# Diagonalisering og egenvektorer for lineære transformationer,
# Afsnit 5.3 og 5.4

27. marts 2025

Lineær Algebra

Forår 2025

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

# Del I

# Repetition

# Quiz



Gå til hjemmesiden

`https://poll.math.aau.dk/wjahjgtr`

# Egenvektorer

## Definition

For en $n \times n$-matrix $A$ kaldes $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ en *egenvektor* for $A$, hvis

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

for et reelt tal $\lambda$. Tallet $\lambda$ kaldes *egenværdien* hørende til $\mathbf{v}$.

Bemærk: Egenværdien kan være nul, men egenvektoren må ikke være nulvektoren

# Egenvektorer



Hvis vi skal tjekke om…

kendt

- …en given vektor **v** er en egenvektor for $A$, kan vi…

bare gange sammen $\underline{A\mathbf{v}}$ og tjekke om det er lig $\underline{\lambda \mathbf{v}}$ for et eller andet $\lambda$

kendt

- …en given værdi $\lambda$ er en egenværdi for $A$…

kan vi tjekke om $\det(\underline{A-\lambda I})=0$

kendt

# Egenvektorer



Lad $A$ være en kvadratisk matrix

Egenværdierne for $A$ er rødderne til $\det(A - \underline{\lambda} I)$ ukendt

For en givet egenværdi $\lambda$ er egenrummet $\text{Nul}(A - \underline{\lambda} I)$ kendt
Dimensionen af dette egenrum opfylder

$$1 \leq \underbrace{\dim \text{Nul}(A - \lambda I)}_{\text{geom. mult.}} \leq \text{Alg. multiplicitet af } \lambda$$

# Koordinatvektorer

Når $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \ldots, \mathbf{b}_k\}$ er en basis for et underrum $V$, kan ethvert $\mathbf{v}$ i $V$ skrives på formen

$$\mathbf{v} = c_1 b_1 + c_2 b_2 + \cdots + c_k b_k$$

Vi indfører notationen $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix}$

OBS

$$[v]_{\mathcal{B}} = [w]_{\mathcal{B}}$$

$$\Updownarrow$$

$$v = w$$

$[v]_{\mathcal{B}}$ kaldes koordinatvektoren for $\mathbf{v}$ mht. basen $\mathcal{B}$

# Koordinatvektorer



Hvordan findes koordinatvektorerne?

Hvis basen opstilles som søjler i $B$, skal koordinatvektoren opfylde

$$B[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{v}$$

Vi skal altså løse dette system

Hvis $B$ er $n \times n$ (altså underrummet $V$ er hele $\mathbb{R}^n$), er dette særligt nemt: Da søjlerne er lineært uafhængige, er $B$ inverterbar, så

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = B^{-1}\mathbf{v}$$

# Del II

# Nyt stof

# Diagonaliserbare matricer



## Definition

En $n \times n$-matrix $A$ kaldes diagonaliserbar, hvis der eksisterer en inverterbar matrix $P$, så $P^{-1}AP = D$, hvor $D$ er en diagonalmatrix.

$A = PDP^{-1}$

$A$ er med andre ord diagonaliserbar, hvis den er similær med en diagonalmatrix

# Hvordan finder vi en diagonalisering?

## Sætning

*En $n \times n$-matrix $A$ er diagonaliserbar, hvis og kun hvis $A$ har $n$ lineært uafhængige egenvektorer.*
*Når $A = PDP^{-1}$ for en diagonalmatrix $D$, udgør søjlerne i $P$ en basis for $\mathbb{R}^n$ bestående af egenvektorer for $A$. Diagonalindgangene i $D$ er de tilhørende egenværdier.*

# Eksemplet fra sidst



## Eksempel

$A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$ har egenvektorer

- $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ med egenværdi 2
- $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ med egenværdi $-1$

Sætter vi $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ og $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

har vi derfor $A = PDP^{-1}$
(I kan tjekke, at dette er de samme matricer som sidst)

# Et større eksempel



For matricen $A = \begin{bmatrix} 11 & 1 & 1 \\ 1 & 11 & -1 \\ 1 & -1 & 11 \end{bmatrix}$ kan vi opnå $A = PDP^{-1}$ ved $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, og $D = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$.

