Dimension, rang og determinant, Afsnit 2.9, 3.1 og 3.2

13. marts 2025

Lineær Algebra

Forår 2025

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Del I

Repetition

Quiz

Gå til hjemmesiden

https://poll.math.aau.dk/wjahjgtr

Basis for underrum

Definition

En mængde $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ kaldes en basis for underrummet V, hvis

- $\mathcal{B}$ er lineært uafhængig (ikke for mange vektorer)
- $V = \mathrm{Span}(\mathcal{B})$ (ikke for få vektorer)

Et underrum kan have flere forskellige baser
Det kan dog vises, at alle baser har samme antal vektorer

Opgave 2.8 15

Afgør, om $\left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$ er en basis for $\mathbb{R}^2$.

Det vil sige, at vi skal tjekke, om vektorerne er lineært uafhængige, og om enhver vektor i $\mathbb{R}^2$ ligger i spændet af dem.

Ved at rækkereducere får vi

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & 10 & v_1 \\ -2 & -3 & v_2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5}(-3v_1 - 10v_2) \\ 0 & 1 & \frac{2}{5}v_1 + v_2 \end{array}\right]$$

$$c_1 \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Baser giver en *entydig* linearkombination

Hvis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k\}$ er en basis for V, og $\mathbf{v} \in V$, så eksisterer vægte $c_1, c_2, \ldots, c_k$, så

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \cdots + c_k\mathbf{b}_k.$$

Hvis $\mathbf{v} = \tilde{c}_1\mathbf{b}_1 + \tilde{c}_2\mathbf{b}_2 + \cdots + \tilde{c}_k\mathbf{b}_k$ er en anden linearkombination, får vi

$$\mathbf{0} = \mathbf{v} - \mathbf{v} = (c_1 - \tilde{c}_1) b_1 + (c_2 - \tilde{c}_2) b_2 + \cdots + (c_k - \tilde{c}_k) b_k$$

Da basisvektorerne er lineært uafhængige, giver dette...

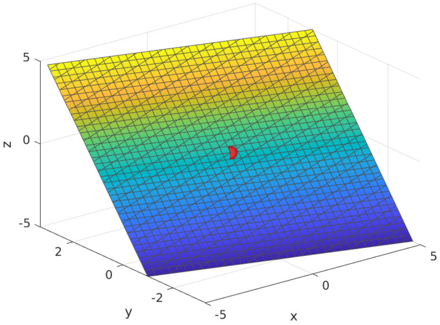
$c_i - \tilde{c}_i = 0$ for alle i Dvs. $c_i = \tilde{c}_i$

Del II

Nyt stof

Et plan i $\mathbb{R}^3$

De to vektorer $[1, 1, 3]^T$ og $[2, 0, 1]^T$ udspænder et plan P i $\mathbb{R}^3$



I en eller anden forstand har P mere til fælles med $\mathbb{R}^2$ end $\mathbb{R}^3$
Hvordan fanger vi denne sammenhæng præcist?

Hvad giver basen os?

En basis for P er $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

har 3 indgange

Enhver vektor $\mathbf{v}$ i planet kan altså skrives som $\mathbf{v} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2$

Hvis vi er enige om $\mathcal{B}$, kan vi altså bestemme $\mathbf{v}$ udelukkende fra…

c_1 og c_2

Koordinatvektorer

Når $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \ldots, \mathbf{b}_k\}$ er en basis for et underrum V, kan ethvert $\mathbf{v}$ i V skrives på formen

$$\mathbf{v} = c_1 b_1 + c_2 b_2 + \cdots + c_k b_k$$

Vi indfører notationen $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix}$

Bemærk at

$B[v]_B = v$

$[v]_{\mathcal{B}}$ kaldes koordinatvektoren for $\mathbf{v}$ mht. basen $\mathcal{B}$

Koordinatvektorer

Eksempel

En basis er givet ved $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Vi har $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 16 \\ 11 \\ 4 \end{bmatrix} = \overbrace{3\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 + 4\mathbf{b}_3}^{\text{Kommer fra at løse } Bx = v}$, så $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

Hvis $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, hvad er så $\mathbf{u}$?

$$u = 0b_1 + 1b_2 + 2b_3$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Planet fra før

