Egenværdier, egenvektorer og karakteristisk ligning,

Afsnit 5.1 og 5.2

24. marts 2025

Lineær Algebra

Forår 2025

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Del I

Repetition

Quiz

Gå til hjemmesiden

`https://poll.math.aau.dk/wjahjgtr`

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right) = -2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 = -6$$

Koordinatvektorer

Når $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \ldots, \mathbf{b}_k\}$ er en basis for et underrum V, kan ethvert $\mathbf{v}$ i V skrives på formen

$$\mathbf{v} = c_1 b_1 + c_2 b_2 + \ldots + c_k b_k$$

Vi indfører notationen $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix}$

$[v]_{\mathcal{B}}$ kaldes koordinatvektoren for $\mathbf{v}$ mht. basen $\mathcal{B}$

Dimension af underrum

Det kan vises, at for et fastlagt V vil enhver basis for V indeholde det samme antal vektorer. Derfor defineres:

Definition

For et underrum V af $\mathbb{R}^n$ defineres *dimensionen* af V til at være antallet af vektorer i en basis for V. Dimensionen noteres $\dim(V)$.

Per konvention siger vi, at $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$

Rangsætningen

Vi husker, at $\operatorname{rank}(A)$ er defineret som $\dim \operatorname{Col}(A)$.

Sætning (Rangsætningen)

Hvis A er en $m \times n$-matrix, så gælder $\operatorname{rank}(A) + \dim \operatorname{Nul}(A) = n$

Kofaktorudvikling

Vi så, at determinanter for $n \times n$-matricer kan udregnes ved kofaktorudvikling

Eksempel

$$\det \begin{pmatrix} {}^{+}1 & 2 & 3 \\ {}^{-}2 & {}^{+}0 & {}^{-}2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \cdot (-4) - 2 \cdot (-4)$$

$$= 16$$

Flere kriterier for invertibilitet

Sætning

Lad A være en $n \times n$-matrix. Følgende udsagn er ækvivalente.

1. *A er inverterbar*
2. *Søjlerne i A er en basis for $\mathbb{R}^n$*
3. $\dim \operatorname{Col}(A) = n$
4. $\operatorname{rank}(A) = n$
5. $\operatorname{Nul}(A) = \{\mathbf{0}\}$
6. $\dim \operatorname{Nul}(A) = 0$
7. $\det(A) \neq 0$

Del II

Nyt stof

Diagonalmatricer og kanonisk basis

Vektorerne $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ kaldes de kanoniske basisvektorer

Giver særligt pæne produkter med diagonalmatricer:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Ae_1 = A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2e_1$$

$$Ae_2 = A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -1e_2$$

En anden matrix

Lad $A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$ og definer $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Da har vi

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -4+6 \\ -6+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2v_1$$

$$A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -4+3 \\ -6+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = -1v_2$$

A opfører sig altså som en diagonalmatrix, men med 'forkert' basis

Egenvektorer

Definition

For en $n \times n$-matrix A kaldes $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ en *egenvektor* for A, hvis

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

for et reelt tal λ. Tallet λ kaldes *egenværdien* hørende til $\mathbf{v}$.

lambda

Bemærk: Egenværdien kan være nul, men egenvektoren må ikke være nulvektoren

Hvis $v=0$ har vi

$A v = \bar{0} = \lambda \bar{v}$ for alle mulige λ. Derfor ser bort fra $\bar{v} = \bar{0}$

Egenvektorer

Eksempel

$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor for $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$. Hvad er den tilhørende egenværdi?

$$Av = \begin{bmatrix} 14 - 4 \\ -6 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \end{bmatrix} \overset{?}{=} \lambda v$$

Dvs. $\lambda = 5$ er egenværdien hørende til v.

Eksempel

Er $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ en egenvektor for $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$?

$$Bv = \begin{bmatrix} 4 - 3 \\ 0 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \overset{?}{=} \lambda v$$

Der findes ingen sådanne λ. Derfor er v <u>ikke</u> en egenvektor for B.

Hvorfor kun kvadratiske?

Kunne vi forestille os egenvektorer for en $m \times n$-matrix A med $m \neq n$?

For at kunne gange $\mathbf{v}$ på A skal $\mathbf{v}$ være i $\mathbb{R}^n$

Vi har samtidigt, at $\mathbf{w} = A\mathbf{v}$ ligger i $\mathbb{R}^m$

Kan vi så finde en skalar λ, så $\underset{A\mathbf{v}}{\overset{}{\mathbf{w}}} = \lambda\mathbf{v}$?

