**一、用动态规划方法手工求解下面的问题**

某工厂调查了解市场情况，估计在今后四个月内，市场对其产品的需求量如下表所示。

|  |  |
| --- | --- |
| 时期（月） | 需要量（产品但闻） |
| 1 | 2 |
| 2 | 3 |
| 3 | 2 |
| 4 | 4 |

已知：对每个月来讲，生产一批产品的固定成本费为 3 (千元)，若不生产，则为零。每 生产单位产品的成本费为 1 （千元)。同时，在任何一个月内，生产能力所允许的最大生产 批量为不超过 6 个单位。

又知每单位产品的库存费用为每月 0.5 （千元），同时要求在第一个月开始之初， 及 在第四个月末，均无产品库存。

问：在满足上述条件下，该厂应如何安排各个时期的生产与库存，使所花的总成本费用 最低？

要求：写出各种变量、状态转移方程、递推关系式、和详细计算步骤。

**解：**

设K表示月度标识，则：

Pk：当月生产量

Nk：当月需求量

Lk：当月初剩余量

Vk：当月成本（生产成本+存储成本）

由题意得：

Lk满足：Lk = Lk-1 + Pk-1 - Nk-1，且L1=L5=0

Pk满足：max{0, Nk - Lk} <= Pk <= min{0, Nk + Nk+1 + ... + N4 - Lk}

Vk满足：Vk = 0.5\*(Lk - Nk) ,Pk=0

= 3 + Pk + 0.5\*(Lk + Pk - Nk) ,Pk!=0

设F(Lk)表示第k月初的剩余量为Lk时到第4月结束时的总成本，则其递推关系满足：

F(Lk) = min{Vk + F(Lk+1)}

= min{0.5\*(Lk - Nk) + F(Lk - Nk)} ,Pk=0

= min{3 + Pk + 0.5\*(Lk + Pk - Nk) + F(Lk + Pk - Nk)} ,Pk!=0

L5=0且F(L5)=0

计算过程如下:

首先计算K=4时，L4=0，1，2，3，4这五种情况的费用

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Lk | Pk | Vk |
| 0 | 4 | 7 |
| 1 | 3 | 6 |
| 2 | 2 | 5 |
| 3 | 1 | 4 |
| 4 | 0 | 0 |

K=3时，由于前两个月最多一共生产12个产品单位，共消耗掉5个，最多剩余7个，又由于根据Pk所满足的条件得，Lk最多为6

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Lk | Pk | Vk | Lk+1 | Pk+1 | Vk+1 | V |
| 0 | 2 | 5 | 0 | 4 | 7 | 12 |
| 3 | 6.5 | 1 | 3 | 6 | 12.5 |
| 4 | 8 | 2 | 2 | 5 | 13 |
| 5 | 9.5 | 3 | 1 | 4 | 13.5 |
| 6 | 11 | 4 | 0 | 0 | **11** |
| 1 | 1 | 4 | 0 | 4 | 7 | 11 |
| 2 | 5.5 | 1 | 3 | 6 | 11.5 |
| 3 | 7 | 2 | 2 | 5 | 12 |
| 4 | 8.5 | 3 | 1 | 4 | 12.5 |
| 5 | 10 | 4 | 0 | 0 | **10** |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 4 | 7 | **7** |
| 1 | 4.5 | 1 | 3 | 6 | 10.5 |
| 2 | 6 | 2 | 2 | 5 | 11 |
| 3 | 7.5 | 3 | 1 | 4 | 11.5 |
| 4 | 9 | 4 | 0 | 0 | 9 |
| 3 | 0 | 0.5 | 1 | 3 | 6 | **6.5** |
| 1 | 5 | 2 | 2 | 5 | 10 |
| 2 | 6.5 | 3 | 1 | 4 | 10.5 |
| 3 | 8 | 4 | 0 | 0 | 8 |
| 4 | 0 | 1 | 2 | 2 | 5 | **6** |
| 1 | 5.5 | 3 | 1 | 4 | 9.5 |
| 2 | 7 | 4 | 0 | 0 | 7 |
| 5 | 0 | 1.5 | 3 | 1 | 4 | **5.5** |
| 1 | 6 | 4 | 0 | 0 | 6 |
| 6 | 0 | 2 | 4 | 0 | 0 | **2** |

K=2时，本月初最多剩余4个产品单位（6-2）

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Lk | Pk | Vk | Lk+1 | min{Vk+1} | V |
| 0 | 3 | 6 | 0 | 11 | 17 |
| 4 | 7.5 | 1 | 10 | 17.5 |
| 5 | 9 | 2 | 7 | **16** |
| 6 | 10.5 | 3 | 6.5 | 17 |
| 1 | 2 | 5 | 0 | 11 | 16 |
| 3 | 6.5 | 1 | 10 | 16.5 |
| 4 | 8 | 2 | 7 | **15** |
| 5 | 9.5 | 3 | 6.5 | 16 |
| 6 | 11 | 4 | 6 | 17 |
| 2 | 1 | 4 | 0 | 11 | 15 |
| 2 | 5.5 | 1 | 10 | 15.5 |
| 3 | 7 | 2 | 7 | **14** |
| 4 | 8.5 | 3 | 6.5 | 15 |
| 5 | 10 | 4 | 6 | 16 |
| 6 | 11.5 | 5 | 5.5 | 17 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 11 | **11** |
| 1 | 4.5 | 1 | 10 | 14.5 |
| 2 | 6 | 2 | 7 | 13 |
| 3 | 7.5 | 3 | 6.5 | 14 |
| 4 | 9 | 4 | 6 | 15 |
| 5 | 10.5 | 5 | 5.5 | 16 |
| 6 | 12 | 6 | 2 | 14 |
| 4 | 0 | 0.5 | 1 | 10 | **10.5** |
| 1 | 5 | 2 | 7 | 12 |
| 2 | 6.5 | 3 | 6.5 | 13 |
| 3 | 8 | 4 | 6 | 14 |
| 4 | 9.5 | 5 | 5.5 | 15 |
| 5 | 11 | 6 | 2 | 13 |

K=1时，月初只有0个产品单位

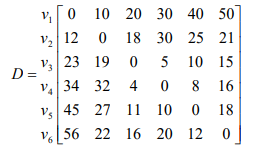
|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Lk | Pk | Vk | Lk+1 | min{Vk+1} | V |
| 0 | 2 | 5 | 0 | 16 | 21 |
| 3 | 6.5 | 1 | 15 | 21.5 |
| 4 | 8 | 2 | 14 | 22 |
| 5 | 9.5 | 3 | 11 | **20.5** |
| 6 | 11 | 4 | 10.5 | 21.5 |

因此，最终成本最低值为20.5（千元），且每月产量与月末剩余情况如下所示：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 月度 | 生产 | 月末剩余 |
| 1 | 5 | 3 |
| 2 | 0 | 0 |
| 3 | 6 | 4 |
| 4 | 0 | 0 |

**二、用动态规划方法编程求解下面的问题：**

某推销员要从城市 v1 出发，访问其它城市 v2，v3，…，v6 各一次且仅一次，最后返回 v1。D 为各城市间的距离矩阵。 问：该推销员应如何选择路线，才能使总的行程最短？

****

要求：写出递推关系式、伪代码和程序相关说明，并分析时间复杂性。（请遵守第一节课提 出的有关 assignment 的要求）