Det vil sige, at egenværdierne og egenvektorer for $A$ er...

Egenværdi 12 (med alg. mult. 2) med egenrum $\text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$

Egenværdi 9 (med alg. mult 1) med egenrum $\text{Span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

# Et specialtilfælde



## Sætning

*En $n \times n$-matrix med $n$ forskellige egenværdier er diagonaliserbar.*

Hvorfor?

lin. uafh.

Hver egenværdi har mindst (præcist) én egenvektor, og egenvektorer hørende til forskellige egenværdier er lin. uafhængige

Bemærk: Det er *tilstrækkeligt*, at der er $n$ forskellige egenværdier; det er ikke nødvendigt

# Det generelle tilfælde



## Sætning (side 303)

*En $n \times n$-matrix $A$, hvis distinkte egenværdier er $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, opfylder:*

(a) *For hver egenværdi $\lambda_i$ er dimensionen af det tilhørende egenrum højst multipliciteten af $\lambda_i$.* (geom. mult $\leq$ alg. mult)

geom. mult. = alg. mult.

(b) *A er diagonaliserbar, hvis og kun hvis summen af alle egenrummenes dimensioner giver n.*
*Dette sker hvis og kun hvis*

- *Det kar. polynomium faktoriserer i førstegradsled*

$$(\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_p)^{m_p}$$

dvs ingen faktorer af højere grad f.eks. $(\lambda^2+1)$

*og*

- $\dim \mathrm{Nul}(A - \lambda_j) = m_j$

(c) *Hvis A er diagonaliserbar, og $\mathcal{B}_k$ er en basis for egenrummet for $\lambda_k$, så er foreningsmængden af $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_p$ en basis for $\mathbb{R}^n$*

# Diagonaliserbar eller ej?



## Eksempel

Er $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}$ diagonaliserbar?

A er triangulær, så egenværdierne står på diag.

De er 1, 3, 6, 10, som er 4 forskellige værdier.

Specialtilfældet giver derfor, at A er diagonaliserbar.

# Diagonaliserbar eller ej?



## Eksempel

Er $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ diagonaliserbar?

Fga står egenværdierne på diag. og de er
5 og $-3$ (begge med alg. mult 2).
Vi kan ikke umiddelbart afgøre, om B er diag.
For at gøre det, skal vi bestemme egenrummene
for begge egenværdier. B er diag. hvis og kun
hvis begge egenrum har dim 2.

# Find diagonalisering fra egenrummene



## Eksempel

Afgør, om $A = \begin{bmatrix} 14 & -2 & -2 \\ 3 & 7 & -1 \\ 3 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ er diagonaliserbar. Det oplyses, at $A$ har egenrum

- $\lambda = 8$: $\mathcal{B}_8 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$
- $\lambda = 12$: $\mathcal{B}_{12} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Vi ser at egenvektorerne for $\lambda = 8$ er lin. uafh. og derved en basis.

Forening af $B_8$ og $B_{12}$ giver en basis for $\mathbb{R}^3$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \qquad A = PDP^{-1}$$

# Entydighed?

Bemærk, at diagonaliseringen *ikke* er entydig:
Vi kan f.eks. ombytte rækkefølgen af søjlerne i $P$, så længe vi laver samme ombytning af diagonalindgangene i $D$

Eller vi kan vælge en helt anden basis for et eller flere egenrum:

## Eksempel

På forrige slide brugte vi basen $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ for egenrummet for $\lambda = 8$. Det er ligeså gyldigt at bruge $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

# Hvorfor diagonalisere?

## Eksempel

Vi ønsker at udregne $A^n$ for et meget stort $n$. Når $A = PDP^{-1}$ har vi...

$$A^n = \underbrace{(PD\overbrace{P^{-1})(P}^{I}D\overbrace{P^{-1})\cdots}^{I}\overbrace{\cdots(P}^{I}DP^{-1})}_{n \text{ gange}}$$

$$= P\underbrace{DD\cdots D}_{n \text{ gange}}P^{-1} = PD^nP^{-1}$$

Da $D$ er en diagonalmatrix, er $D^n$ bare at opløfte diagonalindgangene i n'te.

