В. Б. Дроздов, Экстремальные геометрические задачи, *Матем. обр.*, 2008, выпуск 3(47), 39–49

Экстремальные геометрические задачи

В. Б. Дроздов

В статье иллюстрируются методы решения планиметрических и стереометрических экстремальных задач, как элементарные, так и с применением дифференциального исчисления. Приведена подборка задач с ответами, которые можно использовать на уроках при изучении соответствующих разделов.

«Так как здание всего мира совершенно и возведено премудрым Творцом, то в мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума.»

Леонард Эйлер

Под экстремальными геометрическими задачами имеются в виду задачи на нахождение наибольших или наименьших значений геометрических величин. Эти достаточно разнообразные задачи можно классифицировать по-разному. По числу измерений — планиметрические и стереометрические. По количеству фигур (тел) — одна фигура (тело) или комбинация фигур (тел). По виду исследуемой функции — от одной или нескольких переменных. По методам решения — общий (с помощью производной) или частные методы элементарной математики. Экстремальные геометрические задачи представляют собой своеобразный «математический сплав» геометрии, алгебры, тригонометрии, анализа. Поэтому их решение весьма полезно. Начнем с классических примеров.

Планиметрия

Задача 1. Из множества всех треугольников с данным периметром $2p$ найти треугольник с наибольшей площадью.

Решение. Имеем две независимые переменные a и b, ибо третья сторона треугольника $c = 2p - a - b$. Так как частные производные в школе не изучаются, то ищем элементарный метод решения. Естественно записать неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим для трех величин: $p-a$, $p-b$, $p-c$, где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$:

$$\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3},$$

откуда

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{p^3}{27} \qquad \text{и} \qquad p(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{p^4}{27}.$$

В силу формулы Герона $S^2 \leq \dfrac{p^4}{27}$, следовательно, $S \leq \dfrac{p^2}{3\sqrt{3}}$.

Известно, что среднее геометрическое равно среднему арифметическому тогда и только тогда, когда они составлены из равных величин, то есть в нашем случае при $p-a = p-b = p-c$. Значит, $S_{\max} = \dfrac{p^2}{3\sqrt{3}}$, что будет в случае равностороннего треугольника.

Задача 2. Из всех четырехугольников, вписанных в окружность радиусом R, найти четырехугольник наибольшей площади.

Решение. Площадь произвольного четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними: $S = \frac{1}{2} ef \sin\alpha$. Очевидно, что $e \leq 2R$; $f \leq 2R$; $\sin\alpha \leq 1$.

Следовательно, $S \leq 2R^2$, откуда $S_{\max} = 2R^2$ при $e = f = 2R$. и $\alpha = 90°$. Значит, искомый четырехугольник — квадрат. Интересно, что в данной задаче довольно затруднительно применить не только обычную, но и частные производные.

Задача 3. Пусть r и R — соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника. Найти наибольшее значение отношения r/R.

Решение. Из формулы Эйлера $d^2 = R^2 - 2Rr$, где d — расстояние между центрами окружностей, сразу вытекает, что $(r/R)_{\max} = 1/2$. А как решить задачу без этой нетривиальной формулы? Из известных формул $r = S/p$, $R = \dfrac{abc}{4S}$, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ получим:

$$\frac{r}{R} = \frac{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{2abc}.$$

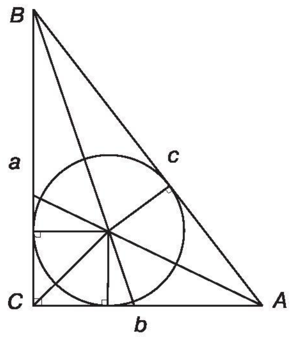
Последнее равенство нужно возвести в квадрат и сгруппировать сомножители так:

$$\frac{r^2}{R^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{a^2}\right)\left(\frac{(b+c-a)(b+a-c)}{b^2}\right)\left(\frac{(c+a-b)(c+b-a)}{c^2}\right).$$

В итоге имеем:

$$\frac{r^2}{R^2} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{(b-c)^2}{a^2}\right)\left(1 - \frac{(a-c)^2}{b^2}\right)\left(1 - \frac{(a-b)^2}{c^2}\right),$$

откуда следует, что уже известный результат будет только в случае равностороннего треугольника.



Задача 4. Среди всех прямоугольных треугольников с общей гипотенузой c найти тот, который имеет наибольший радиус вписанной окружности r.

