Méthodes formelles
Devoir 2 : logique des prédicats, types et calculs inductifs

Alain Giorgetti

Licence d'Informatique de l'Université de Franche-Comté 2023-24

Pour une meilleure préparation aux examens, il est vivement conseillé de rédiger vos réponses à ce devoir **à la main**, sur des feuilles au format A4 numérotées et portant votre nom et votre prénom, puis de les numériser au format PDF, par scan ou photographie, pour les déposer sur Moodle dans le devoir prévu à cet effet.

1 Formules du premier ordre avec edukera (5 points)

L'objectif de cet exercice est d'acquérir des compétences en modélisation par des formules du premier ordre (calcul des prédicats), en effectuant de nombreuses modélisations à l'aide de l'interface interactive edukera.

Dans la partie "Devoirs et corrigés" du module "Méthodes formelles" sur Moodle, cliquez sur le lien "Exercice 1 du devoir 2, avec edukera". Vous accédez ainsi à la plateforme d'apprentissage, avec votre identifiant Moodle.

Le chapitre Logique propose un grand nombre d'exercices de formalisation de phrases en logique du premier ordre. Une interface vous permet de combiner des quantificateurs, des connecteurs logiques, des prédicats, des variables et des constantes, pour trouver une formalisation logique correcte de chaque phrase.

Cliquez sur le bouton 1 pour accéder au premier exercice. Il s'agit de formaliser la phrase "**Anaïs a lu les Misérables.**" uniquement à l'aide des prédicats et des constantes indiqués en-dessous. Cliquez sur le lien à formaliser pour proposer une solution. Construisez la solution L(A,LM) en cliquant successivement sur L(.,.), A et LM. Cliquez ensuite sur le bouton Appliquer. Le symbole ✔ en bas à droite vous indique que cette solution est correcte.

Cliquez sur le bouton Suivant en bas à droite pour passer au deuxième exercice. Cliquez sur le lien à formaliser pour proposer une solution. Traitez ainsi dans l'ordre le plus grand nombre possible d'exercices de ce chapitre.

Une croix rouge apparaît lorsque la solution proposée n'est pas correcte. Dans ce cas, cliquez sur cette croix et améliorez votre solution jusqu'à ce que le symbole ✔ et un bouton Suivant apparaisse en bas à droite, indiquant que vous avez réussi cet exercice.

En particulier, traitez chaque exercice marqué par une cocarde et repris dans l'onglet Évaluations.

Dans votre devoir, n'hésitez pas à indiquer vos éventuelles difficultés de compréhension ou de manipulation d'edukera. Sinon, il n'y a rien à rédiger dans le devoir pour cet exercice. L'évaluation s'effectue dans edukera et la note est transmise automatiquement dans Moodle.

Chaque exercice réussi dans l'onglet Évaluations rapporte 0,5 points, mais ce barème pourra être ajusté selon divers paramètres fournis par l'outil, comme le nombre total d'exercices traités et le temps de recherche.

2 Ajouts dans une liste (6 points)

On rappelle que le type inductif $\mathit{Liste}(\alpha)$ des listes dont tous les éléments sont de type α est défini par les deux règles suivantes :

$$\frac{}{\mathit{Nil} : \mathit{Liste}(\alpha)} \qquad \text{et} \qquad \frac{a : \alpha, \qquad l : \mathit{Liste}(\alpha)}{\mathit{Cons}(a,l) : \mathit{Liste}(\alpha)}.$$

1. La fonction add_1 est définie par l'égalité

$$\mathit{add}_1(x,l) = \mathit{Cons}(x,l) \tag{1}$$

pour toute liste l de type $\mathit{Liste}(\alpha)$. Quel est le type de x dans cette égalité ? Quel est l'effet de cette fonction ?

2. On définit la fonction add_2 par les égalités suivantes :

$$\mathit{add}_2(a,\mathit{Nil}) = \mathit{Cons}(a,\mathit{Nil}) \tag{2}$$
$$\mathit{add}_2(a,\mathit{Cons}(b,l)) = \mathit{Cons}(a,\mathit{add}_2(b,l)) \tag{3}$$

Donner une preuve formelle détaillée que

$$\mathit{add}_1(x,l) = \mathit{add}_2(x,l)$$

pour tout x et pour toute liste l. Dans chaque étape de la preuve, préciser l'égalité numérotée ci-dessus qui est utilisée. Préciser quelle est l'hypothèse d'induction et montrer très clairement où elle est utilisée.

3. Définir par son type et des égalités la fonction afin telle que $\mathit{afin}(x,l)$ ajoute x à la fin de la liste l, **sans utiliser de fonction auxiliaire**.

