zeta S^{-1} \end{pmatrix} W_P < 0 , \\
W_Q^T \begin{pmatrix} A_0^T X + X A_0 & X B_0 & C_0^T \\ B_0^T X & -\zeta S & D_{\Delta\Delta}^T \\ C_0 & D_{\Delta\Delta} & -\zeta S^{-1} \end{pmatrix} W_Q < 0 ,
\end{gathered}
\tag{11.15}
$$

где столбцы матрицы W_P образуют базис $\mathcal{N}(P)$ – ядра матрицы P, а столбцы матрицы W_Q образуют базис $\mathcal{N}(Q)$ – ядра матрицы Q. Так как в данном случае

$$Q = R \begin{pmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} , \quad R = \begin{pmatrix} \mathcal{B}^T & 0 & \mathcal{D}_2^T \end{pmatrix} ,$$

то

$$W_Q = \begin{pmatrix} X^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} W_R .$$

Подставляя эти выражения в (11.15), приходим к справедливости следующего утверждения.

Утверждение 11.1 *Если при заданном $\zeta > 0$ существуют матрица $X = X^T > 0$ порядка $(n_x + k) \times (n_x + k)$ и матрица $S = S^T > 0$ порядка $n_\Delta \times n_\Delta$ вида (11.8), удовлетворяющие следующим двум неравенствам*

$$W_P^T \begin{pmatrix} A_0^T X + X A_0 & X B_0 & C_0^T \\ B_0^T X & -\zeta S & D_{\Delta\Delta}^T \\ C_0 & D_{\Delta\Delta} & -\zeta S^{-1} \end{pmatrix} W_P < 0 ,$$
$$W_R^T \begin{pmatrix} X^{-1} A_0^T + A_0 X^{-1} & B_0 & X^{-1} C_0^T \\ B_0^T & -\zeta S & D_{\Delta\Delta}^T \\ C_0 X^{-1} & D_{\Delta\Delta} & -\zeta S^{-1} \end{pmatrix} W_R < 0 , \tag{11.16}$$

то существует робастный регулятор k-го порядка вида (11.4), обеспечивающий асимптотическую устойчивость объекта (11.1), (11.2), (11.3) при $\eta = \zeta^{-1}$. Если условия (11.16) выполнены и такие матрицы X и S найдены, то параметры Θ искомого регулятора (11.4) находятся как решения линейного матричного неравенства (11.13), в котором Ψ, P и Q заданы в (11.14).

Введем матрицы $Y = X^{-1}$, $\Sigma = S^{-1}$ и перепишем условия (11.16) в виде линейных матричных неравенств относительно матриц X и Σ:

$$W_P^T \begin{pmatrix} A_0^T X + X A_0 & X B_0 & C_0^T \\ B_0^T X & -\zeta S & D_{\Delta\Delta}^T \\ C_0 & D_{\Delta\Delta} & -\zeta\Sigma \end{pmatrix} W_P < 0 \ ,$$
$$W_R^T \begin{pmatrix} Y A_0^T + A_0 Y & B_0 & Y C_0^T \\ B_0^T & -\zeta S & D_{\Delta\Delta}^T \\ C_0 Y & D_{\Delta\Delta} & -\zeta\Sigma \end{pmatrix} W_R < 0 \ . \tag{11.17}$$

Тогда рассматриваемая задача сводится к **задаче A**: найти две взаимнообратные матрицы $\hat{X} = \mathrm{diag}\,(X, S)$ и $\hat{Y} = \mathrm{diag}\,(Y, \Sigma)$, удовлетворяющие неравенствам (11.17).

Представляет также интерес задача построения робастного регулятора заданного порядка, обеспечивающего максимальный радиус робастной устойчивости замкнутой системы. Поскольку сформулированные выше условия существования робастных регуляторов являются только достаточными, то на их основе можно получить лишь оценку максимального радиуса робастной устойчивости и найти соответствующие ей субоптимальные робастные регуляторы заданного порядка. Для ее получения требуется найти минимально возможное значение ζ_*, для которого неравенства (11.17) разрешимы при $\hat{X}\hat{Y} = I$. Тогда максимальный радиус робастной устойчивости удовлетворяет неравенству $\eta_* \geq \zeta_*^{-1}$.

Пример 11.1 *Найдем оценку максимального радиуса робастной устойчивости, который может быть достигнут при управлении линейным осциллятором с неизвестной массой и неизвестными коэффициентами демпфирования и жесткости с помощью линейной обратной связи по измеряемому выходу. Уравнение осциллятора имеет вид (см. пример 8.2)*

$$\begin{aligned} & m\ddot{\xi} + b\dot{\xi} + c\xi = u \ , \\ & y = \xi \ , \end{aligned} \tag{11.18}$$

где $m = m_0(1 + w_m\delta_m)$, $b = b_0(1 + w_b\delta_b)$, $c = c_0(1 + w_c\delta_c)$, m_0, b_0, c_0 *– номинальные значения параметров,* $|\delta_m| \leq \eta$, $|\delta_b| \leq \eta$, $|\delta_c| \leq \eta$. *Обозначая* $x_1 = \xi$ *и* $x_2 = \dot{\xi}$, *запишем это уравнение в виде*

$$\begin{aligned} & \dot{x}_1 = x_2 \\ & \dot{x}_2 = -\frac{c_0}{m_0} x_1 - \frac{b_0}{m_0} x_2 - w_m\delta_m\, \dot{x}_2 - w_c\delta_c \frac{c_0}{m_0}\, x_1 - w_b\delta_b \frac{b_0}{m_0}\, x_2 + \frac{1}{m_0} u \ . \end{aligned}$$

Теперь, обозначив $v_\Delta = col(v_m, v_c, v_b)$ *и* $z_\Delta = col(z_m, z_c, z_b)$*, где*

$$v_m = -\delta_m \dot{x}_2 \ , \quad v_c = -\delta_c \frac{c_0}{m_0} x_1 \ , \quad v_b = -\delta_b \frac{b_0}{m_0} x_2$$

$$z_m = -\dot{x}_2 = \frac{c_0}{m_0} x_1 + \frac{b_0}{m_0} x_2 - w_m v_m - w_c v_c - w_b v_b - \frac{1}{m_0} u,$$

$$z_c = -\frac{c_0}{m_0} x_1 \ , \quad z_b = -\frac{b_0}{m_0} x_2 \ ,$$

представим эту систему в виде (11.1), где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{c_0}{m_0} & -\dfrac{b_0}{m_0} \end{pmatrix} \ , \quad B_\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ w_m & w_c & w_b \end{pmatrix} \ , \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m_0} \end{pmatrix} \ ,$$

$$C_\Delta = \begin{pmatrix} \dfrac{c_0}{m_0} & \dfrac{b_0}{m_0} \\ -\dfrac{c_0}{m_0} & 0 \\ 0 & -\dfrac{b_0}{m_0} \end{pmatrix}, D_{\Delta\Delta} = \begin{pmatrix} -w_m & -w_c & -w_b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_{\Delta 2} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{m_0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$C_2 = (1 \quad 0) \ , \quad D_{2\Delta} = (0 \quad 0 \quad 0) \ ,$$

$$\Delta(t) = \begin{pmatrix} \delta_m(t) & 0 & 0 \\ 0 & \delta_c(t) & 0 \\ 0 & 0 & \delta_b(t) \end{pmatrix} \ .$$

Так как находится регулятор нулевого порядка ($k = 0$)*, то в рассматриваемом случае в неравенствах (11.17) имеем*

$$A_0 = A \ , \quad B_0 = B_\Delta \ , \quad C_0 = C_\Delta \ ,$$

$$P = (1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0) \ , \quad R = (0\,\frac{1}{m_0}\,0\,0\,0 - \frac{1}{m_0}\,0\,0) \ .$$

Для значений $m_0 = 1$*,* $b_0 = 1$*,* $c_0 = 100$*,* $w_m = w_b = w_c = 0.1$ *при* $\eta = 0.46$ *были найдены*

$$X = \begin{pmatrix} 29.575 & 0.1504 \\ 0.1504 & 0.3587 \end{pmatrix} \ , \quad S = \begin{pmatrix} 0.0029 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0034 & 0 \\ 0 & 0 & 0.035 \end{pmatrix}$$

и параметр регулятора $\Theta = 17.534$. *При значениях* $\eta > \eta_* = 0.46$ *соответствующая* **задача A** *оказалась неразрешимой. Таким образом, регулятор* $u = 17.534y$ *гарантирует асимптотическую устойчивость замкнутой неопределенной системы при всех* $|\delta_m(t)| \le \eta_*$, $|\delta_b(t)| \le \eta_*$, $|\delta_c(t)| \le \eta_*$. *Заметим, что в отсутствии управления, как показывает пример 9.2, оценка радиуса робастной устойчивости этой системы была* 0.4013.

Для сравнения приведем результат синтеза робастного регулятора первого порядка. Регулятор

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= -31.123x_r - 275.727y \ , \\ u &= -29.943x_r - 232.505y \end{aligned}$$

обеспечивает робастную устойчивость замкнутой системы с радиусом робастной устойчивости, не меньшим 2.5.

Переформулируем задачу, к решению которой сводится синтез робастного регулятора заданного порядка, учитывая блочную структуру матриц A_0, B_0, C_0 и соответствующее представление матриц X и Y в блочном виде

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{pmatrix} \ , \quad Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12}^T & Y_{22} \end{pmatrix} \ .$$

Согласно (11.12) и (11.14) имеем

$$P = \begin{pmatrix} 0_{k\times n_x} & I_k & 0_{k\times n_\Delta} & 0_{k\times n_\Delta} \\ C_2 & 0_{n_y\times k} & D_{2\Delta} & 0_{n_y\times n_\Delta} \end{pmatrix} \ ,$$

$$R = \begin{pmatrix} 0_{k\times n_x} & I_k & 0_{k\times n_{v\Delta}} & 0_{k\times n_\Delta} \\ B_2^T & 0_{n_u\times k} & 0_{n_u\times n_\Delta} & D_{\Delta 2}^T \end{pmatrix} \ ,$$

поэтому в качестве W_P и W_R можно взять

$$W_P = \begin{pmatrix} W_P^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \\ W_P^{(2)} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \ , \quad W_R = \begin{pmatrix} W_R^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ W_R^{(2)} & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

где матрицы $W_P^{(1)}$, $W_P^{(2)}$ и матрицы $W_R^{(1)}$, $W_R^{(2)}$ определяются из следующих уравнений

$$C_2W_P^{(1)} + D_{2\Delta}W_P^{(2)} = 0 \ , \quad B_2^TW_R^{(1)} + D_{\Delta 2}^TW_R^{(2)} = 0 \ .$$

С учетом этого левые части в (11.17) примут вид

$$\begin{pmatrix} W_P^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \\ W_P^{(2)} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A^TX_{11}+X_{11}A & A^TX_{12} & X_{11}B_\Delta & C_\Delta^T \\ \star & 0 & X_{12}^TB_\Delta & 0 \\ \star & \star & -\zeta S & D_{\Delta\Delta}^T \\ \star & \star & \star & -\zeta\Sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_P^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \\ W_P^{(2)} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} ,$$

$$\begin{pmatrix} W_R^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ W_R^{(2)} & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Y_{11}A^T+AY_{11} & AY_{12} & B_\Delta & Y_{11}C_\Delta^T \\ \star & 0 & 0 & Y_{12}^TC_\Delta^T \\ \star & \star & -\zeta S & D_{\Delta\Delta}^T \\ \star & \star & \star & -\zeta\Sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_R^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ W_R^{(2)} & 0 \end{pmatrix} ,$$

и, окончательно, неравенства (11.17) сводятся к виду

$$\begin{pmatrix} N_1 & | & 0 \\ - & - & - \\ 0 & | & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A^TX_{11}+X_{11}A & X_{11}B_\Delta & | & C_\Delta^T \\ B_\Delta^TX_{11} & -\zeta S & | & D_{\Delta\Delta}^T \\ - & - & - & - \\ C_\Delta & D_{\Delta\Delta} & | & -\zeta\Sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 & | & 0 \\ - & - & - \\ 0 & | & I \end{pmatrix} < 0 ,$$

$$\begin{pmatrix} N_2 & | & 0 \\ - & - & - \\ 0 & | & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Y_{11}A^T+AY_{11} & Y_{11}C_\Delta^T & | & B_\Delta \\ C_\Delta Y_{11} & -\zeta\Sigma & | & D_{\Delta\Delta} \\ - & - & - & - \\ B_\Delta^T & D_{\Delta\Delta}^T & | & -\zeta S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_2 & | & 0 \\ - & - & - \\ 0 & | & I \end{pmatrix} < 0 , \tag{11.19}$$

где столбцы матриц $N_1 = \mathrm{col}\,(W_P^{(1)}, W_P^{(2)})$ и $N_2 = \mathrm{col}\,(W_R^{(1)}, W_R^{(2)})$ образуют базисы ядер матриц $(C_2 \quad D_{2\Delta})$ и $(B_2^T \quad D_{\Delta 2}^T)$ соответственно. Таким образом, синтез робастных стабилизирующих регуляторов по выходу k-порядка может быть осуществлен в результате решения **задачи C**: найти две взаимнообратные матрицы $S = S^T > 0$, $\Sigma = \Sigma^T > 0$ вида (9.11) и две $(n_x \times n_x)$-матрицы $X_{11} = X_{11}^T > 0$, $Y_{11} = Y_{11}^T > 0$, удовлетворяющие линейным матричным неравенствам (11.19) и

$$\begin{pmatrix} X_{11} & I \\ I & Y_{11} \end{pmatrix} \geq 0 , \tag{11.20}$$

а также условию

$$\mathrm{rank}\,(I - X_{11}Y_{11}) \leq k , \tag{11.21}$$

или установить, что таких матриц не существует.

Рассмотрим частный случай регулятора вида линейной обратной связи по состоянию. В этом случае имеем

$$C_2 = I \ , \quad D_{2\Delta} = 0 \ , \quad A_r = 0 \ , \quad B_r = 0 \ , \quad C_r = 0 \ .$$

Тогда $N_1 = \mathrm{col}\,(0 \quad I)$ и первое неравенство в (11.19) сводится к

$$\begin{pmatrix} -\zeta S & D_{\Delta\Delta}^T \\ D_{\Delta\Delta} & -\zeta\Sigma \end{pmatrix} < 0 \ ,$$

которое в силу леммы Шура эквивалентно линейному матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} -\zeta\Sigma & \Sigma D_{\Delta\Delta}^T \\ D_{\Delta\Delta}\Sigma & -\zeta\Sigma \end{pmatrix} < 0 \tag{11.22}$$

относительно Σ. Второе неравенство в (11.19) в силу леммы Шура эквивалентно линейному матричному неравенству относительно Y_{11} и Σ

$$\begin{pmatrix} N_2 & | & 0 \\ - & - & - \\ 0 & | & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Y_{11}A^T + AY_{11} & Y_{11}C_\Delta^T & | & B_\Delta\Sigma \\ C_\Delta Y_{11} & -\zeta\Sigma & | & D_{\Delta\Delta}\Sigma \\ - & - & - & - \\ \Sigma B_\Delta^T & \Sigma D_{\Delta\Delta}^T & | & -\zeta\Sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_2 & | & 0 \\ - & - & - \\ 0 & | & I \end{pmatrix} < 0 \,, \tag{11.23}$$

где столбцы матрицы N_2 образуют базис ядра матрицы $(B_2^T \quad D_{\Delta 2}^T)$. Таким образом, синтез робастного линейного регулятора по состоянию сводится к решению линейных матричных неравенств в соответствии со следующим утверждением.

Утверждение 11.2 *Если при заданном $\zeta > 0$ существуют матрица $Y_{11} = Y_{11}^T > 0$ порядка $n_x \times n_x$ и матрица $\Sigma = \Sigma^T > 0$ порядка $n_\Delta \times n_\Delta$ вида (11.8), удовлетворяющие линейным матричным неравенствам (11.22), (11.23), то существует робастный регулятор вида линейной обратной связи по состоянию $u = \Theta x$, обеспечивающий асимптотическую устойчивость объекта (11.1), (11.2), (11.3) при $\eta = \zeta^{-1}$. Для найденных решений Y_{11} и Σ этих неравенств параметры Θ находятся как решения* *линейного матричного неравенства (11.13), в котором*

$$\Psi = \begin{pmatrix} A^T Y_{11}^{-1} + Y_{11}^{-1} A & Y_{11}^{-1} B_\Delta & C_\Delta^T \\ B_\Delta^T Y_{11}^{-1} & -\zeta \Sigma^{-1} & D_{\Delta\Delta}^T \\ C_\Delta & D_{\Delta\Delta} & -\zeta\Sigma \end{pmatrix} ,$$

$$P = (I \quad 0 \quad 0) \ , \quad Q = (B_2^T Y_{11}^{-1} \quad 0 \quad D_{\Delta 2}^T) \ .$$

В заключение этого раздела заметим, что в случае параметрической неопределенности вида

$$\hat{A} = A + F\Omega(t)E$$

все вышеизложенное остается в силе как для квадратичной, так и для неквадратичной матрицы $\Omega(t)$, если положить

$$D_{\Delta\Delta} = 0 \ , \quad D_{\Delta 2} = 0 \ , \quad S = \Sigma = I \ , \quad B_\Delta = F \ , \quad C_\Delta = E \ .$$

В частности, в этом случае при измеряемом состоянии неравенство (11.22) выполняется при любых $\zeta > 0$, а второе неравенство (11.23) принимает вид $F_c(Y_{11}, \zeta) < 0$, где $F_c(Y_{11}, \zeta)$ определяется выражением

$$\begin{pmatrix} W_{B_2^T} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Y_{11}A^T + AY_{11} & Y_{11}E^T & F \\ EY_{11} & -\zeta I & 0 \\ F^T & 0 & -\zeta I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{B_2^T} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} , \tag{11.24}$$

где столбцы матрицы $W_{B_2^T}$ образуют базис ядра матрицы B_2^T. Тогда получение оценки максимального радиуса робастной стабилизируемости сводится к оптимизации линейной функции при ограничении, определяемом линейным матричным неравенством.