Решение. См. рис. 1. Из формулы $\operatorname{tg}\dfrac{C}{2} = \dfrac{r}{p-c}$ при

$$C = 90°, \quad p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{C}{2}(\sin A + \cos A + 1),$$

имеем:

$$r = \frac{C}{2}(\sin A + \cos A - 1) = \frac{C}{2}\left(\sqrt{2}\sin\left(A + \frac{\pi}{4}\right) - 1\right).$$

Поэтому $r_{\max} = \dfrac{C}{2}(\sqrt{2} - 1)$ при $A = \dfrac{\pi}{4}$, то есть треугольник — равнобедренный. Ниже для сравнения решим задачу с помощью производной. $r' = \dfrac{C}{2}(\cos A - \sin A)$. Из уравнения $r' = 0$ находим $A = \dfrac{\pi}{4}$. Очевидно, что $0 < A \leq \dfrac{\pi}{4}$, ибо, не умаляя общности, можно считать, что A — не больший острый угол треугольника. Поскольку при $A \to 0$ $r \to 0$, а $r\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{C}{2}(\sqrt{2} - 1)$, то мы пришли к уже найденному элементарным способом результату.

Задача 5. Найти внутри треугольника точку, сумма квадратов расстояний от которой до вершин треугольника была бы наименьшей.

Решение. В этой задаче эффективен метод координат. Пусть вершины треугольника ABC имеют координаты: $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$, а искомая точка $M(x; y)$. Сумма квадратов расстояний

$$S = MA^2 + MB^2 + MC^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2$$

легко приводится к виду:

$$S = \left(3x^2 - 2(x_1 + x_2 + x_3)x + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\right) + \left(3y^2 - 2(y_1 + y_2 + y_3)y + (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)\right).$$

Из свойств квадратичной функции следует, что $S_{\min}$ достигается при $x = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ и $y = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$. Но тогда точка M является точкой пересечения медиан треугольника ABC. Доказательство последнего весьма прозрачно и тоже легко проводится методом координат. Достаточно написать уравнения двух медиан треугольника ABC и найти координаты их точки пересечения. Отметим, что в точке пересечения медиан треугольника находится его центр масс.

Стереометрия

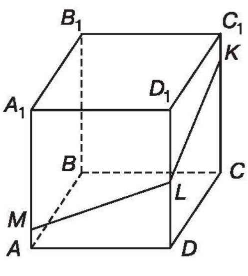
Задача 6. Из всех прямоугольных параллелепипедов с данной диагональю d найти тот, который имеет наибольшую площадь полной поверхности S.

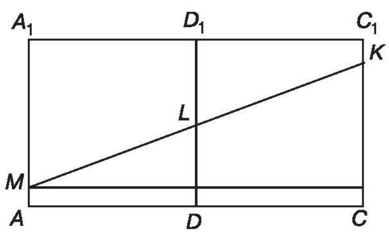
Решение. Среди измерений параллелепипеда x, y, z два независимых, поскольку $x^2 + y^2 + z^2 = d^2$. Значит, ищем элементарный способ определить наибольшее значение переменной величины $S = 2xy + 2xz + 2yz$. Для этого надо сложить неравенства

$$\begin{cases} (x - y)^2 \geq 0, \\ (x - z)^2 \geq 0, \\ (y - z)^2 \geq 0. \end{cases}$$

Сразу получим: $S \leq 2d^2$, откуда $S_{\max} = 2d^2$ при $x = y = z$, то есть в случае куба. Некоторая искусственность решения компенсируется его краткостью и изяществом.

Задача 7. На ребре AA_1 единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка M так, что $AM = \frac{1}{7}$, а на ребре CC_1 взята точка K. Указать кратчайший маршрут из точки M в точку K по поверхности куба в зависимости от параметра $a = CK$.





Решение. Мы избежим чрезвычайно громоздких выкладок, если догадаемся повернуть грань куба DCD_1C_1 на $90°$. См. рис. 2. Это совершенно допустимо, так как отрезки ML и LK от этого не изменятся. Ясно, что кратчайший маршрут будет в том и только в том случае, когда точки M, L, K лежат на одной прямой. По теореме Пифагора легко находим:

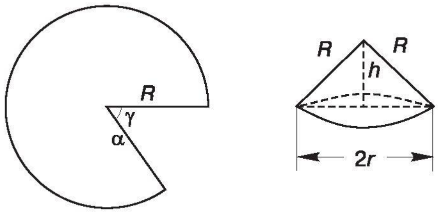
$$(ML + LK)_{\min} = \sqrt{4 + \left(a - \frac{1}{7}\right)^2}.$$

Задача 8. Из круга радиусом R вырезается сектор с углом α при вершине, и оставшаяся часть сворачивается в коническую воронку. При каком α получится воронка наибольшей вместимости?

