Основные законы распределения НСВ

1. Равномерное распределение

НСВ X ***равномерно распределена*** на отрезке $[a;b]$, если ее плотность $f(x)$ постоянна на этом отрезке, а вне его равна нулю.

$$f(x)=\begin{cases} c, & x\in[a;b] \\ 0, & x\notin[a;b] \end{cases}$$

Найдем неизвестный параметр c.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1 \Rightarrow \qquad c=\frac{1}{b-a}$$

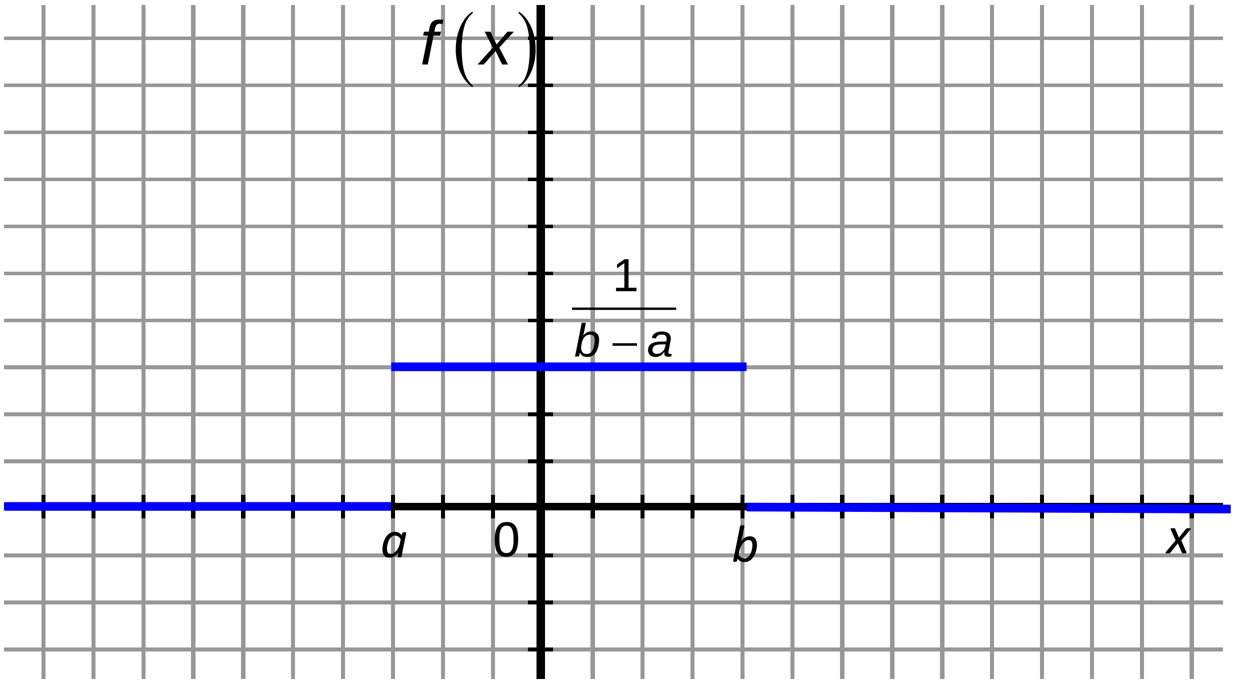
Плотность вероятности равномерного распределения имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a;b]\\ 0, & x\notin[a;b]\end{cases}$$

Замечание. Вместо $[a;b]$ можно записывать $(a;b)$, $[a;b)$, $(a;b]$ т.к. СВ X непрерывна.

$$X\sim R[a;b]$$

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in\left[a;b\right]\\ 0, & x\notin\left[a;b\right]\end{cases}$$

