Matrixalgebra og inverse matricer, Afsnit 2.1–2.2

27. februar 2025

Lineær Algebra

Forår 2025

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Del I

Repetition

Quiz

Gå til hjemmesiden

`https://poll.math.aau.dk/wjahjgtr`

Billedmængden af en transformation

For en transformation T betegner $\operatorname{range}(T)$ mængden af alle billeder under T

„alt det, vi rammer, når vi bruger alle mulige vektorer som input“

Hvis $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ er lineær, er

$$T(\mathbf{x}) = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$$

Det vil sige, at $\operatorname{range}(T) =$ Span$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

Lineær (u)afhængighed

Definition

Mængden af vektorer $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s\}$ i $\mathbb{R}^n$ siges at være lineært uafhængig, hvis

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_s\mathbf{v}_s = \mathbf{0} \tag{1}$$

medfører $c_1 = c_2 = \cdots = c_s = 0$.

Hvis der eksisterer konstanter $c_1, c_2, \ldots, c_s$ ikke alle lig nul, så (1) er opfyldt, kaldes $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s\}$ i $\mathbb{R}^n$ lineært afhængig.

Standardmatrix

Sætning

Lad $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være en lineær transformation. Da eksisterer en entydig $m \times n$-matrix A, sådan at

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \text{for alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Yderligere gælder, at

$$A = [T(\mathbf{e}_1)\, T(\mathbf{e}_2) \cdots T(\mathbf{e}_n)].$$

e_i har n indgange
hvor i'te indgang
er 1 og resten
er 0.

Matricen A i sætningen kaldes *standardmatricen* for T

Del II

Nyt stof

Summen af matricer

Hvis A og B begge er $m \times n$-matricer, defineres deres sum elementvist

Eksempel

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 10 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 13 \\ 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

Ganges en matrix med en skalar, ganges skalaren ind på hvert element i matricen

Eksempel

$$2 \begin{bmatrix} 0 & 5 & 10 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 20 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

$$(-1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

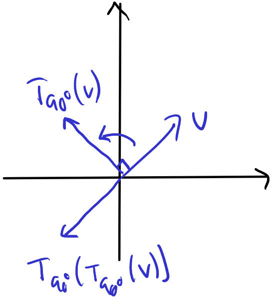
Summen af matricer
Egenskaber

Hvis A, B og C er matricer af samme dimensioner, og r og s er skalarer, gælder

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + O = A$, hvor O er nulmatricen
- $r(A + B) = rA + rB$
- $(r + s)A = rA + sA$
- $r(sA) = (rs)A$ $= s(rA)$

Sammensætning af rotationer

Den lineære transformation $T_{90^\circ} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, der drejer en vektor 90° i positiv omløbsretning har standardmatrix
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Billedet $T_{90^\circ}(\mathbf{v})$ er jo bare en vektor!

Altså giver $T_{90^\circ}(T_{90^\circ}(v))$ mening

På matrixform: $A(Av) \stackrel{?}{=} (AA)v$

Produktet AA

Hvordan skal vi definere AA?

Vi har (per definition)

$$A\mathbf{v} = v_1\bar{a}_1 + v_2\bar{a}_2 + \cdots + v_n\bar{a}_n$$

Da matrix-vektor-produktet er lineært, har vi derfor

$$\begin{aligned} A(A\mathbf{v}) &= A(v_1\bar{a}_1 + v_2\bar{a}_2 + \cdots + v_n\bar{a}_n) \\ &= v_1(A\bar{a}_1) + v_2(A\bar{a}_2) + \cdots + v_n(A\bar{a}_n) \\ &= [A\bar{a}_1 \ A\bar{a}_2 \ \cdots \ A\bar{a}_n]\bar{v} \end{aligned}$$

Produktet AA
(fortsat)

For at matrixproduktet AA følger de regneregler, vi allerede har, skal det defineres som

$$AA = [A\mathbf{a}_1 \, A\mathbf{a}_2 \, \cdots \, A\mathbf{a}_n]$$

Eksempel

Hvis $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ som før, er $AA = \left[A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \; A\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right]$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Passer det?

