Lineære ligningssystemer, Afsnit 1.1–1.2

10. februar 2025

Lineær Algebra

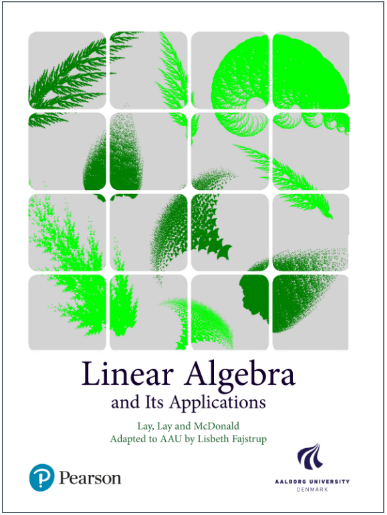
Forår 2025

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Del I

Praktiske informationer

Litteratur


Linear Algebra
and Its Applications
Lay, Lay and McDonald
Adapted to AAU by Lisbeth Fajstrup
Pearson
AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Online resourcer

På Moodle-siden finder I links til videoer, træningsopgaver o.lign.

Der ligger også genopfriskningsopgaver – ting, I burde kende fra gymnasiet, og som er vigtige for en given forelæsning

Med bogen får I også adgang til Pearson MyLab. Her ligger

- selvstudier
- opgaver med interaktiv hjælp
- e-bog

Kursets struktur

12+4 kursusgange fordelt på fire blokke

De første to blokke

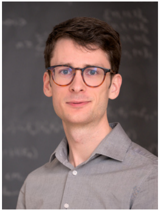
- 4 sædvanlige kursusgange
- 1 workshop

De to sidste blokke

- 2 streamede kursusgange
- 1 workshop

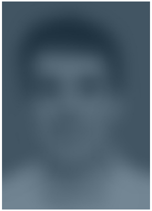
Derudover er der til hver blok et ikke-skemalagt selvstudium
Selvstudierne består primært af opgaver på Pearsons platform

Kursusholdere



Blok 1,2 (alle)
Blok 4
(ComTek)

René B. Christensen
rene@math.aau.dk



Blok 5 (KMB)

Christian D. Jørgensen
cdjo@math.aau.dk

Blok 7 (KMB)

Oliver Matte
oliver@math.aau.dk

Blok 5
(ComTek)

Oliver Gnilke
owg@math.aau.dk

Eksamensansvarlige

KMB

Oliver Matte

oliver@math.aau.dk

ComTek

Oliver Gnilke

owg@math.aau.dk

Disse undervisere står for de fire workshops og den mundtlige eksamen

Opgaveregning

Foregår i grupperummene

Hjælpelærer kan tilkaldes med ‘skraldespand’

De foreslåede opgaver findes på Moodle-siden
Regn først opgaver markeret med **fed**

Lektiecafé

Online 'lektiecafé' hver mandag

Hjælpelærerne skal kontaktes mindst 48 timer i forvejen

Information findes på:
`https://first.math.aau.dk/dan/2020e/linalg/#tab_cafe`
(Linket ligger også på Moodle)

Eksamen

Mundtlig eksamen med udgangspunkt i én af de fire workshops

I alt 15 min. (inklusiv votering)

Del II

Nyt stof

To ligninger med to ubekendte

Velkendt fra gymnasiet

$$\begin{aligned} 2x - 5y &= -1 \\ 6x + 10y &= 22 \end{aligned}$$

Løses eksempelvis ved lige store koefficienters metode:

$$\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ 6x + 10y - 3(2x - 5y) = 22 - 3\cdot(-1) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ 25y = 25 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 5y + 5y = -1 + 5\cdot 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

To ligninger med to ubekendte
Observationer

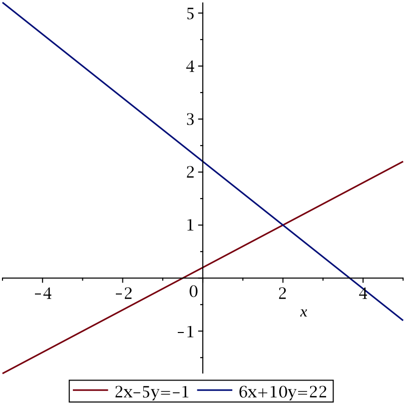
Vi bemærker, at løsningsmængden er uændret ved