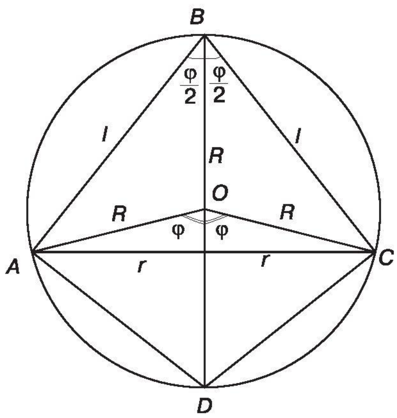
Решение. Объем конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(R^2 - h^2)h = = \frac{1}{3}\pi(R^2 h - h^3)$$

— функция одной переменной h, заключенной в границах $0 < h < R$. См. рис. 3.



Производная этой функции обращается в нуль при $h = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$. При стремлении h к своим границам объем конуса стремится к нулю. Поэтому при $h = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$, то есть $r = R\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ этот объем максимален. Из очевидного равенства $\alpha R = 2\pi R - 2\pi r$ находим: $\alpha = 2\pi\left(1 - \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$.



Задача 9. В данный шар радиусом R вписать конус, имеющий наибольшую площадь полной поверхности S.

Решение. На рис. 4 изображено общее осевое сечение шара и конуса. Пусть r и l — радиус основания и образующая конуса соответственно. Тогда $S = \pi r^2 - \pi r l$. В качестве независимой переменной удобно выбрать $\angle AOD = \varphi$. Вписанный угол $ABD = \dfrac{\varphi}{2}$. Ясно, что $r = R\sin\varphi$ и $l = 2R\cos\dfrac{\varphi}{2}$. Выражаем S как функцию от φ:

$$S = \pi r^2(\sin^2\varphi + 2\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}).$$

По виду последней функции понятно, что не обойтись без дифференциального исчисления. Уравнение $S'_\varphi = 0$ приводится к виду:

$$2\sin 2\varphi + 3\cos\frac{3\varphi}{2} + \cos\frac{\varphi}{2} = 0.$$

Применяя дважды формулу синуса двойного угла и однократно формулу косинуса тройного угла, получим:

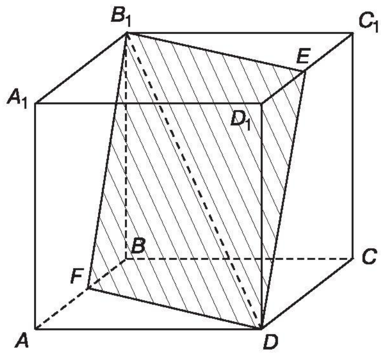
$$\cos\frac{\varphi}{2}\left(1 + \sin\frac{\varphi}{2}\right)\left(4\sin^2\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2} - 1\right) = 0.$$

Единственный корень последнего уравнения, удовлетворяющий условию $0 < \varphi < \pi$, есть $\varphi = 2\arcsin\left(\frac{1+\sqrt{17}}{8}\right)$. При стремлении угла φ к своим границам площадь S стремится к нулю. Значит, параметры конуса с наибольшей площадью полной поверхности таковы:

радиус основания $\qquad r = R\sin\varphi = 2R\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{R}{16}\sqrt{190+14\sqrt{17}}$

и высота $\qquad h = R(1+\cos\varphi) = 2R\cos^2\frac{\varphi}{2} = R\left(\frac{23-\sqrt{17}}{16}\right)$.

Видим, что иногда ответ в задачах бывает весьма громоздким.



Задача 10. Среди всех сечений единичного куба, проходящих через его диагональ, найти сечение наименьшей площади и саму эту площадь.

Решение. На рис. 5 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и его искомое сечение — параллелограмм DEB_1F. Пусть $D_1E = BF = x$ (эти отрезки равны в силу соображений симметрии). Ясно, что площадь сечения $S = 2S_{\triangle B_1DE}$. Стороны треугольника B_1DE легко определяются по теореме Пифагора:

$$B_1D = a = \sqrt{3}; \qquad DE = b\sqrt{1+x^2};$$
$$B_1E = c = \sqrt{1+(1-x)^2}.$$

Формулу Герона здесь удобнее записать в виде:

$$S_{\triangle B_1DE} = \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4},$$

исключив полупериметр p. Поскольку умножать многочлены легко, подставляем в последнюю формулу a, b, c выраженные через x. Преодолев громоздкие, но все же «технические» вычисления, получим весьма компактный результат:

$$S = \sqrt{2(x^2-x-1)}.$$

Очевидно, что $0 \le x \le 1$. Находим $S(0) = S(1) = \sqrt{2}$ и значение площади при $x = \frac{1}{2}$ (абсцисса вершины параболы $y = x^2 - x + 1$): $S\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Следовательно, сечение наименьшей площади, равной $\sqrt{\frac{3}{2}}$, проходит через середины ребер куба AB и C_1D_1.

