# 第六章 逻辑式程序设计语言

逻辑式语言基本形式:用一种符号逻辑作为程序设计语言来进行程序设计,通常称为逻辑程序设计语言,或声明性语言

- 程序要对数据结构实施某个算法过程,算法实现计算逻辑 算法 = 逻辑 + 控制
- 逻辑程序设计的基本观点是程序描述的是数据对象之间的关系。 关系也是联系。
- 对象和对象、对象和属性的联系就是我们所说的事实。事实之间的关系以规则表述,根据规则找出合乎逻辑的事实就是推理。
- 逻辑程序设计范型是陈述事实、制定规则,程序设计就是构造证明。程序的执行就在推理。

# 6.1谓词演算

谓词演算是符号化事实的形式逻辑系统,它也是逻辑程序设计语言的模型

- 表示命题
- 表示命题之间的关系
- 描述如何根据假设为真的命题推断出新命题
- 谓词演算诸元素

用形式方法研究论域上的对象需要一种语言,它能表达该域对象具有什么性质(properties),以及对象间有些什么关系(relations)

描述以公式(Formulas)表达。谓词公式中各元素按一定逻辑规则变换,即谓词演算(predicate calculus)

- ① 公式:由一组约定的符号组成的序列,它包括常量、变量、逻辑连接、命题函数、谓词、量词
- ② 常量: 指明论域上的对象
- ③ 变量: 可束定到特定域上某个范围的对象上
- ④ 函数: 表征对象具有的映射关系
- ⑤ 谓词:表征对象某种性质的符号
- ⑥ 量词: 量词限定的变量名作用域是整个公式
- ⑦ 逻辑操作: and, or, not,  $\rightarrow$ (蕴含) <=>(全等)

当谓词应用到的变元是常量或已被束定的变量上时,就叫做句子 (sentence)或命题(proposition)

谓词变元的个数称作目(arity),有单目、N目谓词之称 N-目谓词的例子。

含义 谓词 X是奇数 odd(X)F是S的父亲 father(F, S) 2 N除D得商Q和余数R divide(N, D, Q, R)

结果值 谓词例化 odd(2)False divide (23, 7, 3, 2) Ture father (changshan, changping) True N未例化,不知真假

divide (23, 7, 3, N)

## 谓词的量化

量化谓词 结果值

 $\forall Xodd(X)$  False

 $\exists Xodd(X)$  True

 $\forall X(X=2*Y+1 \rightarrow odd(X))$  True

 $\exists X \exists Y \text{ divide } (X, 3, Y, 0)$  True,  $\forall IX = 3, Y = 1$ 

 $\forall X \exists Y \text{ divide } (X, 3, Y, 0)$  False

 $\exists X \forall Y \text{ divide } (X, 3, Y, 0)$  False

证明一个全称谓词是比较难的,因为最可靠的证明方法是枚举例证。 于是采取反证的方法,全称量化的谓词取反

量化谓词	取反	
$\forall Xodd(X)$	$\exists X not odd(X)$	[1]
$\exists Xodd(X)$	$\forall$ Xnot odd(X)	[2]
$\forall X(X=2*Y+1 \rightarrow odd(X))$	$\exists X not(X+2*Y+1 \rightarrow odd(X))$	[3]
	$\exists X \text{not}(X=2*Y+1) \text{ or odd } (X))$	[4]
	$\exists X((X=2*Y+1) \text{ and not odd}(X))$	[5]
$\forall X \exists Y \text{ divide } (X, 3, Y, 0)$	$\exists X \forall Y \text{ not divide } (X, 3, Y, 0)$	[6]
$\exists X \exists Y \text{ divide } (X, 3, Y, 0)$	$\forall X \forall Y \text{ not divide } (X, 3, Y, 0)$	[7]
$\exists X \forall Y \text{ divide } (X, 3, Y, 0)$	$\forall X \exists Y \text{ not divide } (X, 3, Y, 0)$	[8]

# 谓词演算的等价变换

一般谓词公式变换为子句的实例。'▶'号为"可推出"

