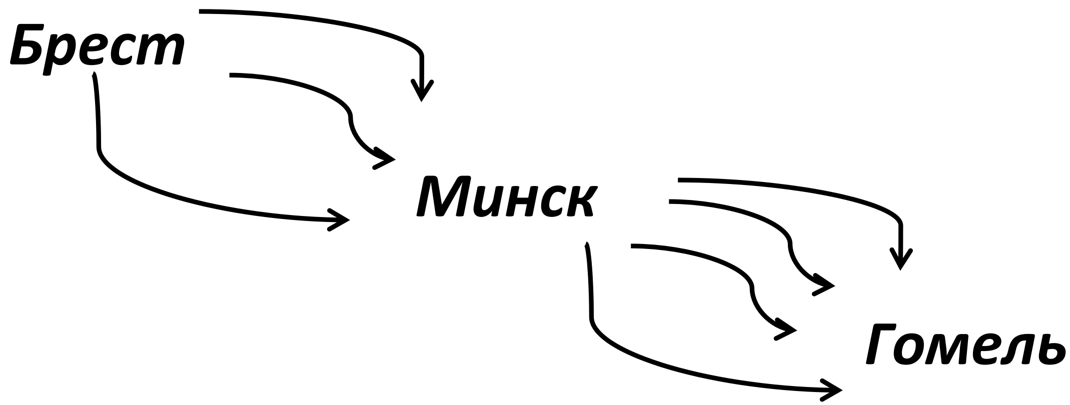
Теория вероятностей и математическая статистика

Комбинаторика

Комбинаторика – раздел математики, который изучает количество и свойства различных комбинаций, составленных из данных элементов.

Правило «умножения»

Если из некоторого непустого множества объект A можно выбрать m способами, и после каждого такого выбора объект B можно выбрать (независимо от выбора A) n способами, то объект «A и B» можно выбрать $m \cdot n$ способами.



$$3 \cdot 4 = 12$$

Пример. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составляют трехзначное число. Сколько таких чисел можно составить, если

а) цифры в числе не повторяются;

б) цифры в числе могут повторяться?

Правило «суммы»

Если из некоторого непустого множества объект A можно выбрать m способами, а объект B - n способами (не такими как A), то объект «A или B» можно выбрать $m+n$ способами.

Пример. В одной вазе 5 красных роз, а в другой 7 белых. Сколькими способами можно выбрать одну розу?

Пример. Студент, для подготовки к сессии, получил 20 практических, 10 тестовых и 5 теоретических заданий. Он запланировал сегодня выполнить или одно практическое и одно тестовое, или только одно теоретическое задание. Сколько возможных выборов такой работы у студента?

Пусть имеется непустое множество n ***различных*** элементов.

Перестановками из n элементов называют различные комбинации, составленные из n данных элементов, которые ***отличаются*** друг от друга ***порядком следования элементов***.

Количество различных перестановок вычисляют по формуле:

$$P_n = n!$$

Пример. Сколькими способами можно расставить 5 книг на книжной полке?

Размещениями из n по k называют различные комбинации, составленные из n данных элементов по k в каждой, которые ***отличаются*** друг от друга ***либо самими элементами либо порядком их следования***.

Количество различных размещений вычисляют по формуле:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Пример. В соревнованиях участвуют 8 команд. Сколько различных прогнозов относительно распределения трех первых мест можно сделать?

Сочетаниями из n по k называют различные комбинации, составленные из n данных элементов по k в каждой, которые ***отличаются*** друг от друга ***только самими элементами***.

Количество различных сочетаний вычисляют по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Пример. Из 10 студентов выбирают троих для подготовки доклада по теме «Комбинаторика». Сколькими способами можно сделать такой выбор?

Сочетания НЕЛЬЗЯ заменить «правилом умножения»!

Пусть среди элементов рассматриваемого множества есть повторяющиеся.

Пусть элемент a_1 встречается k_1 раз, элемент a_2 – k_2 раз, …, элемент a_m – k_m раз.

Количество различных ***перестановок с повторениями*** вычисляют по формуле:

$$\widetilde{P}_n(k_1, k_2, ..., k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$$

$$\widetilde{P}_n(k_1, k_2, ..., k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!}$$

Пример. Сколько различных «слов» можно составить из букв слова «математика»?

Если элементы в ***размещениях могут повторяться***, то количество таких комбинаций можно вычислить по формуле

$$\widetilde{A}_n^k = n^k$$

Если элементы в ***сочетаниях могут повторяться***, то количество таких комбинаций можно вычислить по формуле

$$\widetilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Теория вероятностей и математическая статистика

Случайные события

1. Случайные события и действия над ними

Теория вероятностей – раздел математики, который изучает закономерности, присущие массовым случайным явлениям. При этом изучаемые объекты рассматриваются в абстрактной форме, независимо от их конкретной природы.

