Статистическое, геометрическое и аксиоматическое определения вероятности

1. Статистическая вероятность

Классическая вероятность

$$\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n\}$$

Пусть событию A благоприятствует m $(m \le n)$ исходов множества Ω.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Если исходы случайного эксперимента не равновозможны, можно использовать статистическую вероятность.

Относительной частотой события *A* называют отношение числа *m* исходов, в которых событие **появилось**, к числу *n* всех проведенных испытаний.

$$\omega\left(A\right)=\frac{m}{n}$$

Относительная частота не является величиной постоянной.

Если в одинаковых условиях производят достаточно большое число опытов, то относительная частота обнаруживает ***свойство статистической устойчивости:*** в различных сериях испытаний относительная частота события изменяется незначительно.

В качестве ***статистической вероятности*** события принимают его относительную частоту или ее приближенное значение.

$$P\left(A\right)\approx\omega\left(A\right)$$

Пример. Известно, что среди новорожденных больше мальчиков, чем девочек. По официальным статистическим данным, относительная частота рождения девочек в Беларуси в 2006-2021 гг. варьировалась следующим образом:

$2006 - 0,485$

$2007 - 0,487$

$2008 - 0,487$

$2009 - 0,485$

$2010 - 0,485$

$2011 - 0,485$

$2012 - 0,485$

$2013 - 0,484$

$2014 - 0,486$

$2015 - 0,485$

$2016 - 0,485$

$2017 - 0,483$

$2018 - 0,484$

$2019 - 0,485$

$2020 - 0,486$

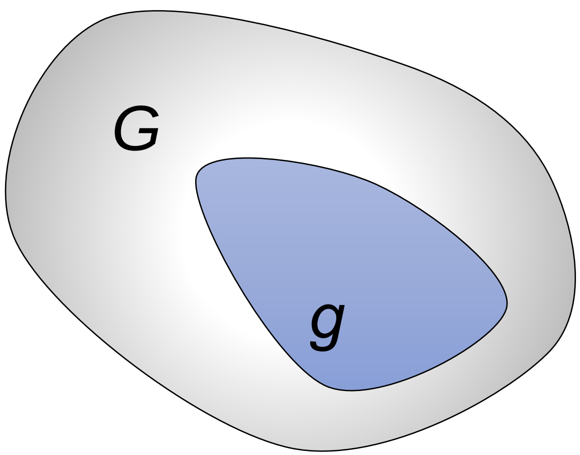
$2021 - 0,487$

$$P(A) \approx 0,485$$

2. Геометрическая вероятность

Геометрическую вероятность можно использовать, если исходы случайного эксперимента равновозможны, но образуют бесконечное несчетное пространство элементарных исходов, которое можно представить в виде некоторой геометрической фигуры – области на числовой прямой, на плоскости или в пространстве.

Пусть *G* – геометрическая фигура (область), представляющая пространство элементарных исходов данного опыта.
g – область, представляющая все элементарные исходы, благоприятствующие событию *A*.



Геометрической вероятностью события *A* называют отношение меры области *g* к мере области *G*.

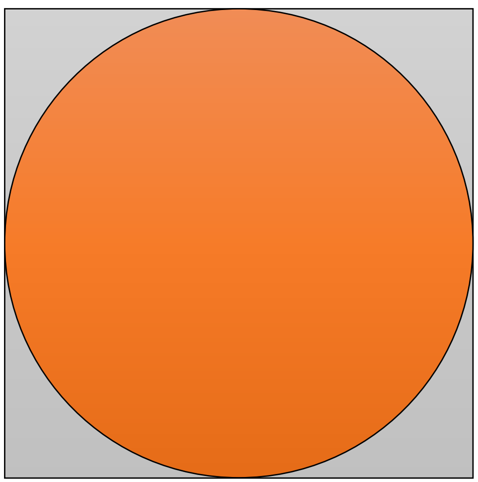
$$P(A) = \frac{\mu(g)}{\mu(G)}$$

$$P(A)=\frac{\mu(g)}{\mu(G)}$$

Если G – отрезок или кривая, то $\mu(G)-$ длина отрезка или кривой;
если G – плоская область, то $\mu(G)-$ площадь этой области;
если G – пространственное тело, то $\mu(G)-$ объем этого тела.

