Ortogonalprojektion på underrum og Gram-Schmidt, Afsnit 6.3 og 6.4

10. april 2025

Lineær Algebra

Forår 2025

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Del I

Repetition

Indre produkter

Definition

For to vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ defineres deres indre produkt som

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = \mathbf{u}^T \mathbf{v}. \quad \neq uv^T$$

Sætning

Lad $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *være vektorer i* $\mathbb{R}^n$*, og lad* c *være et reelt tal. Da gælder følgende:*

a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

b) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

c) $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v})$

d) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ *med lighed hvis og kun hvis* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

Ortogonale komplementer

Definition

To vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ siges at være ortogonale, hvis $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0$.

Definition

Lad W være en mængde af (muligvis uendeligt mange) vektorer i $\mathbb{R}^n$.
Vi definerer da mængden $W^\perp$ til at være alle vektorer $\mathbf{z}$, der opfylder $\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = 0$ for *alle* w i W.
Vi kalder $W^\perp$ for det ortogonale komplement til W.

Det vil sige, at det ortogonale komplement består af alle vektorer, der er ortogonale på samtlige vektorer i den oprindelige mængde

Ortogonale mængder

Vi siger, at $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ er en ortogonal mængde, hvis $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$ for alle $i \neq j$

Altså: mængden kaldes ortogonal, hvis vektorerne er parvist ortogonale

Opfylder alle vektorerne desuden $\|\mathbf{u}_i\| = 1$, kaldes mængden ortonormal

Ortogonale baser?

Sætning

Lad $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k\}$ være en ortogonal basis for et underrum W af $\mathbb{R}^n$. For enhver vektor $\mathbf{w}$ i W gælder, at koefficienterne i linearkombinationen

$$\mathbf{w} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \cdots + c_k\mathbf{b}_k$$

er givet ved $c_i = \dfrac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{b}_i}{\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_i}$. $= \|b_i\|^2$

$\|b_i\| = 1$

Bemærk, at når $\mathcal{B}$ er orto<u>normal</u>, betyder dette

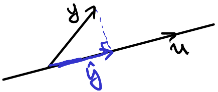
$$c_i = w \cdot b_i$$

Projektion på en linje

Lad en linje i $\mathbb{R}^n$ være udspændt af vektoren **u**

Vi kom sidste gang frem til, at projektionen $\hat{\mathbf{y}}$ af **y** på linjen er givet ved

$$\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\mathbf{u}$$



Afstanden fra **y** til linjen er dermed…

$\|y - \hat{y}\|$

Del II

Nyt stof

Afstand til underrum

I dag generaliserer vi til mere generelle underrum

Det anvendes f.eks. til mindste kvadraters metode:
Vi har observeret data, som repræsenteres ved en vektor **y** (denne kan indeholde målefejl). Vores model siger, at den „sande“ vektor ligger i et underrum W.

Ved at finde afstanden fra **y** til W får vi et mål for, hvor tæt vi er på modellen.

Mindste kvadraters metode går (løst formuleret) ud på at finde den vektor i W, der er tættest på **y**.

Afstand til underrum
Et simpelt tilfælde

Antag, at $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5\}$ er en ortogonal basis for $\mathbb{R}^5$, og at $W = \text{Span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$

For enhver $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^5$ har vi

$$\mathbf{v} = \underbrace{c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + c_3\mathbf{b}_3}_{\text{i } W} + \underbrace{c_4\mathbf{b}_4 + c_5\mathbf{b}_5}_{\text{i } W^\perp}$$

Det giver derfor mening, at afstanden fra $\mathbf{v}$ til W skal være...

$$\|c_4 b_4 + c_5 b_5\|$$

Afstand til underrum

Et simpelt tilfælde

Eksempel

Lad $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$, og lad $W = \mathrm{Span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$. Tjek, at $\mathbf{b}_3$ ligger i $W^\perp$.