В заключение приведем достаточно представительный список экстремальных геометрических задач с ответами.

Планиметрия

1. В данный круг вписать прямоугольник наибольшей площади.

2. В данный полукруг вписать прямоугольник наибольшей площади.

3. Из всех прямоугольников данного периметра найти прямоугольник наибольшей площади.

4. Среди всех треугольников с данным основанием и данным углом при вершине найти тот, периметр которого наибольший.

5. Из круговых секторов данного периметра p найти сектор наибольшей площади $S_{\max}$.

6. Площадь трапеции равна 1. Какую наименьшую величину может иметь большая диагональ этой трапеции?

7. Даны две пересекающиеся окружности радиусов r и R. Их общая хорда равна $2a$. Найти длину наибольшей секущей, проходящей через точку пересечения окружностей.

8. На основании треугольника найти точку, произведение расстояний от которой до двух других сторон треугольника было бы наибольшим.

9. Заключить квадрат со стороной a в равносторонний треугольник возможно меньших размеров. Найти сторону этого треугольника.

10. Поместить внутри квадрата со стороной a равносторонний треугольник возможно больших размеров. Найти сторону этого треугольника.

11. На окружности радиусом R даны две точки A и B, расстояние между которыми равно l. Какое наибольшее значение может принимать сумма $AC^2 + BC^2$, если точка C также лежит на этой окружности?

12. В круг радиуса R вписывается данный угол α. Какими должны быть длины хорд, образующих этот угол, чтобы их сумма была наибольшей?

13. Из всех четырехугольников с одними и теми же сторонами найти четырехугольник наибольшей площади.

14. Даны площадь S и угол α треугольника. Найти минимум а) суммы двух сторон, заключающих данный угол; б) стороны, противолежащей данному углу; в) всего периметра.

15. Из всех треугольников, вписанных в круг и имеющих общее основание, найти треугольник с наименьшей площадью.

16. Из всех треугольников, вписанных в круг, найти треугольник с наибольшей площадью.

17. Боковые стороны и одно из оснований трапеции равны a. При какой длине другого основания площадь трапеции будет наибольшей?

18. Найти основание равнобедренного треугольника с данной стороной b, в который вписана окружность наибольшего радиуса.

19. В данную окружность радиусом R вписан равнобедренный треугольник. Какое наибольшее значение может принимать высота этого треугольника, проведенная к боковой стороне, и при каком значении угла при вершине?

20. Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника равна l. Какое наибольшее значение может принимать высота треугольника, проведенная к гипотенузе?

21. Вырезать из квадрата шестиугольник наибольшей площади.

22. Найти длину наименьшего отрезка, который бы разделил равносторонний треугольник со стороной a на две равновеликие части.

23. Какова наибольшая площадь прямоугольника, вписанного в ромб с диагоналями $2a$ и $2b$?

24. Доказать, что из всех треугольников с данной стороной $BC = a$ и данным противолежащим углом A равнобедренный треугольник имеет наименьшую медиану m_a, если угол A при вершине тупой, и наибольшую, если угол A острый.

25. В треугольнике заданы сторона a и периметр $2p$. Какие длины должны иметь две другие стороны этого треугольника, чтобы его площадь была максимальной?

26. Какой должен быть угол при основании равнобедренного треугольника заданной площади, чтобы радиус вписанного в этот треугольник круга был наибольшим?

27. Острый угол A прямоугольного треугольника ABC равен $30°$. На гипотенузе AB выбрана точка B так, что сумма квадратов расстояний ее до вершин треугольника минимальна. Найти отношение $AD : BD$.

28. Определить наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в круговой сектор радиусом R с центральный углом $\alpha \leq 90°$.

29. Какими должны быть острые углы в прямоугольном треугольнике, чтобы отношение гипотенузы к высоте, опущенной из вершины прямого угла, было минимальным?

30. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Какие должны быть размеры окна, чтобы оно имело наибольшую площадь при заданном периметре окна P.

31. Из всех треугольников с данным основанием и данным углом при вершине найти треугольник с наибольшей биссектрисой угла при вершине треугольника.

32. Из всех треугольников, вписанных в данную окружность, найти тот, который имеет наибольшую сумму квадратов сторон.

33. Из всех треугольников с данным углом и с данной площадью найти тот, у которого сумма квадратов сторон, образующих данный угол, наименьшая.

