Числовые характеристики СВ

1. Математическое ожидание

Математическим ожиданием (средним значением) СВ называют среднее, «взвешенное» по вероятностям возможных значений, значение СВ.

$$MX,\quad M(X),\; E(X),\; M[X],\; E[X].$$

Математическим ожиданием ДСВ называют сумму произведений всех значений СВ на вероятности этих значений.

Пусть ДСВ X задана законом распределения

$\boldsymbol{X}$	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

$$MX=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$$

Если число возможных значений ДСВ X бесконечно, то

$$MX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i,$$

причем, ряд в правой части равенства предполагается сходящимся (иначе СВ X не имеет математического ожидания)

Например,

X	2	2^2	$\cdots$	2^n	$\cdots$
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2^n}$	$\cdots$

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

$$MX = \sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n} = \sum_{i=1}^{\infty} 1$$ - расходится

СВ X не имеет математического ожидания

Пример. ДСВ X задана законом распределения

X	**1**	**3**	**5**	**7**
p	0,3	0,1	0,4	0,2

Найдите MX.

$$MX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Математическим ожиданием НСВ X называют число, равное

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx$$

где $f(x)$ - плотность распределения.

Интеграл в правой части равенства предполагается абсолютно сходящимся.

Математическое ожидание СВ X - величина неслучайная (постоянная)

Пример. Плотность распределения НСВ *X* задана формулой

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{x}{8}, & 0 < x \le 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$$

Найдите математическое ожидание СВ *X*.

Свойства математического ожидания

Пусть СВ X, СВ Y.

1. $M(C) = C, \ C = const.$

2. $M(CX) = C \cdot M(X), \ C = const.$

3. $M(X+Y) = M(X) + M(Y).$

СВ X и СВ Y называют ***независимыми***, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие значения принимает другая величина. Иначе, величины называют ***зависимыми***.

Произведением независимых СВ X и Y называют СВ XY, возможные значения которой равны произведениям каждого возможного значения СВ X на каждое возможное значение СВ Y. Вероятности возможных значений СВ XY равны произведениям вероятностей значений сомножителей.

4. Если СВ X и СВ Y независимы, то

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y).$$

5. Математическое ожидание отклонения СВ X от ее математического ожидания равно 0.

$$M\left(X - M(X)\right) = 0.$$

Доказательство

СВ $\left(X - M(X)\right)$ называют отклонением СВ X от ее математического ожидания и обозначают

$$X^0 = X - M(X)$$

X^0 называют ***центрированной*** СВ.

2. Дисперсия. Среднее квадратическое отклонение

Дисперсией (рассеянием) СВ X называют математическое ожидание квадрата отклонения СВ X от ее математического ожидания.

$$DX,\ D(X),\ \sigma^2(X)$$

$$D(X) = M(X - MX)^2$$

Дисперсия характеризует разброс значений СВ X относительно ее математического ожидания.

Для ДСВ :

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - MX)^2 p_i$$

Для НСВ

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 f(x)\, dx$$

$$D(X) = M(X - MX)^2$$

$$D(X) = M\left(X^2\right) - (MX)^2$$

Для ДСВ $\quad D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - (MX)^2$

Для НСВ $\quad D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (MX)^2$

Пример. ДСВ *X* задана законом распределения

X	**1**	**3**	**5**	**7**
p	0,3	0,1	0,4	0,2

Найдите *DX.*

$$M(X) = 4$$

Пример. Плотность распределения НСВ X задана формулой

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x}{8}, & 0 < x \le 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$$

Найдите DX.

$$M(X) = \frac{8}{3} \qquad D(X) = M\left(X^2\right) - (MX)^2$$

Свойства дисперсии

Пусть СВ X, СВ Y.