Пьер де Ферма́ (1601 — 1665)

Французский математик-самоучка, один из создателей аналитической геометрии, математического анализа, теории вероятностей и теории чисел. По профессии юрист, с 1631 года — советник парламента в Тулузе. Блестящий полиглот. Наиболее известен формулировкой Великой теоремы Ферма, «самой знаменитой математической загадки всех времён»

Блез Паска́ль
(1623 — 1662)

Французский математик, механик, физик, литератор, философ и теолог. Классик французской литературы, один из основателей математического анализа, теории вероятностей и проективной геометрии, создатель первых образцов счетной техники, автор основного закона гидростатики.

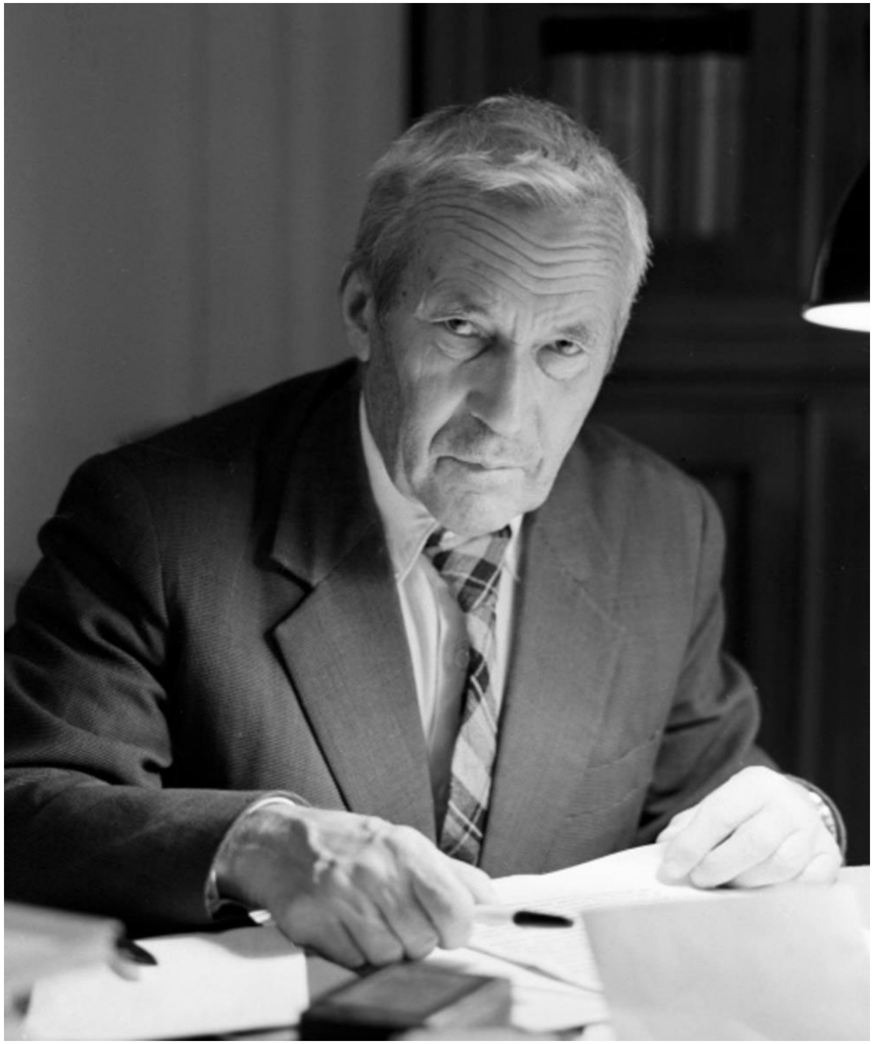
Христиа́н Гю́йгенс ван Зёйлихем
(1629 — 1695)

«О расчетах в азартных играх» (1657 г.), которую можно считать первым трактатом по теории вероятностей. В предисловии Гюйгенс пишет: «Я полагаю, что при внимательном изучении предмета читатель заметит, что имеет дело не только с игрой, но что здесь закладываются основы очень интересной и глубокой теории».

Якоб Берну́лли (1655 -1705) — швейцарский математик. ***Один из основателей теории вероятностей*** и математического анализа. Старший брат Иоганна Бернулли, совместно с ним положил начало вариационному исчислению. Доказал частный случай закона больших чисел - теорему Бернулли.

Пьер-Симо́н, маркиз де Лапла́с (1749 - 1827) — французский математик, механик, физик и астроном; известен работами в области небесной механики, дифференциальных уравнений, ***один из создателей теории вероятностей***. Заслуги Лапласа в области чистой и прикладной математики и особенно в астрономии громадны: он усовершенствовал почти все разделы этих наук.

