Случайные величины

1. Основные определения

Случайная величина (СВ) – величина, которая в результате испытания принимает любое из возможных своих значений, заранее неизвестное и зависящее от случая.

$X, \ Y, \ \ldots \ \xi$ (кси) η (эта) θ (тэта)

СВ

Дискретные (ДСВ)

Непрерывные (НСВ)

ДСВ **–** СВ, которая принимает отдельные, изолированные друг от друга значения. Их может быть как конечное, так и бесконечное число.

X – число очков, выпавшее на игральной кости при одном подбрасывании $\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$

Y – число выстрелов до первого попадания

$$\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ ....\}$$

НСВ **–** СВ, которая принимает любые значения из некоторого числового промежутка.

ξ – время безотказной работы устройства

$$\xi \in \left(0;\ +\infty\right)$$

η – рост случайного человека

$$\eta \in \left(0;\ 3\right)$$

2. Закон распределения ДСВ

Законом распределения СВ Х называют всякое соответствие между значениями СВ и вероятностями этих значений.

О СВ говорят, что она ***распределена по данному закону*** или ***подчинена данному закону распределения***.

Пусть ***X*** – ДСВ, которая принимает значения

$$x_1,\ x_2,\ \ldots.,\ x_n$$

соответственно, с вероятностями

$$p_1,\ p_2,\ \ldots.,\ p_n$$

Законом (рядом) распределения ДСВ X называют соответствие между значениями СВ и вероятностями их появления.

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

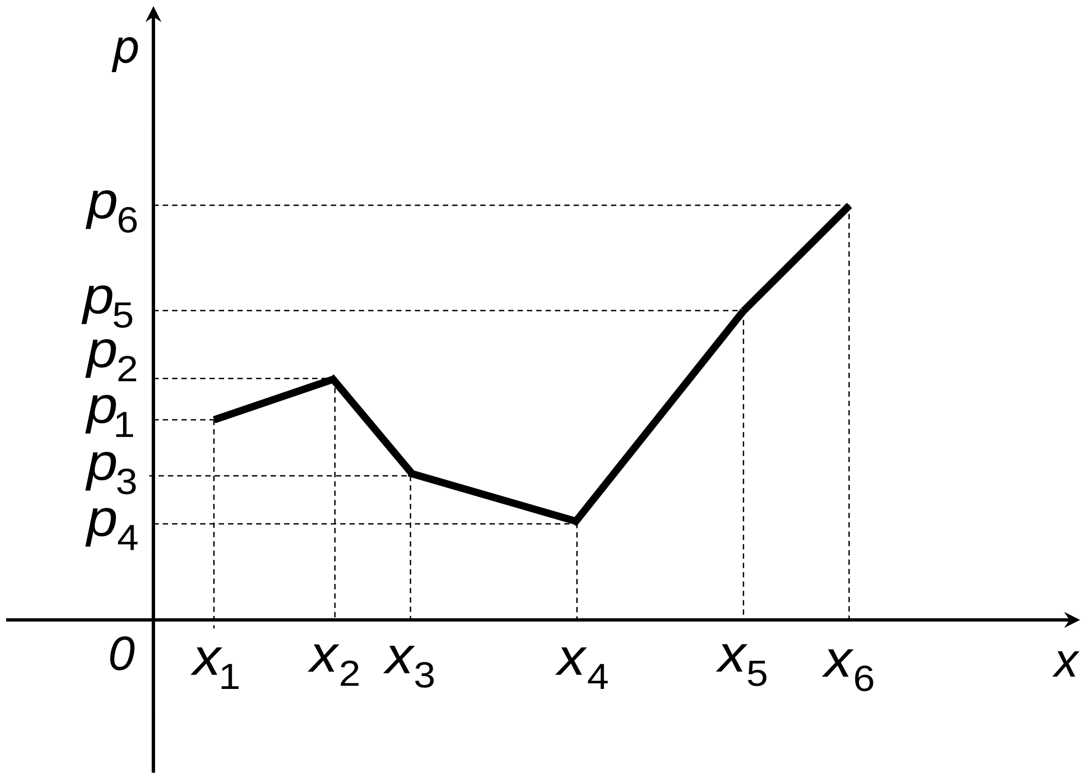
События $\{X = x_1\}$, $\{X = x_2\}$ ... $\{X = x_n\}$ –

полная группа событий $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Закон распределения ДСВ можно изобразить графически.

