Белорусский государственный университет
ФАКУЛЬТЕТ РАДИОФИЗИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
Кафедра системного анализа и компьютерного моделирования

МОДЕЛИРОВАНИЕ БИОФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ

**методические указания
к лабораторным работам**

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее издание представляет собой руководство к лабораторному практикуму по спецкурсу «Моделирование биофизических систем». Имитационное моделирование в настоящее время широко используется для решения задач выбора оптимального плана проведения физического эксперимента, для оценки эффективности реализуемых в измерительной системе процедур, а также для обработки результатов измерений. При построении имитационных моделей физико-технических систем возникает задача генерации случайных потоков событий, имеющих сложную стохастическую природу. Цель настоящего практикума – освоение аппарата моделирования случайных потоков, которые наиболее часто используются в качестве моделей последовательностей сигналов, возникающих в реальных экспериментах. Тематика практикума охватывает алгоритмы программной генерации случайных потоков: потока Пуассона с переменной интенсивностью и потока Кокса. Большое внимание уделено методам статистической проверки разработанных программных генераторов. Приведенные в руководстве теоретические сведения представляют собой краткий справочник по моделированию случайных потоков.

Лабораторная работа № 1

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТОКА ПУАССОНА

Цель работы. Практическое освоение алгоритмов программной генерации потока Пуассона и методов статистической проверки разработанного генератора.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ

Теоретическое описание потока Пуассона. Поток Пуассона можно определить с помощью потока Бернулли. Однородный поток Бернулли (парциальные плотности $s(t)$ одинаковы и нормированы на интервале наблюдения Ω), у которого число источников v случайно и подчиняется дискретному распределению Пуассона

$$P\{v = k\} = \frac{\Lambda^k}{k!} exp(-\Lambda),\ k = 0,1, \dots;\ \Lambda > 0, \quad (1.1)$$

будем называть потоком Пуассона. Поток Пуассона полностью определяется своей интенсивностью $f_1(t) = \lambda(t) = \Lambda s(t)$. Отсюда можно получить выражение для среднего числа событий потока Λ на интервале моделирования Ω:

$$\Lambda = \int_\Omega \lambda(t) dt \quad (1.2)$$

Корреляционная функция потока Пуассона имеет вид

$$f_2(t_1, t_2) = f_1(t_1) f_2(t_2) = \lambda(t_1)\lambda(t_2). \quad (1.3)$$

Распределение числа событий на интервале наблюдения Ω для потока Пуассона задается распределением Пуассона (1.1).

Особое место потока Пуассона среди различных типов потоков обусловлено в первую очередь тем фактом, что в результате функционирования сложных систем суперпозиция большого числа независимых случайных потоков произвольных типов приближается к пуассоновскому [2].

Моделирование потока Пуассона.

Общая схема моделирования потока Пуассона, основанная на его параметрическом задании [1, 2].

Пусть необходимо получить реализацию потока с интенсивностью $\lambda(t)$ на интервале $\Omega = [T_0; T]$. Предположим i-1 событие потока наступило в моменты времени $t_1, \dots, t_{i-1}$. Для моделирования $i-$го события получаем реализацию z случайной величины, равномерно распределенной на интервале $[0; 1]$. Если $z < d_i$ (где

$$d_i = 1 - exp\left\{-\int_{t_{i-1}}^{T} \lambda(x) dx\right\}, \quad (1.4)$$

вероятность наступления $i-$го события в данной реализации потока), то по функции распределения момента наступления $i-$го события

$$F(t_i | t_1, \dots, t_{i-1}) = \frac{1}{d_i}\left(1 - exp\left\{-\int_{t_{i-1}}^{t_i} \lambda(x) dx\right\}\right) \quad (1.5)$$

методом обратных функций получаем значение точки t_i. В противоположном случае моделирование потока на Ω заканчивается.

В случаях, когда выражения (1.4) и (1.5) аналитически не разрешимы, можно применять специальный метод моделирования, основанный на прореживании потока с более высокой интенсивностью.

Алгоритм моделирования потока Пуассона, основанный на использовании процедуры прореживания потока с большей интенсивностью.

Выбираем вспомогательный пуассоновский поток B с интенсивностью $\beta(t) \geq \lambda(t)$ на заданном интервале Ω, который можно просто моделировать (например, $\beta(t) = \beta =$

$const$), и получаем моменты наступления событий $t_1, t_2, \dots$ этого потока. Для каждого t_i получаем реализацию γ_i случайной величины, равномерно распределенной на интервале $[0; \beta(t_i)]$. Если $\gamma_i \le \lambda(t_i)$, то t_i является событием потока с интенсивностью $\lambda(t)$. В противном случае t_i теряется. Чтобы увеличить эффективность данного метода моделирования (относительное число полезных генераций при получении одной реализации потока), можно применить следующую модификацию. После очередного момента наступления события искомого потока в точке τ корректируем интенсивность потока B так, чтобы $\beta_\tau(t) \ge \lambda(t)$ только на интервале $[\tau; T]$. Например, при генерации потока с убывающей интенсивностью $\lambda(t)$, для моделирования $i -$ го события, в качестве интенсивности потока B на интервале $[t_{i-1}; T]$ можно взять $\beta = \lambda(t_{i-1})$.