Утверждение 11.3 *Максимальное значение η_{max}, при котором неопределенная система*

$$\dot{x} = (A + F\Omega(t)E)x + B_2 u \ ,$$
$$\Omega^T(t)\Omega(t) \le \eta^2 I$$

будет робастно стабилизируема управлением $u = \Theta x$, удовлетворяет неравенству

$$\eta_{max} \ge \eta_* \ , \quad \eta_* = \zeta_*^{-1} \ , \quad \zeta_* = \inf_{F_c(Y_{11},\zeta)<0} \zeta \ . \tag{11.25}$$

Пример 11.2 *Найдем оценку максимального радиуса робастной устойчивости, который может быть достигнут в замкнутой системе, состоящей из линейного осциллятора с неизвестными коэффициентами демпфирования и жесткости (см. пример 8.1), описываемого уравнением*

$$m_0\ddot{\xi} + b_0(1 + f_1\Omega_1(t))\dot{\xi} + c_0(1 + f_2\Omega_2(t))\xi = u \ , \qquad (11.26)$$

охваченного линейной обратной связью по состоянию $u = \Theta_1\xi + \Theta_2\dot{\xi}$. *В этом случае*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{c_0}{m_0} & -\dfrac{b_0}{m_0} \end{pmatrix} , \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix} ,$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{b_0}{m_0} \\ -\dfrac{c_0}{m_0} & 0 \end{pmatrix} , \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m_0} \end{pmatrix} .$$

При значениях $m_0 = 1$, $b_0 = 1$, $c_0 = 100$, $f_1 = f_2 = 0,1$ *было получено* $\eta_* \sim 10^{11}$. *Заметим, что в отсутствии управления, как показывает пример 9.3, оценка радиуса робастной устойчивости этой системы была* 0.9074.

11.2 Дискретные системы

Пусть неопределенный дискретный объект задается следующими уравнениями

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= Ax_t + B_\Delta v_{\Delta t} + B_2 u_t \ , \\ z_{\Delta t} &= C_\Delta x_t + D_{\Delta\Delta} v_{\Delta t} + D_{\Delta 2} u_t \ , \\ y_t &= C_2 x_t + D_{2\Delta} v_{\Delta t} \ , \\ v_{\Delta t} &= \Delta_t z_{\Delta t} \ , \end{aligned} \qquad (11.27)$$

в которых $x_t \in R^{n_x}$ – состояние, $v_{\Delta t} \in R^{n_{v\Delta}}$ – вход "неопределенности", $u_t \in R^{n_u}$ –управление, $z_{\Delta t} \in R^{n_{z\Delta}}$ – выход "неопределенности", $y_t \in R^{n_y}$ – измеряемый выход. Предполагается, что $n_{v\Delta} = n_{z\Delta} = n_\Delta$. В этих уравнениях Δ_t – неизвестный изменяемый во времени матричный параметр, имеющий блочно-диагональную структуру вида

$$\Delta_t = \mathrm{diag}\,(\delta_1(t)I_{k_1}, \ldots, \delta_r(t)I_{k_r}, \Delta_1(t), \ldots, \Delta_f(t)) \ , \qquad (11.28)$$

где первые r блоков – диагональные, а последние f блоков являются полными квадратными матрицами порядков $m_1, \ldots, m_f$, и удовлетворяющий неравенству

$$\Delta_t^T \Delta_t \leq \eta^2 I \ , \quad \forall\, t \geq 0 \ . \qquad (11.29)$$

Предполагается, что $\det(I - \Delta_t D_{\Delta\Delta}) \neq 0$.

Синтез робастного управления этим объектом состоит в построении линейного динамического регулятора заданного порядка вида

$$\begin{aligned} x_{t+1}^{(r)} &= A_r x_{t+1}^{(r)} + B_r y_t \ , \\ u_t &= C_r x_t^{(r)} + D_r y_t \ , \end{aligned} \tag{11.30}$$

где $x_t^{(r)} \in R^k$ – состояние регулятора, обеспечивающего робастную устойчивость замкнутой системы (11.27), (11.30) при всех допустимых Δ_t.

Уравнения замкнутой системы (11.27), (11.30) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \bar{x}_t &= A_c \bar{x}_t + B_c v_{\Delta t} \ , \\ z_{\Delta t} &= C_c \bar{x}_t + D_c v_{\Delta t} \ , \end{aligned} \tag{11.31}$$

где $v_\Delta = \Delta_t z_{\Delta t}$,

$$\begin{gathered} A_c = \begin{pmatrix} A + B_2 D_r C_2 & B_2 C_r \\ B_r C_2 & A_r \end{pmatrix}, \quad B_c = \begin{pmatrix} B_\Delta + B_2 D_r D_{2\Delta} \\ B_r D_{2\Delta} \end{pmatrix}, \\ C_c = \begin{pmatrix} C_\Delta + D_{\Delta 2} D_r C_2 & D_{\Delta 2} C_r \end{pmatrix} , \quad D_c = D_{\Delta\Delta} + D_{\Delta 2} D_r D_{2\Delta} \ . \end{gathered} \tag{11.32}$$

Согласно утверждению 9.4 эта система робастно устойчива, если при $\zeta = \eta^{-1}$ линейное матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} A_c^T X A_c - X & A_c^T X B_c & C_c^T S \\ B_c^T X A_c & -\zeta S + B_c^T X B_c & D_c^T S \\ S C_c & S D_c & -\zeta S \end{pmatrix} < 0 \tag{11.33}$$

разрешимо относительно матрицы $X = X^T > 0$ и матрицы $S = S^T > 0$ вида

$$S = \operatorname{diag}(S_1, \ldots, S_r, s_1 I_{m_1}, \ldots, s_f I_{m_f}) \ , \tag{11.34}$$

где первые r блоков являются полными квадратными матрицами порядков $k_1, \ldots, k_r$ и $k_1 + \cdots + k_r + m_1 + \cdots + m_f = n_\Delta$.

Для дальнейшего исследования преобразуем неравенство (11.33) в эквивалентное неравенство

$$\begin{pmatrix} A_c^T X A_c - X & A_c^T X B_c & C_c^T \\ B_c^T X A_c & -\zeta S + B_c^T X B_c & D_c^T \\ C_c & D_c & -\zeta S^{-1} \end{pmatrix} < 0 \ , \tag{11.35}$$

которое представим в виде

$$\begin{pmatrix} -X^{-1} & A_c & B_c & 0 \\ A_c^T & -X & 0 & C_c^T \\ B_c^T & 0 & -\zeta S & D_c^T \\ 0 & C_c & D_c & -\zeta S^{-1} \end{pmatrix} < 0 \ . \tag{11.36}$$

Действительно, в силу леммы Шура последнее неравенство эквивалентно $X > 0$ и неравенству

$$\begin{pmatrix} -X & 0 & C_c^T \\ 0 & -\zeta S & D_c^T \\ C_c & D_c & -\zeta S^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_c^T \\ B_c^T \\ 0 \end{pmatrix} X (A_c \quad B_c \quad 0) < 0 \ ,$$

которое совпадает с (11.35).

Как и в непрерывном случае, матрицы замкнутой системы представим в виде

$$\begin{gathered} A_c = A_0 + \mathcal{B}\Theta\mathcal{C} \ , \quad B_c = B_0 + \mathcal{B}\Theta\mathcal{D}_1 \ , \\ C_c = C_0 + \mathcal{D}_2\Theta\mathcal{C} \ , \quad D_c = D_{\Delta\Delta} + \mathcal{D}_2\Theta\mathcal{D}_1 \ , \end{gathered} \tag{11.37}$$

где

$$\begin{gathered} A_0 = \begin{pmatrix} A & 0_{n_x \times k} \\ 0_{k \times n_x} & 0_{k \times k} \end{pmatrix} \ , \\ \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0_{n_x \times k} & B_2 \\ I_k & 0_{k \times n_u} \end{pmatrix} \ , \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0_{k \times n_x} & I_k \\ C_2 & 0_{n_y \times k} \end{pmatrix} \ , \\ B_0 = \begin{pmatrix} B_\Delta \\ 0_{k \times n_\Delta} \end{pmatrix} \ , \quad C_0 = (C_\Delta \quad 0_{n_\Delta \times k}) \ , \\ \mathcal{D}_1 = \begin{pmatrix} 0_{k \times n_\Delta} \\ D_{2\Delta} \end{pmatrix} \ , \quad \mathcal{D}_2 = (0_{n_\Delta \times k} \quad D_{\Delta 2}) \ , \\ \Theta = \begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix} \ . \end{gathered} \tag{11.38}$$

Запишем неравенство (11.36) в виде линейного матричного неравенства относительно неизвестных параметров Θ

$$\Psi + P^T\Theta^T Q + Q^T\Theta P < 0\ , \tag{11.39}$$

в котором

$$\begin{gathered}\Psi = \begin{pmatrix} -X^{-1} & A_0 & B_0 & 0 \\ A_0^T & -X & 0 & C_0^T \\ B_0^T & 0 & -\zeta S & D_{\Delta\Delta}^T \\ 0 & C_0 & D_{\Delta\Delta} & -\zeta S^{-1} \end{pmatrix}\ , \\ P = \begin{pmatrix} 0_{(n_y+k)\times(n_x+k)} & \mathcal{C} & \mathcal{D}_1 & 0_{(n_y+k)\times n_\Delta} \end{pmatrix}\ , \\ Q = \begin{pmatrix} \mathcal{B}^T & 0_{(n_u+k)\times(n_x+k)} & 0_{(n_u+k)\times n_\Delta} & \mathcal{D}_2^T \end{pmatrix}\ .\end{gathered} \tag{11.40}$$

Применяя утверждение 3.2, приходим к следующему.

Утверждение 11.4 *Если при заданном $\zeta > 0$ существуют матрица $X = X^T > 0$ порядка $(n_x + k) \times (n_x + k)$ и матрица $S = S^T > 0$ порядка $n_\Delta \times n_\Delta$ вида (11.34), удовлетворяющие следующим двум неравенствам*

$$\begin{gathered} W_P^T \begin{pmatrix} -X^{-1} & A_0 & B_0 & 0 \\ A_0^T & -X & 0 & C_0^T \\ B_0^T & 0 & -\zeta S & D_{\Delta\Delta}^T \\ 0 & C_0 & D_{\Delta\Delta} & -\zeta S^{-1} \end{pmatrix} W_P < 0\ , \\ W_Q^T \begin{pmatrix} -X^{-1} & A_0 & B_0 & 0 \\ A_0^T & -X & 0 & C_0^T \\ B_0^T & 0 & -\zeta S & D_{\Delta\Delta}^T \\ 0 & C_0 & D_{\Delta\Delta} & -\zeta S^{-1} \end{pmatrix} W_Q < 0\ , \end{gathered} \tag{11.41}$$

то существует робастный регулятор k-го порядка вида (11.30), обеспечивающий асимптотическую устойчивость объекта (11.27), (11.28), (11.29) при $\eta = \zeta^{-1}$. Если условия (11.41) выполнены и такие матрицы X и S найдены, то параметры Θ искомого регулятора (11.30) находятся как решения линейного матричного неравенства (11.39), в котором Ψ, P и Q заданы в (11.40).

Введем матрицы $Y = X^{-1}$, $\Sigma = S^{-1}$ и перепишем условия (11.41) в виде линейных матричных неравенств относительно матриц X и $\sum$:

$$
\begin{gathered}
W_P^T \begin{pmatrix} -Y & A_0 & B_0 & 0 \\ A_0^T & -X & 0 & C_0^T \\ B_0^T & 0 & -\zeta S & D_{\Delta\Delta}^T \\ 0 & C_0 & D_{\Delta\Delta} & -\zeta\Sigma \end{pmatrix} W_P < 0 \ , \\
W_Q^T \begin{pmatrix} -Y & A_0 & B_0 & 0 \\ A_0^T & -X & 0 & C_0^T \\ B_0^T & 0 & -\zeta S & D_{\Delta\Delta}^T \\ 0 & C_0 & D_{\Delta\Delta} & -\zeta\Sigma \end{pmatrix} W_Q < 0 \ .
\end{gathered}
\tag{11.42}
$$

Тогда рассматриваемая задача сводится к **задаче А**: найти две взаимнообратные матрицы $\hat{X} = \mathrm{diag}\,(X, S)$ и $\hat{Y} = \mathrm{diag}\,(Y, \Sigma)$, удовлетворяющие неравенствам (11.42).

Преобразуем неравенства (11.42), учитывая блочную структуру матриц A_0, B_0, C_0 и соответствующее представление матриц X и Y в блочном виде

$$
X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{pmatrix} \ , \quad Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12}^T & Y_{22} \end{pmatrix} \ .
$$

Согласно (11.38) и (11.40) имеем

$$
P = \begin{pmatrix} 0_{k\times n_x} & 0_{k\times k} & 0_{k\times n_x} & I_k & 0_{k\times n_\Delta} & 0_{k\times n_\Delta} \\ 0_{n_y\times n_x} & 0_{n_y\times k} & C_2 & 0_{n_y\times k} & D_{2\Delta} & 0_{n_y\times n_\Delta} \end{pmatrix} \ ,
$$

$$
Q = \begin{pmatrix} 0_{k\times n_x} & I_k & 0_{k\times n_x} & 0_{k\times k} & 0_{k\times n_\Delta} & 0_{k\times n_\Delta} \\ B_2^T & 0_{n_u\times k} & 0_{n_u\times n_x} & 0_{n_u\times k} & 0_{n_u\times n_\Delta} & D_{\Delta 2}^T \end{pmatrix} \ ,
$$

поэтому

$$W_P = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ W_P^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ W_P^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} , \quad W_Q = \begin{pmatrix} W_Q^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ W_Q^{(2)} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

где матрицы $W_P^{(1)}$, $W_P^{(2)}$ и матрицы $W_Q^{(1)}$, $W_Q^{(2)}$ удовлетворяют следующим уравнениям

$$C_2 W_P^{(1)} + D_{2\Delta} W_P^{(2)} = 0 \ , \quad B_2^T W_Q^{(1)} + D_{\Delta 2}^T W_Q^{(2)} = 0 \ .$$

С учетом этого неравенства (11.42) примут вид

$$W_P^T \begin{pmatrix} -Y_{11} & -Y_{12} & A & 0 & B_\Delta & 0 \\ \star & -Y_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & -X_{11} & -X_{12} & 0 & C_\Delta^T \\ \star & \star & \star & -X_{22} & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -\zeta S & D_{\Delta\Delta}^T \\ \star & \star & \star & \star & \star & -\zeta\Sigma \end{pmatrix} W_P < 0 \ ,$$

$$W_Q^T \begin{pmatrix} -Y_{11} & -Y_{12} & A & 0 & B_\Delta & 0 \\ \star & -Y_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & -X_{11} & -X_{12} & 0 & C_\Delta^T \\ \star & \star & \star & -X_{22} & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -\zeta S & D_{\Delta\Delta}^T \\ \star & \star & \star & \star & \star & -\zeta\Sigma \end{pmatrix} W_Q < 0 \ .$$

После умножения первое из этих неравенств запишется в виде

$$\begin{pmatrix} -{W_P^{(1)}}^T X_{11} W_P^{(1)} - \zeta {W_P^{(2)}}^T S W_P^{(2)} & \star & \star \\ \begin{pmatrix} A W_P^{(1)} + B_\Delta W_P^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix} & -Y & \star \\ C_\Delta W_P^{(1)} + D_{\Delta\Delta} W_P^{(2)} & 0 & -\zeta\Sigma \end{pmatrix} < 0,$$

которое по лемме А.4 с учетом того, что $Y > 0$, эквивалентно неравенству

$$\begin{pmatrix} -W_P^{(1)^T} X_{11} W_P^{(1)} - \zeta W_P^{(2)^T} S W_P^{(2)} & W_P^{(1)^T} C_\Delta^T + W_P^{(2)^T} D_{\Delta\Delta}^T \\ C_\Delta W_P^{(1)} + D_{\Delta\Delta} W_P^{(2)} & -\zeta\Sigma \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} W_P^{(1)^T} A^T + W_P^{(2)^T} B_\Delta^T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y^{-1} \begin{pmatrix} A W_P^{(1)} + B_\Delta W_P^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} < 0 \ .$$

Так как $Y^{-1} = X$, то во второе слагаемое в левой части последнего неравенства входит только блок X_{11}. Непосредственной проверкой можно убедится, что это неравенство сводится к следующему линейному матричному неравенству относительно X_{11}:

$$\hat{W}_P^T \begin{pmatrix} A^T X_{11} A - X_{11} & A^T X_{11} B_\Delta & | & C_\Delta^T \\ \star & -\zeta S + B_\Delta^T X_{11} B_\Delta & | & D_{\Delta\Delta}^T \\ - & - & | & - \\ \star & \star & | & -\zeta\Sigma \end{pmatrix} \hat{W}_P < 0 \ , \qquad (11.43)$$

где

$$\hat{W}_P = \begin{pmatrix} N_1 & | & 0 \\ - & | & - \\ 0 & | & I \end{pmatrix} \ ,$$

а столбцы матрицы $N_1 = \operatorname{col}(W_P^{(1)}, W_P^{(2)})$ образуют базис ядра матрицы $(C_2 \quad D_{2\Delta})$.

