Воротницкий Ю.И.

Исследование операций

Линейное программирование.

Линейное программирование

Линейное программирование.
Постановка задачи.
Графическое решение.

Линейное программирование
Постановка задачи

- **Линейное программирование (ЛП) –** это метод математического моделирования, разработанный для *оптимизации* использования *ограниченных* ресурсов.
- Модель линейного программирования, как и любая задача исследования операций включает три основных элемента:
  - **Переменные,** которые следует определить,
  - **Целевая функция,** подлежащая минимизации (или максимизации)
  - **Ограничения,** которым должны удовлетворять переменные
- Линейное программирование оперирует с линейными моделями, то есть **целевая функция и функции левой части ограничений должны быть линейными:**

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$$

Линейное программирование
Постановка задачи

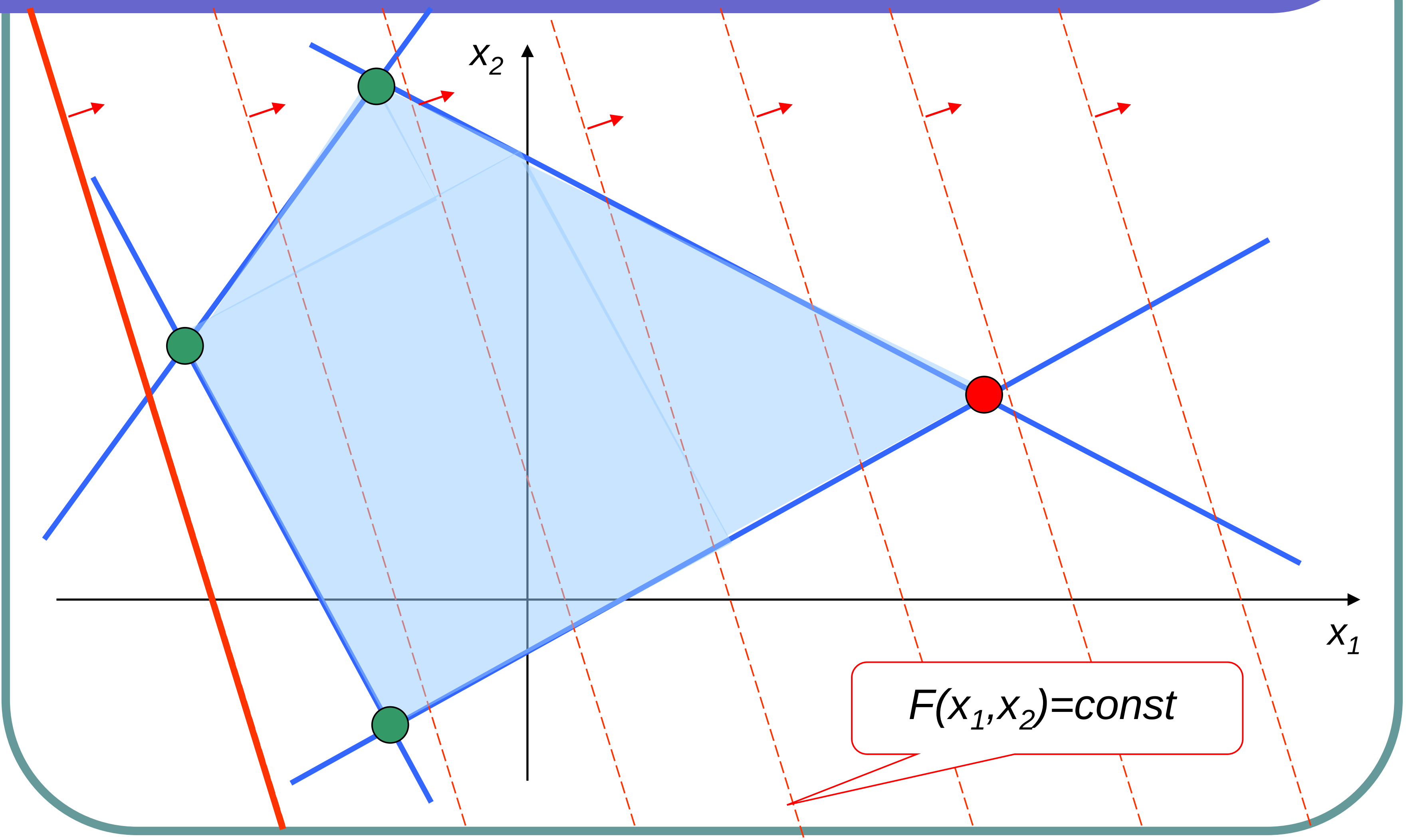
- **Например:**

$$F(\vec{x}) = a_1 x_1 + a_2 x_2;$$
$$B_{11} x_1 + B_{12} x_2 \geq b_1;$$
$$B_{21} x_1 + B_{22} x_2 \leq b_2;$$
$$B_{31} x_1 + B_{32} x_2 \geq b_3;$$
$$B_{41} x_1 + B_{42} x_2 \leq b_4;$$

$$\vec{x} = (x_1, x_2)^T$$

Линейное программирование

Постановка задачи



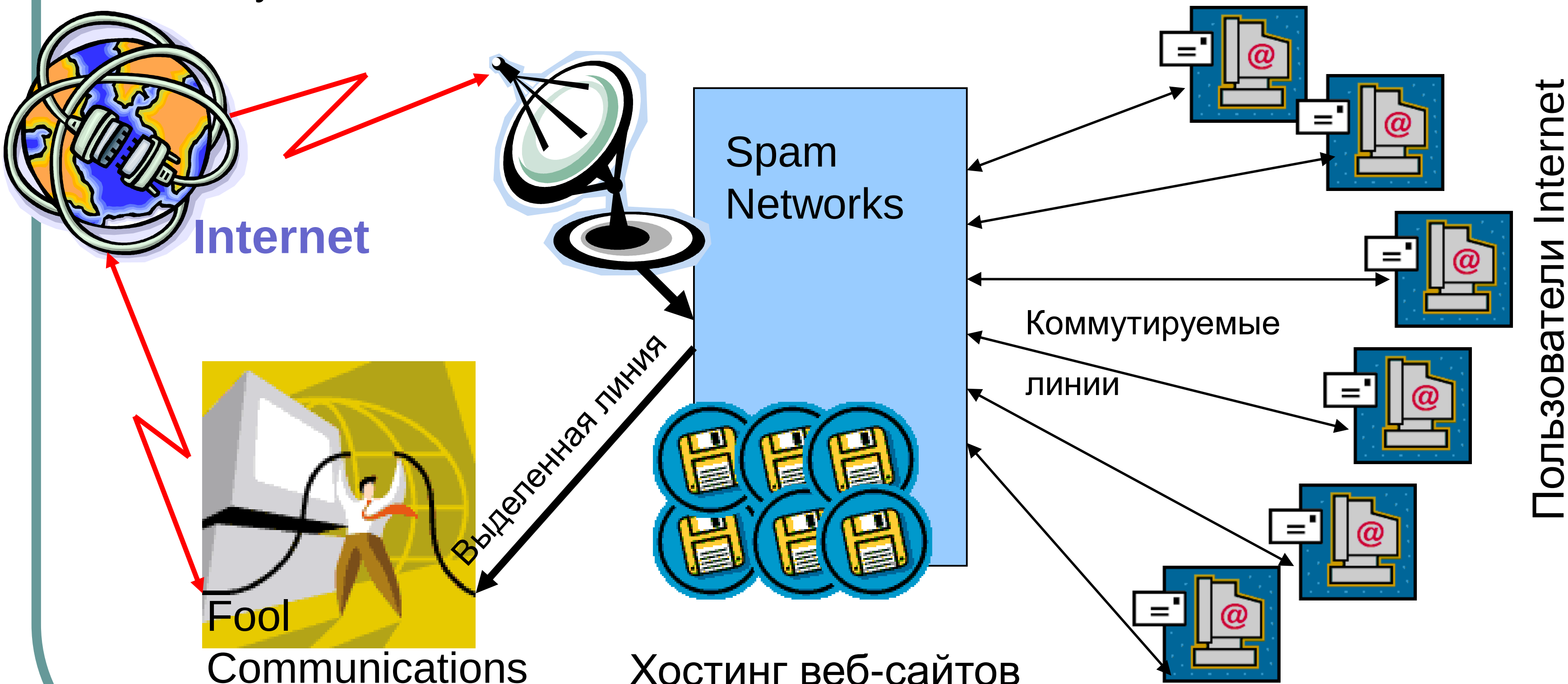
Линейное программирование. Графическое решение задачи ЛП

Оптимизация структуры телекоммуникационных услуг в лихие 90-е

- **Компания Spam Networks** оказывает два основных вида услуг: подключение пользователей по коммутируемым каналам по безлимитному плану в Internet и хостинг веб-сайтов.
- **Компания** оказывает два основных вида услуг: подключение пользователей по коммутируемым каналам по безлимитному плану в Internet и хостинг веб-сайтов.
- Для организации доступа в Internet компания покупает асимметричный трафик:
  - исходящий у оператора Fool Communications по цене 6 долларов за 1 Кбит/с, пропускная способность выделенной линии – до 2 Мбит/с
  - входящий трафик через собственную приемную спутниковую тарелку по цене 0,8 доллара за 1 Кбит/с, максимальный объем – 2 Мбит/с
- Для хостинга одного сайта необходимо зарезервировать 2 Кбит/с на передачу и 1 Кбит/с на прием. Месячный доход от услуги составляет 8 долларов.
- Для предоставления услуги доступа в Internet необходимо зарезервировать 4 Кбит/с на прием и 1 Кбит/с на передачу. Месячный доход от услуги составляет 6 долларов.

Линейное программирование. Графическое решение задачи ЛП Оптимизация структуры телекоммуникационных услуг

- Кроме того, количество портов на сервере удаленного доступа ограничено 32 портами, что не позволяет оказывать услуги доступа в Internet более чем 480 клиентам.



Линейное программирование.
Графическое решение задачи ЛП
Оптимизация структуры телекоммуникационных услуг: формализация исходной проблемы

- **Множество возможных альтернатив** – различное число сопровождаемых веб-сайтов и количество подключаемых пользователей Internet
- **Варьируемые параметры** – число сопровождаемых сайтов x_1 и число пользователей Internet x_2. Хотя параметры являются целочисленными, эту задачу можно попытаться решить в вещественных числах и затем округлить решение до ближайших целых.
- **Цель –** получение максимального дохода: $F(x_1, x_2)=8x_1+6x_2$
- **Ограничения:** общий объем входящего трафика меньше или равен предельно возможному, общий объем исходящего трафика меньше или равен пропускной способности канала, число подключаемых пользователей меньше или равно емкости портов х 12-15 – средний коэффициент использования. Число сопровождаемых сайтов и число пользователей неотрицательны.

Линейное программирование.
Графическое решение задачи ЛП
Оптимизация структуры телекоммуникационных услуг: математическая модель

$\max F(x_1, x_2)$; - *x_1 – число сайтов, x_2 – пользователей интернет*

$$F(x_1, x_2) = 8x_1+6x_2;$$

$x_1+4x_2 \le 2048$; - *ограничение сверху входящего трафика*

$2x_1+x_2 \le 2048$; - *ограничение сверху исходящего трафика*

$x_2 \le 480$; - *максимальное число пользователей интернет (32 порта с коэффициентом 15)*

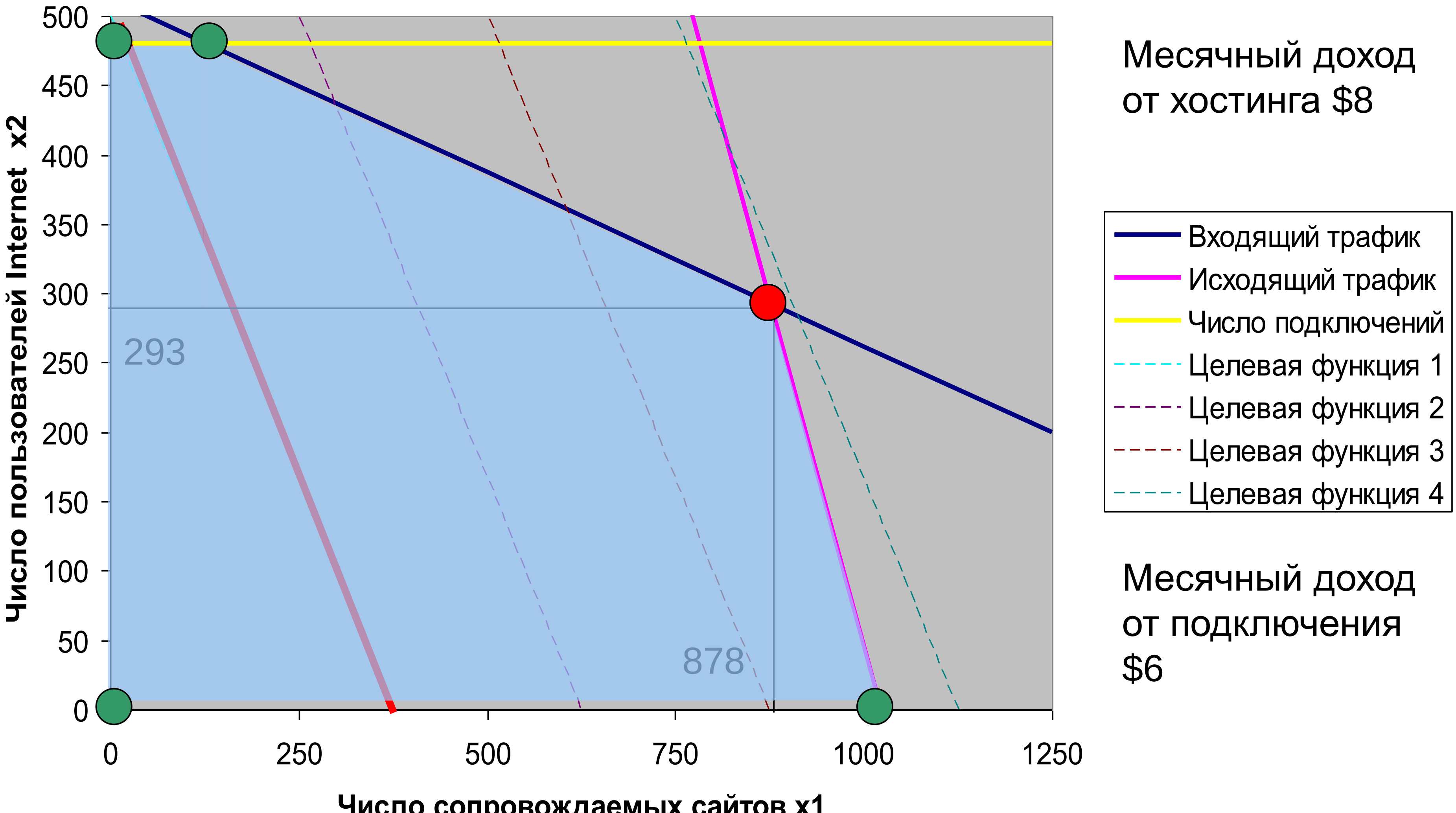
$$x_1 \ge 0;$$

$$x_2 \ge 0.$$

Линейное программирование.

