

# Note courte sur l'implémentation PF\_OED.py

## Décomposition énergétique avec projecteurs (forme fermée 2D)

Dorian Nezzar

### Objectif

Ce script propose un exemple de rupture fragile par champ de phase en 2D (élément Q4, déformation plane) avec :

- Décomposition de l'énergie par la méthode *Orthogonal Energy Decomposition* (OED) He [2024], Nguyen et al. [2020]
- variable historique  $H$  pour l'irréversibilité
- chargement triangulaire  $0 \rightarrow U^+ \rightarrow 0 \rightarrow U^- \rightarrow 0$
- deux variantes OED : `OED_method={projector,eig}`

### Cinématique et élasticité (Voigt)

On utilise la convention Voigt  $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}]^T$  avec  $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$ . Le tenseur d'élasticité  $C$  (plane strain isotrope) donne l'énergie

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T C \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\sigma} = C \boldsymbol{\varepsilon}.$$

### Principe de la décomposition OED

L'idée OED est de séparer la déformation en parties *traction* et *compression* de manière **orthogonale dans la norme d'énergie** définie par  $C$ . On introduit la transformation énergétique

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = C^{1/2} \boldsymbol{\varepsilon},$$

et on effectue la split dans cet espace, puis on revient avec  $C^{-1/2}$  :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^+ = C^{-1/2} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^+, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^- = C^{-1/2} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^-.$$

Propriétés clés :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^+ + \boldsymbol{\varepsilon}^-, \quad (\boldsymbol{\varepsilon}^+)^T C \boldsymbol{\varepsilon}^- = 0, \quad \psi = \psi^+ + \psi^-, \quad \psi^\pm = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon}^\pm)^T C \boldsymbol{\varepsilon}^\pm.$$

La contrainte unilatérale utilisée ensuite est

$$\boldsymbol{\sigma} = g(d) C \boldsymbol{\varepsilon}^+ + C \boldsymbol{\varepsilon}^-, \quad g(d) = (1 - d)^2 + k.$$

### Méthode `OED_method="projector"` (forme fermée 2D)

Cette option **évite tout calcul de vecteurs propres**. On travaille avec le tenseur  $2 \times 2$  symétrique

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} t_{xx} & t_{xy} \\ t_{xy} & t_{yy} \end{bmatrix} \quad \text{tel que} \quad [t_{xx}, t_{yy}, 2t_{xy}]^T = C^{1/2} \boldsymbol{\varepsilon}.$$

On calcule les invariants

$$\text{tr} = t_{xx} + t_{yy}, \quad \det = t_{xx}t_{yy} - t_{xy}^2,$$

puis les valeurs propres (fermées, sans diagonalisation)

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \text{tr} \pm \sqrt{\text{tr}^2 - 4 \det} \right), \quad \lambda_1 \geq \lambda_2.$$

Les **projecteurs** sont construits sans vecteurs propres :

$$E_1 = \frac{\tilde{\varepsilon} - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad E_2 = I - E_1.$$

On scinde alors

$$\tilde{\varepsilon}^+ = \lambda_1^+ E_1 + \lambda_2^+ E_2, \quad \tilde{\varepsilon}^- = \lambda_1^- E_1 + \lambda_2^- E_2, \quad \lambda^\pm = \max / \min(\lambda, 0).$$

Enfin, on revient en Voigt via  $C^{-1/2}$  (attention au facteur  $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$ ).

**Cas dégénéré** ( $\lambda_1 \approx \lambda_2$ ) : on prend  $E_1=I$ ,  $E_2=0$  si  $\lambda_1 \geq 0$  (tout en traction), sinon  $E_1=0$ ,  $E_2=I$ .

## Option OED\_method="eig"

Même logique OED, mais en diagonalisation classique  $\tilde{\varepsilon} = V \Lambda V^T$ , puis  $\tilde{\varepsilon}^\pm = V \Lambda^\pm V^T$ . Implémentation simple, mais plus coûteuse.

## Champ de phase et irréversibilité

Le champ  $d$  est piloté par la **variable historique** (locale, PointGauss)

$$H^{n+1}(x) = \max(H^n(x), \psi^+(x)), \quad \psi^+ = \frac{1}{2} (\varepsilon^+)^T C \varepsilon^+.$$

La forme faible implémentée conduit, au niveau élémentaire, à une matrice  $K_\phi = G_c l_0 (\nabla N)^T \nabla N + (G_c/l_0 + 2H) N^T N$  et un résidu  $R_\phi = 2H N$ , puis on résout  $K_\phi d = R_\phi$ . Pour **enforcer l'irréversibilité nodale**, on applique la projection

$$d^{n+1} \leftarrow \max(d^{n+1}, d^n) \quad \text{et on borne} \quad d \in [0, 1].$$