[1]以∧,∨, ¬消除→、<=>符号

- [2]化为前束范式,消除最外的¬符号,否定符号内移¬(∃XP(X) ► ∀X(¬ p(X))
- [3]用斯柯林变换消去存在量词

$$\forall X(a(X) \land b(X) \lor \exists Y c(X, Y))$$

$$\vdash \forall X(a(X) \land b(X) \lor c(X, g(X)))$$

[4] 消除前束范式的全称量词

$$\vdash a(X) \land b(X) \lor c(X, g(X))$$

[5]用分配率 $P \lor (Q \land R) = (P \lor Q) \land (P \lor R)$ 化成合取范式

 $\vdash$  (a(X) $\lor$ c(X, g(X))) $\land$ (b(X) $\lor$ c(X, g(X)))

经过以上变换,任何一复合公式均可成为如下形式:

 $F = C1 \land C2 \land ...Cn$ 

且其中Ci称为子句

若以';'代'∨'则有:

 $Ci = L1 \lor L2 \lor ...Lv = L1;L2;...;Lv$ 

因此,任一公式均可化为'\'连接的子句的集合

## 6.2 自动定理证明

## • 证明系统

事实即证明系统中的公理(axioms)

证明系统(proof system)是应用公理演绎出定理(theorems)的合法演绎规则的集合

演绎也叫归约(deduction),是对证明系统中合法推理规则的一次应用演绎从公理导出结论(conclusion),中间可利用以这些规则演绎出的定理

证明(roof)是个语句序列, 以每个语句得到证明而结束, 即每个句子要么演绎成公理, 要么演绎成前此导出的定理

- 一个证明若有N个语句(命题)则称N步证明
- 反驳(refutation)是一个语句的反向证明。它证明一个语句是 矛盾的,即不合乎给定的公理
- · 一个语句若能从公理出发推演出来,则称合法语句,任何 合法语句也叫做定理(theorem)
- · 从某一公理集合导出的所有定理集合称为理论(theory)

## • 模型

从公理集合中导出定理集称之为理论,有了理论我们要解释它的语义必须借助某个模型(model)。

因为形式系统只是符号抽象,借助模型我们可为每个常量、函数、谓词符号找到真理性的解释。即定义每个论域,并表明域上成员和常量公理之间的关系。

公理的谓词符号必须派定为域中对象的性质, 函数派定为对域中对象的操作。

公理集合一般情况下只是定义的部分(偏)函数和谓词, 是问题域的一个侧面。所以能满足该理论的模型往往不止一个。

## • 证明技术

从谓词演算具有完整性, 理论上可证明按公理集合建立的任何理论。关键是效率。

如果我们从公理出发做出每一个步骤, 在新的步骤上仍然要查找每一个公理,找出可能的推理。如此下去就形成一个庞大的树行公理集, 每层的结点表示一个公理的语句, 其深度和宽度随问题和最初给出的公理而定, 一层一步骤, N层的树就是N步推理。

对于自动定理证明程序,只有穷举每条可能的证明步骤才能说它是完全的。

穷举完所有路径马上遇到组合爆炸问题,无论是深度优先还是广度优先,百步演绎可能的路径数都是天文数字。

## • 归结定理证明

J.A.Robinson1965年提出的归结法(resolution),是命题演算中对合适公式的一种证明方法。

为了证明合适公式F为真, 归结法证明¬F恒假来代替F 永真。

把两子句合一(unification)并消去一对正逆命题,故归结也译作消解。

归结证明的过程并称之归结演绎, 其步骤如下:

- [1]把前题中所有命题换成子句形式。
- [2]取结论的反,并转换成子句形式,加入[1]中的子句集。
- [3]在子句集中选择含有互逆命题的命题归结。用合一算法得出新子句(归结式),再加入到子句集。
- [4]重复[3],若归结式为空则表示此次证明的逻辑结论是矛盾,原待证结论若不取反则恒真。命题得证。否则继续重复[3]。

