# Descripción matemática de los conteos dinámicos

Para explicar matemáticamente los procedimientos denominados conteos dinámicos ---sobre los cuáles se trabaja en esta tesis--- empezaremos por definir algunos conceptos que se utilizarán en la descripción de cómo se hace un conteo dinámico. Primero, introduciremos el concepto de Objeto Votable, que nos permitirá definir de forma muy compacta un segundo tipo de objeto (Objetos Casilla); después, definiremos un cierto tipo de conjuntos; nos referiremos a tales conjuntos como Objetos Casilla. Un Objeto Casilla se usará para representar cada una de las casillas electorales utilizadas para recibir los votos en una elección realizada en los Estados Unidos Mexicanos, organizada por el Instituto Nacional Electoral, o alguno de los institutos electorales de los estados de la república mexicana, o el instituto electoral de la Ciudad de México. La información de las casillas electorales con la cual se construyeron los Objetos Casilla a los que nos referimos en esta tesis se obtuvo de la página web del instituto electoral del estado de México, en particular de la página <url del IEEM de donde descargué la información del PREP>.

## Contexto para la definición de un Objeto Votable

En general, durante la realización de una elección para algún puesto de elección popular, en México, los ciudadanos emiten sus votos por alguna de las diferentes opciones presentes en la llamada boleta electoral que se utiliza para que los ciudadanos emitan su voto en una elección para un puesto de elección popular. Las siguientes figuras muestran algunos ejemplos de boletas electorales.



Figura 05-1 Ejemplo de una boleta electoral para elección de gobernador(a) de un estado.

En la figura anterior (fuente: https://diarioevolucion.com.mx/wp-content/uploads/2017/06/boleta-electoral.png) se muestra un ejemplo de una boleta electoral (sin nombres de candidatos) para la elección de gobernador(a), que es similar a las que se utilizaron en la elección de gobernador(a) del estado de México que fue organizada por el Instituto Electoral del Estado de México y realizada el 4 de junio de 2017.



Figura 05-2 Ejemplo de una boleta electoral para elección de Jefatura de gobierno de

la Ciudad de México.

En la figura anterior (fuente: https://elbigdata.mx/wp-content/uploads/2018/05/Boleta-electoral-Jefe-de-Gobierno-IECM.jpg) se muestra un ejemplo de una boleta electoral para la elección de jefatura de gobierno de la Ciudad de México, que es similar a las que se utilizaron en la elección de jefe(a) de gobierno de la Ciudad de México que fue organizada por el Instituto Electoral de la Ciudad de México y fue realizada el 1 de julio de 2018.



Figura 05-3 Ejemplo de una boleta electoral para elección de presidente de

los Estados Unidos Mexicanos.

En la figura anterior (fuente: http://www.infoeleccionesmexico.com/informacion-boleta-electoral-eleccion-presidencial-120.html), se muestra un ejemplo de una boleta electoral para la elección de presidente de los Estados Unidos Mexicanos, que es similar a las que se utilizaron en la elección de presidente de los Estados Unidos Mexicanos organizada por el Instituto Nacional Electoral y realizada el 1 de julio de 2018.

En las boletas de las figuras 05-2 y 05-3 se puede notar la existencia de coaliciones, ya que por ejemplo, en la boleta de la figura 05-3, el nombre del entonces candidato RICARDO ANAYA CORTES aparece en los recuadros correspondientes a los partidos pan, prd y mc; el nombre del entonces candidato JOSE ANTONIO MEADE CURIBREÑA aparece en los recuadros correspondientes a los partidos pri, pvem y na; mientras que el nombre del entonces candidato ANDRES MANUEL LOPEZ OBRADOR aparece en los recuadros correspondientes a los partidos morena, pt y pes. En los archivos electrónicos con extensión cvs de los cuales se obtuvieron los datos (cantidades de votos) para la realización de conteos dinámicos a las coaliciones como las mencionadas en este ejemplo se les designa como:c\_pan\_prd\_mc, c\_pri\_pvem\_na, y c\_morena\_pt\_pes. En esos archivos con extensión cvs, por cada coalición se encuentran también los votos recibidos por las combinaciones de los partidos que forman parte de cada una de las coaliciones. Esto es, además de los votos recibidos por la coalición formada por los tres partidos pri, pvem y na: c\_pri\_pvem\_na, en tales archivos se encuentran también los votos recibidos por cada partido de forma individual: pri, pvem, y na; y aparecen los votos recibidos por las combinaciones de partidos de dos en dos: c\_pri\_pvem, c\_pri\_na, y c\_pvem\_na. En esos mismos archivos aparecen también los votos recibidos en cada casilla por los diferentes candidatos independientes, por ejemplo: cand\_ind\_1, cand\_ind\_2; los votos recibidos por candidatos no registrados: no\_registrados y finalmente los votos nulos: nulos. Dado que estos partidos, coaliciones, combinaciones de partidos, los candidatos independientes, los candidatos no registrados y los votos nulos representan las diferentes formas en las que un votante puede emitir su voto el día de la elección, hemos considerado conveniente introducir el concepto de Objeto Votable como sigue:

## Definición de **Objeto Votable**

Para su uso en esta tesis se entenderá por Objeto Votable a las diferentes formas en las que un votante puede emitir un voto (válido o nulo) en una elección.

Algunos ejemplos de objetos votables son los que se mencionan en el párrafo anterior a la definición de Objeto Votable.

## Definición de Objeto Votable Simple

Un objeto votable simple es un objeto votable que corresponde únicamente a alguno de los partidos políticos que participan en una elección, o bien únicamente a alguno de los candidatos independientes que participan en una elección, o bien únicamente a alguno de los candidatos no registrados, o bien únicamente a los votos nulos.

