Основные теоремы

1. Теоремы умножения

Событие *A* называют ***независимым*** от события *B*, если появление события *B* не изменяет вероятность появления события *A.*

Иначе, событие *A* называют ***зависимым*** от события *B*.

Вероятность события *A*, найденную с учетом того, что произошло событие *B*, называют ***условной вероятностью***.

$$P(A/B) \quad P(A|B) \quad P_B(A)$$

Пример. Правильную игральную кость подбрасывают один раз.

$$\Omega = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$$

A – выпало четное число очков

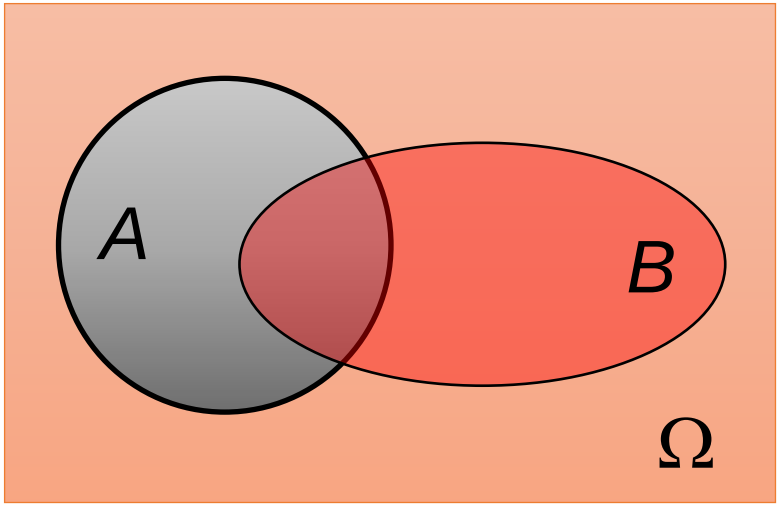
B – выпало число очков, не более трех

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$A \mid B$ – выпало четное число очков, если известно, что выпало не более трех очков

$$P(A \mid B) =$$

Пусть в области Ω наудачу выбирают точку.



A – точка принадлежит области *A*

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

формула для нахождения условной вероятности

Получите самостоятельно это формулу в схеме шансов (классическое определение вероятности).

Пример. В урне 3 белых и 3 черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару не возвращая их обратно. Найдите вероятность появления белого шара при втором испытании, если при первом испытании был извлечен черный шар.

A – в первом испытании выбран черный шар;

B – во втором испытании выбран белый шар

$B \mid A$ – во втором испытании белый шар, если в первом – черный

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

Теорема. Вероятность совместного наступления событий *A* и *B* равна

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B|A)=P(B)\cdot P(A|B)$$

Теорема. Вероятность совместного наступления событий $A_1,\ A_2,\ldots,A_n$ равна

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=$$

$$=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1\cdot A_2)\cdot\ldots\times$$

$$\times P(A_n|A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_{n-1})$$

Пример. В урне 4 белых и 3 синих и 2 черных шара. Наудачу последовательно вынимают три шара. Найдите вероятность того, что первый шар будет белым, второй – синим, третий – черным.

$$9\ шаров = 4\ бел + 3\ син + 2\ чер$$

A – первый шар белый; B – второй шар синий;

C – третий шар черный

ABC – первый шар будет белым, второй – синим, третий – черным

Событие *A* называют ***независимым*** от события *B*, если $P(A|B)=P(A)$.

Теорема. Если событие *A* не зависит от события *B*, то и событие *B* не зависит от события *A.*

В этом случае события *A* и *B* называют ***независимыми***.

Теорема. Если события A и B независимы, то независимы события $\bar{A}$ и B, $\bar{B}$ и A, $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

Теорема. Если события A и B независимы, то вероятность их совместного наступления равна

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

События $A_1, A_2, ..., A_n$ называют ***независимыми*** (***независимыми в совокупности***), если любое из них не зависит от произведения любого числа остальных событий и от каждого в отдельности.

