Méthodes formelles
Devoir 1 : propositions, expressions booléennes, système LP et résolution

Alain Giorgetti

Licence d'Informatique de l'Université de Franche-Comté 2023-24

1 Formalisation en logique propositionnelle (3 points)

Exprimez les énoncés suivants par des formules de la logique des propositions. Vous utiliserez des lettres majuscules de l'alphabet comme variables propositionnelles, en indiquant leurs valeurs par rapport à l'énoncé. **Exemple :** Soit l'énoncé « Il neige et il fait froid ». **Réponse attendue :** $A \wedge B$ avec $A =$ « Il neige » et $B =$ « Il fait froid ».

1. « Si les poules ont des dents, alors la mer est orange. »
2. « Pour passer la conduite du permis de conduire, il faut avoir plus de 18 ans et avoir le code. »
3. « Soit j'ai 18 ans ou plus et je suis majeur, soit j'ai moins de 18 ans et je ne suis pas majeur. »

2 Fonction logique NOR (2 points)

On propose de représenter la fonction logique NOR (contraction en anglais de « Not OR », c'est à dire « Non OU ») par le symbole $\|$. Cette fonction est telle que la formule $A \parallel B$ est équivalente à $\neg(A \vee B)$.

1. Définir la sémantique du $\|$ par une table de vérité.
2. Appliquer une par une des règles de l'algèbre de Boole, pour démontrer l'égalité

$$A \parallel B = \neg(\neg\neg B \vee A).$$

3 Tables de vérité (4 points)

Construire les tables de vérité des formules propositionnelles suivantes :

1. $(p \vee r) \Rightarrow (r \vee (\neg p))$
2. $(p \Rightarrow (\neg q)) \vee (q \Rightarrow r)$

4 Preuve dans le système LP (5 points)

La figure 1 rappelle certains axiomes du système formel LP du cours, dont la seule règle d'inférence, supposée connue, est le "modus ponens".

— Axiome 1 : $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$
— Axiome 2 : $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$
— Axiome 4 : $P \wedge Q \Rightarrow P$
— Axiome 5 : $P \wedge Q \Rightarrow Q$
— Axiome 6 : $P \Rightarrow P \vee Q$
— Axiome 7 : $Q \Rightarrow P \vee Q$
— Axiome 8 : $(P \Rightarrow R) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \vee Q \Rightarrow R))$
— Axiome 9 : $\neg\neg P \Rightarrow P$
— Axiome 10 : $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow \neg P)$

FIGURE 1 – Extrait des axiomes du système formel LP.

En n'utilisant que ces axiomes, le modus ponens et la réflexivité de l'implication $(P \Rightarrow P)$, reproduire et compléter la preuve formelle suivante de $A \vdash \neg\neg A$.

$\boxed{1}$	Hypothèse	A
$\boxed{2}$	Axiome ...	...
$\boxed{3}$	...	...
$\boxed{4}$	Axiome ...	...
$\boxed{5}$	m.p. sur $\boxed{3}$, $\boxed{4}$	...
$\boxed{6}$	...	...
$\boxed{7}$	...	$\neg\neg A$

Pour chaque axiome et théorème utilisé (par exemple, dans les étapes $\boxed{2}$ et $\boxed{4}$), indiquer la substitution appliquée à l'axiome, avec la notation $(\ldots / \ldots, \ldots)$.

5 Météo et résolution (6 points)

On considère les énoncés suivants.
— Quand je ne bois pas et que je dors, je ne suis pas content.
— Quand je bois, je ne suis pas content et je dors.
— Quand je ne mange pas, je ne suis pas content ou je dors.
— Quand je mange, je suis content ou je bois.
— Quand il ne neige pas et que je suis content, je ne mange pas.

1. Définir toutes les variables propositionnelles utiles pour formaliser ces énoncés.
2. En utilisant ces variables, traduire séparément chacun de ces énoncés en une formule propositionnelle.
3. On admet que tous ces énoncés sont vrais et que "en ce moment, je suis content". Appliquer la méthode de résolution propositionnelle, de manière détaillée, pour établir quel temps il fait en ce moment.

   Attention : l'application de toute autre méthode de raisonnement est exclue. Elle ne rapporterait aucun point.