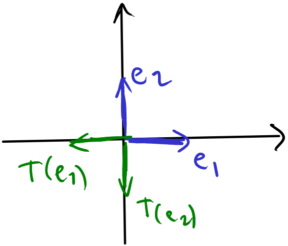
$T = T_{90^\circ} \circ T_{90^\circ}$

Sammensætning $T_{90^\circ} \circ T_{90^\circ}$ må være en rotation med 180°
(Dette er en lineær tranformation)

Standardmatricen for denne er

$$A = \begin{bmatrix} T(e_1) & T(e_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



Matrixprodukt

Hvis A er en $m \times n$-matrix, og B er en $n \times p$-matrix, så er

- $B\mathbf{v}$ en vektor i $\mathbb{R}^n$
- altså, kan vi beregne $A(B\mathbf{v})$

Definition

Hvis A er en $m \times n$-matrix, og B er en $n \times p$-matrix med søjler $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_p$, så er

$$AB = [A\mathbf{b}_1 \; A\mathbf{b}_2 \; \cdots \; A\mathbf{b}_p].$$

$m \times p$

Matrixprodukt

Eksempler

$$= \left[\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right]$$

Eksempel

$$\underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}} \underset{3\times 3}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 0\cdot 3 & 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 3 & 0\cdot 1 - 3\cdot 2 + 1\cdot 3 \\ 2\cdot 4 + 1\cdot 5 + 0\cdot 6 & 1\cdot 4 + 1\cdot 5 + 1\cdot 6 & 0\cdot 4 - 3\cdot 5 + 1\cdot 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 6 & -3 \\ 13 & 15 & -9 \end{bmatrix}$$

Eksempel

Udregn $\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 6 & 5 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$, hvis det er defineret

$2\times 2 \quad 3\times 2$

$2 \neq 3$

Størrelserne passer ikke sammen, så prod. er ikke def.

Dimensionen af matrixproduktet

$$A \qquad B$$

$$\underbrace{m \times \underbrace{n \qquad n}_{\text{Skal være ens}} \times p}_{\text{Giver dimensionen af } AB}$$

Matrixprodukt og skalarprodukt

Elementet $(AB)_{ij}$ i matrixproduktet AB er skalarproduktet mellem i'te række i A og j'te søjle i B

Eksempel

Hvad er element $(2,3)$ i produktet $\begin{bmatrix} -1 & 14 & 3 \\ 11 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 6 & 13 & 1 \\ 77 & 9 & 1 \end{bmatrix}$

$$1 \cdot 11 + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 = 13$$

Egenskaber

Matrixproduktet har følgende egenskaber:
(Antag, at matricerne har passende dimensioner)

- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(B + C)A = BA + CA$
- $r(AB) = (rA)B = A(rB)$, hvor r er en vilkårlig skalar
- $IA = A = AI$, hvor I er identitetsmatricen

OBS! De to I'er har ikke nødvendigvis samme størrelse

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} = I_{n \times n}$$

I_n

PAS PÅ!

Hvorfor nævner vi både $A(B+C)$ og $(B+C)A$ i egenskaberne?

Matrixproduktet opfylder generelt *ikke* $AB = BA$

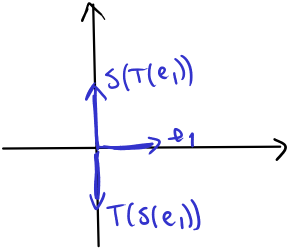
T: Spejl i x-aksen
S: Roter 90° i pos. omløbsretning

Eksempel

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$\neq$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$



PAS (stadig) PÅ!

Der er andre eksempler, hvor matrixproduktet opfører sig anderledes, end man måske kunne håbe

- $AB = AC$ medfører ikke nødvendigvis $B = C$
- $AB = O$ medfører ikke nødvendigvis $A = 0$ eller $B = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrixinvers

Hvornår betyder $AB = AC$, at $B = C$?

Vi vil på én eller anden måde gerne „dividere“ med en matrix
Men hvad betyder det?

For brøker gælder: At dividere med 2 er det samme som…

at gange med $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ og $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

en (multiplikativ) invers til 2

Matrixinvers

Definition

En $n \times n$-matrix A kaldes *inverterbar*, hvis der eksisterer en matrix A^{-1}, som opfylder

$$AA^{-1} = I_n \quad \text{og} \quad A^{-1}A = I_n.$$

Matricen A^{-1} kaldes den *inverse* af A.