Иначе, события $A_1, A_2, ..., A_n$ называют ***зависимыми***.

Теорема. Вероятность совместного наступления независимых событий $A_1, A_2, ..., A_n$ равна

$$P\left(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n\right) = P\left(A_1\right) \cdot P\left(A_2\right) \cdot ... \cdot P\left(A_n\right)$$

Для независимости в совокупности недостаточно попарной независимости событий.

Пример. Производится выбор наудачу флага из четырех имеющихся: красного, синего, белого и трехцветного (красно-сине-белого). Исследовать на независимость события

К – выбранный флаг имеет ***красный*** цвет;

С – выбранный флаг имеет ***синий*** цвет;

Б – выбранный флаг имеет ***белый*** цвет;

Событие *A* называют ***независимым*** от события *B,* если $P(A\,|\,B) = P(A)$.

2. Теоремы сложения

Если события A и B **несовместны** $\left(AB=\varnothing\right)$, то

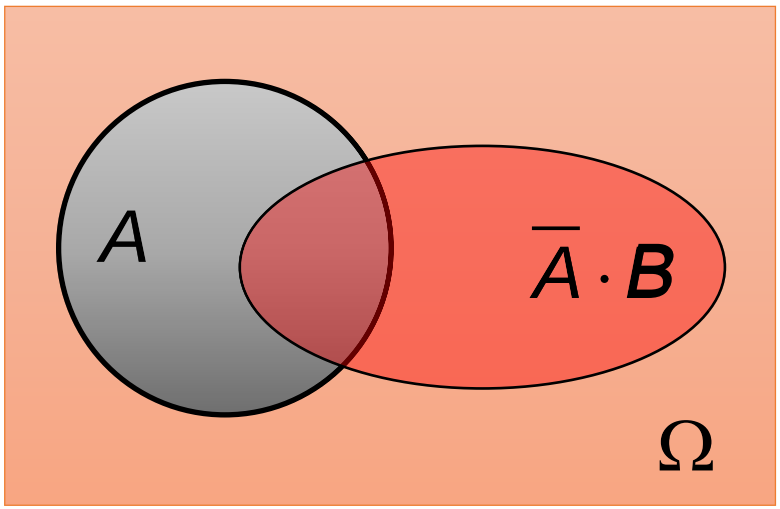
$$P\left(A+B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)$$

Теорема. Если события A и B совместны, то вероятность появления хотя бы одного из них равна

$$P\left(A+B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cdot B\right)$$

Теорема. Если события *A* и *B* совместны, то вероятность появления хотя бы одного из них равна

