Воротницкий Ю.И.

Исследование операций

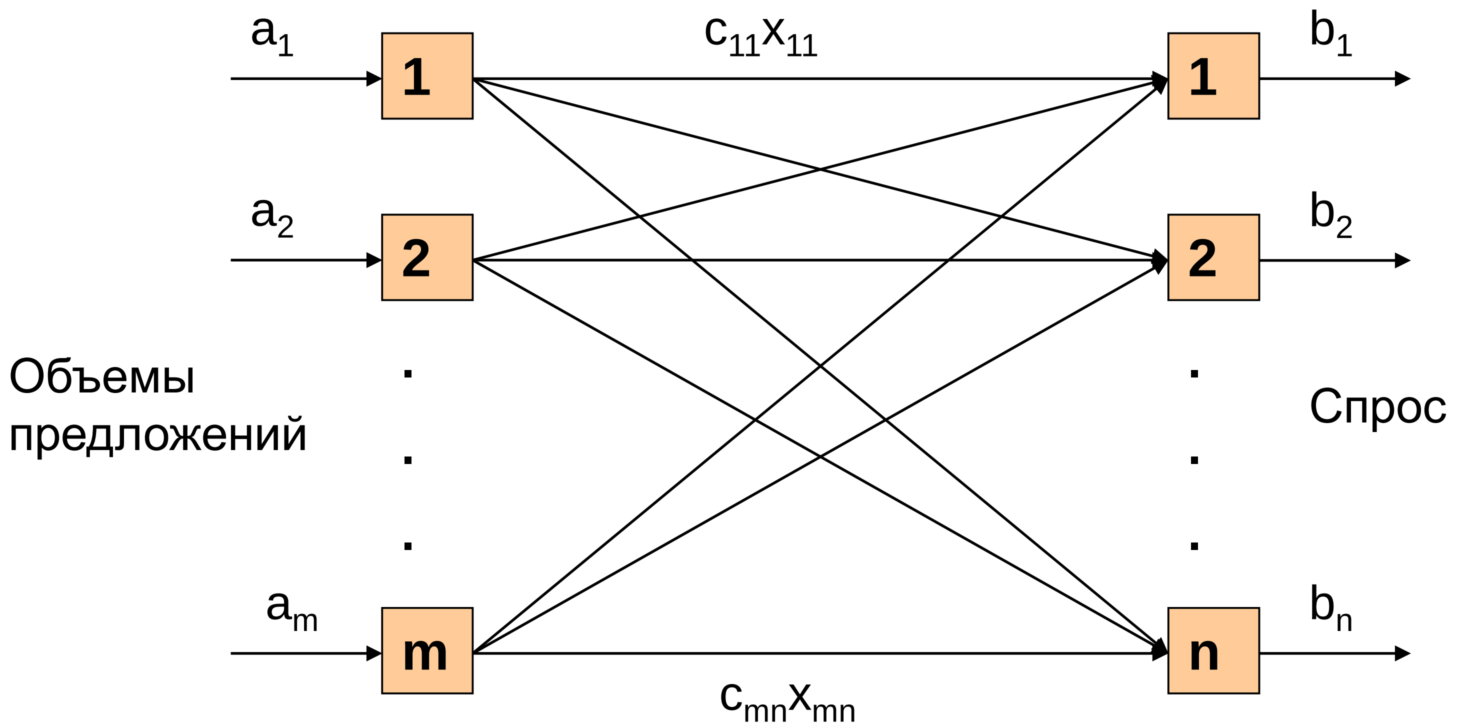
Транспортные модели
Целочисленное программирование

Транспортные модели

Транспортные модели.
Определение транспортной модели.

- Транспортные модели в классической постановке описывают перемещение (перевозку) какого-либо продукта из пунктов отправления в пункты назначения.
- Цель транспортной задачи – определение объемов перевозки из пунктов отправления в пункты назначения с минимальной суммарной стоимостью перевозок.
- При этом должны учитываться ограничения на объемы грузов в пунктах отправления (предложения) и в пунктах назначения (спрос).
- Предполагается, что стоимость перевозки по какому-либо маршруту прямо пропорциональна объему товара.
- Транспортная модель применяется для описания ситуаций, связанных с управлением запасами, составлением расписаний, управлением движением капиталов, назначением персонала и др.
- Транспортная модель может рассматриваться как упрощенная задача нахождения потока минимальной стоимости в сети.

Транспортные модели.
Определение транспортной модели.
Представление транспортной задачи в виде сети.



Транспортные модели.
Принципы построения алгоритма решения

- Последовательность шагов алгоритма решения транспортной задачи:
  1. Определить начальное базисное допустимое решение
  2. На основании условия оптимальности среди всех небазисных переменных определить вводимую в базис. Если все небазисные переменнные удовлетворяют условию оптимальности, завершить вычисления.
  3. С помощью условия допустимости среди текущщх базисных переменных определить исключаемую.
  4. Найти новое базисное решение и перейти к шагу 4.
- Данная последовательность шагов в точности повторяет аналогичную последовательность симплексного алгоритма.

Транспортные модели.
Принципы построения алгоритма решения
Определение начального решения

- Общая трасчспортная модель с m пунктами отправления и n пунктами назначения имеет m+n ограничений.
- В силу сбалансированности транспортной модели одно из этих равенств избыточно. Таким образом, транспортаня модель имеет m+n-1 независимых ограничений, откуда следует, что начальное базисное решение состоит также из m+n-1 переменных.
- Специальная структура транспортной задачи позволяет использовать для построения начальных допустимых базисных решений следующие специальные методы:
  - Метод наименьшей стоимости
  - Метод северо-западного угла
  - Метод Фогеля.
- При изменении базиса в данном случае используется более простой способ, основанный на анализе транспортной таблицы (с помощью метода потенциалов).

Транспортные модели.
Пример постановки транспортной задачи.

- Минский тракторный завод построил три завода в Лос-Анджелесе, Детройте и Новом Орлеане и два дистрибьюторских центра в Денвере и Майами.
- Объемы производства заводов в следующем квартале соответственно составляют 1000, 1500 и 1200 тракторов.
- Ежеквартальнная потребность дистрибьюторских центров составляет 2300 – в Майами и 1400 тракторов в Денвере
- Даны расстояния (в милях) между заводами и дистрибьюторскими центрами.
- Транспортная компания оценивает свои услуги в 8 центов за перевозку одного трактора на одну милю.
- Требуется минимизировать транспортные расходы.

Транспортные модели.
Пример постановки транспортной задачи.