Nótese que en cualquier elección organizada por el INE o los institutos electorales de los estados de la República Mexicana el conjunto de objetos votables simples siempre es finito numerable, es decir, que existe una biyección entre ese conjunto y un conjunto finito de los números naturales. Más explícitamente aun, para cualquier elección siempre existen números naturales %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\alpha,\,\beta,\,
\]
\end{document} y %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\gamma
\]
\end{document} tales que podemos establecer la siguiente biyección:

|  |  |
| --- | --- |
| Número natural identificador de objeto votable simple | Objeto votable simple |
| 1 | Partido político 1 |
| 2 | Partido político 2 |
| %FontSize=12 %TeXFontSize=12 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \vdots \] \end{document} | %FontSize=12 %TeXFontSize=12 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \vdots \] \end{document} |
| %FontSize=12 %TeXFontSize=12 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \alpha \] \end{document} | Partido político %FontSize=12 %TeXFontSize=12 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \alpha \] \end{document} |
| %FontSize=12 %TeXFontSize=12 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \alpha+1 \] \end{document} | Candidato independiente 1 |
| %FontSize=12 %TeXFontSize=12 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \alpha+2 \] \end{document} | Candidato independiente 2 |
| %FontSize=12 %TeXFontSize=12 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \vdots \] \end{document} | %FontSize=12 %TeXFontSize=12 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \vdots \] \end{document} |
| %FontSize=12 %TeXFontSize=12 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \alpha+\beta \] \end{document} | Candidato independiente %FontSize=12 %TeXFontSize=12 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \beta \] \end{document} |
| %FontSize=12 %TeXFontSize=12 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \alpha+\beta+1 \] \end{document} | Candidato no registrado 1 |
| %FontSize=12 %TeXFontSize=12 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \alpha+\beta+2 \] \end{document} | Candidato no registrado 2 |
| %FontSize=12 %TeXFontSize=12 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \vdots \] \end{document} | %FontSize=12 %TeXFontSize=12 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \vdots \] \end{document} |
| %FontSize=12 %TeXFontSize=12 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \alpha+\beta+\gamma \] \end{document} | Candidato no registrado %FontSize=12 %TeXFontSize=12 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \gamma \] \end{document} |
| %FontSize=12 %TeXFontSize=12 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \alpha+\beta+\gamma+1 \] \end{document} | Nulos |

Tabla 1 El conjunto de objetos votables simples es finito numerable.

## Definición de coalición

Una coalición es un par ordenado que consiste de un número natural %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
c\in\{1,\,2,\,\ldots,\,\alpha+\beta+\gamma+1\}
\]
\end{document} y un conjunto de números naturales %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
T
\]
\end{document} que debe ser un subconjunto de %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\{1,\,2,\,\ldots,\,\alpha+\beta+\gamma+1\}
\]
\end{document}. Para una coalición usaremos la siguiente notación.

%FontSize=14
%TeXFontSize=14
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
D_{i}=\{c_{i},T_{i}\}\mbox{\rm\ donde\ }
c_{i}\in\{1,2,\ldots,\alpha+\beta+\gamma+1\}\mbox{\rm , y }T_{i}\subset\{1,2,\ldots,\alpha+\beta+\gamma+1\}
\]
\end{document}

El número %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
c_{i}
\]
\end{document} es un identificador de objeto votable simple (con el que identificamos cuál de los candidatos de los objetos votables simples es el candidato de la coalición), mientras que con el conjunto %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
T_{i}
\]
\end{document} de la coalición identificamos cuáles son los objetos votables simples que conforman la coalición. Finalmente, %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\alpha,\,\beta
\]
\end{document} y %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\gamma
\]
\end{document} son los números naturales mencionados en la tabla 1.

## Definición de subcoalición

Dadas dos coaliciones %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
D_{i}
\]
\end{document} y %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
D_{j}
\]
\end{document}, decimos que la coalición %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
D_{i}
\]
\end{document} es una subcoalición de %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
D_{j}
\]
\end{document} si se cumple que %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
T_{i}\subset T_{j}
\]
\end{document}.

NOTA: si sabemos que una coalición %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
D_{i}
\]
\end{document} es una subcoalición de otra coalición %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
D_{j}
\]
\end{document}, entonces el identificador de objeto votable simple %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
c_{i}
\]
\end{document} de la coalición %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
i
\]
\end{document} deberá ser igual al identificador de objeto votable simple %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
c_{j}
\]
\end{document} de la coalición %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
j
\]
\end{document}, es decir, en términos de la relación de equivalencia que definiremos en página NN, las clases de equivalencia cl(%FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
D_{i}
\]
\end{document}) y cl(%FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
D_{j}
\]
\end{document}) serán iguales; y utilizaremos al identificador de objeto votable simple %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
c_{i}
\]
\end{document} como identificador del candidato de la coalición %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
D_{i}
\]
\end{document}.

## Definición de un Objeto Casilla

Continuaremos definiendo un cierto tipo de conjunto que utilizaremos en la descripción de cómo se hace un conteo dinámico.

Definición de **Objeto Casilla**

Un Objeto Casilla es un conjunto de enteros no negativos de la forma

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=14 %TeXFontSize=14 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ C_{k}=\left\{k,\,v_{k,1},\,v_{k,2}\ldots,v_{k,n_{k}}\right\} \] \end{document} | ObjetoCasilla1 | (1) |

donde %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
k\in\mathbf{N}
\]
\end{document} es un número natural usado para identificar de forma única al conjunto %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
C_{k}
\]
\end{document}; %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
n_{k}
\]
\end{document} es un entero positivo que representa la cantidad de Objetos Votables de los cuales se tiene información en el conjunto %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
C_{k}
\]
\end{document}; %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
v_{k,1},\,v_{k,2}\ldots,v_{k,n_{k}}
\]
\end{document} son todos números enteros no negativos que representan los votos totales recibidos respectivamente por los %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
n_{k}
\]
\end{document} objetos votables de los cuales se tiene información en el conjunto %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
C_{k}
\]
\end{document} (objeto casilla identificado con el número natural %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
k
\]
\end{document}).

La descripción de un conteo dinámico la realizaremos utilizando objetos casillas y objetos votables. Para realizar un conteo dinámico iniciamos con una colección ordenada de objetos casilla

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=12 %TeXFontSize=12 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ C_{1},C_{2},\ldots,C_{m} \] \end{document} | ZEqn2 | (2) |

donde %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
m
\]
\end{document} es un entero positivo que representa la cantidad total de casillas utilizadas en una elección. Cada uno de los objetos casilla en la colección (2) es de la forma mostrada en la expresión (1); esto es, los objetos casilla en (2) son todos de la forma %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
C_{k}=\left\{k,\,v_{k,1},\,v_{k,2},\ldots,v_{k,n_{k}}\right\}
\]
\end{document}. Para simplificar un poco la notación, consideraremos que las siguientes suposiciones son verdaderas:

Suposición 1

Supondremos que todos los enteros %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
n_{1},n_{2},\ldots,n_{m}
\]
\end{document} son todos iguales a un mismo valor entero positivo %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
n
\]
\end{document}; i.e.: %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
n_{1}=n_{2}=\cdots=n_{m}=n>0
\]
\end{document}.