34. Из всех треугольников, вписанных в данную окружность, найти тот, у которого сумма квадратов расстояний от центра окружности до сторон наименьшая.

35. Из всех прямоугольников, описанных около прямоугольника со сторонами a и b найти тот, который имеет наибольшую площадь. Вычислить эту площадь.

36. В данный треугольник вписан прямоугольник так, что одна его сторона находится на основании треугольника. Каким должен быть прямоугольник наибольшей площади?

37. Из всех прямоугольников, имеющих данную диагональ, найти прямоугольник:
а) с наибольшей площадью; б) с наибольшим периметром.

38. Найти наибольшее значение острого угла, образованного медианами катетов прямоугольного треугольника.

39. В прямоугольной трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям AD и BC. Известно, что диагональ BD равна a, а длина AD равна $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. При какой длине боковой стороны AB площадь трапеции будет наибольшей?

40. В сектор радиуса R с центральным углом 2α $(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2})$ вписан равнобедренный треугольник так, что одна из его вершин лежит на дуге сектора, а две другие — на ограничивающих сектор радиусах, причем оси симметрии сектора и треугольника совпадают. Чему равно наибольшее значение площади такого треугольника?

41. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна h. Какую наименьшую длину может иметь медиана, проведенная к большему катету?

42. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB = 1$ и $BC = \sqrt{3}$ на диагонали AC взяты точки M и N так, что $MN = 1$ и $AM < AN$. При каком значении AM сумма квадратов сторон четырехугольника $BNDM$ будет наименьшей?

43. В квадрат $ABCD$ со стороной $AB = 2$ вписан треугольник BMN со стороной $MN = 1$, вершины которого M и N лежат на сторонах квадрата AD и CD соответственно. При каком значении угла NMD площадь вписанного треугольника будет наибольшей?

44. Чему равно наименьшее отношение суммы квадратов сторон треугольника к его площади? В каком треугольнике оно достигается?

45. Чему равно наименьшее отношение квадрата полупериметра треугольника к его площади? В каком треугольнике оно достигается?

46. Какое наибольшее значение может принимать длина отрезка, отсекаемого боковыми сторонами треугольника на касательной к вписанной окружности, проведенной параллельно основанию, если периметр треугольника равен $2p$?

47. Из данной прямоугольной трапеции вырезать прямоугольник наибольшей площади, имеющий с трапецией общий прямой угол. Какова наибольшая площадь прямоугольника, если основания трапеции равны a и b, а высота равна h?

48. Какое наибольшее значение может принимать величина угла A треугольника ABC, в котором медиана, проведенная из вершины B, образует со стороной BC угол 45°?
49. Из всех треугольников ABC с данным основанием $AB = c$ и постоянной высотой $CH = h$ найдите треугольник, около которого можно описать окружность наименьшего радиуса, и вычислите этот радиус.
50. Какое наибольшее значение может принимать величина угла A треугольника ABC, в котором медиана BM в 1,5 раза больше высоты AH?

Стереометрия

1. Около шара радиусом R описать конус наименьшего объема V.
2. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с площадью, равной 2, а высота призмы равна гипотенузе основания. Какими должны быть стороны основания, чтобы боковая поверхность призмы была наименьшей?
3. В шар вписан конус наибольшего объема. В этот конус вписан цилиндр наибольшего объема. Найдите отношение высоты цилиндра к радиусу шара.
4. Вписать в данный шар радиуса r цилиндр с наибольшей боковой поверхностью.
5. Бревно длиной 20 дм имеет форму усеченного конуса с диаметрами оснований 2 дм и 1 дм. Требуется вырубить из бревна брус с квадратным поперечным сечением, ось которого совпадала бы с осью бревна и объем которого был бы наибольшим. Как это сделать?
6. Из всех параллелепипедов с данной суммой S трех взаимно перпендикулярных ребер найти тот, объем которого наибольший.
7. В правильной треугольной пирамиде сумма квадратов длин всех ребер равна Q. Какое наибольшее значение может иметь ее боковая поверхность S?
8. Радиус основания прямого кругового конуса равен R, высота равна H. В конус вписан цилиндр так, что одно основание цилиндра лежит на основании конуса, а другое — на боковой поверхности конуса. Какое наибольшее значение может иметь боковая поверхность цилиндра?
9. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник. Сумма длин всех ее ребер равна l. Найти наибольшее значение боковой поверхности S.
10. Надо вырубить из гранита постамент в форме прямоугольного параллелепипеда, высота которого должна быть равной диагонали основания, а площадь основания должна быть равной 4 м^2. Каковы должны быть измерения параллелепипеда, чтобы объем постамента оказался наименьшим?
11. По углам прямоугольного листа 80×50 см надо вырезать одинаковые квадраты так, чтобы после загибания краев получилась открытая коробка наибольшего объема. Какой должна быть сторона каждого вырезанного квадрата?
12. Какой наибольшей полной поверхности можно сделать ящик, если сумма длин его ребер равна l?
13. Из квадратного листа жести со стороной a требуется вырезать развертку правильной четырехугольной пирамиды так, чтобы вершины квадрата склеивались в вершину пирамиды. Как это сделать, чтобы получить пирамиду наибольшего объема?
14. Консервная банка данного объема имеет форму цилиндра. Каково должно быть соотношение ее размеров (высоты и диаметра), чтобы на ее изготовление пошло минимальное количество жести?
15. Из всех конусов с данной образующей l найдите конус наибольшего объема.
16. Найдите размеры конической палатки данной вместимости, на изготовление которой требуется наименьшее количество материи.
17. Площадь полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды равна S. При каком угле наклона бокового ребра к плоскости основания объем пирамиды будет наибольшим?
18. В данный шар вписан конус. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса, при котором площадь боковой поверхности конуса будет наибольшей.