Полигоном (многоугольником) распределения ДСВ называют ломаную, соединяющую в системе координат xOp точки с координатами $(x_i;\ p_i)$, $i = \overline{1,n}$.

$\boldsymbol{X}$	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n



Пример. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 50 ден.ед. и 10 выигрышей по 5 ден.ед. Найдите закон распределения стоимости выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

СВ $\boldsymbol{X}$ – стоимость выигрыша по одному билету

3. Функция распределения СВ

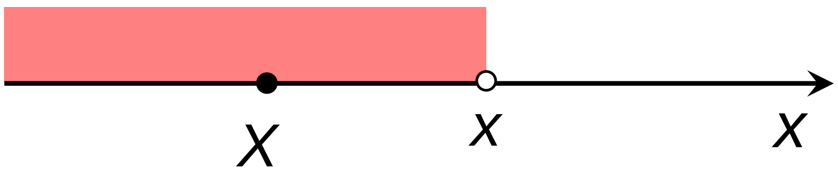
Для характеристики поведения НСВ используют вероятность события $\{X < x\}$, где $x \in \boldsymbol{R}$.

$P(X < x)$ - функция переменной *x*.

Функцией распределения (интегральной функцией распределения) СВ X называют функцию $F(x)$, которая каждому числу $x \in \boldsymbol{R}$ ставит в соответствие вероятность события $P(X < x)$.

$$F(x) = P(X < x)$$

Геометрически $F(x) = P(X < x) -$ вероятность того, что СВ X попадет в интервал $(-\infty;\ x)$.



Свойства функции распределения

1. $0 \le F(x) \le 1,\ x \in \boldsymbol{R}$.

2. $F(x)$ - неубывающая функция, т.е. если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$.

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1.$

4. $P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$

Доказательство

5. $F(x)$ непрерывна слева, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0^-} F(x) = F(x_0).$

6. $P\left(X \geq x\right) = 1 - F\left(x\right).$

Доказательство

Рассмотренные свойства справедливы как для ДСВ, так и для НСВ.

Пусть СВ X - НСВ.

С помощью функции распределения можно дать более точное определение НСВ.

НСВ – СВ, функция распределения которой непрерывна в любой точке и дифференцируема всюду, кроме, может быть, конечного числа точек.

7. Если СВ X – НСВ, то $P\left(X=a\right)=0$.

Доказательство

8. Если СВ X – НСВ, то

$$P\left(a \le X < b\right) = P\left(a < X \le b\right) = P\left(a < X < b\right) =$$

$$= P\left(a \le X \le b\right).$$

Доказательство

Каждая функция распределения является непрерывной слева и удовлетворяющей условиям $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$

Верно и обратное утверждение: каждая функция, удовлетворяющая указанным условиям, может рассматриваться как функция распределения некоторой СВ.

Пример. Функция распределения НСВ X задана формулой

$$F(x)=\begin{cases} ae^{x}, & x\le 0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$$

Найдите неизвестный параметр a; вероятность попадания СВ X на интервал (-1; 2). Постройте график функции.

Используя свойства функции распределения, можно показать, что для ДСВ функция распределения кусочно-постоянна, имеет скачки p_i в точках разрыва x_i и непрерывна слева в этих точках.

Пример. ДСВ X задана законом распределения

X	**1**	**3**	**5**	**7**
p	0,3	0,1	0,4	0,2

Найдите функцию распределения СВ X, постройте ее график, найдите вероятность попадания СВ X на отрезок $\left[2;5\right]$.

