一、用动态规划方法手工求解下面的问题

某工厂调查了解市场情况，估计在今后四个月内，市场对其产品的需求量如下表所示。

时期（月）	需要量（产品但闻）
1	2
2	3
3	2
4	4

已知：对每个月来讲，生产一批产品的固定成本费为 3（千元），若不生产，则为零。每 生产单位产品的成本费为 1 （千元）。同时，在任何一个月内，生产能力所允许的最大生产 批量为不超过 6 个单位。

又知每单位产品的库存费用为每月 0.5 （千元），同时要求在第一个月开始之初， 及在第四个月末，均无产品库存。

问：在满足上述条件下，该厂应如何安排各个时期的生产与库存，使所花的总成本费用最低？

要求：写出各种变量、状态转移方程、递推关系式、和详细计算步骤。

解：

设 K 表示月度标识，则：

P_k：当月生产量

N_k：当月需求量

L_k：当月初剩余量

V_k：当月成本（生产成本+存储成本）

由题意得：

L_k 满足：$L_k = L_{k-1} + P_{k-1} - N_{k-1}$，且 $L_1=L_5=0$

P_k 满足：$\max\{0,\ N_k - L_k\} <= P_k <= \min\{0,\ N_k + N_{k+1} + ... + N_4 - L_k\}$

V_k 满足：$V_k = 0.5*(L_k - N_k)$,$P_k=0$

$= 3 + P_k + 0.5*(L_k + P_k - N_k)$,$P_k!=0$

设 $F(L_k)$表示第 k 月初的剩余量为 L_k时到第 4 月结束时的总成本，则其递推关系满足：

$F(L_k) = \min\{V_k + F(L_{k+1})\}$

$= \min\{0.5*(L_k - N_k) + F(L_k - N_k)\}$,$P_k=0$

$= \min\{3 + P_k + 0.5*(L_k + P_k - N_k) + F(L_k + P_k - N_k)\}$,$P_k!=0$

$L_5=0$ 且 $F(L_5)=0$

计算过程如下:

首先计算 K=4 时，L4=0，1，2，3，4 这五种情况的费用

Lk	Pk	Vk
0	4	7
1	3	6
2	2	5
3	1	4
4	0	0

K=3 时，由于前两个月最多一共生产 12 个产品单位，共消耗掉 5 个，最多剩余 7 个，又由于根据 Pk 所满足的条件得，Lk 最多为 6

Lk	Pk	Vk	Lk+1	Pk+1	Vk+1	V
0	2	5	0	4	7	12
	3	6.5	1	3	6	12.5
	4	8	2	2	5	13
	5	9.5	3	1	4	13.5
	6	11	4	0	0	**11**
1	1	4	0	4	7	11
	2	5.5	1	3	6	11.5
	3	7	2	2	5	12
	4	8.5	3	1	4	12.5
	5	10	4	0	0	**10**
2	0	0	0	4	7	**7**
	1	4.5	1	3	6	10.5
	2	6	2	2	5	11
	3	7.5	3	1	4	11.5
	4	9	4	0	0	9
3	0	0.5	1	3	6	**6.5**
	1	5	2	2	5	10
	2	6.5	3	1	4	10.5
	3	8	4	0	0	8
4	0	1	2	2	5	**6**
	1	5.5	3	1	4	9.5
	2	7	4	0	0	7
5	0	1.5	3	1	4	**5.5**
	1	6	4	0	0	6
6	0	2	4	0	0	**2**

K=2 时，本月初最多剩余 4 个产品单位（6-2）

Lk	Pk	Vk	Lk+1	min{Vk+1}	V
0	3	6	0	11	17
	4	7.5	1	10	17.5
	5	9	2	7	**16**
	6	10.5	3	6.5	17
1	2	5	0	11	16
	3	6.5	1	10	16.5
	4	8	2	7	**15**
	5	9.5	3	6.5	16
	6	11	4	6	17
2	1	4	0	11	15
	2	5.5	1	10	15.5
	3	7	2	7	**14**

	4	8.5	3	6.5	15
	5	10	4	6	16
	6	11.5	5	5.5	17
3	0	0	0	11	**11**
	1	4.5	1	10	14.5
	2	6	2	7	13
	3	7.5	3	6.5	14
	4	9	4	6	15
	5	10.5	5	5.5	16
	6	12	6	2	14
4	0	0.5	1	10	**10.5**
	1	5	2	7	12
	2	6.5	3	6.5	13
	3	8	4	6	14
	4	9.5	5	5.5	15
	5	11	6	2	13

K=1 时，月初只有 0 个产品单位

Lk	Pk	Vk	Lk+1	min{Vk+1}	V
0	2	5	0	16	21
	3	6.5	1	15	21.5
	4	8	2	14	22
	5	9.5	3	11	**20.5**
	6	11	4	10.5	21.5