- Ombytning af ligningers rækkefølge
- Skalering af en ligning med en konstant forskellig fra 0
- Addition af to ligninger

Dette gælder også generelt for n ligninger med m ubekendte

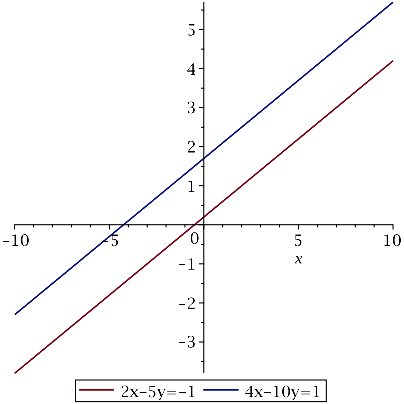
Geometrisk fortolkning

Ligningerne $2x - 5y = -1$ og $6x + 10y = 22$ beskriver linjer i planet:



Geometrisk fortolkning

Vi kan ikke altid finde en skæring; altså ingen løsning til systemet



En anden repræsentation

Betragt ligningssystemet

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
2x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & - & x_4 & = & 6 \\
x_1 & & & - & x_3 & & & = & 4 \\
 & & 3x_2 & + & 2x_3 & & & = & 1 \\
-7x_1 & & & & & + & 2x_4 & = & -1
\end{array}
$$

Vi kunne også repræsentere dette ved…

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
2 & -1 & 5 & -1 & 6 \\
1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\
0 & 3 & 2 & 0 & 1 \\
-7 & 0 & 0 & 2 & -1
\end{array}\right]
$$

Hver række svarer til en ligning.

Hver søjle (bortset fra den sidste) svarer til en variabel

Matricer

Definition

En matrix A er et rektangulært skema af tal:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Her betegner a_{ij} elementet (eller indgangen) i i'te række og j'te søjle.

Når A har m rækker og n søjler, kaldes den en $m \times n$-matrix

Flertalsformen af matrix er *matricer*

Matricer

Eksempler

Eksempel

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -4 & 13 & \frac{1}{3} \\ 0 & 6 & \pi & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad a_{25}$$

A er en 3×5 -matrix

Anden søjle er $\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

Tredje række er $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Element $a_{25} = 1$

Hvis indekserne er større end 9 bruges ofte $a_{i,j}$

Tilbage til ligningssystemet

Systemet fra før har *totalmatrix* (udvidet koefficientmatrix)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 5 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ -7 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

Koefficientmatrix

(Vi vil nogle gange notere denne med $[A|\mathbf{b}]$)

Elementære rækkeoperationer

De operationer, vi havde på slide 10, kan vi også oversætte til matricer
Vi kalder dem *elementære rækkeoperationer*, og de er

- Ombyt to rækker
- Skalér en række med en konstant forskellig fra 0
- Læg et multiplum af én række til en anden

Bemærk, at hver af de tre rækkeoperationer er reversible (altså, at de kan „fortrydes“)

Rækkeækvivalente matricer

Definition

To matricer A og B kaldes rækkeækvivalente, hvis man kan gå fra A til B ved at bruge elementære rækkeoperationer. Vi skriver da $A \sim B$.

Eksempel

Matricerne $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ er rækkeækvivalente, da…

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 : r_2 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 : 2r_1} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = B$$

Løsning af ligningssystemer

I begyndelsen så vi ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x - 5y &= -1 \\ 6x + 10y &= 22 \end{aligned}$$

som har totalmatrix...