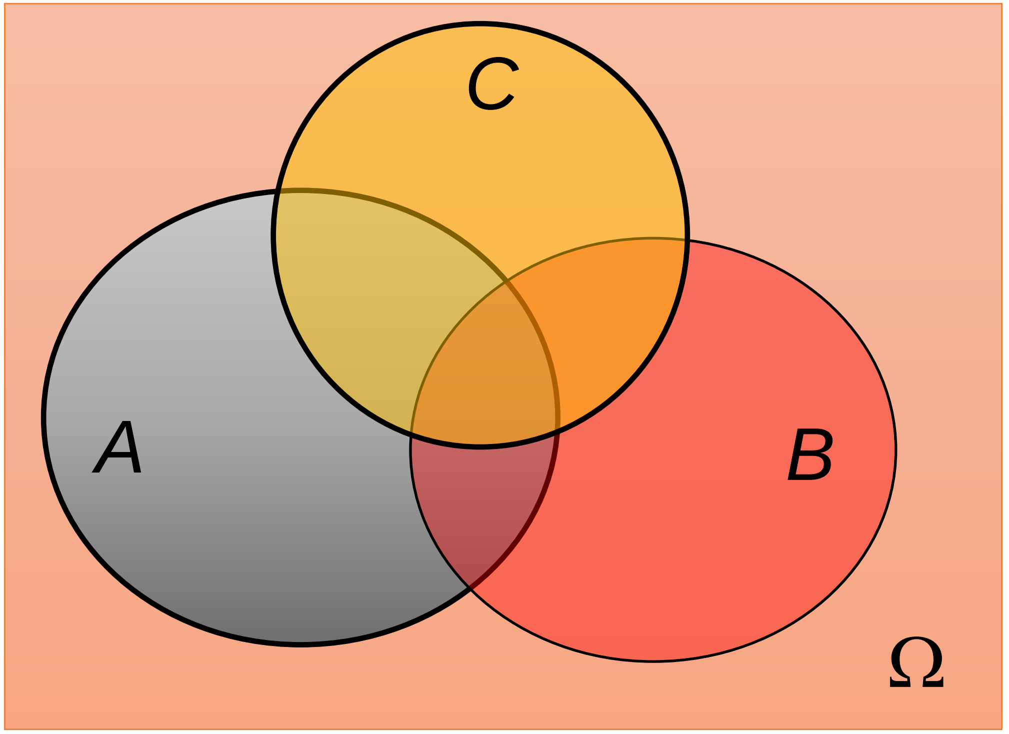
$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$$



Пример. Бросают две игральные кости. Найдите вероятность появления хотя бы одной «тройки».

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-$$

$$-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$



3. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Пусть событие A может наступить в результате появления одного из событий H_1, H_2, ..., H_n, которые образуют полную группу событий.

Пусть известны вероятности событий $H_1, H_2, ..., H_n$ и условные вероятности события A

$$P(A|H_1), P(A|H_2), \; ..., P(A|H_n)$$

Тогда вероятность события A равна

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + ...$$

$$+P(H_n)P(A|H_n)$$

формула полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \ldots$$

$$+P(H_n)P(A|H_n)$$

формула полной вероятности

События $H_i, i = \overline{1, n}$ называют ***гипотезами***.

$$P(H_1) + P(H_2) + \ldots + P(H_n) = 1$$

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) + \ldots$$

$$+P(H_n)P(A \mid H_n)$$

формула полной вероятности

То́мас Ба́йес (1702 - 1761) — британский математик, пресвитерианский священник.

Математические интересы Байеса относились к ***теории вероятностей***. Он сформулировал и решил одну из основных задач этого раздела математики (***теорема Байеса***). Работа, посвящённая этой задаче, была опубликована в 1763 году, посмертно.

Формула Байеса, дающая возможность оценить вероятность событий эмпирическим путём, играет важную роль в современной математической статистике и теории вероятностей.

Если событие A ***произошло*** в результате появления одного из событий H_1, H_2, ..., H_n, которые образуют полную группу событий, то вероятность гипотезы $H_k, k = \overline{1, n}$

$$P(H_k \mid A) = \frac{P(H_k) P(A \mid H_k)}{P(A)},$$

$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A \mid H_i)$ - полная вероятность

формула Байеса

$$P(H_k | A) = \frac{P(H_k)P(A | H_k)}{P(A)},$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A | H_i)$$ - полная вероятность

Пример. На общий конвейер поступают детали, изготовленные на трех автоматах. Первый автомат изготавливает 30% всех поступающих деталей, второй – 50%, третий – 20%. Вероятность изготовления стандартной детали первым автоматом равна 0,8, вторым – 0,6, третьим – 0,9.

а) Найдите вероятность того, что случайно взятая с конвейера деталь оказалась стандартной.

Пример. На общий конвейер поступают детали, изготовленные на трех автоматах. Первый автомат изготавливает 30% всех поступающих деталей, второй – 50%, третий – 20%. Вероятность изготовления стандартной детали первым автоматом равна 0,8, вторым – 0,6, третьим – 0,9.