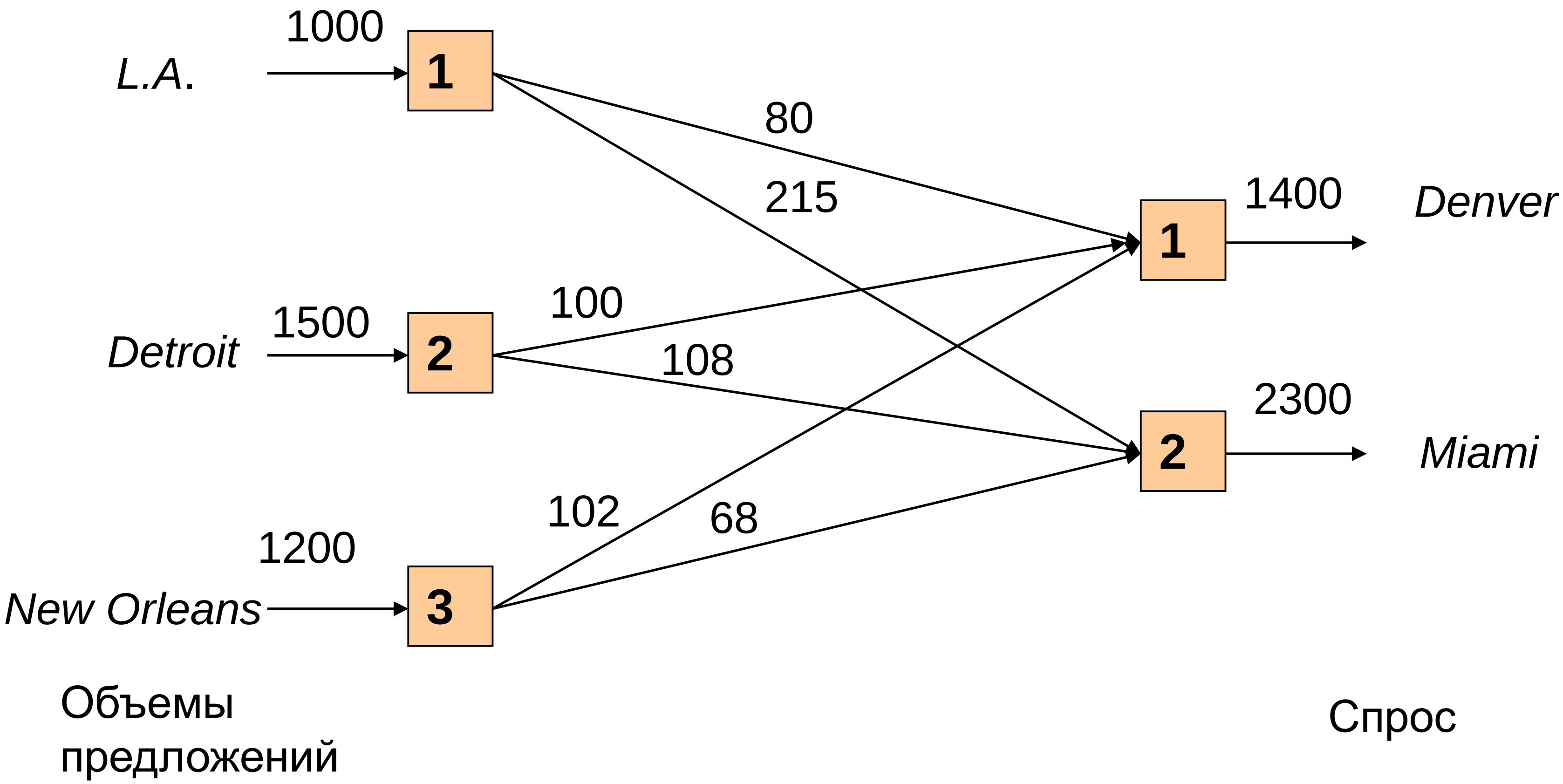
- Таблица расстояний

	Денвер	Майами
Лос-Анджелес	1000	2690
Детройт	1250	1350
Новый Орлеан	1275	850

- Таблица стоимостей (долларов США)

	Денвер	Майами
Лос-Анджелес	80	215
Детройт	100	108
Новый Орлеан	102	68

Транспортные модели.
Пример постановки транспортной задачи.



Транспортные модели.
Метод потенциалов.

	Лос-Анджелес	Детройт	Новый Орлеан	**Спрос**	V
Майами	215	108	68	**2300**	
Денвер	80	100	102	**1400**	
Производ-ство	**1000**	**1500**	**1200**		
U					

Составляем транспортную таблицу (U и V – строка и столбец потенциалов)

Транспортные модели.
Метод потенциалов.

	Лос-Анджелес	Детройт	Новый Орлеан	**Спрос**	V
Майами	**1000** 215	108	68	**2300**	
Денвер	80	100	102	**1400**	
Производство	**1000**	**1500**	**1200**		
U					

Находим начальное базисное решение методом северо-западного угла, удовлетворяя спрос из доступного производства слева направо и сверху вниз.

Транспортные модели.
Метод потенциалов.

	Лос-Анджелес	Детройт	Новый Орлеан	**Спрос**	V
Майами	1000 215	**1300** 108	68	**2300**	
Денвер	80	100	102	**1400**	
Производ-ство	**1000**	**1500**	**1200**		
U					

Находим начальное базисное решение методом северо-западного угла

Транспортные модели.
Метод потенциалов.

	Лос-Анджелес	Детройт	Новый Орлеан	**Спрос**	V
Майами	1000 215	1300 108	 68	**2300**	
Денвер	 80	**200** 100	 102	**1400**	
Производ-ство	**1000**	**1500**	**1200**		
U					

Находим начальное базисное решение методом северо-западного угла

Транспортные модели.
Метод потенциалов.

	Лос-Анджелес	Детройт	Новый Орлеан	**Спрос**	V
Майами	1000 215	1300 108	 68	**2300**	
Денвер	 80	200 100	**1200** 102	**1400**	
Производ-ство	**1000**	**1500**	**1200**		
U					

Находим начальное базисное решение методом северо-западного угла

Транспортные модели.
Метод потенциалов.

	Лос-Анджелес	Детройт	Новый Орлеан	**Спрос**	V
Майами	1000 215	1300 108	 68	**2300**	
Денвер	 80	200 100	1200 102	**1400**	
Производ-ство	**1000**	**1500**	**1200**		
U					

Начальное базисное решение построено.
Значение целевой функции = 497 800

Транспортные модели.
Метод потенциалов.

	Лос-Анджелес	Детройт	Новый Орлеан	**Спрос**	V
Майами	1000 215	1300 108	68	**2300**	
Денвер	80	200 100	1200 102	**1400**	
Производ-ство	**1000**	**1500**	**1200**		
U					

Рассчитываем потенциалы. Потенциалов 5. Базисных переменных и, соответственно, уравнений (заполненных клеток) – 4. План является невырожденным (в ислу сбалансированности задачи число базисных переменных должно быть на 1 меньше, чем количество поставщиков + количество потребителей).
Выбираем заполненную клетку с максимальной ценой перевозки.

Транспортные модели.
Метод потенциалов.

	Лос-Анджелес	Детройт	Новый Орлеан	**Спрос**	V
Майами	1000 215	1300 108	68	**2300**	100
Денвер	80	200 100	1200 102	**1400**	
Производ-ство	**1000**	**1500**	**1200**		
U	115				

Представляем значение транспортного тарифа в виде суммы двух произвольных потенциалов.

Транспортные модели. Метод потенциалов.

	Лос-Анджелес	Детройт	Новый Орлеан	**Спрос**	V
Майами	1000 215	1300 108	68	**2300**	100
Денвер	80	200 100	1200 102	**1400**	
Производ-ство	**1000**	**1500**	**1200**		
U	115				

Далее последовательно рассчитываем потенциалы, исходя из того, что сумма потенциалов в строке и столбце должна быть равна транспортному тарифу в заполненной ячейке.

Транспортные модели.
Метод потенциалов.

	Лос-Анджелес	Детройт	Новый Орлеан	**Спрос**	V
Майами	1000 215	1300 108	68	**2300**	100
Денвер	80	200 100	1200 102	**1400**	
Производ-ство	**1000**	**1500**	**1200**		
U	115	8			

Далее последовательно рассчитываем потенциалы, исходя из того, что сумма потенциалов в строке и столбце должна быть равна транспортному тарифу в заполненной ячейке.

Транспортные модели. Метод потенциалов.

	Лос-Анджелес	Детройт	Новый Орлеан	**Спрос**	V
Майами	1000 215	1300 108	68	**2300**	100
Денвер	80	200 100	1200 102	**1400**	92
Производ-ство	**1000**	**1500**	**1200**		
U	115	8			

Далее последовательно рассчитываем потенциалы, исходя из того, что сумма потенциалов в строке и столбце должна быть равна транспортному тарифу в заполненной ячейке.

Транспортные модели.
Метод потенциалов.

	Лос-Анджелес	Детройт	Новый Орлеан	**Спрос**	V
Майами	1000 215	1300 108	68	**2300**	100
Денвер	80	200 100	1200 102	**1400**	92
Производство	**1000**	**1500**	**1200**		
U	115	8	10		

Далее последовательно рассчитываем потенциалы, исходя из того, что сумма потенциалов в строке и столбце должна быть равна транспортному тарифу в заполненной ячейке.

Транспортные модели.
Метод потенциалов.

	Лос-Анджелес	Детройт	Новый Орлеан	**Спрос**	V
Майами	1000 215	1300 108	68	**2300**	100
Денвер	80	200 100	1200 102	**1400**	92
Производ-ство	**1000**	**1500**	**1200**		
U	115	8	10		

Преобразуем таблицу на основе метода потенциалов. В незаполненные клетки вносим сумму потенциалов из соответствующих строк и столбцов.

Транспортные модели.
Метод потенциалов.

	Лос-Анджелес	Детройт	Новый Орлеан	**Спрос**	V
Майами	1000 215	1300 108	110 68	**2300**	100
Денвер	207 80	200 100	1200 102	**1400**	92
Производ-ство	**1000**	**1500**	**1200**		
U	115	8	10		

Преобразуем таблицу на основе метода потенциалов. В незаполненные клетки вносим сумму потенциалов из соответствующих строк и столбцов.

Транспортные модели.
Метод потенциалов.