例: 归结证明

若有前题 待证命题

 $p1 \quad Q \lor \neg P \qquad \neg P \lor \neg U$ 

 $p2 R \lor \neg Q$ 

p3  $S \lor \neg R$ 

 $p4 \neg U \lor \neg S$ 

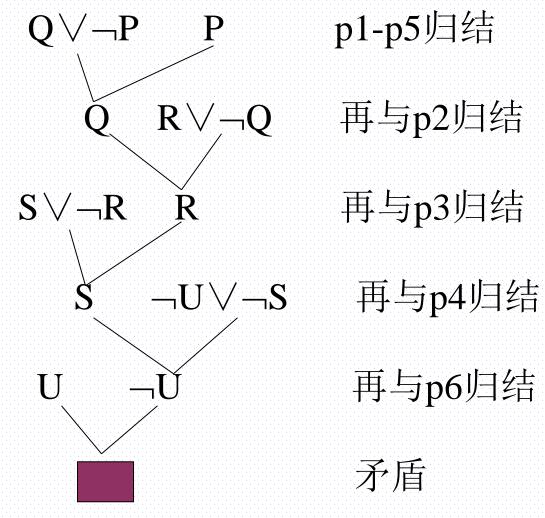
取反得新子句

p5 P

p6 U

取待证命题的反,得P\U,它是\连接的两个子句P、U,把它们加到前题子句集,为p5,p6。

### 归结演绎如下图:



由本例可以看出两个问题:

第一,归结法是由合一算法实现的。所谓合一是找出型式匹配的两子句,将它们合一为归结式,相当于代数中的化简。

第二,如果得不出矛盾,那么归结法要无休止地做下去,中间归结式出得越多,匹配查找次数越多,每一步都做长时间计算。

Solution: 利用切断(cut)操作, 并利用对子句形式进一步限制的超级归结法(Hyperresolution)。

## HORN子句实现超归结

Horn子句是至多只有一个非负谓词符号的子句

Horn子句形式示例如下:

$$\neg P \vee \neg Q \vee S \vee \neg R \vee \neg T$$

其中只有一个非负谓词S,可作以下演算:

先将S移向右方

$$\vdash S \lor \neg (P \land Q \land R \land T)$$
  
'  $\lor \neg '$  即'  $\rightarrow$ ' ,则

$$\vdash S \rightarrow (P \land Q \land R \land T)$$

此条件Horn子句的意义是: if S then  $(P \land Q \land R \land T)$ 。 若S为空,则为无条件Horn子句,是一个断言(事实)

已知:某些病人喜欢所有的医生(AI)

没有一个病人喜欢任意一个骗子(A2)

欲证明:任意一个医生都不是骗子(B)

证明:事实表示:令

P (x) : x是病人

D (x): x是医生

Q (x): x是骗子

L (x, y): x喜欢y

AI:  $\exists x(P(x) \land \forall y(D(y) \rightarrow L(x,y)))$ 

A2: ? B: ?

P (x): x是病人

D (x): x是医生

Q (x): x是骗子

L (x, y): x喜欢y

AI:  $\exists x(P(x) \land \forall y(D(y) \rightarrow L(x,y)))$  //某些病人喜欢所有的医生(AI)

A2:  $\forall x(P(x) \rightarrow \forall y(Q(y) \rightarrow \neg L(x,y)))$  //没有一个病人喜欢任意一个骗子(A2)

B:  $\forall x(D(x) \rightarrow \neg Q(x))$  //任意一个医生都不是骗子(B)

要证明B是AI和A2的逻辑结果: //即公式AI ^A2 ^¬B是不可满足的

$$AI = \exists x(P(x) \land \forall y(\neg D(y) \rightarrow L(x,y)))$$
  
 $A2: \forall x(P(x) \rightarrow \forall y(Q(y) \rightarrow \neg L(x,y)))$   
 $B: \forall x(D(x) \rightarrow \neg Q(x))$   
 $AI = \exists x(P(x) \land \forall y(\neg D(y) \rightarrow L(x,y)))$   
 $= \exists x \forall y(P(x) \land (\neg D(y) \rightarrow L(x,y)))$   
 $--- \rightarrow \forall y(P(a) \land (\neg D(y) \rightarrow L(a,y)))$   
 $A2 = ---$   
 $A2 = --$   
 $A1 \land A2 \land \neg B的子句集是什么$   
 $S=$ 

$$AI = \exists x(P(x) \land \forall y(\neg D(y) \lor L(x,y)))$$

$$= \exists x \forall y(P(x) \land (\neg D(y) \lor L(x,y)))$$

$$---- \forall y(P(a) \land (\neg D(y) \lor L(a,y)))$$

$$A2 = \neg \forall x(P(x) \rightarrow \forall y(\neg Q(y) \lor \neg L(x,y)))$$

$$= \forall x(\neg P(x) \lor \forall y(\neg Q(y) \lor \neg L(x,y)))$$

$$= \forall x \forall y (\neg P(x) \lor \neg Q(y) \lor \neg L(x,y))$$

$$\neg B = \neg (\forall x(D(x) \rightarrow \neg Q(x)))$$

$$= \exists x(\neg (\neg D(x) \lor \neg Q(x)))$$

$$---- (D(b) \land Q(b))$$

$$S = \{P(a), \neg D(y) \rightarrow L(a,y), \neg P(x) \lor \neg Q(y) \lor \neg L(x,y), D(b), Q(b)\}$$