Аналогичным образом второе из неравенств (11.42) преобразуется к виду

$$\hat{W}_Q^T \begin{pmatrix} A Y_{11} A^T - Y_{11} & A Y_{11} C_\Delta^T & | & B_\Delta \\ \star & -\zeta S + C_\Delta Y_{11} C_\Delta^T & | & D_{\Delta\Delta} \\ - & - & | & - \\ \star & \star & | & -\zeta\Sigma \end{pmatrix} \hat{W}_Q < 0 \ , \qquad (11.44)$$

где

$$\hat{W}_Q = \begin{pmatrix} N_2 & | & 0 \\ - & | & - \\ 0 & | & I \end{pmatrix} \ ,$$

а столбцы матрицы $N_2 = \mathrm{col}\,(W_Q^{(1)}, W_Q^{(2)})$ образуют базис ядра матрицы $(B_2^T \quad D_{\Delta 2}^T)$. Таким образом, задача синтеза H_∞-регуляторов k-порядка для дискретных объектов может быть также сведена к сформулированной выше **задаче B**: найти две $(n_x \times n_x)$-матрицы $X_{11} = X_{11}^T > 0$, $Y_{11} = Y_{11}^T > 0$, удовлетворяющие линейным матричным неравенствам (11.43), (11.44) и

$$\begin{pmatrix} X_{11} & I \\ I & Y_{11} \end{pmatrix} \geq 0 \ ,$$

и условию

$$\mathrm{rank}\,(I - X_{11}Y_{11}) \leq k \ ,$$

или установить, что таких матриц не существует.

Глава 12

Робастное H_∞-управление

Пусть неопределенный объект задается следующими уравнениями

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + B_\Delta v_\Delta + B_1 v + B_2 u \ , \\
z_\Delta &= C_\Delta x + D_{\Delta\Delta} v_\Delta + D_{\Delta 1} v + D_{\Delta 2} u \ , \\
z &= C_1 x + D_{1\Delta} v_\Delta + D_{11} v + D_{12} u \ , \\
y &= C_2 x + D_{2\Delta} v_\Delta + D_{21} v \ ,
\end{aligned} \tag{12.1}$$

в которых $v_\Delta = \Delta(t) z_\Delta$, $x \in R^{n_x}$ – состояние, $v_\Delta \in R^{n_{v\Delta}}$ – вход "неопределенности",$v \in R^{n_v}$ – внешнее возмущение, $u \in R^{n_u}$ –управление, $z_\Delta \in R^{n_{z\Delta}}$ – выход "неопределенности", $y \in R^{n_y}$ – измеряемый выход. Предполагается, что $n_{v\Delta} = n_{z\Delta} = n_\Delta$. В этих уравнениях $\Delta(t)$ – неизвестный изменяемый во времени матричный параметр, имеющий блочно-диагональную структуру вида

$$\Delta(t) = \operatorname{diag}\left(\delta_1(t) I_{k_1}, \ldots, \delta_r(t) I_{k_r}, \Delta_1(t), \ldots, \Delta_f(t)\right) \tag{12.2}$$

и удовлетворяющий неравенству

$$\Delta^T(t)\Delta(t) \le \eta^2 I \ , \quad \forall\, t \ge 0 \ . \tag{12.3}$$

Предполагается также, что $\det\left(I - \Delta(t) D_{\Delta\Delta}\right) \ne 0$.

Синтез робастного H_∞-управления этим объектом состоит в построении линейного динамического регулятора порядка k

$$\begin{aligned}
\dot{x}_r &= A_r x_r + B_r y \ , \\
u &= C_r x_r + D_r y \ ,
\end{aligned} \tag{12.4}$$

где $x_r \in R^k$ – состояние регулятора, при котором для всех допустимых $\Delta(t)$ обеспечивается гашение возмущений в заданном отношении γ, т.е.

$$\sup_{v \ne 0} \frac{\|z\|}{\|v\|} < \gamma \ , \tag{12.5}$$

а в отсутствие внешних возмущений замкнутая система (12.1), (12.4) асимптотически устойчива.

Проведем процедуру "погружения"исходной неопределенной системы в вспомогательную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + \hat{B}_1 \hat{v} + B_2 u \\ \hat{z} &= \hat{C}_1 x + \hat{D}_{11} \hat{v} + \hat{D}_{12} u \\ y &= C_2 x + \hat{D}_{21} \hat{v} \ , \end{aligned} \tag{12.6}$$

в которой вход $\hat{v}$ и выход $\hat{z}$,

$$\hat{B}_1 = (B_\Delta \quad B_1) L_1 \ , \quad \hat{C}_1 = L_2 \begin{pmatrix} C_\Delta \\ C_1 \end{pmatrix} \ ,$$

$$\begin{gathered} \hat{D}_{11} = L_2 \begin{pmatrix} D_{\Delta\Delta} & D_{\Delta 1} \\ D_{1\Delta} & D_{11} \end{pmatrix} L_1 \ , \quad \hat{D}_{12} = L_2 \begin{pmatrix} D_{\Delta 2} \\ D_{12} \end{pmatrix} \ , \\ \hat{D}_{21} = (D_{2\Delta} \quad D_{21}) L_1 \ , \end{gathered} \tag{12.7}$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} \gamma\eta S^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \ , \quad L_2 = \begin{pmatrix} S^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \ ,$$

а матрица $S = S^T > 0$ имеет вид

$$S = \mathrm{diag}\,(S_1, \ldots, S_r, s_1 I_{m_1}, \ldots, s_f I_{m_f}) \ , \tag{12.8}$$

где первые r блоков являются полными квадратными матрицами порядков $k_1, \ldots, k_r$ и $k_1 + \cdots + k_r + m_1 + \cdots + m_f = n_\Delta$. Для этой системы рассмотрим синтез H_∞-регуляторов по выходу заданного порядка, при которых

$$\|\hat{z}\| < \gamma \|\hat{v}\| \ , \quad \forall\, \hat{v} \not\equiv 0 \ . \tag{12.9}$$

Очевидно, что при

$$\hat{v} = L_1^{-1} \begin{pmatrix} v_\Delta \\ v \end{pmatrix} \ , \quad \hat{z} = L_2 \begin{pmatrix} z_\Delta \\ z \end{pmatrix} \tag{12.10}$$

уравнения (12.1) и (12.6) совпадают. Перепишем неравенство (12.9) в виде

$$\|z\|^2 - \gamma^2 \|v\|^2 < -(\|S^{1/2} z_\Delta\|^2 - \eta^{-2} \|S^{1/2} v_\Delta\|^2) \ .$$

С учетом того, что в исходной системе $v_\Delta = \Delta(t) z_\Delta$, где $\Delta(t)$ удовлетворяет (12.2), (12.3), имеем

$$\|S^{1/2} z_\Delta\|^2 - \eta^{-2} \|S^{1/2} v_\Delta\|^2 \geq 0$$

и, следовательно,

$$\|z\|^2 - \gamma^2 \|v\|^2 < 0 \ .$$

Таким образом, H_∞-регуляторы в задаче (12.6), (12.9) являются робастными H_∞-регуляторами в задаче (12.1), (12.5).

Уравнения замкнутой системы (12.6), (12.4) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + \hat{B}_c \hat{v} \ , \\ \hat{z} &= \hat{C}_c x_c + \hat{D}_c \hat{v} \ , \end{aligned} \tag{12.11}$$

где

$$A_c = \begin{pmatrix} A + B_2 D_r C_2 & B_2 C_r \\ B_r C_2 & A_r \end{pmatrix} \ ,$$

$$\hat{B}_c = \begin{pmatrix} \hat{B}_1 + B_2 D_r \hat{D}_{21} \\ B_r \hat{D}_{21} \end{pmatrix} = B_c L_1, \ B_c = \begin{pmatrix} B_\Delta + B_2 D_r D_{2\Delta} & B_1 + B_2 D_r D_{21} \\ B_r D_{2\Delta} & B_r D_{21} \end{pmatrix},$$

$$\hat{C}_c = \begin{pmatrix} C_1 + \hat{D}_{12} D_r C_2 & \hat{D}_{12} C_r \end{pmatrix} = L_2 C_c, \ C_c = \begin{pmatrix} C_\Delta + D_{\Delta 2} D_r C_2 & D_{\Delta 2} C_r \\ C_1 + D_{12} D_r C_2 & D_{12} C_r \end{pmatrix} \ ,$$

$$\hat{D}_c = \hat{D}_{11} + \hat{D}_{12} D_r \hat{D}_{21} = L_2 D_c L_1 \ ,$$

$$D_c = \begin{pmatrix} D_{\Delta\Delta} + D_{\Delta 2} D_r D_{2\Delta} & D_{\Delta 1} + D_{\Delta 2} D_r D_{21} \\ D_{1\Delta} + D_{12} D_r D_{2\Delta} & D_{11} + D_{12} D_r D_{21} \end{pmatrix}. \tag{12.12}$$

Согласно утверждению 7.1 для того, чтобы уровень гашения возмущений в объекте (12.11) был меньше γ, необходимо и достаточно, чтобы существовала матрица $X = X^T > 0$, удовлетворяющая линейному матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} A_c^T X + X A_c & X \hat{B}_c & \hat{C}_c^T \\ \hat{B}_c^T X & -\gamma I & \hat{D}_c^T \\ \hat{C}_c & \hat{D}_c & -\gamma I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_c^T X + X A_c & X B_c L_1 & C_c^T L_2 \\ L_1 B_c^T X & -\gamma I & L_1 D_c^T L_2 \\ L_2 C_c & L_2 D_c L_1 & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \, . \tag{12.13}$$

По лемме А.2 с учетом обозначений для матриц L_1 и L_2 последнее неравенство эквивалентно следующему

$$\begin{pmatrix} A_c^T X + X A_c & X B_c & C_c^T \\ B_c^T X & -\begin{pmatrix} \gamma^{-1}\eta^{-2} S & 0 \\ 0 & \gamma I \end{pmatrix} & D_c^T \\ C_c & D_c & -\begin{pmatrix} \gamma S^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma I \end{pmatrix} \end{pmatrix} < 0 \ . \qquad (12.14)$$

Вводя обозначение $\hat{S} = \gamma^{-1}\eta^{-1} S$ и $\zeta = \eta^{-1}$, получим

$$\begin{pmatrix} A_c^T X + X A_c & X B_c & C_c^T \\ B_c^T X & -\begin{pmatrix} \zeta \hat{S} & 0 \\ 0 & \gamma I \end{pmatrix} & D_c^T \\ C_c & D_c & -\begin{pmatrix} \zeta \hat{S}^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma I \end{pmatrix} \end{pmatrix} < 0 \ . \qquad (12.15)$$

Теперь с целью выделить параметры регулятора представим матрицы A_c, B_c, D_c и C_c в виде

$$\begin{aligned} A_c &= A_0 + \mathcal{B}\Theta\mathcal{C} \ , \quad B_c = B_0 + \mathcal{B}\Theta\mathcal{D}_1 \ , \\ C_c &= C_0 + \mathcal{D}_2\Theta\mathcal{C} \ , \quad D_c = D_0 + \mathcal{D}_2\Theta\mathcal{D}_1 \ , \end{aligned} \qquad (12.16)$$

где

$$\begin{gathered} A_0 = \begin{pmatrix} A & 0_{n_x \times k} \\ 0_{k \times n_x} & 0_{k \times k} \end{pmatrix} \ , \\ \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0_{n_x \times k} & B_2 \\ I_k & 0_{k \times n_u} \end{pmatrix} \ , \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0_{k \times n_x} & I_k \\ C_2 & 0_{n_y \times k} \end{pmatrix} \ , \\ B_0 = \begin{pmatrix} B_\Delta & B_1 \\ 0_{k \times n_\Delta} & 0_{k \times n_v} \end{pmatrix} \ , \quad C_0 = \begin{pmatrix} C_\Delta & 0_{n_\Delta \times k} \\ C_1 & 0_{n_z \times k} \end{pmatrix} \ , \\ \mathcal{D}_1 = \begin{pmatrix} 0_{k \times n_\Delta} & 0_{k \times n_v} \\ D_{2\Delta} & D_{21} \end{pmatrix} \ , \quad \mathcal{D}_2 = \begin{pmatrix} 0_{n_\Delta \times k} & D_{\Delta 2} \\ 0_{n_z \times k} & D_{12} \end{pmatrix} \ , \\ D_0 = \begin{pmatrix} D_{\Delta\Delta} & D_{\Delta 1} \\ D_{1\Delta} & D_{11} \end{pmatrix} \ . \end{gathered} \qquad (12.17)$$

Запишем неравенство (12.15) в виде линейного матричного неравенства относительно неизвестных параметров Θ

$$\Psi + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0 \ , \tag{12.18}$$

в котором

$$\Psi = \begin{pmatrix} A_0^T X + X A_0 & X B_0 & C_0^T \\ B_0^T X & -\begin{pmatrix} \zeta \hat{S} & 0 \\ 0 & \gamma I \end{pmatrix} & D_0^T \\ C_0 & D_0 & -\begin{pmatrix} \zeta \hat{S}^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma I \end{pmatrix} \end{pmatrix} ,$$

$$P = (\mathcal{C} \quad \mathcal{D}_1 \quad 0_{(n_y+k)\times(n_\Delta+n_z)}) \ , \quad Q = (\mathcal{B}^T X \quad 0_{(n_u+k)\times(n_\Delta+n_v)} \quad \mathcal{D}_2^T) \ . \tag{12.19}$$

Согласно утверждению 3.2 полученное неравенство имеет решение тогда и только тогда, когда выполнены условия (3.5), которые в данном случае имеют вид

$$W_P^T \begin{pmatrix} A_0^T X + X A_0 & X B_0 & C_0^T \\ B_0^T X & -\begin{pmatrix} \zeta \hat{S} & 0 \\ 0 & \gamma I \end{pmatrix} & D_0^T \\ C_0 & D_0 & -\begin{pmatrix} \zeta \hat{S}^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma I \end{pmatrix} \end{pmatrix} W_P < 0 \ ,$$
$$W_Q^T \begin{pmatrix} A_0^T X + X A_0 & X B_0 & C_0^T \\ B_0^T X & -\begin{pmatrix} \zeta \hat{S} & 0 \\ 0 & \gamma I \end{pmatrix} & D_0^T \\ C_0 & D_0 & -\begin{pmatrix} \zeta \hat{S}^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma I \end{pmatrix} \end{pmatrix} W_Q < 0 \ , \tag{12.20}$$

где столбцы матрицы W_P образуют базис $\mathcal{N}(P)$ – ядра матрицы P, а столбцы матрицы W_Q образуют базис $\mathcal{N}(Q)$ – ядра матрицы Q. Так как в данном случае

$$Q = R \begin{pmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \ , \quad R = (\mathcal{B}^T \quad 0 \quad \mathcal{D}_2^T) \ ,$$

то

$$W_Q = \begin{pmatrix} X^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} W_R \ .$$

Подставляя эти выражения в (12.20), приходим к справедливости следующего утверждения.

Утверждение 12.1 *Если при заданных $\gamma > 0$ и $\zeta > 0$ существуют матрица $X = X^T > 0$ порядка $(n_x + k) \times (n_x + k)$ и матрица $\hat{S} = \hat{S}^T > 0$ порядка $n_\Delta \times n_\Delta$ вида (12.8), удовлетворяющие следующим двум неравенствам*

$$W_P^T \begin{pmatrix} A_0^T X + X A_0 & X B_0 & C_0^T \\ B_0^T X & -\begin{pmatrix} \zeta \hat{S} & 0 \\ 0 & \gamma I \end{pmatrix} & D_0^T \\ C_0 & D_0 & -\begin{pmatrix} \zeta \hat{S}^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma I \end{pmatrix} \end{pmatrix} W_P < 0 \ ,$$

$$W_R^T \begin{pmatrix} X^{-1} A_0^T + A_0 X^{-1} & B_0 & X^{-1} C_0^T \\ B_0^T & -\begin{pmatrix} \zeta \hat{S} & 0 \\ 0 & \gamma I \end{pmatrix} & D_0^T \\ C_0 X^{-1} & D_0 & -\begin{pmatrix} \zeta \hat{S}^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma I \end{pmatrix} \end{pmatrix} W_R < 0 \ , \tag{12.21}$$

то существует робастный H_∞-регулятор k-го порядка вида (12.4), обеспечивающий уровень гашения возмущений не больший γ в неопределенном объекте (12.1), (12.2), (12.3) при $\eta = \zeta^{-1}$. Если условия (12.21) выполнены и такие матрицы X и $\hat{S}$ найдены, то параметры Θ искомого регулятора (12.4) находятся как решения линейного матричного неравенства (12.18), в котором Ψ, P и Q заданы в (12.19).

Введем матрицы $Y = X^{-1}$, $\Sigma = \hat{S}^{-1}$ и перепишем условия (12.21) в виде линейных матричных неравенств относительно матриц X и Σ:

$$W_P^T \begin{pmatrix} A_0^T X + X A_0 & X B_0 & C_0^T \\ B_0^T X & -\begin{pmatrix} \zeta \hat{S} & 0 \\ 0 & \gamma I \end{pmatrix} & D_0^T \\ C_0 & D_0 & -\begin{pmatrix} \zeta \Sigma & 0 \\ 0 & \gamma I \end{pmatrix} \end{pmatrix} W_P < 0 \ ,$$

$$W_R^T \begin{pmatrix} Y A_0^T + A_0 Y & B_0 & Y C_0^T \\ B_0^T & -\begin{pmatrix} \zeta \hat{S} & 0 \\ 0 & \gamma I \end{pmatrix} & D_0^T \\ C_0 Y & D_0 & -\begin{pmatrix} \zeta \Sigma & 0 \\ 0 & \gamma I \end{pmatrix} \end{pmatrix} W_R < 0 \ . \tag{12.22}$$

Тогда рассматриваемая задача сводится к **задаче А**: найти две взаимно-обратные матрицы $\hat{X} = \mathrm{diag}\,(X, \hat{S})$ и $\hat{Y} = \mathrm{diag}\,(Y, \Sigma)$, удовлетворяющие неравенствам (12.22).