Suposición 2

Los enteros no negativos %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
v_{k,1},v_{k,2},\ldots,v_{k,n}
\]
\end{document} para %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
k=1,2,\ldots,m
\]
\end{document} son los votos correspondientes a los objetos votables %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
1,2,\ldots,n
\]
\end{document} respectivamente en todos y cada uno de los objetos casilla de la colección (2).

Las suposiciones 1 y 2 tienen las siguientes interpretaciones. La suposición 1 equivale a suponer que en todas las %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
m
\]
\end{document} casillas se recibieron votos para la misma cantidad (%FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
n
\]
\end{document}) de objetos votables. La suposición 2 equivale a suponer que en todas las %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
m
\]
\end{document} casillas se recibieron votos para los mismos %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
n
\]
\end{document} objetos votables, “acomodados” en todas las %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
m
\]
\end{document} casillas en la misma posición, esto es, el objeto votable 1 es el mismo en todas las casillas %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
C_{1},C_{2},\ldots,C_{m}
\]
\end{document}; el objeto votable 2 es el mismo en todas las casillas %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
C_{1},C_{2},\ldots,C_{m}
\]
\end{document}; … , el objeto votable %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
n
\]
\end{document} es el mismo en todas las casillas %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
C_{1},C_{2},\ldots,C_{m}
\]
\end{document}. En otras palabras, en todas las %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
m
\]
\end{document} casillas se recibieron votos para los mismos candidatos (registrados y no registrados), coaliciones y votos nulos. Por último, las suposiciones 1 y 2 equivalen a decir que todos los datos con los que se realizarán los conteos dinámicos se pueden representar con la siguiente matriz de enteros no negativos

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=14 %TeXFontSize=14 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \mbox{\rm Elecci\'{o}n}= \left[ \begin{array}{c} C_{1}\\ C_{2}\\ \vdots\\ C_{m} \end{array} \right]= \left[ \begin{array}{ccccc} 1&v_{1,1}&v_{1,2}&\cdots&v_{1,n}\\ 2&v_{2,1}&v_{2,2}&\cdots&v_{2,n}\\ \vdots& \vdots   & \vdots        &      &\vdots\\ m& v_{m,1}&v_{m,2}&\cdots&v_{m,n} \end{array} \right] \] \end{document} | ZEqn3 | (3) |

Nos referiremos a la colección de %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
m
\]
\end{document} objetos casilla representados en forma de matriz en la expresión (3) como una Elección. Dicho de otra forma, trataremos de describir el procedimiento de los conteos dinámicos en términos de los elementos (todos son enteros no negativos) de la matriz (3). Todas las filas de la matriz (3) serán conocidas hasta que se conozcan los resultados de todas las casillas utilizadas en la elección de que se trate. Los conteos dinámicos se realizan con las entradas o elementos de submatrices formadas con las distintas filas de la matriz (3). Por ejemplo, si en una elección se utilizan un total de 100 casillas (%FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
m=100
\]
\end{document}), y en un primer momento –que denominaremos corte PREP1— de la matriz (3) se conocen los valores de las 37 filas 1, 3, 4, 7, 11, 12, 17, 19, 24, 27, 29, 30, 31, 39, 45, 47, 52, 53, 54, 55, 56, 60, 64, 66, 69, 72, 75, 77, 78, 79, 81, 83, 85, 88, 93, 95, 97; se realizaría un conteo dinámico con las información de los 37 objetos casilla correspondientes. Esto es, el conteo dinámico se realizaría con los elementos de la matriz siguiente

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=14 %TeXFontSize=14 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \left[ \begin{array}{c} C_{1}\\ C_{3}\\ C_{4}\\ C_{7}\\ \vdots\\ C_{95}\\ C_{97} \end{array} \right] \] \end{document} | ZEqn4 | (4) |

Por comodidad y con un ligero abuso de notación, nos referiremos a la matriz (4) como la colección ordenada:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=14 %TeXFontSize=14 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \mbox{PREP1}=\left\{ C_{1},C_{3},C_{4},C_{7},C_{11},C_{12},C_{17},\ldots,C_{95},C_{97} \right\} \] \end{document} | ZEqn1 | (5) |

Si en un segundo momento (posterior al primer momento) --que denominaremos corte PREP2—, de la matriz (3) además de las 37 filas en (4) (equivalentemente en (5)), se conocen los valores de las filas 2, 13, 14, 18, 20, 43, 58, 62, 86, 89, 99, y 100; en este segundo momento, se realizaría un conteo dinámico con los elementos de la colección ordenada PREP2 (matriz PREP2) que se muestra a continuación:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \mbox{PREP2}=\left\{ C_{1},C_{2},C_{3},C_{4},C_{7},C_{11},C_{12},C_{13},C_{14},C_{17},C_{18},\ldots,C_{89},C_{95},C_{97},C_{99},C_{100} \right\} \] \end{document} | ZEqn5 | (6) |

Es decir, la colección de objetos casilla PREP2 contiene a todos los objetos casilla de la colección PREP1 y además contendrá también a los objetos casilla (en este ejemplo)

%FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
C_{2}, C_{13}, C_{14}, C_{18}, C_{20}, C_{43}, C_{58}, C_{62}, C_{86}, C_{89}, C_{99}, C_{100}
\]
\end{document}. De esta forma, si se continúa agregando casillas y generando colecciones PREPX (donde X representa un número natural), entonces para algún %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
X_{f}\in \mathbf{N}
\]
\end{document}, se tendrá que %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\mbox{PREP}X_{f}=\mbox{Elecci\'{o}n}
\]
\end{document}; donde %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\mbox{\rm Elecci\'{o}n}
\]
\end{document} representa la matriz en la expresión (3).