Графическое решение задачи ЛП

Оптимизация структуры телекоммуникационных услуг: решение



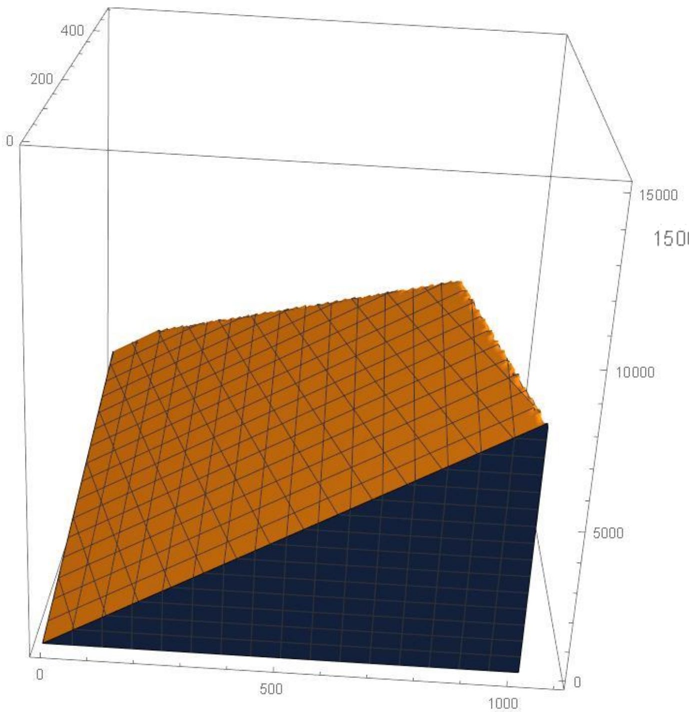
Месячный доход от хостинга $8

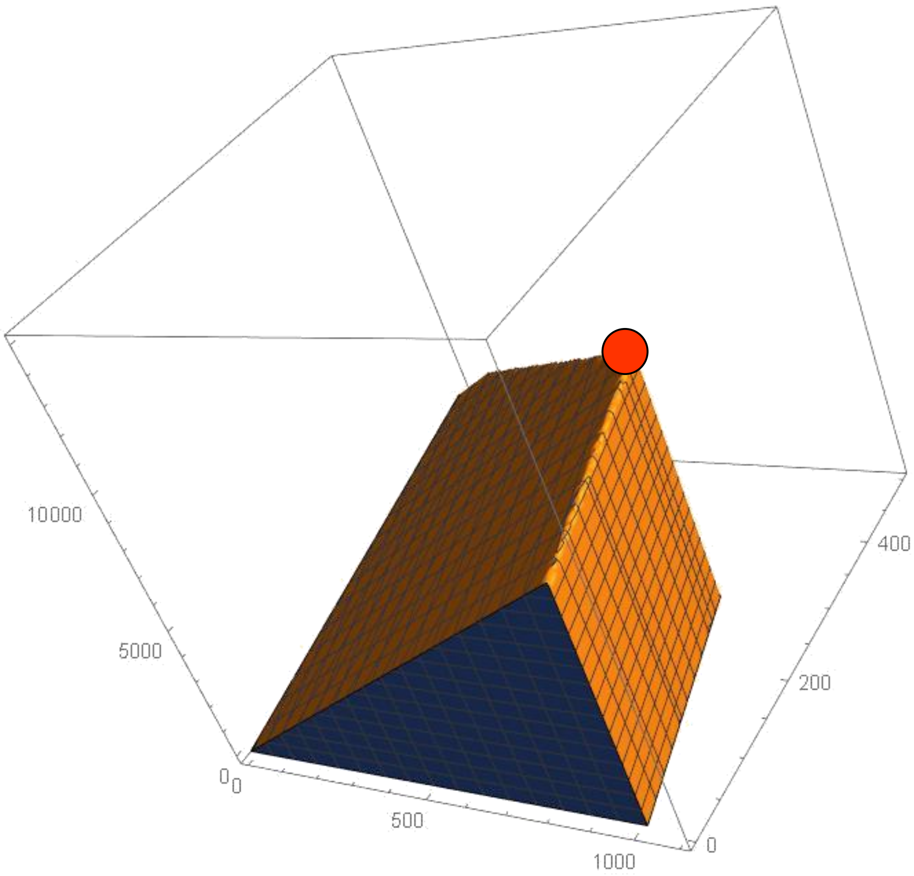
Месячный доход от подключения $6

Линейное программирование.

Графическое решение задачи ЛП

Оптимизация структуры телекоммуникационных услуг: 3D

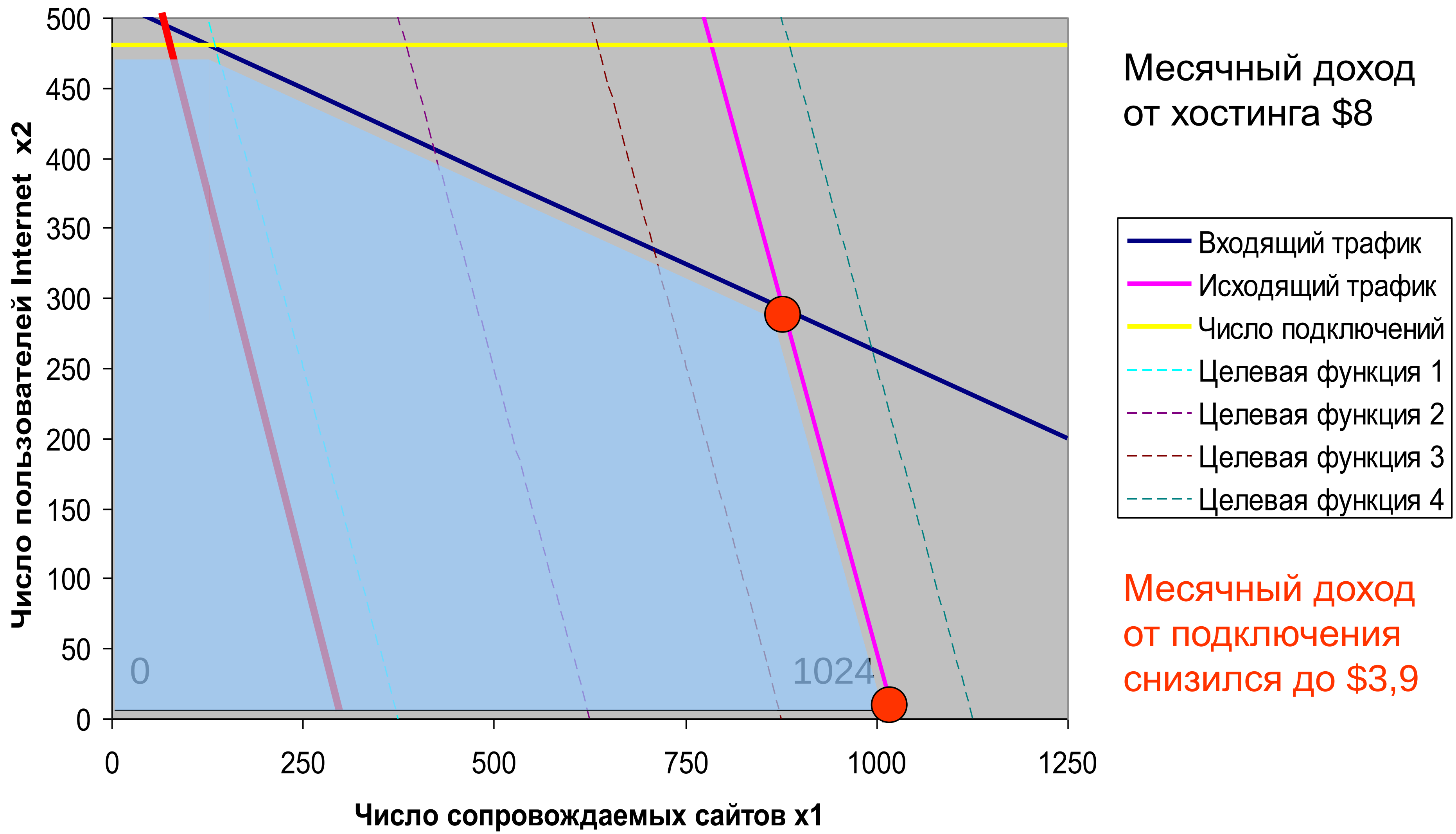




Линейное программирование.

Графическое исследование чувствительности решения

Оптимизация структуры телекоммуникационных услуг: изменение коэффициентов целевой функции



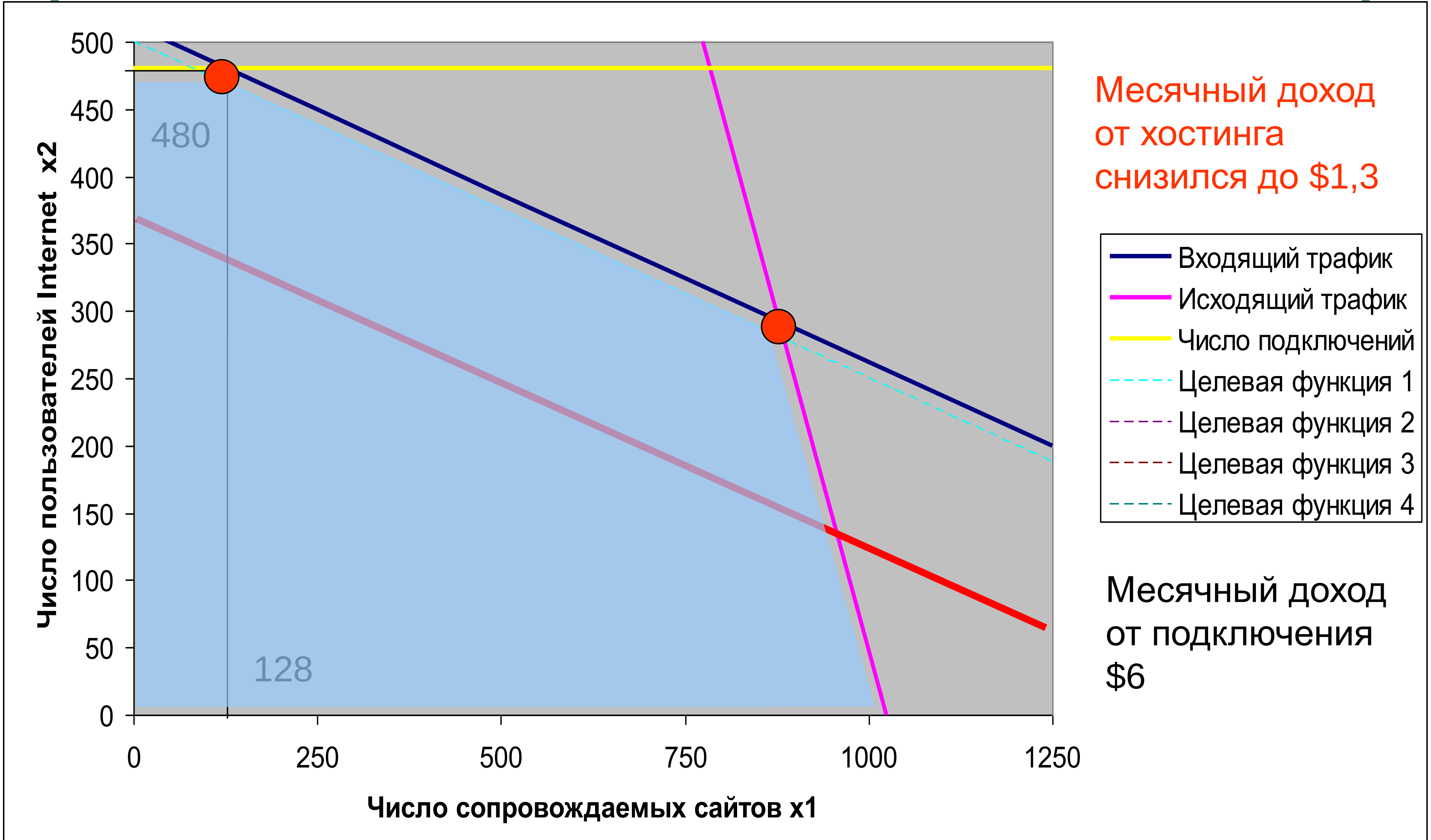
Месячный доход от хостинга $8

Месячный доход от подключения снизился до $3,9

Линейное программирование.

Графическое исследование чувствительности решения

Оптимизация структуры телекоммуникационных услуг: изменение коэффициентов целевой функции



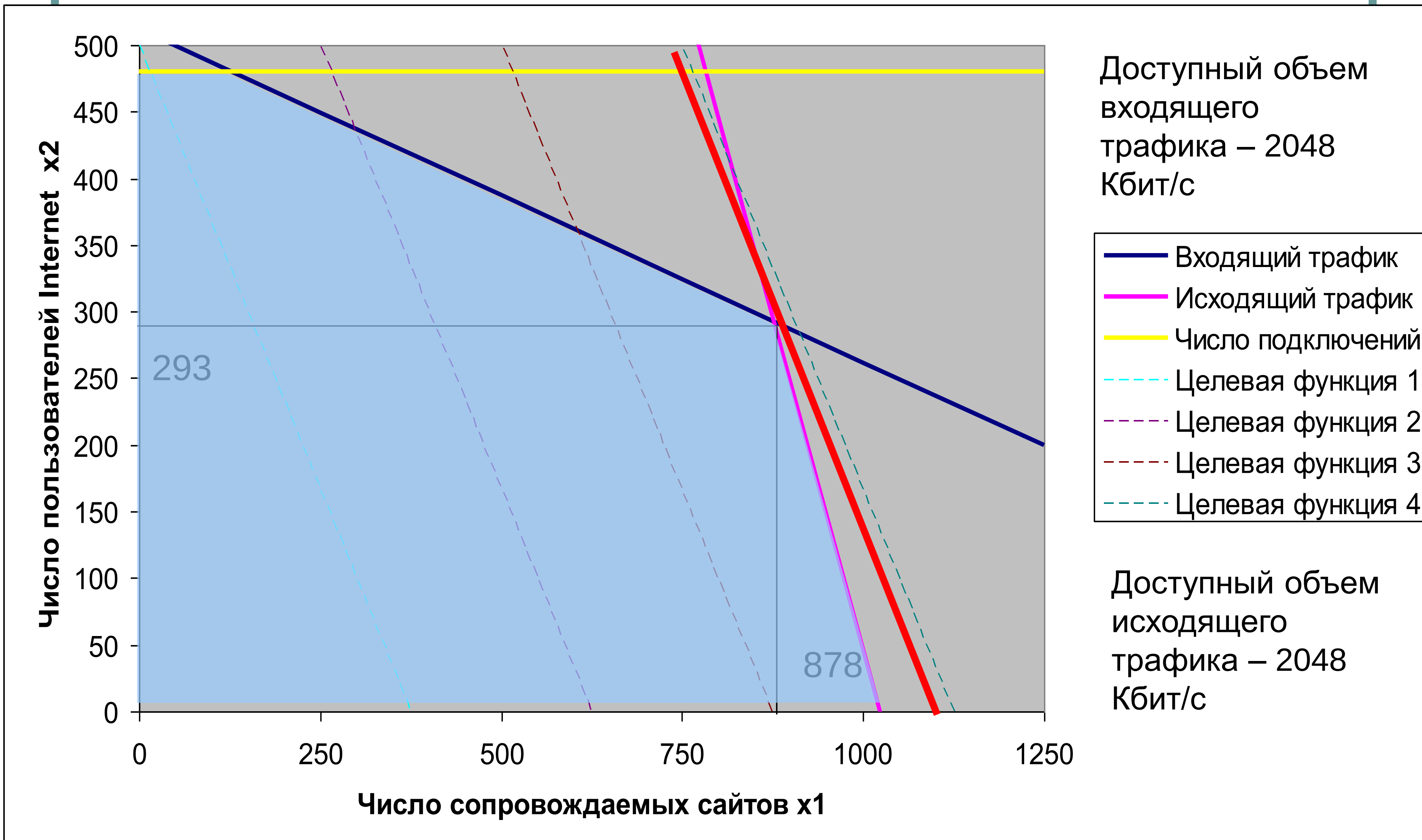
Месячный доход от хостинга снизился до $1,3

Месячный доход от подключения $6

2. Линейное программирование.