При синтезе робастных H_∞-регуляторов возникают две задачи: первая задача – обеспечить гашение возмущений с минимально возможным уровнем γ при заданном значении меры неопределенности η, и вторая задача – обеспечить гашение возмущений с уровнем, меньшим заданного γ, для максимально возможного значения меры неопределенности η.

Пример 12.1 *Рассмотрим линейный осциллятор с неизвестной массой и неизвестными коэффициентами демпфирования и жесткости, на который действует внешнее возмущение. Уравнение осциллятора имеет вид (см. примеры 8.2 и 11.1)*

$$\begin{aligned} &m\ddot{\xi} + b\dot{\xi} + c\xi = u + v\ , \\ &z_1 = \xi\ , \\ &z_2 = u\ , \\ &y = \xi\ , \end{aligned} \tag{12.23}$$

где $m = m_0(1 + w_m\delta_m)$, $b = b_0(1 + w_b\delta_b)$, $c = c_0(1 + w_c\delta_c)$, m_0, b_0, c_0 *– номинальные значения параметров,* $|\delta_m| \le \eta$, $|\delta_b| \le \eta$, $|\delta_c| \le \eta$. *Обозначая* $x_1 = \xi$ *и* $x_2 = \dot{\xi}$, *запишем это уравнение в виде*

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2 \\ &\dot{x}_2 = -\frac{c_0}{m_0}x_1 - \frac{b_0}{m_0}x_2 - w_m\delta_m\,\dot{x}_2 - w_c\delta_c\frac{c_0}{m_0}\,x_1 - w_b\delta_b\frac{b_0}{m_0}\,x_2 + \frac{1}{m_0}u + \frac{1}{m_0}v\ . \end{aligned}$$

Теперь, обозначив $v_\Delta = col(v_m, v_c, v_b)$ *и* $z_\Delta = col(z_m, z_c, z_b)$, *где*

$$v_m = -\delta_m\dot{x}_2\ , \quad v_c = -\delta_c\frac{c_0}{m_0}x_1\ , \quad v_b = -\delta_b\frac{b_0}{m_0}x_2$$
$$z_m = -\dot{x}_2 = \frac{c_0}{m_0}x_1 + \frac{b_0}{m_0}x_2 - w_m v_m - w_c v_c - w_b v_b - \frac{1}{m_0}u - \frac{1}{m_0}v,$$
$$z_c = -\frac{c_0}{m_0}x_1\ , \quad z_b = -\frac{b_0}{m_0}x_2\ ,$$

представим эту систему в виде (12.1), где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{c_0}{m_0} & -\dfrac{b_0}{m_0} \end{pmatrix}, \quad B_\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ w_m & w_c & w_b \end{pmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m_0} \end{pmatrix},$$

$$C_\Delta = \begin{pmatrix} \dfrac{c_0}{m_0} & \dfrac{b_0}{m_0} \\ -\dfrac{c_0}{m_0} & 0 \\ 0 & -\dfrac{b_0}{m_0} \end{pmatrix}, \quad D_{\Delta\Delta} = \begin{pmatrix} -w_m & -w_c & -w_b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_{\Delta 1} = D_{\Delta 2} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{m_0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_{1\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, D_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C_2 = (1 \quad 0), D_{2\Delta} = (0 \quad 0 \quad 0), D_{21} = 0,$$

$$\Delta(t) = \begin{pmatrix} \delta_m(t) & 0 & 0 \\ 0 & \delta_c(t) & 0 \\ 0 & 0 & \delta_b(t) \end{pmatrix}.$$

Для значений $m_0 = 1$, $b_0 = 0.1$, $c_0 = 100$, $w_m = w_b = w_c = 0.1$ *при* $\eta = 2.5$ *регулятор первого порядка*

$$\dot{x}_r = -19.638 x_r - 80.514 y,$$
$$u = -42.327 x_r - 124.606 y$$

обеспечивает минимально возможный уровень гашения возмущений $\gamma = 32$. *Регулятор первого порядка*

$$\dot{x}_r = -10.914 x_r - 67.002 y,$$
$$u = -14.558 x_r - 41.994 y$$

обеспечивает уровень гашения возмущений $\gamma = 5$ *для максимально возможной меры неопределенности* $\eta = 1.3$.

Переформулируем задачу, к решению которой сводится синтез робастного H_∞-регулятора заданного порядка, учитывая блочную структуру матриц A_0, B_0, C_0, D_0 и соответствующее представление матриц X и Y в блочном виде

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12}^T & Y_{22} \end{pmatrix}.$$

Согласно (12.17) и (12.19) имеем

$$P = \begin{pmatrix} 0_{k\times n_x} & I_k & 0_{k\times n_\Delta} & 0_{k\times n_v} & 0_{k\times n_\Delta} & 0_{k\times n_z} \\ C_2 & 0_{n_y\times k} & D_{2\Delta} & D_{21} & 0_{n_y\times n_\Delta} & 0_{n_y\times n_z} \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} 0_{k\times n_x} & I_k & 0_{k\times n_\Delta} & 0_{k\times n_v} & 0_{k\times n_\Delta} & 0_{k\times n_z} \\ B_2^T & 0_{n_u\times k} & 0_{n_u\times n_\Delta} & 0_{n_u\times n_v} & D_{\Delta 2}^T & D_{12}^T \end{pmatrix},$$

поэтому в качестве W_P и W_R можно взять

$$W_P = \begin{pmatrix} W_P^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ W_P^{(2)} & 0 & 0 \\ W_P^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \quad W_R = \begin{pmatrix} W_R^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ W_R^{(2)} & 0 & 0 \\ W_R^{(3)} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где матрицы $W_P^{(i)}$ и матрицы $W_R^{(i)}$ определяются из следующих уравнений

$$C_2 W_P^{(1)} + D_{2\Delta} W_P^{(2)} + D_{21} W_P^{(3)} = 0, \quad B_2^T W_R^{(1)} + D_{\Delta 2}^T W_R^{(2)} + D_{12}^T W_R^{(3)} = 0.$$

С учетом этого левые части в (12.22) примут вид

$$W_P^T \begin{pmatrix} A^T X_{11} + X_{11} A & A^T X_{12} & X_{11} B_\Delta & X_{11} B_1 & C_\Delta^T & C_1^T \\ \star & 0 & X_{12} B_\Delta & X_{12}^T B_1 & 0 & 0 \\ \star & \star & -\zeta \hat{S} & 0 & D_{\Delta\Delta}^T & D_{1\Delta}^T \\ \star & \star & \star & -\gamma I & D_{\Delta 1}^T & D_{11}^T \\ \star & \star & \star & \star & -\zeta\Sigma & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star & -\gamma I \end{pmatrix} W_P,$$

$$W_R^T \begin{pmatrix} Y_{11}A^T + AY_{11} & AY_{12} & B_\Delta & B_1 & Y_{11}C_\Delta^T & Y_{11}C_1^T \\ \star & 0 & 0 & 0 & Y_{12}^T C_\Delta^T & Y_{12}^T C_1^T \\ \star & \star & -\zeta\hat{S} & 0 & D_{\Delta\Delta}^T & D_{1\Delta}^T \\ \star & \star & \star & -\gamma I & D_{\Delta 1}^T & D_{11}^T \\ \star & \star & \star & \star & -\zeta\Sigma & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star & -\gamma I \end{pmatrix} W_R.$$

Так как во вторых строках матриц W_P и W_R стоят нулевые блоки, получаем

$$\hat{W}_P^T \begin{pmatrix} A^T X_{11} + X_{11}A & X_{11}B_\Delta & X_{11}B_1 & | & C_\Delta^T & C_1^T \\ \star & -\zeta\hat{S} & 0 & | & D_{\Delta\Delta}^T & D_{1\Delta}^T \\ \star & \star & -\gamma I & | & D_{\Delta 1}^T & D_{11}^T \\ - & - & - & | & - & - \\ \star & \star & \star & | & -\zeta\Sigma & 0 \\ \star & \star & \star & | & \star & -\gamma I \end{pmatrix} \hat{W}_P < 0,$$

$$\hat{W}_R^T \begin{pmatrix} Y_{11}A^T + AY_{11} & Y_{11}C_\Delta^T & Y_{11}C_1^T & | & B_\Delta & B_1 \\ \star & -\zeta\Sigma & 0 & | & D_{\Delta\Delta} & D_{\Delta 1} \\ \star & \star & -\gamma I & | & D_{1\Delta} & D_{11} \\ - & - & - & | & - & - \\ \star & \star & \star & | & -\zeta\hat{S} & 0 \\ \star & \star & \star & | & \star & -\gamma I \end{pmatrix} \hat{W}_R < 0\ , \tag{12.24}$$

где

$$\hat{W}_P = \begin{pmatrix} N_1 & | & 0 \\ - & - & - \\ 0 & | & I \end{pmatrix}\ , \quad \hat{W}_R = \begin{pmatrix} N_2 & | & 0 \\ - & - & - \\ 0 & | & I \end{pmatrix}\ ,$$

а N_1 и N_2 – базисы нуль-пространств матриц $(C_2\, D_{2\Delta}\, D_{21})$ и $(B_2^T\, D_{\Delta 2}^T\, D_{12}^T)$ соответственно.

Таким образом, синтез робастных H_∞-регуляторов по выходу k-порядка может быть осуществлен в результате решения **задачи C**: найти две взаимнообратные матрицы $\hat{S} = \hat{S}^T > 0$, $\Sigma = \Sigma^T > 0$ вида (12.8) и две

$(n_x \times n_x)$-матрицы $X_{11} = X_{11}^T > 0$, $Y_{11} = Y_{11}^T > 0$, удовлетворяющие линейным матричным неравенствам (12.24) и

$$\begin{pmatrix} X_{11} & I \\ I & Y_{11} \end{pmatrix} \geq 0 \ , \tag{12.25}$$

а также условию

$$\operatorname{rank}(I - X_{11}Y_{11}) \leq k \ , \tag{12.26}$$

или установить, что таких матриц не существует.

Рассмотрим частный случай робастного H_∞-регулятора вида линейной обратной связи по состоянию. В этом случае имеем

$$C_2 = I \ , \quad D_{2\Delta} = 0 \ , \quad D_{21} = 0 \ , \quad A_r = 0 \ , \quad B_r = 0 \ , \quad C_r = 0 \ .$$

Тогда $N_1 = \operatorname{diag}(0, I)$ и первое неравенство в (12.24) сводится к

$$\begin{pmatrix} -\zeta\hat{S} & 0 & D_{\Delta\Delta}^T & D_{1\Delta}^T \\ \star & -\gamma I & D_{\Delta 1}^T & D_{11}^T \\ \star & \star & -\zeta\Sigma & 0 \\ \star & \star & \star & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \ . \tag{12.27}$$

По лемме Шура второе неравенство в (12.24) и неравенство (12.27) эквивалентны следующим неравенствам

$$\hat{W}_R^T \left(\begin{array}{ccc|cc} Y_{11}A^T + AY_{11} & Y_{11}C_\Delta^T & Y_{11}C_1^T & B_\Delta\Sigma & B_1 \\ \star & -\zeta\Sigma & 0 & D_{\Delta\Delta}\Sigma & D_{\Delta 1} \\ \star & \star & -\gamma I & D_{1\Delta}\Sigma & D_{11} \\ \hline \star & \star & \star & -\zeta\Sigma & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -\gamma I \end{array}\right) \hat{W}_R < 0 \ ,$$

$$\begin{pmatrix} -\zeta\Sigma & 0 & \Sigma D_{\Delta\Delta}^T & \Sigma D_{1\Delta}^T \\ \star & -\gamma I & D_{\Delta 1}^T & D_{11}^T \\ \star & \star & -\zeta\Sigma & 0 \\ \star & \star & \star & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \ . \tag{12.28}$$

Таким образом, синтез робастного H_∞-регулятора по состоянию сводится к решению линейных матричных неравенств в соответствии со следующим утверждением.

Утверждение 12.2 *Если при заданных $\zeta > 0$ и $\gamma > 0$ существуют матрица $Y_{11} = Y_{11}^T > 0$ порядка $n_x \times n_x$ и матрица $\Sigma = \Sigma^T > 0$ порядка $n_\Delta \times n_\Delta$ вида (12.8), удовлетворяющие линейным матричным неравенствам (12.28), то существует робастный H_∞-регулятор вида линейной обратной связи по состоянию $u = \Theta x$, обеспечивающий уровень гашения возмущений не больший γ в неопределенном объекте (12.1), (12.2), (12.3) при $\eta = \zeta^{-1}$. Для найденных решений Y_{11} и Σ этих неравенств параметры Θ находятся как решения линейного матричного неравенства (12.18), в котором*

$$\Psi = \begin{pmatrix} A^TY_{11}^{-1} + Y_{11}^{-1}A & Y_{11}^{-1}B_\Delta & Y_{11}^{-1}B_1 & C_\Delta^T & C_1^T \\ \star & -\zeta\Sigma^{-1} & 0 & D_{\Delta\Delta}^T & D_{1\Delta}^T \\ \star & \star & -\gamma I & D_{\Delta 1}^T & D_{11}^T \\ \star & \star & \star & -\zeta\Sigma & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -\gamma I \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} B_2^TY_{11}^{-1} & 0 & 0 & D_{\Delta 2}^T & D_{12}^T \end{pmatrix}.$$

Часть IV

Алгоритмы невыпуклой оптимизации

Глава 13

Двойственная итерация

Рассмотрим задачу стабилизации объекта

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{13.1}$$

с помощью статического регулятора по выходу

$$u = Ly \ . \tag{13.2}$$

В разделе 5.2 было показано, что эта задача может быть сведена к **задаче А** или к **задаче В**, каждая из которых содержит невыпуклое ограничение, осложняющее ее решение с помощью аппарата линейных матричных неравенств. В этой главе обсуждается алгоритм, позволяющий численно решать рассматриваемую задачу [28]. Для его описания потребуется следующее утверждение.

Утверждение 13.1 *Для существования статического регулятора (13.2) объекта (13.1), при котором*

$$\rho(A + BLC) < \gamma/2 \ , \tag{13.3}$$

необходимо и достаточно, чтобы существовали обратная связь по состоянию с матрицей K и наблюдатель с матрицей F такие, что соответствующие замкнутые системы допускают общую функцию Ляпунова, т.е. чтобы существовали матрицы K, F и $X = X^T > 0$, для которых выполняются следующие два неравенства

$$(A + BK)X + X(A + BK)^T < \gamma X \tag{13.4}$$

и

$$(A + FC)X + X(A + FC)^T < \gamma X \ . \tag{13.5}$$

Доказательство. Необходимость. Если при некоторой L условие (13.3) выполнено, то все собственные значения матрицы $A+BLC$ удовлетворяют условию $\mathrm{Re}\, z < \gamma/2$, т.е. лежат в LMI-области этой матрицы с характеристической функцией $f(z) = z + \bar{z} - \gamma$ (см. главу 6). Следовательно, согласно утверждению 6.1 существует $X = X^T > 0$ такая, что

$$(A + BLC)X + X(A + BLC)^T < \gamma X \ . \tag{13.6}$$

Очевидно, что тогда неравенства (13.4) и (13.5) будут верны при $K = LC$ и $F = BL$ соответственно.

Достаточность. Требуется доказать, что существуют матрицы L и $X = X^T > 0$ такие, что выполнено неравенство (13.6), которое запишем в виде

$$(AX + XA - \gamma X) + XC^T L^T B^T + BLCX < 0 \ .$$

Это неравенство имеет вид

$$\Psi + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0 \ , \tag{13.7}$$

где $\Theta = L$, и согласно утверждению 3.2 оно разрешимо тогда и только тогда, когда существует $X = X^T > 0$, удовлетворяющая условиям

$$W_{B^T}^T (AX + XA - \gamma X) W_{B^T} < 0 \ , \quad W_{CX}^T (AX + XA - \gamma X) W_{CX} < 0 \ . \tag{13.8}$$

Представим неравенство (13.4) как

$$(AX + XA^T - \gamma X) + XK^T B^T + BKX < 0 \ ,$$

т.е. тоже в виде (13.7), где $\Theta = K$. Так как по условию неравенство (13.4) при некоторой $X = X^T > 0$ разрешимо относительно матрицы K, то согласно утверждению 3.1 выполнено неравенство

$$W_{B^T}^T (AX + XA^T - \gamma X) W_{B^T} < 0 \ ,$$

т.е. первое из неравенств (13.8). Аналогичным образом, из разрешимости относительно матрицы F (и при той же матрице X) неравенства (13.5), представимого в виде

$$(AX + XA - \gamma X) + XC^T F^T + FCX < 0 \ ,$$

следует, что выполняется неравенство

$$W_{CX}^T (AX + XA - \gamma X) W_{CX} < 0 \ ,$$

совпадающее со вторым неравенством в (13.8). Утверждение доказано.