1. $D\left(C\right)=0,\ C=const.$

Доказательство

2. $D\left(CX\right)=C^2\cdot D\left(X\right),\ C=const.$

Доказательство

3. Если СВ X и СВ Y независимы, то

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

Доказательство

Средним квадратическим отклонением (стандартным отклонением) СВ *X* называют

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$$

Свойства среднеквадратического отклонения

1. $\sigma(C)=0,\ C=const.$

2. $\sigma(CX)=|C|\cdot\sigma(X),\ C=const.$

3. $\sigma(C+X)=\sigma(X),\ C=const.$

3. Мода и медиана. Моменты СВ. Асиметрия и эксцесс

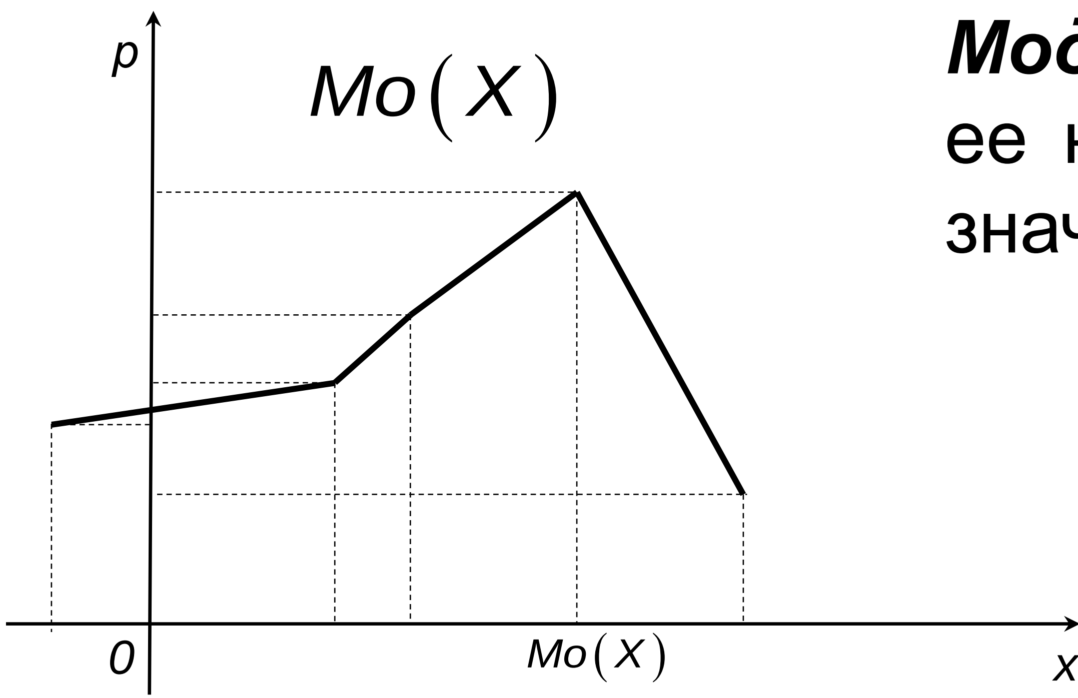
Для изучения свойств СВ, независящих от выбора масштаба измерения и положения центра группировки, исходную СВ приводят к стандартному виду: ее центрируют, т.е. записывают разность $X - M(X)$ и нормируют, т.е. делят на $\sigma(X)$.

СВ $\xi = \dfrac{X - M(X)}{\sigma(X)}$ называют стандартной СВ.

$$M\xi = M\left(\frac{X - M(X)}{\sigma(X)}\right) = 0 \qquad D\xi = D\left(\frac{X - M(X)}{\sigma(X)}\right) = 1$$