19. Сторона основания правильной треугольной призмы равна a, высота призмы h. Какую наибольшую площадь может иметь сечение призмы плоскостью, проходящей через сторону основания, если $a = 14$ см и $h = 6$ см?

20. Объем правильной треугольной призмы равен V. Каковы должны быть длины сторон основания и высоты, чтобы площадь полной поверхности призмы была наименьшей?

21. Котел состоит из цилиндра, завершенного двумя полусферами. Определить размеры котла, чтобы при данном объеме V его поверхность была наименьшей.

22. Из всех цилиндров, вписанных в данный шар, найти цилиндр с наибольшей площадью боковой поверхности.

23. В данный шар радиуса R вписан цилиндр наибольшего объема. Найти отношение радиуса основания цилиндра к радиусу шара.

24. В шар радиуса R вписана правильная треугольная пирамида, имеющая наибольший объем. Определить двугранный угол при ребре основания пирамиды.

25. Из множества цилиндров, у которых сумма диагонали осевого сечения и высоты равна a, выбран тот, который имеет наибольший объем. Найти боковую поверхность этого цилиндра.

26. Одно из оснований правильной треугольной призмы принадлежит большому кругу шара радиуса R, а вершины другого основания принадлежат сферической поверхности этого шара. Определить высоту призмы, при которой сумма длин всех ее ребер будет наибольшей.

27. В правильную треугольную пирамиду, площадь основания которой S и высота h, вписана правильная треугольная призма так, что одно из ее оснований лежит в плоскости основания пирамиды, а вершины другого основания находятся на боковых ребрах. Найти наибольший возможный объем призмы.

28. Около сферы описана правильная четырехугольная пирамида. Найти, при каком угле наклона боковой грани пирамиды к плоскости основания отношение поверхности сферы к боковой поверхности пирамиды будет наибольшим.

29. Около шара объема V описана правильная треугольная пирамида. Каков наименьший возможный объем этой пирамиды?

30. Пусть R и r — радиусы сфер, описанной около правильной четырехугольной пирамиды и вписанной в нее. Найти наименьшее значение отношения R/r.

31. Определить размеры конуса данного объема V, имеющего наименьшую площадь боковой поверхности.

32. Среди всех правильных треугольных призм, вписанных в шар радиусом R, найти ту, которая имеет наибольшую площадь боковой поверхности.

33. Среди всех конусов, периметр осевого сечения которых равен 8, найти конус с наибольшим объемом и вычислить этот объем.

34. Сумма длин всех ребер правильной шестиугольной призмы равна 36. Найти длину стороны основания призмы, при которой объем призмы будет наибольшим.

35. В основании пирамиды $MABC$ лежит прямоугольный равнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle C = 90°$, MA — высота пирамиды, $MO = 4\sqrt{3}$, где O — середина AB. Найти длину высоты пирамиды, при которой ее объем будет наибольшим.

36. В основании пирамиды $MABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 3BC$, MD — высота пирамиды и $MD + BC = 12$. Найти длину отрезка BC, при которой объем пирамиды будет наибольшим.

37. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды имеет постоянную длину и составляет с плоскостью основания угол α. При каком α объем пирамиды будет наибольшим?

38. В полушар радиуса R вписан конус так, что его вершина находится в центре полушара. Найти радиус основания конуса, при котором объем его будет максимальным.

39. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с площадью Q и острым углом α. Боковая грань, проходящая через катет, который противолежит данному углу, перпендикулярна к плоскости основания, две другие грани образуют с основанием углы, равные β? При каком значении α объем пирамиды будет наибольшим?