С учетом утверждения 13.1 статическая обратная связь по выходу может быть найдена путем нахождения минимального γ, при котором для некоторых K, F и $X = X^T > 0$ выполнены неравенства (13.4), (13.5). Очевидно, что объект (13.1) стабилизируем обратной связью вида (13.2) тогда и только тогда, когда это минимальное значение γ_* отрицательно. В этом случае требуемая матрица L может быть найдена следующим образом. Возьмем $\gamma_* < \gamma < 0$ и матрицу $X > 0$, которая удовлетворяет неравенствам (13.4) и (13.5) при некоторых K и F, и решим неравенство (13.6) относительно L.

Таким образом, синтез сводится к решению следующей оптимизационной задачи: найти минимальное значение γ как функции переменных K, F и $X = X^T > 0$, удовлетворяющих неравенствам (13.4) и (13.5). Так как эта задача невыпуклая, то для ее решения применим метод покоординатного спуска последовательно по переменным K и F, применяя при этом аппарат линейных матричных неравенств.

Прежде, чем описать алгоритм, объясним, как минимизировать γ по одной переменной при фиксированной другой. Пусть F фиксирована. Заметим, что существование K, удовлетворяющей неравенству (13.4), эквивалентно разрешимости неравенства

$$W_{B^T}^T(AX + XA^T - \gamma X)W_{B^T} < 0 \ . \tag{13.9}$$

Это значит, что на этом этапе задача сводится к минимизации γ по переменным $X > 0$ и K, удовлетворяющим линейным матричным неравенствам (13.5) и (13.9), т.е. к задаче на обобщенное собственное значение, реализованную в LMI Toolbox (см. главу 2). После того, как найдены оптимальные X и γ, решается неравенство 13.4 и находится соответствующее K.

При фиксированном K оптимальная матрица F может быть найдена аналогичным образом, принимая во внимание то, что от неравенств (13.4) и (13.5) следует в этом случае перейти к двойственным неравенствам

$$Y(A + BK) + (A + BK)^TY < \gamma Y \tag{13.10}$$

и

$$Y(A + FC) + (A + FC)^TY < \gamma Y \ . \tag{13.11}$$

Очевидно, что эти пары неравенств переходят друг в друга при $Y = X^{-1}$.

Осталось еще обсудить, как выбрать начальное значение фиксируемой переменной по возможности ближе к глобальному оптимуму. В разделе 5.2 было показано, задача стабилизации по выходу с помощью регулятора порядка $k = 0$ сводится к **задаче B**: найти две матрицы

$X = X^T > 0$ и $Y = Y^T > 0$, удовлетворяющие линейным матричным неравенствам

$$\begin{gathered} W_{B^T}^T(A^T X + XA)W_{B^T} < 0 \ , \\ W_C^T(YA^T + AY)W_C < 0 \ , \\ \begin{pmatrix} X & I \\ I & Y \end{pmatrix} \geq 0 \end{gathered} \tag{13.12}$$

и условию

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} X & I \\ I & Y \end{pmatrix} = n_x \ ,$$

где n_x – порядок объекта. В силу последнего условия эта задача невыпуклая. Пара (X, Y), близкая к оптимальной, может быть найдена, например, путем минимизации линейной функции $\operatorname{tr}(X+Y)$ при линейных матричных ограничениях (13.12). После этого в качестве начальной матрицы K_0 выбирается решение неравенства (13.4) при найденной X.

Итак, алгоритм, который получил название двойственной итерации, состоит из следующих шагов.

1. Выбираем K_0 и положим $j = 0$.

2. Фиксируем $K = K_{j-1}$, находим минимальное $\gamma = \hat{\gamma}_j$, при котором

$$\begin{gathered} Y(A + BK) + (A + BK)^T Y < \gamma Y \\ W_C^T(YA + A^T Y - \gamma Y)W_C < 0 \ , \end{gathered}$$

   и выбираем F_j – решение неравенства

$$Y(A + FC) + (A + FC)^T Y < \gamma Y \ .$$

3. Фиксируем $F = F_j$, находим минимальное $\gamma = \gamma_j$, при котором

$$\begin{gathered} W_{B^T}^T(AX + XA^T - \gamma X)W_{B^T} < 0 \\ (A + FC)X + X(A + FC)^T < \gamma X \ , \end{gathered}$$

   и выбираем K_j – решение неравенства

$$(A + BK)X + X(A + BK)^T < \gamma X \ .$$

4. Если $|(\gamma_j - \gamma_{j-1})/\gamma_j| < \varepsilon$, то алгоритм останавливается. В противном случае осуществляется переход к шагу 2 при $j = j + 1$.

Глава 14

Алгоритм минимизации следа матрицы

Приведем один из возможных алгоритмов [25] решения **задачи B**, которая была сформулирована выше при синтезе стабилизирующих регуляторов по выходу пониженного порядка. Здесь мы будем рассматривать задачу стабилизации по выходу объекта

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \ , \end{aligned} \tag{14.1}$$

в котором $x \in R^{n_x}$, пара (A, B) - стабилизируема и пара (A, C) - детектируема, с помощью регулятора по выходу нулевого порядка, т.е. статического регулятора вида

$$u = Ly \ . \tag{14.2}$$

В разделе 5.2 было показано, что эта задача может быть сведена к **задаче B**: найти две $(n_x \times n_x)$-матрицы $X = X^T > 0$, $Y = Y^T > 0$, удовлетворяющие линейным матричным неравенствам

$$\begin{aligned} &W_C^T(A^T X + XA)W_C < 0 \ , \\ &W_{B^T}^T(YA^T + AY)W_{B^T} < 0 \ , \end{aligned} \tag{14.3}$$

$$\begin{pmatrix} X & I \\ I & Y \end{pmatrix} \geq 0 \ , \tag{14.4}$$

а также ранговому условию

$$\operatorname{rank}(I - XY) \leq k \ , \tag{14.5}$$

которое в данном случае $(k = 0)$ сводится к условию $Y = X^{-1}$, или установить, что таких матриц не существует.

Основная идея решения этой задачи состоит в рассмотрении следующей оптимизационной задачи: минимизировать след матрицы XY при ограничениях, задаваемых неравенствами (14.3) и (14.4). Ясно, что требуемый регулятор существует тогда и только тогда, когда минимум этой функции равен n_x. Если линеаризовать функцию

$$\mathrm{tr}\,(XY) = \mathrm{const}\; + \mathrm{tr}\,(Y_0 X + X_0 Y)$$

в точке (X_0, Y_0), то алгоритм решения поставленной задачи можно представить следующим образом.

1. Находим точку (X_0, Y_0) такую, что при $X = X_0$, $Y = Y_0$ линейные матричные неравенства (14.3) и (14.4) разрешимы. Положим $j = 0$. Если такой точки нет, задача стабилизации не разрешима.

2. Фиксируем $V_j = Y_j$, $W_j = X_j$ и и находим X_{j+1}, Y_{j+1}, которые решают задачу

$$\min_{X,Y} \mathrm{tr}\,(V_j X + W_j Y) = \mathrm{tr}\,(Y_j X_{j+1} + X_j Y_{j+1}) = t_j$$

   при ограничениях, определяемых линейными матричными неравенствами (14.3) и (14.4).

3. Если $|t_j - t_{j-1}| < \varepsilon$, то алгоритм останавливается. В противном случае осуществляется переход к шагу 2 при $j = j + 1$.

Утверждение 14.1 *Последовательность t_j, генерируемая алгоритмом, является невозрастающей и ограничена снизу числом $2n_x$. Предел этой последовательности равен $t_{min} \geq 2n_x$, где равенство достигается тогда и только тогда, когда в предельной точке $XY = I$.*

Доказательство. По определению последовательности t_j имеем

$$t_j \leq \mathrm{tr}\,(Y_j X_{j-1} + X_j Y_{j-1}) = \mathrm{tr}\,(Y_{j-1} X_j + X_{j-1} Y_j) = t_{j-1}\ .$$

Заметим, что синтез стабилизирующего регулятора по выходу k-го порядка в случае $k > 0$ сводится к синтезу статического регулятора по выходу для вспомогательного объекта, определяемого матрицами

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_{k\times k} \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ I_{k\times k} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & I_{k\times k} \\ C & 0 \end{pmatrix}.$$

Действительно, в этом случае матрица замкнутой системы

$$\begin{pmatrix} A + BL_{22}C & BL_{21} \\ L_{12}C & L_{11} \end{pmatrix}$$

при

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix}$$

будет совпадать, как показывает формула (5.13), с матрицей замкнутой системы, состоящей из исходного объекта (5.11) и регулятора k-го порядка (5.12).

Глава 15

Алгоритм поиска взаимнообратных матриц

Рассматриваемый ниже алгоритм [6] предназначен для решения следующей задачи.

Задача А: найти две взаимнообратные матрицы X и Y ($XY = I$), удовлетворяющие системе линейных матричных неравенств $L_i(X, Y) < 0$, $i = 1, 2$, относительно X и Y.

Для ее решения рассмотрим также другую задачу.

Задача А1: найти

$$\lambda_{min} = \min\{\lambda : X - Y^{-1} < \lambda I,\ X > 0,\ Y > 0,\ L_i(X, Y) < 0,\ i = 1, 2, 3\}\ , \tag{15.1}$$

где

$$L_3(X, Y) = \begin{pmatrix} -X & I \\ I & -Y \end{pmatrix}\ .$$

В случае, когда в задаче $A1$ $\lambda_{min} = 0$, соответствующие матрицы X и Y являются также решением задачи A.

Для решения задачи $A1$ требуется минимизировать линейную функцию при ограничениях, одно из которых

$$X - Y^{-1} < \lambda I \tag{15.2}$$

не является выпуклым и, следовательно, не может быть представлено в виде линейного матричного неравенства. Это обстоятельство не позволяет решать задачу $A1$ методами выпуклой оптимизации. Далее опишем алгоритм решения задачи $A1$, который может быть реализован в пакете MATLAB.

Для описания алгоритма рассмотрим еще одну задачу.

Задача A2: найти

$$\lambda_{min} = \min\{\lambda : \Gamma(X, Y, G_1, G_2) < \lambda I,\ X > 0,\\ Y > 0\ , \Phi_1(X) < 0\ , \Phi_2(Y) < 0\ , \Phi_3(X, Y) < 0\}, \tag{15.3}$$

где

$$\Gamma(X, Y, G_1, G_2) = (I\, G_1) \begin{pmatrix} X & I \\ I & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ G_1 \end{pmatrix} +\\ (G_2\, I) \begin{pmatrix} X & I \\ I & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_2 \\ I \end{pmatrix}\ ,$$

$G_i = G_i^T$, $i = 1, 2$ – некоторые заданные матрицы.

Отметим, что в задаче $A2$ вместо неравенства (15.2) присутствует неравенство, линейное относительно матриц X и Y. Кроме того, так как при $\Phi_3(X, Y) < 0$ мы имеем

$$\Gamma(X, Y, G_1, G_2) = (G_1 + Y^{-1})Y(G_1 + Y^{-1}) + (G_2 + X^{-1})X(G_2 + X^{-1}) +\\ (X - Y^{-1}) + (Y - X^{-1}) \geq 0\ , \tag{15.4}$$

то при $G_1 = -Y^{-1}$ и $G_2 = -X^{-1}$, когда $\lambda_{min} = 0$, соответствующие X и Y являются решением задачи A.

Алгоритм состоит из следующих шагов:

1. $j = 0$.
2. Фиксируются матрицы $G_1 = G_1^{(j)}$ и $G_2 = G_2^{(j)}$.
3. Решается задача $A2$ с помощью команды mincx пакета MATLAB и находятся λ_{j+1}, X_j, Y_j.
4. Задаются $G_1^{(j+1)} = -Y_j^{-1}$, $G_2^{(j+1)} = -X_j^{-1}$ и осуществляется переход к шагу 2 при $j = j + 1$.

Утверждение 15.1 *Для любых начальных $G_1^{(0)}$ и $G_2^{(0)}$ последовательность λ_j, генерируемая алгоритмом, является неубывающей и*

$$\lim_{j\to\infty} \lambda_j = \lambda_* \geq 0\ , \quad \lim_{j\to\infty} X_j = X_*\ , \quad \lim_{j\to\infty} Y_j = Y_*\ .$$

Доказательство. Оценим, как будет меняться спектральный радиус матрицы $\Gamma(X, Y, G_1, G_2)$ по траектории алгоритма. Представим

$$\Delta\rho = \rho(\Gamma(X_{j+1}, Y_{j+1}, G_1^{(j+1)}, G_2^{(j+1)})) - \rho(\Gamma(X_j, Y_j, G_1^{(j)}, G_2^{(j)}))$$

в виде

$$\Delta\rho = \Delta\rho_1 + \Delta\rho_2 =$$
$$[\rho(\Gamma(X_{j+1}, Y_{j+1}, G_1^{(j+1)}, G_2^{(j+1)})) - \rho(\Gamma(X_j, Y_j, G_1^{(j+1)}, G_2^{(j+1)}))] +$$
$$+[\rho(\Gamma(X_j, Y_j, G_1^{(j+1)}, G_2^{(j+1)})) - \rho(\Gamma(X_j, Y_j, G_1^{(j)}, G_2^{(j)}))] \ .$$

Выражение в первых квадратных скобках неположительно в силу алгоритма, поскольку на $(j+1)$-й итерации λ принимает минимальное значение при $X = X_{j+1}$, $Y = Y_{j+1}$. Рассмотрим разность двух матриц, фигурируюших во вторых квадратных скобках. Из (15.4) следует, что

$$\Gamma(X_j, Y_j, G_1^{(j+1)}, G_2^{(j+1)}) - \Gamma(X_j, Y_j, G_1^{(j)}, G_2^{(j)}) =$$
$$= (G_1^{(j+1)} + Y_j^{-1})Y_j(G_1^{(j+1)} + Y_j^{-1}) + (G_2^{(j+1)} + X_j^{-1})X_j(G_2^{(j+1)} + X_j^{-1}) -$$
$$-(G_1^{(j)} + Y_j^{-1})Y_j(G_1^{(j)} + Y_j^{-1}) - (G_2^{(j)} + X_j^{-1})X_j(G_2^{(j)} + X_j^{-1}) \ .$$

Учитывая, что $G_1^{(j+1)} = -Y_j^{-1}$ и $G_2^{(j+1)} = -X_j^{-1}$, получим

$$\Gamma(X_j, Y_j, G_1^{(j+1)}, G_2^{(j+1)}) - \Gamma(X_j, Y_j, G_1^{(j)}, G_2^{(j)}) =$$
$$-(Y_j^{-1} - Y_{j-1}^{-1})Y_j(Y_j^{-1} - Y_{j-1}^{-1}) - (X_j^{-1} - X_{j-1}^{-1})X_j(X_j^{-1} - X_{j-1}^{-1}) \le 0 \ .$$

Так как из $A - B \le 0$ следует, что $\rho(A) \le \rho(B)$, то в результате получим $\Delta\rho \le 0$. В этом случае последовательность ρ_j ограничена снизу и не возрастает, откуда с учетом непрерывности функции спектрального радиуса следует существование указанных в теореме пределов.

Из этого утверждения следует, что возможны две ситуации. Если $\lambda_* = 0$, то $X_*Y_* = I$ и X_* и Y_* являются решениями задачи A. Если $\lambda_* > 0$, то нельзя сделать определенного вывода о разрешимости задачи A. В последнем случае целесообразно повторить процесс при других начальных условиях $G_1^{(0)}$ и $G_2^{(0)}$, как это обычно применяется в задачах глобальной оптимизации.

Отметим, что при синтезе робастных H_∞-регуляторов заданного порядка по выходу для линейного непрерывного и дискретного объектов требуется найти пару взаимнообратных блочно-диагональных матриц вида $\hat{X} = \mathrm{diag}\,(X, S)$ и $\hat{Y} = \mathrm{diag}\,(Y, \sum)$. Для этих случаев матрица $G_1^{(0)}$ и $G_2^{(0)}$ в алгоритме должны иметь такую же структуру.

При практической реализации алгоритма целесообразно применить следующее правило остановки: при выполнении одного из двух неравенств $\lambda_j < \varepsilon$ или $|\lambda_{j+1} - \lambda_j| < \varepsilon$ работа алгоритма прекращается (из теоремы следует, что алгоритм останавливается через конечное число итераций). Эффективность предложенного алгоритма будет продемонстрирована в следующем разделе.

В качестве примера рассмотрим синтез динамического регулятора первого порядка для стабилизации перевернутого маятника. Объект, описываемый уравнением

$$\ddot{\varphi} - \varphi = u$$

с измеряемой переменной $y = \varphi$, приводится к виду (5.11), где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad C = (1 \quad 0) .$$

Регулятор выбирается в виде (5.12), где $x_r \in R^1$, степень устойчивости $\beta = 0,01$. В данном случае неравенства $L_i(X, Y) < 0, i = 1, 2$, определяются согласно (5.22). Проверка эффективности работы алгоритма осуществлялась следующим образом. Элементы начальных симметрических матриц $G_1^{(0)} = G_2^{(0)}$ выбирались как независимые случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $[-1, 1]$. Алгоритм стартовал 1000 раз. В 996 случаях завершение работы алгоритма было успешным, т.е. минимальное значение λ оказалось равным нулю с принятой точностью $\varepsilon = 10^{-5}$. В подавляющем числе случаев для завершения работы алгоритма потребовалось не более $4 - 6$ итераций.