A continuación, procedemos a describir la realización de un conteo dinámico utilizando los conceptos definidos en los párrafos anteriores. Supongamos que tenemos conocimiento de una elección. En términos de la matriz Elección (3), esto debe interpretarse como que de alguna manera tenemos identificados los %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
m
\]
\end{document} objetos casilla que se utilizarán en esa elección. Decir que tenemos identificados los %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
m
\]
\end{document} objetos casilla, significa que cuando posteriormente se empiece a tener información de los totales de votos recibidos por cada objeto votable en una casilla, de algún modo podremos saber cuál es el objeto casilla %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
C_{k}
\]
\end{document} donde %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
k\in\{1,2,\ldots,m\}
\]
\end{document}, en el cuál se recibieron esos votos %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
v_{k,1},v_{k,2},\ldots,v_{k,n}
\]
\end{document}. Mencionado lo anterior, partiremos de una elección

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=14 %TeXFontSize=14 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \mbox{Elecci\'{o}n}=\{C_{1},C_{2},\ldots,C_{m}\} \] \end{document} | Eqn6 | (6) |

o equivalentemente, como se muestra en (3), partiremos de

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=14 %TeXFontSize=14 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \mbox{\rm Elecci\'{o}n}= \left[ \begin{array}{c} C_{1}\\ C_{2}\\ \vdots\\ C_{m} \end{array} \right]= \left[ \begin{array}{ccccc} 1&v_{1,1}&v_{1,2}&\cdots&v_{1,n}\\ 2&v_{2,1}&v_{2,2}&\cdots&v_{2,n}\\ \vdots& \vdots   & \vdots        &      &\vdots\\ m& v_{m,1}&v_{m,2}&\cdots&v_{m,n} \end{array} \right] \] \end{document} | Eqn7 | (7) |

(aunque al inicio, estrictamente solo podemos suponer que conocemos la primera columna de la matriz (7)). Ahora suponemos que en un momento dado, conocemos los totales de votos recibidos por los %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
n
\]
\end{document} objetos votables en %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
p_{1}
\]
\end{document} objetos casilla %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
(p_{1}<m\mbox{,\ ya que $m$ representa el total se casillas})
\]
\end{document} de la colección ordenada de objetos casilla (6). Si %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
A
\]
\end{document} es un conjunto finito, es decir, un conjunto con una cantidad finita de elementos, por comodidad denotaremos como #(A), a la cardinalidad del conjunto A --(la cantidad de elementos del conjunto A)--. Para ese momento al que estamos haciendo referencia, y que denominaremos corte PREP1, a la colección ordenada de objetos casilla

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=14 %TeXFontSize=14 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \begin{array}{l} C_{\alpha}=\{\alpha,v_{\alpha,1},v_{\alpha,2},\ldots,v_{\alpha,n}\}\\ C_{\beta}=\{\beta,v_{\beta,1},v_{\beta,2},\ldots,v_{\beta,n}\}\\ \vdots\\ C_{\sigma}=\{\sigma,v_{\sigma,1},v_{\sigma,2},\ldots,v_{\sigma,n}\} \end{array} \] \end{document} | Eqn9 | (8) |

(donde los %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
p_{1}
\]
\end{document} números naturales %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\alpha,\,\beta,\,\ldots,\sigma\in\{1,2,\ldots,m\}
\]
\end{document} y cumplen con %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
1\leq\alpha<\beta<\cdots<\sigma\leq m
\]
\end{document}) para los cuales suponemos conocidos todos sus elementos, la representaremos como

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=14 %TeXFontSize=14 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \mbox{PREP1}=\{C_{\alpha},C_{\beta},\ldots,C_{\sigma}\},\mbox{\rm\ donde\ \#(PREP1)}=p_{1}<m \] \end{document} | Eqn8 | (9) |

Por comodidad, redefiniremos los subíndices de los objetos casilla de la colección PREP1 como %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
a_{1},\,a_{2},\ldots,a_{p_{1}}
\]
\end{document}, donde %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
a_{1}=\alpha,\,a_{2}=\beta,\,\ldots,\,a_{p_{1}}=\sigma
\]
\end{document}, con lo que PREP1 puede expresarse como:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=14 %TeXFontSize=14 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \mbox{PREP1}=\{C_{a_{1}},C_{a_{2}},\ldots,C_{a_{p_{1}}}\},\mbox{\rm\ donde\ \#(PREP1)}=p_{1}<m \] \end{document} | Eqn10 | (10) |

Utilizando nuestras notaciones anteriores la colección PREP1 también puede representarse como:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=14 %TeXFontSize=14 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \mbox{\rm PREP1}= \left[ \begin{array}{c} C_{a_{1}}\\ C_{a_{2}}\\ \vdots\\ C_{a_{p_{1}}} \end{array} \right]= \left[ \begin{array}{ccccc} a_{1}&v_{a_{1},1}&v_{a_{1},2}&\cdots&v_{a_{1},n}\\ a_{2}&v_{a_{2},1}&v_{a_{2},2}&\cdots&v_{a_{2},n}\\ \vdots& \vdots   & \vdots        &      &\vdots\\ a_{p_{1}}& v_{a_{p_{1}},1}&v_{a_{p_{1}},2}&\cdots&v_{a_{p_{1}},n} \end{array} \right] \] \end{document} | Ecu11 | (11) |

Esta matriz tiene %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
p_{1}
\]
\end{document} filas y %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
n+1
\]
\end{document} columnas, donde %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
p_{1}
\]
\end{document} es la cantidad de objetos casilla cuyos datos son conocidos en el corte PREP1, y %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
n
\]
\end{document} representa la cantidad de objetos votables en la elección (véase Suposición 1).

## Realización de un conteo dinámico

PASO 1 Obtener frecuencias observadas

El primer paso consiste en encontrar un conjunto de frecuencias observadas a partir de los elementos de la primera columna de la matriz PREP1.