40. В полушар радиуса R вписан цилиндр так, что плоскость основания цилиндра совпадает с плоскостью, ограничивающей полушар. Найти высоту цилиндра наибольшего объема.
41. Через ребро AB правильной пирамиды $SABC$ с вершиной S проведено плоское сечение, имеющее наименьший периметр. Найти площадь этого сечения, если известно, что высота пирамиды равна h, $AB = a$.
42. Основание пирамиды $SABC$ — треугольник ABC, у которого $\angle B = 90°$, $\angle A = \varphi$, $AC = b$. Боковые ребра пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, а угол между гранью SBC и плоскостью основания равен α. При каком значении φ объем пирамиды наибольший?
43. В прямой круговой конус с радиусом основания R вписан шар радиуса r. Через вершину конуса проведена плоскость, пересекающая этот шар. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью, если известно, что эта площадь имеет наибольшее из всех возможных значений.
44. Основанием пирамиды служит ромб с острым углом α. Все боковые грани составляют с плоскостью основания один и тот же угол β. Найти радиус шара, вписанного в пирамиду, если ее объем равен V. При каком β радиус шара наибольший?
45. Конус описан около полушара радиуса R так, что центр основания конуса лежит в центре шара. Угол при вершине в осевом сечении конуса равен α. При каком значении α объем конуса будет наименьшим?
46. Дан единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ Найти площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину B_1 и параллельной прямой A_1C_1, у которой площадь проекции сечения на плоскость A_1C_1A максимальна.
47. В сферу радиуса R вписана правильная треугольная пирамида $TABC$, у которой высота равна медиане основания. Какую наименьшую площадь может иметь треугольник AMT, если AT — боковое ребро пирамиды, а точка M лежит на медиане основания, не пересекающей это ребро?
48. В сферу радиуса R вписана правильная треугольная пирамида, в которую, в свою очередь, вписан шар. При какой высоте пирамиды объем вписанного шара будет наибольшим?
49. В сферу радиуса R вписана пирамида $TABC$, основанием которой служит прямоугольник $ABCD$. Высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA, а боковое ребро TC образует с диагоналями основания углы $30°$ и $60°$. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основания AC?
50. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ служит правильный треугольник ABC со стороной 6. Высота пирамиды, опущенная из вершины S, равна 4, причем основание этой высоты принадлежит треугольнику ABC (включая его контур — границу). Найти наименьшее возможное при этих условиях значение радиуса шара, описанного около пирамиды $SABC$.

Ответы

Планиметрия

1. Квадрат. **2.** Одна из сторон прямоугольника вдвое больше другой. **3.** Квадрат. **4.** Равнобедренный треугольник. **5.** $S_{\max} = p^2/4$ при $2r = l$, где r — радиус сектора, l — длина дуги. **6.** $\sqrt{2}$. Равнобедренная трапеция. **7.** $2\left(\sqrt{R^2-a^2}+\sqrt{r^2-a^2}\right)$. **8.** Середина основания. **9.** $\frac{a}{3}(3+2\sqrt{3})$. **10.** $2a\sqrt{2-\sqrt{3}}$. **11.** $4R\sqrt{4R^2-l^2}$. **12.** Обе хорды равны $2R\cos(\alpha/2)$. **13.** Вписанный. **14.** а) $(a+b)_{\min} = 2\sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha}}$ при $a = b$; б) $C_{\min} = 2\sqrt{S\operatorname{tg}(\alpha/2)}$ при $a = b$; в) $P_{\min} = 2(1+\sin(\alpha/2))\sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha}}$ при $a = b$. **15.** Равнобедренный треугольник. **16.** Равносторонний треугольник. **17.** $2a$. **18.** $(\sqrt{5}-1)$. **19.** $h_{\max} = \frac{8\sqrt{3}}{9}R$ при $\alpha = \arccos(1/3)$. **21.** Повернуть квадрат вокруг его центра на $60°$. Центры квадрата и шестиугольника совпадают, а одна из больших диагоналей шестиугольника лежит на диагонали квадрата. **22.** $a/\sqrt{2}$ **23.** ab. **25.** $p-(a/2)$; $p-(a/2)$. **26.** $\pi/3$. **27.** $7:5$. **28.** $\frac{1}{2}R^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **29.** $45°$. **30.** Ширина $\frac{2p}{4+\pi}$; высота $\frac{p}{4+\pi}$. **31.** Равнобедренный треугольник. **32.** Равносторонний треугольник. **33.** Равнобедренный треугольник. **34.** Равносторонний треугольник. **35.** $(a+b)^2/2$. **36.** Высота прямоугольника равна половине высоты треугольника. **37.** а) квадрат; б) квадрат. **38.** $\operatorname{arctg}(3/4)$. **39.** $\frac{a}{2\sqrt{2}}\sqrt{17-\sqrt{105}}$. **40.** При $0 < \alpha \le \pi/3$ $S_{\max} = \frac{R^2}{4}\operatorname{tg}\alpha$; при $\pi/3 < \alpha < \pi/2$ $S_{\max} = 2R^2\sin\alpha\sin^2(\alpha/2)$. **41.** 1,5$h$. **42.** 0,5. **43.** $\pi/4$. **44.** $4\sqrt{3}$; в равностороннем. **45.** $3\sqrt{3}$; в равностороннем. **46.** $p/4$. **47.** $S_{\max} = \frac{a^2h}{4(a-b)}$ при $x = a/2$, если $b < a/2$. $S_{\max} = bh$, при $x = b$, если $b \ge a/2$. Здесь x — длина стороны вырезаемого прямоугольника, лежащей на большем основании трапеции. **48.** 45°. **49.** При $h > c/2$ равнобедренный треугольник и $R_{\min} = \frac{c^2+4h^2}{8h}$. При $h \le c/2$ прямоугольный треугольник и $R_{\min} = c/2$. **50.** 90°.