Построение оценок статистических характеристик потока по набору его реализаций.

Для тестирования разработанного алгоритма моделирования случайного потока необходимо выполнить сравнение оценок статистических характеристик потока, построенных по набору его смоделированных реализаций, с соответствующими им теоретическими зависимостями. Для получения оценок статистических характеристик случайного потока с приемлемым уровнем статистического шума необходимо использовать достаточно большое количество реализаций моделируемого потока. В рамках лабораторного практикума рассматривается три статистических характеристики потока: *интенсивность, корреляционная функция* и *распределение числа событий случайного потока на интервале наблюдения*.

Для построения *оценки интенсивности случайного потока* интервал моделирования потока Ω разобьем на m неперекрывающихся подинтервалов. В качестве оценки интенсивности потока на i-м подинтервале можно использовать среднее число событий потока в единицу времени, рассчитываемое в соответствии с выражением:

$$\lambda_i^* = \frac{n_i}{N \cdot \Delta t}, i = 1,2, \dots, m, \tag{1.6}$$

где n_i – количество событий, попавших в i-й подинтервал при N-кратном моделировании потока, Δt – ширина подинтервала.

Для построения *оценки корреляционной функции* область задания потока Ω разобьем на m неперекрывающихся интервалов шириной Δt. В качестве оценки корреляционной функции K_{ij}^* для отдельной реализации потока можно использовать выражения:

$$\left.\begin{aligned} K_{ij}^* &= \frac{n_i n_j}{(\Delta t)^2}, \quad & i \ne j \\ K_{ij}^* &= \frac{n_i(n_j - 1)}{(\Delta t)^2}, \quad & i = j \end{aligned}\right\}, \tag{1.7}$$

если поток является нестационарным, и

$$\left.\begin{aligned} K_l^* &= \frac{1}{m-l} \sum_{i=1}^{m-l} \frac{n_i n_{i+l}}{(\Delta t)^2}, \quad i \ne 0 \\ K_0^* &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i(n_i - 1)}{(\Delta t)^2} \end{aligned}\right\}. \tag{1.8}$$

для стационарных потоков, у которых корреляционная функция $f_2(t_1, t_2) = f_2(t_2 - t_1) = f_2(\tau)$. В выражениях (1.7) и (1.8) n_i и n_j – количество событий, попавших соответственно в $i -$ й и $j -$ й подинтервалы для отдельной реализации потока.

Итоговая оценка корреляционной функции строится путем усреднения оценок, полученных для отдельных реализаций случайного потока.

Если случайный поток является нестационарным, то его корреляционная функция представляет собой поверхность в трехмерном пространстве. Для оценки качества разработанного алгоритма моделирования в данном случае удобнее использовать графическое представление сечения корреляционной функции, для построения которого один из ее временных аргументов фиксируется в значение, соответствующее максимуму интенсивности случайного потока на Ω.

Распределение числа событий случайного потока на интервале наблюдения представляет собой зависимость вероятности появления определенного числа событий рассматриваемого потока на области Ω от возможного числа событий в реализации потока. Оценка данной статистической характеристики случайного потока строится в соответствии с выражением

$$P_k^* = \frac{N_k}{N}, k = 0,1,2,..., \tag{1.9}$$

где N_k – количество смоделированных реализаций случайного потока, в которых число событий оказалось равным k.

Порядок выполнения

1. Разработать алгоритм моделирования заданного (см. ниже табл. 1.1) потока Пуассона и выполнить его программную реализацию.
2. Провести тестовую проверку созданного программного генератора:
   - построить в одном графическом окне на интервале Ω графики интенсивности заданного потока Пуассона, и ее оценки;
   - построить в одном графическом окне на интервале Ω графики сечения корреляционной функции заданного потока Пуассона и сечения ее оценки, для чего зафиксировать значение одного из временных аргументов в точке, соответствующей максимуму интенсивности;
   - построить в одном графическом окне графики распределения числа событий на интервале Ω для заданного потока Пуассона и его оценки;
   - проверить с использованием критерия χ^2 [3] гипотезу о соответствии распределения числа событий на интервале Ω и его оценки.