# Diagonalisering og basisskift



Det viser sig, at diagonalisering svarer til et basisskift:
Vi repræsenterer afbildningen $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ i en 'bedre' basis

I kan tænke på den 'bedre' basis på denne måde:
Banen i amerikansk fodbold har størrelsen 109.7m $\times$ 48.77m

Skifter vi 'basis' til yards i første retning og feet i den anden har vi i stedet målene 120 yards $\times$ 160 feet

Til den amerikanske sport er yards og feet mere naturlig som 'basis'

# Genopfriskning



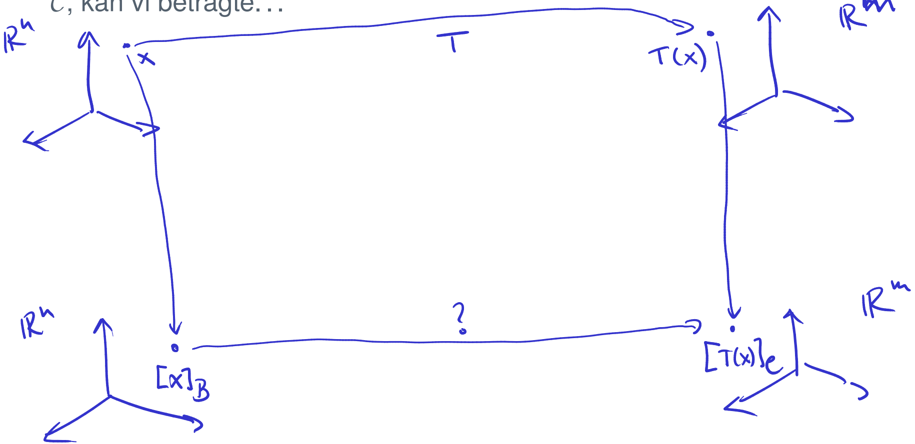
En afbildning $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kaldes lineær, hvis

- $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ for ethvert par $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$
- $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$ for enhver skalar $c$ og ethvert $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$

Vi kan beskrive afbildningen ved en standardmatrix $A$, så $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$

# Lineære transformationer

Hvis $T$ nu er en lineær afbildning mellem $\mathbb{R}^n$ og $\mathbb{R}^m$ med baser $\mathcal{B}$ og $\mathcal{C}$, kan vi betragte…



# Lineære transformationer



Antag, at $\mathbf{x} = r_1\mathbf{b}_1 + r_2\mathbf{b}_2 + \cdots + r_n\mathbf{b}_n$. Vi har da

$$T(\mathbf{x}) = r_1 T(b_1) + r_2 T(b_2) + \cdots + r_n T(b_n)$$

og dermed

$$[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{C}} = r_1 [T(b_1)]_{\mathcal{C}} + r_2 [T(b_2)]_{\mathcal{C}} + \cdots + r_n [T(b_n)]_{\mathcal{C}}$$

Lader vi $M = \left[ [T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{C}} \; [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{C}} \; \cdots \; [T(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{C}} \right]$, har vi derfor

$$[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{C}} = M \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} = M[x]_{\mathcal{B}}$$

$M$ kaldes matrixrepræsentationen for $T$ med hensyn til $\mathcal{B}$ og $\mathcal{C}$.

