Воротницкий Ю.И.

Исследование операций

Введение.
Модели исследования операций.

Введение

Введение.
Общие сведения об учебном курсе

- Объем курса – **24** часа лекции
  8 часов – дистанционных занятий
  24 часов лабораторные занятия
  4 часа – дистанционных занятий
- Лабораторные занятия выполняются в среде пакета RStudio на языке R
- Форма отчетности – экзамен (6 семестр)
- Преподавание обеспечивает кафедра телекоммуникаций и информационных технологий
- Лектор – Воротницкий Юрий Иосифович, зав. кафедрой

Введение.
Формы проведения занятий

- Лекции – рассматриваются основные понятия, сложные места, ответы на вопросы.
- Обязательным является самостоятельное изучение содержания дисциплины (см. программу и вопросы, выносимые на экзамен)
- Лабораторные работы на языке R.
- Управляемая самостоятельная работа:
- выбрать или согласовать с преподавателем свою тему доклада
- написать доклад и разместить его на edurfe.bsu.by

Введение.
Порядок формирования итоговой оценки

- Оценка промежуточной аттестации – 40%
  - Лабораторный практикум – 50%
  - Реферат – 40%
  - Тесты – 10%

- Экзаменационная оценка – 60%

Лабораторный практикум должен быть выполнен в полном объеме. В противном случае студент не допускается к экзамену.

Введение.
Литература.

Основная

1. **Таха, Х. Введение в исследование операций. / Х. Таха. М.: Издательский дом «Вильямс», 2016. 912 с.**
2. **Бородакий, А.М. Нелинейное программирование в современных задачах оптимизации. / А.М.Бородакий и др. М.: НИЯУ МИФИ, 2011.**
3. Краснопрошин, В.В. Исследование операций. / В.В. Краснопрошин, Н.А. Лепешинский. Мн: БГУ, 2013. 191 с.
4. Исследование операций: задачи, принципы, методология: учебное пособие / Е.С. Вентцель. — 5-е изд., стер. — М.: КНОРУС, 2013. 192 с.
5. Гребенникова, И.В. Методы оптимизации: учебное пособие / И.В. Гребенникова. Екатеринбург: УрФУ, 2017. 148 с.

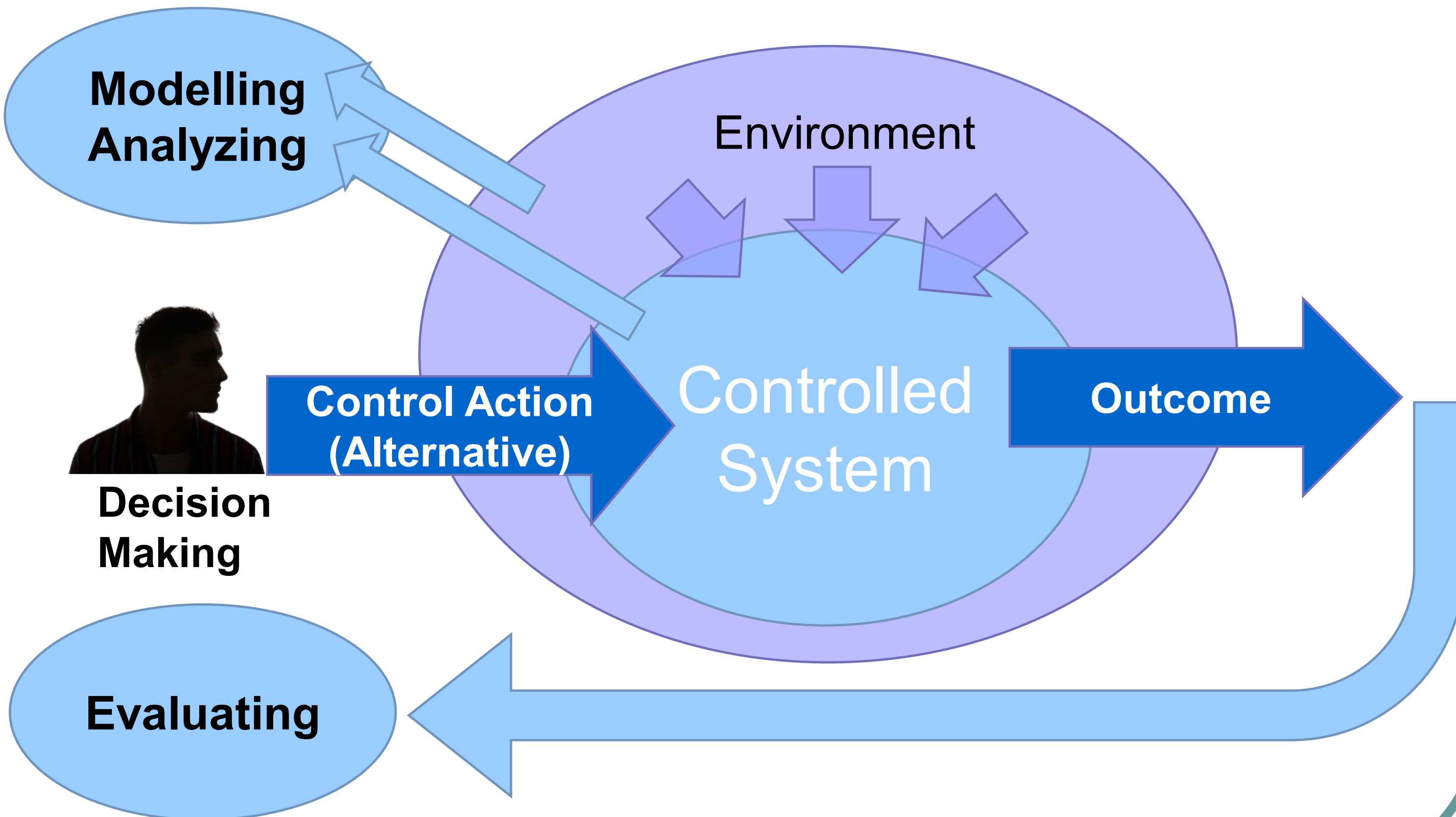
Дополнительная

1. Гладков Л.А., Курейчик В.В., Курейчик В.М. Генетические алгоритмы / Под ред. В.М. Курейчика. – 2-е изд., испр. и доп. - М.: Физматлит, 2006. 320 с.
2. Химмельблау, Д. Прикладное нелинейное программирование. / Д. Химмельблау. М.: Мир, 1975. 534 с.
3. Кудрявцев, Е.М. Исследование операций в задачах, алгоритмах и программах. / Е.М. Кудрявцев. М.: Радио и связь, 1984. 287с.
4. Макаров, И.М. Теория выбора и принятия решений. / И.М. Макаров. М.: Наука, 1981. 376с.
5. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. – М.: Мир, 1982.
6. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. – М.: Наука, 1983.
7. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. – М.: Мир, 1974.
8. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975

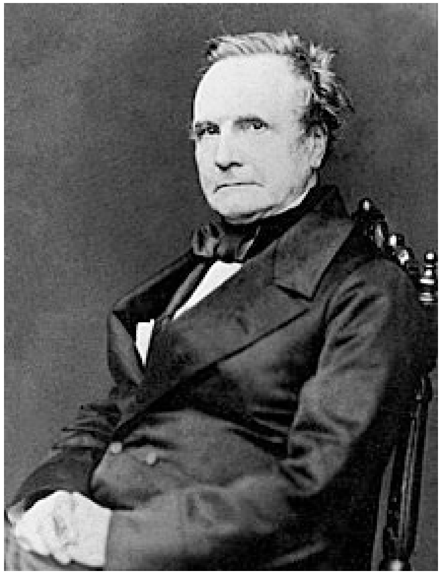
Введение.
Предмет дисциплины.

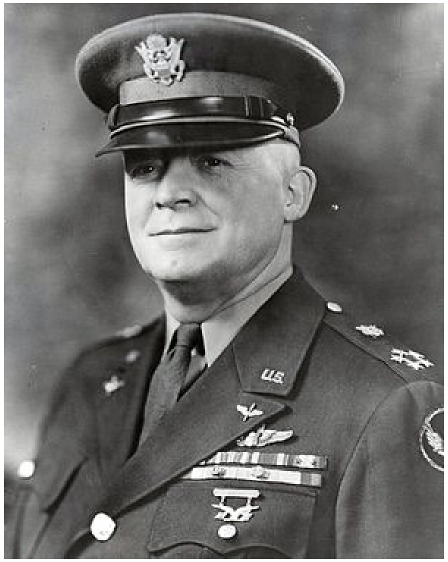
- **Исследование операций** – применение научных методов к сложным проблемам управления большими системами. Для этого строятся математические модели систем, при помощи которых можно рассчитать и сравнить результаты различных решений, стратегий и управлений. Цель – помочь управлению научно определить свою политику и действие.
Журнал Operational Research Quarterly

Введение.
Предмет дисциплины.



Введение.
Предмет дисциплины.