Enhver vektor **v** i planet fra før har en koordinatvektor i $\mathbb{R}^2$

Altså: Selvom **v** ligger i $\mathbb{R}^3$ kan den beskrives ved en vektor i $\mathbb{R}^2$

Dette giver en stringent forklaring af "P minder om $\mathbb{R}^2$"
(Med et fint ord er P isomorf med $\mathbb{R}^2$)

Dimension af underrum

Helt generelt gælder, at når en basis $\mathcal{B}$ for et underrum V af $\mathbb{R}^n$ består af k vektorer, så er V isomorf med $\mathbb{R}^k$

Det kan vises, at for et fastlagt V vil enhver basis for V indeholde det samme antal vektorer. Derfor defineres:

Definition

For et underrum V af $\mathbb{R}^n$ defineres *dimensionen* af V til at være antallet af vektorer i en basis for V. Dimensionen noteres $\dim(V)$.

Per konvention siger vi, at $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$

Dimension af underrum

En basis er $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

n vektorer

$= \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

standardbasen el. den kanoniske basis.

Eksempel

$\dim(\mathbb{R}^n) = n$

Eksempel

$$V = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$ Hvad er $\dim(V)$?

Vi bemærker, at søjlerne er lin. uafh. og derfor er de også en basis for V. Dvs. $\dim(V) = 3$

Matrixrang

Definition

For en matrix A defineres dens rang, rank(A), til at være dimensionen af Col(A).

Idet en basis for Col(A) udgøres af A's pivotsøjler...

vil rank(A) være antallet af pivotsøjler

Dimensionen af Nul(A)

Vi har tidligere set, at en basis for Nul(A) kan findes fra den parametriske løsning. Antallet af vektorer i denne form er…

antallet af frie variable, som er antallet af ikke-pivotsøjler

Rangsætningen

dim Col(A)

//

Sætning

Hvis A er en $m \times n$-matrix, så gælder $\operatorname{rank}(A) + \dim \operatorname{Nul}(A) = n$

n søjler

Tilbage til invertibilitet

Ud fra rangsætningen kan vi få endnu et kriterium for invertibilitet:

En $n \times n$-matrix A er inverterbar, hvis og kun hvis den har n pivotsøjler
Men da er $\text{rank}(A) = n$

Rangsætningen $n = \text{rank}(A) + \dim \text{Nul}(A)$ giver så...

$n = n + \dim \text{Nul}(A)$

$\Rightarrow \dim \text{Nul}(A) = 0$

altså $\text{Nul}(A) = \{\bar{0}\}$

Flere kriterier for invertibilitet

Disse overvejelser gør det muligt at udvide sætningen fra sidst

Sætning

Lad A være en $n \times n$-matrix. Følgende udsagn er ækvivalente.

1. *A er inverterbar*
2. *Søjlerne i A er en basis for $\mathbb{R}^n$*
3. $\dim \mathrm{Col}(A) = n$
4. $\mathrm{rank}(A) = n$
5. $\mathrm{Nul}(A) = \{\mathbf{0}\}$
6. $\dim \mathrm{Nul}(A) = 0$

Determinanter

Vi kender determinanten for 2×2-matricer.

Hvad med 3×3? Eller $n \times n$?

Determinanter for $n \times n$

For større matricer defineres determinanten *rekursivt*

Det vil sige, at vi finder det(A) ved at inddele A i mindre matricer (på en helt bestemt måde) og udregne determinanten af dem

Dette fortsætter vi med, indtil vi når determinanter af 2×2-matricer – dem kender vi jo allerede

$\det([\ \ ]) = |\ \ |$

Eksempel

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\right) = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

(I ser senere, hvorfra dette kommer)

Undermatricer

– er ikke indgang a_{ij}

A_{ij} er den $(n-1)\times(n-1)$-undermatrix af A, hvor vi sletter række i og søjle j

Eksempel

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 & -7 \\ 5 & -4 & -6 & 1 \\ 7 & 6 & 8 & 0 \\ -5 & -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -4 & -6 & 1 \\ 6 & 8 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_{23} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -7 \\ 7 & 6 & 0 \\ -5 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Determinanter for $n \times n$