S不可满足的归结演绎序列为:

- (1)P(a),
- $(2) \neg D(y) \lor L(a,y),$
- $(3) \neg P(x) \lor \neg Q(y) \lor \neg L(x,y),$
- (4)D(b)
- (5)Q(b)
- (6)  $\neg Q(y) \lor \neg L(a,y)$  //由(1) (3)
- (7)L(a,b) //由 (2) (4)
- (8)  $\neg$ L(a,b) // 由(5) (6)
- (9) □ 由 // (6) (8)

## 6.3 逻辑程序的风格

第一个特点是它不描述计算过程而是描述证明过程

第二个特点是描述性

逻辑式程序处理的是关系而不是函数。用关系比函数更灵活,关系能统一处理参数和结果,也就是关系中没有计算方向的概念。

第三个特点是大量用表和递归实现重复操作

sort (old\_list, new\_list)

├ permute(old\_list, new\_list) \( \ \) sorted(new\_list)

sorted(list)  $\land \forall j$  使得  $1 \le j \le n$ ,  $list(j) \le list(j+1)$ 

\*permute是一个谓词,如果第二个参数组是第一个参数组的一个排列,就返回真

#### PROLOG语言

- Prolog是一种基于一阶谓词的逻辑式语言
- Prolog是基于Horn子句的,使用归结推理,具有很强的逻辑描述能力和推理能力
- Prolog语言特点:
  - 一阶逻辑的语言形式是形式化地严格定义的
  - ■一阶逻辑的语法简易易懂
  - 逻辑公式不需要重复表达,与不同应用无关
  - 事实、假设、推理、查询、视图和完整性规约条件都能以基于一阶逻辑的 prolog语言表达
  - 逻辑语言Prolog可作为定义和比较其它知识表示模型的共同模型

```
例 求平均成绩的逻辑程序,打开一分数文件scores,
读入分数求和并用的数N除之得平均成绩
  average :- see(scores),
     getinput (Sum, N),
     seen (scores),
    Ay is Sum /N,
    print ('Average = ', Av)
  getinput (Sum, N):- ratom (X),
    not (eof),
     getinput (Sum1, N1),
     Sum is Sum1 + X_{i}
     N is N1+1.
  getinput (0, 0):- eof.
```

## 6.4 典型逻辑程序设计语言PROLOG

猜测并验证,查询形式:是否存在一个S,使得guess(S)且verify(S)

- Prolog要环境支持,即管理事实和规则的数据库
- Prolog的基本成分是对象(常量、变量、结构、表)、谓词、运算符、函数、规则
- 从纯语法意义上Prolog的项什么都可以表示:
- <项>::=<常量>|<变量>|<结构>|(<项>)|<表><后缀算符>

•从语义角度,以下语法描述提供了处理时的语义概念:

<程序>→<子句>

<子句>→(<事实>|<规则>|<查询>)

<事实>→<结构>

<规则>→<头>:-<体>

<头>→<结构>

<体>→<目标>,<目标>

<目标>→/\*形如p或q(T, ..., )的字面量\*/

#### 与PROLOG交互

■ ? - (在每轮交互开始时系统都会给出"提示符号")

表示希望得到一个查询

- ? consult (links) .
  - consult结构读入包含事实和规则的文件,并将这些内容添加到当前规则数据库末尾。
- ? link (algol60, L), link (L, M).

L = cpl

M = bcpl

表示: 是否存在L和M, 使link (algol60, L) and link (L, M)?

输入";"并回车, Prolog将用另一个解作为响应,或者用"no"说明已经无法在找到解。

■ 规则的表示

规则就是horn子句

<term>:- <term>1, <term>2, ....., <term>k.