3 Prédicats et preuve par récurrence (9 points)

Dans cet exercice, on considère la logique propositionnelle avec les connecteurs logiques $\neg$, $\vee$, $\wedge$ et $\Rightarrow$, et les constantes $\top$ pour "vrai" et $\bot$ pour "faux". La taille d'une formule propositionnelle est le nombre de connecteurs logiques qu'elle contient.

Pour tout entier naturel n, la formule atomique $P_n(F)$ formalise que "F est une formule de taille n". Le prédicat P_n est défini par les axiomes

$$P_0(\top) \tag{4}$$
$$P_0(\bot) \tag{5}$$

qui admettent que $\top$ et $\bot$ sont des formules de taille 0, et les schémas d'axiomes suivants :

$$\begin{aligned} P_n(F) &\Rightarrow P_{n+1}(\neg F) \quad (6)\\ P_{n_1}(F_1) \wedge P_{n_2}(F_2) &\Rightarrow P_{n_1+n_2+1}(F_1 \vee F_2) \quad (7)\\ P_{n_1}(F_1) \wedge P_{n_2}(F_2) &\Rightarrow P_{n_1+n_2+1}(F_1 \wedge F_2) \quad (8)\\ P_{n_1}(F_1) \wedge P_{n_2}(F_2) &\Rightarrow P_{n_1+n_2+1}(F_1 \Rightarrow F_2) \quad (9) \end{aligned}$$

On parle de "schéma d'axiomes" au lieu d'"axiome" car chaque schéma décrit une infinité d'axiomes : un axiome par entier n pour le premier schéma, un axiome par couple d'entiers (n_1, n_2) pour les schémas suivants. On peut obtenir chaque axiome en choisissant des valeurs pour ces entiers. Par exemple, le schéma (7) décrit, entre autres, les axiomes

$$\begin{aligned} P_0(F_1) \wedge P_2(F_2) &\Rightarrow P_3(F_1 \vee F_2)\\ P_3(F_1) \wedge P_0(F_2) &\Rightarrow P_4(F_1 \vee F_2)\\ P_1(F_1) \wedge P_7(F_2) &\Rightarrow P_9(F_1 \vee F_2). \end{aligned}$$

Par exemple, le schéma (7) concerne le connecteur logique $\vee$. Il se lit comme suit : "Si F_1 est une formule de taille n_1 et F_2 est une formule de taille n_2, alors $F_1 \vee F_2$ est une formule de taille $n_1 + n_2 + 1$", ce qui est exact, puisque le nombre de connecteurs logiques dans $F_1 \vee F_2$ est la somme du nombre de connecteurs logiques dans F_1, du nombre de connecteurs logiques dans F_2, et de 1 pour le connecteur ajouté $\vee$.

Ces axiomes sont des formules de la logique du premier ordre, chaque P_n est un symbole relationnel, chaque connecteur logique et constante est un symbole fonctionnel. Dans ces schémas, F, F_1 et F_2 sont des variables, implicitement quantifiées universellement, c'est-à-dire que ces schémas sont admis pour toutes les expressions F, F_1 et F_2.

On désigne par $\mathcal{P}$ le système déductif composé de ces axiomes et de deux règles : le modus ponens et la règle d'introduction du $\wedge$:

$$\frac{P, Q}{P \wedge Q} \wedge_I .$$

Dans ce système déductif, on peut démontrer qu'une certaine expression est une formule d'une certaine taille. Par exemple, démontrons formellement dans ce système déductif que $\top \wedge (\neg\top)$ est une formule de taille 2 :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P_0(\top)}\,(4) \qquad \dfrac{\dfrac{}{P_0(\top),}\,(4) \quad (6)\ (0/n)}{P_1(\neg\top)}\,m.p.}{P_0(\top) \wedge P_1(\neg\top),}\,\wedge_I \qquad (8)\ (0/n_1, 1/n_2)}{P_2(\top \wedge (\neg\top))}\,m.p.$$

Dans cette preuve, (6) $(0/n)$ désigne l'axiome obtenu en remplaçant n par 0 dans le schéma (6). De même, (8) $(0/n_1, 1/n_2)$ désigne l'axiome obtenu en remplaçant n_1 par 0 et n_2 par 1 dans le schéma d'axiomes (8).

1. De même, démontrer formellement $P_3(\bot \wedge (\neg(\top \vee \bot)))$ dans le système déductif $\mathcal{P}$.
2. Démontrer par récurrence sur n que toute formule de taille n contient au moins une constante.
3. Démontrer par récurrence sur n qu'il existe au moins une formule de taille n qui n'est pas une tautologie.