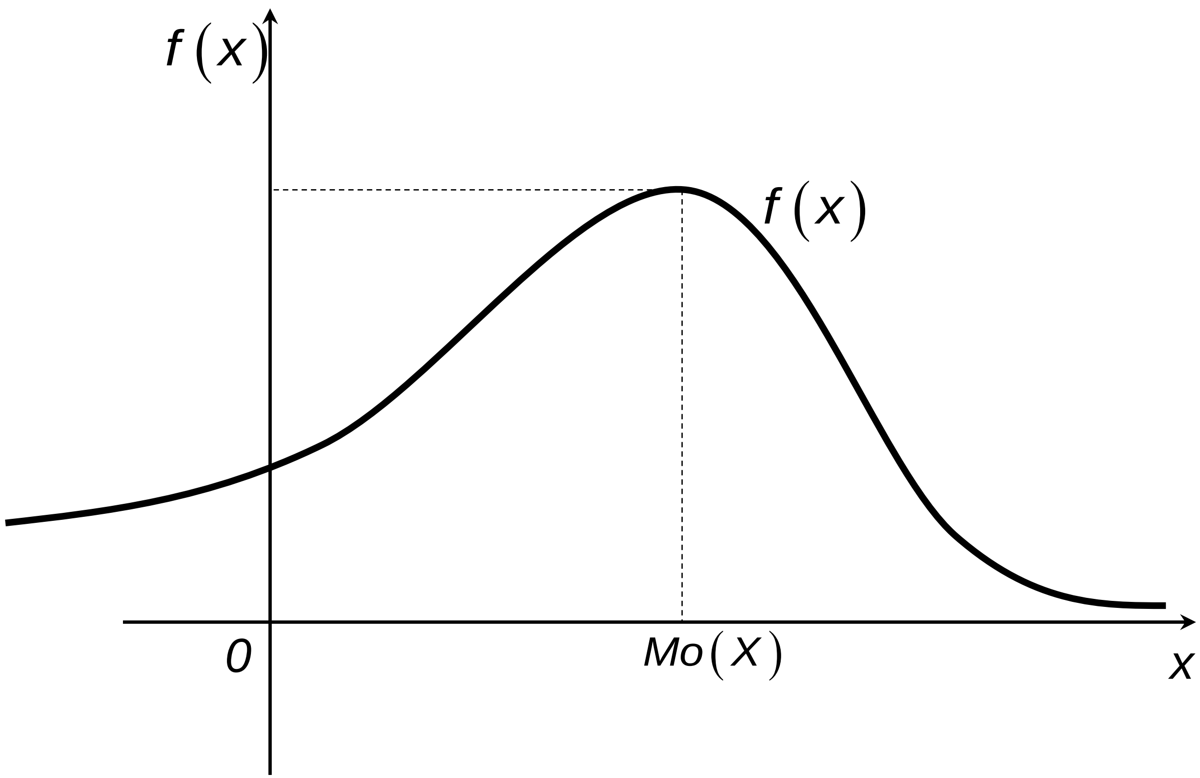
Математическое ожидание СВ X является *характеристикой положения СВ.* Такие характеристики указывают некоторое среднее, ориентировочное значение, около которого группируются все возможные значения СВ.

К характеристикам положения относят также *моду* и *медиану*.