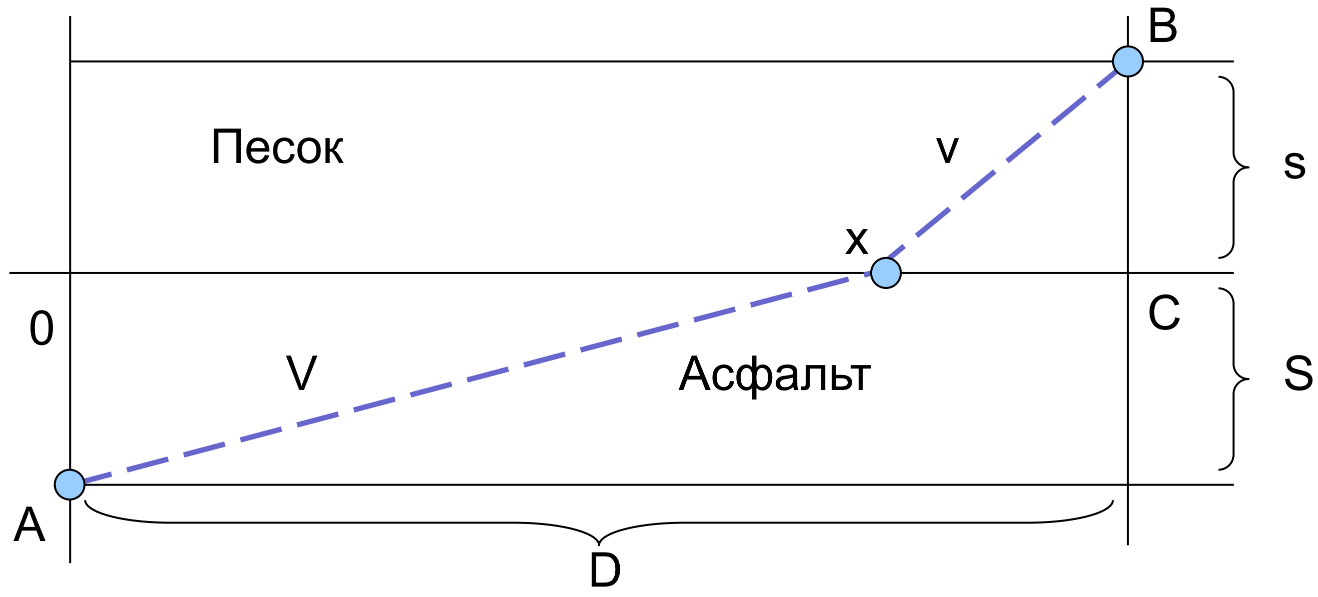
- Чарльз Бэббидж (1791-1871)
  - Разработка первого программируемого цифрового компьютера
  - Оптимизация операций в почтовом офисе Соединенного Королевства
- Патрик Блэкет (1897-1974)
  - Американская медаль за заслуги (за исследовательские работы в связи с противолодочной войной), 1946
  - Нобелевская премия по физике, 1948 (исследования космических лучей)
- Генри Харли Арнольд (1886-1950)
  - Генерал ВВС США
  - Инициатор создания RAND Corporation
  - Планировал все боевые операции ВВС США в годы второй мировой войны
  - Инициатор разработок в области реактивной авиации

Введение.
Предмет дисциплины.

- **Исследование операций** – дисциплина, изучающая количественные методы построения последовательности действий (операций), приводящих к реализации оптимальных решений в условиях наличия альтернатив и ограничений.
- Наличие оптимального решения предполагает существование критерия отбора альтернатив.
- В общем случае в задачах принятия решений альтернативы описываются определенным набором переменных (параметров), которые используются при формализации критерия оптимальности и ограничений.

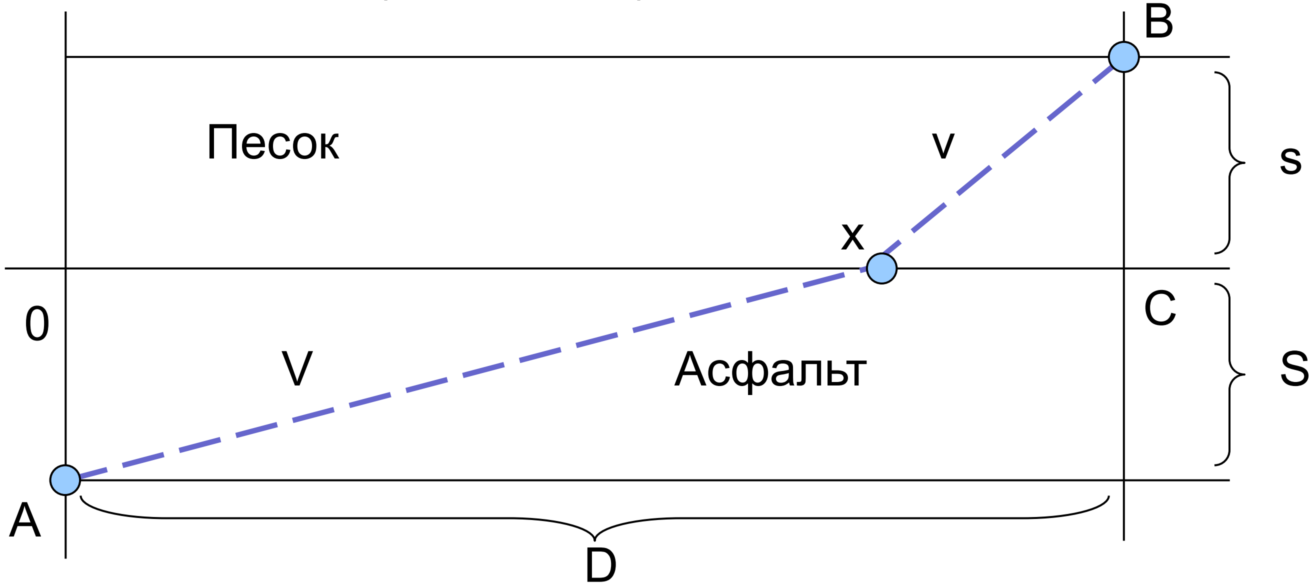
Введение.
Предмет дисциплины. Примеры

- **Пример 0.1.**
  Чтобы попасть из пункта A (остановка автобуса) в пункт B (лодочная станция) человек должен пройти сначала по асфальтовой дороге шириной S (отрезок Ax), а затем по песчаному пляжу шириной s (отрезок xB). Скорость передвижения по асфальту V, скорость передвижения по песку v. Спрашивается, в каком месте нужно свернуть с асфальтовой дороги, чтобы затратить меньше времени на путь.



Введение.
Предмет дисциплины. Примеры

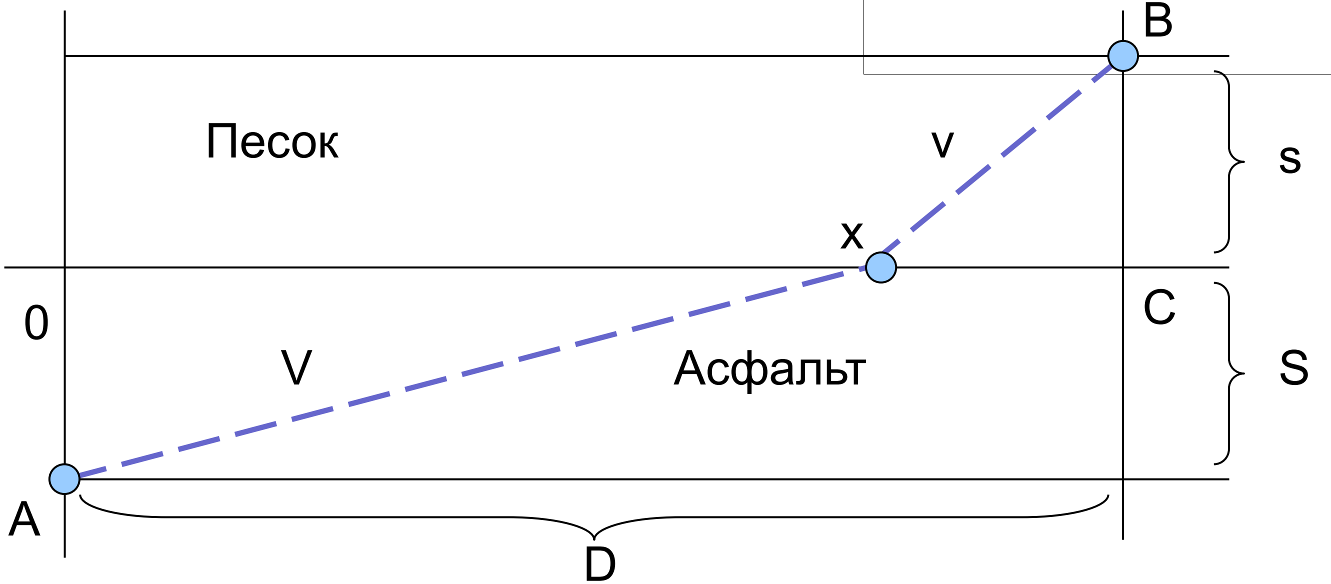
- **Множество альтернатив** задачи – бесконечное множество вещественных чисел x из интервала [0,D].
- Каждому решению соответствует исход или результат – маршрут AxB, требующий для прохождения время t.
- Каждый **исход** оценивается численно временем t.
- Критерий оптимальности задается функцией t(x), которую надо минимизировать, изменяя варьируемый параметр x. Остальные параметры задачи (v, V, D, s, S) являются фиксированными.