б) Случайно взятая с конвейера деталь оказалась стандартной. Найдите вероятность того, что она изготовлена третьим автоматом.

Схема повторных испытаний

1. Формула Бернулли

Пусть проводится несколько испытаний, в каждом из которых может появиться событие A, причем вероятность появления события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний. Такие испытания называют ***независимыми***.

Пусть проводится серия из n независимых испытаний в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью p и не появиться с вероятностью $q = 1 - p$.

Описанную схему называют ***схемой повторных испытаний*** или ***схемой Бернулли***.

Якоб Берну́лли (нем. *Jakob Bernoulli*, 1655 - 1705) — швейцарский математик. Один из основателей теории вероятностей и математического анализа. Старший брат Иоганна Бернулли, совместно с ним положил начало вариационному исчислению. Доказал частный случай закона больших чисел - теорему Бернулли. Профессор математики Базельского университета (с 1687 года). Иностранный член Парижской академии наук (1699) и Берлинской академии наук (1702).

Теорема. Пусть в каждом из n независимых испытаний событие A наступает с вероятностью p, тогда вероятность того, что событие A наступит m раз равна

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad q = 1 - p$$

Формула Бернулли

Формулу Бернулли используют при небольших сериях испытаний $(n < 100)$ и больших p и q $(p > 0{,}1;\, q > 0{,}1)$.

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad q = 1 - p$$

Пример. Тест состоит из 10 вопросов и включает 4 варианта ответа на каждый вопрос. Один из ответов является верным, а остальные − нет. Какова вероятность случайно дать правильный ответ:

а) на один вопрос;

A – на один вопрос дан правильный ответ

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad q = 1 - p$$

Пример. Тест состоит из 10 вопросов и включает 4 варианта ответа на каждый вопрос. Один из ответов является верным, а остальные − нет. Какова вероятность случайно дать правильный ответ:

б) на два вопроса;

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad q = 1 - p$$

Пример. Тест состоит из 10 вопросов и включает 4 варианта ответа на каждый вопрос. Один из ответов является верным, а остальные − нет. Какова вероятность случайно дать правильный ответ:

в) не более, чем на два вопроса;

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad q = 1 - p$$

Пример. Тест состоит из 10 вопросов и включает 4 варианта ответа на каждый вопрос. Один из ответов является верным, а остальные − нет. Какова вероятность случайно дать правильный ответ:

г) менее, чем на два вопроса;

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad q = 1 - p$$

Пример. Тест состоит из 10 вопросов и включает 4 варианта ответа на каждый вопрос. Один из ответов является верным, а остальные − нет. Какова вероятность случайно дать правильный ответ:

д) более, чем на два вопроса;

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad q = 1 - p$$

Пример. Тест состоит из 10 вопросов и включает 4 варианта ответа на каждый вопрос. Один из ответов является верным, а остальные − нет. Какова вероятность случайно дать правильный ответ:

