Invertibilitet og underrum af $\mathbb{R}^n$, Afsnit 2.3, 2.8

10. marts 2025

Lineær Algebra

Forår 2025

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Del I

Repetition

Quiz

Gå til hjemmesiden

`https://poll.math.aau.dk/wjahjgtr`

Matrixinvers

Definition

En $n \times n$-matrix A kaldes inverterbar, hvis der eksisterer en matrix A^{-1}, så

$$AA^{-1} = I_n \quad \text{og} \quad A^{-1}A = I_n.$$

Matricen A^{-1} kaldes den inverse til A.

Beregning af matrixinvers

$$A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

For en 2×2-matrix $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ med $\det A \neq 0$ har vi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

For større matricer skal vi

- Opskrive matricen $[A \mid I]$, og rækkereducere til $[R \mid B]$
- Hvis…
  - …$R = I$, er A inverterbar, og $A^{-1} = B$
  - …$R \neq I$, er A ikke inverterbar

Egenskaber

Hvis A og B er inverterbare, gælder

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Bemærk desuden, at den inverse er entydig

Del II

Nyt stof

Kriterier for invertibilitet

Vi har set, at vi kan finde den inverse, hvis den eksisterer.

Kan vi sige noget generelt om, hvornår den inverse eksisterer?

En LAAANG sætning

Sætning (side 130)

Lad A være en $n \times n$-matrix. Følgende udsagn er ækvivalente.

1. A er inverterbar
2. A er rækkeækvivalent til I_n $A \sim I_n$
3. A har n pivotsøjler
4. Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har kun den trivielle løsning $(x = \bar{0})$
5. Søjlerne i A er lineært uafhængige
6. Den lineære transformation $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ er injektiv
7. Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har mindst én løsning for hvert $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^n$ præcis
8. Søjlerne i A udspænder $\mathbb{R}^n$
9. Den lineære afbildning $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ afbilder $\mathbb{R}^n$ surjektivt til $\mathbb{R}^n$
10. Der eksisterer en $n \times n$-matrix B, så $BA = I_n$
11. Der eksisterer en $n \times n$-matrix C, så $AC = I_n$
12. A^T er en inverterbar matrix

Hvis $Ax = Ay$, så er $x = y$.

For hvert y i disp.mængd eksisterer et x i def.mængd så $Ax = y$

Lang sætning, korte eksempler

Eksempel

Er $A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{matrix} \end{array}$ inverterbar?

$a_1 + a_3 = a_2$

Dvs søjlerne er lin. afh.

Sætning giver dermed, at A ikke er inverterbar.

Eksempel

En $n \times n$-matrix B er inverterbar, og $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Har ligningen $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en løsning?

Pkt. 7 giver, at $Bx = b$ har mindst én løsning

Faktisk har vi præcist én løsning:

$$Bx = b \iff x = B^{-1}b$$

Inverterbare lineære afbildninger

Vi siger, at en lineær afbildning $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er inverterbar, hvis der eksisterer en afbildning $S\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, sådan at

$$S(T(x)) = (S \circ T)(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \quad \text{for alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

og

$$(T \circ S)(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \quad \text{for alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

I stil med matricer, kaldes S den inverse til T og den noteres $S = T^{-1}$

Sammenhæng med standardmatricer

Sætning

Lad $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ være en lineær afbildning med standardmatrix A. Da er T inverterbar, hvis og kun hvis A er inverterbar.
Når T er inverterbar gælder desuden, at T^{-1} har standardmatrix A^{-1}.

Sammenhæng med standardmatricer

Eksempel

Den lineære afbildning $R_{\frac{\pi}{4}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er en rotation med $\frac{\pi}{4}$ radianer omkring Origo. Dens standardmatrix er

$$A_{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

I kan tjekke, at $A_{\frac{\pi}{4}}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, som svarer til rotationen $(R_{\frac{\pi}{4}})^{-1} = R_{\frac{-\pi}{4}}$ i modsat retning

Underrum af $\mathbb{R}^n$

Når vi taler om *underrum* af $\mathbb{R}^n$, mener vi en mængde af vektorer i $\mathbb{R}^n$, der opfører sig "pænt" under linearkombinationer.