Форма отчета: Работающий программный модуль, реализующий задание, тексты программ.

Таблица 1.1

Потоки Пуассона для программной генерации

Вариант	Интенсивность, λ	Область задания, Ω
1	exp(–t)	[0; 5]
2	exp(–2t)	[0; 2]
3	exp(–5t)	[0; 1]
4	exp(–t/2)	[0; 10]
5	exp(–t/5)	[0; 20]
6	3–t	[0; 2]
7	1/t	[1; 5]
8	t^2	[0; 1]
9	exp(-t^2/2)	[0; 2]
10	cos(t)+1	[0; π]
11	sin(t)	[0; π]
12	$t$exp(–t)	[0; 8]

Лабораторная работа № 2

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТОКА КОКСА

Цель работы. Практическое освоение алгоритмов программной генерации потока Кокса и методов статистической проверки разработанного генератора.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ

Поток Кокса. Потоком Кокса называют поток Пуассона, у которого интенсивность $\xi(t)$ представляет собой случайный процесс. Моментные функции такого потока тождественно совпадают с моментными функциями исходного случайного процесса $\xi(t)$:

$$f_i(t_1, \dots, t_i) = \langle \xi(t_1) \dots \xi(t_i) \rangle_{\xi(t)}. \quad (2.1)$$

Распределение числа событий $P(k; \Omega)$, наступающих на интервале $\Omega = [T_0; T]$, определяется с помощью формулы Манделя:

$$P(k; \Omega) = \int_0^\infty \rho(W) \frac{W^k e^{-W}}{k!} dW, \quad (2.2)$$

где $\rho(W)$ – плотность распределения величены $W = \int_\Omega \xi(t) dt$.
В ряде случаев, при известной плотности распределения $\rho(W)$ выражение (2.2) может принимать более простой вид. Например, рассмотрим поток Кокса, которому соответствует случайный процесс с экспоненциальной плотностью распределения $\rho_\xi(x) = \frac{1}{m_\xi} e^{-\frac{x}{m_\xi}}$, где m_ξ – математическое ожидание случайной величины с плотностью распределения $\rho_\xi(x)$. Для достаточно малых интервалов Ω (время корреляции случайного процесса $\xi(t)$ намного меньше длины интервала моделирования $A = (T - T_0)$: $\tau_c \ll A$) можно считать, что $W = A\xi(t)$. Тогда плотность распределения $\rho(W)$ случайной величины W можно рассчитать по следующей формуле:

$$\rho(W) = \rho_\xi(\xi) \left| \frac{d\xi}{dW} \right| = \rho_\xi \left(\frac{W}{A} \right) \frac{1}{A} = \frac{1}{m_\xi A} e^{-\frac{W}{m_\xi A}} = \frac{1}{m} e^{-\frac{W}{m}}.$$

Подставляя полученное выражение в (2.2) и выполняя интегрирование по частям получим, что в данном случае распределение числа событий потока Кокса на интервале Ω будет распределением Бозе-Эйнштейна:

$$P(k; \Omega) = m^k / (m + 1)^{k+1}. \quad (2.3)$$

Моделирование потока Кокса. Из определения потока Кокса следует, что задача его моделирования сводится к генерации потока Пуассона. Возможен следующий алгоритм такой генерации, основанный на процедуре прореживания потока Пуассона более высокой интенсивности [4]. Суть его заключается в следующем:

1. Получаем моменты появления событий $\tau_1, \dots, \tau_k \in \Omega$ пуассоновского потока с интенсивностью $\lambda(t) \gg \xi(t)$. При выборе функции $\lambda(t)$ руководствуются условием:

   $$P\{\xi(t) > \lambda(t)\} = \varepsilon \ll 1$$

   т. е. должна быть незначительна вероятность превышения случайным процессом $\xi(t)$ интенсивности $\lambda(t)$.

2. Генерируем реализацию $\{y(\tau_1), \dots, y(\tau_k)\}$ случайного процесса $\xi(t)$ в моменты времени $\tau_1, \dots, \tau_k$.