	Лос-Анджелес	Детройт	Новый Орлеан	**Спрос**	V
Майами	1000 215	1300 108	110 > 68	**2300**	100
Денвер	207 > 80	200 100	1200 102	**1400**	92
Производ-ство	**1000**	**1500**	**1200**		
U	115	8	10		

Если сумма потенциалов хотя бы в одной незаполненной клетке больше транспортного тарифа в этой клетке, текущее решение (план перевозок) можно улучшить.

Транспортные модели. Метод потенциалов.

	Лос-Анджелес	Детройт	Новый Орлеан	**Спрос**	V
Майами	1000 215	1300 108	110 **>** 68	**2300**	100
Денвер	207 **>** 80	200 100	1200 102	**1400**	92
Производ-ство	**1000**	**1500**	**1200**		
U	115	8	10		

Для улучшения вводим в базис ту переменную, для которой разность между суммой потенциалов и транспортным тарифом максимальна.

Транспортные модели.
Метод потенциалов.

	Лос-Анджелес	Детройт	Новый Орлеан	**Спрос**	V
Майами	1000 215	1300 108	68	**2300**	100
Денвер	80	200 100	1200 102	**1400**	92
Производ-ство	**1000**	**1500**	**1200**		
U	115	8	10		

Для определения исключаемой переменной построим контур, связывающий вводимую переменную и все базисные переменные (с ненулевым трафиком) и выберем клетку с наименьшим трафиком.

Транспортные модели.
Метод потенциалов.

	Лос-Анджелес	Детройт	Новый Орлеан	**Спрос**	V
Майами	1000 - 215	1300 + 108	68	**2300**	100
Денвер	+ 80	200 - 100	1200 102	**1400**	92
Производ-ство	**1000**	**1500**	**1200**		
U	115	8	10		

Поочередно помечаем угловые ячейки цикла знаками + (добавляем объем перевозок) и – (уменьшаем объем). Соответственно вычитаем и добавляем объем перевозок равный минимальному трафику, который можно уменьшить, чтобы не получить отрицательное значение. Это – трафик, соответствующий исключаемой переменной.

Транспортные модели.
Метод потенциалов.

	Лос-Анджелес	Детройт	Новый Орлеан	**Спрос**	V
Майами	800 215	1500 108	68	**2300**	100
Денвер	200 80	100	1200 102	**1400**	92
Производ-ство	**1000**	**1500**	**1200**		
U	115	8	10		

Поочередно помечаем угловые ячейки цикла знаками + (добавляем объем перевозок) и – (уменьшаем объем). Соответственно вычитаем и добавляем объем перевозок равный минимальному трафику, который можно уменьшить, чтобы не получить отрицательное значение. Это – трафик, соответствующий исключаемой переменной.

Транспортные модели.
Метод потенциалов.

	Лос-Анджелес	Детройт	Новый Орлеан	**Спрос**	V
Майами	800 215	1500 108	68	**2300**	100
Денвер	200 80	100	1200 102	**1400**	
Производ-ство	**1000**	**1500**	**1200**		
U	115				

Получили новый план. Значение целевой функции уменьшилось с 497 800 до 458 215
Он невырожденный (5-1 = 4). Рассчитываем потенциалы.

Транспортные модели.
Метод потенциалов.

	Лос-Анджелес	Детройт	Новый Орлеан	**Спрос**	V
Майами	800 215	1500 108	 68	**2300**	100
Денвер	200 80	 100	1200 102	**1400**	35
Производ-ство	**1000**	**1500**	**1200**		
U	115	8			

Получили новый план. Он невырожденный (5-1 = 4). Рассчитываем потенциалы.

Транспортные модели.
Метод потенциалов.

	Лос-Анджелес	Детройт	Новый Орлеан	**Спрос**	V
Майами	800 215	1500 108	167 > 68	**2300**	100
Денвер	200 80	43 100	1200 102	**1400**	35
Производ-ство	**1000**	**1500**	**1200**		
U	115	8	67		

Преобразуем таблицу на основе метода потенциалов. В незаполненные клетки вносим сумму потенциалов из соответствующих строк и столбцов.

Транспортные модели.
Метод потенциалов.

	Лос-Анджелес	Детройт	Новый Орлеан	**Спрос**	V
Майами	800 - 215	1500 108	+ 167 > 68	**2300**	100
Денвер	200 + 80	43 100	1200 - 102	**1400**	35
Производ-ство	**1000**	**1500**	**1200**		
U	115	8	67		

Определяем вводимую в базис переменную. Строим контур.
Определяем исключаемую из базиса переменную.

Транспортные модели.
Метод потенциалов.

	Лос-Анджелес	Детройт	Новый Орлеан	**Спрос**	V
Майами	215	1500 108	800 167 > 68	**2300**	100
Денвер	1000 80	43 100	400 102	**1400**	35
Производ-ство	**1000**	**1500**	**1200**		
U	115	8	67		

Определяем вводимую в базис переменную. Строим контур.
Определяем исключаемую из базиса переменную.

Транспортные модели.
Метод потенциалов.

	Лос-Анджелес	Детройт	Новый Орлеан	**Спрос**	V
Майами	215	1500 108	800 68	**2300**	58
Денвер	1000 80	100	400 102	**1400**	
Производ-ство	**1000**	**1500**	**1200**		
U		50			

Получили новый невырожденный план. Значение целевой функции уменьшилось с 458 215 до 337 200 Рассчитываем потенциалы

Транспортные модели.
Метод потенциалов.

	Лос-Анджелес	Детройт	Новый Орлеан	**Спрос**	V
Майами	46 215	1500 108	800 68	**2300**	58
Денвер	1000 80	144 > 100	400 102	**1400**	92
Производ-ство	**1000**	**1500**	**1200**		
U	-12	50	10		

Получили новый невырожденный план. Рассчитываем потенциалы. Проверяем план на оптимальность. Определяем вводимую переменную. Строим контур.

Транспортные модели.
Метод потенциалов.

	Лос-Анджелес	Детройт	Новый Орлеан	**Спрос**	V
Майами	46 215	1500 108	800 68	**2300**	58
Денвер	1000 80	144 > 100	400 102	**1400**	92
Производ-ство	**1000**	**1500**	**1200**		
U	-12	50	10		

Определяем исключаемую переменную.

Транспортные модели.
Метод потенциалов.

	Лос-Анджелес	Детройт	Новый Орлеан	**Спрос**	V
Майами	46 215	1500 108	800 68	**2300**	58
Денвер	1000 80	144 > 100	400 102	**1400**	92
Производ-ство	**1000**	**1500**	**1200**		
U	-12	50	10		

Получили новый невырожденный план. Рассчитываем потенциалы. Проверяем план на оптимальность. Строим контур.

Транспортные модели.
Метод потенциалов.

	Лос-Анджелес	Детройт	Новый Орлеан	**Спрос**	V
Майами	46 215	1100 108	1200 68	**2300**	58
Денвер	1000 80	400 144 > 100	0 102	**1400**	92
Производ-ство	**1000**	**1500**	**1200**		
U	-12	50	10		

Изменяем объемы перевозок

Транспортные модели.
Метод потенциалов.

	Лос-Анджелес	Детройт	Новый Орлеан	**Спрос**	V
Майами	215	1100 108	1200 68	**2300**	58
Денвер	1000 80	400 100	0 102	**1400**	
Производ-ство	**1000**	**1500**	**1200**		
U		50			