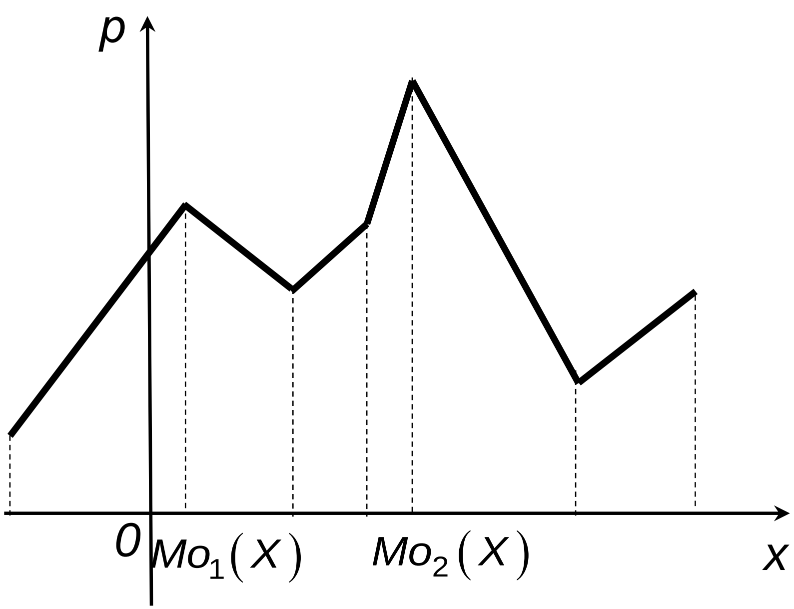


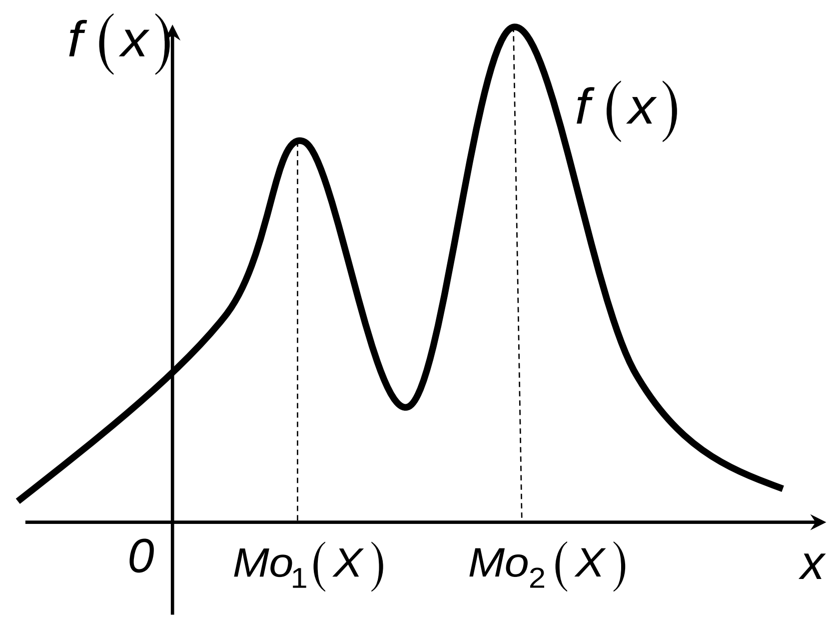
Модой ДСВ называют ее наиболее вероятное значение.

Для НСВ ***модой*** называют точку максимуму плотности распределения.