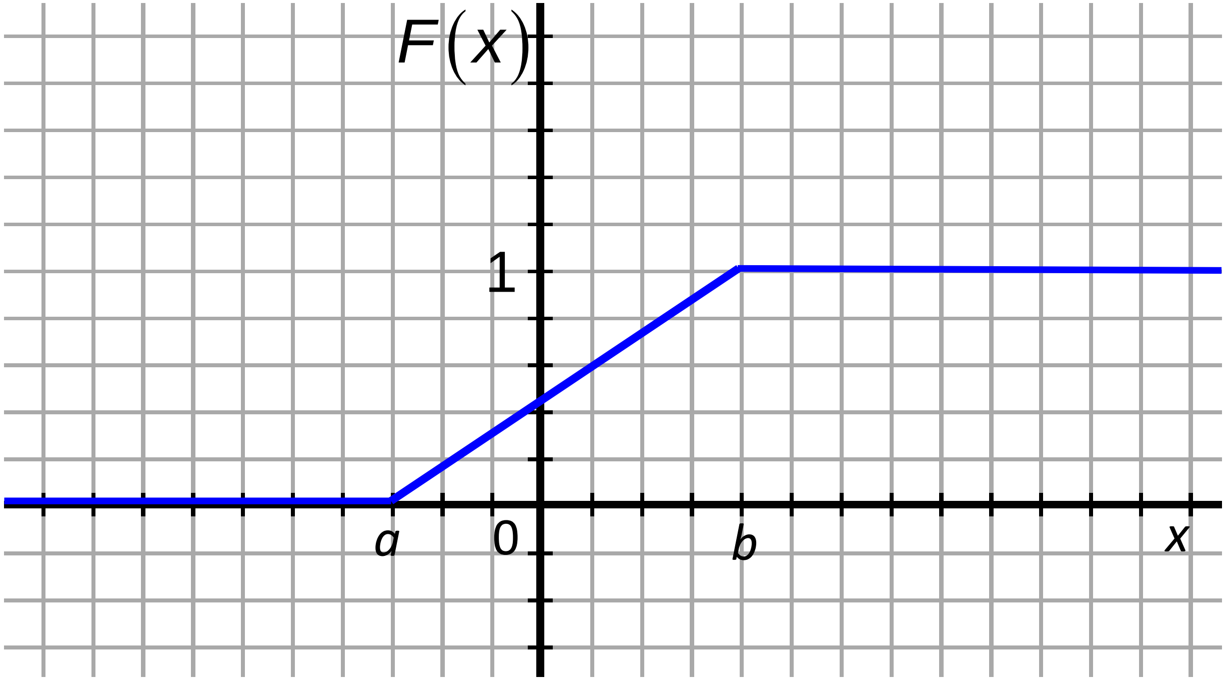


Найдем функцию распределения $F(x)$.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a; b] \\ 0, & x \notin [a; b] \end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b\\ 1, & x>b\end{cases}$$



Найдем математическое ожидание и дисперсию

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a;b]\\ 0, & x\notin[a;b]\end{cases}$$

$$MX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$$

$$MX=\frac{b+a}{2}$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a;b]\\ 0, & x\notin[a;b]\end{cases}$$

$$DX=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\,dx-\left(M(X)\right)^2$$

$$DX=\frac{(b-a)^2}{12},\quad \sigma X=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

Найдем вероятность попадания СВ $X \sim R[a;b]$ в интервал $[\alpha;\ \beta] \subset [a;b]$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

$$P\left(X \in [\alpha;\beta]\right) = F(\beta) - F(\alpha) = \frac{\beta - \alpha}{b-a}$$

Пример. Автобусы некоторого маршрута следуют строго по расписанию. Интервал движения 5 минут. Найдите вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее трех минут.

СВ X – время ожидания автобуса,

Примерами равномерно распределенных СВ являются:

- время ожидания транспорта, следующего через равные промежутки времени;
- ошибка округления числа до целого;
- погрешность измерений и др.