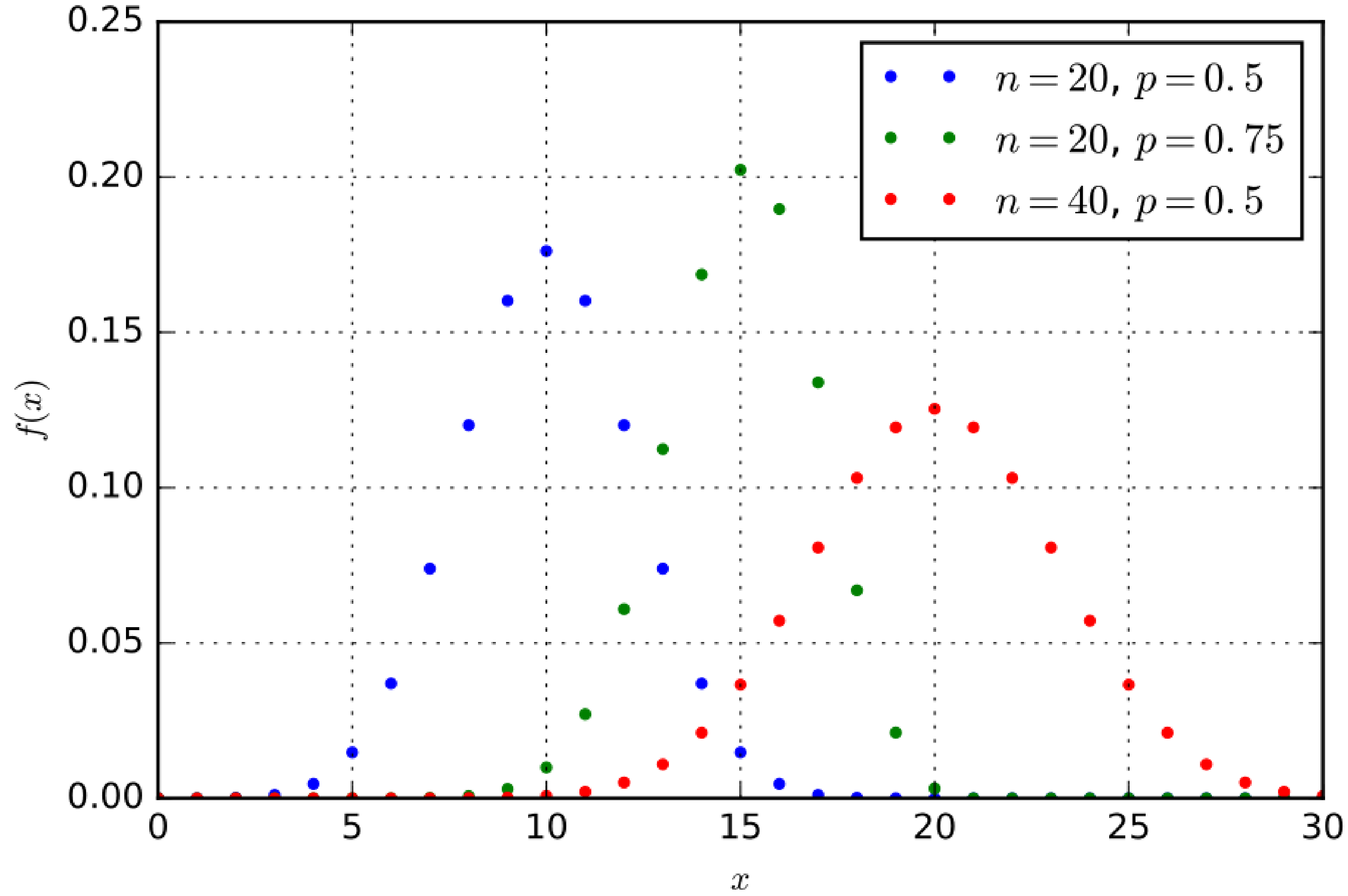
е) не менее, чем на два вопроса?

Вероятнейшее число появления события

Число m_0 называется ***наивероятнейшим (вероятнейшим) числом наступления*** события A в схеме Бернулли, если вероятность того, что событие A наступит m_0 раз не меньше вероятности остальных, возможных исходов опыта.

Теорема. Пусть в каждом из n независимых испытаний событие A может появиться с вероятностью p. Тогда для наивероятнейшего числа m_0 наступлений события A справедливо двойное неравенство:

$$np - q \le m_0 \le np + p, \quad q = 1 - p.$$


0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
0
5
10
15
20
25
30
$f(x)$
x
$n = 20,\ p = 0.5$
$n = 20,\ p = 0.75$
$n = 40,\ p = 0.5$

$$np - q \le m_0 \le np + p, \quad q = 1 - p$$

Пример. В результате каждого визита страхового агента договор заключается с вероятностью 0,1. Найти наивероятнейшее число заключенных договоров после 25 визитов.