Введение.
Предмет дисциплины. Примеры

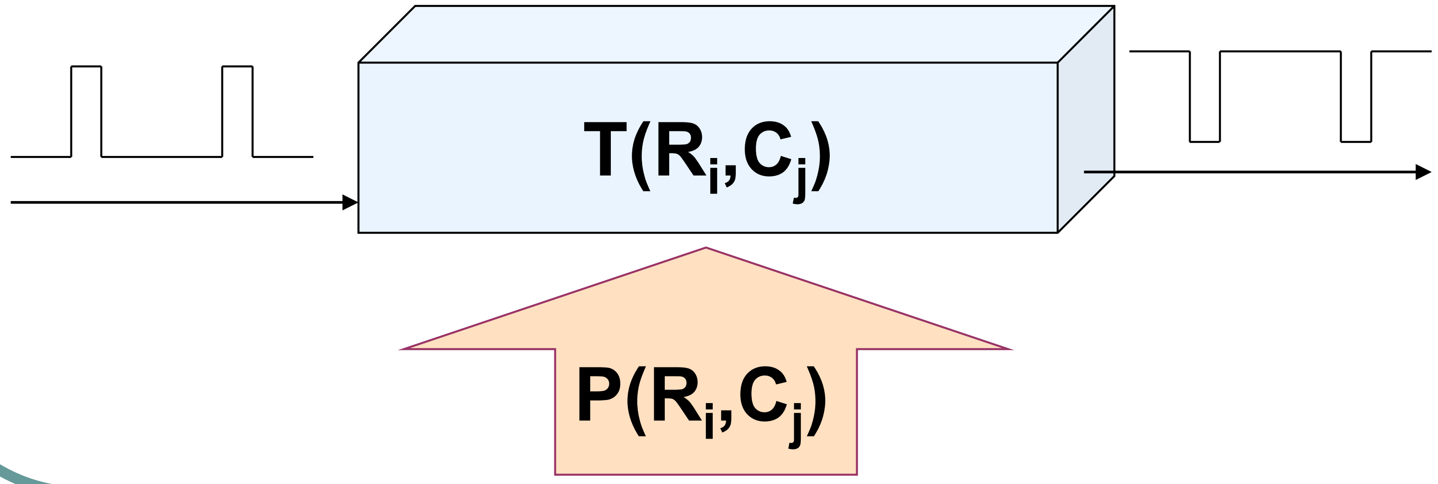
- **Это – однокритериальная задача принятия решений в условиях определенности при отсутствии ограничений на варьируемые параметры.**

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + S^2}}{V} + \frac{\sqrt{(D-x)^2 + s^2}}{v}; \qquad \min t(x) \Rightarrow \begin{array}{l} \dfrac{dt}{dx} = 0; \\ \dfrac{d^2 t}{dx^2} > 0; \end{array}$$



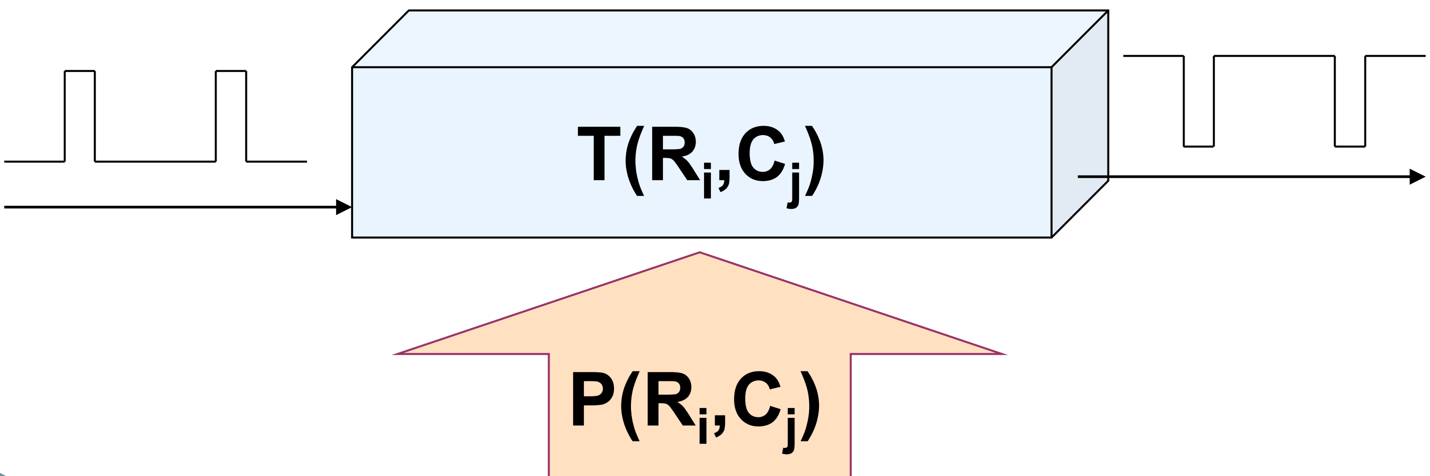
Введение.
Предмет дисциплины. Примеры

- **Пример 0.2**
  Проектируется электронная схема. Кроме обычных функциональных требований принципиально важны два параметра: потребляемая схемой мощность P и время задержки распространения сигнала T.
- В процессе проектирования можно варьировать значения параметров пассивных элементов: сопротивлений R_i, $R_i \in [0,\infty]$ и емкостей C_j, $C_j \in [0,C_{max}]$. Функциональные зависимости $P(R_i,C_j)$ и $T(R_i,C_j)$ известны (заданы и программно реализованы алгоритмы расчета, то есть построена математическая модель устройства).



Введение.
Предмет дисциплины. Примеры

- Множество альтернатив задачи – бесконечное множество наборов вещественных значений R_i и C_j, причем последние варьируются в некоторых границах (присутствуют ограничения сверху C_{max}). Каждому фиксированному набору $RC=(R_1,R_2\ldots R_n, C_1,C_2,\ldots C_m)$ соответствуют определенные значения P и T.
- Исходами в данной задаче являются пары чисел (P,T), соответствующие каждой альтернативе – набору RC.
- **Это – многокритериальная задача принятия решений в условиях определенности при наличии ограничений на варьируемые параметры.**

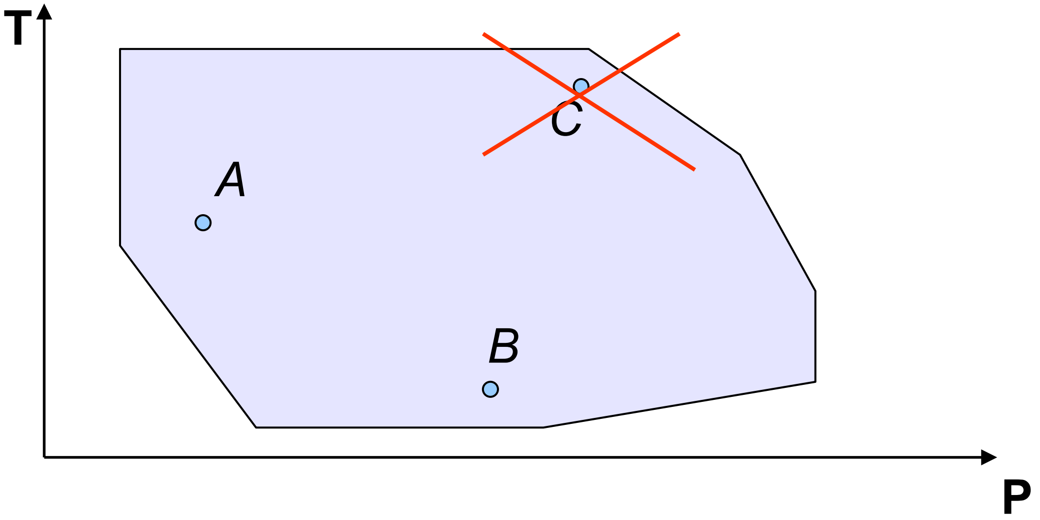


Введение.
Предмет дисциплины. Примеры

$$\begin{cases} \min P(R_i, C_j); \\ \min T(R_i, C_j); \end{cases} \quad R_i \in [0, \infty], \; C_j \in [0, C_{\max}];$$

$$i = 1, \ldots, n; \;\; j = 1, \ldots, m.$$

Дополнительные ограничения на значения варьируемых параметров R_i и C_j могут задаваться, исходя из функциональных требований к устройству.



Введение.
Предмет дисциплины. Примеры

- **Пример 0.3.**
  Студент, войдя в автобус № 47 решает, брать ли билет. Исход определяется двумя обстоятельствами: решением студента и фактом появления контролера.
- Имеются две альтернативы: брать билет, не брать билет и два состояния окружающей среды: контролер появился и контролер не появился. Известны количество остановок, которые нужно преодолеть и вероятность появления контролера в пределах одного перегона.
- Количественная оценка возможных четырех исходов – денежные потери, которые надо минимизировать.
- **Это – пример однокритериальной задачи принятия решений в условиях неопределенности.**

Альтернатива	Состояние среды	
	Контролер появится	Контролер не появится
Брать билет	0,75	0,75
Не брать билет	29	0

Введение.
Предмет дисциплины. Примеры

- **Пример 0.4.**
  Арестованы два подозреваемых в совершении разбойного нападения. Полного доказательства вины нет, и результат судебного разбирательства полностью зависит от поведения подозреваемых.
- У каждого подозреваемого есть две альтернативы: сознаться в разбое или нет. Возможные исходы представлены в таблице.

Первый обвиняемый	Второй обвиняемый	
	Не признался	Признался
Не признался	(2 года, 2 года)	(10 лет, 0 лет)
Признался	(0 лет, 10 лет)	(7 лет, 7 лет)

- Оба не признались – получили по 2 года за незаконное хранение оружия. Один признался, другой нет – первый за выдачу сообщника и сотрудничество получает условный срок, второй - садится на 10 лет. Признались оба – наказание смягчается до 7 лет каждому.
- **Это – задача принятия решения в условиях конфликта**, решаемая методами теории игр.

Введение.

Предмет дисциплины.