Nej, da vektorerne ikke har mange indgange.

Metode til at finde egenvektorer

Antag, at λ er en kendt egenværdi. Hvordan finder vi de tilhørende egenvektorer?

$\bar{v} = I\bar{v}$

$A\bar{v} = \lambda\bar{v}$

Fra definitionen skal en egenvektor **v** opfylde…

$A\bar{v} - \lambda I\bar{v} = \bar{0}$

$(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$

Vi skal altså finde løsninger **x** til systemet…

$(A - \lambda I)\bar{x} = \bar{0}$

Dvs. $\mathrm{Nul}(A - \lambda I)$

Kaldes egenrummet hørende til λ

Metode til at finde egenvektorer

$$\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Eksempel

$\lambda = 10$ er en egenværdi for $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$.

Hvad er de tilhørende egenvektorer?

Vi skal finde nulrum for $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -3 & 9-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

$$\sim \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{-1}{3} x_2 \\ x_2 \text{ fri} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Nul}(A - 10I) = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

Dvs. alle egenvektorer hørende til $\lambda = 10$ ligger i spandet af $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Metode til at finde egenværdier

Vi husker, at egenvektorerne og -værdierne opfylder $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Hvad sker der, hvis $A - \lambda I$ er inverterbar? Da er $\mathbf{v} =$ $(A-\lambda I)^{-1}\bar{0} = \bar{0}$

Men en egenvektor må ikke være $\bar{0}$!

Vi må derfor kræve, at $A - \lambda I$… ikke er inverterbar
hvilket er ækvivalent med…

$\det(A-\lambda I) = 0$

Metode til at finde egenværdier

Polynomiet $\det(A - \lambda I)$ kaldes det *karakteristiske polynomium* for A

Tilsvarende kaldes $\det(A - \lambda I) = 0$ den *karakteristiske ligning* for A

Observationerne fra før giver, at egenværdierne er

- løsningerne til den karakteristiske ligning
- rødderne til det karakteristiske polynomium

Vi finder dem dermed ved at bestemme $\det(A - \lambda I)$ og finde rødder

Bestemmelse af egenværdier

Eksempel

Egenværdierne for $A = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ findes ved...

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 7 & 2 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ -4 & 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -4 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)\big((-1-\lambda)(5-\lambda)+8\big)$$

Nulreglen giver at $(4-\lambda)=0$ el. $(-1-\lambda)(5-\lambda)+8=0$

$$-5-5\lambda+\lambda+\lambda^2+8=0$$

$$\lambda^2-4\lambda+3=0$$

$$D=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 3=4$$

$$\lambda = \frac{-(-4)\pm\sqrt{4}}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

Dvs. egenværdierne er $4, 3, 1$

Det kar poly kan skrives som

$$(4-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda)$$

Triangulære matricer

Eksempel

Egenværdierne for $A = \begin{bmatrix} 4 & \sqrt{2} & \pi \\ 0 & 1 & 99 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ findes let da...

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & \sqrt{2} & \pi \\ 0 & 1-\lambda & 99 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda)(-2-\lambda)$$

Dvs egenværdierne er
4, 1 og -2
(netop diagonalindgangene)

Egenværdier og rækkeoperationer

Bemærk, at vi *ikke* kan bruge rækkeoperationer til at bestemme egenværdier

Altså, hvis A rækkereducerer til R, giver egenværdierne for R generelt ikke nogen information om egenværdierne for A

Men vi kan selvfølgelig bruge rækkeoperationer til at bestemme *egenrummet* $\mathrm{Nul}(A - \lambda I)$

Rødder i kar. polynomium

Hvordan finder vi rødder til et polynomium?

- Grad 2: Kender I fra gymnasiet
- Grad 3 og 4: Har formler for nogle tilfælde, men er temmeligt uspiselige[1]
- Grad mindst 5: Ingen generel metode kan eksistere

[1] Se f.eks. `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Quartic_Formula.svg`

Egenværdier og invertibilitet

Vi husker at en kvadratisk matrix A er inverterbar, hvis og kun hvis $\mathrm{Nul}(A) = \{\mathbf{0}\}$

Kan A være inverterbar, hvis 0 er en egenværdi for A? Hvis 0 er en egenværdi, eksisterer $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, så...

$A\bar{v} = \lambda\bar{v} = 0\bar{v} = \bar{0}$

Men dvs. at $\bar{v} \neq 0$ ligger i Nul(A) og dermed er A ikke inverterbar

Omvendt, hvis A *ikke* er inverterbar, så har vi et $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ i $\mathrm{Nul}(A)$. Dermed er...

