NOLLE
Damien
L3 - Informatique

MF - Devoir 1 (propositions, expressions booléennes, système LP et résolution) :

Note :	*Observation :*
/20	

Exercice 1)

Q1 :

P = "Les poules ont des dents."

O = "La mer est orange."

$P \Rightarrow O$

Q2 :

M = "Il faut avoir 18 ans."

C = "Il faut avoir le code."

D = "passer la conduite du permis de conduire."

$D \Rightarrow (M \wedge C)$

Q3 :

A = "J'ai 18 ans ou plus."

M = "Je suis majeur."

$(A \wedge M) \vee (\neg A \wedge \neg M)$, soit $A \Leftrightarrow M$

Exercice 2)

Q1 :

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

Puisqu'on a defini que $A \parallel B$, équivaut à $\neg(A \vee B)$, donc :

A	B	$A \parallel B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Q2 :

$F = \neg(\neg\neg B \vee A)$

$expr\_bool(F) = \overline{\overline{\overline{B}} + A}$

Lois de Morgan ($\overline{A+B} = \overline{A}.\overline{B}$) :

$\overline{\overline{\overline{B}} + A} = \overline{\overline{\overline{B}}}.\overline{A}$

Involution ($\overline{\overline{A}} = A$) :

$\overline{\overline{\overline{B}}}.\overline{A} = \overline{B}.\overline{A}$

Commutativité ($A.B = B.A$) :

$\overline{B}.\overline{A} = \overline{A}.\overline{B}$

Lois de Morgan ($\overline{A}.\overline{B} = \overline{A+B}$) :

$\overline{A}.\overline{B} = \overline{A+B}$

Il suffit ensuite de transformer l'expression booléenne précédente en une formule propositionnelle, donc :

$\overline{A+B} = \neg(A \vee B)$

Puisque nous l'avons défini précédement :

$\neg(A \vee B) = A \parallel B$

Donc : $\neg(\neg\neg B \vee A) = A \parallel B$

Exercice 3)

Q1 :

p	r	$\neg p$	$p \vee r$	$r \vee (\neg p)$	$(p \vee r) \Rightarrow (r \vee (\neg p))$
0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1

Q2 :

p	q	r	$\neg q$	$p \Rightarrow (\neg q)$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow (\neg q)) \vee (q \Rightarrow r)$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1

Exercice 4)

Démonstration sous les hypothèses {A}

1	Hypothèse	A
2	Axiome 1 $(A/P, \neg A/Q)$	$A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow A)$
3	m.p. sur 1 et 2	$\neg A \Rightarrow A$
4	Axiome 10 $(\neg A/P, A/Q)$	$(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg\neg A)$
5	m.p. sur 3, 4	$(\neg A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg\neg A$
6	Théorème de la réflexivité de l'implication $(\neg A/P)$	$\neg A \Rightarrow \neg A$
7	m.p. sur 6, 5	$\neg\neg A$

Conclusion : $\{A\} \vdash \neg\neg A$

Exercice 5)

Q1 :

B = "Je bois."

D = "Je dors."

C = "Je suis content."

M = "Je mange."

N = "Il neige."

Q2 :

- $(\neg B \wedge D) \Rightarrow \neg C$

- $B \Rightarrow (\neg C \wedge D)$

- $\neg M \Rightarrow (\neg C \vee D)$

- $M \Rightarrow (C \vee B)$

- $(\neg N \wedge C) \Rightarrow \neg M$

Q3 :

Dans un premier temps, il faut mettre les énoncés précédents en CNF :

$((\neg B \wedge D) \Rightarrow \neg C) \wedge (B \Rightarrow (\neg C \wedge D)) \wedge (\neg M \Rightarrow (\neg C \vee D)) \wedge (M \Rightarrow (C \vee B)) \wedge ((\neg N \wedge C) \Rightarrow \neg M)$

Utililisation de la règle : $F \Rightarrow G \rightarrow (\neg F) \vee G$

$(\neg(\neg B \wedge D) \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee (\neg C \wedge D)) \wedge (\neg\neg M \vee (\neg C \vee D)) \wedge (\neg M \vee (C \vee B)) \wedge (\neg(\neg N \wedge C) \vee \neg M)$

Utililisation de la règle : $\neg(F \wedge G) \rightarrow (\neg F) \vee (\neg G)$

$(\neg\neg B \vee \neg D \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee (\neg C \wedge D)) \wedge (\neg\neg M \vee (\neg C \vee D)) \wedge (\neg M \vee (C \vee B)) \wedge (\neg\neg N \vee \neg C \vee \neg M)$

Utililisation de la règle : $\neg\neg F \rightarrow F$

$(B \vee \neg D \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee (\neg C \wedge D)) \wedge (M \vee (\neg C \vee D)) \wedge (\neg M \vee (C \vee B)) \wedge (N \vee \neg C \vee \neg M)$

Utililisation de la règle : $F \vee (G \wedge H) \rightarrow (F \vee G) \wedge (D \vee H)$

$(B \vee \neg D \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee D) \wedge (M \vee \neg C \vee D) \wedge (\neg M \vee C \vee B) \wedge (N \vee \neg C \vee \neg M)$

On sait que "en ce moment, je suis content", donc on admet une nouvelle clause : C.

On obtient donc : $\{B \vee \neg D \vee \neg C, \neg B \vee \neg C, \neg B \vee D, M \vee \neg C \vee D, \neg M \vee C \vee B, N \vee \neg C \vee \neg M, C\}$

Avec le théorème de la résolution propositionnelle : $\frac{\neg P \vee C, P \vee D}{C \vee D}$, on obtient donc :

$C8 = res(C2, C7) = \frac{\neg C \vee \neg B, C}{\neg B}$ (Théorème de la résolution) $= \neg B$

$C9 = res(C8, C1) = \frac{\neg B, B \vee \neg D \vee \neg C}{\neg D \vee \neg C}$ (Théorème de la résolution) $= \neg D \vee \neg C$

$C10 = res(C9, C7) = \frac{\neg C \vee \neg D, C}{\neg D}$ (Théorème de la résolution) $= \neg D$

$C11 = res(C10, C4) = \frac{\neg D, D \vee \neg C \vee M}{\neg C \vee M}$ (Théorème de la résolution) $= \neg C \vee M$

$C12 = res(C11, C7) = \frac{\neg C \vee M, C}{M}$ (Théorème de la résolution) $= M$

$C13 = res(C6, C12) = \frac{\neg M \vee \neg C \vee N, M}{\neg C \vee N}$ (Théorème de la résolution) $= \neg C \vee N$

$C14 = res(C13, C7) = \frac{\neg C \vee N, C}{N}$ (Théorème de la résolution) $= N$

Nous constatons qu'en ce moment, il neige.