2.2.Графическое исследование чувствительности решения

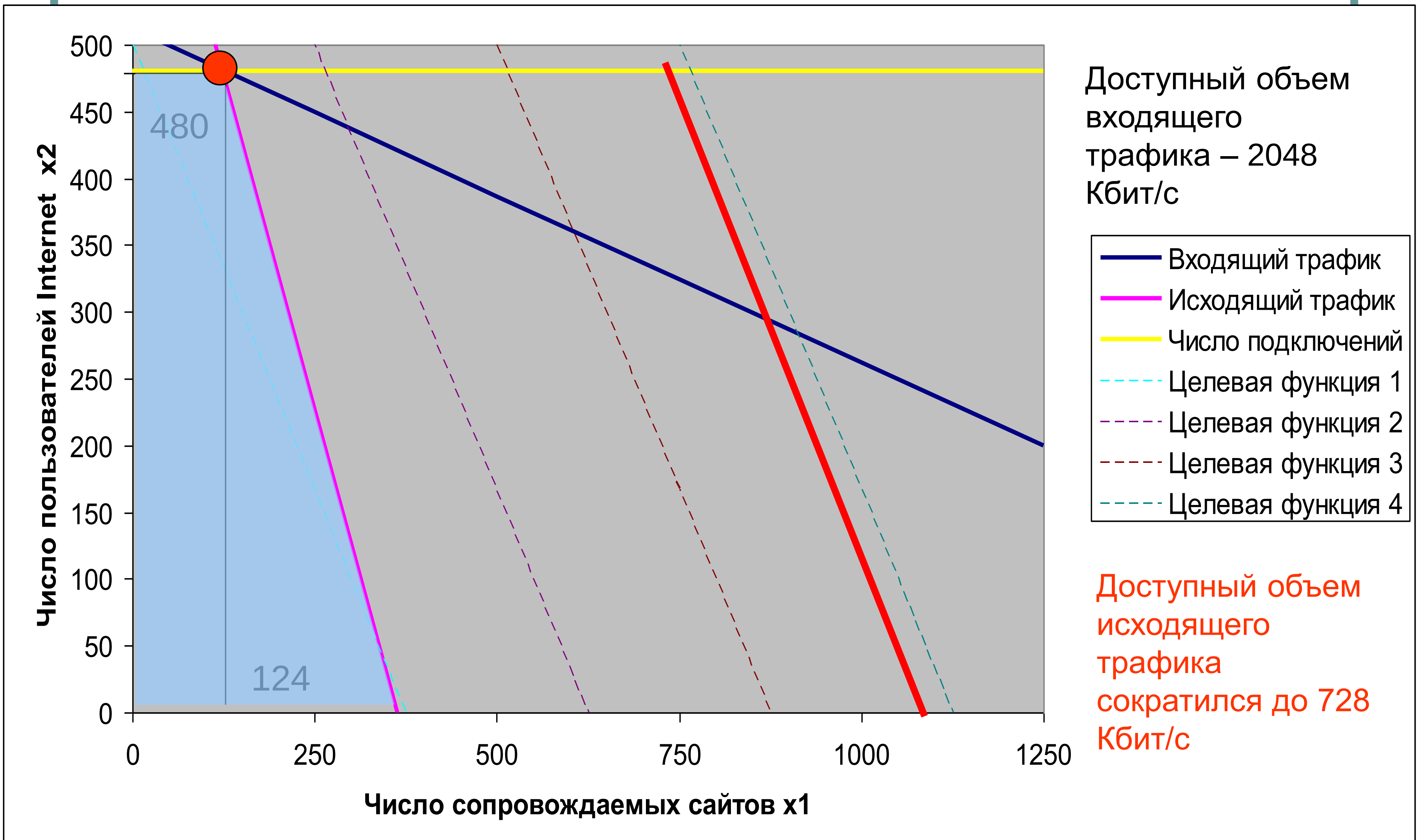
Оптимизация структуры телекоммуникационных услуг: изменение ограничений (исходные ограничения)



Линейное программирование.

Графическое исследование чувствительности решения

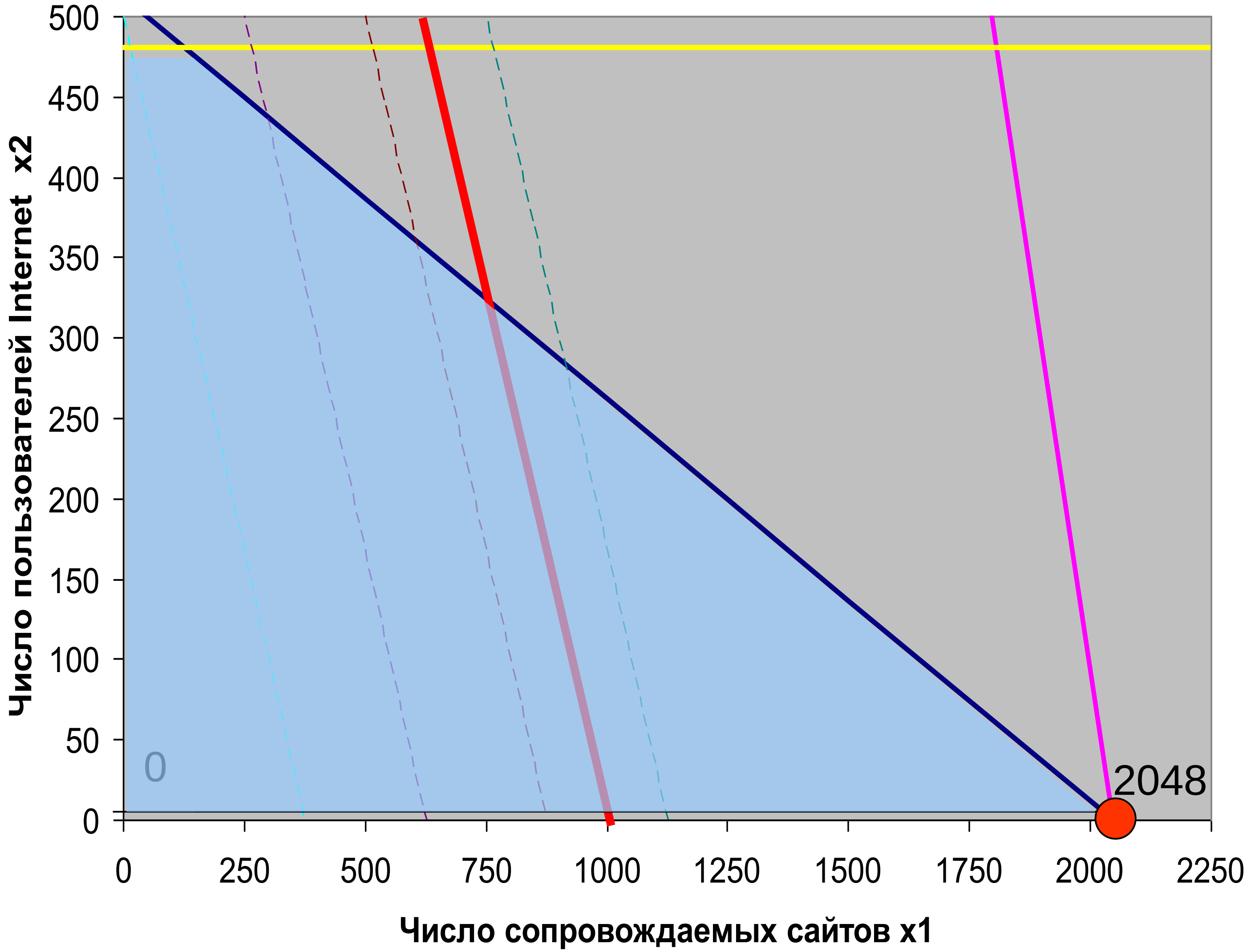
Оптимизация структуры телекоммуникационных услуг: изменение ограничений (сокращение трафика)



Линейное программирование.

Графическое исследование чувствительности решения

Оптимизация структуры телекоммуникационных услуг: изменение ограничений (увеличение доступного трафика)



Доступный объем входящего трафика – 2048 Кбит/с

Доступный объем исходящего трафика увеличился до 4096 Кбит/с

Линейное программирование.

Графическое исследование чувствительности решения

Оптимизация структуры телекоммуникационных услуг: изменение ограничений. Стоимость ресурса.

Принципы построения аналитических методов решения задачи ЛП

Оптимизация структуры телекоммуникационных услуг: Анализ результатов поиска решения

- **Интуитивно очевидно, что оптимальное решение может находиться только в угловых точках пространства допустимых решений.** На этом основан симплексный алгоритм решения задач линейного программирования.
- При анализе чувствительности наблюдаются **качественные изменения** при переходе с одной ветви решения на другую. Необходимо особенно тщательно анализировать чувствительность, если решение находится в окрестности таких точек
- **Графическое решение возможно только в простейших случаях –** при числе варьируемых параметров не более 2 и небольшом числе ограничений.
- **В общем случае необходимо построение эффективного вычислительного алгоритма для решения задачи линейного программирования.**

Линейное программирование.

Принципы построения аналитических методов решения задачи ЛП

Методика поиска оптимального решения

- Оптимальное решение задачи ЛП всегда ассоциируется с угловой точкой пространства решений (**крайней точкой** множества).
- Для построения симплекс-метода необходимо вначале выполнить **алгебраическое описание** крайних точек пространства решений.
- Для реализации этого перехода сначала можно **привести задачу ЛП к *стандартной форме***, преобразовав неравенства ограничений в равенства путем введения дополнительных переменных.
- Стандартная форма позволяет алгебраически получить **базисные решения**, (используя систему уравнений, порожденную ограничениями). Эти базисные решения полностью определяют **все крайние точки** пространства решений.

- **Симплекс-метод позволяет найти оптимальное решение среди всех базисных.**

Линейное программирование. Стандартная форма задачи ЛП. Симплекс-метод

Линейное программирование. **Стандартная форма задачи ЛП** шаг 1

- **Все ограничения** (включая ограничения неотрицательности переменных) **преобразуются в равенства с неотрицательной правой частью.**
  - *Неравенства любого типа* (со знаками ≤ или ≥) *можно преобразовать в равенства* путем добавления в левую часть неравенств дополнительных переменных – остаточных или избыточных.

$$f(\vec{x}) \le b \Leftrightarrow f(x) + y_k = b,\ \ y_k \ge 0;$$

$$f(\vec{x}) \ge b \Leftrightarrow f(x) - z_l = b,\ \ z_l \ge 0;$$

  остаточные переменные y_k обычно интерпретируются как количество неиспользованных ресурсов, а избыточные переменные z_l – как превышение левой части неравенства над заданным минимально допустимым значением.
  - *Правую часть равенства всегда можно сделать неотрицательной путем умножения равенства на -1.*
  - Кстати, неравенство вида ≤ также преобразуется в неравенство вида ≥ (и наоборот) посредством умножения обоих частей неравенства на -1.

Линейное программирование.
Стандартная форма задачи ЛП
шаг 2

- **Все варьируемые переменные должны быть неотрицательными.**
  - Преобразование **неположительных** переменных в неотрицательные:

$$x_i \le 0 \;\Rightarrow\; x_i^- := -x_i \;\Rightarrow\; x_i^- \ge 0;$$

  - Назовем переменную **свободной**, если она может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Преобразование свободных переменных в неотрицательные можно выполнить следующим образом:

$$x_i^+ - x_i^- := x_i \;\Rightarrow\; x_i^+ \ge 0,\; x_i^- \ge 0;$$

    причем одну из двух переменных x_i^- или x_i^+ можно полагать равной нулю. Например, если $x=3$, то ее можно представить в виде $x_i^+ = 3$, $x_i^- = 0$. Если $x=-5$, то $x_i^+ = 0$, $x_i^- = 5$.
  - Такие преобразования должны быть выполнены во всех неравенствах и целевой функции
  - После решения задачи с переменными x_i^- и x_i^+ значения исходных переменных восстанавливаются с помощью обратной подстановки.

Линейное программирование.
Стандартная форма задачи ЛП
шаг 3

- **Целевую функцию следует минимизировать или максимизировать**
  - Задача

$$\max F(\vec{x}), \quad \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)^T$$

эквивалентна задаче

$$\min -F(\vec{x}), \quad \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)^T$$

и наоборот

Линейное программирование.

Стандартная форма задачи ЛП

Математическая модель в стандартной форме

$$\max F(x_1, x_2);$$
$$F(x_1, x_2) = 8x_1 + 6x_2;$$
$$x_1 + 4x_2 \le 2048;$$
$$2x_1 + x_2 \le 2048;$$
$$x_2 \le 480;$$
$$x_1 \ge 0;$$
$$x_2 \ge 0.$$

$$\max F(x_1, x_2);$$
$$F(x_1, x_2) = 8x_1 + 6x_2;$$
$$x_1 + 4x_2 + y_1 = 2048;$$
$$2x_1 + x_2 + y_2 = 2048;$$
$$x_2 + y_3 = 480;$$
$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;$$
$$y_1 \ge 0;\ y_2 \ge 0;\ y_3 \ge 0;$$

Линейное программирование.

Стандартная форма задачи ЛП

Математическая модель в стандартной форме (после переобозначения переменных)

$$x_3 = y_1, \qquad x_4 = y_2, \qquad x_5 = y_3;$$

$$\max\ F(\vec{x}), \quad \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T;$$

$$F(\vec{x}) = 8x_1 + 6x_2,$$

$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 2048,$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 2048,$$

$$x_2 + x_5 = 480,$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0.$$

Линейное программирование.