Nótese que por construcción todos los elementos de la matriz PREP1 se supone que son enteros no negativos conocidos, los elementos en la primera columna identifican al objeto casilla representado por cada fila (es decir, son el subíndice del objeto casilla) y también sabemos que: %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
a_{1}\leq a_{2}\leq\cdots\leq a_{p_{1}}
\]
\end{document} ; ahora bien, como primer paso para realizar el conteo dinámico de PREP1 se calcula un número denominado cantidad de clases y que designaremos por la letra %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
N
\]
\end{document}:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=14 %TeXFontSize=14 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ N=\mbox{round}(1+3.33\log_{10}(p_{1})) \] \end{document} | Ecu12 | (12) |

Donde %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
p_{1}
\]
\end{document} es la cantidad de filas de la matriz PREP1, %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\log_{10}(x)
\]
\end{document} se usa para representar el logaritmo de base diez de %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
x
\]
\end{document}, y la función (aquí %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\mathbf{R}\mbox{\ }
\]
\end{document} son los números reales y %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\mathbf{Z}
\]
\end{document} son los enteros positivos, negativos y el cero)

%FontSize=14
%TeXFontSize=14
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\mbox{round}\,:\,\mathbf{R}\rightarrow\,\mathbf{Z}
\]
\end{document}

se define como el entero más cercano a su argumento, si el argumento de %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\mbox{round}
\]
\end{document} es equidistante a dos enteros, el valor de la función evaluada en ese argumento se define como el entero inmediato superior a ese argumento. Por ejemplo, %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\mbox{round}(3.2)=3
\]
\end{document}, %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\mbox{round}(4.6)=5
\]
\end{document}, y %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\mbox{round}(8.5)=9
\]
\end{document} (dado que 8.5 es equidistante a 8 y a 9, a 7 y a 10, etc.). Dado que %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
p_{1}\geq 1
\]
\end{document}, sabemos que %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
N\geq 1
\]
\end{document}.

A continuación, se determinan los límites de %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
N
\]
\end{document} intervalos de acuerdo a la siguientes operaciones. Sea el número real

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=14 %TeXFontSize=14 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ M=\frac{p_{1}}{N} \] \end{document} | Ecu13 | (13) |

Calculamos los %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
N
\]
\end{document} números reales %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
r_{1},\,r_{2},\ldots,r_{N}
\]
\end{document} como sigue:

%FontSize=14
%TeXFontSize=14
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
r_{1}=M
\]
\end{document}, %FontSize=14
%TeXFontSize=14
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
r_{2}=2M
\]
\end{document}, %FontSize=14
%TeXFontSize=14
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
r_{3}=3M
\]
\end{document}, ![%FontSize=14
%TeXFontSize=14
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\ldots
\]
\end{document}]() , %FontSize=14
%TeXFontSize=14
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
r_{N}=NM=p_{1}
\]
\end{document}

Con estos números definimos los %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
N
\]
\end{document} intervalos siguientes:

%FontSize=14
%TeXFontSize=14
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
R_{1}=(0,M],\,R_{2}=(M,2M],\,R_{3}=(2M,3M],\ldots,\,R_{N}=((N-1)M,NM]
\]
\end{document}

Ahora consideremos el conjunto de enteros positivos ordenado de menor a mayor formado por los elementos de la primera columna de la matriz PREP1, denotémoslo por

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=14 %TeXFontSize=14 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ S=\{ a_{1},\,a_{2},\,a_{3},\,\ldots,\,a_{p_{1}} \} \] \end{document} | Ecu14 | (14) |

Por construcción, sabemos que

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=14 %TeXFontSize=14 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ S\subset R_{1}\cup R_{2}\cup R_{3}\cup\cdots\cup R_{N}=(0,NM]=(0,p_{1}] \] \end{document} | Ecu15 | (15) |

Como siguiente paso, consideremos una partición del conjunto %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
S
\]
\end{document}, %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
S_{1},\,S_{2},\,\ldots,\,S_{N}
\]
\end{document}, tal que

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=14 %TeXFontSize=14 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ S=S_{1}\cup S_{2}\cup S_{3}\cup\cdots\cup S_{N} \] \end{document} | Ecu16 | (16) |

donde los subconjuntos %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
S_{1},\,S_{2},\,\ldots,\,S_{N}
\]
\end{document} son conjuntos finitos de números enteros que cumplen con %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
S_{i}\cap S_{j}=\emptyset
\]
\end{document} para %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
i\neq j,\,i,j\in\{1,2,3,\ldots,N\}
\]
\end{document} y

%FontSize=14
%TeXFontSize=14
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
S_{1}\subset R_{1},\,S_{2}\subset R_{2},\,S_{3}\subset R_{3},\,\ldots,\,S_{N}\subset R_{N}
\]
\end{document},

Algunos (pero no todos) de estos subconjuntos podrían ser vacíos. Ahora definimos %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
N
\]
\end{document} frecuencias observadas con base en estos %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
N
\]
\end{document} subconjuntos del conjunto %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
S
\]
\end{document}

%FontSize=14
%TeXFontSize=14
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
s_{1}=\#(S_{1}),\,s_{2}=\#(S_{2}),\,s_{3}=\#(S_{3}),\,\ldots,\,s_{N}=\#(S_{N})
\]
\end{document}

PASO 2 Hacer prueba de bondad de ajuste Xi cuadrada

// . . . PONER AQUÍ UNA DESCRIPCION DE COMO SE REALIZA LA PRUEBA DE BONDAD DE AJUSTE Xi cuadrada, INCLUYENDO LAS HIPOTESIS NULA Y NO NULA.

Hay que mencionar que independientemente del resultado de la prueba de bondad de ajuste Xi cuadrada, si #(S)<30 entonces se termina el algoritmo y se indica que no hay suficiente información para realizar el conteo dinámico.

Si no se acepta la hipótesis nula, y %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\#(S)\geq 30
\]
\end{document}, se procede con el PASO 3 (eliminar aleatoriamente cantidades aleatorias de casillas de los N intervalos de clase considerados hasta ahora). Al final del PASO 3 se deberá indicar que hay que regresar al PASO 1 (Obtener frecuencias observadas).