Основные модели исследования операций

Степень неопределенности информации	Вид модели							
	Условной оптимизации			Комбинаторная	Графовая	Массового обслуживания	Управления запасами	Конфликтной ситуации
	Линейная	Нелинейная	Целочисленная					
Детерминированная								
Вероятностная								
Нечеткая								
Отсутствие информации	Экспертные оценки Имитационное моделирование							

Общая схема решения задач исследования операций

- Этапы решения задач исследования операций:
  1. **Формализация исходной проблемы**
  2. **Построение математической модели**
  3. **Поиск оптимального решения (решение модели)**
  4. **Проверка адекватности модели**
  5. **Реализация решения**
- Из всех этапов только третий достаточно точно определен и прост в силу хорошо проработанной математической теории. Выполнение остальных этапов в значительной мере является искусством, а не наукой.
- На всех этапах, предшествующих получению оптимального решения математической модели, успех зависит от опыта и творчества всей команды (специалистов-аналитиков и заказчиков задачи принятия решений), занимающейся решением задачи исследования операций

Модели исследования операций

Общая схема решения задач исследования операций

- **Формализация исходной проблемы**
  - предполагает исследование предметной области, где возникла рассматриваемая проблема
  - описание возможных альтернативных решений
  - выбор варьируемых параметров
  - определение критерия оптимальности
  - построение системы ограничений
- **Построение математической модели**
  - перевод формализованной задачи на язык математических соотношений
  - попытка построить математическую модель как одну из стандартных математических моделей
  - если модель очень сложная и не приводится к стандартному типу, ее следует упростить, либо применить эвристический подход, либо методы имитационного моделирования

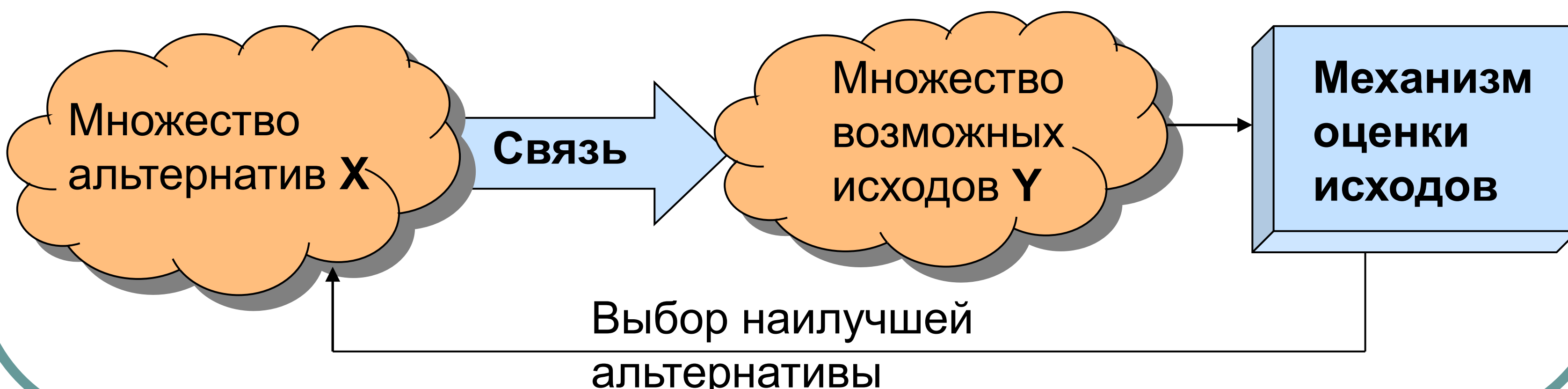
Модели исследования операций.
Общая схема решения задач исследования операций

- **Поиск оптимального решения (решение модели)**
  - Применение известных методов оптимизации, методов имитационного моделирования или эвристических подходов
  - Исследование чувствительности оптимального решения к отклонению варьируемых параметров
- **Проверка адекватности модели**
  - Оценка полученного решения: имеет ли оно смысл и приемлемо ли интуитивно
  - Сравнение полученного решения с известными ранее моделями или поведением реальной системы
- **Реализация решения**
  - Перевод результатов решения модели в рекомендации, комплекты технической документации или другие документы, понятные для лиц принимающих решение – заказчиков решения исходной проблемы

Модели исследования операций. Сравнение исходов и выбор альтернатив

Модели исследования операций.
Сравнение исходов и альтернатив

- **Четыре ключевых вопроса постановки любой задачи исследования операций:**
  1. Что в данном случае считать альтернативными решениями?
  2. Каким ограничениям должно удовлетворять возможное решение?
  3. Каков **характер связи** альтернатив и исходов?
  4. По какому критерию **отдать предпочтение** тем или иным альтернативным решениям?



Модели исследования операций.
Оценка исходов.
Системы предпочтений.

- Для выбора наилучшего решения необходимо задать систему предпочтений, позволяющую сравнивать различные исходы.
- Существуют различные способы задания системы предпочтений лица, принимающего решение.
- Важно, что формирование системы предпочтений никак не ограничивается характером связи альтернатив и исходов

Модели исследования операций.
Оценка исходов
Системы предпочтений.

- **Основные способы формального описания системы предпочтений:**
  - **Критериальный** (задание критериев оптимальности и сопоставление каждому исходу одной или нескольких числовых характеристик, значения которых определяют предпочтительность того или иного исхода с точки зрения соответствующего критерия)
  - **С помощью бинарных отношений** (отдельный исход сам по себе не оценивается и четкие критерии оценки могут не формироваться; сравниваются пары исходов с точки зрения предпочтительности одного перед другим)
  - **Использование функций выбора** (выделение из некоторого множества альтернатив лучших вариантов).

Модели исследования операций.
Оценка исходов.
Системы предпочтений.

- ## Критериальный способ описания системы предпочтений
  - **Критерий оптимальности – правило, позволяющее оценивать исходы и сравнивать их между собой.**
  - Обычно критерий оптимальности дает возможность объективно оценить каждый возможный исход независимо от других.
  - Простейшая ситуация: каждый исход y можно оценить конкретным вещественным числом в соответствии с некоторым заданным отображением: **F: Y→R.**
  - Сравнение исходов сводится к сравнению соответствующих вещественных чисел: исход $\vec{y}_k$ может считаться более предпочтительным, чем $\vec{y}_l$, если $F(\vec{y}_k) > F(\vec{y}_l)$. Исходы $\vec{y}_k$ и $\vec{y}_l$ эквивалентны, если $F(\vec{y}_k) = F(\vec{y}_l)$.
  - **Функция F называется *целевой функцией*.**

Модели исследования операций.
Оценка исходов.
Системы предпочтений.

- **Критериальный способ описания системы предпочтений**

Однокритериальная задача:

$$F:Y \to R; \quad \forall \vec{y}_k, \vec{y}_l \in Y:$$
$$F(\vec{y}_k) > F(\vec{y}_l) \Rightarrow \vec{y}_k \succ \vec{y}_l$$
$$F(\vec{y}_k) = F(\vec{y}_l) \Rightarrow \vec{y}_k \sim \vec{y}_l$$

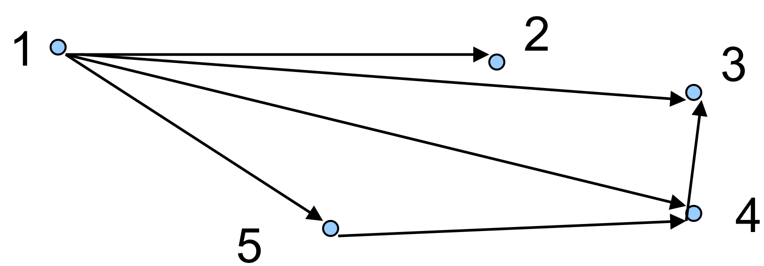
Однокритериальная детерминированная задача:

$$\exists \psi(\vec{x}): \ \vec{y} = \psi(\vec{x}) \Rightarrow$$
$$F = F(\vec{y}) = F(\psi(\vec{x})) = F(\vec{x});$$
$$F(\vec{x}_k) > F(\vec{x}_l) \Rightarrow \vec{y}_k \succ \vec{y}_l;$$
$$F(\vec{x}_k) = F(\vec{x}_l) \Rightarrow \vec{y}_k \sim \vec{y}_l.$$

Модели исследования операций. **Оценка исходов.** Системы предпочтений.

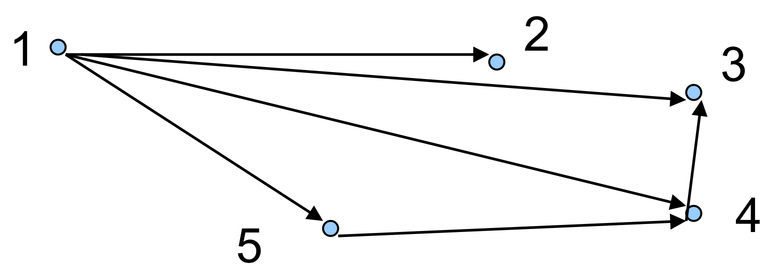
- **Язык бинарных отношений**
- Отдельный исход сам по себе не оценивается и критериальные (целевые) функции не вводятся.
- Каждая пара исходов $\vec{y}_k$, $\vec{y}_l$ может находиться в одном из следующих бинарных отношений:
  - первый предпочтительнее второго (строго доминирует);
  - первый не менее предпочтителен, чем второй (не строго доминирует);
  - первый эквивалентен второму;
  - первый и второй исходы несравнимы между собой

- **Язык бинарных отношений**
- Бинарным отношением на множестве Y называется произвольное подмножество B множества Y^2, где Y^2 – множество всех упорядоченных пар ($\vec{y}_k$, $\vec{y}_l$): B⊆Y^2.
- Наглядный способ задания бинарных отношений на конечных множествах – с помощью направленных графов:
  - Если задано отношение B ⊆ Y^2 и ($\vec{y}_k$,$\vec{y}_l$) ∈ B, то проведем стрелку от $\vec{y}_k$ к $\vec{y}_l$. Если ($\vec{y}_k$, $\vec{y}_k$) ∈ B, то нарисуем петлю-стрелку, начинающуюся и заканчивающуюся в этой точке.