# Specialtilfældet med samme basis



Hvis $T$ sender fra og til samme rum ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$), og vi bruger samme basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ for begge rum, kalder vi blot

$$\begin{bmatrix} [T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}} & [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{B}} & \cdots & [T(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}$$

$\mathcal{B}$-matricen for $T$

Den noteres nogle gange med $[T]_{\mathcal{B}}$

# Eksemplet fra tidligere



## Eksempel

Lad $T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

Vælger vi basen $\mathcal{B} = \left\{ \overset{b_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}, \overset{b_2}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \right\}$ (bestående af egenvektorer), har vi

- $T(\mathbf{b}_1) = 2\mathbf{b}_1 = 2b_1 + 0b_2$
- $T(\mathbf{b}_2) = -1\mathbf{b}_2 = 0b_1 - 1b_2$

Altså er $[T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $[T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

# Eksemplet fra tidligere

## Eksempel (fortsat)

Dermed er matrixrepræsentationen $[T]_{\mathcal{B}}$ af $T$ mht. $\mathcal{B}$ givet ved

$$\begin{bmatrix} [T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}} & [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

# Den generelle formulering
(for diagonaliserbare matricer)

## Sætning (side 309)

*Lad $T$ være en lineær afbildning med $n \times n$-standardmatrix $A$. Hvis $A = PDP^{-1}$ for en diagonalmatrix $D$, og søjlerne i $P$ udgør en basis $\mathcal{B}$ for $\mathbb{R}^n$, så er $\mathcal{B}$-matricen for $T$ givet ved $D$.*

(Faktisk gælder dette også, hvis $D$ ikke er diag.)

# Illustration af sammenhængen

I kanonisk basis: $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, hvor $A$ er $n \times n$
Vi ønsker i stedet at bruge basis $\mathcal{B}$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{x} \arrow[rr, "A"] \arrow[d, "P^{-1}"] & & T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = PMP^{-1}\mathbf{x} \arrow[d, shift right, "P^{-1}"'] \\
P^{-1}\mathbf{x} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} \arrow[rr, "M = {[T]_{\mathcal{B}}}"'] & & {[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}}} = MP^{-1}\mathbf{x} \arrow[u, shift right, "P"']
\end{tikzcd}
$$

# Basisskift

## Eksempel

Spejling langs linjen $y = x$ i $\mathbb{R}^2$ har standardmatrix $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Udtryk spejlingen i basen $\mathcal{B} = \left\{ \overset{b_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}, \overset{b_2}{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}} \right\}$

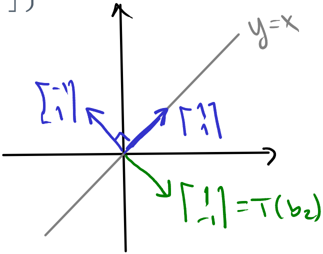
$$T(b_1) = b_1 = 1b_1 + 0b_2$$

$$T(b_2) = -b_2 = 0b_1 - 1 \cdot b_2$$

$$[T(b_1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[T(b_2)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



# Standardbasen og den nye basis



Lad søjlerne i $P$ være vektorerne i basen $\mathcal{B}$

Vi går fra

- Standardbasen til $\mathcal{B}$ ved at gange $\mathbf{x}$ med $P^{-1}$
- $\mathcal{B}$ til standardbasen ved at gange $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ med $P$

$P^{-1}x = [x]_B$

$P[x]_B = x$

# Standardbasen og den nye basis



Vi kan dermed fortolke matrixvektorproduktet

$$A\mathbf{x} = PDP^{-1}\mathbf{x}$$

på følgende måde:

På venstresiden $A\mathbf{x}$ regner vi udelukkende i standardbasen

På højresiden har vi en omvej (genvej?) via en anden basis:

1. $P^{-1}\mathbf{x}$: Oversæt $\mathbf{x}$ i standardbasen til den nye basis
2. $D(P^{-1}\mathbf{x})$: Brug den lineære transformation i den nye basis
3. $P(DP^{-1}\mathbf{x})$: Oversæt resultatet til standardbasen