:- 左边的项称为头部, 在:- 右边的那些项称为条件。

事实是规则的特殊形式,只有头部而没有条件。

- Path(L, L).
- Path(L, M) :- link(L, X), path(X, M).
- 其中变量X, 出现在条件里面, 而不在头部, 表示某个满足条件的对象

#### 与PROLOG交互

#### ■ 合一

- · 得到项T的实例方法: 用一些项去替换T中的一个或几个变量。同一个变量的所有出现必须用同一个项去替换。
- f (a, b) 是f (X, b) 的实例,同理f (a, b) 是f (a, Y) 的实例。共同的实例是f (a, b) 。
- g (a, b) 不是g (X, X) 的实例
- 合一是在规则应用时隐含发生的。
- 算术: "="运算符表示合一

? 
$$- \times = 2+3$$
  $\times = 2+3$ 

中缀运算符"is"对表达式求值:

? - 
$$\times$$
 is 2+3  $\times$  = 5

# •Prolog程序结构 Prolog程序由子句组成,子句模型是Horn子句。 (1) 事实与规则

Prolog程序先定义公理集

例: Prolog的规则和事实

```
条件子句(规则) pretty (X):-artwork(X) pretty (X):-color(X, red), flower(X).
```

watchout (X):-sharp $(X, _)$ .

无条件子句(事实) color (rose, red).

sharp (rose, stem).

sharp (holly, leaf).

flower(rose).

flower(violet)

artwork (painting (Monet, haystack\_at\_Giverny)).

## (2)查询

no

```
Prolog中查询(query)是要求Prolog证明定理。 因为提出的问题就是
证明过程的目标,所以查询也叫目标(goal)。
例: Prolog的查询
  ?- pretty (rose).
  yes
  ?- pretty (Y).
  Y=painting (Monet, haystack_at_Giverny).
  Y=rose.
  no
  ?-pretty(W), sharp(W, Z)
  W=rose Z=stem
```

例: 最大公约数的欧基里得算法 最大公约数欧基里得算法可用三条规则描述: gcd (A, 0, A). gcd (A, B, D):-(A>B), (B>0), R is A mod B, gcd(B, R, D).

gcd (A, B, D):-(A<B), gcd (B, A, D).

## •函数和计算

(1) 函子完成逻辑设计中的计算 函子以结构形式出现,如:

中缀表示 前缀表示

X+Y\*Z +(X, \*(Y, Z))

A-B/C -(A, /(B, C))

故它不是谓词,仅仅是一特殊的结构:

<函数名>(<变元>, ..., <变元>)

函数求值的的结果一般通过谓词is(<变元>, <表达式>)東定到变元上gcd(A, B, D);-(A>B), (B>0), R is A mod B, gcd(B, R, D).

把函数改写为约束, 很容易写出prolog程序

例求斐波那契数的Prolog程序

斐波那契函数以下述公式生成以下数列:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Fib(0) = 1

Fib(1) = 1

Fib(n) = Fib(n-1) + Fib(n-2)

第一、二式是事实也是公理,把结果值作为变元照写。第三式说明,若n为斐波那契数,n-1和n-2的斐波那契必须成立,且这两个数之和是n的斐波那契数,n>1,于是有Prolog程序

Fib (0, 1).

Fib (1, 1).

Fib (n, f):-Fib(m, g), Fib(k, h), m is n-1, k is m-1, f is g+h, n>1.

当有查询?-Fib(5, f)时, f返回8

## (2) 逻辑程序的算法表达

算法怎样用公理表达呢?拿一个最典型的Quicksort分类程序讨论。quicksort(未分类表,分类完的表):

- (从未分类表拿出第一元素,以它为基准,分成两个表),	[1]
quicksort(小表,分类完小表),	[2]
quicksort(大表,分类完大表),	[3]
append (分类完小表,基准元素和分类完大表,分类完总表)	[4]

这样把快速分类的总目标变成了四个子目标

```
例 快速分类的Prolog代码
   split(_, [], [], []).
r2 split (Pivot, [Head | Tail], [Head | Sm], Lg):-
            Head < Pivot, split (Pivot, Tail, Sm, Lg).
r3 split (Pivot, [Head | Tail], Sm [Head | Lg]):-
            Pivot < Head, split (Pivot, Tail, Sm, Lg).
   quicksort ([], []).
    quicksort ([Head []], Head).
    quicksort ([Pivot | Unsorted] AllSorted):-
           split (Pivot, Unsorted, Small, Large),
      quicksort (Small, SmSorted),
      quicksort (Large, Lgsorted),
      append (SmSorted, [Pivot | LgSorted], AllSorted).
```