   Способ моделирования случайного процесса зависит во многом от его типа. Некоторые случайные процессы могут быть представлены как результат трансформации гауссовских процессов. Например, для моделирования стационарного экспоненциального случайного процесса $\xi(t)$ с плотностью $\rho_\xi(x) = \frac{1}{m_\xi} e^{-\frac{x}{m_\xi}}$ можно использовать выражение [4]:

$$\xi(t) = \xi_1^2(t) + \xi_2^2(t), \tag{2.4}$$

где $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ – независимые идентичные стационарные нормальные случайные процессы с параметрами $\left(0, m_\xi/2\right)$. При этом корреляционная функция $R_\xi(\tau)$ случайного процесса $\xi(t)$ связана с корреляционной функцией $r(\tau)$ процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ следующим соотношением:

$$R_\xi(\tau) = m_\xi^2 + 4r^2(\tau). \tag{2.5}$$

Для моделирования стационарных нормальных случайных процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ с корреляционной функцией вида $r(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha\tau)$ можно использовать метод рекуррентных разностных уравнений, применение которого приводит к следующему рекуррентному алгоритму [5]:

$$\begin{cases} x(\tau_1) = \sigma\varphi_1 \\ x(\tau_i) = x(\tau_{i-1}) e^{-\alpha(\tau_i - \tau_{i-1})} + \sigma\varphi_i \sqrt{1 - e^{-2\alpha(\tau_i - \tau_{i-1})}}, \;\; i = 2,3,\dots,k \end{cases}, \tag{2.6}$$

где $\{x(\tau_1), \dots, x(\tau_k)\}$ – реализация одного из случайных процессов $\xi_1(t)$ или $\xi_2(t)$, набор $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ содержит независимые реализации нормальной случайной величины с параметрами (0, 1) (для моделирования каждого из случайных процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ должны использоваться отдельные такие наборы).

3. Для каждого значения экспоненциального случайного процесса случайного процесса $y(\tau_i), i = 1, \dots, k$ моделируем реализацию γ_i случайной величины, равномерно распределенной на интервале $[0; \lambda(\tau_i)]$. Если $\gamma_i > y(\tau_i)$, то точка τ_i теряется. Моменты наступления событий из исходной совокупности $\tau_1, \dots, \tau_k$, оставшиеся после описанной процедуры прореживания, и будут реализацией искомого потока Кокса.

Порядок выполнения

1. Разработать алгоритм моделирования заданного (см. ниже табл. 2.1) потока Кокса и реализовать его программно.
2. Провести тестовую проверку созданного программного генератора:
   - построить в одном графическом окне на интервале Ω графики интенсивности заданного потока и оценки интенсивности генерируемого потока;
   - построить в одном графическом окне на интервале Ω графики корреляционной функции заданного потока и оценки корреляционной функции;
   - построить в одном графическом окне график оценки распределения числа событий на интервале $[0; \tau_c/10]$ и график распределения числа событий на этом интервале, полученный по формуле (2.3). Время корреляции вычислить путем сопоставления выражения для корреляционной функции, заданной в варианте задания, с ее общим выражением вида:

$$f_2(\tau) = f_1^2(1 + \exp(-\tau/\tau_c)).$$

Форма отчета: Работающий программный модуль, реализующий задание, тексты программ.

Таблица 2.1

Потоки Кокса для программной генерации

Вариант	Плотность распределения случайного процесса – интенсивности потока	Моментные функции	Область задания, Ω
1	$\rho_\xi(x) = \frac{1}{m_\xi} e^{-\frac{x}{m_\xi}}$	$f_1 = 3$; $f_2(\tau)=f_1^2(1+\exp(-\tau/2))$	[0; 20]
2		$f_1 = 1$; $f_2(\tau)=f_1^2(1+\exp(-\tau/2))$	[0; 20]
3		$f_1 = 2$; $f_2(\tau)=f_1^2(1+\exp(-\tau/4))$	[0; 40]
4		$f_1 = 1$; $f_2(\tau)=f_1^2(1+\exp(-\tau))$	[0; 10]
5		$f_1 = 5$; $f_2(\tau)=f_1^2(1+\exp(-\tau))$	[0; 10]
6		$f_1 = 3$; $f_2(\tau)=f_1^2(1+\exp(-2\tau))$	[0; 5]
7		$f_1 = 1$; $f_2(\tau)=f_1^2(1+\exp(-5\tau))$	[0; 2]
8		$f_1 = 5$; $f_2(\tau)=f_1^2(1+\exp(-10\tau))$	[0; 1]

Литература

1. *Апанасович В. В., Тихоненко О. М.* Цифровое моделирование стохастических систем. Мн.: Университетское, 1986. 127 с.

2. *Апанасович В. В., Коляда А. А., Чернявский А. Ф.* Статисти-ческий анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Мн.: Университетское, 1988. 256 с.

3. Математическое моделирование: Метод. указания к лаборатор-ным работам / В. В. Апанасович, С. В. Гилевский, В. М. Лутковский, С. М. Мельников. Мн.: БГУ, 2003. 28 с.

4. Левин Р. Б. Теоретические основы статистической радиотех-ники. М.: Сов. радио. 1974. 552 с.

5. *Шалыгин А. С., Палагин Ю. И.* Прикладные методы статисти-ческого моделирования. Л.: Машиностроение, 1986. 288 с.