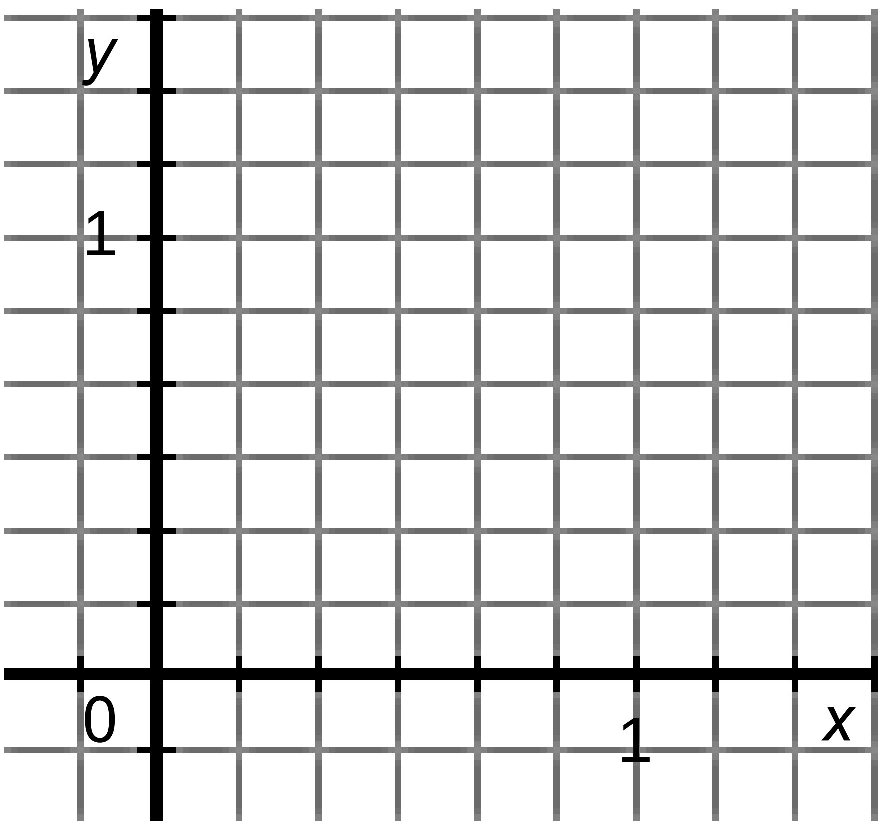
Пример. В квадрат со стороной *a* наудачу брошена точка. Найдите вероятность того, что она попадет на вписанный в квадрат круг.

A – точка попадет в круг



$$P(A) = \frac{\mu(g)}{\mu(G)}$$

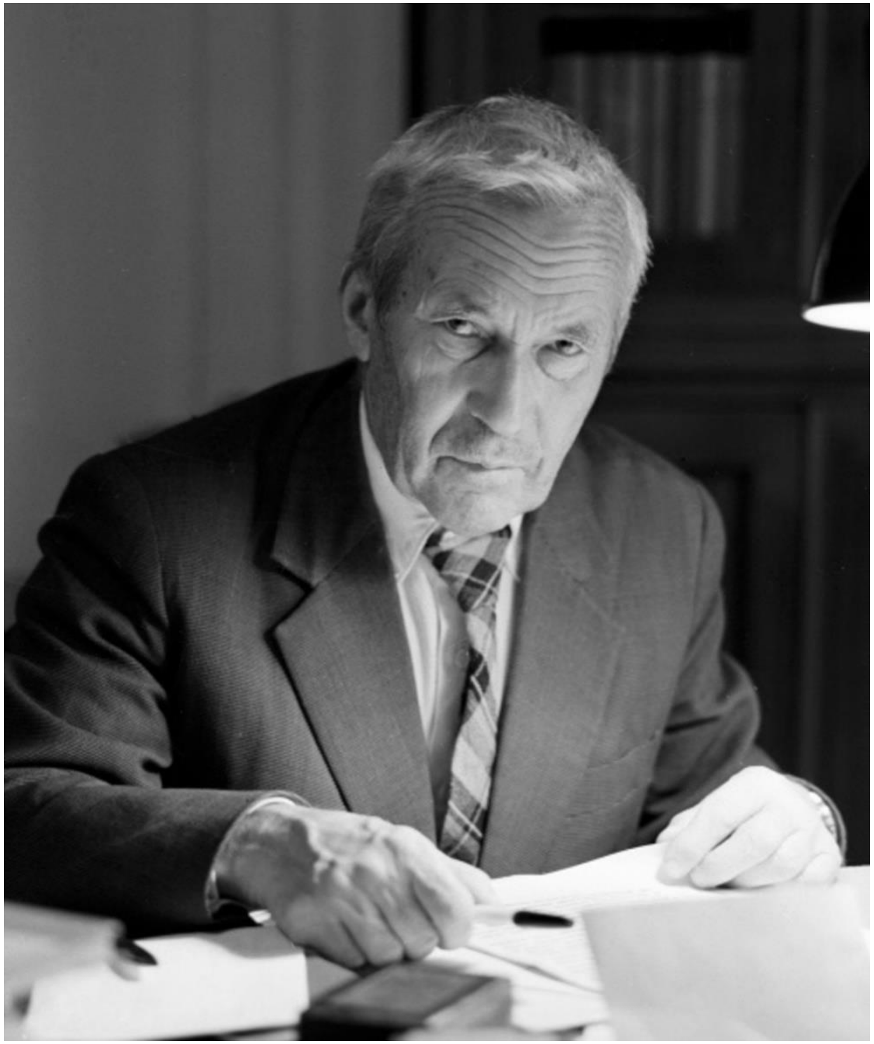
Пример. (*Задача о встрече)* Два студента условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами. Пришедший первым ждет второго в течении 15 минут и уходит. Найдите вероятность того, что встреча состоится, если каждый студент наудачу выбирает момент своего прихода с 12 до 13 часов.