Понятие базисного решения задачи ЛП

Допустимые базисные решения

- Задача ЛП в стандартной форме содержит m линейных равенств с n неизвестными переменными (m<n).
- Разделим n переменных на два множества:
  - n-m переменных, которые положим равными нулю;
  - оставшиеся m переменных, значения которых определяются как решение системы из m линейных уравнений с m переменными.
- Если решение полученной СЛАУ единственное, то соответствующие m переменных называют **базисными**, а остальные n-m нулевых переменных - **небазисными**. В этом случае результирующие значения переменных составляют **базисное решение**.
- Если все переменные принимают неотрицательные значения, то такое базисное решение называют **допустимым**, в противном случае – **недопустимым.**
- Нетрудно видеть, что количество всех допустимых базовых решений для m уравнений с n неизвестными не превосходит

$$C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Линейное программирование.

Понятие базисного решения задачи ЛП

Свободные переменные и базисные решения

- Свободные переменные мы определили как переменные, которые могут принимать любые действительные значения (положительные, нулевые и отрицательные).
- В стандартной форме записи задачи ЛП свободная переменная x_i должна быть представлена как разность двух неотрицательных переменных:

$$x_i^+ - x_i^- := x_i \;\Rightarrow\; x_i^+ \geq 0,\; x_i^- \geq 0;$$

  Из определения базисного решения очевидно, что невозможна ситуация, когда x_i^+ и x_i^- являются одновременно базисными переменными, что вытекает из их зависимости.
- Это означает, что в любом базисном решении по крайней мере одна из переменных x_i^+ и x_i^- должна быть небазисной, то есть нулевой.
- Ранее было показано, что при этом переменная x_i может принимать любое действительное значение (если $x=3$, то ее можно представить в виде $x_i^+ =3, x_i^- =0;$ если $x=-5$, то $x_i^+ =0, x_i^- =5$).

Линейное программирование.
Основы симплекс-метода
Идея алгоритма

- *Можно доказать*, что решение задачи ЛП может достигаться только в одной из угловых точек ОДЗ варьируемых параметров (в крайней точке пространства решений).
- *Можно доказать*, что базисные решения полностью определяют все крайние точки пространства решений.
- Тогда решение может быть найдено путем перебора всех допустимых базисных решений, что неэффективно.
- Алгоритм симплекс-метода находит оптимальное решение, рассматривая ограниченное количество допустимых базисных решений.
- Алгоритм начинается с некоторого допустимого базисного решения и затем пытается найти другое базисное решение, улучшающее значение целевой функции.
- Для этого необходимо:
  - ввести в число базисных переменную, которая ранее была небазисной (это возможно, если ее возрастание ведет к увеличению целевой функции);
  - одну из текущих базисных переменных сделать нулевой (небазисной): это необходимо, чтобы получить систему m уравнений с m неизвестными.

Линейное программирование.
Основы симплекс-метода
Оптимизация структуры телекоммуникационных услуг. Математическая модель.

- Вспомним математическую формулировку задачи о телекоммуникационной компании

$$\max\ F(\vec{x}),\quad \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T;$$

$$F(\vec{x}) = 8x_1 + 6x_2,$$

$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 2048,$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 2048,$$

$$x_2 + x_5 = 480,$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0.$$

x_1 – число сопровождаемых сайтов,
x_2 – число подключаемых пользователей к Internet,
x_3 – неиспользуемая пропускная способность спутникового канала,
x_4 – неиспользуемая пропускная способность исходящего канала,
x_5 – неиспользуемая емкость портов

Оптимизация структуры телекоммуникационных услуг. Система уравнений

- Перепишем уравнения в виде:

$$
\begin{aligned}
1F &- 8x_1 - 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 0,\\
0F &+ 1x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 2048,\\
0F &+ 2x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 2048,\\
0F &+ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 480,
\end{aligned}
$$

x_1 – число сопровождаемых сайтов,
x_2 – число подключаемых пользователей к Internet,
x_3 – неиспользуемая пропускная способность спутникового канала,
x_4 – неиспользуемая пропускная способность исходящего канала,
x_5 – неиспользуемая емкость портов

Линейное программирование.
Основы симплекс-метода
Оптимизация структуры телекоммуникационных услуг. Система уравнений

- Перепишем уравнения в виде:

$$\begin{aligned} 8x_1+6x_2 &+ 0x_3+0x_4+0x_5 = F, \\ 1x_1+4x_2 &+ 1x_3+0x_4+0x_5 = 2048, \\ 2x_1+1x_2 &+ 0x_3+1x_4+0x_5 = 2048, \\ 0x_1+1x_2 &+ 0x_3+0x_4+1x_5 = 480, \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 2048 \\ 2048 \\ 480 \end{pmatrix}$$

x_1 – число сопровождаемых сайтов,
x_2 – число подключаемых пользователей к Internet,
x_3 – неиспользуемая пропускная способность спутникового канала,
x_4 – неиспользуемая пропускная способность исходящего канала,
x_5 – неиспользуемая емкость портов

Линейное программирование.
Основы симплекс-метода
Начальное решение

- Начальное произвольное базисное решение:

$$8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = F,$$
$$\boxed{\begin{array}{l} 1x_1 + 4x_2 + 1x_3 \\ 2x_1 + 1x_2 + 0x_3 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 \end{array}} + \boxed{\begin{array}{l} 0x_4 + 0x_5 \\ 1x_4 + 0x_5 \\ 0x_4 + 1x_5 \end{array}} = \boxed{\begin{array}{l} 2048, \\ 2048, \\ 480, \end{array}}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 2048 \\ 2048 \\ 480 \end{pmatrix}$$

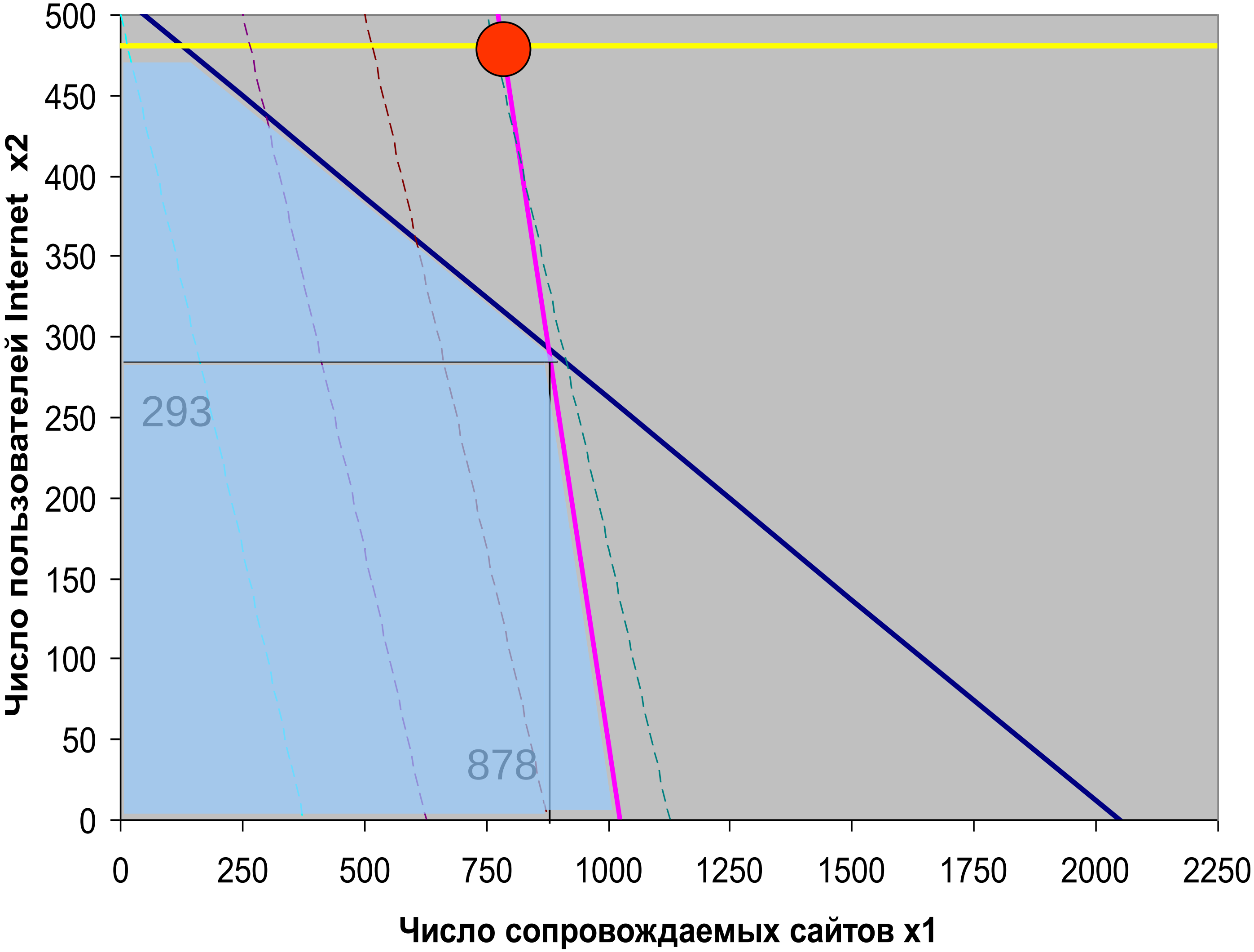
Получаем недопустимое решение:

x_1 = 784 – число сопровождаемых сайтов,
x_2 = 480 - число подключаемых пользователей к Internet,
x_3 =2048 неиспользуемая пропускная способность спутникового канала,
x_4 =2048 неиспользуемая пропускная способность исходящего канала,
x_5 =480 неиспользуемая емкость портов
F=0

Линейное программирование.

Основы симплекс-метода

Начальное недопустимое базисное решение на графике



Месячный доход от хостинга $8

Месячный доход от подключения $6

Линейное программирование.
Основы симплекс-метода
Начальное решение

- Начальное допустимое базисное решение:

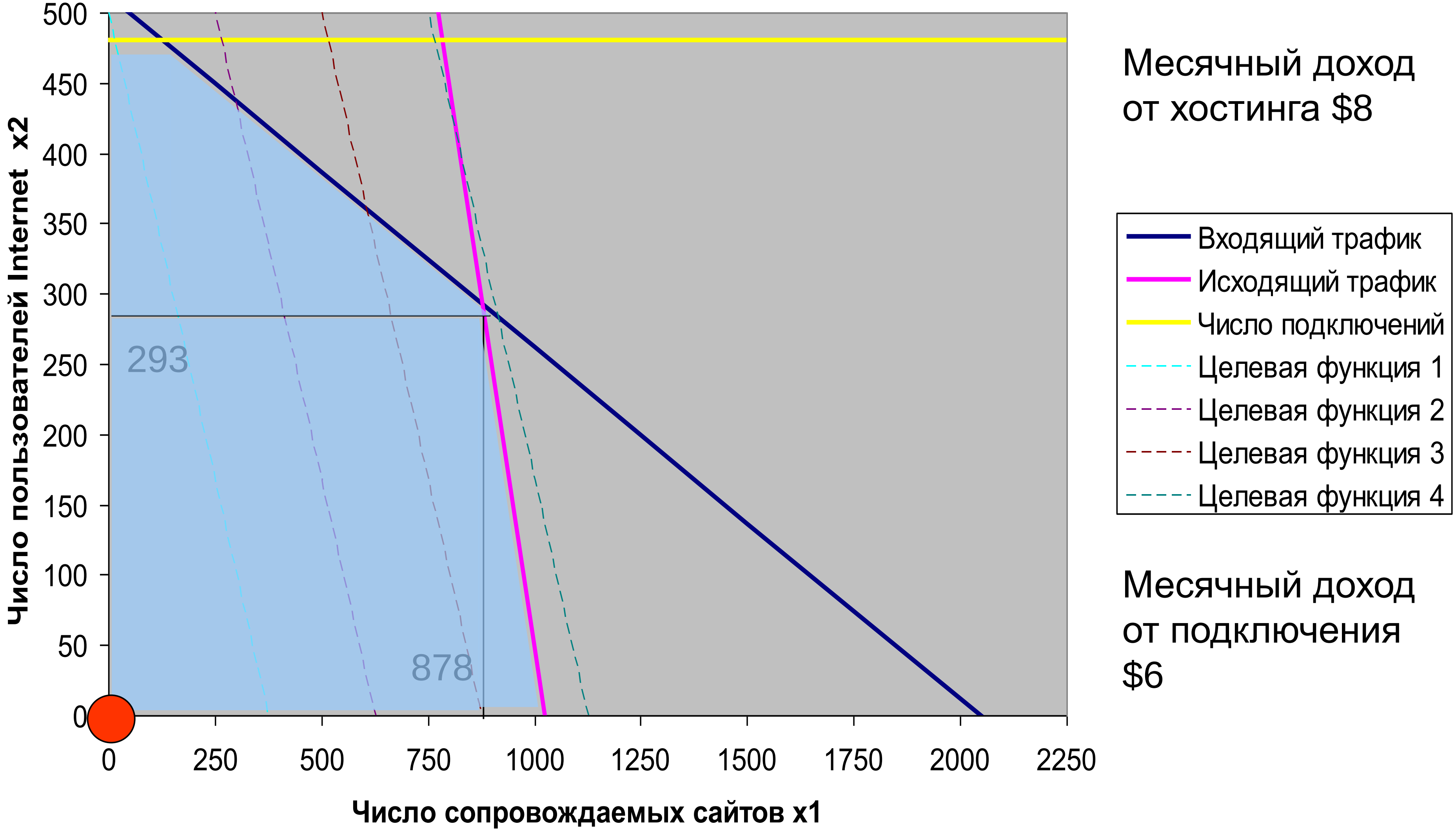
$$8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = F,$$
$$1x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 2048,$$
$$2x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 2048,$$
$$0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 480,$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 2048 \\ 2048 \\ 480 \end{pmatrix}$$

Очевидное начальное решение:

x_1 = 0 – число сопровождаемых сайтов,
x_2 = 0 - число подключаемых пользователей к Internet,
x_3 =2048 неиспользуемая пропускная способность спутникового канала,
x_4 =2048 неиспользуемая пропускная способность исходящего канала,
x_5 =480 неиспользуемая емкость портов
F=0

Линейное программирование.
Основы симплекс-метода
Начальное допустимое базисное решение на графике



Месячный доход от хостинга $8

Месячный доход от подключения $6

Определение вводимой в базис переменной

- Введем в базис переменную x_1 с наибольшим коэффициентом в строке с целевой функцией:

$$\boxed{8x_1} + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = F,$$
$$1x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 2048,$$
$$2x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 2048,$$
$$0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 480,$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 2048 \\ 2048 \\ 480 \end{pmatrix}$$

