# Linearkombinationer og spænd, Afsnit 1.3–1.5

13. februar 2025

Lineær Algebra

Forår 2025

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

# Del I

# Repetition

# Quiz



Gå til hjemmesiden

`https://poll.math.aau.dk/wjahjgtr`

# Pivotsøjler



Lad $A$ være en matrix, og lad $R$ være dens reducerede trappeform.

De søjler i $A$, hvor $R$ har pivotindgange, kaldes *pivotsøjler*

For et konsistent ligningssystem $[A|\mathbf{b}]$, hvor $\mathbf{a}_i$ er $i$'te søjle i $A$, kaldes den tilhørende variabel $x_i$ for…

- basisvariabel hvis $\mathbf{a}_i$ er en pivotsøjle
- fri variabel hvis $\mathbf{a}_i$ *ikke* er en pivotsøjle

# Antal løsninger

Fra trappeformen kan vi også afgøre, om ligningssystemet har nogen løsninger

## Sætning

Lad $[R|\mathbf{c}]$ være trappeformen af totalmatricen $[A|\mathbf{b}]$ for et ligningssystem. Da gælder

- Hvis $[R|\mathbf{c}]$ har pivot i sidste søjle, er systemet inkonsistent.
- Hvis $[R|\mathbf{c}]$ ikke har pivot i sidste søjle, er systemet konsistent. Systemet har da uendeligt mange løsninger, hvis der er mindst én fri variabel. Ellers har det en entydig løsning.

# Nulrækker er OK

Nulrækker kan ikke bruges til at afgøre, om systemet har løsninger eller ej

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Konsistent

Inkonsistent

# Del II

# Nyt stof

# Særlige matricer



## Definition

En $n \times 1$-matrix kaldes en *søjlevektor*, og en $1 \times n$-matrix kaldes en *rækkevektor*.

Ofte undlades 'søjle' og 'række', så vi bare kalder dem *vektorer*

## Eksempel

Søjlevektorer: $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \pi \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

Rækkevektorer: $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

# Vektorer i mange dimensioner



I kender måske allerede vektorer i…

- planet (2 dimensioner)
- rummet (3 dimensioner)

Vi kan sagtens arbejde i $n$ dimensioner, hvor $n > 3$.

# Rum af vektorer



Mængden af alle $m \times 1$-vektorer med reelle indgange betegnes $\mathbb{R}^m$

Det vil sige, at

- $\mathbb{R}^2$ er planet
- $\mathbb{R}^3$ er rummet

Et eksempel på en vektor i $\mathbb{R}^7$ er $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$

# Vektoraddition



Vektorer kan lægges sammen og ganges med skalarer (reelle tal)

- Summen $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ udregnes elementvist

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{bmatrix}$$

OBS:
Vektorerne
skal have
lige mange
indgange

- For en skalar $c$ er $c\mathbf{u}$ den vektor, hvor hvert element i $\mathbf{u}$ er ganget med $c$

$$c\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cu_1 \\ cu_2 \\ \vdots \\ cu_n \end{bmatrix}$$

# Linearkombinationer



## Definition

Lad $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$ og $c_1, c_2, \ldots, c_k$ skalarer i $\mathbb{R}$. Da siges

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$$

at være en *linearkombination* af $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ med koefficienter (el. vægte) $c_1, c_2, \ldots, c_k$.

## Eksempel

Lad $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $v_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}$. En linearkombination af $v_1$ og $v_2$ er

$$5v_1 + (-1)v_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

# Vektorspænd



## Definition

Lad $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$. Mængden af alle linearkombinationer af $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ kaldes *spændet* af vektorerne og betegnes $\mathsf{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$.