ДСВ X являются равномерно распределенной, если она принимает значения 1, 2, 3, …, n соответственно с вероятностью

$$P_m = P(X = m) = \frac{1}{n}, \ m = 1, 2, ..., n$$

$$M(X) = \frac{1+n}{2}, \quad D(X) = \frac{n^2-1}{12}, \quad \sigma(X) = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}.$$

2. Показательное (экспоненциальное) распределение

НСВ X ***распределена по показательному закону***, если ее плотность имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \end{cases}$$

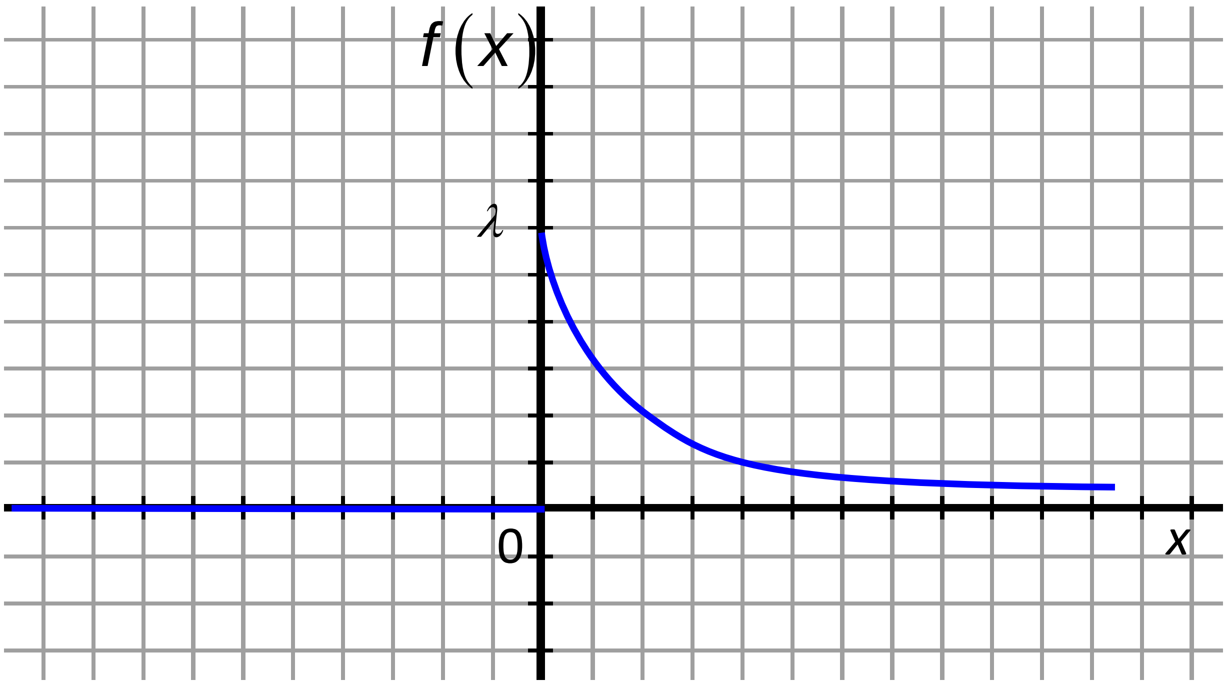
λ - параметр распределения.

$$f(x) \geq 0, x \in \boldsymbol{R}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \;\Rightarrow\; \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \cdot \left(-\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} =$$