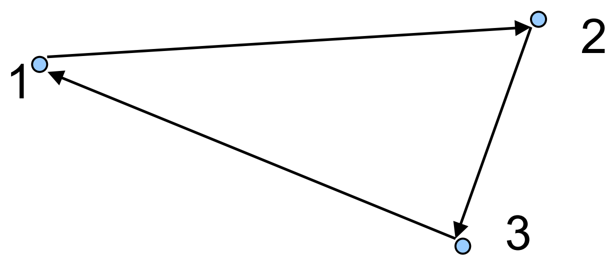
Модели исследования операций.
Оценка исходов.
Системы предпочтений.

- **Язык бинарных отношений**
- Основной вопрос: пусть на множестве Y задана система предпочтений в виде бинарного отношения B (чаще всего – отношение строгого доминирования). Что понимать под решением задачи выбора? Какими свойствами обладает построенная нами система предпочтений?
- Очевидным является следующее *определение*: пусть задана модель <Y,B>. Элемент $\vec{y}^* \in$ Y называется наилучшим по B в Y, если $(\vec{y}^*, \vec{y}) \in \mathrm{B}\ \forall \vec{y} \in \mathrm{Y} / \vec{y}^*$



Модели исследования операций.
Оценка исходов.
Системы предпочтений.

- **Пример 1.1**
- Молодой кандидат наук выбирает место будущей работы, исходя из следующих альтернатив:
  1. ассистент в Университете с окладом 250 у.е.
  2. доцент в техническом университете с окладом 350 у.е.
  3. зав. кафедрой в международном институте заготовки рогов и копыт с окладом 450 у.е.
- Критерии предпочтительности:
  - Заработок
  - Престиж вуза и возможность дальнейшей научной работы
  - Ученый построил для себя следующее отношение предпочтения на данном множестве исходов:



Модели исследования операций.
Сравнение альтернатив.
Системы предпочтений.

- **Функции выбора**
- Идея – выделение из некоторого множества альтернатив подмножества «лучших» вариантов.
- Пусть X – множество (может быть и бесконечное) всех возможных альтернатив. Тогда через 2^X обозначим множество всех подмножеств X. Среди всех подмножеств X выделяется класс XD допустимых предъявлений $XD \subseteq 2^X$.
- *Определение:* функцией выбора на классе допустимых предъявлений XD называется функция $\mathbf{C}: XD \to 2^X$, такая, что для любого множества $A \in XD$ выполняется $\mathbf{C}(A) \subseteq A$.

Функции выбора

- Таким образом, функция выбора ставит в соответствие каждому множеству альтернатив (из класса допустимых предъявлений) некоторое его подмножество. В результате происходит сужение предъявляемого выбора альтернатив, что моделирует процесс выбора нужных («лучших») вариантов.
- Основное достоинство функций выбора – моделирование сложных принципов выбора (например – выбор «типичного» или «среднего» варианта из предложенного множества альтернатив).
- Введение механизма предъявления множеств является принципиальным для практических применений. Ошибочно полагать, что класс допустимых предъявлений совпадает с множеством всех подмножеств 2^X. В действительности оказывается доступным лишь некоторое подмножество $XD \subseteq 2^X$.

Модели исследования операций.
Сравнение альтернатив.
Системы предпочтений.

- **Пример 1.2**
- Функция выбора, осуществляющая выбор эффективных точек в многокритериальной задаче проектирования электронной схемы:

$$\begin{cases} \min P(R_i, C_j); \\ \min T(R_i, C_j); \end{cases} \quad R_i \in [0, \infty], \; C_j \in [0, C_{\max}];$$

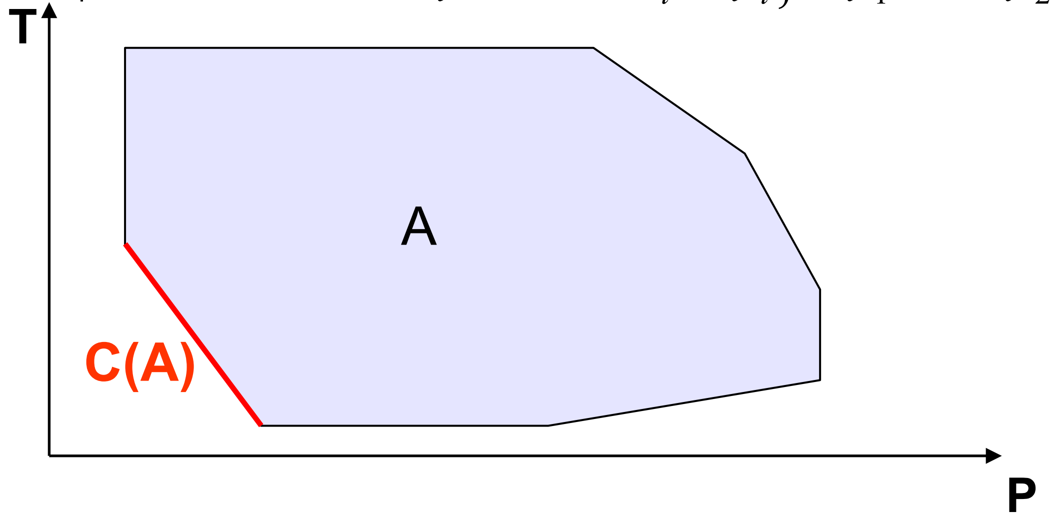
$$i = 1, \ldots, n; \;\; j = 1, \ldots, m.$$

$$\vec{y} = (P, T) \in A; \quad A : \begin{cases} R_i \in [0, \infty]; \\ C_j \in [0, C_{\max}]; \\ P \in [0, P_{\max}]; \\ T \in [0, T_{\max}]; \end{cases}$$

Модели исследования операций.
Оценка исходов.
Системы предпочтений.

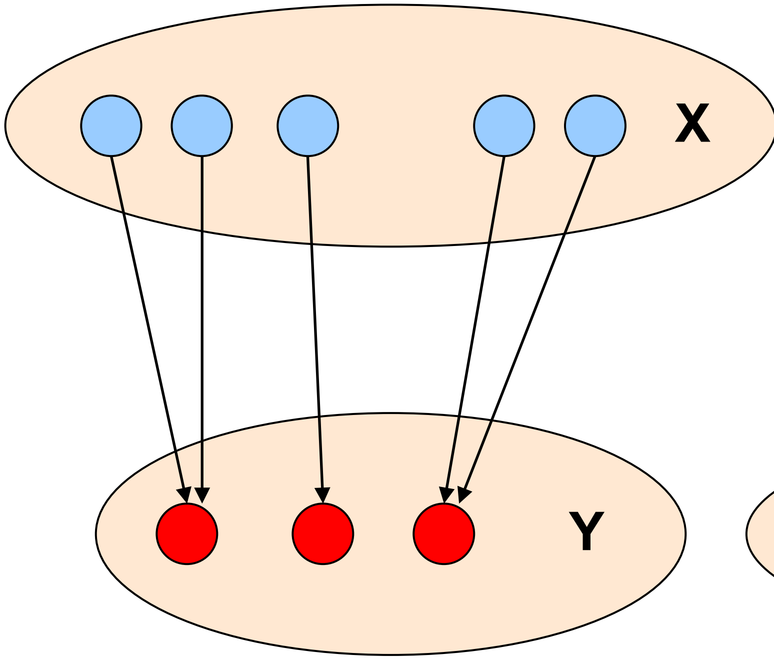
- **Пример 1.2**

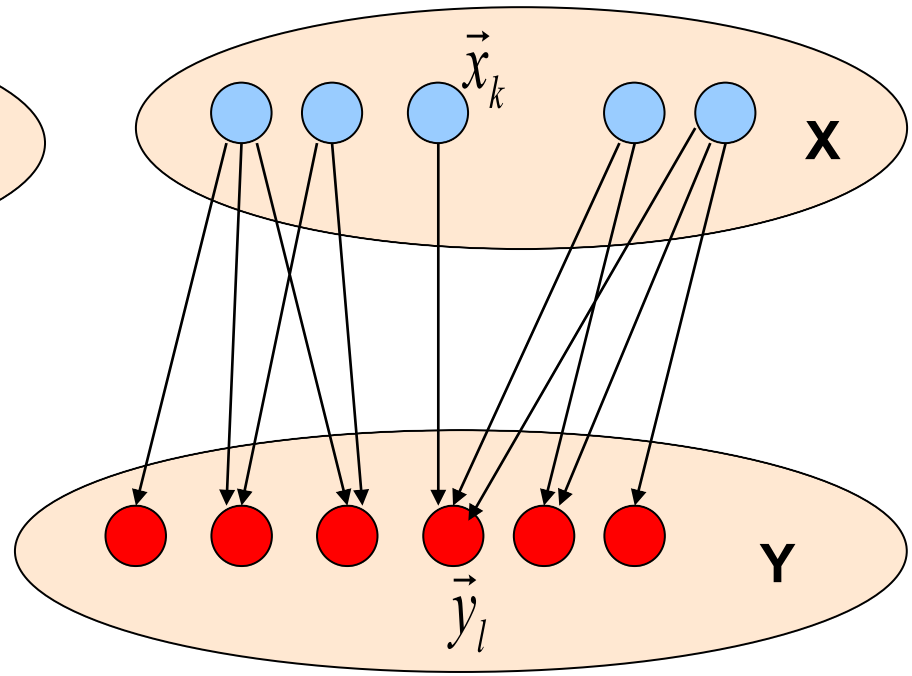
$$\mathbf{C}(A) = \left\{ \vec{y} \in A \mid \quad \forall \vec{u} \in A, \quad \vec{u} \neq \vec{y} : \quad \forall i,\ u_i \geq y_i \right\} \quad (y_1 = P, y_2 = T)$$



Данная функция **C**(А) осуществляет выбор эффективных (оптимальных по Парето) альтернатив в многокритериальной задаче. (Множество решений, оптимальных по Парето — множество решений, для которых значение каждого частного критерия оптимальности не может быть улучшено без ухудшения других).