Vi tjekker, at $b_3 \cdot b_1 = 0$ og $b_3 \cdot b_2 = 0$. Dvs. b_3 ligger i $W^\perp$
og den er faktisk en basis for $W^\perp$

Find herefter afstanden fra $\mathbf{v} = \overbrace{2\mathbf{b}_1 - 4\mathbf{b}_2}^{i\ W} + \overbrace{\sqrt{2}\mathbf{b}_3}^{i\ W^\perp}$ til W

Afstanden må være $\|\sqrt{2}\, b_3\| = \sqrt{2}\, \|b_3\| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$

$= 2$

Behøver vi hele den ortogonale basis?

Hvad nu, hvis vi kun har en ortogonal basis for underrummet W?

Vi kan bruge samme idé som for linjen: Forholdsvist let at repræsentere projektionen $\hat{\mathbf{v}}$ i den ortogonale basis for W.

En idé kunne derfor være:

1. find projektionen $\hat{\mathbf{v}}$ ved samme strategi som for linjen
2. brug $\mathbf{z} = \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}$ til at bestemme afstanden

Ortogonal dekomposition

Sætning

Lad W være et underrum af $\mathbb{R}^n$. Enhver vektor $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ har en entydig opskrivning på formen

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}} + \mathbf{z},$$

hvor $\hat{\mathbf{v}}$ ligger i W og $\mathbf{z}$ ligger i $W^{\perp}$.

Yderligere gælder, at hvis $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k\}$ er en ortogonal basis for W, så er

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 + \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2\cdot\mathbf{b}_2}\mathbf{b}_2 + \cdots + \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{b}_k}{\mathbf{b}_k\cdot\mathbf{b}_k}\mathbf{b}_k$$

og $\mathbf{z} = \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}$.

Ortogonal dekomposition

Bemærk: $w_1 \cdot w_2 = 0$

Eksempel

Lad $W = \text{Span}\left\{ \underset{w_1}{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}, \underset{w_2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}} \right\}$, og lad $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$. Find den ortogonale dekomposition af $\mathbf{v}$ med komponenter i W og $W^\perp$

For at find $\hat{v}$, beregnes

$$\frac{v \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} = \frac{8+5+5}{2^2+1^2+1^2} = \frac{18}{6} = 3$$

$$\frac{v \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} = \frac{6-5+5}{1^2+(-1)^2+1^2} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\Rightarrow \hat{v} = 3w_1 + 2w_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Komponenten i $W^\perp$ er

$$z = v - \hat{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tjek:
$z \cdot w_1 = 0$
$z \cdot w_2 = 0$

Fra ortogonalprojektion til afstand

Intuitivt burde den ortogonale projektion af $\mathbf{v}$ på W give den vektor i W, der er tættest på $\mathbf{v}$

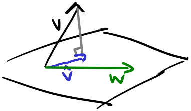
Holder det også teoretisk?

Nærmeste vektor i et underrum

Sætning

Lad W være et underrum af $\mathbb{R}^n$, lad $\mathbf{v}$ være en arbitrær vektor i $\mathbb{R}^n$, og lad $\hat{\mathbf{v}}$ være ortogonalprojektionen af $\mathbf{v}$ på W. Da gælder

$$\operatorname{dist}(v,\hat{v}) = \|\mathbf{v}-\hat{\mathbf{v}}\| < \|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|, = \operatorname{dist}(v,w)$$



for alle vektorer $\mathbf{w} \neq \hat{\mathbf{v}}$ i W.

Bevis.

Da $\mathbf{v}-\hat{\mathbf{v}}$ ligger i $W^\perp$ og $\hat{\mathbf{v}}-\mathbf{w}$ ligger i W, giver Pythagoras

$$\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2 = \|\underbrace{\mathbf{v}\overbrace{-\hat{\mathbf{v}}}_{i\,W^\perp}+\hat{\mathbf{v}}}^{=\bar{0}}\underbrace{-\mathbf{w}}_{i\,W}\|^2 = \|v-\hat{v}\|^2 + \|\hat{v}-w\|^2 \quad \underset{\hat{v}\neq w}{>0 \text{ hvis}}$$

□

Det betyder altså, at $\hat{\mathbf{v}}$ er den vektor i W, der ligger tættest på $\mathbf{v}$