Часть V

Активное гашение колебаний высотных сооружений

Сейсмические возмущения вызывают колебания сооружения, приводящие к потере его устойчивости и, в конечном счете, к его разрушению. В этой связи возникает задача гашения колебаний сооружения посредством дополнительно прикладываемых сил, рассчитываемых на основе текущих измерений, т.е. задача управления сооружением по принципу обратной связи. На сегодняшний день наиболее активно применяются два принципиально различных способа организации такого управления: динамическое гашение колебаний с использованием дополнительных материальных тел и виброзащита, предполагающая изоляцию сооружения от подвижного основания. Один из возможных вариантов технической реализации динамического гашения колебаний заключается в создании специального этажа с размещением на нем некоторой достаточно малой массы (по сравнению с общей массой сооружения), перемещаемой в соответствие с законом управления в форме обратной связи по текущим показаниям датчиков, что позволяет оказывать управляющее воздействие на данный этаж. Основная сложность расчета подобных систем сейсмозащиты состоит в том, что управление осуществляется в условиях неопределенности относительно самой системы и сейсмических воздействий.

Глава 16

Математическая модель высотного сооружения

Будем рассматривать синтез регуляторов для активного гашения колебаний сооружения в условиях неполной информации о действующих возмущениях и параметрах конструкции. В качестве механической системы, моделирующей колебания высотного сооружения, будем рассматривать одномерную цепочку упругосвязанных материальных точек (этажей или секций сооружения), одна из которых (основание) совершает поступательное движение, порождаемое сейсмическим воздействием [32, 30]. Предполагается, что масса основания намного превышает массы остальных материальных точек и поэтому влиянием движения секций сооружения на движение основания можно пренебречь. В дальнейшем будем считать, что массы всех материальных точек одинаковы, а упругие и демпфирующие связи моделируются линейными элементами с одинаковыми коэффициентами упругости и демпфирования.

Уравнения движения рассматриваемой системы имеют вид

$$
\begin{aligned}
&m\ddot{\xi}_1 = -2b\dot{\xi}_1 - 2c\xi_1 + b\dot{\xi}_2 + c\xi_2 - m\ddot{\xi}_0(t) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&m\ddot{\xi}_s = -2b\dot{\xi}_s - 2c\xi_s + b\dot{\xi}_{s-1} + c\xi_{s-1} + b\dot{\xi}_{s+1} + c\xi_{s+1} + U - m\ddot{\xi}_0(t) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&m\ddot{\xi}_n = -b\dot{\xi}_n - c\xi_n + b\dot{\xi}_{n-1} + c\xi_{n-1} - m\ddot{\xi}_0(t)\ ,
\end{aligned}
\tag{16.1}
$$

где $\xi = \mathrm{col}\,(\xi_1, \dots, \xi_n)$, ξ_i - координата i-й материальной точки относительно основания, U - управляющая сила, приложенная к s-й материальной точке, ξ_0 - координата основания относительно инерциальной системы отсчета; m - масса материальной точки, b и c - коэффициенты демпфирования и упругости межсекционных связей.

Введем обозначения

$$\beta = \frac{b}{m}\ , \quad \omega^2 = \frac{c}{m}\ , \quad u = m^{-1}U\ , \quad v_1 = -\ddot{\xi}_0\ ,$$

тогда уравнения (16.1) примут вид

$$\ddot{\xi} = -\beta K\dot{\xi} - \omega^2 K\xi + qu + pv_1\ , \tag{16.2}$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)^T$,

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 1 \end{pmatrix}\ , \quad q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 1 \\ . \\ 0 \end{pmatrix}\ , \quad p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix}\ .$$

Здесь лишь s-я компонента вектора q, где s – номер этажа, к которому приложено управление, равна 1, а остальные компоненты этого вектора равны 0. Теперь запишем систему (16.2) в каноническом виде управляемой линейной системы

$$\dot{x} = Ax + Bv_1 + B_2 u\ , \tag{16.3}$$

где $x = \mathrm{col}(\xi, \dot{\xi})$ - состояние, а блочные матрицы A, B, B_2 имеют следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\omega^2 K & -\beta K \end{pmatrix}\ , \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}\ , \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}\ . \tag{16.4}$$

Предполагается, что система (16.3) имеет нулевые начальные условия.

Допустим, что имеется возможность наблюдать следующие величины

$$\begin{aligned} &y_1 = x_1 + \alpha v_{21} \\ &y_2 = x_2 - x_1 + \alpha v_{22} \\ &\text{............................} \\ &y_n = x_n - x_{n-1} + \alpha v_{2n}\ , \end{aligned} \tag{16.5}$$

т.е. деформации межсекционных соединений сооружения, измеряемые с некоторыми ошибками $\alpha v_2 = \alpha\,\mathrm{col}(v_{21}, v_{22}, \ldots, v_{2n})$, где α - заданный размерный коэффициент, характеризующий соотношение между сейсмическим возмущением и возмущениями в измерениях. Введем вектор $y = \mathrm{col}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и перепишем (16.5) в виде

$$y = C_2 x + \alpha v_2\ , \tag{16.6}$$

где

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 1 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} .$$

Таким образом, уравнения (16.3) и (16.6), определяющие динамику сооружения и доступные измерения, составляют математическую модель управляемого сооружения.

Глава 17

Постановка задачи гашения колебаний

Для системы (16.3), (16.6) рассмотрим следующую задачу гашения колебаний с помощью управления [2, 3, 18]. Управление будет осуществляться линейным динамическим регулятором, синтезируемым по принципу обратной связи по измеряемому выходу y в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= A_r x_r + B_r y \ , \\ u &= C_r x_r + D_r y \ , \quad x_r(0) = 0 \ , \end{aligned} \tag{17.1}$$

где x_r – состояние динамического регулятора. Объединим входящие в уравнения (16.3), (16.6) вектор-функции $v_1(t)$ и $v_2(t)$ в вектор-функцию внешнего возмущения $v(t) = \mathrm{col}(v_1(t), v_2(t))$, которую будем считать интегрируемой с квадратом на $[0, \infty)$ функцией. На траекториях системы (16.3) определим функционал

$$J(u, v) = \int\limits_0^\infty (x^T Q x + \rho^2 u^2) d\, t \ , \tag{17.2}$$

где Q - симметрическая неотрицательно определенная матрица, ρ - заданный параметр. Этот функционал характеризует качество колебательных процессов в механической системе. При выборе матрицы Q в блочном виде

$$Q = \begin{pmatrix} \omega^2 K & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \tag{17.3}$$

квадратичная форма в подынтегральном выражении (17.2) определяет с точностью до множителя полную механическую энергию системы при ее движении относительно основания и затраты на управление.

Задача гашения колебаний состоит в построении линейного динамического регулятора вида (17.1), обеспечивающего гашение внешних возмущений в заданном отношении γ, т.е. выполнение неравенства

$$\frac{\int\limits_0^\infty (x^T Q x + \rho^2 u^2) d\,t}{\int\limits_0^\infty |v|^2 d\,t} < \gamma^2 \tag{17.4}$$

для всех ненулевых допустимых возмущений, а также в оценке минимально возможного уровня гашений колебаний, т.е. минимального значения γ, при котором имеет место (17.4). Если ввести управляемый выход системы как

$$z = \begin{pmatrix} \sqrt{Q} \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \end{pmatrix} u \ , \tag{17.5}$$

то последнее неравенство принимает вид

$$\frac{\int\limits_0^\infty |z|^2 d\,t}{\int\limits_0^\infty |v|^2 d\,t} < \gamma^2 \ .$$

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к задаче синтеза H_∞-управления по измеряемому выходу, которое обеспечивает выполнение неравенства

$$\frac{\|z\|}{\|v\|} < \gamma \ , \quad \forall\, v \not\equiv 0 \tag{17.6}$$

для системы

$$\begin{array}{l} \dot{x} = Ax + B_1 v + B_2 u \ , \\ z = C_1 x + D_{12} u \\ y = C_2 x + D_{21} v \ , \end{array} \tag{17.7}$$

где $\|z\|$ обозначает L_2-норму, матрицы A, B_2, C_2 определены выше,

$$B_1 = (B \quad 0) \ , \quad C_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{Q} \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad D_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \end{pmatrix} \ , \quad D_{21} = (0 \quad \alpha I) \ .$$

Кроме того, будем рассматривать задачу робастного H_∞-управления сооружением, когда значения параметров ω^2 и β точно неизвестны. Предполагая, что ω^2 и β могут принимать любые значения в заданных диапазонах, представим их в следующем виде

$$\omega^2 = \omega_*^2 [1 + f_1 \Omega_1(t)] \ , \quad \beta = \beta_* [1 + f_2 \Omega_2(t)] \ ,$$

где β_* и ω_*^2 - номинальные значения, f_1 и f_2 - заданные параметры, а неизвестные функции $\Omega_1(t)$ и $\Omega_2(t)$ удовлетворяют неравенствам

$$|\Omega_1(t)| \le 1 \ , \quad |\Omega_2(t)| \le 1 \ . \tag{17.8}$$

В этом случае матрица A в уравнениях (17.7) представима в виде

$$A = A_* + F\Omega(t)E \ , \tag{17.9}$$

где $\Omega(t) = \mathrm{diag}\,(\Omega_1(t)I_{n\times n}, \Omega_2(t)I_{n\times n})$,

$$A_* = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\omega_*^2 K & -\beta_* K \end{pmatrix} \ , \quad F = (F_1 \quad F_2) \ , \qquad E = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \ ,$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ f_1 I \end{pmatrix}, \ F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ f_2 I \end{pmatrix}, \ E_1 = (-\omega_*^2 K \quad 0), \ E_2 = (0 \quad -\beta_* K).$$

Тогда уравнения рассматриваемого объекта можно записать в стандартном виде

$$\begin{aligned} &\dot{x} = A_* x + B_\Delta v_\Delta + B_1 v + B_2 u \ , \\ &z_\Delta = C_\Delta x + D_{\Delta\Delta} v_\Delta + D_{\Delta 1} v + D_{\Delta 2} u \ , \\ &z = C_1 x + D_{1\Delta} v_\Delta + D_{11} v + D_{12} u \ , \\ &y = C_2 x + D_{2\Delta} v_\Delta + D_{21} v \ , \\ &v_\Delta = \Delta(t) z_\Delta \ , \end{aligned} \tag{17.10}$$

где $B_\Delta = F$, $C_\Delta = E$, $D_{\Delta\Delta} = 0$, $D_{\Delta 1} = 0$, $D_{\Delta 2} = 0$, $D_{1\Delta} = 0$, $D_{11} = 0$, $D_{2\Delta} = 0$, а остальные матрицы определены выше. Неизвестный изменяемый во времени матричный параметр $\Delta(t)$ имеет вид

$$\Delta(t) = \mathrm{diag}\,(\Omega_1(t)I_{n\times n}, \Omega_2(t)I_{n\times n}) \tag{17.11}$$

и удовлетворяет неравенству

$$\Delta^T(t)\Delta(t) \le I \ , \quad \forall\, t \ge 0 \ . \tag{17.12}$$

Задача робастного H_∞-управления заключается в построении линейного динамического регулятора по выходу, который обеспечивает гашение колебаний в заданном отношении γ для любого сооружения с параметрами ω^2 и β из заданного диапазона.

Глава 18

Численные результаты

Вычислительные эксперименты проводились для десятиэтажного здания $n = 10$, т.е. объект имеет порядок $n_x = 20$. Номинальные значения параметров были выбраны следующие: $\beta_* = 1\,\text{с}^{-1}$, $\omega_*^2 = 100\,\text{с}^{-2}$, $\rho = 1\,\text{с}$.

Вначале был найден уровень гашения возмущений в этом объекте в отсутствие управления: он оказался равным 184.4. Затем находился минимально возможный уровень гашения колебаний сооружения, который может быть достигнут с помощью регулятора по выходу полного порядка $k = 20$ в зависимости от номера этажа, к которому приложено управление, для двух значений параметра $\alpha = 1\,\text{с}^2$ и $\alpha = 0.01\,\text{с}^2$. Результаты приведены в таблице 1.

Таблица 1

s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\gamma\,(\alpha = 1)$	43.9	25.7	20.5	18.3	17.1	16.5	16.1	15.9	15.8	15.7
$\gamma\,(\alpha = 0.01)$	43.7	22.6	15.4	11.9	9.8	8.6	7.7	7.2	6.9	6.8

Как следует из таблицы 1, минимальное значение уровня гашения колебаний высотного сооружения достигается при приложении управляющей силы на верхние этажи, тогда как приложение управляющей силы к нижним этажам сооружения менее эффективно.

В следующей таблице приведены минимальные значения уровня гашения колебаний высотного сооружения при $\alpha = 0.01\,\text{с}^2$ в зависимости от точки приложения управляющей силы при регуляторе по выходу второго порядка.

Таблица 2

s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
γ	43.7	22.7	15.5	11.9	9.9	8.6	7.8	7.3	7	6.9

Сравнение соответствующих строк этих таблиц показывает, что, если принять во внимание вычислительные погрешности, качество гашения колебаний, достигаемое с помощью регуляторов полного (20-го) и 2-го порядков, почти одно и тоже.

Часть VI

Приложения

Приложение A

Блочные матрицы

Лемма A.1 Формулы Фробениуса для обращения блочной матрицы. *Пусть неособенная квадратная матрица разбита на блоки*

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} ,$$

где X_{11} *–* $(n \times n)$*-матрица, а* X_{22} *–* $(m \times m)$*-матрица.*

Если $\det X_{11} \neq 0$*, то*

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} X_{11}^{-1} + X_{11}^{-1} X_{12} H^{-1} X_{21} X_{11}^{-1} & -X_{11}^{-1} X_{12} H^{-1} \\ -H^{-1} X_{21} X_{11}^{-1} & H^{-1} \end{pmatrix} ,$$

где

$$H = X_{22} - X_{21} X_{11}^{-1} X_{12} \ .$$

Если $\det X_{22} \neq 0$*, то*

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} K^{-1} & -K^{-1} X_{12} X_{22}^{-1} \\ -X_{22}^{-1} X_{21} K^{-1} & X_{22}^{-1} + X_{22}^{-1} X_{21} K^{-1} X_{12} X_{22}^{-1} \end{pmatrix} ,$$

где

$$K = X_{11} - X_{12} X_{22}^{-1} X_{21} \ .$$

Если $\det X_{11} \neq 0$ *и* $\det X_{22} \neq 0$*, то*

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} K^{-1} & -X_{11}^{-1} X_{12} H^{-1} \\ -H^{-1} X_{21} X_{11}^{-1} & H^{-1} \end{pmatrix} ,$$

где K *и* H *определены выше.*

Лемма A.2 *Пусть*

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} ,$$

где X_{11} *– $(n \times n)$-матрица, а* X_{22} *– $(m \times m)$-матрица.*

Если X_{11} *невырождена, то* X *невырождена тогда и только тогда, когда матрица* $H = X_{22} - X_{21}X_{11}^{-1}X_{12}$ *невырождена. При этом*

$$det\, X = det\, X_{11}\, det\, H \ .$$

Если X_{22} *невырождена, то* X *невырождена тогда и только тогда, когда матрица* $K = X_{11} - X_{12}X_{22}^{-1}X_{21}$ *невырождена. При этом*

$$det\, X = det\, X_{22}\, det\, K \ .$$

Если $X_{11} = X_{11}^T$, $X_{21} = X_{12}^T$, $X_{22} = X_{22}^T$, *то следующие три утверждения эквивалентны:*

$$X > 0 \ ;$$

$$X_{11} > 0 \ , \quad X_{22} - X_{12}^T X_{11}^{-1} X_{12} > 0 \ ;$$

$$X_{22} > 0 \ , \quad X_{11} - X_{12} X_{22}^{-1} X_{12}^T > 0 \ .$$

Лемма A.3 *Пусть*

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{pmatrix} ,$$

где X_{11} *и* X_{22} *– квадратные матрицы.*

Если $X_{11} > 0$, *то* $X \geq 0$ *тогда и только тогда, когда*

$$X_{22} - X_{12}^T X_{11}^{-1} X_{12} \geq 0 \ .$$

Если $X_{22} > 0$, *то* $X \geq 0$ *тогда и только тогда, когда*

$$X_{11} - X_{12} X_{22}^{-1} X_{12}^T \geq 0 \ .$$

Лемма A.4 *Пусть*

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{12}^T & X_{22} & X_{23} \\ X_{13}^T & X_{23}^T & X_{33} \end{pmatrix} .$$

Если $X_{22} > 0$, *то* $X > 0$ *тогда и только тогда, когда*

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{13} \\ X_{13}^T & X_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_{12} \\ X_{23}^T \end{pmatrix} X_{22}^{-1} \begin{pmatrix} X_{12}^T & X_{23} \end{pmatrix} > 0 \ . \tag{A.1}$$

Доказательство. В соответствии с блочной структурой матрицы X возьмем $x = \mathrm{col}\,(x_1, x_2, x_3)$ и сделаем следующие преобразования:

$$x^T X x = (x_2 + X_{22}^{-1} X_{12}^T x_1 + X_{22}^{-1} X_{23} x_3)^T X_{22} (x_2 + X_{22}^{-1} X_{12}^T x_1 + X_{22}^{-1} X_{23} x_3) +$$
$$+ x_1^T (X_{11} - X_{12} X_{22}^{-1} X_{12}^T) x_1 + x_3^T (X_{33} - X_{23}^T X_{22}^{-1} X_{23}) x_3 +$$
$$+ 2 x_1^T (X_{13} - X_{12} X_{22}^{-1} X_{23}) x_3 \ .$$

Так как $X_{22} > 0$, то отсюда следует, что $X > 0$ тогда и только тогда, когда выполнено матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} X_{11} - X_{12} X_{22}^{-1} X_{12}^T & X_{13} - X_{12} X_{22}^{-1} X_{23} \\ X_{13}^T - X_{23}^T X_{22}^{-1} X_{12}^T & X_{33} - X_{23}^T X_{22}^{-1} X_{23} \end{pmatrix} > 0 \ ,$$

эквивалентное (A.1).

