Вариант 0

Комбинаторика
Классическая вероятность
Геометрическая вероятность
Основные теоремы (сложения, умножения, формула полной вероятности, формула Байеса)
Схема повторных испытаний (формулы Бернулли, Пуассона, локальная и интегральная теормы Муавра-Лапласа)

1. Перед магазином есть семь мест для парковки (одно около другого). Сколькими способами на этой парковке можно разместить четыре автомобиля так, чтобы

а) никакие два авто не были бы припаркованы на соседних местах;
б) между любыми двумя авто не было бы свободного места.

а) 4!; б) $4 \cdot 4!$

2. В каждой из двух урн находится 5 красных, 10 зеленых и 6 белых шаров. Случайным образом из каждой урны вынимают по одному шару. Найдите вероятность того, что выбраны два белых шара.

$\frac{4}{49}$

3. Из урны, в которой *n* зеленых и 6 белых шаров, наудачу достают два шара. Известно, что вероятность выбрать два зеленых шара равна 0,5. Найдите, сколько шаров находится в урне. 21

4. В группе 10 юношей и 6 девушек. Для дежурства на вечере путем жеребьевки выделяют 5 человек. Какова вероятность того, что в число дежурных войдет: а) хотя бы один юноша; б) ровно две девушки?

5. На отрезке $[0;3]$ наудачу выбраны два числа *x* и *y*. Найдите вероятность того, что эти числа удовлетворяют неравенствам $x^2 \le 3y \le 3x$. $\frac{1}{6}$

6. Рабочий обслуживает 3 станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что за смену первый станок не потребует внимания рабочего, равна 0,9, второй – 0,8, третий – 0,75. Найти вероятность того, что за смену:

а) только один станок потребует внимания;
б) хотя бы один станок потребует внимания;
в) только третий станок потребует внимания рабочего.

7. В канцелярии работают 4 секретаря, которые обрабатывают по 40, 10 30 и 20% исходящих документов за одно и то же время. Вероятности неверной адресации документов секретарями соответственно равны 0,01; 0,04; 0,06; 0,01. Найдите вероятность того, что один из документов, оказавшийся неверно адресованным, отправлен третьим секретарем.

0,643

8. Вероятность попадания в цель из скорострельного орудия при отдельном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 300 выстрелах число попаданий будет не менее 210, но не более 230 раз.

9. Вероятность промаха при одном выстреле по мишени равна 0,1. Сколько выстрелов надо, чтобы с вероятностью 0,9544 можно было утверждать, что относительная частота промаха отклонится от постоянной вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,03?

400

10. О событиях $A, B \subset \Omega$ известно, что $P(A) = P(\bar{B})$ и $P(A \cup B) = 4 \cdot P(A \cap B)$. Вычислить $P(A \cup B)$.

0,8

I. Теория вероятностей

1. Сформулируйте основные правила комбинаторики: «правило суммы» и «правило умножения».

2. Что называют перестановками из *n* элементов? Запишите формулу для нахождения количества перестановок из *n* элементов без повторений; с повторениями.

3. Что называют размещениями из *n* элементов по *k*? Запишите формулу для нахождения количества размещениями из *n* элементов по *k* без повторений; с повторениями.

4. Что называют сочетаниями из *n* элементов по *k*? Запишите формулу для нахождения количества сочетаний из *n* элементов по *k* без повторений; с повторениями.

5. Что называют случайным событием? Что называют достоверным событием; невозможным событием?

6. Какое событие называют противоположным событию *A*? Приведите пример.

7. Что называют суммой событий *A* и *B*? Приведите пример.

8. Что называют произведением событий *A* и *B*? Приведите пример.

9. Что называют разностью событий *A* и *B*? Приведите пример.

10. Какие события называют несовместными; попарно несовместными?

11. Что называют вероятностью события *A*? Запишите основные свойства вероятности.

12. Что называют относительной частотой события *A*? В чем заключается свойство устойчивости относительной частоты? Что называют статистической вероятностью события *A*?

13. Что называется вероятностным пространством? Какое множество называют алгеброй; σ-алгеброй? Что называют аксиоматической вероятностью события *A*?

14. Что называют условной вероятностью события *A*?

15. Какие два события называют независимыми; зависимыми? Сформулируйте теоремы умножения для зависимых и независимых событий?

16. Сформулируйте теоремы сложения для совместных и несовместных событий. Запишите формулу суммы трех совместных событий.

17. Запишите формулу полной вероятности. Запишите формулу Байеса.

18. Что называют схемой Бернулли (схемой повторных испытаний)? Приведите два примера испытаний в схеме Бернулли. Запишите формулу Бернулли.

19. Что называют схемой Бернулли (схемой повторных испытаний)? Запишите формулу Пуассона. В каких случаях она применяется? Приведите два примера испытаний в схеме Бернулли, где применялась бы формула Пуассона.

20. Сформулируйте локальную теорему Муавра-Лапласа. Запишите функцию $\varphi(x)$. Какими свойствами обладает функция $\varphi(x)$?

21. Сформулируйте интегральную теорему Муавра-Лапласа. Запишите функцию $\Phi(x)$. Какими свойствами обладает функция $\Phi(x)$?

Доказать.

1. Докажите, используя классическое определение вероятности, что если события A и B несовместны, то $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

2. Докажите, используя классическое определение вероятности, что $P(A)=1-P(\bar{A})$.

3. Докажите, что если события A и B совместны, то $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

4. Используя геометрическое определение вероятности, получите формулу условной вероятности $P(A|B)$.

5. Используя классическое определение вероятности, получите формулу условной вероятности $P(A|B)$.

6. Докажите, что если событие A не зависит от события B, то и событие B не зависит от события A. Как называют такие события?

7. Докажите формулу полной вероятности.

8. Докажите формулу Байеса.

9. Докажите, что при некотором значении m_0 вероятность $P_n(m)$, как функция натурального аргумента, рассматриваемая схеме Бернулли, достигает своего экстремального значения.

10. Зная, что вероятность $P_n(m)$, как функция натурального аргумента, рассматриваемая схеме Бернулли, достигает своего экстремального значения, докажите, что вероятнейшее число наступления события m_0 определяется формулой $np-q\le m_0\le np+p$.

11. Докажите теорему Пуассона.

12. Зная, что в каждом из n независимых испытаний событие A наступает с вероятностью p, где $0<p<1$, а $\frac{m}{n}$ − относительная частота события A, докажите, что то для любого заданного числа $\varepsilon>0$ выполняется неравенство $P_n\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$.