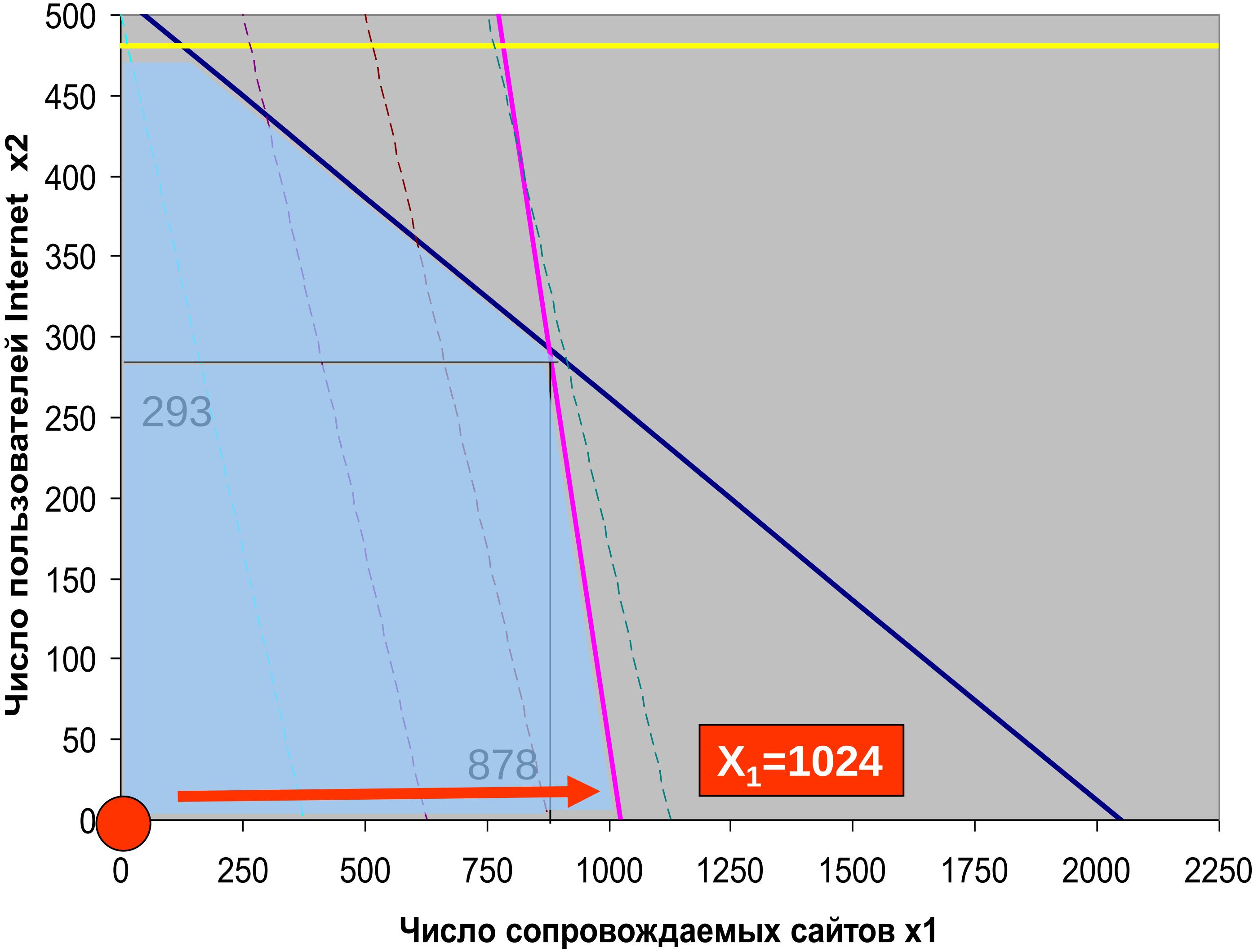
Полученное ранее начальное решение:

$x_1 = 0$ – число сопровождаемых сайтов,
$x_2 = 0$ - число подключаемых пользователей к Internet,
x_3 =2048 неиспользуемая пропускная способность спутникового канала,
x_4 =2048 неиспользуемая пропускная способность исходящего канала,
x_5 =480 неиспользуемая емкость портов
F=0

Линейное программирование.

Основы симплекс-метода

Графическое нахождение наибольшего значения, которое может принять вводимая переменная.



Месячный доход от хостинга $8

Месячный доход от подключения $6

Линейное программирование.
Основы симплекс-метода
Алгебраическое нахождение наибольшего значения, которое может принять вводимая переменная.

- Симплекс-метод должен определять новую точку алгебраически.
- Эта точка – точка пересечения прямых, соответствующих ограничениям, с координатной осью, соответствующей вводимой переменной (в данном случае – с осью $0x_1$.
- Алгебраически эта точка – отношение правой части уравнений (значений переменных) к коэффициенту при вводимой переменной (x_1).
- Разумеется, нас интересуют только **неотрицательные** отношения.
- Чтобы точка лежала внутри ОДЗ надо из всех положительных выбрать **наименьшее** значение

x_1	Базис	Правая часть	Отношение (точка пересечения)
1	x_3	2048	2048/1=2048
2	x_4	2048	2048/2=1024 (минимум)
0	x_5	480	480/0=∞ (не подходит)

- Исключаем из базиса переменную x_4, для которой частное от деления минимально и положительно:

$$8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = F,$$
$$1x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 2048,$$
$$2x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 2048,$$
$$0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 480,$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{x_1} \\ x_2 \\ \boxed{x_3} \\ x_4 \\ \boxed{x_5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 2048 \\ 2048 \\ 480 \end{pmatrix}$$

Получили новый базис:

x_1 – число сопровождаемых сайтов,
x_3 – неиспользуемая пропускная способность спутникового канала,
x_5 – неиспользуемая емкость портов

Линейное программирование.
Основы симплекс-метода
Выбор исключаемой из базиса переменной

- Исключается та переменная, которой **в найденной нами точке** соответствовало наименьшее неотрицательное отношение.
- В рассматриваемом случае это – переменная x_4 (отношение равно 1024).
- Критерий исключения таков, потому что **именно в этом случае в новом базисном решении переменная x_1 автоматически получит наилучшее из возможных значение** 1024.
- В классическом симплекс-методе вычисление нового базисного решения основано на методе исключения переменных (метод Гаусса-Жордана):
  - Ведущий столбец соответствует вводимой переменной
  - Ведущая строка – исключаемой переменной
  - Ведущий элемент – на их пересечении

- Определяем ведущий столбец, ведущую строку и ведущий элемент

$$8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = F,$$
$$1x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 2048,$$
$$2x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 2048,$$
$$0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 480,$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 2048 \\ 2048 \\ 480 \end{pmatrix}$$

Получили новый базис:

x_1 – число сопровождаемых сайтов,
x_3 – неиспользуемая пропускная способность спутникового канала,
x_5 – неиспользуемая емкость портов

Линейное программирование.
Основы симплекс-метода
Вычисление решения

- В ведущей строке получаем коэффициент при вводимой переменной, равный 1

$$
\begin{aligned}
8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 &= F, \\
1x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 &= 2048, \\
1x_1 + \tfrac{1}{2} x_2 + 0x_3 + \tfrac{1}{2} x_4 + 0x_5 &= 1024, \\
0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 &= 480,
\end{aligned}
\qquad
\begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \tfrac{1}{2} & 0 & \tfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} F \\ 2048 \\ 1024 \\ 480 \end{pmatrix}
$$

Делим элементы ведущей строки на 2

- **Вычисляем элементы остальных строк**

$$\begin{aligned}
8x_1 &+ 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = F,\\
1x_1 &+ 4x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 2048,\\
1x_1 &+ \tfrac{1}{2}x_2 + 0x_3 + \tfrac{1}{2}x_4 + 0x_5 = 1024,\\
0x_1 &+ 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 480,
\end{aligned}
\qquad
\begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \tfrac{1}{2} & 0 & \tfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} F \\ 2048 \\ 1024 \\ 480 \end{pmatrix}$$

Новая строка = Текущая строка – (Ее коэффициент в ведущем столбце x Ведущая строка)

Линейное программирование.
Основы симплекс-метода
Исключение переменной из базиса

- **Вычисляем элементы остальных строк**

$$
\begin{aligned}
8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 &= F,\\
1x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 &= 2048,\\
1x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + 0x_3 + \tfrac{1}{2}x_4 + 0x_5 &= 1024,\\
0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 &= 480,
\end{aligned}
\qquad
\begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \tfrac{1}{2} & 0 & \tfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} F \\ 2048 \\ 1024 \\ 480 \end{pmatrix}
$$

Новая строка = Текущая строка – (Ее коэффициент в ведущем столбце x Ведущая строка);

Для первой строки: Первая строка – 8 x Ведущая строка
Для второй строки: Вторая строка – 1 x Ведущая строка
Для четвертой строки: Четвертая строка – 0 x Ведущая строка

- **Вычисляем элементы остальных строк**

$$
\begin{aligned}
0x_1 + 2x_2 + 0x_3 - 4x_4 + 0x_5 &= F - 8192,\\
0x_1 + \tfrac{7}{2}x_2 + 1x_3 - \tfrac{1}{2}x_4 + 0x_5 &= 1024,\\
1x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + 0x_3 + \tfrac{1}{2}x_4 + 0x_5 &= 1024,\\
0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 &= 480,
\end{aligned}
\qquad
\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & \tfrac{7}{2} & 1 & -\tfrac{1}{2} & 0 \\ 1 & \tfrac{1}{2} & 0 & \tfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} F - 8192 \\ 1024 \\ 1024 \\ 480 \end{pmatrix}
$$

Новая строка = Текущая строка – (Ее коэффициент в ведущем столбце х Ведущая строка);

Для первой строки: Первая строка – 8 х Ведущая строка
Для второй строки: Вторая строка – 1 х Ведущая строка
Для четвертой строки: Четвертая строка – 0 х Ведущая строка

- **Новое решение:**

$$
\begin{aligned}
&0x_1 + 2x_2 + 0x_3 - 4x_4 + 0x_5 = F - 8192,\\
&0x_1 + \tfrac{7}{2}x_2 + 1x_3 - \tfrac{1}{2}x_4 + 0x_5 = 1024,\\
&1x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + 0x_3 + \tfrac{1}{2}x_4 + 0x_5 = 1024,\\
&0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 480,
\end{aligned}
$$

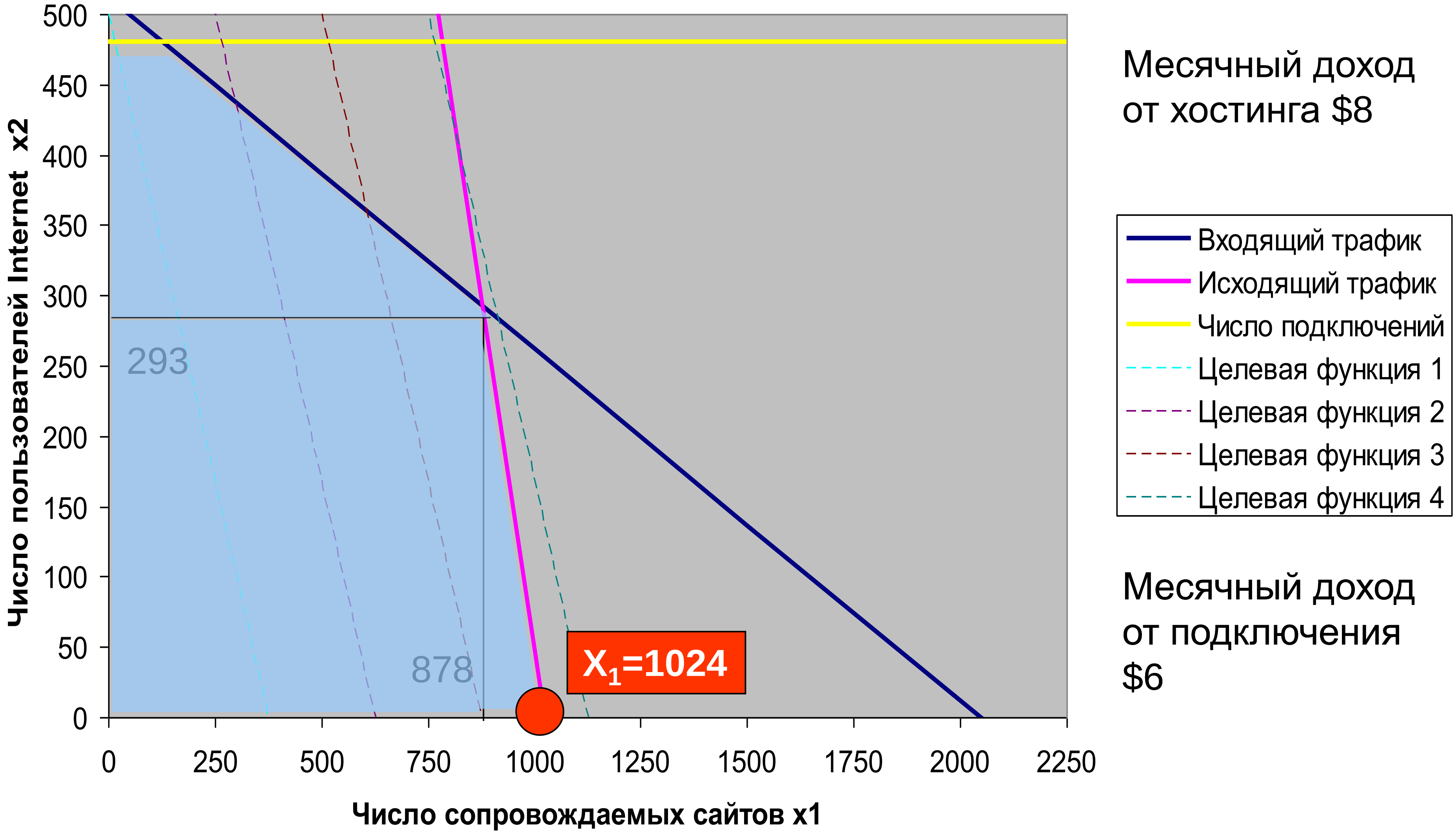
$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1024 \\ 1024 \\ 480 \end{pmatrix}
$$

$$
0 = F - 8192 \Rightarrow F = 8192
$$

Полученное решение:

x_1 = 1024 – число сопровождаемых сайтов,
x_2 = 0 - число подключаемых пользователей к Internet,
x_3 =1024 неиспользуемая пропускная способность спутникового канала,
x_4 =0 неиспользуемая пропускная способность исходящего канала,
x_5 =480 неиспользуемая емкость портов
F=8192

Линейное программирование.
Основы симплекс-метода
Новое базисное решение на графике.