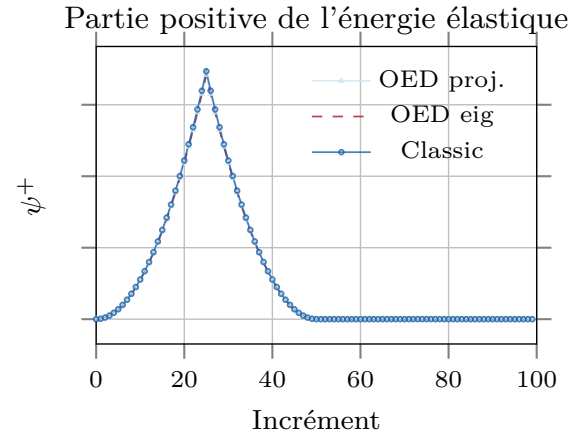
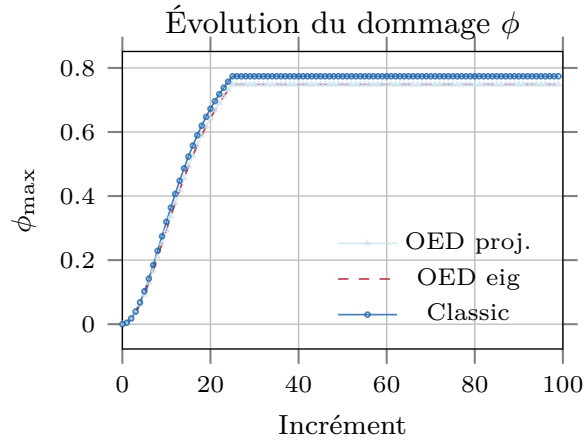
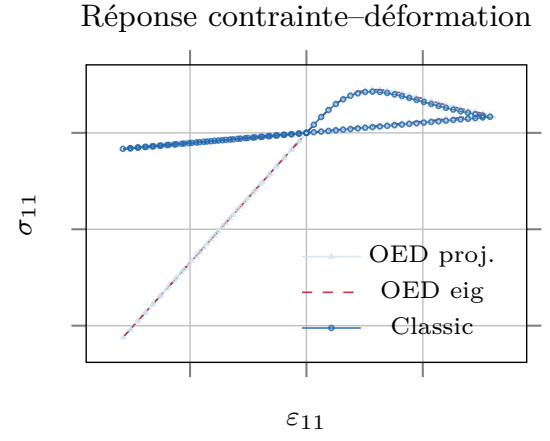
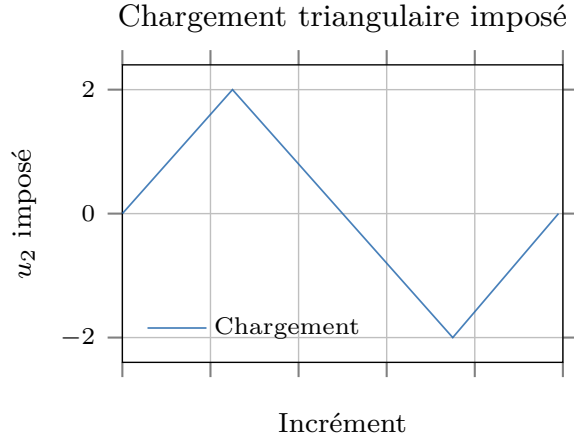
## Algorithme d'un incrément (résumé)

1. Construire le déplacement imposé  $U$  et obtenir  $\varepsilon = B U$  aux 4 PointGauss.
2. **split (mode OED)** :
  - (a) **projector** : invariants  $\rightarrow \lambda_{1,2}$  fermés, projecteurs  $(E_1, E_2)$ , calcul de  $\varepsilon^\pm$  ;
  - (b) **eig** : EVD de  $\tilde{\varepsilon}$ , calcul de  $\varepsilon^\pm$ .
3. Calcul de  $\psi^+ = \frac{1}{2} (\varepsilon^+)^T C \varepsilon^+$ , puis mise à jour  $H \leftarrow \max(H, \psi^+)$ .
4. Résolution du champ  $d$  avec  $H$  et projection nodale  $d^{n+1} \geq d^n$ .
5. Contraintes aux PointGauss :  $\sigma = g(d) C \varepsilon^+ + C \varepsilon^-$ .

## Options de calcul

- **mode="OED"** : split OED (unilatéralité sur la contrainte).
- **mode="classic"** : énergie positive construite à partir des déformations principales positives de  $\varepsilon$  (sans  $C^{1/2}$ ), et dégradation appliquée à la contrainte complète  $g(d) C \varepsilon$ .
- **OED\_method="projector" ou "eig"** : choix de la mise en œuvre de OED.

Les deux méthode OED (projector/eig) donnent des résultats identiques (voir figure)



## References

- Q.-C. He. Three-dimensional strain and stress orthogonal decompositions via an elastic energy preserving transformation. *International Journal of Solids and Structures*, 295: 112818, 2024. ISSN 0020-7683. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2024.112818>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002076832400177X>.
- T.-T. Nguyen, J. Yvonnet, D. Waldmann, and Q.-C. He. Implementation of a new strain split to model unilateral contact within the phase field method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 121(21):4717–4733, 2020. doi: <https://doi.org/10.1002/nme.6463>. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.6463>.