因此，最终成本最低值为 20.5（千元），且每月产量与月末剩余情况如下所示：

月度	生产	月末剩余
1	5	3
2	0	0
3	6	4
4	0	0

二、用动态规划方法编程求解下面的问题：

某推销员要从城市 v1 出发，访问其它城市 v2，v3，…，v6 各一次且仅一次，最后返回 v1。D 为各城市间的距离矩阵。 问：该推销员应如何选择路线，才能使总的行程最短？

$$D = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 12 & 0 & 18 & 30 & 25 & 21 \\ 23 & 19 & 0 & 5 & 10 & 15 \\ 34 & 32 & 4 & 0 & 8 & 16 \\ 45 & 27 & 11 & 10 & 0 & 18 \\ 56 & 22 & 16 & 20 & 12 & 0 \end{bmatrix}$$

要求：写出递推关系式、伪代码和程序相关说明，并分析时间复杂性。(请遵守第一节课 提出的有关 assignment 的要求)

解：

思路大致为，若求从城市 V1 出发，经过且只经过 1 次其余城市节点，并最终返回 V1 的最短距离，则可以划分为从城市 V1 到 Vi，然后再从 Vi 城市经过且只经过 1 次其余城市节点（初始城市-V1-Vi 的集合），不断递归下去，直到剩余城市为空集，则直接返回 V1，返回上层调用时，从 Vi 到 Vj 中选择结果最小的。

令（i，S）表示当前所在城市为 Vi，需经过 S 集合中的城市各 1 次，并返回 V1。在当前情况下，Vi 城市可以选择去往 S 中任意一个城市 Vj，距离为 D[i][j]，此时节点位于 Vj，因此状态变为（j，S-{Vj}），直到 S 为空集时，此时（t，S）表示直接从 Vt 返回 V1。

令 F(i,S)表示从当前所在城市为 Vi 出发，需经过 S 集合中的城市各 1 次，并返回 V1 时所经过的最短距离，可以得出**递推关系式**如下：

```
F(i,S) = min(D[i][j]+F(j,S-{Vj}))  (j 在 S 中遍历),S 不为空集
       = D[i][0]                                 ,S 为空集
```

伪代码及程序说明：

函数：Tsp(int matrix[][])

输入：邻接矩阵表示的有向图

过程：n 表示节点个数，dp[][]用于存储从城市出发去往集合中剩余城市各一次并返回 V1 城市的最短距离，path[][]用于存储从当前城市前往集合中所有城市的下一个城市节点。这两个矩阵行数为 n，列数为 2^{n-1}。

输出：从 V1 出发，经过剩余 n-1 个城市，且经过 1 次，并返回 V1，返回最短距离，并输出所经过的路径。

```
for i:1 to n:
    dp[i][0] = matrix[i][0]//当 S 为空集时，F(i,S)等于 D[i][0]
endfor

for j:1 to 2^(n-1):
    for i:1 to n:
        dp[i][j] = -1//初始化 F(i,S)为-1，默认表示当前情况下无法按要求返回 V1
        for t in S://循环遍历每一个在当前集合中的城市 t
            tmp = D[i][t]+dp[i][k]
```

```
            if dp[i][j] > tmp:
                dp[i][j] = min(D[i][t]+dp[i][k])//计算从 i 到 t 的距离，再加上从 t 到 k 集合中所有城市且一次并返回 V1 的距离，k 为 S 集合除掉 t 城市，求最小值
                path[i][j]=t//将取得最小值的那种情况的下一个城市 t 返回给 path[i][j]
            endif
        endfor
    endfor
endfor

for i:1 to n:
    if D[0][i] + dp[i][S] < res:
        res = D[0][i] + dp[i][S]//计算从 V1 前往下一个不同城市节点，所得到的最短距离
        a = i//保存下一个应该前往的节点
    endif
endfor

while S not empty:
    print(a)//依次输出经过的结点，直到 S 为空集，便直接返回 V1
    a = path[a][S]
    S = S.remove(a)
endwhile
```