Модели исследования операций.
Выбор альтернатив.
Характер связи альтернатив и исходов





Детерминированная связь

$$X \xrightarrow{\psi(x)} Y;$$

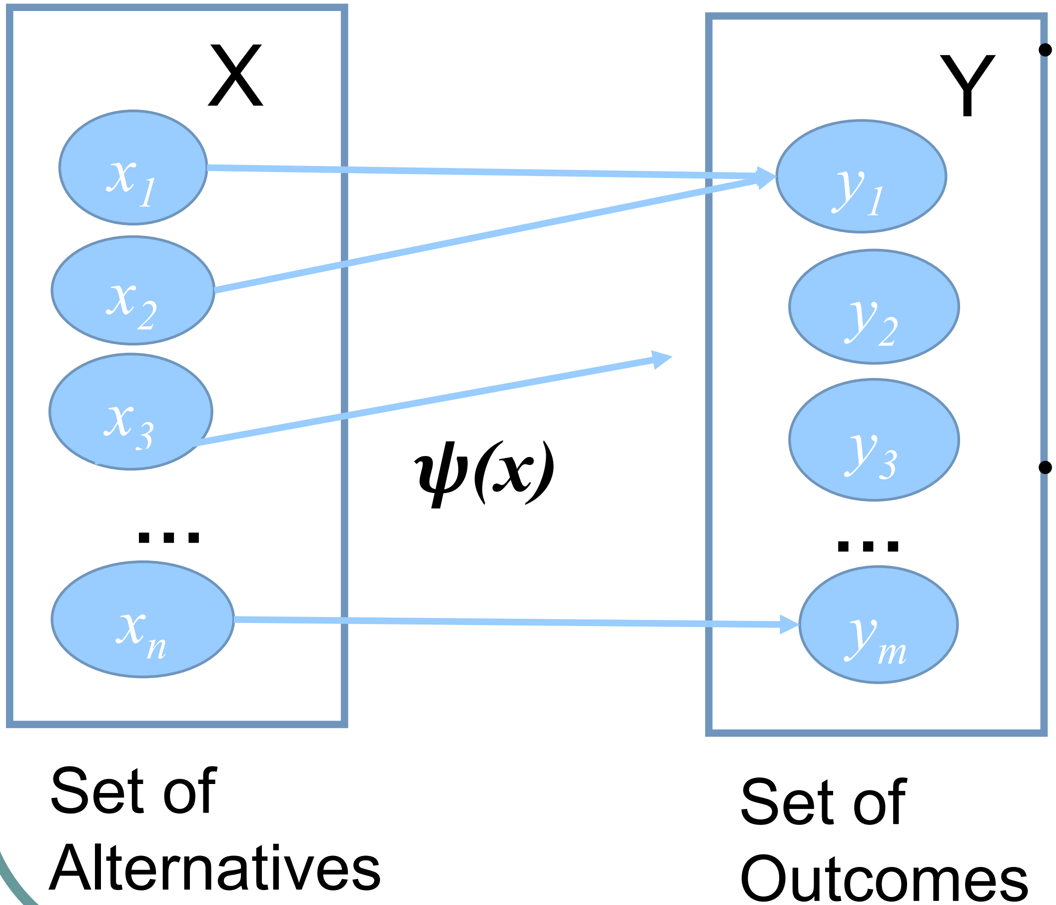
$$\vec{y} = \psi(\vec{x}); \quad x \in X, \quad y \in Y.$$

Вероятностная связь

$$X \xrightarrow{P_{k,l}} Y;$$

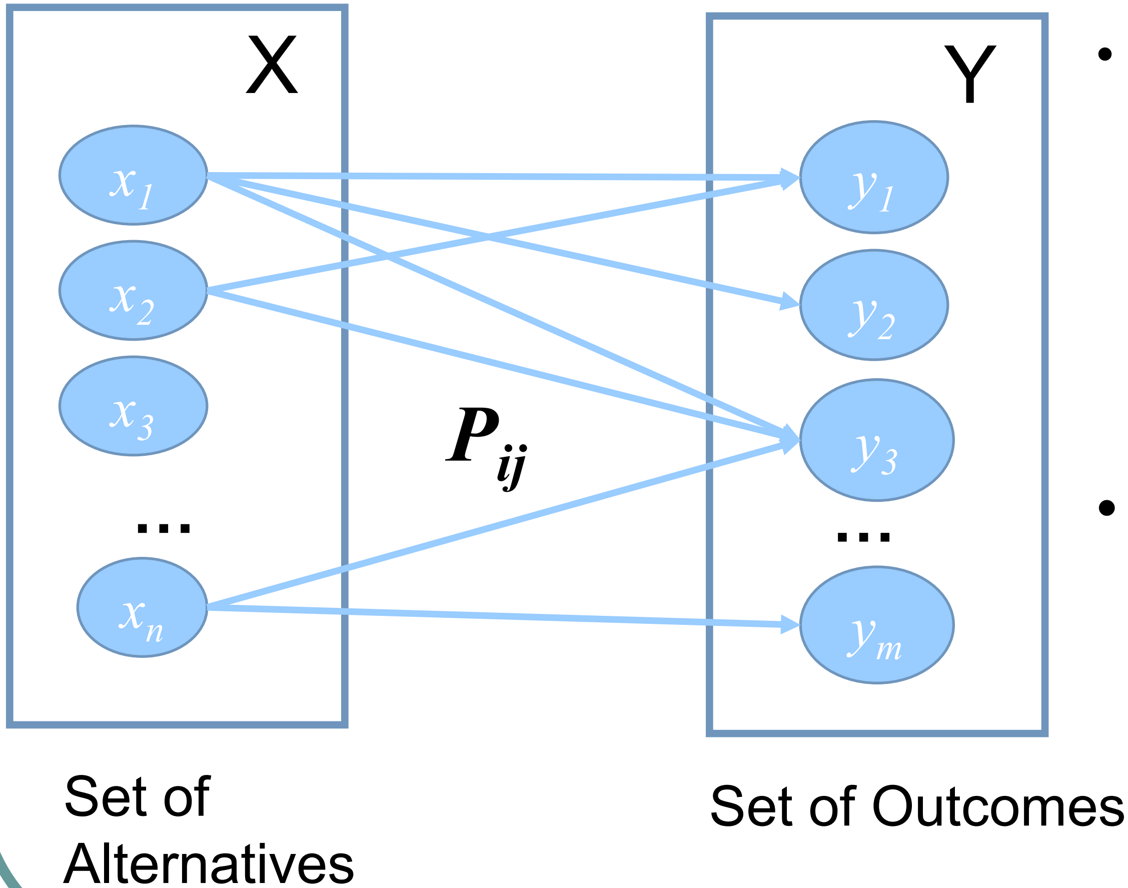
$$\vec{x}_k \Rightarrow \vec{y}_l \text{ с } P_{kl}; \quad \forall k : \sum_l P_{kl} = 1.$$

Decisions under certainty



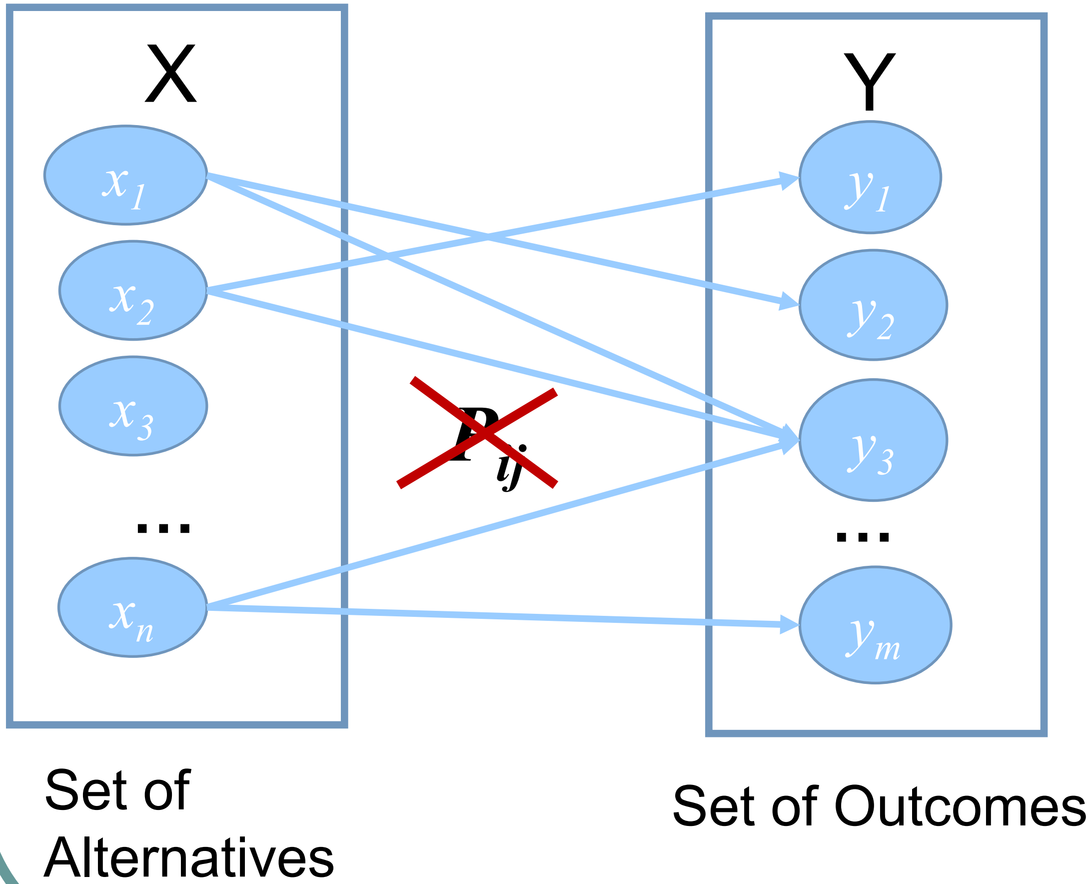
- Mapping ψ from a set **X** to a set **Y** is a prescribed way of assigning to each object x_i in set **X** a particular object y_j in set **Y**
- Due to the mapping ψ each element x_i of the set **A** corresponds to a certain element $y_j = \psi(x_i)$ of the set **B**