Definition

Determinanten af en $n \times n$-matrix A er defineret som

$$\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + \ldots + (-1)^{1+n} a_{1n}\det(A_{1n})$$

Det vil sige, at determinanten er en sum, hvor hvert led er en indgang i første række af A ganget med en underdeterminant. Fortegnet er skiftevist positivt og negativt

Determinanter for $n \times n$

Eksempel

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot(-4) - 2\cdot(-4) + 3\cdot 4$$

$$= 16$$

Determinanter for $n \times n$

Eksempel

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0\left|\cdots\right| - 0\left|\cdots\right|$$

$$= 1\left(0 \cdot \left|\cdots\right| - 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0\left|\cdots\right|\right)$$

$$- 2\left(0\left|\cdots\right| - 2\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0\left|\cdots\right|\right)$$

$$= 1 \cdot (-4) - 2 \cdot (-6)$$

$$= 8$$

Udvikling af andre rækker/søjler

Determinanten er defineret fra første række, men det viser sig, at den kan udregnes fra en hvilken som helst række eller søjle

Kofaktor: $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$

Sætning

For en $n \times n$-matrix A og $1 \leq i, j \leq n$

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in} \quad \textit{(Udvikling efter i'te række)}$$
$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj} \quad \textit{(Udvikling efter j'te søjle)}$$

Fortegnet i kofaktorer

Fortegnet $(-1)^{i+j}$ i C_{ij} er lettere at huske som et skakbræt:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Kofaktorudvikling

Eksemplet fra før kan udregnes let ved kofaktorudvikling

Eksempel

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = -0\left|\{\}\right| + 0\left|\{\}\right| - 0\left|\{\}\right| + 1\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot\left(-0\left|\{\}\right| + 0\left|\{\}\right| - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\right)$$

$$= 1\cdot(-2)(-4)$$

$$= 8$$

Kofaktorudvikling

Eksempel

Udregn $\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$ ved kofaktorudvikling fra sidste række.

$$= -1\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 0\left|\,\vdots\,\right| - 0\left|\,\vdots\,\right| + 1\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$= -1 \cdot 0$ + samme underdeterminant som sidst

$= 8$

Triangulære matricer

Såkaldte triangulære matricer (ene nuller på den ene side af diagonalen) er lette at udregne determinanter for

Eksempel

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right) = 1 \begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3$$

Netop prod. af diag. elementerne.

Matricer på trappeform

Observationen fra triangulære matricer kan udvides til matricer på trappeform:

$$R = \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{bmatrix}$$

$$\det(R) = 0 \qquad \det(R) \neq 0$$

Determinanter og rækkeoperationer

Vi kan opnå trappeform gennem rækkeoperationer – men hvad betyder det for determinanten?

Sætning (side 187)

Lad A være en kvadratisk matrix. Hvis B opnås ved…

- *…at lægge k gange en række i A til en anden række, har vi* $\det(B) = \det(A)$
- *…at ombytte to rækker i A, har vi* $\det(B) = -\det(A)$
- *…at skalere en række i A med k, har vi* $\det(B) = k\det(A)$

Determinanter og rækkeoperationer

Eksempel

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -4 & -8 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (32 - 16)$$

$$= 16$$

Determinanter og rækkeoperationer

Eksempel

Bestem det $\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right)$ ved at finde den reducerede trappeform.

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -4 & -8 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (-4)\cdot(-4) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-4)^2 \cdot 1$$

$$= 16$$

Determinant og invertibilitet

Sætning

En kvadratisk matrix A er inverterbar, hvis og kun hvis $\det(A) \neq 0$.

Hvorfor? A er inverterbar hvis og kun hvis $[A \mid I_n] \rightsquigarrow [I_n \mid B]$
Rækkeoperationerne skalerer og skifter fortegn;
altså $\det(A)$ er en skalar gange $\det(I_n) = 1$

$\neq 0$

Egenskaber for determinant

Determinanten opfører sig pænt under matrixprodukt og transponering:

(a) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

(b) $\det(A) = \det(A^T)$

OBS! Dette kræver, at A og B begge er nxn

Specielt betyder (b), at det er tilladt at lave *søjle*operationer, når vi udregner determinant

Bemærk, at $\det(A + B)$ *ikke* har en pæn formel