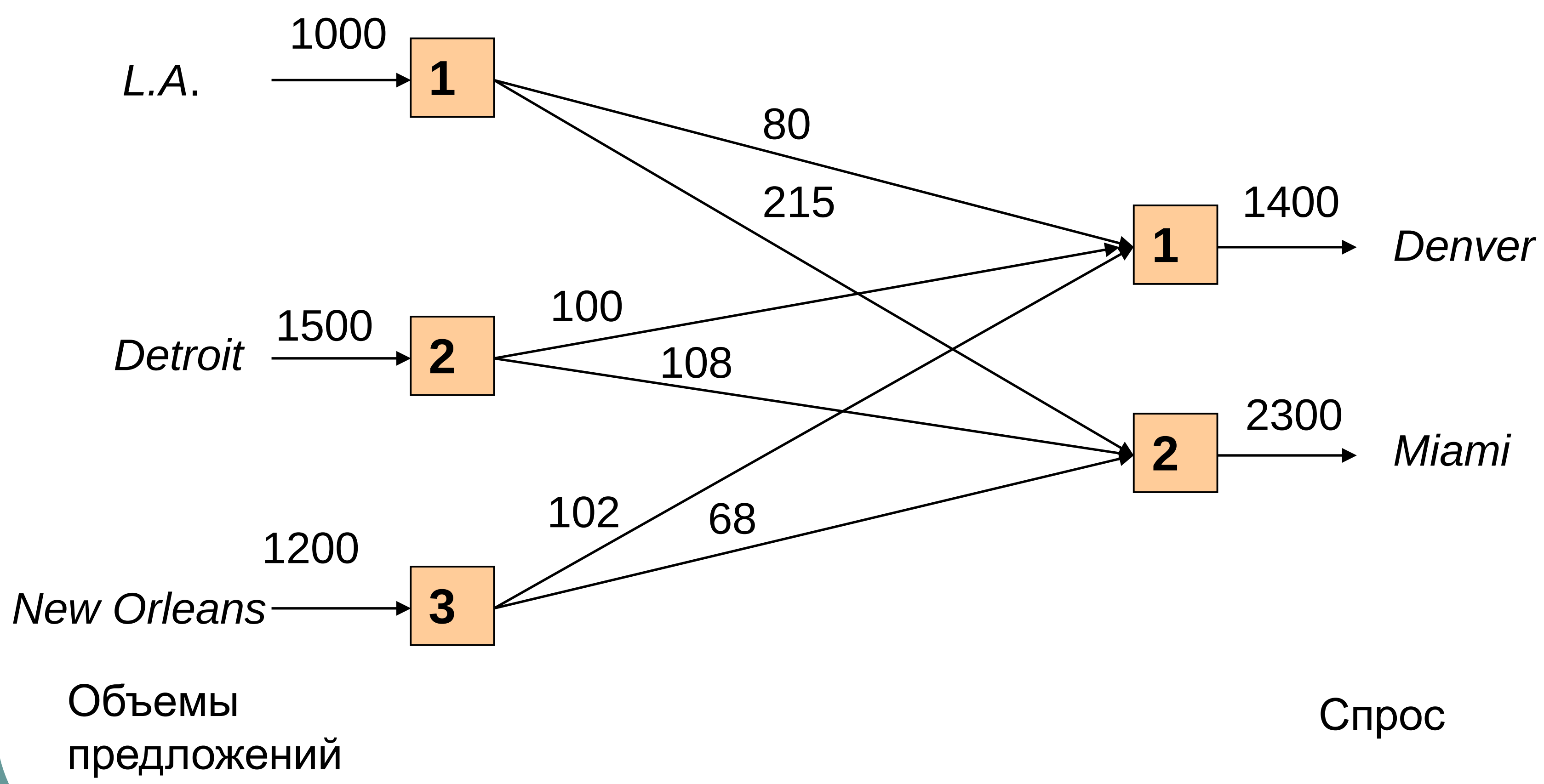
Получили новый невырожденный план. Рассчитываем для него потенциалы и проверяем на оптимальность.

Транспортные модели.
Метод потенциалов.

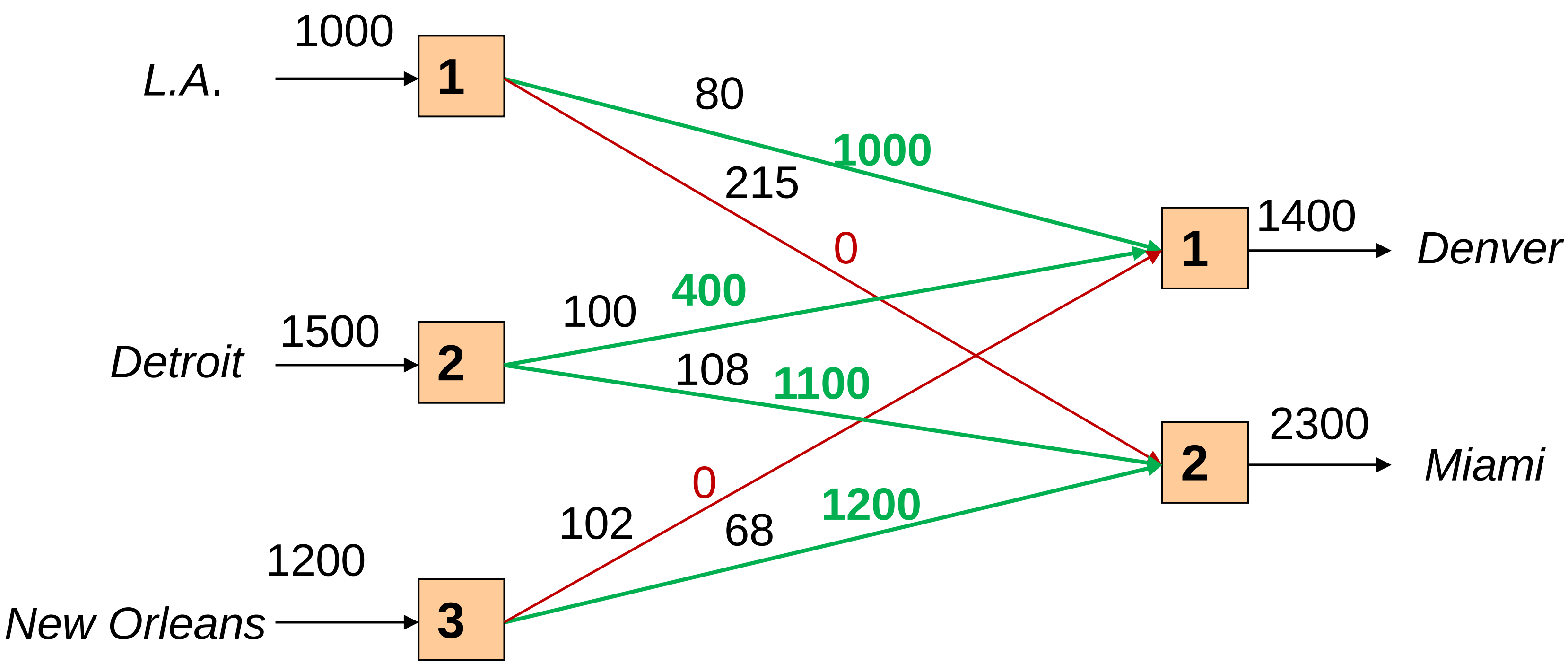
	Лос-Анджелес	Детройт	Новый Орлеан	**Спрос**	V
Майами	88 215	1100 108	1200 68	**2300**	58
Денвер	1000 80	400 100	0 60 102	**1400**	50
Производ-ство	**1000**	**1500**	**1200**		
U	30	50	10		

Получили новый невырожденный план. Рассчитываем для него потенциалы и проверяем на оптимальность. **План является оптимальным. Целевая функция равна 320 400.**

Транспортные модели.
Пример постановки транспортной задачи.



Транспортные модели.
Решение транспортной задачи.



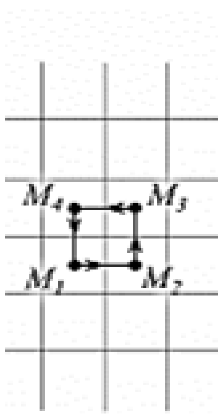
Объемы предложений

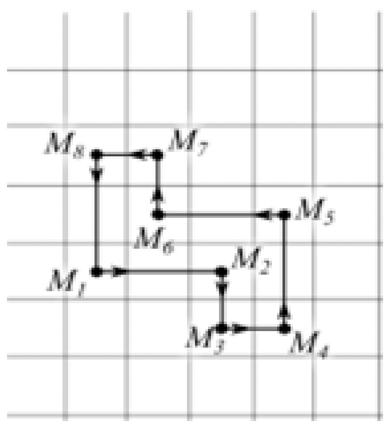
Спрос

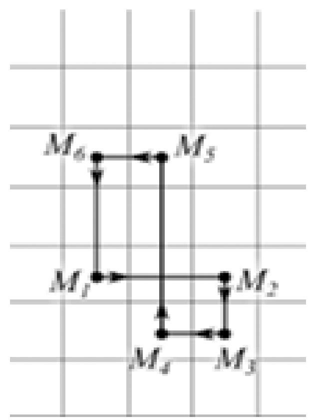
Транспортные модели.
Метод потенциалов. Замечания.