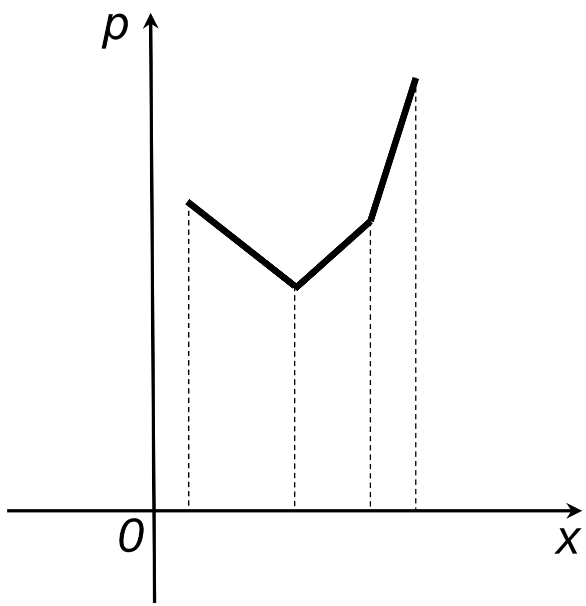


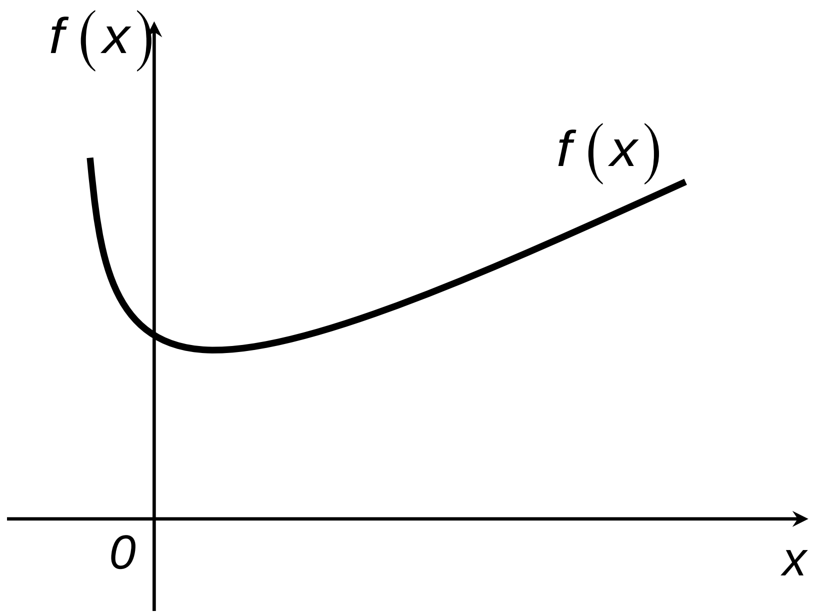
Если многоугольник распределения (кривая распределения) имеет более одного максимума, то распределение называют ***полимодальным***.





Иногда встречаются распределения, обладающие не максимумом, а минимумом. Такие распределения называют ***антимодальными***.



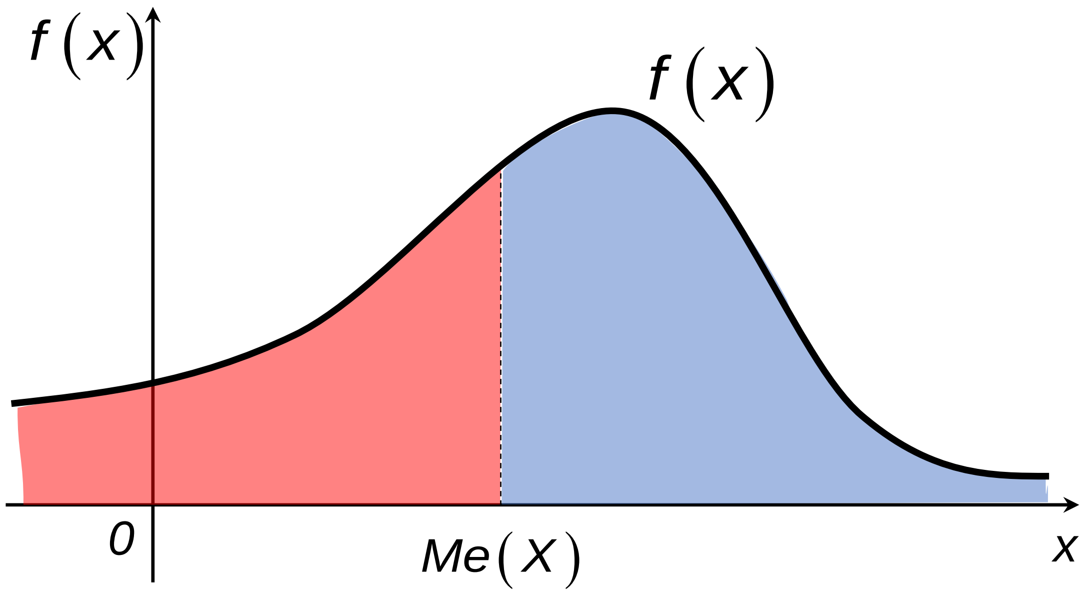


Медианой СВ X называют такое ее значение $Me(X)$, что

$$P\left(X < Me(X)\right) = P\left(X > Me(X)\right)$$

т.е. одинаково вероятно, что СВ X окажется меньше или больше $Me(X)$.