Decisions under Risk



- In this case, we know the probabilities P_{ij} of the outcomes y_j, $j=1,\ldots,m$ if the alternative x_i was choosen
- $\forall i \ \sum_{j=1}^{m} P_{i,j} = 1$

Decisions under Ignorance



- In this case, we usually know the outcomes y_j that may correspond to the chosen alternative x_i.
- We don't know the probabilities P_{ij} . We only usually know when they are exactly equal to 0

Критериальное описание систем предпочтений. Основные понятия моделей исследования операций.

Модели исследования операций.
Основные понятия моделей исследования операций.

- Большая часть моделей исследования операций основана на **критериальном описании** систем предпочтений.
- Каждый исход описывается **вектором выходных параметров модели** $\vec{y} = (y_1, y_2, ..., y_p)$
- Каждая альтернатива однозначно определяется **вектором изменяемых (варьируемых) параметров задачи**
$$\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$$
- Значения компонент вектора выходных параметров (исход) определяется его связью с вектором изменяемых параметров (альтернативой). Значения вектора выходных параметров могут также зависеть от значений вектора некоторых **фиксированных параметров задачи (параметров среды)** $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_l)$
- При решении детерминированной задачи предполагается известной функциональная зависимость
$$\vec{y} = \psi(x_1, x_2, ..., x_n, a_{1,} a_2, ..., a_l)$$

Модели исследования операций.
Основные понятия моделей исследования операций.

- **Изменяемые переменные** (переменные решения – decision variables) – переменные, оптимальные значения которых должны быть найдены в ходе решения математической модели задачи исследования операций:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

- **Целевая (критериальная) функция** (objective function) – функция, вычисляющая количественное выражение критерия оптимальности:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_{1,} a_2, \ldots, a_l)$$

  Эта функция достигает экстремума, когда ее аргументы принимают значения, описывающие оптимальное решение задачи в соответствии с заданным критерием. Эта функция зависит как от изменяемых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, так и от параметров задачи $a_1, a_2, \ldots, a_l$, которые принимают фиксированные значения, определяемые ее условием.

Модели исследования операций.

Основные понятия моделей исследования операций.

- **Ограничения** (constraints) – неравенства или равенства, определяющие область допустимых значений (ОДЗ) изменяемых переменных, в которой осуществляется поиск решения (экстремума целевой функции).Часто выделяют два специфических типа ограничений:

$$\varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n, c_{j1,} c_{j2}, \dots, c_{jr}) \left\{ \begin{matrix} \le \\ = \\ \ge \end{matrix} \right\} b_j \, ,$$

$$j = 1,2,\dots,m.$$

  - простые ограничения сверху (simple upper bound): $x_i \le u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$
  - неотрицательность переменных (nonnegativity restrictions): $x_i \ge 0 \; , \quad i = 1,2,\dots,n$

Модели исследования операций.
Основные понятия моделей исследования операций.

- **Математическая модель** (model) – результат формализации задачи исследования операций. Включает в себя множество изменяемых переменных, целевую функцию и ограничения, записанные в виде математических соотношений или заданные соответствующими вычислительными алгоритмами.
- **Параметры модели** (parameters) – множество параметров $\{x_i, a_k, b_j, c_{js}, u_i\}$, входящих в структуру целевой функции и функций ограничений. Значения этих параметров определяются условием решаемой задачи и должны быть заданы при формировании математической модели.

Модели исследования операций.
Примеры построения математической модели

Пример: Построить прямоугольную картонную коробку максимального объема V из ограниченного количества картона (спойлер: это куб с максимально возможной площадью сторон S_{max}).

Варьируемые параметры: длины сторон x_1, x_2, x_3.
Максимизируемая целевая функция: $F = V = x_1 x_2 x_3$;
Ограничения: $S=2\,(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) \le S_{max}$, длины сторон неотрицательны

Математическая формулировка:

$$\begin{cases} \max F = x_1 x_2 x_3 \\ 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \le S_{\max} \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Модели исследования операций.
Примеры построения математической модели

Пример: Построить прямоугольную картонную коробку заданного объема V^* с заданной площадью сторон S^*).

Модели исследования операций.
Примеры построения математической модели

Пример: Построить прямоугольную картонную коробку заданного объема V^* с заданной площадью сторон S^*).

Варьируемые параметры: длины сторон x_1, x_2, x_3.
Целевая функция: $F = (V\text{-}V^*)^2 = (x_1 x_2 x_3 - V^*)^2$
Ограничения: $S=2\,(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) = S^*$, длины сторон неотрицательны

Математическая формулировка:

$$\begin{cases} \min F = (x_1 x_2 x_3 - V^*)^2 \\ 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = S^* \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Модели исследования операций.
Примеры построения математической модели

Пример: Построить прямоугольную картонную коробку заданного объема V^* с заданной площадью сторон S^*).

Выразим x_3 через S^*, x_1 и x_2 : $x_3=(S^*-2x_1x_2)/2(x_1+x_2)$

Варьируемые параметры: длины сторон x_1, x_2.
Целевая функция: $F = (V-V^*)^2 = (x_1 x_2(S^*-2x_1x_2)/2(x_1+x_2)-V^*)^2$
Ограничения: длины сторон неотрицательны

Математическая формулировка:

$$\begin{cases} \min F = (x_1x_2(S^*-2x_1x_2)/2(x_1+x_2)-V^*)^2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Модели исследования операций.
Примеры построения математической модели

Пример: Решить систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 3 \\ 5x_1 - 8x_2 + 4x_3 + 2x_4 = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min F = (3x_1 + 8x_2 + 3x_3 - x_4 - 4)^2 + \\ +(2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + 4)^2 + \\ +(x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 3)^2 + \\ +(5x_1 - 8x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 8)^2 \\ X \in R \end{cases}$$

Методы исследования операций

- Процедура поиска оптимального решения может быть реализована двумя способами:
  - В первом случае поиск оптимального решения достигается путем нахождения оптимальных значений (обычно – доставляющих минимум или максимум целевой функции) варьируемых параметров задачи. В этом случае говорят о **параметрической оптимизации**.
  - Во втором случае для нахождения оптимального решения варьируют структуру оптимизируемого объекта. Такая оптимизация называется **структурной**. Обычно структурная оптимизация сочетается с оптимизацией параметрической.

Модели исследования операций. Построение целевых функций

Модели исследования операций
Построение целевых функций

$$\vec{y} = B\vec{x} \Rightarrow \begin{array}{l} \vec{y} = \psi(\vec{x}, \vec{a}); \quad \vec{x} \in X, \quad \vec{y} \in Y \qquad \text{или} \\ X \xrightarrow{P_{k,l}} Y; \quad \vec{x}_k \Rightarrow \vec{y}_l \text{ с } P_{kl}(\vec{a}); \quad \forall k : \sum_l P_{kl}(\vec{a}) = 1. \end{array}$$

$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T;$ при наличии ограничений на входные

$\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T;$ параметры $\vec{x} \in D, \quad D \subset X$

$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_l)^T -$ входные независимые параметры;

$\vec{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)^T$ - оптимальные значения;

$$\vec{x} = \vec{x}^* : \quad \vec{y} \to \vec{y}^* \quad \Leftrightarrow \quad \min F = F(\vec{y}) \text{ или } \max F = F(\vec{y})$$