Андре́й Никола́евич Колмого́ров (1903 - 1987)



В 1933 г. в книге «Основные понятия теории вероятностей», дано аксиоматическое построение теории вероятностей, основанное на теории множеств.

Случайным событием (событием) называют любой исход опыта (эксперимента) который может появиться или не появиться.

A, B, C, …

Пример. Правильную игральную кость подбрасывают один раз.

A – выпадет четное число очков;

B – выпадет число очков, большее трех;

C – выпадет целое число очков;

D – выпадет «5»;

E – выпадет более семи очков;

F – выпадет число очков, кратное трем.

Событие называют ***достоверным*** если оно обязательно наступит в результате данного опыта.

$$\Omega$$

Событие называют ***невозможным*** если оно никогда не наступит в результате данного опыта.

$$\varnothing$$

Суммой (объединением) событий *A* и *B* называют событие $A + B$ $\left(A \cup B\right)$, которое произойдет только тогда, когда произойдет хотя бы одно из событий *A* или *B* (произойдет или *A*, или *B*, или оба одновременно)

Пример. Правильную игральную кость подбрасывают один раз.

A – выпадет четное число очков;

B – выпадет число очков, большее трех.

$A \cup B -$

Произведением (пересечением) событий A и B называют событие $A \cdot B$ $(A \cap B)$, которое произойдет только тогда, когда произойдут оба эти события (события A и B произойдут одновременно)

Пример. Правильную игральную кость подбрасывают один раз.

A – выпадет четное число очков;

B – выпадет число очков, большее трех.

$A \cap B -$

Разностью событий A и B называют событие $A-B$ $\left(A \setminus B\right)$ которое произойдет только тогда, когда произойдет событие A и не произойдет событие *B.*

Пример. Правильную игральную кость подбрасывают один раз.

A – выпадет четное число очков;

B – выпадет число очков, большее трех.

$A \setminus B$ –

$B \setminus A$ –

Противоположным событию A называют событие $\bar{A}$ которое произойдет только тогда, когда не произойдет событие A.

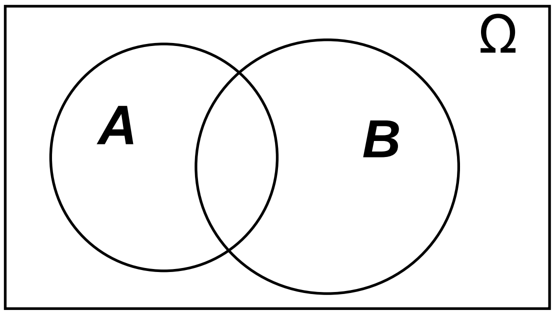
Пример. Правильную игральную кость подбрасывают один раз.

A – выпадет четное число очков;

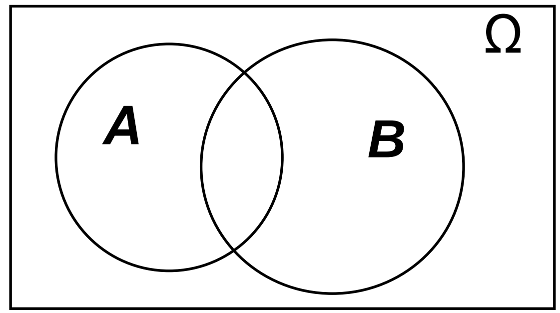
B – выпадет число очков, большее трех.