y
1
0
1
x

3. Аксиоматическая вероятность

Андре́й Никола́евич Колмого́ров (1903 - 1987)



Советский математик, один из крупнейших математиков XX века. ***Один из основоположников современной теории вероятностей***, им получены фундаментальные результаты в топологии, геометрии, математической логике, классической механике, теории информации, теории функций и в ряде других областей математики и её приложений.

Пусть задано некоторое множество Ω исходов эксперимента, которое назовем ***пространством элементарных исходов*** данного опыта.

Пусть ***F*** – множество подмножеств множества Ω.

Множество ***F*** называют σ-***алгеброй событий***, если

1. $\Omega \in \boldsymbol{F}$.

2. Если $A \in \boldsymbol{F}$, $B \in \boldsymbol{F}$, то $A + B$, AB, $A \setminus B \in \boldsymbol{F}$.

3. Если $A_1, A_2, ..., A_n, ... \in \boldsymbol{F}$ то $A_1 + A_2 + ... + A_n + ... \in \boldsymbol{F}$, $A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n \cdot ... \in \boldsymbol{F}$.

(Сумма и произведение счетного числа событий также являются событиями)

Вероятностью называют функцию $P:\boldsymbol{F}\to[0;1]$, определенную для каждого события $A\in\boldsymbol{F}$ и удовлетворяющую условиям (***аксиомам вероятности***):

1. *Аксиома неотрицательности*: $P(A)\geq 0,\ \forall A\in\boldsymbol{F}$.

2. *Аксиома нормированности*: $P(\Omega)=1$.

3. *Аксиома аддитивности*: если события $A_1, A_2, ..., A_n, ...\in\boldsymbol{F}$ попарно несовместны, то

$$P(A_1+A_2+...+A_n+...)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)+....$$

Тройку объектов $(\Omega, \boldsymbol{F}, P)$ где

Ω – пространство элементарных исходов опыта,

$\boldsymbol{F}$ – σ -алгебра событий,

P – вероятность, определенная на множестве ***F***

называют ***вероятностным пространством***.

Основные теоремы

1. Теоремы умножения

Событие A называют ***независимым*** от события B, если появление события B не изменяет вероятность появления события A.

Иначе, событие A называют ***зависимым*** от события B.

Вероятность события A, найденную с учетом того, что произошло событие B, называют ***условной вероятностью***.

$$P\left(A/B\right) \quad P\left(A|B\right) \quad P_B\left(A\right)$$

Пример. Правильную игральную кость подбрасывают один раз.