$$= -1 \cdot (-1) = 1$$

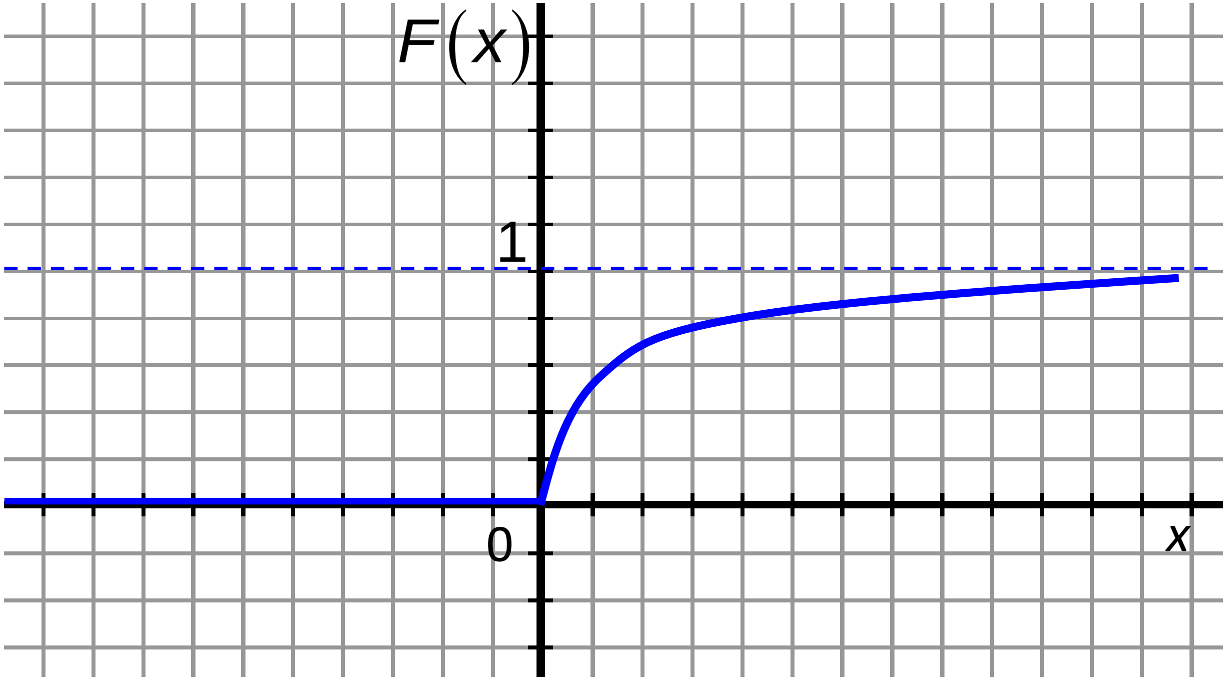
$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\end{cases}$$



Найдем функцию распределения $F(x)$.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$



Найдем математическое ожидание и дисперсию

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0,\end{cases}$$

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}$$

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0,\end{cases}$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)\,dx-\left(M(X)\right)^2$$

$$D(X)=\frac{1}{\lambda^2},\ \ \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}$$

Найдем вероятность попадания СВ X, имеющей показательное распределение в интервал $[\alpha;\ \beta]$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \end{cases}$$

$$P\left(X \in [\alpha; \beta]\right) = F(\beta) - F(\alpha) = 1 - e^{-\lambda\beta} - \left(1 - e^{-\lambda\alpha}\right) =$$

$$= e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$$

Пример. СВ T – время безотказной работы прибора, имеет показательное распределение. Найдите вероятность того, что прибор проработает безотказно не менее 500 часов, если среднее время работы прибора 400 часов.

Примерами СВ, распределенных по показательному закону являются:

- время работы прибора до первого отказа;
- длительность времени обслуживания в теории массового обслуживания и др.

Показательное распределение используется в теории массового обслуживания, в физике, в теории надежности.

3. Функция надежности

Будем называть ***элементом*** некоторое устройство, независимо от того, простое оно или сложное.

Пусть элемент начинает работать в момент времени $t_0 = 0$ и, по истечении времени t происходит отказ.

СВ T – время безотказной работы элемента.

$F(t) = P(T < t)$ - вероятность отказа элемента за время t. Тогда, вероятность безотказной работы элемента:

$$R(t) = P(T > t) = 1 - F(t)$$

Функцией надежности $R(t)$ называют функцию, определяющую вероятность безотказной работы элемента за время *t*.