## Eksempel

Lad $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $v_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}$ som før. $\mathsf{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ består af alle vektorer på formen…

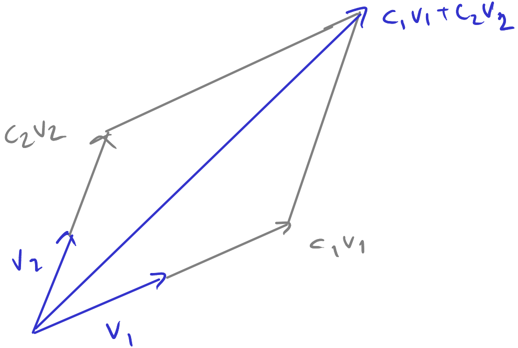
$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + 6c_2 \\ 2c_1 + 7c_2 \end{bmatrix}$$

hvor $c_1$ og $c_2$ kan vælges frit

# Geometrisk fortolkning



Spændet af vektorer har en naturlig geometrisk fortolkning i $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$



# Ligger en vektor i spændet?

Vi så, at $\text{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}6\\7\end{bmatrix}\right\} = c_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}6\\7\end{bmatrix}$

Kan vi afgøre, om $\mathbf{b} = \begin{bmatrix}9\\8\end{bmatrix} \in \text{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}6\\7\end{bmatrix}\right\}$?

ligger i

$$c_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}6\\7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9\\8\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 + 6c_2 = 9 \\ 2c_1 + 7c_2 = 8 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 9 \\ 2 & 7 & 8 \end{array}\right]$$

Ligner det noget, vi kender?

# Vektorligninger



## Sætning

Lad $A$ være en $m \times n$-matrix med søjler $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ (i $\mathbb{R}^m$), og lad $\mathbf{b}$ være en vektor i $\mathbb{R}^m$. Vektorligningen

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

har samme løsningsmængde som det lineære ligningssystem med totalmatrix $[A|\mathbf{b}]$.

# Hvilke vektorer ligger i spændet?



Vi kunne også undersøge:
Ligger alle vektorer **b** i $\mathrm{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$?

Hvis nej, hvilke gør så/gør så ikke?

# Hvilke vektorer ligger i spændet?

Eksempel



## Eksempel

Lad $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Hvad er Span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$?

$$[v_1 \ v_2 \ v_3 \mid b]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & b_1 \\ 4 & 8 & 3 & b_2 \\ 3 & 6 & 1 & b_3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & -5 & b_2-4b_1 \\ 0 & 0 & -5 & b_3-3b_1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 5 & 4b_1-b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3-3b_1+4b_1-b_2 \end{array}\right]$$

$$= b_1 - b_2 + b_3$$

Vektoren b ligger i spændet hvis og kun hvis

$$b_1 - b_2 + b_3 = 0$$

# Matrix-vektor-produkt

I lineær algebra tænker vi ofte på et ligningssystem som et produkt mellem en matrix og en vektor

## Definition

Lad $A$ være en $m \times n$-matrix med søjler $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ (i $\mathbb{R}^m$), og lad $\mathbf{v}$ være en vektor i $\mathbb{R}^n$. Vi definerer da *matrix-vektor-produktet* mellem $A$ og $\mathbf{v}$ til at være

$$A\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + \cdots + v_n\mathbf{a}_n.$$

Bemærk, at størrelserne skal passe sammen: $\mathbf{v}$ skal have ligeså mange rækker som $A$ har søjler.

# Matrix-vektor-produkt

## Eksempler

### Eksempel

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & 3 & 2 \\ 6 & -2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$3 \times 4$ $\quad$ $4 \times 1$

$$= \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$3 \times 3$ $\quad$ $3 \times 1$

# Matrix-vektor-produkt

## Nogle produkter er lette



### Eksempel

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I_3 \text{ identitetsmatricen}} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{e_2} = 0\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}$$

"Den 2. kanoniske basisvektor"

# Observation



Det $i$'te element i $A\mathbf{v}$ er givet ved $i$'te element i

$$v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + \cdots + v_n\mathbf{a}_n.$$

Dette element er

$$v_1a_{i1} + v_2a_{i2} + \cdots + v_na_{in} = [a_{i1}\; a_{i2}\; \cdots\; a_{in}] \cdot \mathbf{v}$$

Altså: Det $i$'te element i $A\mathbf{v}$ er givet ved…

prikprodukt mellem v og i'te
række i A

# Egenskaber



## Sætning

Lad $A$ være en $m \times n$-matrix, $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$ og $c$ være et reelt tal. Da gælder