Месячный доход от хостинга $8

Месячный доход от подключения $6

- **Вводим в базис переменную x_2 с наибольшим неотрицательным коэффициентом :**

$$\begin{aligned}
0x_1 + 2x_2 + 0x_3 - 4x_4 + 0x_5 &= F - 8192,\\
0x_1 + \tfrac{7}{2}x_2 + 1x_3 - \tfrac{1}{2}x_4 + 0x_5 &= 1024,\\
1x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + 0x_3 + \tfrac{1}{2}x_4 + 0x_5 &= 1024,\\
0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 &= 480,
\end{aligned}
\qquad
\begin{pmatrix}
0 & 2 & 0 & -4 & 0\\
0 & \tfrac{7}{2} & 1 & -\tfrac{1}{2} & 0\\
1 & \tfrac{1}{2} & 0 & \tfrac{1}{2} & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} F-8192\\ 1024\\ 1024\\ 480 \end{pmatrix}$$

Полученное ранее базисное решение:

x_1 = 1024 – число сопровождаемых сайтов,
x_2 = 0 - число подключаемых пользователей к Internet,
x_3 =1024 неиспользуемая пропускная способность спутникового канала,
x_4 =0 неиспользуемая пропускная способность исходящего канала,
x_5 =480 неиспользуемая емкость портов
F=8192

Линейное программирование.
Основы симплекс-метода
Определение исключаемой переменной

- Находим отношение правой части уравнений к коэффициенту при вводимой переменной (x_2).
- Рассматриваются только **неотрицательные** отношения.
- Чтобы точка лежала внутри ОДЗ надо из всех положительных выбрать **наименьшее** значение
- Исключаем из базиса переменную x_3

x_2	Базис	Правая часть	Отношение (точка пересечения)
3½	x_3	1024	1024/3½ =293 (минимум)
½	x_1	1024	1024/½ = 2048
1	x_5	480	480/1=480

- **Исключаем из базиса переменную x_3 :**

$$
\begin{aligned}
0x_1 + 2x_2 + 0x_3 - 4x_4 + 0x_5 &= F - 8192,\\
0x_1 + \tfrac{7}{2}x_2 + 1x_3 - \tfrac{1}{2}x_4 + 0x_5 &= 1024,\\
1x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + 0x_3 + \tfrac{1}{2}x_4 + 0x_5 &= 1024,\\
0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 &= 480,
\end{aligned}
\qquad
\begin{pmatrix}
0 & 2 & 0 & -4 & 0\\
0 & \tfrac{7}{2} & 1 & -\tfrac{1}{2} & 0\\
1 & \tfrac{1}{2} & 0 & \tfrac{1}{2} & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} F-8192\\ 1024\\ 1024\\ 480 \end{pmatrix}
$$

Полученное ранее базисное решение:

x_1 = 1024 – число сопровождаемых сайтов,
x_2 = 0 - число подключаемых пользователей к Internet,
x_3 =1024 неиспользуемая пропускная способность спутникового канала,
x_4 =0 неиспользуемая пропускная способность исходящего канала,
x_5 =480 неиспользуемая емкость портов
F=8192

- **Определяем ведущий столбец и ведущую строку**

$$
\begin{aligned}
0x_1 + 2x_2 + 0x_3 - 4x_4 + 0x_5 &= F - 8192,\\
0x_1 + \tfrac{7}{2}x_2 + 1x_3 - \tfrac{1}{2}x_4 + 0x_5 &= 1024,\\
1x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + 0x_3 + \tfrac{1}{2}x_4 + 0x_5 &= 1024,\\
0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 &= 480,
\end{aligned}
\qquad
\begin{pmatrix}
0 & 2 & 0 & -4 & 0\\
0 & \tfrac{7}{2} & 1 & -\tfrac{1}{2} & 0\\
1 & \tfrac{1}{2} & 0 & \tfrac{1}{2} & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} F - 8192\\ 1024\\ 1024\\ 480 \end{pmatrix}
$$

Полученное ранее базисное решение:

x_1 = 1024 – число сопровождаемых сайтов,
x_2 = 0 - число подключаемых пользователей к Internet,
x_3 =1024 неиспользуемая пропускная способность спутникового канала,
x_4 =0 неиспользуемая пропускная способность исходящего канала,
x_5 =480 неиспользуемая емкость портов
F=8192

- **Пересчитываем элементы ведущей строки**

$$\begin{aligned}
0x_1 + 2x_2 + 0x_3 - 4x_4 + 0x_5 &= F - 8192,\\
0x_1 + 1x_2 + \tfrac{2}{7}x_3 - \tfrac{1}{7}x_4 + 0x_5 &= 293,\\
1x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + 0x_3 + \tfrac{1}{2}x_4 + 0x_5 &= 1024,\\
0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 &= 480,
\end{aligned}
\qquad
\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & \tfrac{2}{7} & -\tfrac{1}{7} & 0 \\ 1 & \tfrac{1}{2} & 0 & \tfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} =
\begin{pmatrix} F - 8192 \\ 293 \\ 1024 \\ 480 \end{pmatrix}$$

Делим все элементы ведущей строки на значение ведущего элемента

- **Пересчитываем элементы остальных строк**

$$
\begin{aligned}
0x_1 + 0x_2 - \tfrac{4}{7}x_3 - \tfrac{26}{7}x_4 + 0x_5 &= F - 8778,\\
0x_1 + 1x_2 + \tfrac{2}{7}x_3 - \tfrac{1}{7}x_4 + 0x_5 &= 293,\\
1x_1 + 0x_2 - \tfrac{1}{7}x_3 + \tfrac{4}{7}x_4 + 0x_5 &= 878,\\
0x_1 + 0x_2 - \tfrac{2}{7}x_3 + \tfrac{1}{7}x_4 + 1x_5 &= 187,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix}
0 & 2 & -\tfrac{4}{7} & -\tfrac{26}{7} & 0\\
0 & 1 & \tfrac{2}{7} & -\tfrac{1}{7} & 0\\
1 & 0 & -\tfrac{1}{7} & \tfrac{4}{7} & 0\\
0 & 0 & -\tfrac{2}{7} & \tfrac{1}{7} & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\boxed{x_1}\\ \boxed{x_2}\\ x_3\\ x_4\\ \boxed{x_5}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
F - 8778\\ 293\\ 878\\ 480
\end{pmatrix}
$$

Новая строка = Текущая строка – (Ее коэффициент в ведущем столбце x Ведущая строка)

Линейное программирование.

Основы симплекс-метода

Вычисление решения

- **Новое решение. Так как положительных коэффициентов в F – строке больше нет, полученное решение является оптимальным**

$$
\begin{aligned}
0x_1 + 0x_2 - \cancel{4/7}\,x_3 - \cancel{26/7}\,x_4 + 0x_5 &= F - 8778,\\
0x_1 + 1x_2 + \cancel{2/7}\,x_3 - \cancel{1/7}\,x_4 + 0x_5 &= 293,\\
1x_1 + 0x_2 - \cancel{1/7}\,x_3 + \cancel{4/7}\,x_4 + 0x_5 &= 878,\\
0x_1 + 0x_2 - \cancel{2/7}\,x_3 + \cancel{1/7}\,x_4 + 1x_5 &= 187,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 293 \\ 878 \\ 187 \end{pmatrix}
$$

$$
0 = F - 8778 \Rightarrow F = 8778
$$

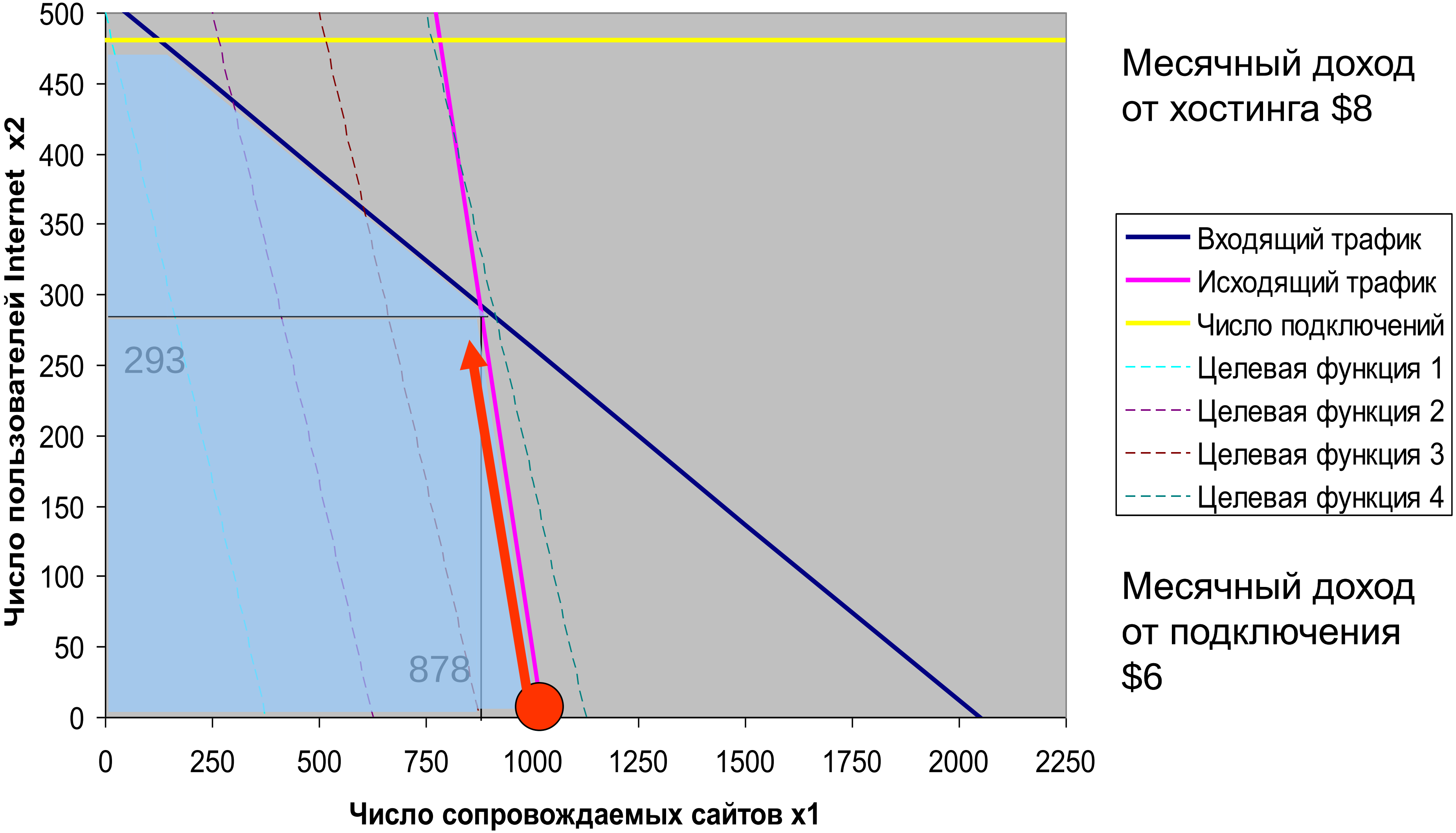
Полученное решение:

x_1 = 878 – число сопровождаемых сайтов,
x_2 = 293 - число подключаемых пользователей к Internet,
x_3 =0 неиспользуемая пропускная способность спутникового канала,
x_4 =0 неиспользуемая пропускная способность исходящего канала,
x_5 =187 неиспользуемая емкость портов
F=8778

Линейное программирование.

Основы симплекс-метода

Графическая иллюстрация полученного решения.



Месячный доход от хостинга $8

Месячный доход от подключения $6

Линейное программирование.
Основы симплекс-метода
Вычисление решения

Окончательное решение:

x_1 = 878 – число сопровождаемых сайтов,
x_2 = 293 - число подключаемых пользователей к Internet,
x_3 =0 неиспользуемая пропускная способность спутникового канала,
x_4 =0 неиспользуемая пропускная способность исходящего канала,
x_5 =187 неиспользуемая емкость портов
F=8778

- Неиспользованный входящий трафик x_3=0
- Неиспользованный входящий трафик x_4=0
- Эти ресурсы являются дефицитными, и увеличение объема разрешенного входящего и исходящего трафика приведет к улучшению решения (получению дополнительного дохода)

- Неиспользованная емкость портов сервера удаленного доступа (возможное число дополнительных подключений) x_5=187
- Этот ресурс не является дефицитными, и увеличение числа портов при данных объемах входящего и исходящего трафика не приведет к улучшению решения (получению дополнительного дохода)

Линейное программирование.
Алгоритм симплекс-метода
Базовый алгоритм

1. Найти начальное допустимое базисное решение (полный алгоритм будет рассмотрен позднее)
   2. На основе *условия оптимальности* определить вводимую переменную
   3. Если вводимых переменных нет – закончить вычисления.
   4. На основе *условия допустимости* выбрать исключаемую переменную
   5. Методом Гаусса-Жордана вычислить новое базисное решение
6. Перейти к шагу 2
7. Вывести текущее базисное решение, являющееся оптимальным.

Линейное программирование.
Алгоритм симплекс-метода
Правила выбора вводимых и исключаемых переменных

- **Условие оптимальности**. Вводимой переменной в задаче максимизации целевой функции является *небазисная* переменная, имеющая наибольший по модулю положительный коэффициент в F-строке. Если в F-строке есть несколько таких коэффициентов, выбор вводимой переменной осуществляется произвольно. Оптимальное решение достигнуто, если в F-строке при небазисных коэффициентах все переменные являются неположительными.