Si por el contrario, se acepta la hipótesis nula y %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\#(S)\geq 30
\]
\end{document}, indicar que se debe proceder al PASO 4 (contar los votos que les corresponden a cada uno de los n objetos votables de las #(S) casillas). Después de esto, se intentará describir como se construirá una tabla de la forma:

PASO 4 Contar los votos que le corresponden a cada candidato en un conteo dinámico

Para iniciar la descripción de este paso, primero hacemos notar que a cada una de las últimas %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
n
\]
\end{document} columnas de la matriz PREP1 (11) se les puede asociar de forma única con una coalición (el término coalición se usa aquí en el sentido definido en esta tesis –véase Definición de Coalición, pág. <algo>--). Designaremos esas coaliciones como %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
D_{1}
\]
\end{document}, %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
D_{2}
\]
\end{document}, %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
D_{3}
\]
\end{document}, ![%FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\ldots
\]
\end{document}](), %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
D_{n}
\]
\end{document}. De nuestra definición de coalición, tenemos que

%FontSize=14
%TeXFontSize=14
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
D_{1}=\{c_{1},T_{1}\},\,D_{2}=\{c_{2},T_{2}\},\,\ldots,\,D_{n}=\{c_{n},T_{n}\}
\]
\end{document}

Utilizando la notación de la matriz PREP1 (11), podemos expresar las cantidades de votos recibidos por cada coalición en el corte PREP1 como

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=14 %TeXFontSize=14 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ d_{1}=\sum_{k=1}^{p_{1}}v_{a_{k,1}},\, d_{2}=\sum_{k=1}^{p_{1}}v_{a_{k,2}},\,\ldots,\, d_{n}=\sum_{k=1}^{p_{1}}v_{a_{k,n}} \] \end{document} | Ecu15 | (17) |

Sea %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
D
\]
\end{document} el conjunto de las %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
n
\]
\end{document} coaliciones de la matriz PREP1 (11), esto es, %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
D=\{D_{1},\,D_{2},\,\ldots,\,D_{n}\}
\]
\end{document}, y para %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
D_{i},\,D_{j}\in D
\]
\end{document} definamos una relación binaria %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\sim
\]
\end{document} sobre %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
D
\]
\end{document}, por %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
D_{i}\sim D_{j}
\]
\end{document} si y solo si %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
c_{i}=c_{j}
\]
\end{document}. Por estar basada en la igualdad esta relación binaria tiene las propiedades de simetría (%FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
D_{i}\sim D_{i}
\]
\end{document}), reflexividad (si %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
D_{i}\sim D_{j}
\]
\end{document}, entonces %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
D_{j}\sim D_{i}
\]
\end{document}) y transitividad (si %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
D_{i}\sim D_{j}
\]
\end{document} y %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
D_{j}\sim D_{k}
\]
\end{document}, entonces %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
D_{i}\sim D_{k}
\]
\end{document}), como consecuencia %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\sim
\]
\end{document} es una relación de equivalencia sobre el conjunto %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
D
\]
\end{document}. Por el teorema sobre las clases de equivalencia (véase página NN) sabemos que existe una descomposición del conjunto %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
D
\]
\end{document} como una unión de subconjuntos de coaliciones mutuamente ajenos, y que estos subconjuntos mutuamente ajenos son las distintas clases de equivalencia definidas con base en la relación de equivalencia %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\sim
\]
\end{document}. En otras palabras, los elementos de cada una de estas distintas clases de equivalencia son las coaliciones que recibieron los votos que necesitamos contar. A través del identificador de objeto votable simple %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
c_{i}
\]
\end{document} de la coalición %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
D_{i}
\]
\end{document} y la tabla 1 podemos identificar a que candidatos les corresponden los votos asociados a cada una de estas distintas clases de equivalencia. También, ya que por construcción, el identificador de objeto votable simple de todas las coaliciones que pertenecen a cl(%FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
D_{i}
\]
\end{document}) es el identificador %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
c_{i}
\]
\end{document} de la coalición %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
D_{i}
\]
\end{document}, los votos recibidos por los elementos de cl(%FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
D_{i}
\]
\end{document}) le corresponden al candidato asociado con el identificador %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
c_{i}
\]
\end{document}. Sea %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
W_{i}
\]
\end{document} el conjunto de índices de las coaliciones que pertenecen a la clase de equivalencia cl(%FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
D_{i}
\]
\end{document}), entonces utilizando los %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
n
\]
\end{document} enteros no negativos %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
d_{1},\,d_{2},\,\ldots,\,d_{n}
\]
\end{document} definidos en (17) podemos representar los votos recibidos por el candidato asociado con el identificador %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
c_{i}
\]
\end{document} en el conteo dinámico del corte PREP1 como la siguiente suma:

%FontSize=14
%TeXFontSize=14
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\mbox{\rm Votos del candidato asociado con el 
identificador }c_{i}=\sum_{k\in W_{i}}d_{k}
\]
\end{document}

# Nociones básicas de conjuntos

Sea %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
A
\]
\end{document} un conjunto, un subconjunto %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
R
\]
\end{document} de %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
A\times A
\]
\end{document} se dice que es una *relación de equivalencia* sobre %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
A
\]
\end{document} si:

1. %FontSize=10
   %TeXFontSize=10
   \documentclass{article}
   \pagestyle{empty}
   \begin{document}
   \[
   (a,a)\in\,R
   \]
   \end{document} para todo %FontSize=10
   %TeXFontSize=10
   \documentclass{article}
   \pagestyle{empty}
   \begin{document}
   \[
   a\in\,A
   \]
   \end{document};
2. %FontSize=10
   %TeXFontSize=10
   \documentclass{article}
   \pagestyle{empty}
   \begin{document}
   \[
   (a,b)\in\,R
   \]
   \end{document} implica %FontSize=10
   %TeXFontSize=10
   \documentclass{article}
   \pagestyle{empty}
   \begin{document}
   \[
   (b,a)\in\,R
   \]
   \end{document};
3. %FontSize=10
   %TeXFontSize=10
   \documentclass{article}
   \pagestyle{empty}
   \begin{document}
   \[
   (a,b)\in\,R
   \]
   \end{document} y %FontSize=10
   %TeXFontSize=10
   \documentclass{article}
   \pagestyle{empty}
   \begin{document}
   \[
   (b,c)\in\,R
   \]
   \end{document} implica que %FontSize=10
   %TeXFontSize=10
   \documentclass{article}
   \pagestyle{empty}
   \begin{document}
   \[
   (a,c)\in\,R
   \]
   \end{document}.