Mere præcist kaldes $V \subseteq \mathbb{R}^n$ et underrum, hvis

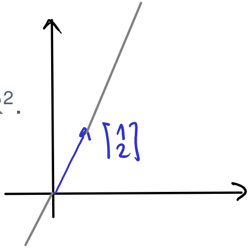
- $\mathbf{0}$ ligger i V
- Hvis $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ begge er vektorer i V, så er også $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ i V
- Hvis $\mathbf{u}$ er en vektor i V og s er en skalar, så ligger $s\mathbf{u}$ i V

Underrum af $\mathbb{R}^n$

"hvorom det gælder"

Eksempel

Linjen $L = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\} = \left\{ r\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \;\middle|\; r \in \mathbb{R}\right\}$ i $\mathbb{R}^2$.



ok ▶ $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ ligger i L

$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \in L$

ok ▶ Hvis $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L$, har vi. . .

$u = r_u\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \quad v = r_v\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}.$

$u + v = r_u\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + r_v\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \underbrace{(r_u + r_v)}_{\text{bare et nyt } r}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \in L$

ok ▶ Hvis $\mathbf{v} \in L$ og $s \in \mathbb{R}$, har vi. . .

$v = r_v\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

$sv = \underbrace{(s r_v)}_{\text{Er bare et nyt } r}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \in L$

Simple underrum

Eksempel

$\mathbb{R}^n$ er et underrum af sig selv

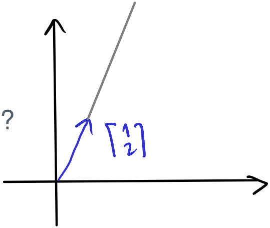
Eksempel

$V = \{\mathbf{0}\}$ er et underrum

Eksempel

Linjer gennem Origo er underrum

Ikke-eksempler



Eksempel

Er $V = \left\{ r \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \;\middle|\; r \geq 0 \right\}$ et underrum af $\mathbb{R}^2$?

ok • $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in V$? $\quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in V$

$0 \geq 0$

ok • Hvis u, v ligger i V, ligger så også $u+v$ i V?

$u = r_u \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad v = r_v \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. $\quad u+v = (r_u + r_v) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in V$

$r_u \geq 0 \quad r_v \geq 0 \quad r_u + r_v \overset{?}{\geq} 0$ ok

Holder ikke • Hvis $u \in V$, ligger så også $su \in V$?

Tag $u = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $s = -1$ $\quad su = -1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $-1 \overset{?}{\geq} 0$ Nej

Søjlerummet for en matrix

For en matrix $A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_n]$ definerer vi søjlerummet

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Span}\{\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_n\}$$

Det vil sige, at søjlerummet er… alle vektorer på formen

$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \cdots + c_n a_n$

Søjlerummet for en matrix

Eksempel

$\mathrm{Col}(I_n) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \mathbb{R}^n$

Eksempel

Lad $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Hvad er $\mathrm{Col}(A)$?

$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

Col(A) er et underrum

Lad A være en $n \times m$-matrix

Der er en grund til, at vi kalder Col(A) for søjle*rummet*:
Det er nemlig et underrum af $\mathbb{R}^n$

Nulrummet for en matrix

For en matrix A definerer vi nulrummet Nul(A) til at være mængden af alle løsninger til $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Hvor mange indgange har vektorerne i Nul(A), når A er en $n \times m$-matrix?

$$\begin{array}{cccc} & m & & \\ n & \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} & m \end{array}$$

Vektorerne i Nul(A) har m indgange, så de ligger i $\mathbb{R}^m$

Nulrummet for en matrix

$[0,0,0,0]^T \in \mathrm{Nul}(A)$

Eksempel

Lad $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Ligger $[0, 0, 0]^T$ i $\mathrm{Nul}(A)$? Nej, for $A\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ er ikke def!

Gør $[0, 5, 0, 5]^T$?