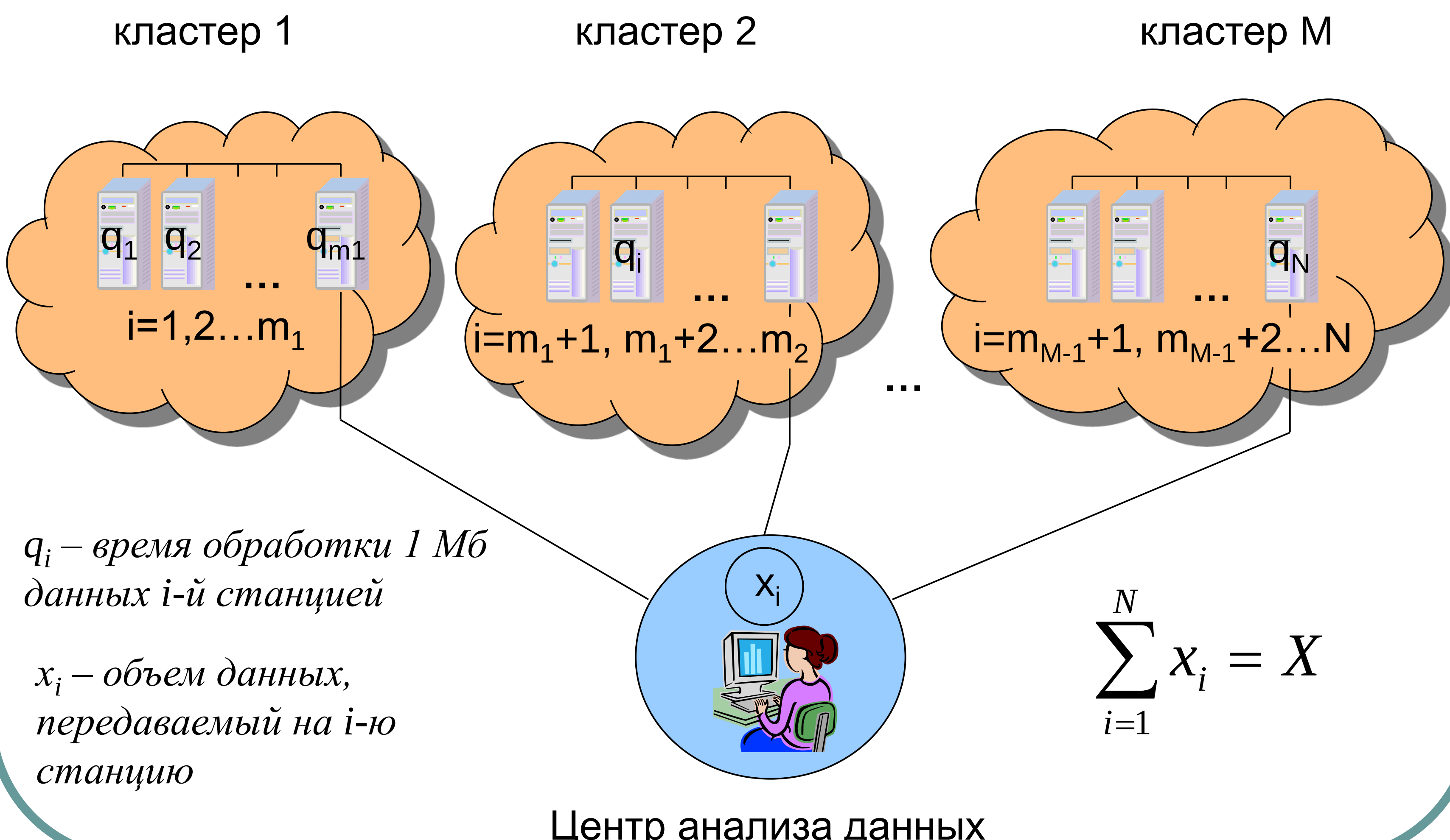
- **Условие допустимости**. В качестве исключаемой выбирается *базисная* переменная, для которой отношение правой части ограничения к положительному коэффициенту ведущего столбца минимально. Если базисных переменных с таким свойством несколько, то выбор исключаемой переменной осуществляется произвольно.

Линейное программирование. Искусственное начальное решение.

Линейное программирование.
Алгоритм симплекс-метода
Пример: Размещение данных для обработки в распределенной вычислительной среде

- В глобальной компьютерной сети сформирована распределенная вычислительная среда, состоящая из N высокопроизводительных рабочих станций, объединенных в M групп (кластеров).
- Данные для обработки однородны и трудоемкость расчетов зависит только от их объема. Данные независимы и их отдельные массивы могут обрабатываться совершенно независимо.
- Известно время обработки 1 Мб данных на каждой рабочей станции q_i.
- Необходимо найти оптимальное распределение заданного объема данных для обработки на станциях. Так как рабочие станции должны использоваться и для решения других – локальных – задач необходимо минимизировать общее время загрузки всех рабочих станций.
- Желательно, чтобы результаты обработки от разных кластеров поступали одновременно.
- Кроме того, владельцами кластеров могут ограничиваться как объемы информации, обрабатываемой их кластерами, так и объемы, обрабатываемые отдельными рабочими станциями.

Линейное программирование.
Алгоритм симплекс-метода
Пример: Размещение данных для обработки в распределенной вычислительной среде



q_i – время обработки 1 Мб данных i-й станцией

x_i – объем данных, передаваемый на i-ю станцию

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = X$$

Линейное программирование.
Алгоритм симплекс-метода
Пример: Размещение данных для обработки в распределенной вычислительной среде

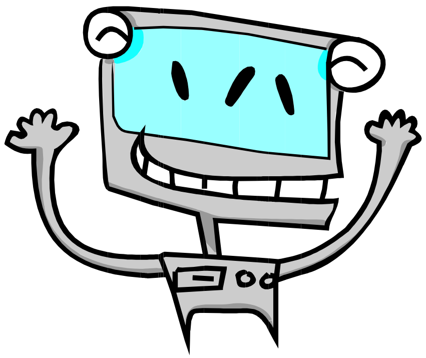
- **Множество возможных альтернатив** – определяется объемом данных x_i , направляемых для обработки на i-ю станцию.
- **Варьируемые параметры** – вектор значений $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)^T$ объема данных, направляемого для обработки на каждую станцию.
- **Фиксированные независимые параметры** – времена обработки q_i 1 Мб данных i-й станцией, предельно допустимые объемы информации, которые могут быть обработаны i-й станцией P_i , $i=1,2\ldots N$ и j-м кластером R_j , $j=1,2\ldots M$; объем данных, подлежащий обработке X.
- **Цель –** минимизация суммарного времени загрузки всех станций

$$F(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N} q_i x_i$$

- **Ограничения:** суммарный объем обрабатываемых данных равен X, объем данных, обрабатываемый каждой i-й станцией больше или равен 0, но меньше или равен P_i , объем данных, обрабатываемый каждым j-м кластером меньше или равен R_j; времена обработки данных кластерами равны.

Линейное программирование.
Алгоритм симплекс-метода
Пример: Размещение данных для обработки в распределенной вычислительной среде

$$\min F(\vec{x}); \qquad F(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N} q_i x_i;$$



$$\sum_{i=1}^{N} x_i = X;$$

$$x_i \ge 0; \qquad x_i \le P_i; \qquad i = 1,2,\ldots,N$$

$$\sum_{i=1}^{m_1} x_i \le R_1; \quad \sum_{i=m_1+1}^{m_2} x_i \le R_2; \ \ldots \ \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} x_i \le R_j; \quad \sum_{i=m_{M-1}+1}^{m_M} x_i \le R_M;$$

$$\sum_{i=m_1+1}^{m_2} q_i x_i = \sum_{i=1}^{m_1} q_i x_i; \qquad \sum_{i=m_2+1}^{m_3} q_i x_i = \sum_{i=1}^{m_1} q_i x_i; \ \ldots \ \sum_{i=m_{M-1}+1}^{m_M} q_i x_i = \sum_{i=1}^{m_1} q_i x_i$$

Линейное программирование.
Алгоритм симплекс-метода
Пример: Размещение данных для обработки в распределенной вычислительной среде: Конкретные данные

- Количество вычислительных кластеров M=3
- Количество рабочих станций N=10
- В первом кластере имеется 4 станции, во втором – 2, в третьем – 4.
- Времена обработки 1Мб данных станциями:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
q_i,сек.	10	4	8	6	2	3	8	2	6	6

- Объем данных для обработки каждой станцией ограничен:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_i, Мб	700	700	700	700	700	700	700	700	700	700

- Объем данных для обработки каждым кластером ограничен :

j	1	2	3
P_i, Мб	400	800	600

- Общий объем данных для обработки X=1000 Мб.
- Времена обработки данных кластерами должны совпадать

Линейное программирование.
Алгоритм симплекс-метода
Пример: Размещение данных для обработки в распределенной вычислительной среде

$$F(\vec{x}) = 10x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 6x_4 + 2x_5 + 3x_6 + 8x_7 + 2x_8 + 6x_9 + 6x_{10}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 400$$
$$x_5 + x_6 \le 800$$
$$x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \le 600$$

$$x_1 \le 700 \quad x_2 \le 700 \quad x_3 \le 700$$
$$x_4 \le 700 \quad x_5 \le 700 \quad x_6 \le 700$$
$$x_7 \le 700 \quad x_8 \le 700 \quad x_9 \le 700$$
$$x_{10} \le 700$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 1000$$

$$10x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 6x_4 - 2x_5 - 3x_6 = 0$$
$$10x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 6x_4 - 8x_7 - 2x_8 - 6x_9 - 6x_{10} = 0$$

Линейное программирование.
Алгоритм симплекс-метода
Пример: Размещение данных для обработки в распределенной вычислительной среде

- Для приведения этой задачи к стандартной форме необходимо в ограничения вида ≤ с неотрицательной правой частью ввести дополнительные (остаточные) переменные:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{11} = 400$$
$$x_5 + x_6 + x_{12} = 800$$
$$x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{13} = 600$$

$$x_1 + x_{14} = 700 \qquad x_2 + x_{15} = 700 \qquad x_3 + x_{16} = 700$$
$$x_4 + x_{17} = 700 \qquad x_5 + x_{18} = 700 \qquad x_6 + x_{19} = 700$$
$$x_7 + x_{20} = 700 \qquad x_8 + x_{21} = 700 \qquad x_9 + x_{22} = 700$$
$$x_{10} + x_{23} = 700$$

Линейное программирование.

Методы нахождения искусственного начального решения.

М-Метод

$$F(\vec{x}) = 10x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 6x_4 + 2x_5 + 3x_6 + 8x_7 + 2x_8 + 6x_9 + 6x_{10}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{11} = 400$$
$$x_5 + x_6 + x_{12} = 800$$
$$x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{13} = 600$$

$$x_1 + x_{14} = 700 \quad x_2 + x_{15} = 700 \quad x_3 + x_{16} = 700$$
$$x_4 + x_{17} = 700 \quad x_5 + x_{18} = 700 \quad x_6 + x_{19} = 700$$
$$x_7 + x_{20} = 700 \quad x_8 + x_{21} = 700 \quad x_9 + x_{22} = 700$$
$$x_{10} + x_{23} = 700$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 1000$$

$$10x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 6x_4 - 2x_5 - 3x_6 = 0$$
$$10x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 6x_4 - 8x_7 - 2x_8 - 6x_9 - 6x_{10} = 0$$

Линейное программирование.
Алгоритм симплекс-метода
Пример: Размещение данных для обработки в распределенной вычислительной среде. Искусственное начальное базисное решение

- Переменных теперь 23, остаточных переменных – 13. Однако, на эти 13 остаточных переменных приходятся 16 уравнений, задающих ограничения.
- С использованием избыточных переменных для формирования начального допустимого базисного решения также проблемы: они входят в уравнения со знаком минус, следовательно нельзя быть уверенным в том, что при нулевом значении одной из переменных все базисные будут неотрицательными
- Действительно, если в формулировке задачи присутствуют ограничения вида равенств или неравенства вида ≥, число уравнений оказывается больше остаточных переменных.
- В этом случае невозможно сформировать начальное допустимое базисное решение из остаточных переменных.
- **В этом случае обычно применяют один из методов, основанных на использовании искусственных переменных**
- Разработано два метода нахождения начального решения, которые используют искусственные переменные:
  - М-метод (метод больших штрафов)
  - двухэтапный метод

Линейное программирование.
Методы нахождения искусственного начального решения.
М-Метод

- Запишем задачу ЛП в стандартной форме.
- Для любого равенства i, в котором не содержится дополнительная остаточная переменная, введем искусственную переменную r_i, которая далее войдет в начальное базисное решение.
- Так как эта переменная искусственная, необходимо, чтобы она обратилась в ноль на следующих итерациях.
- Для этого в выражение целевой функции вводят штраф: к ней добавляют выражение $+Mr_i$ в случе минимизации целевой функции или $-Mr_i$ в случае максимизации.

Линейное программирование.
Методы нахождения искусственного начального решения.
М-Метод

$$\min F(\vec{x}) = 10x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 6x_4 + 2x_5 + 3x_6 + 8x_7 + 2x_8 + 6x_9 + 6x_{10} + \boxed{Mr_1 + Mr_2 + Mr_3}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{11} = 400$$
$$x_5 + x_6 + x_{12} = 800$$
$$x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{13} = 600$$

$$x_1 + x_{14} = 700 \quad x_2 + x_{15} = 700 \quad x_3 + x_{16} = 700$$
$$x_4 + x_{17} = 700 \quad x_5 + x_{18} = 700 \quad x_6 + x_{19} = 700$$
$$x_7 + x_{20} = 700 \quad x_8 + x_{21} = 700 \quad x_9 + x_{22} = 700$$
$$x_{10} + x_{23} = 700$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + r_1 = 1000$$

$$10x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 6x_4 - 2x_5 - 3x_6 + r_2 = 0$$
$$10x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 6x_4 - 8x_7 - 2x_8 - 6x_9 - 6x_{10} + r_3 = 0$$

Линейное программирование.
Методы нахождения искусственного начального решения.
М-Метод

- Использование штрафа М может не привести к исключению искусственных переменных после выполнения последней симплекс-итерации.
- Если исходная задача ЛП не имеет допустимого решения (например, система ограничений несовместна), то в конечной итерации хотя бы одна искусственная переменная будет иметь положительное значение.

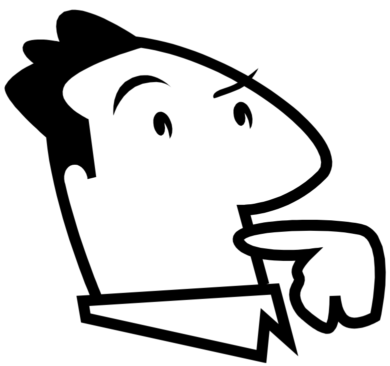
- Величина М при реализации алгоритма на ЭВМ должна быть конечной и в то же время достаточно большой. Она должна быть настолько большой, чтобы успешно выполнять роль штрафа, но не слишком большой, чтобы не уменьшить точность вычислений, в которых участвуют как большие, так и малые числа.
- Правильный выбор значения М зависит от условия задачи. Опасность значительных ошибое округления при неправильном выборе М не позволяет применять М-метод в коммерческих программах, реализующих симплекс-метод.
- Вместо него на практике используется **двухэтапный метод**.

Двухэтапный метод:

- Найти допустимое базисное решение
  - Записать задачу ЛП в стандартной форме.
  - Добавить в ограничения необходимые искусственные переменные (как в М-методе).
  - Решить задачу ЛП минимизации суммы искусственных переменных при имеющихся ограничениях.
  - Если
    - минимальное значение новой целевой функции больше 0, то завершить вычисления, так как исходная задача не имеет допустимого решения,
  - Иначе
    - использовать оптимальное решение, полученное на первом этапе, как начальное допустимое базисное решение исходной задачи.
- Решить модифицированную с учетом полученного базисного решения исходную задачу ЛП

Линейное программирование.
Особые случаи применения симплекс-метода

- Вырожденность
- Альтернативные оптимальные решения
- Неограниченные решения
- Отсутствие допустимых решений



Линейное программирование.