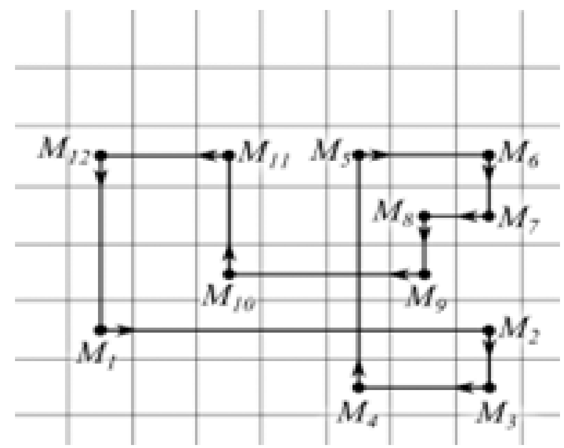
Контур не обязательно является прямоугольником. Он всегда:

- задается горизонтальными и вертикальными линиями, которые могут пересекаться,
- является замкнутым,
- начинается и заканчивается в ячейке вводимой переменной,
- имеет в углах ячейки базисных переменных.









Транспортные модели.
Метод потенциалов. Замечания.

Если есть несколько переменных, которые являются кандидатами на вывод из базиса (с одинаковыми значениями), то *после преобразования таблицы* число ненулевых переменных станет меньше чем число потенциалов -1.

План становится вырожденным. Чтобы этого избежать, из базиса выводят одну переменную, а остальные заполняют нулевыми значениями.

Целесообразно вводить в базис случайную нулевую ячейку. Если алгоритм после этого все равно зацикливается, следует ввести другую ячейку.

См. Статью «Вырожденность в транспортной задаче» на http://cyclowiki.org/

Транспортные модели.
Пример постановки транспортной задачи.

- Основываясь на таблице стоимости, можно было бы рассмотренную транспортную задачу сформулировать как обычную модель линейного программирования

$$\min F=80x_{11}+215x_{12}+100x_{21}+108x_{22}+102x_{31}+68x_{32};$$

$x_{11} + x_{12} = 1000;$ *(производство в Лос-Анджелесе)*

$x_{21} + x_{22} = 1500;$ *(производство в Детройте)*

$x_{31} + x_{32} = 1200;$ *(производство в Новом Орлеане)*

$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1400;$ *(спрос в Денвере)*

$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 2300;$ *(спрос в Майами)*

$x_{ij} \geq 0,\ i=1,2,3,\ \ j=1,2.$

```
NMinimize[{80x11+215x12+100x21+108x22+102x31+68x32,x11+x12==1000,x21+x22==1500,x31+x32==1200,x11+x21+x31==1400,x12+x22+x32==2300,x11>=0,x12>=0,x21>=0,x22>=0,x31>=0,x32>=0},{x11,x12,x21,x22,x31,x32}]
```

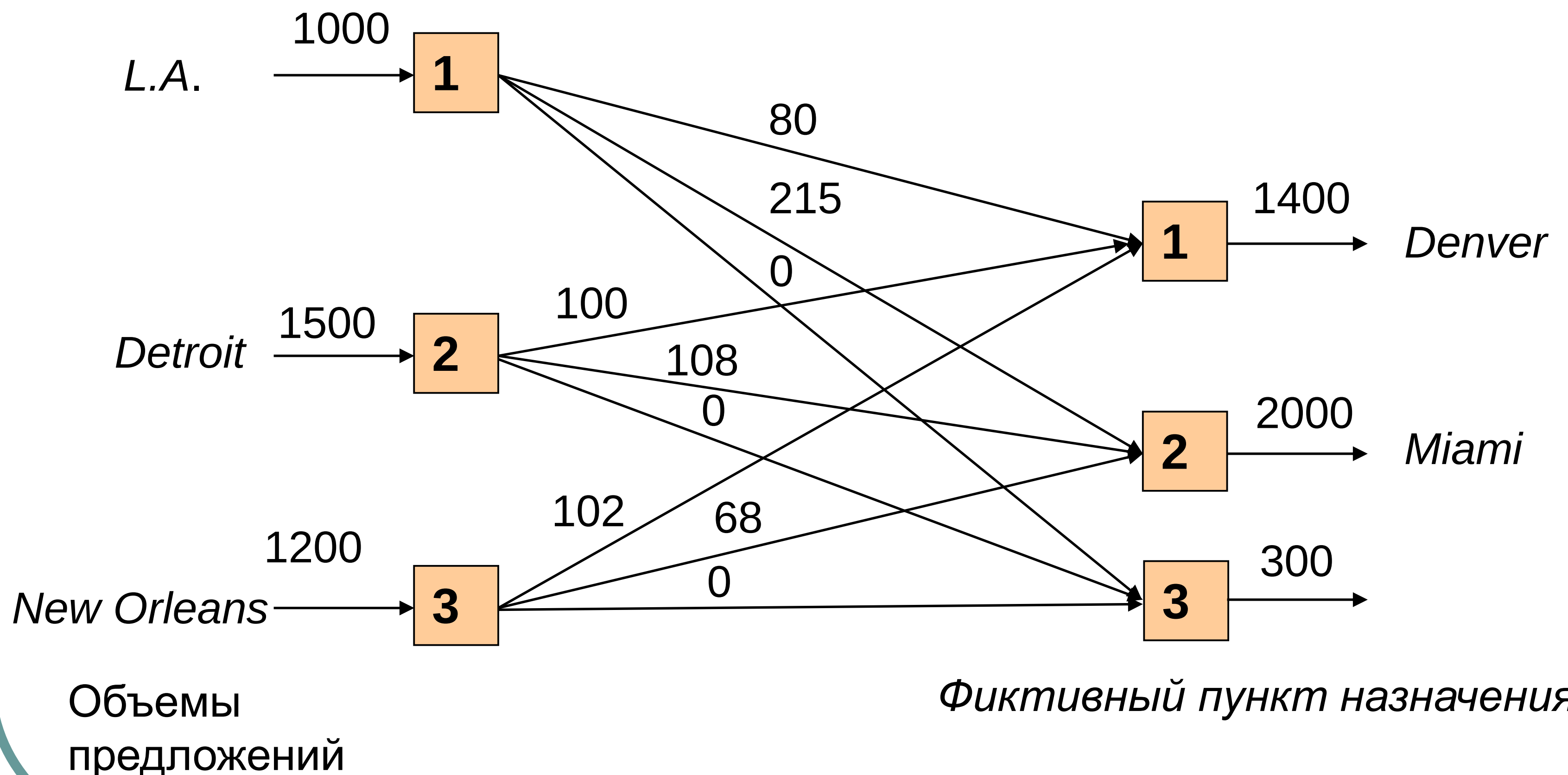
```
{320400., {x11 -> 1000., x12 -> 0., x21 -> 400., x22 -> 1100., x31 -> 0., x32 -> 1200.}}
```

Транспортные модели.
Определение транспортной модели.
Пример постановки транспортной задачи.

- Когда суммарный объем предложений не равен общему объему спроса на товары, транспортная модель называется несбалансированной.
- Для того, чтобы применить для решения транспортной задачи специальный алгоритм, основанный на использовании транспортных таблиц, необходимо преобразовать несбалансрованную модель к сбалансированной.
- Для этого вводят фиктивные пункты назначения или отправления.
- **При использовании стандартного симплекс-метода это необязательно.**

Транспортные модели.
Определение транспортной модели.
Пример постановки транспортной задачи.

- Предположим, спрос на тракторы в Майами упал до 2000 штук.



Транспортные модели.
Определение транспортной модели.
Пример постановки транспортной задачи.