Стереометрия

1. Высота конуса $h = 4R$, радиус его основания $r = R\sqrt{2}$, наименьший объем $V_{\min} = \frac{8}{3}\pi R^3$. **2.** 2 и 2. **3.** 4/9. **4.** Высота цилиндра равна $\sqrt{2}\cdot r$. **5.** Нужно удалить верхнюю (более тонкую) часть бревна так, чтобы осталось бревно длиной $13\frac{1}{3}$ дм, и вписать квадрат в верхнее основание бревна. **6.** Куб с ребром $S/3$. **7.** $S_{\max} = \frac{Q}{2\sqrt{5}}$. **8.** $\frac{1}{2}\pi RH$. **9.** $S_{\max} = l^2/24$. **10.** 2, 2, $2\sqrt{2}$. **11.** 10 см. **12.** $l^2/24$, ящик — куб. **13.** Диагональ основания пирамиды равна 0,8 стороны данного квадрата. **14.** Высота цилиндра равна диаметру основания. **15.** Высота конуса наибольшего объема равна $l/\sqrt{3}$. **16.** Отношение высоты конуса к радиусу его основания равно $\sqrt{2}$. **17.** 45°. **18.** $\arccos(1/3)$. **19.** 96 см^2. **20.** $a = h\sqrt{3} = \sqrt[3]{4V}$, где a — длина стороны основания призмы и h — ее высота. **21.** Минимальная поверхность котла достигается, когда он состоит только из двух полусфер. **22.** Осевое сечение цилиндра — квадрат. **23.** $\sqrt{(2/3)}$. **24.** $\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$. **25.** $\pi a^2\sqrt{2}/8$. **26.** $R/\sqrt{13}$. **27.** $4SH/27$. **28.** $\arccos(\sqrt{2}-1)$. **29.** $6\sqrt{3}V/\pi$. **30.** $\sqrt{2}+1$. **31.** Радиус основания $\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi\sqrt{2}}}$; высота $\sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$. **32.** Ребро основания $R\sqrt{6}/2$; высота $R\sqrt{2}$. **33.** $64\sqrt{3{,}2\pi}/75$. **34.** 2. **35.** 4. **36.** 8. **37.** $\operatorname{arctg}(1/\sqrt{2})$. **38.** $R\sqrt{(2/3)}$. **39.** $\alpha = \pi/3$. **40.** $R/\sqrt{3}$. **41.** $\frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2+3h^2}}$ при $h > a/\sqrt{6}$; $\frac{a}{2}\sqrt{h^2+\frac{a^2}{12}}$ при $0 < h \le a/\sqrt{6}$. **42.** $\operatorname{arcctg}\sqrt{2}$. **43.** $\frac{2rR^3}{R^2-r^2}$ при $r < R \le (1+\sqrt{2})r$; $\frac{R^2}{2}\left(\frac{R^2+r^2}{R^2-r^2}\right)$ при $R > (1+\sqrt{2})r$. **44.** $\arccos(1/3)$. **45.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **46.** $4-2\sqrt{2}$. **47.** $\frac{27R^2}{13\sqrt{13}}$. **48.** $4R/3$. **49.** $R^2/8$. **50.** 3,5.

Дроздов Виктор Борисович,
г. Рязань.