Afstand til underrum

Eksempel

$u_1 \cdot u_2 = 0$

Lad $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $W = \text{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$. Find ortogonalprojektionen af $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 10 \\ 18 \\ -10 \end{bmatrix}$ på W, og find derefter afstanden fra $\mathbf{v}$ til W

$$\frac{v \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} = \frac{20 + 90 + 10}{2^2 + 5^2 + (-1)^2} = \frac{120}{30} = 4$$

$$\frac{v \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} = \frac{-20 + 18 - 10}{(-2)^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{-12}{6} = -2$$

$$\Rightarrow \hat{v} = 4u_1 - 2u_2 = \begin{bmatrix} 8 + 2 \cdot 2 \\ 20 - 2 \cdot 1 \\ -4 - 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 18 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Afstand er $\|v - \hat{v}\| = \left\| \begin{bmatrix} 10 \\ 18 \\ -10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 \\ 18 \\ -6 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + (-4)^2}$

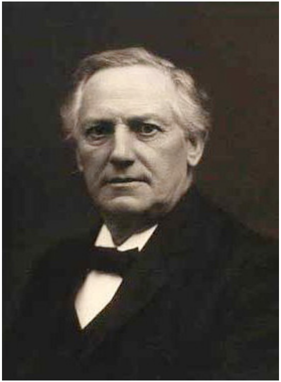
$= \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$

Hvordan findes ortogonale baser?

Når vi skal lave ortogonalprojektioner, er ortogonale/ortonormale baser altså smarte

Men hvordan finder vi dem?

Gram-Schmidt



Jørgen Pedersen Gram
Johannes Hauerslev

Erhard Schmidt
Math. Forschungsinst. Oberwolfach
(orig. Konrad Jacobs)

Gram-Schmidt

Idé

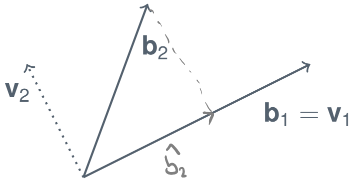
Idéen er at starte med en basis $\mathcal{B}$, og ændre vektorerne én efter én, så vi fjerner de dele, der ligger i samme retning som andre basisvektorer

Eksempel

Lad $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$. For at finde en ortogonal basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ sætter vi $\mathbf{v}_1 = \mathbf{b}_1$. Dernæst sætter vi

$$\mathbf{v}_2 = b_2 - \hat{b}_2$$

$$= b_2 - \frac{b_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1$$



Gram-Schmidt

Mere generelt

For at omdanne basen $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ til en ortogonal basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ følges nedenstående trin.

1. Sæt $\mathbf{v}_1 = \mathbf{b}_1$
2. Gør følgende for $i = 2, 3, \ldots, n$:
   Sæt $\mathbf{v}_i$ til at være $\mathbf{b}_i$ minus projektionen på underrummet udspændt af $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}$. Altså

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{b}_i - \left(\frac{\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{v}_{i-1}}{\mathbf{v}_{i-1} \cdot \mathbf{v}_{i-1}}\mathbf{v}_{i-1} \right)$$

Ønskes en ortonormal basis, kan vektorerne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ normeres undervejs (eller til sidst)

Gram-Schmidt

Eksempel

Lad $\mathbf{x}_1 = [1,1,1,1]^T$, $\mathbf{x}_2 = [0,1,1,1]^T$, $\mathbf{x}_3 = [0,0,1,1]^T$ og lad $W = \text{Span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$. Find en ortonormal basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ for W.