	Лос-Анджелес	Детройт	Новый Орлеан	**Спрос**	V
Майами	215	108	68	**2000**	
Денвер	80	100	102	**1400**	
Фиктивный пункт назначения	0	0	0	**300**	
Производ-ство	**1000**	**1500**	**1200**		
U					

Транспортные модели.
Управление запасами.
Задача о назначениях

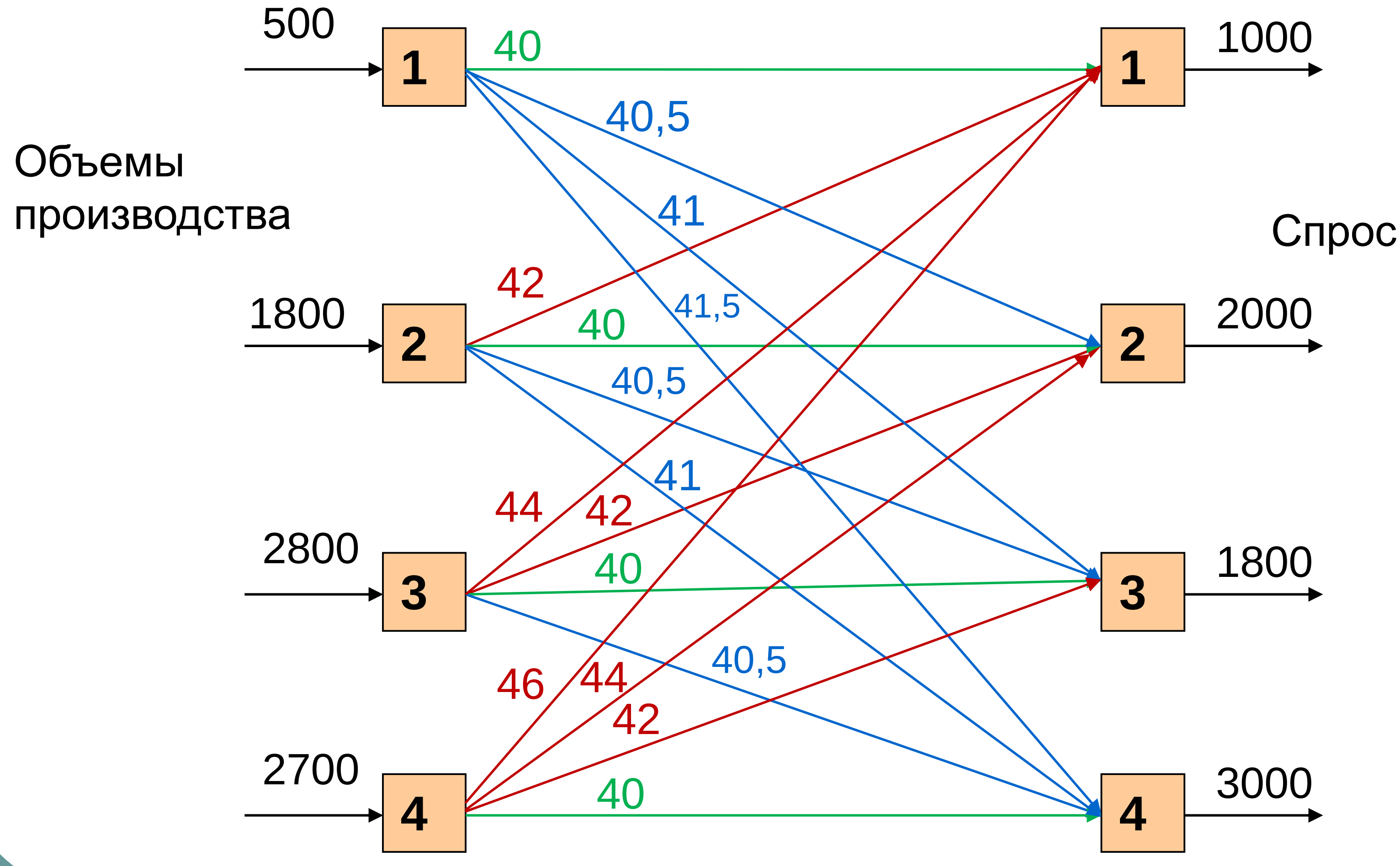
Транспортные модели.
Управление запасами

- Фабрика производит купальные костюмы. В течение года спрос на эту продукцию есть только в мае-августе.
- Фабрика оценивает спрос в эти месяцы соответственно в 1000, 2000, 1800 и 3000 единиц изделия.
- В зависимости от числа задействованных рабочих и производственного оборудования в течение этих месяцев можно выпустить 500, 1800, 2800 и 2700 костюмов соответственно.
- Производство и спрос в различные месяцы не совпадают, спрос в текущем месяце можно удовлетворить следующими способами:
  - производством изделий в текущем месяце (себестоимость - 40 долларов);
  - избытком произведенных в прошлом месяце изделий (стоимость хранения – 0,5 доллара в месяц);
  - избытком произведенных в следующем месяце изделий в счет невыполненных заказов (штраф - 2 доллара за месяц просрочки)

Транспортные модели.
Управление запасами

Транспортная модель	**Модель управления запасами**
Пункт отправления i	Период производства i
Пункт назначения j	Период потребления j
Предложение в пункте отправления i	Объем производства за период i
Спрос в пункте назначения j	Объем реализации продукции за период j
Стоимость перевозки из пункта i в пункт j	Стоимость единицы продукции (производство+хранение+штрафы) за период от i до j

Транспортные модели.
Управление запасами



Транспортные модели.
Определение транспортной модели.
Пример постановки транспортной задачи.

Можно сформулировать следующую задачу линейного программирования

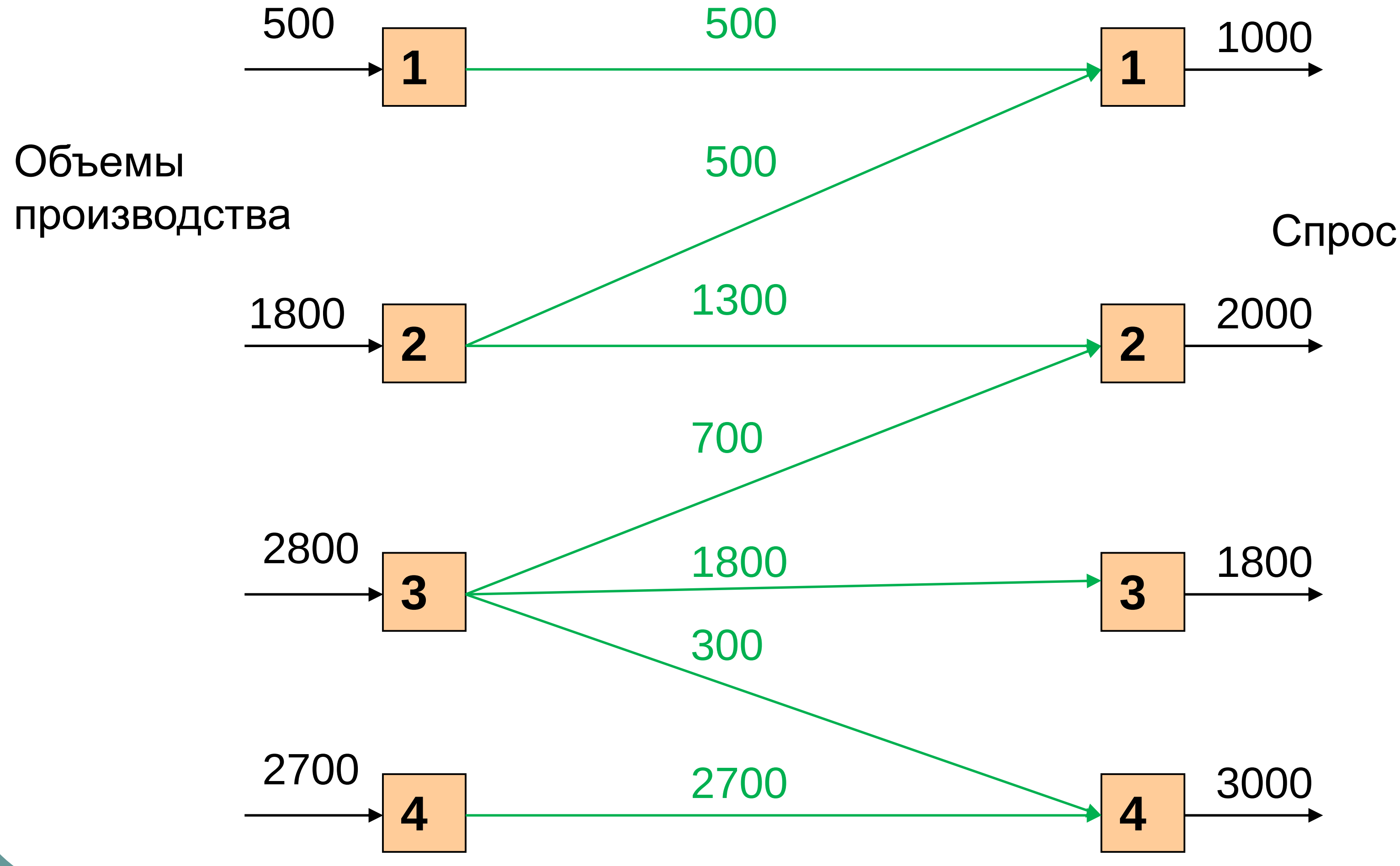
$\min F=0{,}5(x_{12}+x_{23}+x_{34})+(x_{13}+x_{24})+1{,}5x_{14}+2(x_{21}+x_{32}+x_{43})+4(x_{31}+x_{42})+6x_{41}$