4. Плотность распределения

Т.к. НСВ имеет непрерывную функцию распределения $F(x)$, дифференцируемую везде, за исключением, может быть, конечного числа точек, то для нее существует $F'(x)$.

Плотностью распределения вероятности (плотность, плотность распределения, дифференциальная функция распределения) НСВ называют $F'(x)$.

$$f(x) = F'(x) \quad \left(p(x) = F'(x)\right)$$

$$f(x) = F'(x) \Rightarrow f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x}$$

$f(x)$ – средняя вероятность, которая приходится на единицу длины интервала $(x;\ x+\Delta x)$.

По свойству предела

$$f(x)\Delta x + o(\Delta x)\Delta x = P(x < X < x + \Delta x)$$

$$P(x < X < x + \Delta x) \approx f(x)\Delta x$$

Кривую, изображающую плотность распределения СВ, называют ***кривой распределения.***

Плотность, так же как и функция распределения, является одной из форм закона распределения, но характеризует ***только*** НСВ.

Свойства плотности распределения

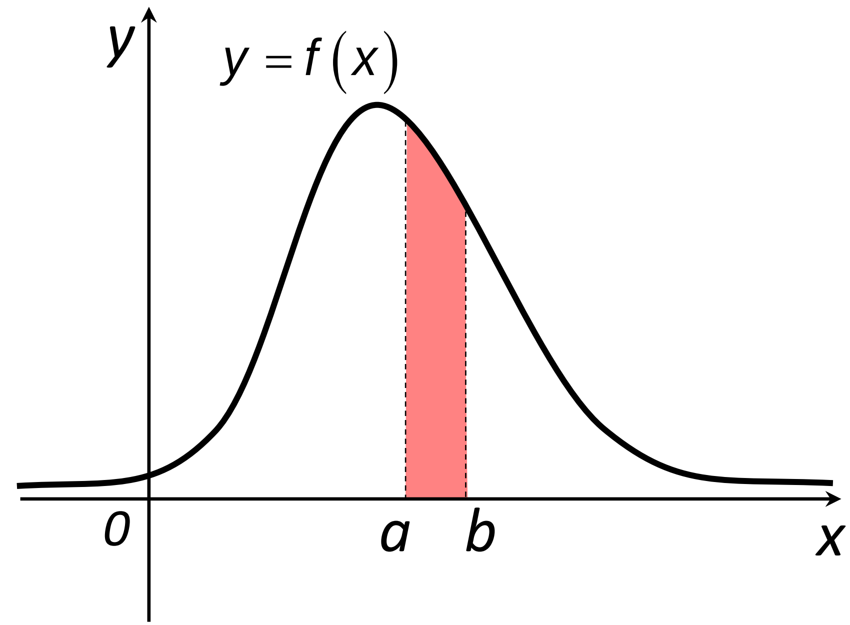
1. $f\left(x\right) \geq 0,\ x \in \boldsymbol{R}.$

Кривая распределения расположена не ниже оси Ox, но может принимать сколь угодно большие значения.

Доказательство

$$2.\; P\left(a < X < b\right) = \int\limits_a^b f\left(x\right)dx.$$

Доказательство



Геометрически, вероятность попадания СВ X в интервал $\left[a;\ b\right]$ равна площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой распределения, прямыми $x = a,\ x = b,\ y = 0.$

3. $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$

Доказательство.

4. (*Условие нормировки плотности*) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$

Доказательство

Геометрически условие нормировки означает, что площадь фигуры, ограниченной кривой распределения и осью *Ox*, равна 1.

Пример. Плотность распределения НСВ X задана на всей оси Ox равенством

$$f(x) = \frac{2c}{1+x^2}$$

Найдите неизвестный параметр c; функцию распределения $F(x)$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$