Если длительность безотказной работы элемента имеет показательный закон, то

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}$$

λ - интенсивность отказов.

Пример. Время безотказной работы элемента распределено по показательному закону

$$f(t) = 0{,}02e^{-0{,}02t},\ \ t \geq 0$$

Найдите вероятность того, что элемент проработает безотказно 100 ч.

4. Нормальный закон распределения

НСВ X ***распределена по нормальному закону (закону Гаусса)*** с параметрами a и σ если ее плотность имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbf{R}$$

$$X \sim N(a, \sigma)$$

Иога́нн Карл Фри́дрих Га́усс (30.04.1777-23.02.1855) — немецкий математик, механик, физик, астроном, геодезист. Считается одним из величайших математиков всех времён, «королём математиков».

Гаусс чрезвычайно строго относился к своим печатным трудам и никогда не публиковал даже выдающиеся результаты, если считал свою работу над этой темой незавершённой. На его личной печати было изображено дерево с несколькими плодами, под девизом: *«Pauca sed matura»* (*немного, но зрело*). Изучение архива Гаусса показало, что он медлил с публикацией ряда своих открытий, и в результате его опередили другие математики.

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\quad x\in\boldsymbol{R}$$

Убедимся, что $f(x)$ является плотностью распределения.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

Интеграл Эйлера-Пуассона

График плотности нормального распределения называют ***нормальной кривой*** или ***кривой Гаусса***.

Исследуем график функции $f\left(x\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(x-a\right)^2}{2\sigma^2}}$.

1) $D\left(f\right)=\boldsymbol{R}$

2) $f\left(x\right)>0,\ x\in\boldsymbol{R}$

3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f\left(x\right)=0$

4) $\left(x-a\right)$ содержится в аналитическом выражении функции в квадрате, значит график симметричен относительно прямой $x=a$.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \boldsymbol{R}$$

5) $f'(x) =$

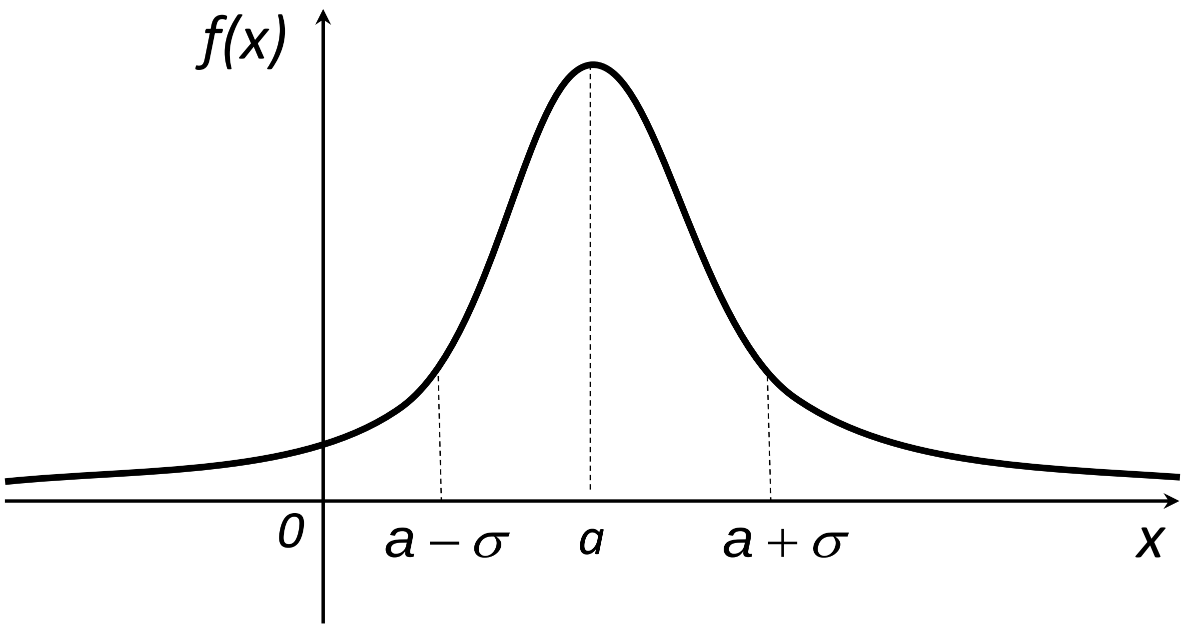
$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \ x\in \boldsymbol{R}$$