时间复杂性：

dp 数组初始化第一列（操作 n 次）

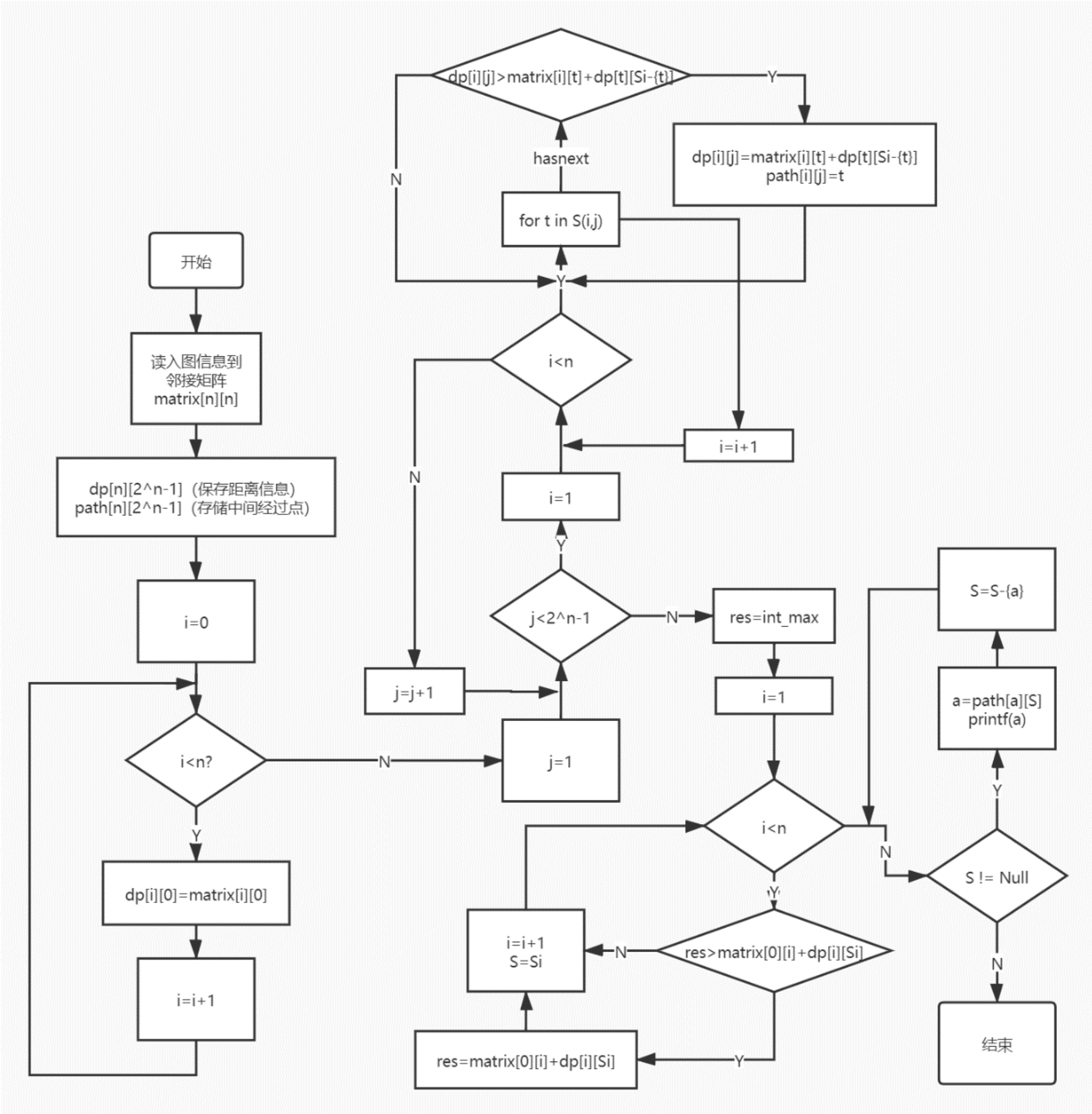
dp 数组递归求解过程（外层循环 2^{n-1} 列，内层循环 n 行，遍历集合中下一个节点常数次操作 n）

最外层计算最短路径（操作 n 次）

输出最短路径（遍历 n 次）

总体时间复杂度：$n+2^{n-1}*n*n+n+n$，因此为 $O(2^n*n^2)$

程序执行流程图：

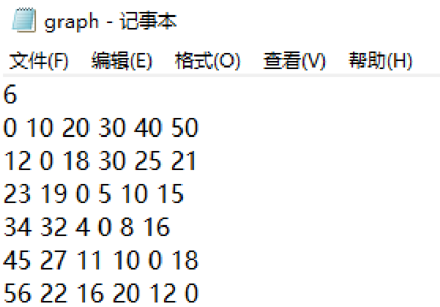


源码及可执行文件：

见压缩包中 main.cpp 和 main.exe，其中 main.exe 默认测试数据为题中所给数据，如果要测试其余数据，请后跟图文件路径，使用方式为：

./main.exe ./graph.txt

graph.txt 为图信息，以邻接矩阵形式存储，第一行为点的个数 n，后 n 行分别存储第 n 个点到其余点的距离，并以空格隔开。形如：


graph - 记事本
文件(F) 编辑(E) 格式(O) 查看(V) 帮助(H)

```
6
0 10 20 30 40 50
12 0 18 30 25 21
23 19 0 5 10 15
34 32 4 0 8 16
45 27 11 10 0 18
56 22 16 20 12 0
```