Геометрически медиана – это абсцисса точки, в которой площадь, ограниченная кривой распределения, делится пополам.



Медианой чаще пользуются для характеристики НСВ, хотя, формально, ее можно определить и для ДСВ.

Математическое ожидание и дисперсия являются частными случаями *моментов*.

Начальным моментом порядка k СВ X называют математическое ожидание *k*-й степени СВ *X*.

$$\alpha_k = M(X)^k$$

ДСВ: $$\alpha_k(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i$$

НСВ: $$\alpha_k(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\,dx$$

Центральным моментом порядка k СВ X называют

$$\mu_k = M\left(X - M(X)\right)^k.$$

ДСВ: $$\mu_k(X) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - M(X)\right)^k p_i$$

НСВ: $$\mu_k(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(x - M(x)\right)^k f(x)\,dx$$

$$\mu_1 = M\left(X - M(X)\right) = 0$$

$$\mu_2 = M\left(X - M(X)\right)^2 = D(X) = \alpha_2(X) - \left(M(X)\right)^2$$

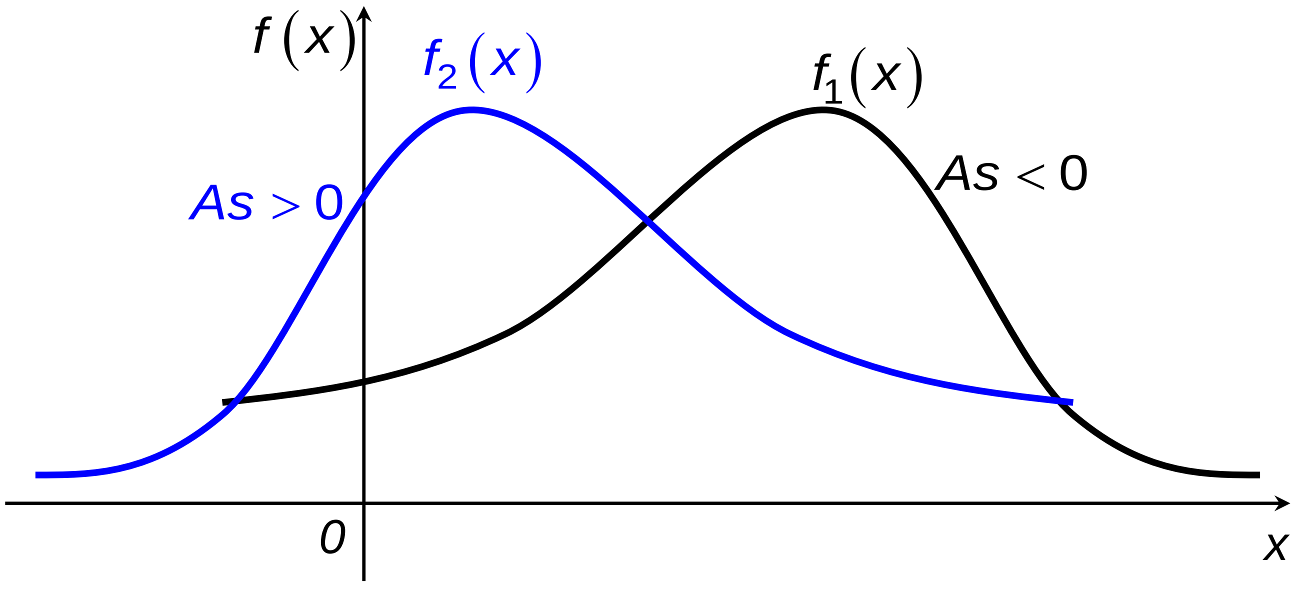
Коэффициентом ассиметрии (скошенности) СВ X называют

$$As = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{M\left(X - MX\right)^3}{\sigma^3}$$

Если $As\ X > 0$, то кривая распределения более полога справа от моды.