Vi sætter $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\|x_1\|} x_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$

$$\tilde{v}_2 = x_2 - \frac{x_2 \cdot v_1}{\underbrace{v_1 \cdot v_1}_{=1,\text{ da } v_1 \text{ er normeret}}} v_1 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\cdot 3 \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{3}{4}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{3}{4}\\\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}-3\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$v_2 = \frac{1}{\|\tilde{v}_2\|}\tilde{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{(-3)^2+1^2+1^2+1^2}}\begin{bmatrix}-3\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{bmatrix}-3\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\tilde{v}_3 = x_3 - \frac{x_3 \cdot v_1}{\underbrace{v_1 \cdot v_1}_{=1}} v_1 - (x_3 \cdot v_2) v_2$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{12}} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_3 = \frac{1}{\|\tilde{v}_3\|} \tilde{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{0^2 + (-2)^2 + 1^2 + 1^2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ er en ortonormal basis for W.

$\{v_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3\}$ er en ortogonal basis for W, men er ikke ortonormal

Rækkefølgen har en betydning

Vær opmærksom på:
Basen, der kommer ud af Gram-Schmidt, afhænger af rækkefølgen af vektorerne i $\mathcal{B}$

Eksempel

Benyttes Gram-Schmidt på $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ fås $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Bruger vi i stedet $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ fås $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$, inden normering

Matrixfaktorisering

Vi har tidligere set diagonalisering $A = PDP^{-1}$. Dette er et eksempel på en matrixfaktorisering

Sådanne matrixfaktoriseringer gør visse problemer lettere at løse

Gram-Schmidt kan bruges til at finde en anden form for faktorisering (hvis matricen opfylder visse betingelser)

QR-faktorisering

Vi siger, at en $m \times n$-matrix A kan QR-faktoriseres, hvis der eksisterer

- en $m \times n$-matrix Q, hvis søjler er en ortonormal basis for $\mathrm{Col}(A)$
- en øvre triangulær $n \times n$-matrix R med positive diagonalindgange

sådan at $A = QR$

Eksempel

$$\underbrace{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -5 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}}_{A} = \underset{Q}{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}} \underset{R}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}$$

Hvordan findes den?

Sætning

Hvis A er en $m \times n$-matrix med lineært uafhængige søjler, eksisterer en QR-faktorisering $A = QR$. Her er Q en $m \times n$-matrix hvis søjler udgør en ortonormal basis for $\mathrm{Col}(A)$*, mens R er en øvre triangulær $n \times n$-matrix med positive diagonalindgange.*

For at finde Q kan vi bruge Gram-Schmidt

For at finde R, kan vi bruge Q og ovenstående sætning. Vi har nemlig $Q^T Q = I$, og dermed

$$Q^T A = Q^T Q R = R$$

QR-faktorisering

Eksempel

Vi så tidligere, at $\left\{ \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3/\sqrt{12} \\ 1/\sqrt{12} \\ 1/\sqrt{12} \\ 1/\sqrt{12} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \right\}$ er en ortonormal basis for søjlerne i $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. En QR-faktorisering er da...

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-3}{\sqrt{12}} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \qquad R = Q^T A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} & \frac{2}{\sqrt{12}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Søjlerne i Q

I sætningen før, står der bare, at søjlerne i Q er en ortonormal basis for $\operatorname{Col} A$. Vi kan gøre det lidt mere specifikt:

De første k søjler i Q er en ortonormal basis for $\operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}$, hvor $\mathbf{a}_i$ betegner i'te søjle i A

QR og mindste kvadraters metode

I begyndelsen nævnte jeg mindste kvadraters metode. Her har vi et *inkonsistent* ligningssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, og vi ønsker at finde det $\hat{\mathbf{x}}$, der minimerer $\|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|^2$.
Det kan vises, at når A har lineært uafhængige søjler, så er $\hat{\mathbf{x}} = (A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}$

Hvis $A = QR$ er en QR-faktorisering får vi da

$$\hat{\mathbf{x}} = ((QR)^TQR)^{-1}(QR)^Tb = (R^TQ^TQR)^{-1}R^TQ^Tb$$
$$= (R^TR)^{-1}R^TQ^Tb = R^{-1}(R^T)^{-1}R^TQ^Tb$$
$$= R^{-1}Q^Tb$$

Bemærk, at $R\hat{\mathbf{x}} = Q^T\mathbf{b}$ er særligt let at løse, da...

R er øvre triangulær.

Det kan løses ved det, der hedder "back-substitution"