$\bar{A}$ –

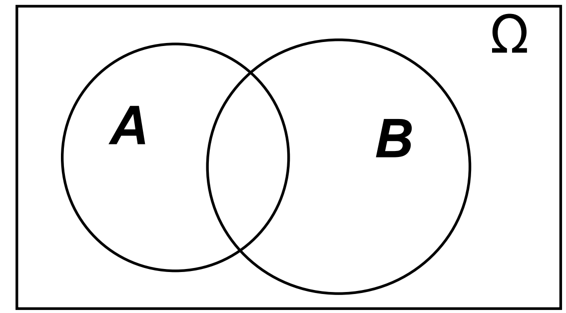
$\bar{B}$ –



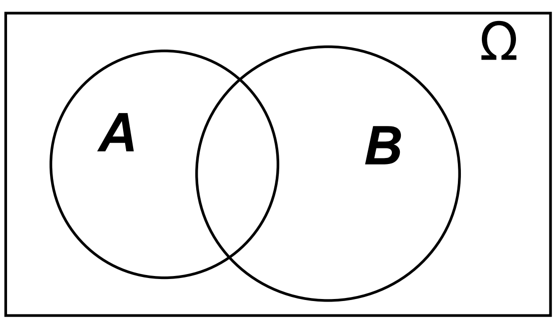
$\bar{A}$



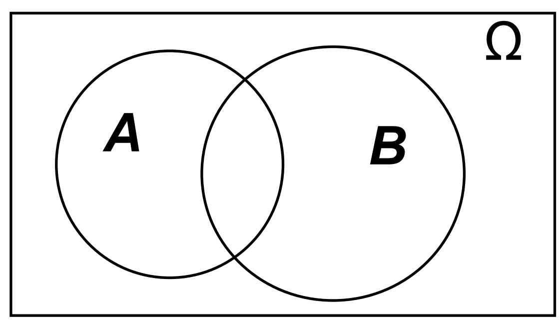
$A \cup B$



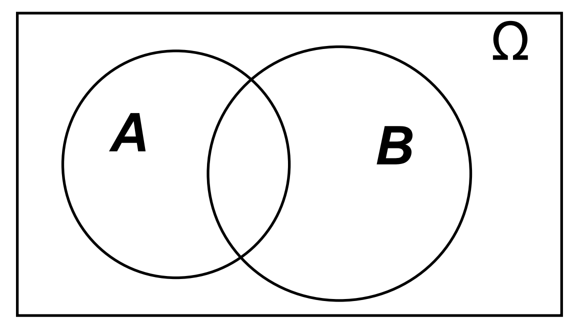
$A \cap B$



$A \setminus B$



$\bar{A} \cap B$



$\bar{A} \cup \bar{B}$

Два события называют ***несовместными***, если наступление одного события исключает появление другого в одном и том же испытании.

$$A \cdot B = \varnothing$$

Иначе, события называют ***совместными***.

A – выпало 3 очка;

B – выпало не более двух очков;

C – выпало 2 очка.

A и B

A и C

B и C

Несколько событий образуют ***полную группу***, если они попарно несовместны и в результате опыта произойдет одно и только одно из них.

Пример. Правильную игральную кость подбрасывают один раз.

A – выпадет четное число очков;

B – выпадет нечетное число очков;

C – выпадет число большее двух;

События называют ***элементарными***, если в данном опыте их нельзя разбить на более простые.

Непосредственные исходы опыта будем считать элементарными событиями (они неразложимы и попарно несовместны).

$$\omega_1,\ \omega_2, \ldots$$

Множество всех элементарных событий данного опыта называют ***пространством элементарных событий***.

$$\Omega = \left\{\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n\right\}$$

Несколько исходов одного опыта называют ***равновозможными***, если, из условий симметрии опыта, нет объективных оснований считать одно событие более возможным, чем другие.

Пример. Правильную игральную кость подбрасывают один раз.

$$\Omega = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$$

2. Классическая вероятность

Пусть проводится испытание с конечным числом попарно несовместных равновозможных исходов

$$\Omega = \left\{\omega_1,\ \omega_2,\ \dots,\ \omega_n\right\}$$

которые образуют полную группу событий.

В этом случае говорят, что испытание сводится к ***схеме случаев*** или ***схеме шансов***.

Исход ω называют ***благоприятным*** (***благоприятствующим***) событию *A*, если появление ω приводит к появлению события *A*.

$$\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2,\ \dots,\ \omega_n\}$$

Пусть событию A благоприятствует m $(m \le n)$ исходов множества Ω.

Вероятностью события A называют число, равное отношению числа m исходов, благоприятных событию A, к числу n всех исходов данного опыта.

$$P(A) = \frac{m}{n} \qquad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

Свойства вероятности

1) $P(\Omega)=1$

2) $P(\varnothing)=0$

3) $0\le P(A)\le 1$

4) Если $AB=\varnothing$, то $P(A+B)=P(A)+P(B)$

5) $P(A)=1-P(\bar{A})$

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Пример. В урне находится 12 черных и 8 белых шаров. Найдите вероятность того, что наудачу взятый шар окажется белым.

A – из урны взяли белый шар

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Пример. Правильную игральную кость подбрасывают один раз. Найдите вероятность того, что выпадет число очков не больше трех.

A – выпадет число не больше трех

$$P(A) = \frac{m}{n} \qquad A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Пример. Набирая телефонный номер абонент забыл две последние цифры и помнил только, что они различны. Найдите вероятность того, что набранные наудачу две цифры, окажутся верными.

A – набранные цифры оказались верными

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Пример. В партии из 10 деталей 7 стандартных. Случайным образом из партии выбирают 3 детали. Найдите вероятность того, что среди выбранных

а) все детали стандартные;

б) одна стандартная и две нестандартные;

в) хотя бы одна нестандартная.