$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=500$; *(производство первой фабрики)*
$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1800$; *(производство второй фабрики)*
$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=1800$; *(производство третьей фабрики)*
$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=1800$; *(производство четвертой фабрики)*

$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=1000$; *(спрос в мае)*
$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=2000$; *(спрос в июне)*
$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=1800$; *(спрос в июле)*
$x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=3000$; *(спрос в августе)*

$x_{ij}\ge 0,\ i=1,2,3,4\ \ j=1,2,3,4.$

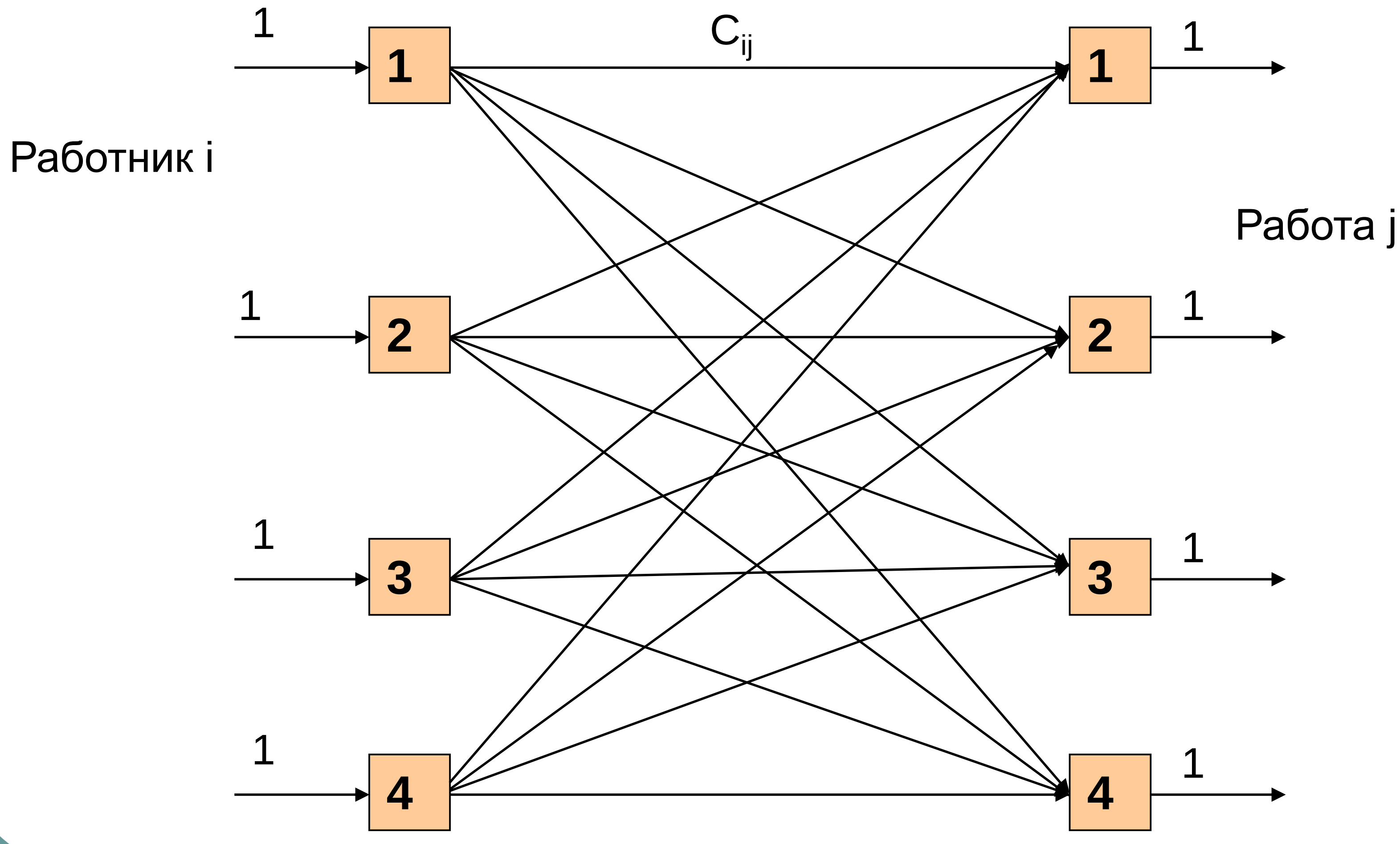
Транспортные модели.
Управление запасами



Транспортные модели.
Задача о назначениях
Постановка задачи

- Необходимо назначить работников на определенные работы.
- Каждый работник может выполнять любую работу, хотя и с различной степенью мастерства.
- Если на некоторую работу назначается работник именно той квалификации, которая необходима для ее выполнения, стоимость выполнения работы будет ниже, чем при назначении работника неподходящей квалификации.
- Цель – найти оптимальное (минимальной стоимости) распределение работников по всем заявленным работам.

Транспортные модели.
Задача о назначениях



Транспортные модели. Задача о назначениях
Постановка задачи

Работы

Работники		1	2	…	n	
	1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	**1**
	2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	**1**
	…	…	…	…	…	**1**
	n	c_{n1}	c_{n2}	…	c_{nn}	**1**
		1	**1**	**1**	**1**	

Транспортные модели. Задача о назначениях
Венгерский метод

1. В исходной матрице стоимостей определить в каждой строке минимальную стоимость и отнять ее от всех элементов строки.
2. В полученной матрице найти в каждом столбце минимальную стоимость и отнять ее от всех элементов столбца.
3. Если допустимое решение получено, то
   1. Оптимальные назначения соответствуют нулевым элементам. Завершить работу.
4. Иначе:
   1. В последней матрице провести *минимальное* число горизонтальных и вертикальных прямых, чтобы вычеркнуть все нулевые элементы.
   2. Найти наименьший невычеркнутый элемент и вычесть его из всех невычеркнутых элементов и прибавить к элементам, стоящим на пересечении проведенных прямых.
   3. Если допустимое решение получено, то оптимальные назначения соответствуют нулевым элементам. Завершить работу. Иначе перейти к 4.

Транспортные модели.
Задача о назначениях
Венгерский метод

Работы

Работники

	1	2	3	4	
1	$1	$4	$6	$3	**1**
2	$9	$7	$10	$9	**1**
3	$4	$5	$11	$7	**1**
4	$8	$7	$8	$5	**1**
	1	**1**	**1**	**1**	

Исходная задача о назначении работников на работы

Транспортные модели.
Определение транспортной модели.
Пример постановки транспортной задачи.

Эту же задачу можно сформулировать как задачу **целочисленного** линейного программирования:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, 2, \ldots n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}$$

Но существенно более эффективен специализированный метод решения (венгерский метод).

Транспортные модели.
Задача о назначениях
Венгерский метод

Работы

Работники		1	2	3	4	
	1	$1	$4	$6	$3	**1**
	2	$9	$7	$10	$9	**1**
	3	$4	$5	$11	$7	**1**
	4	$8	$7	$8	$5	**1**
		1	**1**	**1**	**1**	

Находим в каждой строке минимальную стоимость

Транспортные модели.
Задача о назначениях
Венгерский метод

Работы

Работники		1	2	3	4	
	1	$0	$3	$5	$2	**1**
	2	$2	$0	$3	$2	**1**
	3	$0	$1	$7	$3	**1**
	4	$3	$2	$3	$0	**1**
		1	**1**	**1**	**1**	

Отняли ее от всех элементов строк

Транспортные модели.
Задача о назначениях
Венгерский метод

Работы

Работники

	1	2	3	4	
1	$0	$3	$5	$2	**1**
2	$2	$0	$3	$2	**1**
3	$0	$1	$7	$3	**1**
4	$3	$2	$3	$0	**1**
	1	**1**	**1**	**1**	

Находим в каждом столбце минимальную стоимость

Транспортные модели.
Задача о назначениях
Венгерский метод

Работы

Работники	1	2	3	4	
1	$0	$3	$2	$2	**1**
2	$2	$0	$0	$2	**1**
3	$0	$1	$4	$3	**1**
4	$3	$2	$0	$0	**1**
	1	**1**	**1**	**1**	

Вычитаем из всех элементов соответствующих столбцов (реально – только из третьего). Допустимое решение не получено. Назначив 1-го работника на работу 1 мы лишаем возможности получить работу 3-го работника

