Méthodes formelles
Devoir 3 : preuves inductives, typage et déduction naturelle

Alain Giorgetti

Licence d'Informatique de l'Université de Franche-Comté 2023-24

Pour une meilleure préparation aux examens, il est vivement conseillé de rédiger vos réponses à ce devoir **à la main**, sur des feuilles au format A4 numérotées et portant votre nom et votre prénom, puis de les numériser au format PDF, par scan ou photographie, pour les déposer sur Moodle dans le devoir prévu à cet effet.

1 Déduction naturelle avec edukera (4 points)

L'objectif de cet exercice est d'acquérir des compétences renforcées en démonstration selon le système de la déduction naturelle, en effectuant de nombreux exercices à l'aide de l'interface interactive intuitive edukera.

Dans la partie "Devoirs et corrigés" du module "Méthodes formelles" sur Moodle, cliquez sur le lien "Exercice 3 du devoir 3, avec edukera". Vous accédez ainsi à la plateforme d'apprentissage, avec votre identifiant Moodle d'étudiant.e de l'université de Franche-Comté.

Le chapitre Connecteurs propose un grand nombre d'exercices de démonstration dans le système de la déduction naturelle du cours. L'interface edukera permet d'appliquer les règles une par une et construit l'arbre de preuve correspondant.

Pour apprendre à utiliser l'interface, cliquez sur le premier exercice du didacticiel et laissez vous guider par l'assistant de démonstration. Reproduisez cette démonstration dans l'interface, puis cliquez sur le bouton "Suivant" en bas à droite pour passer au deuxième exercice.

Traitez ainsi dans l'ordre le plus grand nombre possible d'exercices de ce chapitre.

En particulier, traitez les 8 exercices marqués par une cocarde, repris dans l'onglet "Évaluations", partie "Exercices notés 2". Il s'agit des exercices 2, 6, 10, 22, 24 (avec le tiers exclu), 30, 41 et 43 de la partie 'Exercices'.

Dans votre devoir et sur le forum, n'hésitez pas à indiquer vos éventuelles difficultés de compréhension ou de manipulation d'edukera.

2 Typage (4 points)

On considère la restriction suivante du système des règles de vérification et d'inférence des types polymorphes du cours :

$$\frac{f\ :\ \alpha \to \beta,\ e\ :\ \alpha}{f(e)\ :\ \beta}\quad (app) \qquad \text{et} \qquad \frac{x\ :\ \alpha\ \vdash\ e\ :\ \beta}{\lambda x.\ e\ :\ (\alpha \to \beta)}\quad (abs).$$

1. Pour des types α, β et γ quelconques, donner un λ-terme de type
$$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$$
2. Donner une preuve formelle détaillée que ce λ-terme est bien de de type.

3 Calculs inductifs, preuve par induction (12 points)

Soit F l'ensemble de symboles fonctionnels composé des trois constantes a, b et c, et de deux symboles d'arité 2 notés p et i. Le type T_F des termes clos sur F est défini par

$$\frac{}{a : T_F} \qquad \frac{}{b : T_F} \qquad \frac{}{c : T_F} \qquad \frac{s : T_F, \quad t : T_F}{p(s,t) : T_F} \qquad \frac{s : T_F, \quad t : T_F}{i(s,t) : T_F}.$$

1. En n'utilisant que ces règles de déduction, donner une preuve formelle détaillée de
$$i(p(a,b),c) : T(F).$$
2. L'égalité
$$i(p(x,y),z) = i(x, i(y,z)) \tag{1}$$
peut être appliquée répétitivement de gauche à droite pour réduire le nombre de p dans tout terme de type T_F. Par exemple, une application de cette égalité au terme $i(p(p(c,a),b),a)$ donne le terme $i(p(c,a), i(b,a))$, puis une seconde application donne le terme $i(c, i(a, i(b,a)))$.
Justifier par des phrases claires et précises la terminaison des applications répétées de cette égalité (1) de gauche à droite sur tout terme de T_F.
3. Soit
$$\mathit{reduce} : T_F \to T_F$$
la fonction qui applique **répétitivement** l'égalité (1) de gauche à droite à tout terme clos de T_F.
Recopier les égalités suivantes en complétant les pointillés, pour qu'elles forment une définition inductive correcte et complète de la fonction *reduce*.
$$\begin{aligned}
\mathit{reduce}(x) &= \ldots \quad \text{si } x \in \{a,b,c\} && (2)\\
\mathit{reduce}(p(s,t)) &= \ldots && (3)\\
\mathit{reduce}(i(p(s,t),u)) &= \ldots && (4)\\
\mathit{reduce}(i(x,t)) &= \ldots \quad \text{si } x \in \{a,b,c\} && (5)\\
\mathit{reduce}(i(i(s,t),u)) &= \ldots && (6)
\end{aligned}$$
4. Donner un exemple de terme de $T(F)$ qui n'est pas suffisamment réduit si l'on choisit l'égalité
$$\mathit{reduce}(i(p(s,t),u)) \quad = \quad i(\mathit{reduce}(s), i(\mathit{reduce}(t), \mathit{reduce}(u)))$$
comme cas de la définition de la fonction *reduce*.
5. Définir inductivement, par des égalités numérotées, la fonction *nbp* de type $T_F \to \mathbb{N}$ qui compte le nombre de symboles p dans tout terme dans T_F.

6. En utilisant les égalités précédentes et en indiquant le numéro de l'égalité unique appliquée à chaque étape, donner une preuve formelle détaillée de la propriété

$$\forall x, y, z : T_F.\ nbp(i(p(x,y),z)) = 1 + nbp(i(x,i(y,z))).$$

7. (Difficile) En admettant toutes les propriétés utiles de la relation $\leq$ sur les entiers naturels, mener le plus loin possible une preuve inductive de la propriété

$$nbp(reduce(v)) \leq nbp(t) \tag{7}$$

pour tout terme $v : T_F$, par induction sur la structure de T_F, et expliquer précisément pourquoi certains cas ne peuvent pas être démontrés ainsi.