Лемма A.5 *Пусть матрицы A порядка $n \times n$ и R порядка $r \times r$ невырождены, X и Y имеют порядки $n \times r$ и $r \times n$, соответственно, и матрица $A + XRY$ невырождена. Тогда*

$$(A + XRY)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} X (R^{-1} + Y A^{-1} X)^{-1} Y A^{-1} \ .$$

Лемма A.6 *Если A – комплексная матрица $(m \times n)$ ранга r, то она представима в виде (singular-value decomposition)*

$$A = (U_1 \quad U_2) \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{pmatrix} = U_1 \Sigma V_1^* \ , \qquad \text{(A.2)}$$

где $*$ обозначает транспонирование и переход к комплексно сопряженным элементам,

$$\Sigma = diag\,(\sigma_1, \cdots, \sigma_r) \ , \quad \sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0 \ ,$$

$\sigma_i = \lambda^{1/2}(AA^*)$ – сингулярные числа матрицы A, $U = (U_1 \quad U_2)$ и $V = (V_1 \quad V_2)$ – унитарные матрицы, т.е. $U^* U = I$ и $V^* V = I$, причем

$$\mathcal{R}(A) = span\,(U_1) \ , \quad \mathcal{N}(A^*) = span\,(U_2) \ ,$$
$$\mathcal{R}(A^*) = span\,(V_1) \ , \quad \mathcal{N}(A) = span\,(V_2) \ ,$$

где $\mathcal{R}(\cdot)$ и $\mathcal{N}(\cdot)$ обозначают образ и ядро соответствующей матрицы, а $span\,(\cdot)$ – линейную оболочку столбцов соответствующей матрицы.

Лемма A.7 *Пусть* $X_{11} = X_{11}^T > 0$ *и* $Y_{11} = Y_{11}^T > 0$ *– заданные* $(n \times n)$*-матрицы. Для существования матриц* X_{12} *и* $X_{22} = X_{22}^T$ *размеров* $(n \times k)$ *и* $(k \times k)$*, соответственно, таких, что*

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{pmatrix} > 0 \ , \quad \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12}^T & Y_{22} \end{pmatrix} \tag{A.3}$$

для некоторых Y_{12}*,* Y_{22}*, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\begin{pmatrix} X_{11} & I \\ I & Y_{11} \end{pmatrix} \geq 0 \ , \quad rank\,(I - X_{11}Y_{11}) \leq k \ . \tag{A.4}$$

Доказательство. Необходимость. По условию имеем

$$\begin{aligned} X_{11}Y_{11} + X_{12}Y_{12}^T &= I \ , \\ X_{11}Y_{12} + X_{12}Y_{22} &= 0 \ , \\ X_{12}^TY_{11} + X_{22}Y_{12}^T &= 0 \ , \\ X_{12}^TY_{12} + X_{22}Y_{22}^T &= I \ . \end{aligned} \tag{A.5}$$

Из первого уравнения получим

$$I - X_{11}Y_{11} = X_{12}Y_{12}^T \ .$$

Так как ранг каждой из матриц в правой части этого равенства не превышает k и, следовательно, ранг произведения этих матриц также не превышает k, то отсюда следует условие

$$\mathrm{rank}\,(I - X_{11}Y_{11}) \leq k \ .$$

Далее, выразим из первого уравнения

$$Y_{11} = X_{11}^{-1}(I - X_{12}Y_{12}^T)$$

и подставим в третье

$$X_{12}^TX_{11}^{-1} + (X_{22} - X_{12}^TX_{11}^{-1}X_{12})Y_{12}^T = 0 \ .$$

Умножим обе части этого уравнения слева на Y_{12}

$$Y_{12}X_{12}^TX_{11}^{-1} + Y_{12}(X_{22} - X_{12}^TX_{11}^{-1}X_{12})Y_{12}^T = 0 \ .$$

Из первого уравнения (A.5) следует, что

$$Y_{12}X_{12}^T = I - Y_{11}X_{11} \ .$$

Подставляя это выражение в предыдущее равенство, получим

$$(I - Y_{11}X_{11})X_{11}^{-1} + Y_{12}(X_{22} - X_{12}^T X_{11}^{-1} X_{12})Y_{12}^T = 0 \ .$$

Откуда следует

$$X_{11}^{-1} - Y_{11} = -Y_{12}(X_{22} - X_{12}^T X_{11}^{-1} X_{12})Y_{12}^T \ .$$

Так как $X > 0$, то из леммы А.2 получим

$$X_{22} - X_{12}^T X_{11}^{-1} X_{12} > 0 \ .$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$X_{11}^{-1} - Y_{11} \leq 0 \ ,$$

которое в силу леммы А.3 выражается в виде линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} X_{11} & I \\ I & Y_{11} \end{pmatrix} \geq 0 \ .$$

Достаточность. Пусть для данных положительно определенных и симметрических матриц X_{11} и Y_{11} выполнены условия (А.4) и

$$\mathrm{rank}\,(I - X_{11}Y_{11}) = r \leq k \ .$$

Покажем, как расширить матрицу X_{11} так, чтобы условия (А.3) имели место для некоторых Y_{12} и Y_{22}. Согласно лемме А.1 должно выполняться равенство

$$Y_{11}^{-1} = X_{11} - X_{12}X_{22}^{-1}X_{12}^T \ ,$$

т.е.

$$X_{11} - Y_{11}^{-1} = X_{12}X_{22}^{-1}X_{12}^T \ . \tag{A.6}$$

Матрицы X_{12} размера $n \times k$ и $X_{22} = X_{22}^T > 0$ размера $k \times k$, удовлетворяющие этому равенству, построим следующим образом.

Так как

$$X_{11} - Y_{11}^{-1} = -(I - X_{11}Y_{11})Y_{11}^{-1}$$

и ранг матрицы в правой части этого равенства в силу второго условия (А.4) равен r, то

$$\mathrm{rank}\,(X_{11} - Y_{11}^{-1}) = r \ .$$

Применяя лемму А.6 и учитывая, что матрица $X_{11} - Y_{11}^{-1}$ симметрическая и неотрицательно определенная, получим

$$X_{11} - Y_{11}^{-1} = (U_1 U_2) \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{pmatrix} \ ,$$

где $U_1 \in \mathcal{R}^{n\times r}$, $U_2 \in \mathcal{R}^{n\times(n-r)}$, $\Sigma = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \cdots, \lambda_r) > 0$. Представим правую часть этого равенства эквивалентно в виде

$$S\begin{pmatrix} \Sigma & 0_{r\times(k-r)} \\ 0_{(k-r)\times r} & I_{k-r} \end{pmatrix} S^T\ , \quad S = (U_1 U_2)\begin{pmatrix} I_r & 0_{r\times(k-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & 0_{(n-r)\times(k-r)} \end{pmatrix}\ ,$$

из которого следует, что условие (А.6) будет выполняться, если, например, выбрать

$$X_{12} = S\ , \quad X_{22} = \mathrm{diag}\,(\lambda_1^{-1}, \cdots, \lambda_r^{-1}, 1, \cdots, 1)\ .$$

Таким образом, согласно лемме А.1 второе из условий (А.3) выполняется для данной Y_{11} и некоторых Y_{12}, Y_{22}. Справедливость первого условия (А.3) следует из того факта, что $X_{22} > 0$ и

$$X_{11} - X_{12}X_{22}^{-1}X_{12}^T = Y_{11}^{-1} > 0\ ,$$

а, следовательно, согласно лемме А.2 имеем $X > 0$.

Лемма А.8 *Пусть даны две матрицы $Q = Q^T \in \mathcal{R}^{n\times n}$ и $A \in \mathcal{R}^{n\times m}$, причем rank $A < n$. Тогда следующие два утверждения эквивалентны:*

C1:

$$x^TQx < 0\ , \quad \forall\, x \in \{x|A^Tx = 0\}\ ;$$

C2:

$$Q - \mu AA^T < 0\ , \quad \exists \mu > 0\ .$$

Доказательство. ($C1 \longrightarrow C2$) Разложим пространство $\mathcal{R}^n$ в прямую сумму

$$\mathcal{R}^n = \mathcal{N}(A^T) \oplus \mathcal{R}(A)\ ,$$

где $\mathcal{N}(A^T)$ – ядро матрицы A^T и $\mathcal{R}(A)$ – образ матрицы A, и выберем соответствующий базис. По условию в этом базисе матрицы Q и AA^T могут быть представлены в следующем блочном виде:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{pmatrix}\ , \quad Q_{11} < 0\ , \quad AA^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & DD^T \end{pmatrix}\ , \quad DD^T > 0\ .$$

Тогда для произвольного $x = \mathrm{col}\,(x_1, x_2)$ имеем

$$x^T(Q - \mu AA^T)x = (x_1^T\, x_2^T)\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} - \mu DD^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= x_1^TQ_{11}x_1 + 2x_1^TQ_{12}x_2 + x_2^T(Q_{22} - \mu DD^T)x_2 =$$

$$= (x_1 + Q_{11}^{-1}Q_{12}x_2)^TQ_{11}(x_1 + Q_{11}^{-1}Q_{12}x_2) +$$

$$+ x_2^T(Q_{22} - Q_{12}^TQ_{11}^{-1}Q_{12} - \mu DD^T)x_2 < 0\ ,$$

если μ выбрать так, чтобы $Q_{22} - Q_{12}^T Q_{11}^{-1} Q_{12} - \mu D D^T < 0$, т.е. $\mu > \lambda_{max}[D^{-1}(Q_{22} - Q_{12}^T Q_{11}^{-1} Q_{12})(D^{-T}]$.

($C2 \longrightarrow C1$) Очевидно, т.к. $x^T(Q - \mu A A^T)x = x^T Q x < 0$ для всех x, для которых $A^T x = 0$.

Приложение B

Линейные матричные уравнения

Лемма B.1 *Если матричное уравнение*

$$AX = C \ , \tag{B.1}$$

в котором A и C – матрицы порядков $(m \times n)$ и $(m \times q)$, разрешимо относительно неизвестной матрицы X порядка $(n \times q)$, то среди его решений существует решение X_0 минимального ранга, для которого $rank\ X_0 = rank\ C = r_C$, и это решение представимо в виде

$$X_0 = VC \ ,$$

где V – некоторая матрица соответствующего порядка.

Доказательство. Пусть для конкретности первые r_C столбцов матрицы C линейно независимы, а остальные столбцы являются линейными комбинациями первых. Это означает, что матрица C представима в виде

$$C = (C_1 \quad C_2) \ , \quad C_2 = C_1 D$$

для некоторой матрицы D. Пусть $X = (X_1 \quad X_2)$, $X_1 \in \mathcal{R}^{n \times r_C}$ – произвольное решение уравнения (B.1). Заметим, что столбцы блока X_1 линейно независимы, так как $AX_1 = C_1$ и столбцы матрицы C_1 линейно независимы. Определим $\bar{X}_2 = X_1 D$. Тогда $A\bar{X}_2 = C_2$ и в качестве решения минимального ранга может быть взята матрица $X_0 = (X_1 \quad \bar{X}_2)$.

Из равенства $AX_0 = C$ следует, что строки матрицы C являются линейными комбинациями строк матрицы X_0. Так как $\mathrm{rank}\ C = \mathrm{rank}\ X_0 = r_C$, то и, обратно, строки матрицы X_0 являются линейными комбинациями строк матрицы C, т.е. $X_0 = VC$ для некоторой матрицы V.

Лемма B.2 *Матричное уравнение*

$$AXB = C \tag{B.2}$$

разрешимо относительно неизвестной матрицы X тогда и только тогда, когда матричные уравнения

$$AY = C\ , \quad ZB = C \tag{B.3}$$

разрешимы относительно неизвестных матриц Y и Z соответственно.

Доказательство. Если уравнение (B.2) имеет решение X, то, очевидно, что $Y = XB$ и $Z = AX$ удовлетворяют уравнениям (B.3). Обратно, пусть существуют решения Y, Z уравнений (B.3). Тогда первое из этих уравнений имеет решение Y_0 минимального ранга r_C, которое согласно лемме B.1 представимо в виде $Y_0 = VC$. Следовательно,

$$C = AY_0 = AVC = AVZB$$

и матрица $X = VZ$ будет решением уравнения (B.2).

Приложение C

Линейные уравнения и псевдообратные матрицы

Пусть имеется линейное уравнение

$$Ax = b \ , \tag{C.1}$$

в котором A – $(m \times n)$-матрица и $b \in \mathcal{R}^m$ – заданы, а $x \in \mathcal{R}^n$ – неизвестные переменные.

Если $m = n = \text{rank } A$, то $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^T) = \{0\}$ и уравнение (C.1) имеет единственное решение $x = A^{-1}b$.

Если A – не квадратная или не полного ранга, то или $\mathcal{N}(A)$, или $\mathcal{N}(A^T)$, или оба эти множества будут нетривиальны. Рассмотрим возможные варианты.

Пусть $m > n$ и $\text{rank } A = n$, т.е. столбцы матрицы A линейно независимы. Если $b \in \mathcal{R}(A)$, тогда уравнение (C.1) имеет решение. Выразить его можно следующим образом: умножим (C.1) слева на A^T и, учитывая, что в рассматриваемом случае матрица $A^T A$ обратима, найдем решение

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b \ . \tag{C.2}$$

Если $b \notin \mathcal{R}(A)$, тогда уравнение (C.1) не имеет решений. В этом случае определяется "решение"в смысле метода наименьших квадратов, минимизирующее квадрат нормы отклонения левой части уравнения (C.1) от правой, т.е.

$$\hat{x} = \arg\, \min \|Ax - b\|^2 \ .$$

Для его получения представим $b = b_{\mathcal{R}(A)} + b_{\mathcal{N}(A^T)}$, где $b_{\mathcal{R}(A)} \in \mathcal{R}(A)$ и $b_{\mathcal{N}(A^T)} \in \mathcal{N}(A^T)$. Так как $b_{\mathcal{N}(A^T)} \perp \mathcal{R}(A)$, то

$$\|Ax - b_{\mathcal{R}(A)} - b_{\mathcal{N}(A^T)}\|^2 = \|Ax - b_{\mathcal{R}(A)}\|^2 + \|b_{\mathcal{N}(A^T)}\|^2 \ .$$

Это значит, что

$$\min \|Ax - b\|^2 = \|b_{\mathcal{N}(A^T)}\|^2 \ ,$$

и это минимальное значение достигается, когда $Ax = b_{\mathcal{R}(A)}$, т.е. при $x = (A^TA)^{-1}A^Tb_{\mathcal{R}(A)}$. Учитывая, что $(A^TA)^{-1}A^Tb_{\mathcal{R}(A)} = (A^TA)^{-1}A^Tb$, найдем, что оптимальное решение в смысле метода наименьших квадратов имеет вид

$$\hat{x} = (A^TA)^{-1}A^Tb \ ,$$

т.е. определяется той же формулой (C.2).

Пусть теперь $m < n$ и $\operatorname{rank} A = m$, т.е. строки матрицы A линейно независимы. В этом случае уравнение (C.1) будет иметь бесконечное множество решений, так как, если $\bar{x}$ – решение, то $\bar{x} + x_{\mathcal{N}(A)}$ – тоже решение для любого $x \in \mathcal{N}(A)$. Среди всех решений выделим оптимальное в смысле минимума нормы, т.е.

$$\breve{x} = \arg \min_{\{Ax=b\}} \|x\| \ .$$

Если разложить пространство $\mathcal{R}^n$ в прямую сумму

$$\mathcal{R}^n = \mathcal{R}(A^T) \oplus \mathcal{N}(A) \ ,$$

то минимальное по норме решение будет иметь нулевую проекцию на подпространство $\mathcal{N}(A)$. Представим в соответствии с этим разложением $x = x_{\mathcal{R}(A^T)} + x_{\mathcal{N}(A)}$ и решим уравнение $Ax_{\mathcal{R}(A^T)} = b$. В силу того, что $x_{\mathcal{R}(A^T)} \in \mathcal{R}(A^T)$, существует $\xi \in \mathcal{R}^m$ такой, что $x_{\mathcal{R}(A^T)} = A^T\xi$. Следовательно, требуется решить уравнение $AA^T\xi = b$ относительно ξ. Так как по условию матрица AA^T обратима, его решение имеет вид $\xi = (AA^T)^{-1}b$ и, значит, $x_{\mathcal{R}(A^T)} = A^T(AA^T)^{-1}b$. Таким образом, решение уравнения (C.1) с минимальной нормой равно

$$x = A^T(AA^T)^{-1}b \ . \tag{C.3}$$

Рассмотрим, наконец, общий случай, когда $\operatorname{rank} A = r < \min(m, n)$. Будем искать минимальное по норме решение в смысле метода наименьших квадратов. Воспользуемся леммой A.6 и представим матрицу A в виде

$$A = (U_1 \quad U_2) \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} = U_1 \Sigma V_1^T \ , \tag{C.4}$$

где

$$\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_r) \ , \quad \sigma_1 \ge \cdots \ge \sigma_r > 0 \ ,$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{R}(A) = \mathrm{span}\,(U_1)\ , \quad \mathcal{N}(A^T) = \mathrm{span}\,(U_2)\ , \\
&\mathcal{R}(A^T) = \mathrm{span}\,(V_1)\ , \quad \mathcal{N}(A) = \mathrm{span}\,(V_2)\ , \\
&\begin{pmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{pmatrix} (U_1\, U_2) = I\ , \quad \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} (V_1\, V_2) = I\ .
\end{aligned}
\tag{C.5}
$$

Разложим пространства $\mathcal{R}^n$ и $\mathcal{R}^m$ в прямые суммы

$$
\mathcal{R}^n = \mathcal{R}(A^T) \oplus \mathcal{N}(A)\ , \quad \mathcal{R}^m = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^T)
$$

и представим

$$
x = x_{\mathcal{R}(A^T)} + x_{\mathcal{N}(A)}\ , \quad b = b_{\mathcal{R}(A)} + b_{\mathcal{N}(A^T)}\ .
$$

Так как

$$
\begin{aligned}
\|Ax - b\|^2 = \|Ax - b_{\mathcal{R}(A)}\|^2 + \|b_{\mathcal{N}(A^T)}\|^2 = \\
= \|Ax_{\mathcal{N}(A)} + Ax_{\mathcal{R}(A^T)} - b_{\mathcal{R}(A)}\|^2 + \|b_{\mathcal{N}(A^T)}\|^2 = \\
= \|Ax_{\mathcal{R}(A^T)} - b_{\mathcal{R}(A)}\|^2 + \|b_{\mathcal{N}(A^T)}\|^2\ ,
\end{aligned}
$$

то оптимальные решения по методу наименьших квадратов удовлетворяют уравнению

$$
Ax = b_{\mathcal{R}(A)}\ , \tag{C.6}
$$

а минимальное по норме из этих решений $\tilde{x}$ принадлежит $\mathcal{R}(A^T)$.