Особые случаи применения симплекс-метода

Вырожденность

- В ходе выполнения симплекс-метода проверка условия допустимости может привести к неоднозначному выбору исключаемой переменной
- В этом случае на следующей итерации одна или более базисных переменных примут нулевое значение и решение будет **вырожденным**
- Вырожденность означает, что в исходной задаче присутствует по крайней мере одно избыточное ограничение
- Пример:

$$max\ F(x_1,x_2)=3x_1+9x_2;$$

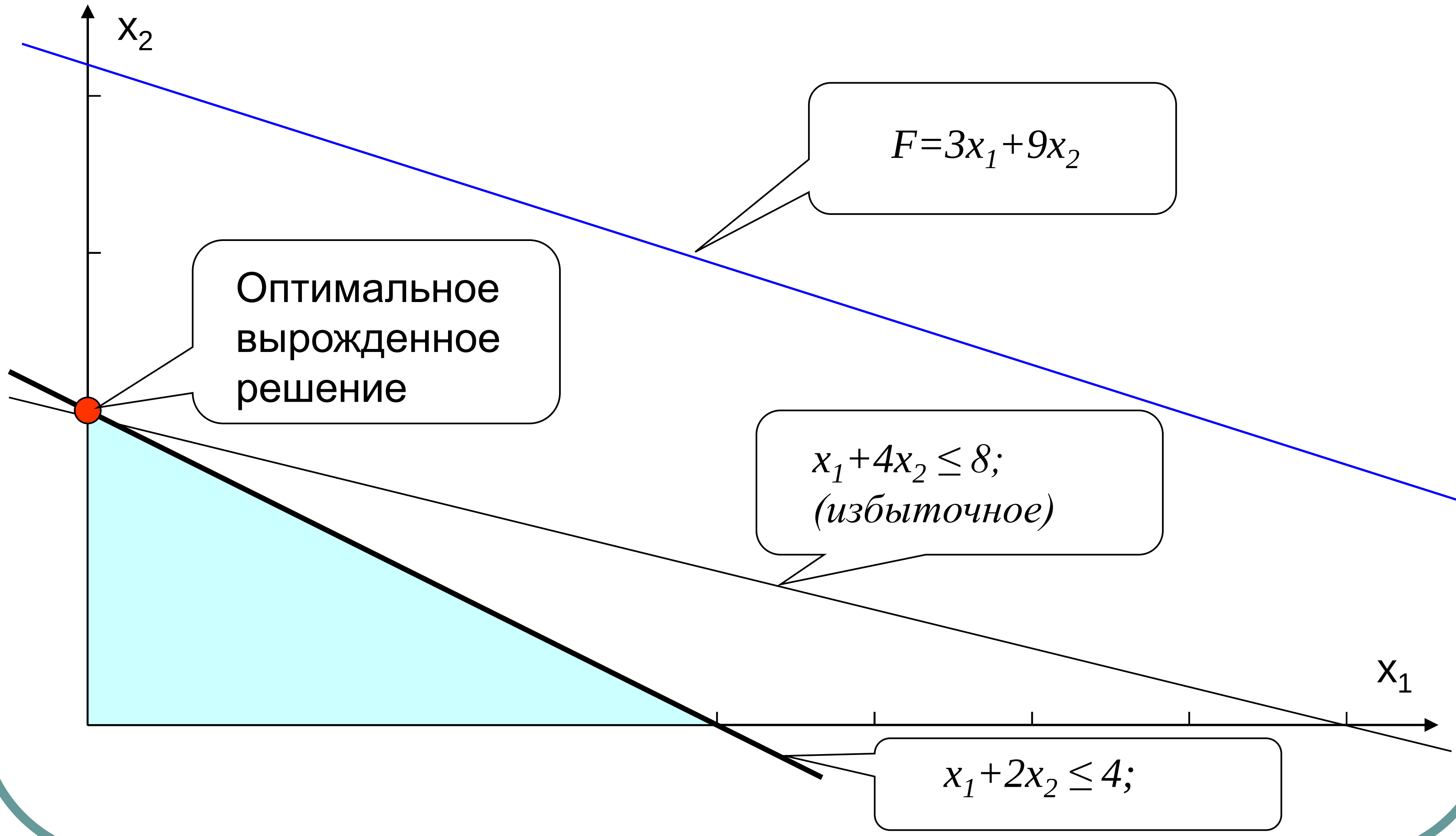
$$x_1+4x_2 \le 8;$$
$$x_1+2x_2 \le 4$$

$$x_1,\ x_2 \ge 0$$

Линейное программирование.

Особые случаи применения симплекс-метода

Выpожденность



Линейное программирование.
Особые случаи применения симплекс-метода
Вырожденность

- Возможные последствия вырожденности:
  - Зацикливание симплекс-метода (некоторая последовательность будет повторяться, не изменяя значения целевой функции и не приводя к завершению вычислительного процесса)
  - В двух последовательных итерациях состав базисных и небазисных переменных может быть различен, но значения всех переменных и целевой функции не меняются. Тем не менее, останавливать вычисления нельзя (решение может быть временно вырожденным).

Линейное программирование.

Особые случаи применения симплекс-метода

Альтернативные оптимальные решения

- Альтернативные оптимальные решения возникают, когда целевая функция принимает одно и то же оптимальное значение на некотором множестве точек границы области допустимых значений.
- Это бывает, когда прямая (в общем случае – гиперплоскость), представляющая целевую функцию параллельна прямой (гиперплоскости), соответствующей связывающему неравенству.
- Связывающее неравенство в точке оптимума выполняется как точное равенство.
- Симплекс-метод может найти угловые точки, затем можно найти остальные.
- Пример:

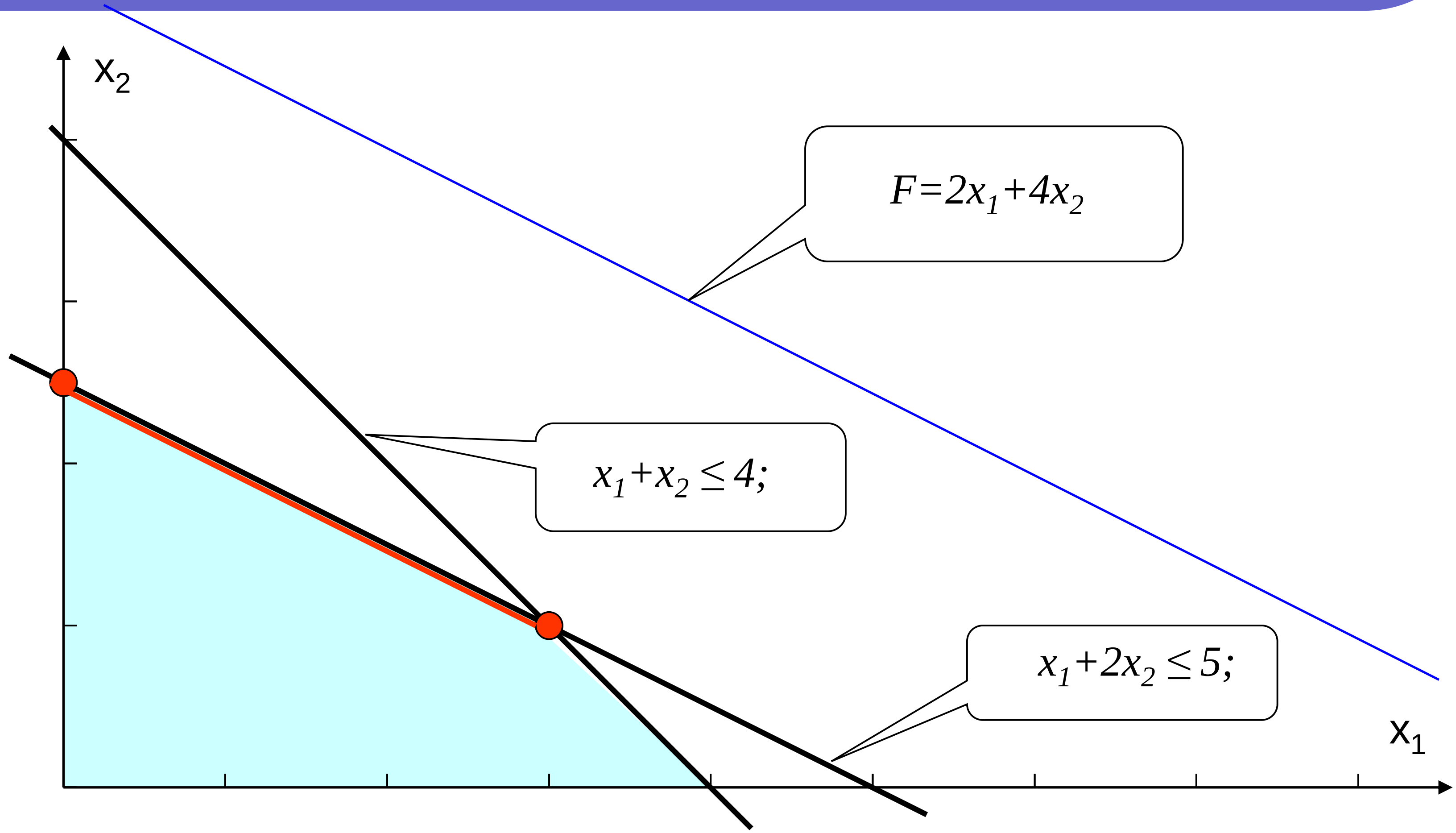
$$max\ F(x_1,x_2)=2x_1+4x_2;$$

$$x_1+2x_2 \le 5;$$
$$x_1+x_2 \le 4$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0$$

Линейное программирование.

Особые случаи применения симплекс-метода

Альтернативные оптимальные решения



Линейное программирование.

Особые случаи применения симплекс-метода

Неограниченные решения

- Если в процессе поиска решения значения переменных могут неограниченно возрастать без нарушения ограничений, то пространство допустимых решений не ограничено по крайней мере по одному направлению.
- В результате этого целевая функция может неограниченно возрастать (убывать в задачах минимизации).
- Неограниченность решения означает, что модель задачи разработана некорректно. Пример:

$$max\ F(x_1,x_2)=2x_1+x_2;$$

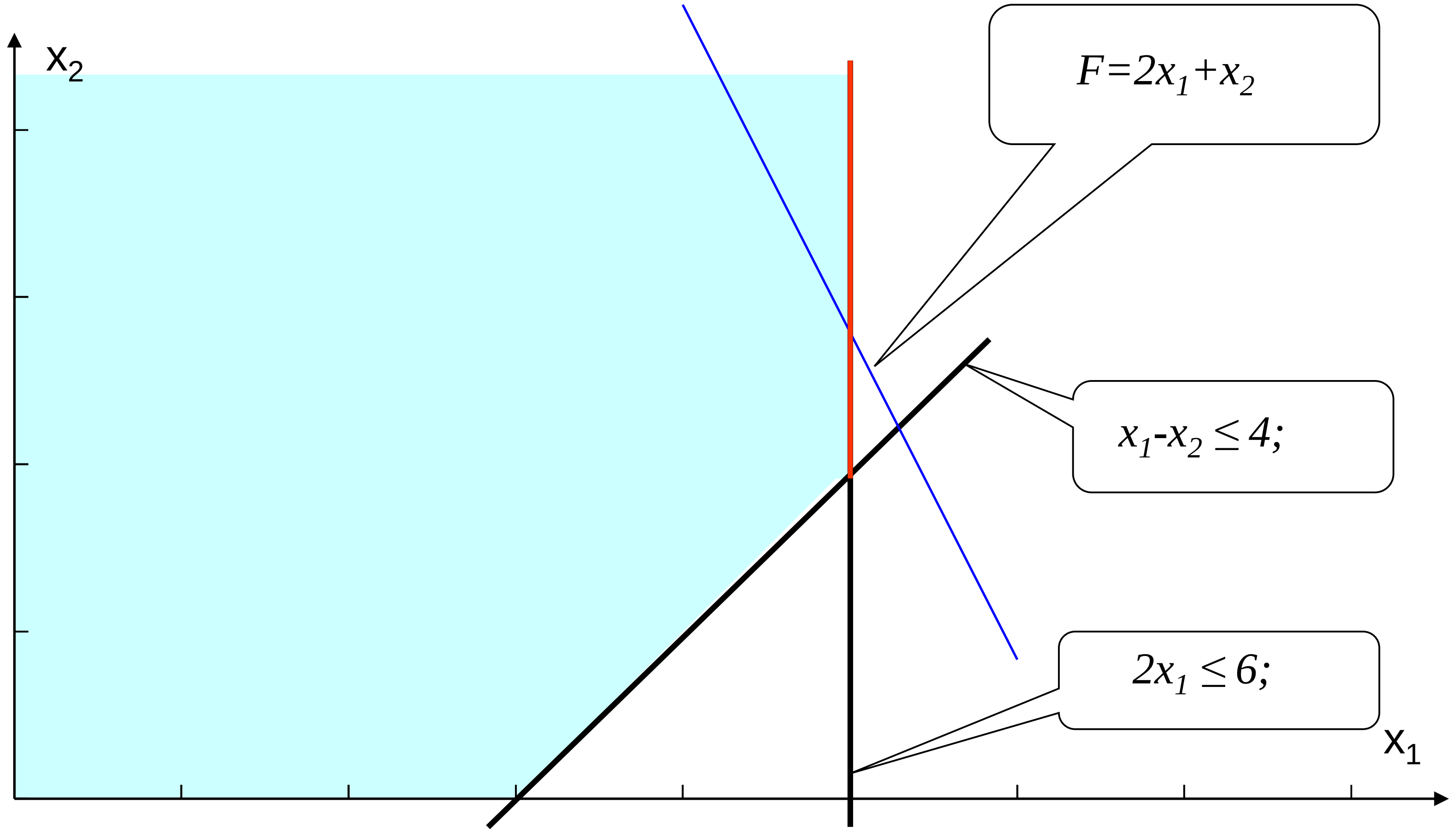
$$x_1 - x_2 \le 4;$$
$$2x_1 \le 6$$

$$x_1,\ x_2 \ge 0$$

Линейное программирование.

Особые случаи применения симплекс-метода

Неограниченные решения



Неограниченные решения

- Правило выявления неограниченности решения:
  - Если на какой-либо симплекс-итерации коэффициенты в ограничениях для какой-нибудь небазисной переменной будут неположительными, значит **пространство решений** не ограничено в направлении возрастания этой переменной.
  - Если, кроме того, коэффициент этой переменной в F-строке отрицателен (задача максимизации) или положителен (в задаче минимизации), **целевая функция** не ограничена.

Линейное программирование.

Особые случаи применения симплекс-метода

Отсутствие допустимых решений

- Если ограничения задачи ЛП несовместны, то задача не имеет допустимых решений.
- Если все ограничения имеют вид неравенств типа ≤ с неотрицательными правыми частями, то дополнительные переменные всегда могут составить допустимое решение.
- Для других типов ограничений используются искусственные переменные и если пространство допустимых решений является пустым, то в решении будет присутствовать хотя бы одна положительная искусственная переменная.
- Отсутствие допустимых решений свидетельствует о некорректной формулировке задачи.
- Пример:

$$max\ F(x_1,x_2)=3x_1+2x_2;$$

$$2x_1 + x_2 \le 2;$$
$$3x_1 + 4x_2 \ge 12;$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Линейное программирование.

Особые случаи применения симплекс-метода

Отсутствие допустимых решений