$A\begin{bmatrix}0\\5\\0\\5\end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$. Dvs. at $\begin{bmatrix}0\\5\\0\\5\end{bmatrix} \in \mathrm{Nul}(A)$

Eksempel

I får at vide, at vektorerne $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ begge ligger i $\mathrm{Nul}(A)$. Ligger $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ også i $\mathrm{Nul}(A)$?

dvs $Av = 0$ og $Aw = 0$

$A(v+w) = Av + Aw = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$

Konklusion: $v + w \in \mathrm{Nul}(A)$

Nulrummet for en matrix

Eksempel

Systemet med totalmatrix $[A \mid \mathbf{0}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right]$ har løsningerne

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Det vil sige, at $\text{Nul}(A) = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Nul(A) er et underrum

Lad A være en $n \times m$-matrix

Igen Nul(A) kaldes nul*rummet*:
Det er et underrum af $\mathbb{R}^m$

Forskel mellem Col(A) og Nul(A)

Bemærk forskellen mellem søjlerummet og nulrummet

Når A er en $n \times m$-matrix, indeholder…

- …Col(A) vektorer fra $\mathbb{R}^n$
- …Nul(A) vektorer fra $\mathbb{R}^m$

Overflødige vektorer

Vi så tidligere, at matricen $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ har søjlerum

$$\operatorname{Span}\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}}_{a_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}}_{a_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{a_3}, \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{a_4 = -a_2} \right\}$$

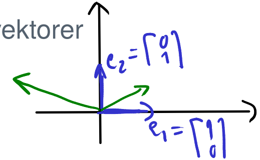
Basis for underrum

Definition

En mængde $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ kaldes en basis for underrummet V, hvis

- $\mathcal{B}$ er lineært uafhængig (vi har ikke for mange vektorer)
- $V = \mathrm{Span}(\mathcal{B})$ (vi har ikke for få vektorer)

Et underrum kan have flere forskellige baser
Det kan dog vises, at alle baser har samme antal vektorer



Basis for Col(A)

Lad R være matricen

$$R = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

på reduceret trappeform. Heraf aflæses $R[2, -1, 0, 0]^T = \mathbf{0}$ og $R[2, 0, 2, -1]^T = \mathbf{0}$.

I forhold til søjlerne i R betyder dette… $2r_1 - r_2 = \bar{0}$

$\Rightarrow r_2 = 2r_1$

$2r_1 + 2r_3 - r_4 = \bar{0}$

$\Rightarrow r_4 = 2r_1 + 2r_3$

Altså, vektorerne er lin. afh. og r_2 og r_4 kan beskrives ved r_1 og r_3

Altså er de lineært uafhængige søjler i R…

r_1 og r_3

Basis for Col(A)

Matricen $A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$ opfylder $A \sim R$.

Dermed er $\mathbf{x}$ en løsning til $A\mathbf{x} = 0$, hvis og kun hvis... $Rx = 0$

Løsningerne $[2, -1, 0, 0]^T$ og $[2, 0, 2, -1]^T$ giver altså ligningerne

$2a_1 - a_2 = \bar{0}$ $\quad a_2 = 2a_1$

$2a_1 + 2a_3 - a_4 = \bar{0}$ $\quad a_4 = 2a_1 + 2a_3$

Igen kan a_2 og a_4 beskrives som lin. komb. af a_1 og a_3

Igen er de lineært uafhængige søjler...

a_1 og a_3. Faktisk er $\{a_1, a_3\}$ en basis for Col(A). Det er netop pivotsøjlerne.

Pas på

Vi skal tage pivotsøjlerne fra den oprindelige matrix A, *ikke* den rækkereducerede R

Generelt ligger søjlerne i R *ikke* i $\mathrm{Col}(A)$

At finde en basis

$$c_1 b_1 + c_2 b_2 + 0 b_3 + c_4 b_4 - b_5 = \bar{0}$$

Eksempel

Det kan vises, at

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & -4 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{8} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

Find en basis for Col(B), og udtryk $\mathbf{b}_5$ i denne basis.

En basis for Col(B) er $\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$.

Vi søger c_1, c_2 og c_4 s.a. $c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_4 b_4 = b_5$

$$b_5 = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{5}{8} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{3}{4} \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Basis for Nul(A)

For nulrummet har vi allerede en metode til at finde en basis:
den parametriske løsning

Vektorerne, der indgår i den parametriske løsning, danner en basis

Basis for Nul(A)

Eksempel

Vi så tidligere på $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right]$ med parametrisk løsning

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En basis for Nul(A) er

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$