Если $As\ X < 0$, то кривая распределения более полога слева от моды.

$$As = \frac{\mu_3(X)}{\sigma^3(X)}$$



Коэффициентом эксцесса (островершинности) СВ X называют

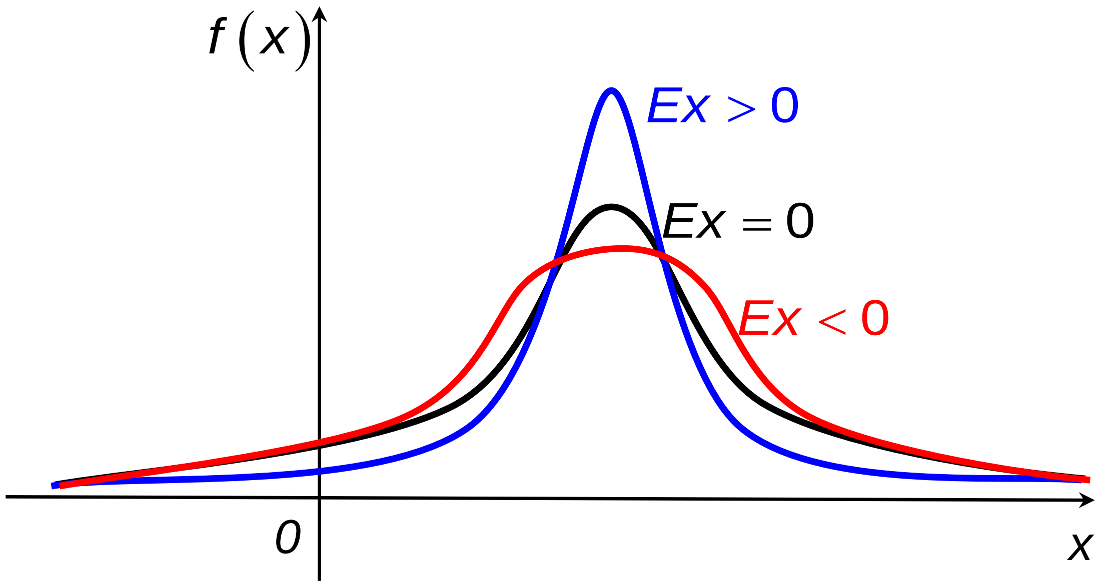
$$Ex = \frac{\mu_4(X)}{\sigma^4(X)} - 3$$

Для нормального распределения $\frac{\mu_4(X)}{\sigma^4(X)} = 3,$

а, значит, $Ex = 0.$

Для кривых, более островершинных по сравнению с нормальной, $Ex > 0.$ Для кривых более плосковершинных $Ex < 0.$

Для нормального распределения $As = 0,$ $Ex = 0.$



f(x)
Ex > 0
Ex = 0
Ex < 0
0
x

Квантилью уровня p СВ X называют решение уравнения

$$F\left(x_p\right) = p,\ 0 < p < 1$$

Квантили $x_{0,25}$, $x_{0,5}$ (медиана) и $x_{0,75}$ называют нижней квантилью, медианой, верхней квантилью соответственно.

Основные законы распределения ДСВ

1. Биномиальное распределение (Бернулли)

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью p и не появиться с вероятностью $q = 1 - p$.

СВ X - число появлений события A в n независимых испытаниях.

X	0	1	2	...	n
p	q^n	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	p^n

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

X	0	1	2	...	n
p	q^n	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	p^n

Контроль:

$$q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \ldots + p^n = (q+p)^n = 1$$

ДСВ X имеет ***биномиальное распределение*** (***распределена по биномиальному закону***), если она принимает значения 0, 1, …, n соответственно с вероятностями

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \ m = \overline{0, n}.$$

Теорема. Если ДСВ X имеет биномиальное распределение, то

$$MX = np, \quad DX = npq,$$

где n – число испытаний, p – вероятность появления события в одном испытании.