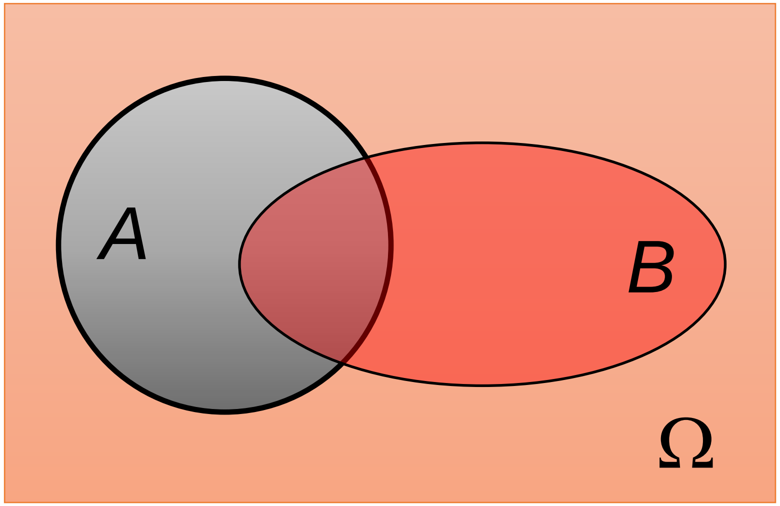
$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

A – выпадет четное число очков $\{2; 4; 6\}$

B – выпадет число очков, не более трех $\{1; 2; 3\}$

$A \mid B$ –

Пусть в области Ω наудачу выбирают точку.



A – точка принадлежит области *A*

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

формула для нахождения условной вероятности

Получите самостоятельно это формулу в схеме шансов (классическое определение вероятности).

Пример. В урне 3 белых и 3 черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару не возвращая их обратно. Найдите вероятность появления белого шара при втором испытании, если при первом испытании был извлечен черный шар.

A – в первом испытании выбран черный шар;

B – во втором испытании выбран белый шар

$B \mid A$ – во втором испытании белый шар, если в первом – черный

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Теорема. Вероятность совместного наступления событий A и B равна

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_A(B)$$

Теорема. Если событие A не зависит от события B, то и событие B не зависит от события A.

В этом случае события A и B называют ***независимыми***.

Теорема. Если события A и B независимы, то независимы события $\bar{A}$ и B, $\bar{B}$ и A, $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

Теорема. Если события A и B независимы, то вероятность их совместного наступления равна

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

Если события A и B несовместны $\left(AB=\varnothing\right)$, то

$$P\left(A+B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)$$

Теорема. Если события A и B совместны, то вероятность появления хотя бы одного из них равна

$$P\left(A+B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cdot B\right)$$

$$P\left(A+B+C\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)+P\left(C\right)-$$

$$-P\left(AB\right)-P\left(AC\right)-P\left(BC\right)+P\left(ABC\right)$$

Пример. Два стрелка, стреляя по мишени, делают, независимо друг от друга, по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень первого стрелка равна 0,8, второго – 0,6. Найдите вероятность того, что в мишень попадет

а) два стрелка;

б) только один стрелок;

в) ни один стрелок;

г) хотя бы один стрелок.

A – первый стрелок попал в мишень

B – второй стрелок попал в мишень

$$P\left(A\right)=0{,}8 \quad P\left(B\right)=0{,}6 \quad P\left(\bar{A}\right)=0{,}2 \quad P\left(\bar{B}\right)=0{,}4$$

4. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Пусть событие A может наступить в результате появления одного из событий H_1, H_2, ..., H_n, которые образуют полную группу событий.

Пусть известны вероятности событий $H_1, H_2, ..., H_n$ и условные вероятности события A

$$P(A/H_1), P(A/H_2), \; ..., P(A/H_n)$$

Тогда вероятность события A равна

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + ... + P(H_n)P(A/H_n)$$

формула полной вероятности

События $H_i, i = \overline{1, n}$ называют ***гипотезами***.

Пусть событие A ***произошло*** в результате появления одного из событий H_1, H_2, ..., H_n, которые образуют полную группу событий.
Пусть известны вероятности гипотез до опыта и условные вероятности события A

Тогда вероятность гипотезы $H_i, i = \overline{1, n}$

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A / H_i)}{P(A)}$$

формула Байеса

$P(A) -$ полная вероятность

Пример. На общий конвейер поступают детали, изготовленные на трех автоматах. Первый автомат изготавливает 30% всех поступающих деталей, второй – 50%, третий – 20%. Вероятность изготовления стандартной детали первым автоматом равна 0,8, вторым – 0,6, третьим – 0,9.

а) Найдите вероятность того, что случайно взятая с конвейера деталь оказалась стандартной.

б) Случайно взятая с конвейера деталь оказалась стандартной. Найдите вероятность того, что она изготовлена третьим автоматом.