## (3)逻辑和控制分离

Prolog无通常意义的控制结构,也就是该程序动作次序(显然也有)和计算的子句逻辑没有必然的关系。例如:把上例中r4,r5,r6写在r1,r2,r3前面并不影响本程序的执行结果。

#### 封闭世界内的假设

- 如果有某个子目标查遍数据库也找不到能满足的事实,该子目标 失败,但不等于整个目标的失败。
- ■即使是整个目标最后失败,也不等于这个目标追求的命题是否定的,因为限于数据库存放的规则和事实有限,它是"封闭世界假说"之下的失败。

## •cut和not谓词

因为Prolog的归结模型只能完整地证明正命题,是否有解无法判定。

如果明知再作没有意义,可人为截断cut。

### (1) 安全cut

非形式解释cut,它如同一篱笆,由程序员任意置放在规则之中,以停止无意义的回溯。

```
无论X是否为真,
例 安全cut示例: 求1到N的整数之和
                                     ! 左侧的都回溯
   sum_{to}(N, 1):-N=1, ! . --
                                     不过去。
r2 sum to (N, r):-N1 is N-1, sum_to(N1, r1),
                        r is r1 + N.
当有查询:
    ?-sum_to(1, X) //匹配r1
                 //打':'号由于有!不致无限查找第2个
    X=1;
    no
    ?-sum_to(6, X) //匹配r1失败, 匹配r2连续r2
                 //直至成功, 打':'号也不再找
    X=21;
    no
    r1 可用sum_to(1,1).事实代
```

(2) cut 实现not操作 r1 not(X):-X, !, fail. r2 not().

#### 其推理过程是:

- 若X为假, 匹配r1, 在未达到! 时已失败, 则匹配规则r2, 由于r2 什么变元都可以且总为成功, 所以, not(X)是成功的。
- 若X为真, 匹配r1后, X为真, 控制通过! 传到fail,则r1失败。于是回溯到! 过不去, 只好失败。由于用了!就地失败, 它不再匹配r2, 故not(X)为失败。
- 正是由于这个原因,谓词p和not(not (p))求值结果不能保证一样,有时not(p)和not(not (p))求值结果倒是一样的,以下是not谓词出毛病的例子:

#### 例不可靠的not谓词

假定一规则test有以下定义:

test (S, T):-S=T.

运行以下查询时有:

?-test(3, 5).

no

?-test(5, 5)

yes

?-not( test(5, 5)

no

X=3

R=5

?- not (not test (X, 3)), R is X+2.

! error in arithmetic expression : not a number

• r1 not(X):-X, !, fail.

• r2 not(\_).

由于第二次not(外部的)求值 时用到上例规则r1, 其中X 是not(test(X, 3))的结果值, 故X+2不是数加2。这个问题

?-test(X, 3), R is X+2. 原因在于子句逻辑的不可判

定性

一般来说,将not应用于没有变量的项是安全的,因为 这种项里不存在合一修改的变量。

## (3)不安全的cut

cut使我们处于两难的境地,它的高效是以风险为代价得到的,如同60年代goto技巧对非结构化程序的影响。只要模型是超级归结,cut的两面性是不可以解决的。

## 6.5 PROLOG评价

- Prolog提供一种证明风格的声明式程序设计, 推理清晰, 概括能力强, 程序和数据没有明显分离。
- Prolog程序具有自文档性
- 由于非过程性,它也成为潜在的并行程序设计语言的候选者
- 它的效率仍不及传统过程语言。由于它的声明性质, 程序员在优 化算法时作用有限
- 复杂的大型系统一开始很难按照证明系统开发,程序不大运算量惊人,而Prolog本身也只有局部量,天生来也不是大型软件开发的工具。因此,Prolog只能作为逻辑程序设计的独枝存在,解决大型应用多范型语言是个出路

#### 逻辑式思考题

■解决数独问题,参考快速排序算法表达式写出4\*4单元数独Prolog的算法表达式

```
例子: soduku (Puzzle, Solution):-
           Solution = Puzzle.
|?- suduku ([ _, _, 2, 3,
            3, 4, __, _ ],
             Solution)
Solution = [4, 1, 2, 3, 2, 3, 4, 1, 1, 2, 3, 4, 3, 4, 1, 2]
```