En lugar de hablar de subconjuntos de %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
A\times A
\]
\end{document} podemos hablar acerca de una *relación binaria* (una entre dos elementos de %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
A
\]
\end{document}) sobre %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
A
\]
\end{document} mismo, conviniendo en que diremos que %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
b
\]
\end{document} está relacionado a %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
a
\]
\end{document} si %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
(a,b)\in\,R
\]
\end{document}. Las propiedades (1), (2), (3) del subconjunto %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
R
\]
\end{document} se traducen inmediatamente en las propiedades (1), (2), (3) de la definición que sigue.

## Definición de Relación binaria

La relación binaria, %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\mathbf{\sim}
\]
\end{document}, sobre %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
A
\]
\end{document} se dice que es una *relación de equivalencia* sobre %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
A
\]
\end{document} si para %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
a,\,b,\,c
\]
\end{document} cualesquiera en %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
A
\]
\end{document}:

1. %FontSize=10
   %TeXFontSize=10
   \documentclass{article}
   \pagestyle{empty}
   \begin{document}
   \[
   a\sim a
   \]
   \end{document};
2. %FontSize=10
   %TeXFontSize=10
   \documentclass{article}
   \pagestyle{empty}
   \begin{document}
   \[
   a\sim b
   \]
   \end{document} implica %FontSize=10
   %TeXFontSize=10
   \documentclass{article}
   \pagestyle{empty}
   \begin{document}
   \[
   b\sim a
   \]
   \end{document};
3. %FontSize=10
   %TeXFontSize=10
   \documentclass{article}
   \pagestyle{empty}
   \begin{document}
   \[
   a\sim b
   \]
   \end{document} y %FontSize=10
   %TeXFontSize=10
   \documentclass{article}
   \pagestyle{empty}
   \begin{document}
   \[
   b\sim c
   \]
   \end{document} implica %FontSize=10
   %TeXFontSize=10
   \documentclass{article}
   \pagestyle{empty}
   \begin{document}
   \[
   a\sim c
   \]
   \end{document}.

La primera de estas propiedades se llama *reflexividad*, la segunda, *simetría* y, la tercera, *transitividad*.

El concepto de relación de equivalencia es extraordinariamente importante y juega un papel central en todas las matemáticas. En realidad, una relación de equivalencia es una generalización de la igualdad, que mide la igualdad hasta una cierta propiedad.

## Definición de Clase de equivalencia

Si %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
A
\]
\end{document} es un conjunto y %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\sim
\]
\end{document} es una relación de equivalencia sobre %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
A
\]
\end{document}, entonces la *clase de equivalencia* de %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
a\in\,A
\]
\end{document} es el conjunto %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\{\left.x\in\,A\,\right|\,a\sim x\}
\]
\end{document}. Lo escribimos “cl(a)”.

## Teorema sobre las clases de equivalencia

*Las distintas clases de equivalencia de una relación de equivalencia sobre %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
A
\]
\end{document} nos proporcionan una descomposición de %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
A
\]
\end{document} como una unión de subconjuntos mutuamente ajenos. Recíprocamente, dada una descomposición de %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
A
\]
\end{document} como unión de subconjuntos mutuamente ajenos y no vacíos, podemos definir una relación de equivalencia sobre %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
A
\]
\end{document} para la que estos subconjuntos sean las distintas clases de equivalencia.*

# Pruebas de bondad de ajuste

## Prueba Ji-cuadrada de la bondad de ajuste

“Para probar estadísticamente la hipótesis de que un conjunto de datos empíricos o de muestra no difieren significativamente de aquellos que se esperan a partir de alguna distribución teórica específica, podemos considerar dos pruebas de ‘bondad de ajuste’. Una medida o prueba de discrepancia que existe entre una frecuencia observada y una esperada, es proporcionada por el estimador %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\chi^{2}
\]
\end{document} (léase ji-cuadrada). La prueba ji-cuadrada la propuso Karl Pearson en 1903, sin embargo, Sir Ronald Fisher la desarrolló totalmente y publicó en 1924 la tabla de valores críticos que se usan en la actualidad. El estimador ji-cuadrada lo proporciona

%FontSize=14
%TeXFontSize=14
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\chi^{2}=\sum^{k}\frac{(f_{o}-f_{e})^{2}}{f_{e}}
\]
\end{document}

donde

%FontSize=14
%TeXFontSize=14
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\begin{array}{rcl}
f_{o}&=&\mbox{frecuencia observada para cada clase o intervalo}\\
f_{e}&=&\mbox{frecuencia esperada para cada clase o intervalo predicho por la distribuci\'on te\'orica}\\
\sum^{k}&=&\mbox{suma de todas las clases o intervalos }k
\end{array}
\]
\end{document}

Si %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\chi^{2}=0
\]
\end{document}, entonces las frecuencias observada y teórica concuerdan de manera exacta, mientras que si %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\chi^{2}>0
\]
\end{document}, no concuerdan. Mientras más grande sea el valor de %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\chi^{2}
\]
\end{document} más grande es la discrepancia entre lo observado y lo esperado. Si %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\chi^{2}>0
\]
\end{document}, debemos comparar nuestro valor calculado contra los valores tabulados de %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\chi^{2}
\]
\end{document} para determinar si podemos esperar dicha variación a partir de causas aleatorias únicamente. El estimador estadístico %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\chi^{2}
\]
\end{document} se tabula en grados de libertad contra %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
(1-\alpha)
\]
\end{document} o nivel de significación. En la práctica, la hipótesis nula, %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
H_{0}
\]
\end{document}, es en la que no existe una diferencia significativa entre la distribución de frecuencia observada y la distribución teórica específica con los mismos parámetros. Si según esta hipótesis el valor computado de %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\chi^{2}
\]
\end{document} es mayor que el valor crítico o tabulado de %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\chi^{2}
\]
\end{document} (a un nivel de significación determinado y con los grados de libertad adecuados), podríamos llegar a la conclusión de que las frecuencias observadas difieren significativamente de las frecuencias esperadas en ese nivel de confianza, y rechazaríamos la %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
H_{0}
\]
\end{document}.