6) $f''(x)=$

$x=a\pm\sigma$ - точки перегиба

$$f(a\pm\sigma)=\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

$$f\left(x\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(x-a\right)^2}{2\sigma^2}},\ \ x\in\boldsymbol{R}$$



Найдем математическое ожидание и дисперсию нормально распределенной СВ с параметрами *a* и σ

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

Интеграл Эйлера-Пуассона

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-MX)^2 f(x)dx$$

$$M(X) = a,\ D(X) = \sigma^2$$

Найдем функцию распределения нормально распределенной СВ X с параметрами a и σ

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx \qquad F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx$$

Если $a=0,\ \sigma=1,$ то нормальное распределение называют ***стандартным (нормированным)***. Плотность стандартного распределения имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=\varphi(x)$$ - функция Гаусса

$$F_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$F_0(x) = \frac{1}{2} + \Phi(x)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

функция Лапласа

Найдем вероятность попадания нормально распределенной СВ X с параметрами a и σ на интервал $(\alpha; \beta)$.

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

функция Лапласа

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

Пример. Математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение нормально распределенной СВ *X* равны 12 и 2. Запишите выражение для плотности вероятности, постройте ее график. Найдите вероятность того, что СВ *X* примет значение из интервала (14; 16).

$$f\left(x\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(x-a\right)^2}{2\sigma^2}},\ \ x\in \boldsymbol{R}$$

Пример. Математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение нормально распределенной СВ *X* равны 12 и 2. Запишите выражение для плотности вероятности, постройте ее график. Найдите вероятность того, что СВ *X* примет значение из интервала (14; 16).

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

$$P(14 < X < 16) = \Phi\left(\frac{16-12}{2}\right) - \Phi\left(\frac{14-12}{2}\right) =$$