Из (C.5) следует, что $b_{\mathcal{R}(A)} = U_1\eta_1$, где $\eta_1 \in \mathcal{R}^r$, и $b_{\mathcal{N}(A^T)} = U_2\eta_2$, где $\eta_2 \in \mathcal{R}^{m-r}$. Так как $b = U_1\eta_1 + U_2\eta_2$, то с учетом того, что $U_1^T U_1 = I$ и $U_1^T U_2 = 0$, найдем $\eta_1 = U_1^T b$ и тогда $b_{\mathcal{R}(A)} = U_1 U_1^T b$. Представляя теперь $\tilde{x} \in \mathcal{R}(A^T)$ в виде $\tilde{x} = V_1\xi$, где $\xi \in \mathcal{R}^r$, запишем (C.6) как

$$
AV_1\xi = U_1 U_1^T b\ .
$$

Заменяя $A = U_1 \Sigma V_1^T$ и умножая обе части этого уравнения слева на U_1^T, вычислим $\xi = \Sigma^{-1} U_1^T b$ и найдем оптимальное решение по методу наименьших квадратов минимальной нормы в виде

$$
\tilde{x} = V_1 \Sigma^{-1} U_1^T b\ . \tag{C.7}
$$

Матрица

$$
A^+ = V_1 \Sigma^{-1} U_1^T \tag{C.8}
$$

является псевдообратной для матрицы A с разложением (C.4). По определению псевдообратной для матрицы A называется такая матрица A^+, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$
AA^+A = A\ , \quad A^+AA^+ = A^+\ , \quad (AA^+)^T = AA^+\ , \quad (A^+A)^T = A^+A\ .
$$

Непосредственно проверяется следующее:

$$m = n = \text{rank } A \longrightarrow A^{+} = A^{-1} \ ;$$

$$m > n, \quad \text{rank } A = n \longrightarrow A^{+} = (A^T A)^{-1} A^T \ ;$$

$$m < n, \quad \text{rank } A = m \longrightarrow A^{+} = A^T (A A^T)^{-1} \ .$$

Таким образом, во всех рассмотренных выше случаях так называемые псевдорешения уравнения (C.1), имеющие минимальною норму среди всех векторов, минимизирующих норму отклонения между правой и левой частями этого уравнения, задаются формулой

$$x = A^{+} b \ .$$

Приложение D

Расширенная лемма Ляпунова

Лемма D.1 *Рассмотрим матричное уравнение Ляпунова*

$$A^T X + XA + C^T C = 0 \ . \tag{D.1}$$

Тогда

(i) если A гурвицева, то уравнение (D.1) имеет единственное решение – симметрическую и неотрицательно определенную матрицу $X = X^T \geq 0$;

(ii) если в дополнение к пункту (i) пара (A, C) наблюдаема, то решение является в действительности положительно определенным $X = X^T > 0$;

(iii) если пара (A, C) детектируема и уравнение (D.1) имеет симметрическое и неотрицательно определенное решение, то матрица A гурвицева.

Доказательство. Пункты (i) и (ii). Если A гурвицева, то матрица

$$X = \int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{At} \, dt \tag{D.2}$$

является неотрицательно определенной. Непосредственная ее подстановка в (D.1) показывает, что она удовлетворяет этому уравнению. Если предположить, что уравнение (D.1) имеет еще другое решение $\bar{X}$, то

$$A^T (X - \bar{X}) + (X - \bar{X}) A = 0 \ .$$

Так как A гурвицева, то отсюда следует, что $\bar{X} = X$.

Если пара (A, C) наблюдаема, то матрица (D.2) будет положительно определенной. Действительно, если предположить, что для некоторого $x_0 \neq 0$ выполняется $Xx_0 = 0$, тогда

$$x_0^T X x_0 = \int_0^\infty x_0^T e^{A^T t} C^T C e^{At} x_0 \, dt = \int_0^\infty y^T y \, dt \ ,$$

где y – выход системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax \ , \\ y &= Cx \end{aligned}$$

с начальным условием $x(0) = x_0$. Это означает, что $y(t) \equiv 0$, что противоречит наблюдаемости этой системы.

Пункт (iii). Пусть $X_0 = X_0^T \geq 0$ – некоторое решение уравнения (D.1). Допустим от противного, что матрица A неустойчивая, т.е. $Ax_0 = \lambda x_0$ для некоторого $x_0 \neq 0$ и $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$. Тогда из уравнения следует

$$0 = x_0^* A^T X_0 x_0 + x_0^* X_0 A x_0 + x_0^* C^T C x_0 = 2(\operatorname{Re}\lambda) x_0^* X_0 x_0 + x_0^* C^T C x_0 \ .$$

Так как сумма неотрицательных слагаемых может обращаться в ноль, только при условии, что каждое слагаемое нулевое, то отсюда следует $Cx_0 = 0$. Но этот факт с учетом того, что $Ax_0 = \lambda x_0$, $x_0 \neq 0$ и $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$, противоречит предположению о детектируемости пары (A, C).

Лемма D.2 *Рассмотрим матричное уравнение Ляпунова*

$$A^T X A - X + C^T C = 0 \ . \tag{D.3}$$

Тогда

- *(i) если A имеет все собственные значения внутри единичного круга комплексной плоскосим, то уравнение (D.3) имеет единственное решение – симметрическую и неотрицательно определенную матрицу $X = X^T \geq 0$;*
- *(ii) если в дополнение к пункту (i) пара (A, C) наблюдаема, то решение является в действительности положительно определенным $X = X^T > 0$;*
- *(iii) если пара (A, C) детектируема и уравнение (D.3) имеет симметрическое и неотрицательно определенное решение, то матрица A имеет все собственные значения внутри единичного круга комплексной плоскосим.*

Доказательство. Пункты (i) и (ii). Если все собственные значения матрицы A лежат внутри единичного круга, то матрица

$$X = \sum_{t=0}^{\infty} (A^t)^T C^T C A^t \tag{D.4}$$

является неотрицательно определенной. Непосредственная ее подстановка в (D.3) показывает, что она удовлетворяет этому уравнению. Если предположить, что уравнение (D.3) имеет еще другое решение $\bar{X}$, то

$$A^T(X - \bar{X})A - (X - \bar{X}) = 0 \ ,$$

и в силу устойчивости A отсюда следует, что $\bar{X} = X$.

Если пара (A, C) наблюдаема, то матрица (D.4) будет положительно определенной. Действительно, если предположить, что для некоторого $x_0 \neq 0$ выполняется $Xx_0 = 0$, тогда

$$x_0^T X x_0 = \sum_{t=0}^{\infty} x_0^T (A^t)^T C^T C A^t x_0 = \sum_{t=0}^{\infty} y_t^T y_t \ ,$$

где y_t – выход системы

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= Ax_t \ , \\ y_t &= Cx_t \end{aligned}$$

с начальным условием x_0. Это означает, что $y_t \equiv 0$, что противоречит наблюдаемости этой системы.

Пункт (iii). Пусть $X_0 = X_0^T \geq 0$ – некоторое решение уравнения (D.3). Допустим от противного, что матрица A неустойчивая, т.е. $Ax_0 = \lambda x_0$ для некоторого $x_0 \neq 0$ и $|\lambda| \geq 1$. Тогда из уравнения следует

$$0 = x_0^* A^T X_0 A x_0 - x_0^* X_0 x_0 + x_0^* C^T C x_0 = (|\lambda)|^2 - 1) x_0^* X_0 x_0 + x_0^* C^T C x_0 \ .$$

Так как сумма неотрицательных слагаемых может обращаться в ноль, только при условии, что каждое слагаемое нулевое, то отсюда следует $Cx_0 = 0$. Но этот факт с учетом того, что $Ax_0 = \lambda x_0$, $x_0 \neq 0$ и $|\lambda| \geq 1$, противоречит предположению о детектируемости пары (A, C).

Приложение E

Кронекерово произведение

Кронекеровым (прямым или тензорным) произведением $(m\times n)$-матрицы A на $(p \times q)$-матрицу B называется $(mp \times nq)$-матрица

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} .$$

Перечислим несколько элементарных свойств кронекерова произведения:

(i) если произведения AC и BD существуют, то

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD \ ;$$

(ii) $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$;

(iii) если A и B – комплексные матрицы, то

$$\overline{A \otimes B} = \bar{A} \otimes \bar{B} \ , \quad (A \otimes B)^* = A^* \otimes B^* \ ;$$

(iv) если A и B – невырожденные матрицы, то матрица $A \otimes B$ также невырожденная и

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1} \ .$$

Приложение F

Частотная теорема

Лемма F.1 *Пусть пара* (A, B) *стабилизируема. Для существования симметрической матрицы* X, *удовлетворяющей соотношению*

$$2Re\, x^* X(Ax + Bv) - \mathcal{L}(x, v) < 0 \ , \quad \forall\, x, v, \quad |x| + |v| \neq 0 \tag{F.1}$$

с заданной квадратичной формой $\mathcal{L}(x, v)$ *переменных* x, v, *необходимо и достаточно, чтобы для всех* $v \neq 0$ *выполнялось следующее частотное условие*

$$\mathcal{L}[(j\,\omega I - A)^{-1}Bv, v] > 0 \ , \quad \forall\, \omega \in (-\infty, \infty) \ . \tag{F.2}$$

Если

$$\mathcal{L}(x, v) = (x^T, v^T)\, L \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \ , \quad L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12}^T & L_{22} \end{pmatrix} \ ,$$

то неравенство (F.1) примет вид линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} A^T X + XA - L_{11} & XB - L_{12} \\ B^T X - L_{12}^T & -L_{22} \end{pmatrix} < 0 \ , \tag{F.3}$$

а частотное условие (F.2) запишется в виде

$$\begin{pmatrix} (-j\,\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12}^T & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (j\,\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{pmatrix} > 0 \ . \tag{F.4}$$

Лемма F.2 *Пусть пара* (A, B) *стабилизируема. Для существования симметрической матрицы* X, *удовлетворяющей соотношению*

$$(Ax + Bv)^* X(Ax + Bv) - x^T X x - \mathcal{L}(x, v) < 0 \ , \quad \forall\, x, v, \quad |x| + |v| \neq 0 \tag{F.5}$$

с заданной квадратичной формой $\mathcal{L}(x, v)$ *переменных* x, v*, необходимо и достаточно, чтобы для всех* $v \neq 0$ *выполнялось следующее частотное условие*

$$\mathcal{L}[(e^{j\varphi}I - A)^{-1}Bv, v] > 0 \ , \quad \forall\, \varphi \in [0, 2\pi) \ . \tag{F.6}$$

Если

$$\mathcal{L}(x, v) = (x^T, v^T)\, L \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \ , \quad L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12}^T & L_{22} \end{pmatrix} \ ,$$

то неравенство (F.5) примет вид линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} A^T XA - X - L_{11} & A^T XB - L_{12} \\ B^T XA - L_{12}^T & B^T XB - L_{22} \end{pmatrix} < 0 \ , \tag{F.7}$$

а частотное условие (F.6) запишется в виде

$$\begin{pmatrix} (e^{-j\varphi}I - A)^{-1}B \\ I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12}^T & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (e^{j\varphi}I - A)^{-1}B \\ I \end{pmatrix} > 0 \ . \tag{F.8}$$

Литература

[1] Баландин Д.В., Коган М.М. Линейные матричные неравенства в задаче робастного H-управления по выходу// ДАН. 2004. Т. 396. № 6. С. 759-761.

[2] Баландин Д.В., Коган М.М. Оптимальное гашение колебаний высотных сооружений при сейсмических воздействиях// Известия АН. Теория и системы управления. 2004. № 5. С. 60-66.

[3] Баландин Д.В., Коган М.М. Предельные возможности гашения колебаний высотных сооружений// Проблемы машиностроения и надежности машин. 2004. № 5. С. 99-103.

[4] Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез оптимального робастного H^∞-управления методами выпуклой оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2004. № 7. С. 71-81.

[5] Баландин Д.В., Коган М.М. Алгоритм построения функции Ляпунова в синтезе динамических регуляторов заданного порядка// Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40. № 11. С. 1457-1461.

[6] Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез регуляторов на основе решения линейных матричных неравенств и алгоритма поиска взаимнообратных матриц// Автоматика и телемеханика. 2005. № 1. С. 82-99.

[7] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1987.

[8] Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.

[9] Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. Л.-М.: ОНТИ, 1935.

[10] Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.

[11] Пятницкий Е.С., Скородинский В.И. Численные методы построения функций Ляпунова и критериев абсолютной устойчивости в форме численных процедур// Автоматика и телемеханика. 1983. № 11. С. 52-63.

[12] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

[13] Чурилов А.Н., Гессен А.В. Исследование линейных матричных неравенств. Путеводитель по программным пакетам. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2004.

[14] Якубович В.А. Решение некоторых матричных нераенств, встречающихся в теории автоматического регулирования// ДАН СССР. 1962. Т. 143. № 6. С. 1304-1307.

[15] Apkarian P., Gahinet P. A convex characterization of gain-scheduled H^∞ controllers// IEEE Trans. Automat. Control. 1995. V. 40. No. 5. P. 853-864.

[16] Apkarian P., Tuan H.D. Robust control via concave minimization local and global algorithms// IEEE Trans. Automat. Control. 2000. V. 45. No. 2. P. 299-305.

[17] Balandin D.V., Kogan M.M. An optimization algorithm for checking feasibility of robust H^∞-control problem for linear time-varying uncertain systems// International Journal of Control. 2004. V. 77. No. 5. P. 498-503.

[18] Balandin D.V., Kogan M.M. LMI-based optimal attenuation of multistorey building oscillations under seismic excitations// Structural Control and Health Monitoring. 2005. V. 12. No. 2. P. 213-224.

[19] Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.

[20] Chilali M., Gahinet P. H_∞ design with pole placement constraints: an LMI approach// IEEE Trans. Automat. Control. 1996. V. 41. No. 3. P. 358-367.

[21] Chilali M., Gahinet P., Apkarian P. Robust pole placement in LMI regions// IEEE Trans. Automat. Control. 1999. V. 44. No. 12. P. 2257-2269.

[22] Doyle J., Packard A., Zhou K. Review of LFTs, LMIs, and μ// Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control. Brighton, England. 1991. P. 1227-1232.

[23] Gahinet P., Apkarian P. A linear matrix inequality approach to H_∞ control// International Journal of Robust and Nonlinear Control. 1994. Vol. 4. P. 421-448.

[24] Gahinet P., Nemirovski A., Laub A.J., Chilali M. The LMI Control Toolbox. For Use with Matlab. User's Guide. Natick, MA: The MathWorks, Inc., 1995.

[25] El Ghaoui L, Oustry F, and Rami MA. A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems// IEEE Trans. Automat. Control. 1997. V. 42. No. 8. P. 1171-1176.

[26] Iwasaki T., Skelton R.E. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas// Automatica. 1994. Vol.30. No. 8. P. 1307-1317.

[27] Iwasaki T., Skelton R.E. The XY-centering algorithm for the dual LMI problem: a new approach to fixed order control design// International Journal of Control. 1995. V. 62. No. 6. P. 1257-1272.

[28] Iwasaki T. The dual iteration for fixed order control// IEEE Trans. Automat. Control. 1999. V. 44. No. 4. P. 783-788.

[29] Nesterov Y.E., Nemirovski A. Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming. Philadelphia: SIAM, 1994.

[30] Nishimura H., Kojima A. Seismic isolation control for a buildinglike structure// IEEE Control Systems. 1999. V. 19. P. 38-44.

[31] Scherer C., Weiland S. Linear Matrix Inequalities in Control. Version 3.0. 2000. http://www.cs.ele.tue.nl/SWeiland/lmi.html.

[32] Spencer B.F, Sain M.K. Controlling buildings: a new frontier in feedback// IEEE Control Systems. 1997. V. 17. P. 19-35.

[33] Tuan H.D., Apkarian P., Hosoe S., Tuy H. D.C. optiomization approach to robust control: feasibility problems// International Journal of Control. 2000. No. 73. P. 89-104.

[34] Yamada Y., Hara S. Global optimization for H_∞ control with constant diagonal scaling// IEEE Trans. Automat. Control. 1998. V. 43. No. 2. P. 191-203.