Пример. Найдите среднее значение и дисперсию числа выигрышных лотерейных билетов, если приобретено 20 билетов, причем вероятность выигрыша по одному билету равна 0,3.

СВ X - число выигрышных билетов из двадцати, распределена по биномиальному закону.

2. Распределение Пуассона

ДСВ X распределена ***по закону Пуассона***, если она принимает значения 0, 1, …, *m*, … соответственно с вероятностями

$$P(m) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}, \quad \lambda = np.$$

Распределение Пуассона является предельным для биномиального при $n \to \infty$, $p \to 0$, так, что $\lambda = np = const$, λ - средняя интенсивность.

Закон Пуассона – закон редких явлений.

Пусть СВ X распределена по закону Пуассона с параметром λ.

X	0	1	…	m	…
p	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!}$	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!}$	…	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}$	…

Контроль: $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}=$

X	0	1	$\cdots$	m	$\cdots$
p	$\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!}$	$\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!}$	$\cdots$	$\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}$	$\cdots$

Найдем математическое ожидание и дисперсию СВ *X*, распределенной по закону Пуассона.

X	0	1	$\cdots$	m	$\cdots$
p	$\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!}$	$\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!}$	$\cdots$	$\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}$	$\cdots$

По закону ***Пуассона*** распределены, например, такие СВ, как

- число опечаток в большом тексте;
- число бракованных изделий в большой партии;
- число частиц радиоактивного распада, зарегистрированных счетчиком в течении некоторого времени *t*;

и др.

Пример. Сообщение содержит 1000 символов. Вероятность искажения одного символа равна 0,004. Найдите среднее число искаженных символов и вероятность того, что будет искажено не более двух символов.

СВ X - число искаженных символов.

СВ X распределена по закону Пуассона.

3. Геометрическое распределение

Производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания при каждом выстреле равна *p*.

СВ *X* – число израсходованных патронов, считая, что стрелять можно неограниченное количество раз.

X	1	2	…	m	…
p	p	qp	…	$q^{m-1}p$	…

X	1	2	$\cdots$	m	$\cdots$
p	p	qp	$\cdots$	$q^{m-1}p$	$\cdots$

Контроль:

ДСВ X распределена ***по геометрическому закону***, если она принимает значения 1, 2, …, m, … соответственно с вероятностями

$$P(m) = q^{m-1}p.$$

Геометрическое распределение имеют СВ, равные числу опытов в схеме Бернулли, проведенных до первого успеха. Вероятность успеха в одном испытании равна *p.*

По геометрическому закону распределены, например, такие СВ, как

- число выстрелов до первого попадания;
- число испытаний прибора до первого отказа;
- число бросков правильной монеты до первого появления «герба»

и др.

X	1	2	$\dots$	m	$\cdots$
p	p	qp	$\dots$	$q^{m-1}p$	$\dots$

Пусть ДСВ X распределена по геометрическому закону.

$$MX = \frac{1}{p},\ DX = \frac{q}{p^2},\ \sigma X = \frac{\sqrt{q}}{p}$$

Пример. Вероятность попадания в цель при отдельном выстреле для данного стрелка равна 0,2. Найти математическое ожидание и дисперсию СВ X – числа израсходованных патронов, если стрельба ведется до первого попадания.

Производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания при каждом выстреле равна *p*.

СВ *X* – *число промахов* до первого попадания, считая, что стрелять можно неограниченное количество раз.

X	0	1	...	m	...
p	p	qp	...	$q^m p$	...

Контроль: $0 + pq + pq^2 + \ldots + pq^{m-1} + \ldots = 1$

$$= p\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^m + \ldots\right) = p\frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1$$

$$MX = \frac{q}{p}, \quad DX = \frac{q}{p^2}, \quad \sigma X = \frac{\sqrt{q}}{p}$$