NOLLE

Damien

L3 - Informatique

Devoir 2 (MF) :

Note :

/20

Exercice 2)

Q1 : x dans l'égalité : $add_1(x, l) = Cons(x, l)$ est du même type que les éléments contenus dans l, soit α.

On le sait grâce à la première prémisse de la règle d'inférence :

$$\frac{x : \alpha \quad , \quad l : liste(\alpha)}{Cons(x, l) : liste(\alpha)}$$

Cette fonction permet d'ajouter un élément x à la liste l, au début de la liste (à gauche), comme le ferait le constructeur Cons.

Q2 : - Cas de base :

$add_1(x, Nil) = add_2(x, Nil)$

$add_1(x, Nil)$

$= Cons(x, Nil)$ < Règle (1), substitution $[l \leftarrow Nil]$ >

$add_2(x, Nil)$

$= Cons(x, Nil)$ < Règle (2), substitution $[a \leftarrow x]$ >

- Pas de récurrence :

NOLLE
Pornier
L3 – Informatique

$add_1(x, Cons(y, l)) = add_2(x, Cons(y, l))$

Hypothèse : $add_1(x, l) = add_2(x, l)$

$add_1(x, Cons(y, l))$
$= Cons(x, Cons(y, l))$ < Règle (1), substitution [$l \leftarrow Cons(y, l)$] >

$add_2(x, Cons(y, l))$
$= Cons(x, add_2(y, l))$ < Règle (3), substitution [$x \leftarrow x$, $l \leftarrow y$] >
$= Cons(x, add_1(y, l))$ < Hypothèse, substitution [$x \leftarrow y$], sens : du membre droit au membre gauche >
$= Cons(x, Cons(y, l))$ < Règle (1), substitution [$x \leftarrow y$] >

Puisque le pas de récurrence et le cas de base sont vrais, alors l'égalité $add_1(x, l) = add_2(x, l)$ est vraie pour tout élément x et pour toute liste de type α.

Q3 :
$afin : \alpha \times liste(\alpha) \to liste(\alpha)$

$afin(x, Nil) = Cons(x, Nil)$
$afin(x, Cons(a, l)) = Cons(a, afin(x, l))$

Exercice 3)
Q1 : Preuve formelle de : $P_3(\bot \wedge (\neg(\top \vee \bot)))$

(Voir prochaine page.)

NOLLE
Damien
L3 - informatique

$$\dfrac{\overline{P_0(\bot)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{P_0(\top)} \qquad \overline{P_0(\bot)}}{P_0(\top) \wedge P_0(\bot)}\wedge I \qquad (7)\,(0/n_1, 0/n_2)}{P_1(\top \vee \bot)}\,m.p. \qquad (6)\,(1/n)}{P_2(\neg(\top \vee \bot))}\,m.p.}{}}{\dfrac{P_0(\bot) \wedge P_2(\neg(\top \vee \bot)) \qquad (8)\,(0/n_1, 2/n_2)}{P_3(\bot \wedge (\neg(\top \vee \bot)))}\,m.p.}\wedge I$$

$(7)\,(0/n_1, 0/n_2) : P_0(\top) \wedge P_0(\bot) \Rightarrow P_{0+0+1=1}(\top \vee \bot)$
$(6)\,(1/n) : P_1(\top \vee \bot) \Rightarrow P_{1+1=2}(\neg(\top \vee \bot))$
$(8)\,(0/n_1, 2/n_2) : P_0(\bot) \wedge P_2(\neg(\top \vee \bot)) \Rightarrow P_{0+2+1=3}$
$(\bot \wedge (\neg(\top \vee \bot)))$

Q2:
- Cas de base :
$P_0(F)$, d'après les deux seules options possibles, soit nous avons la constante $\top$, soit nous avons la constante $\bot$.

Il existe donc au moins une constante pour $P_0(F)$

- Pas de récurrence :
$P_{n+1}(F)$, en fonction du symbole contenu dans la formule F, soit il peut avoir une seule constante $(\neg F)$, soit il peut en avoir plusieurs $(F_1 \wedge F_2, F_1 \vee F_2, F_1 \Rightarrow F_2)$ en sachant que les symboles fonctionnels de la logique propositionnelle peuvent se cumuler, on peut donc se retrouver avec une multitude de constantes, de plus, puisque les variables propositionnelles peuvent

NOLLE
Pernier
L3 - informatique

être substituées, il y aura donc toujours au moins une constante.

Q3 :

- Cas de base :

Une tautologie est une formule propositionnelle qui sera toujours vrai, quelque soit la valeur de vérité de ces variables.

Une formule de taille 0, qui n'est pas une tautologie est $P_0(\bot)$, puisque $\bot$ signifie "faux" et qu'une constante est une formule propositionnelle, alors $\bot$ sera toujours faux.

Il existe donc au moins une formule de taille 0 qui n'est pas une tautologie.

- Cas de récurrence :

$P_{n+1}(F)$, pour obtenir une formule qui n'est pas une tautologie quelque soit n et donc $n+1$, il faut utiliser les propriétés des connecteurs logiques.

Par exemple, pour $n = 1$, $\bot \wedge T$ n'est pas une tautologie, car pour qu'elle le soit, il faut que les deux membres autour du "et" soit vrai, $\bot \vee \bot$, $T \Rightarrow \bot$ et $\neg(T)$ ne sont pas des tautologies également.

Pour $n+1$, il suffit de respecter ces mêmes propriétés, mais avec des constantes en plus.

NOLLE
Promien
L3 - informatique

Par exemple, pour $n = 2$, $(\bot \vee \bot) \wedge \top$ n'est pas une tautologie, pareil pour $(\top \Rightarrow \bot) \vee \bot$, etc...

Il est donc possible de trouver au moins une formule qui n'est pas une tautologie, quelle que soit la taille n.