- $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$
- $A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u})$ $= (cA)u$
- $A\mathbf{e}_i = \mathbf{a}_i$, hvor $\mathbf{e}_i$ har 1 i indgang $i$ og 0 i alle andre
- $O_n\mathbf{v} = \mathbf{0}$, hvor $O_n$ er $n \times n$-matricen med 0 i alle indgange
- $I_n\mathbf{v} = \mathbf{v}$, hvor $I_n$ er $n \times n$-matricen med indgang $(i, j)$ lig 1, hvis $i = j$, og 0 ellers

# Egenskaber



Vi kan særligt bemærke, at de første to punkter giver

## Korollar

Lad $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$, og lad $c_1, c_2, \ldots, c_s$ være reelle tal. Da gælder

$$A(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_s\mathbf{v}_s) = c_1A\mathbf{v}_1 + c_2A\mathbf{v}_2 + \cdots + c_sA\mathbf{v}_s$$

Med andre ord: Matrix-vektorproduktet mellem $A$ og en linearkombination af $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s$ giver linearkombinationen af $A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_s$ med samme koefficienter.

# Matrixligninger



Hvis $A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_n]$ og $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, har vi

$$A\mathbf{x} = x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + \dots + x_n\bar{a}_n$$

Det vil sige, at matrixligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, har samme løsninger som...

vektorligningen

$$x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + \dots + x_n\bar{a}_n = b$$

# Tre ækvivalente repræsentationer



## Sætning

Lad $A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_n]$ være en $m \times n$-matrix, og lad $\mathbf{b}$ være en vektor i $\mathbb{R}^m$. Løsningsmængderne for følgende systemer er ens.

(i) Matrixligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

(ii) Vektorligningen $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$

(iii) Det lineære ligningssystem med totalmatrix $[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_n \mid \mathbf{b}]$

$[A \mid b]$

# Tre ækvivalente repræsentationer
## Eksempel

### Eksempel

Oversæt matrixligningen
$$\begin{array}{ccc} A & x & b \\ \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array}$$
til en vektorligning og til totalmatricen for et lineært ligningssystem.

$$x_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 4 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$[A \mid b]$$

# Konsistens og spænd



Ækvivalensen mellem matrixligninger og vektorligninger giver derfor:

Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en løsning, hvis og kun hvis b er en linearkombination af søjlene i A

Med andre ord: Ligningen er konsistent, hvis og kun hvis

b ligger i spændet af A's søjler

alts$\dot{a}$ $b \in \text{Span}\{a_1, a_2 \dots, a_n\}$

# Homogene ligningssystemer

En matrixligning på formen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ kaldes *homogen*

Har denne altid en løsning?

Ja, for du har altid $\underbrace{x=0}_{\text{kaldes den trivielle løsning}}$ som løsning

# Parametrisk form



Sidste gang så vi, at systemet med totalmatrix $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right]$

har løsningerne givet ved

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_4 \\ x_2 \text{ er fri} \\ x_3 = 3x_4 \\ x_4 \text{ er fri} \end{cases}$$

Dette kan også skrives på formen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$(x_2 = s,\ x_4 = 0)$ $(x_2 = 0,\ x_4 = t)$

# Parametrisk form



Betragter vi i stedet totalmatricen $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right]$ bliver løsningerne i stedet

$$\begin{cases} x_1 = 4 - 2x_2 + x_4 \\ x_2 \text{ er fri} & x_2 = s \\ x_3 = 5 + 3x_4 \\ x_4 \text{ er fri} & x_4 = t \end{cases}$$

På parametrisk form er dette

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$(x_2 = 0, x_4 = 0)$ "$(x_2 = s, x_4 = 0)$" "$(x_2 = 0, x_4 = t)$"

# Inhomogene systemer



Dette leder til følgende karakterisering af den *inhomogene* ligning $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, hvor $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

## Sætning

Lad $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ være et konsistent ligningssystem, hvor $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, og lad $\mathbf{p}$ være en (hvilken som helst) løsning.
Løsningsmængden for $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er da alle vektorer $\mathbf{w}$ på formen

$$\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_h,$$

hvor $\mathbf{v}_h$ er en løsning til det homogene system $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

# Geometrisk fortolkning

Vi kan tænke på løsningerne til det inhomogene system som en parallelforskydning af løsningerne til det homogene.