Транспортные модели.
Задача о назначениях
Венгерский метод

Работы

Работники	1	2	3	4	
1	$0	$3	$2	$2	**1**
2	$2	$0	$0	$2	**1**
3	$0	$1	$4	$3	**1**
4	$3	$2	$0	$0	**1**
	1	**1**	**1**	**1**	

Вычеркиваем все нулевые элементы с помощью наименьшего числа горизонтальных и вертикальных линий

Транспортные модели.
Задача о назначениях
Венгерский метод

Работы

		1	2	3	4	
Работники	1	$0	$3	$2	$2	**1**
	2	$2	$0	$0	$2	**1**
	3	$0	$1	$4	$3	**1**
	4	$3	$2	$0	$0	**1**
		1	**1**	**1**	**1**	

Находим наименьший невычеркнутый элемент

Транспортные модели.
Задача о назначениях
Венгерский метод

Работы

Работники		1	2	3	4	
	1	$0	$2	$1	$1	**1**
	2	$2	$0	$0	$2	**1**
	3	$0	$0	$3	$2	**1**
	4	$3	$2	$0	$0	**1**
		1	**1**	**1**	**1**	

Вычитаем его из всех невычеркнутых элементов

Транспортные модели. Задача о назначениях
Венгерский метод

Работы

Работники		1	2	3	4	
	1	$0	$2	$1	$1	**1**
	2	$3	$0	$0	$2	**1**
	3	$0	$0	$3	$2	**1**
	4	$4	$2	$0	$0	**1**
		1	**1**	**1**	**1**	

Прибавляем его ($1) к элементам на пересечении линий

Транспортные модели. Задача о назначениях
Венгерский метод

Работы

Работники

	1	2	3	4	
1	$0	$2	$1	$1	**1**
2	$3	$0	$0	$2	**1**
3	$0	$0	$3	$2	**1**
4	$4	$2	$0	$0	**1**
	1	**1**	**1**	**1**	

Получаем допустимое решение: сначала безальтернативные назначения

Транспортные модели.
Задача о назначениях
Венгерский метод

Работы

Работники

	1	2	3	4	
1	$0	$2	$1	$1	**1**
2	$3	$0	$0	$2	**1**
3	$0	$0	$3	$2	**1**
4	$4	$2	$0	$0	**1**
	1	**1**	**1**	**1**	

Полученное допустимое решение

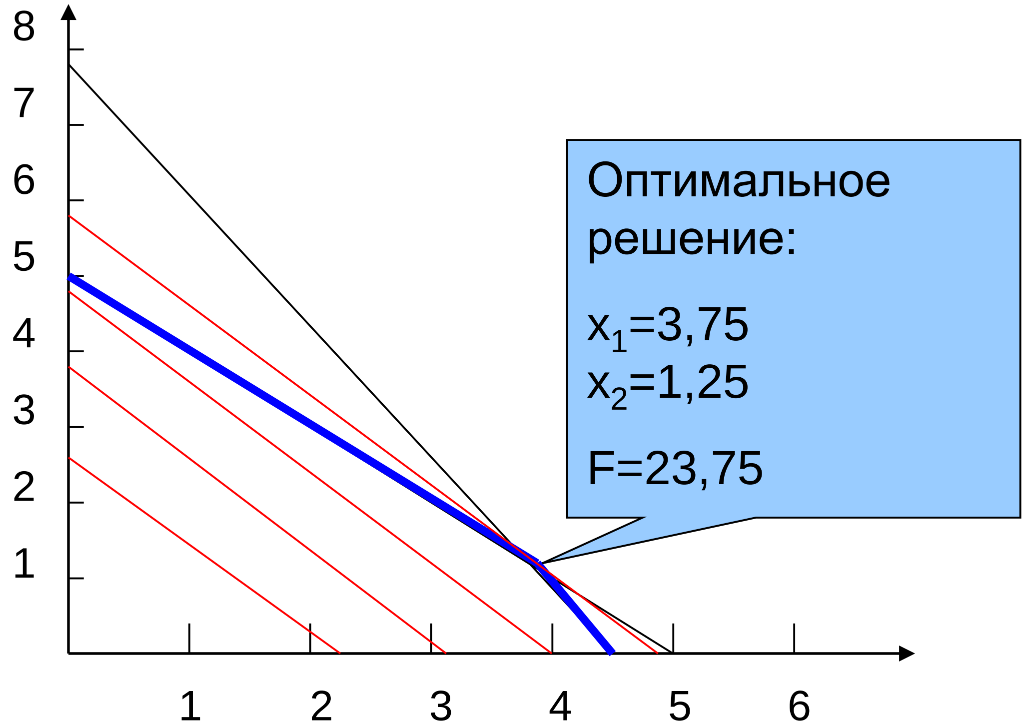
Целочисленное программирование

Целочисленное линейное программирование. Классические методы решения.

- Классические методы решения задач линейного программирования основаны на использовании вычислительных возможностей методов решения непрерывных задач ЛП.
- Обычно алгоритмы целочисленного ЛП можно представить в виде трех основных шагов:
  - «Ослабление» пространства допустимых значений путем отбрасывания требований целочисленности (для двоичных переменных – замена на непрерывные с ограничениями $0 \le x_i \le 1$);
  - Решение задачи ЛП
  - Имея полученное непрерывное оптимальное решение, добавляем специальные ограничения, которые итерационным путем изменяют пространство допустимых решений задачи ЛП таким образом, чтобы получилось оптимальное решение, удовлетворяющее условиям целочисленности.

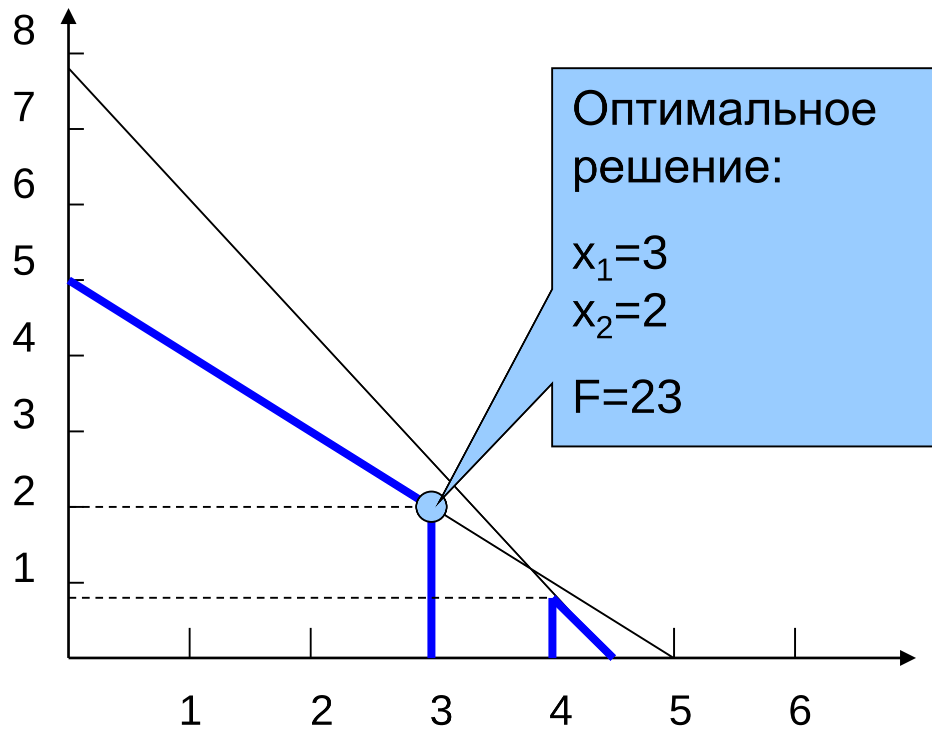
Целочисленное линейное программирование. Классические методы решения.

- Рассмотрим следующую задачу ЛП:
  $max\ F=5x_1+4x_2$
- при ограничениях
  $x_1+x_2 \le 5,$
  $10x_1+6x_2 \le 45,$
  x_1 и x_2 – целые.



Целочисленное линейное программирование. Классические методы решения.

- Рассмотрим две новые задачи:
  $max\ F=5x_1+4x_2$
- 1. при ограничениях
  $x_1+x_2\le 5,$
  $10x_1+6x_2 \le 45,$
  $x_1\le 3,$
- 2. при ограничениях
  $x_1+x_2\le 5,$
  $10x_1+6x_2 \le 45,$
  $x_1\ge 4,$
- x_1 и x_2 – целые.



Целочисленное линейное программирование.
Метод ветвей и границ.