$$= \Phi(2) - \Phi(1) = 0{,}4772 - 0{,}3413 = 0{,}1359$$

Приложение 2. Таблица значений функции Лапласа

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt.$$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,45	0,1736	0,90	0,3159	1,35	0,4115	1,80	0,4641	2,50	0,4938
0,01	0,0040	0,46	0,1772	0,91	0,3186	1,36	0,4131	1,81	0,4649	2,52	0,4941
0,02	0,0080	0,47	0,1808	0,92	0,3212	1,37	0,4147	1,82	0,4656	2,54	0,4945
0,03	0,0120	0,48	0,1844	0,93	0,3238	1,38	0,4162	1,83	0,4664	2,56	0,4948
0,04	0,0160	0,49	0,1879	0,94	0,3264	1,39	0,4177	1,84	0,4671	2,58	0,4951
0,05	0,0199	0,50	0,1915	0,95	0,3289	1,40	0,4192	1,85	0,4678	2,60	0,4953
0,06	0,0239	0,51	0,1950	0,96	0,3315	1,41	0,4207	1,86	0,4686	2,62	0,4956
0,07	0,0279	0,52	0,1985	0,97	0,3340	1,42	0,4222	1,87	0,4693	2,64	0,4959
0,08	0,0319	0,53	0,2019	0,98	0,3365	1,43	0,4236	1,88	0,4699	2,66	0,4961
0,09	0,0359	0,54	0,2054	0,99	0,3389	1,44	0,4251	1,89	0,4706	2,68	0,4963
0,10	0,0398	0,55	0,2088	1,00	0,3413	1,45	0,4265	1,90	0,4713	2,70	0,4965
0,11	0,0438	0,56	0,2123	1,01	0,3438	1,46	0,4279	1,91	0,4719	2,72	0,4967
0,12	0,0478	0,57	0,2157	1,02	0,3461	1,47	0,4292	1,92	0,4726	2,74	0,4969
0,13	0,0517	0,58	0,2190	1,03	0,3485	1,48	0,4306	1,93	0,4732	2,76	0,4971
0,14	0,0557	0,59	0,2224	1,04	0,3508	1,49	0,4319	1,94	0,4738	2,78	0,4973
0,15	0,0596	0,60	0,2257	1,05	0,3531	1,50	0,4332	1,95	0,4744	2,80	0,4974
0,16	0,0636	0,61	0,2291	1,06	0,3554	1,51	0,4345	1,96	0,4750	2,82	0,4976
0,17	0,0675	0,62	0,2324	1,07	0,3577	1,52	0,4357	1,97	0,4756	2,84	0,4977
0,18	0,0714	0,63	0,2357	1,08	0,3599	1,53	0,4370	1,98	0,4761	2,86	0,4979
0,19	0,0753	0,64	0,2389	1,09	0,3621	1,54	0,4382	1,99	0,4767	2,88	0,4980
0,20	0,0793	0,65	0,2422	1,10	0,3643	1,55	0,4394	2,00	0,4772	2,90	0,4981
0,21	0,0832	0,66	0,2454	1,11	0,3665	1,56	0,4406	2,02	0,4783	2,92	0,4982
0,22	0,0871	0,67	0,2486	1,12	0,3686	1,57	0,4418	2,04	0,4793	2,94	0,4984

Часто требуется вычислить вероятность попадания нормально распределенной СВ в интервал, симметричный относительно математического ожидания.

$$P\left(|X-a|<\delta\right)=P\left(-\delta<X-a<\delta\right)=$$

$$=P\left(-\delta+a<X<\delta+a\right)=$$

$$=\left[P\left(\alpha<X<\beta\right)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)\right]=$$

$$=\Phi\left(\frac{a+\delta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\delta-a}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

$$P\left(|X-a|<\delta\right)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

$$P\left(|X-a|<\delta\right)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

Преобразуем полученную формулу, считая $\delta = t\sigma$.

$$P\left(|X-a|<t\sigma\right)=2\Phi\left(\frac{t\sigma}{\sigma}\right)=2\Phi(t)$$

Если $t=3$

$$P\left(|X-a|<3\sigma\right)=2\Phi(3)=2\cdot 0{,}49865=0{,}9973$$

0,9973 – вероятность практической достоверности

Правило «трех сигм». Практически достоверно, что СВ $X \sim N(a,\sigma)$ примет свои значения в интервале $(a-3\sigma;\ a+3\sigma)$.

Пример. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 20$ *мм* и математическим ожиданием $a = 0$. Найдите вероятность того, что из трех независимых измерений ошибка хотя бы одного не превзойдет по абсолютной величине 4 *мм*.

A – ошибка одного измерения не превзойдет 4

$$P\left(\left|X - a\right| < \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

7. Рост взрослых мужчин является СВ *X*, распределенной по нормальному закону с математическим ожиданием $a = 175$ и среднеквадратическим отклонением $\sigma = 10$. Найти плотность вероятности этой СВ; вероятность того, что только один из трех наудачу выбранных мужчин будет иметь рост менее 180 см.

7. Рост взрослых мужчин является СВ *X*, распределенной по нормальному закону с математическим ожиданием $a = 175$ и среднеквадратическим отклонением $\sigma = 10$. Найти плотность вероятности этой СВ; вероятность того, что только один из трех наудачу выбранных мужчин будет иметь рост менее 180 см.