Eksempel

Er $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ den inverse til $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$? Ja

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrixinvers

Hvis A er inverterbar, og $AB = AC$, får vi...

$$A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC)$$

$$(A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C$$

$$IB = IC$$

$$B = C$$

OBS. Det er ikke korrekt at skrive

$$A^{-1}(AB) = (AC)A^{-1}$$

Egenskaber

Hvis A og B er inverterbare, gælder

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$AB(B^{-1}A^{-1}) = AIA^{-1} = I$

Bemærk desuden, at den inverse er entydig

Hvordan udregnes A^{-1}?

For 2×2-matricer har vi følgende resultat:

$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$

Sætning

Matricen $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ er inverterbar, hvis og kun hvis $\det A \neq 0$.

Hvis A er inverterbar, er dens inverse givet ved

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

A^{-1} for 2×2-matricer

Eksempel

Er $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ inverterbar?

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0$$

Dvs. at matricen er <u>ikke</u> inverterbar

Eksempel

Er $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ inverterbar?

$$\det \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = 4 \cdot 3 - 5 \cdot 2 = 2$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Elementærmatricer

En matrix kaldes en *elementærmatrix*, hvis den kan dannes ved at lave én rækkeoperation på identitetsmatricen.

Eksempel

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}}$$

Eks. på elementærmatricer

Elementærmatricer

Hvis E er en elementærmatrix, er EA matricen, hvor den tilsvarende rækkeoperation er udført på A.

Eksempel

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Da er $EA = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

Elementærmatricer

Alle elementærmatricer er inverterbare:
Brug bare den „omvendte“ rækkeoperation

Eksempel

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ har invers } E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Elementærmatricer og invers

Antag, at A er en $n \times n$-matrix med $A \sim I$

Der eksisterer rækkeoperationer, så A reduceres til identitetsmatricen
Dermed eksisterer også tilhørende elementærmatricer $E_1, E_2, \ldots, E_s$

Dette betyder

$$\underbrace{E_s \cdots E_2 E_1}_{A^{-1}} A = I$$

Algoritme til at finde A^{-1}

- Opskriv matricen $[A \mid I]$, og rækkereducer til $[R \mid B]$
- Hvis...
  - ... $R = I$, er A inverterbar, og $A^{-1} = B$
  - ... $R \neq I$, er A ikke inverterbar

Eksempel

$$\left[\underbrace{\begin{matrix}2 & 4 & 1\\ 1 & 4 & 2\\ 1 & 4 & 1\end{matrix}}_{A}\;\middle|\;\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right] \sim \left[\underbrace{\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}}_{I}\;\middle|\;\underbrace{\begin{matrix}1 & 0 & -1\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4}\\ 0 & 1 & -1\end{matrix}}_{A^{-1}}\right]$$

Algoritme til at finde A^{-1}

Eksempel

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

B

Er ikke I

$\Rightarrow$ B kan ikke inverteres

Sammenhæng med matrixligning

Vi har ofte set på matrixligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Hvad kan vi konkludere, hvis A er inverterbar?

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$
$$Ix = A^{-1}b$$
$$x = A^{-1}b$$

Kendt Kendt

Tjek at det er en løsning.

$$A(A^{-1}b) \stackrel{?}{=} b$$
$$(AA^{-1})b \stackrel{?}{=} b$$
$$Ib \stackrel{?}{=} b$$
$$b = b$$

Hvis A er inverterbar har ligningen præcist én løsning $(x = A^{-1}b)$

Transponeret matrix

Matricer har en ekstra operation: *transponering*

Hvis A er en $m \times n$-matrix, er $A^\top$ $n \times m$-matricen med $(A^\top)_{ij} = a_{ji}$

Eksempel

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Transponeret matrix
Egenskaber

- $(A^\top)^\top = A$
- $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$
- $(rA)^\top = r(A^\top)$ for en vilkårlig skalar r
- $(AB)^\top = B^\top A^\top$
- Hvis A er inverterbar, er $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$