$A\bar{v} = \bar{0} = 0\bar{v}$

Dvs. $\bar{v}$ er en egenvektor for A med egenværdi 0.

Egenværdier og invertibilitet

Vi kan altså udvide den allerede lange sætning med

Sætning

Lad A være en $n \times n$-matrix. Følgende udsagn er ækvivalente.

1. *A er inverterbar*
2. 0 *er ikke en egenværdi for A*

(Beviset fra før kan virke 'omvendt', men det er OK; der er brugt såkaldt kontraposition)

Har vi altid (reelle) egenværdier?

Eksempel

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Da er $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1$

Dvs. en egenværdi λ skal opfylde

$$(1-\lambda)^2 = -1$$

Dette kan <u>ikke</u> lade sig gøre (med reelle λ)

Antallet af egenvektorer

Hvis $\mathbf{v}$ er en egenvektor for A, er $c\mathbf{v}$ det også for $c \neq 0$, da...

$$A(c\bar{v}) = c(A\bar{v}) = c(\lambda\bar{v}) = \lambda(c\bar{v})$$

Har vi én egenvektor, har vi altså uendeligt mange

Vi er derfor mere interesserede i antallet af *lineært uafhængige* egenvektorer – altså dimensionen af $\mathrm{Nul}(A - \lambda I)$

Antallet af egenvektorer

Når vi har fundet en egenværdi λ, er $\dim \mathrm{Nul}(A - \lambda I)$ mindst én, men kan den være større?

Den maksimale dimension er multipliciteten af roden λ

Eksempel

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ har karakteristisk polynomium $(1 - \lambda)^2$

1 er altså en dobbeltrod (har multiplicitet 2)

Algebraisk og geometrisk multiplicitet

Multipliciteten af roden λ i det karakteristiske polynomium kaldes den *algebraiske multiplicitet* af λ

Dimensionen af $\mathrm{Nul}(A - \lambda I)$ kaldes den *geometriske multiplicitet* af λ

Antallet af lineært uafhængige egenvektorer hørende til et givet λ kan opsummeres som

$$1 \leq \text{geometrisk mult.} \leq \text{algebraisk mult.}$$

Algebraisk og geometrisk multiplicitet

Eksempel

$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ har kar. polynomium $(-1-\lambda)(-1-\lambda)(3-\lambda)$

$= (-1-\lambda)^2(3-\lambda)^1$

Egenværdi	Alg. mult.	Geom. mult.
-1	2	1 el. 2
3	1	1

Algebraisk og geometrisk multiplicitet

Eksempel

Det viser sig, at $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ har egenrum

Faktisk er disse baser

- $\lambda = -1$: Span $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$
- $\lambda = 3$: Span $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Dvs de geom. mult. er 2 og 1

A har altså så mange egenvektorer som muligt

Multipliciteterne kan være forskellige

Eksempel

Matricen $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ har kar. polynomium $(2-\lambda)^3$

Den eneste (lineært uafhængige) egenvektor er $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda = 2$ har altså algebraisk mult. 3 og geometrisk mult. 1

Egenvektorer for forskellige egenværdier

Kan vi risikere, at egenrummene 'overlapper' hinanden?

Nej, vi har nemlig:

Sætning

Hvis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ *er egenvektorer hørende til forskellige egenværdier, så er* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ *lineært uafhængig.*

Similære matricer

To $n \times n$-matricer A og B kaldes *similære*, hvis der eksisterer en inverterbar matrix P, så

$$A = PBP^{-1}$$

$$P^{-1}AP = B$$

Sætning

Hvis A og B er similære, så har de samme karakteristiske polynomium og samme egenværdier. For hver egenværdi er de algebraiske og geometriske multipliciteter identiske for A og B.

$$I = PP^{-1} = PIP^{-1}$$

Dette følger af $\det(A - \lambda I) = \det(PBP^{-1} - \lambda PIP^{-1})$

$$= \det(P(B - \lambda I)P^{-1})$$

$$= \det(P)\det(B - \lambda I)\det(P^{-1})$$

$$\frac{1}{\det(P)}$$

$$= \det(B - \lambda I)$$

Similære matricer

Eksempel (fra starten af forelæsningen)

$A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$ opførte sig som en diagonalmatrix.

Egenvektorerne var $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Sætter vi $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ har vi $P^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

Da har vi $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, så A er similær med en diagonal-matrix

(Dette er et eksempel på diagonalisering, som vi ser næste gang)