Al usar la prueba de bondad de ajuste %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\chi^{2}
\]
\end{document}, deben considerarse varios puntos:

1. Las frecuencias relativas o porcentajes no pueden usarse ---es decir, debemos usar conteos de números o frecuencias reales.
2. Las frecuencias esperadas para cada intervalo de clase deben equivaler a 5 o más. Si no es así, entonces deben agruparse o compilarse las clases o intervalos adyacentes.
3. Los grados de libertad están dados por %FontSize=10
   %TeXFontSize=10
   \documentclass{article}
   \pagestyle{empty}
   \begin{document}
   \[
   v=k-1-m
   \]
   \end{document}, donde %FontSize=10
   %TeXFontSize=10
   \documentclass{article}
   \pagestyle{empty}
   \begin{document}
   \[
   v=
   \]
   \end{document} grados de libertad, %FontSize=10
   %TeXFontSize=10
   \documentclass{article}
   \pagestyle{empty}
   \begin{document}
   \[
   k=
   \]
   \end{document} número de clases o intervalos, y %FontSize=10
   %TeXFontSize=10
   \documentclass{article}
   \pagestyle{empty}
   \begin{document}
   \[
   m=
   \]
   \end{document} número de datos empíricos o de muestra de los parámetros de la población necesarios para calcular las frecuencias esperadas.”

## Un ejemplo de uso de la prueba %FontSize=10 %TeXFontSize=10 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \chi^{2} \] \end{document} de bondad de ajuste

Supongamos que deseamos probar los datos de la siguiente tabla para ajustarlos a una distribución de Poisson a un nivel de significación de 0.95.

%FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\def\espacioa{\hbox{\hspace{10.5mm}}}
\def\espaciob{\hbox{\hspace{17.0mm}}}
\def\espacioc{\hbox{\hspace{7.0mm}}}
\def\espaciod{\hbox{\hspace{4.0mm}}}
\def\espacioe{\hbox{\hspace{11.0mm}}}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\begin{center}
%\begin{tabular}{cc@{\vrule height 10pt depth 0.5pt width 0.2pt}r@{\vrule height 10pt depth 0.5pt width 0.2pt}cc}\hline
\begin{tabular}{cc@{\vrule height 10pt depth 0.5pt width 0.0pt}r@{\vrule height 10pt depth 0.5pt width 0.0pt}cc}\hline
           &\espacioe& {\it N\'um. de intervalos} &\espaciob& \\
{\it N}    &\espacioe& {\it de 1-hr con N}\espaciod&\espaciob&{\it Frecuencia}\\
{\it N\'um. de consultas}&\espacioe&{\it consultas}\espacioc&\espaciob&{\it relativa}\\\hline
0          &\espacioe& 315\espacioa&\espaciob& 0.619\\
1          &\espacioe& 142\espacioa&\espaciob& 0.279\\
2          &\espacioe&  40\espacioa&\espaciob& 0.078\\
3          &\espacioe&   9\espacioa&\espaciob& 0.018\\
4          &\espacioe&   2\espacioa&\espaciob& 0.004\\
5          &\espacioe&   1\espacioa&\espaciob& 0.002\\ \cline{3-3}\cline{5-5}
 &\espacioe& 509\espacioa&\espaciob& 1.000\\ \hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{document}

Distribución de consultas telefónicas por intervalos de una hora.

Sabemos que la distribución de Poisson es como sigue

%FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
P(\{x=n\})=\frac{\lambda^{n}e^{-\lambda}}{n!}
\]
\end{document}

donde

%FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\begin{eqnarray}
P(\{x=n\})&=&\mbox{\rm probabilidad de obtener\ }n
\mbox{\rm\ ocurrencias}\nonumber\\
e&=&2.71828\nonumber\\
\lambda&=&\mbox{\rm una constante positiva (que es tanto la media como la varianza).}\nonumber
\end{eqnarray}
\end{document}

Como ya se calculó antes %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\lambda=0.5577
\]
\end{document} para los datos de la muestra de este ejemplo; por tanto, la %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
H_{0}
\]
\end{document} es “no existe ninguna diferencia significativa entre los datos observados y aquellos que serían proporcionados por una distribución de Poisson con media 0.5577”. Al sustituir este valor para %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\lambda
\]
\end{document} y luego para %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
n=0,\,n=1,\,n=2
\]
\end{document}, etc. en la ecuación para una distribución de Poisson, obtenemos los cálculos que se muestran en la siguiente tabla.

%FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\def\espa{\hbox{\hspace{1cm}}}
\def\espb{\hbox{\hspace{1cm}}}
\def\espc{\hbox{\hspace{1cm}}}
\def\espd{\hbox{\hspace{1cm}}}
\def\myrowa#1#2#3#4#5{
{#1}&\espa&{#2}&\espb&{#3}&\espc&{#4}&\espd&{#5}
}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
%\begin{tabular}{ccccrcrcc@{\vrule height 17pt depth 10pt width 0.5pt}}\hline
\begin{tabular}{ccccrcrcc@{\vrule height 14pt depth 5.5pt width 0.0pt}}\hline
$n$ &\espa& $P(\{x=n\})$ &\espb& $f_{e}$ &\espc& $f_{o}$ &\espd& $\frac{(f_{o}-f_{e})^{2}}{f_{e}}$\\ \hline
0   &\espa& 0.571        &\espb& 291 &\espc& 315 &\espd& 1.98\\
\myrowa{1}{0.319}{162}{142}{2.47}\\ 
\myrowa{2}{0.089}{45}{40}{0.56}\\ 
\myrowa{3}{0.017}{9}{9}{\ }\\
\myrowa{4}{0.003}{1}{2}{0.09}\\
\myrowa{5}{0.001}{1}{1}{\ }\\
\cline{3-3}\cline{5-5}\cline{7-7}\cline{9-9}
\myrowa{\ }{1.000}{509}{509}{5.10}\\
\hline
\end{tabular}
\end{document}

Cálculo de %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\chi^{2}
\]
\end{document} para los valores de la tabla anterior.

Para obtener %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
f_{e}
\]
\end{document}, multiplicamos la %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
P(\{x=n\})
\]
\end{document} apropiada por 509. Por tanto, nuestra %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\chi^{2}
\]
\end{document} calculada es 5.10. Consultando el valor crítico para %FontSize=10
%TeXFontSize=10
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\chi^{2}
\]
\end{document}

“del apéndice C, tabla C-III”

Para un nivel de confianza de 0.95 y grados de libertad

“ = 4 -1 = 2”