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & -1 \\ 6 & 10 & 22 \end{array}\right] \overset{r_2 : r_2 - 3r_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & -1 \\ 0 & 25 & 25 \end{array}\right] \overset{r_2 : \frac{1}{25} r_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{r_1 : r_1 + 5r_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{r_1 : \frac{1}{2} r_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Svarer til systemet

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Trappeform

Første ikke-nul indgang i en række kaldes den *ledende koefficient*

Definition

En matrix siges at være på *trappeform* (el. række-echelonform), hvis *alle* følgende punkter er opfyldt

- Alle nulrækker står til sidst
- Den ledende koefficient i en række står til højre for den ledende koefficient i rækken ovenover
- Alle indgange under en ledende koefficient er 0

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Alle $\blacksquare$ er ikke-nul
Disse kaldes *pivot*-indgange

$*$ kan være hvad som helst

Reduceret trappeform

Definition

En matrix siges at være på *reduceret trappeform* (el. reduceret række-echelonform), hvis *alle* følgende punkter er opfyldt

- Den er på trappeform
- Alle ledende koefficienter er 1
- Alle indgang over en ledende koefficient er 0

$$\begin{bmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$*$ kan være hvad som helst

Trappeformer

Sætning

Enhver matrix A er rækkeækvivalent til én og kun én reduceret trappematrix R.

Bemærk, at udsagnet kun holder, fordi R er *reduceret*.
Har A reelle indgange, er den rækkeækvivalent til uendeligt mange matricer på (ikke-reduceret) trappeform.

Lette systemer

Fra den reducerede trappeform er det let at løse systemet

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_4 \\ x_2 \text{ fri} \\ x_3 \;\; 3x_4 \\ x_4 \text{ fri} \end{cases}$$

Jeg vælger x_1 og x_3 som basisvariable (og dermed x_2 og x_4 som frie variable)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \leftarrow \quad 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$$

$$0 = 1$$

Det har ingen løsninger.

Antal løsninger

Fra trappeformen kan vi også afgøre, om ligningssystemet har nogen løsninger

Sætning

Lad $[R|\mathbf{c}]$ være trappeformen af totalmatricen $[A|\mathbf{b}]$ for et ligningssystem. Da gælder

har ingen løsninger

- Hvis $[R|\mathbf{c}]$ har pivot i sidste søjle, er systemet inkonsistent.
- Hvis $[R|\mathbf{c}]$ ikke har pivot i sidste søjle, er systemet konsistent. Systemet har da uendeligt mange løsninger, hvis der er mindst én fri variabel. Ellers har det en entydig løsning.

Trappeform er smart…

…men hvordan finder vi den?

Gauss-elimination

C.F. Gauß
C. A. Jensen/G. Biermann

Gauss-elimination

For at få trappeform

1. Find første ikke-nul søjle, og vælg en indgang (forskellig fra 0) i søjlen som pivot
2. Ombyt rækker (hvis nødvendigt), så pivot-indgangen står i første række
3. Brug rækkeoperationer til at få 0'er under pivot-indgangen
4. Ignorer nu pivot-rækken og alle rækker over denne. Udfør trin1–4 på delmatricen, der står tilbage

For at få reduceret trappeform udføres desuden

5. Brug rækkeoperationer til at få 0'er over hver pivot-indgang. Gå fra pivotindgangen længst til højre mod den længst til venstre
6. Sørg desuden for, at alle pivotindgange er 1

Eksempel

Find den reducerede trappeform af matricen

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 2 & 6 & 1 \\ 2 & 10 & 4 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 \end{array}\right] \sim \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{\text{Er nu på trappeform}}$$

$$\sim \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 18 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{\text{Reduceret trappeform}}$$

Eksempel

$$-3+\frac{14}{3}=\frac{-9}{3}+\frac{14}{3}=\frac{5}{3}$$

Find den reducerede trappeform af matricen

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 12 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & \frac{-6}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$0+\frac{3}{5}\cdot\frac{-2}{3}=\frac{-2}{5}$$

$$\frac{-6}{5}+\frac{8}{5}=\frac{2}{5}$$

Pivotsøjler

Lad A være en matrix, og lad R være dens reducerede trappeform.

De søjler i A, hvor R har pivotindgange, kaldes *pivotsøjler*

Eksempel

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 10 & 2 \\ -1 & 3 & -5 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pivotsøjlerne for A

pivotsøjler