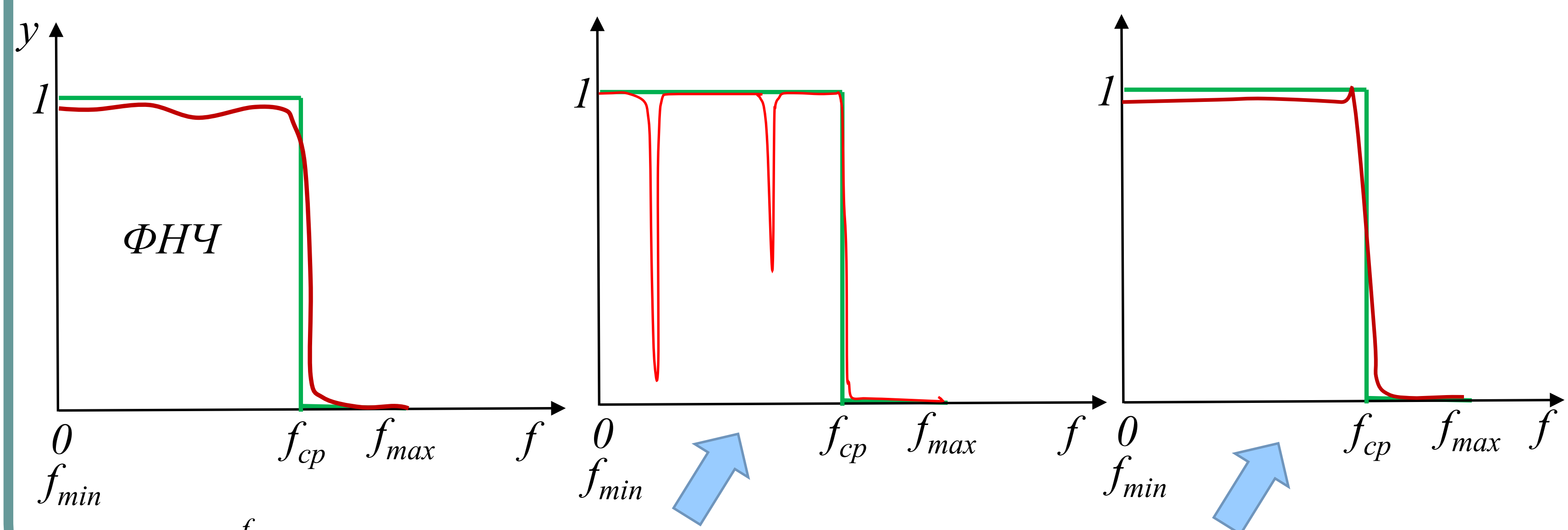
Если **B** - детерминированный оператор, $F = F(\vec{x}, \vec{a})$.

Модели исследования операций.
Построение целевых функций
Однокритериальные задачи

Один выходной параметр:

$$y \to y^* \Rightarrow F(y) = (y(\vec{x}, \vec{a}) - y^*)^2$$

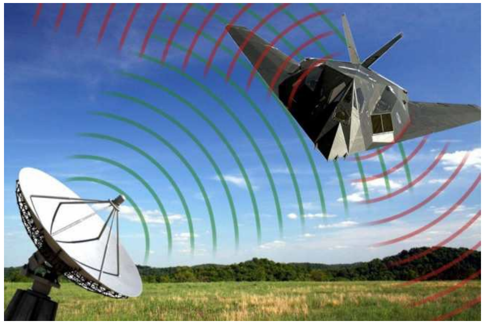
Выходная характеристика: $y = y(\vec{x}, \vec{a}, f); \quad f_{\min} \le f \le f_{\max}$



$$\min F = \int_{f_{\min}}^{f_{\max}} \left(y(\vec{x}, \vec{a}, f) - y^*(f) \right)^2 df \qquad \min F = \max_{f_{\min} \le f \le f_{\max}} \left(y(\vec{x}, \vec{a}, f) - y^*(f) \right)^2$$

Модели исследования операций. Построение целевых функций Многокритериальные задачи

Технология Stealth



Основные пути снижения ЭПР:

- Проектирование геометрии объекта
- Исключение или укрытие высокоотражающих элементов
- **Применение радиопоглощающих покрытий**

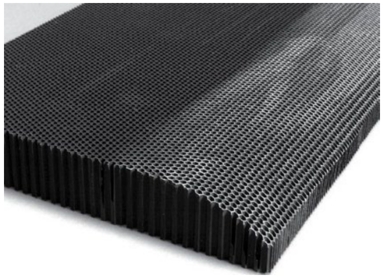
Модели исследования операций. Построение целевых функций Многокритериальные задачи

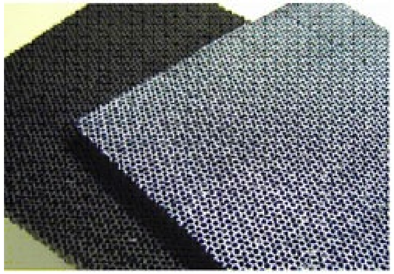
Основные требования к радиопоглощающему покрытию:

- **Минимальный коэффициент отражения плоской волны в направлении к излучателю в заданном диапазоне частот, углов падения и поляризации**
- Гладкая поверхность
- Стойкость к внешним воздействиям
- Технологичность изготовления и нанесения на объект
- Минимальная масса
- Минимальная толщина
- Минимальная стоимость

Модели исследования операций.
Построение целевых функций
Многокритериальные задачи

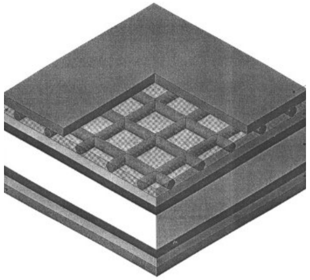
Структурная оптимизация





Параметрическая оптимизация

Числовые значения электромагнитных (или технологических) параметров материалов слоев



Геометрические размеры (толщины слоев, размеры структурных элементов)

Критерии оптимальности: минимальный коэффициент отражения в заданном диапазоне частот, углов падения и поляризации, минимальная толщина, минимальная масса, минимальная стоимость и др.

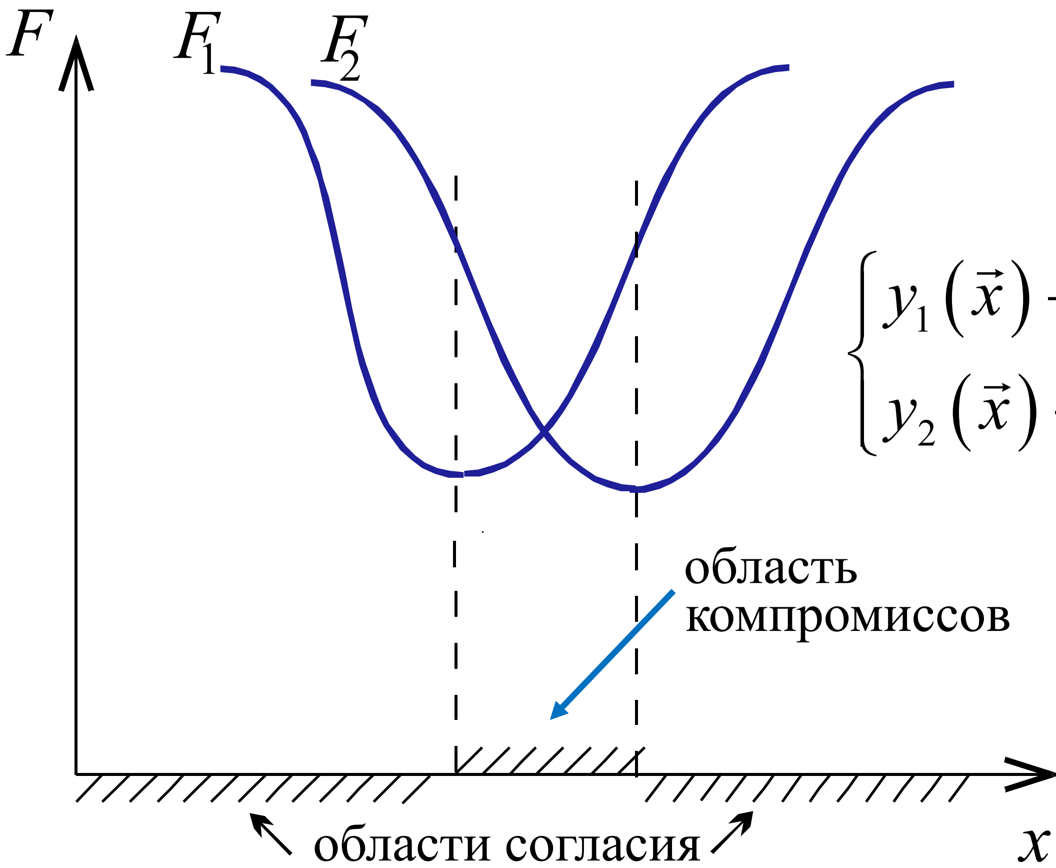
Модели исследования операций. Построение целевых функций Многокритериальные задачи

Параметрическая оптимизация.
Несколько оптимизируемых выходных параметров:

$$\vec{y} \to \vec{y}^{\,*} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 \to y_1^* \\ y_2 \to y_2^* \\ \dots \\ y_m \to y_m^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_1(y_1) \\ F_2(y_2) \\ \dots \\ F_m(y_m) \end{cases} \Leftrightarrow \vec{F}(\vec{y})$$

Выходные параметры могут иметь различные размерности, масштабы, а также неодинаковую значимость.

Модели исследования операций. Построение целевых функций Многокритериальные задачи



$$\begin{cases} y_1(\vec{x}) \to y_1^* \\ y_2(\vec{x}) \to y_2^* \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} F_1(y_1(\vec{x})) \\ F_2(y_2(\vec{x})) \end{matrix}$$

- **Поиск оптимального решения**
  - Определить область компромиссов (область решений, оптимальных по Парето)
  - Задать критерий, позволяющий выбрать из множества эффективных точек ту, которую мы будем считать оптимальной.
  - Найти решение, оптимальное в соответствии с заданным критерием

Модели исследования операций.
Построение целевых функций
Многокритериальные задачи

Функция предпочтительности

$$\vec{y} \to \vec{y}^* \Rightarrow \vec{F}(\vec{y}) = \min\left(F_1(\vec{y}), F_2(\vec{y}), \ldots\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\vec{y}' \succ \vec{y}'' \Rightarrow U(\vec{y}') < U(\vec{y}'')$$

Для детерминированных задач:

$$\vec{y} = \vec{y}(\vec{x}) \Rightarrow \quad \vec{F}(\vec{x}) = \min\left(F_1(\vec{x}), F_2(\vec{x}), \ldots\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\vec{x}' \to \vec{y}'(\vec{x}') \qquad U(\vec{y}(\vec{x})) = U(\vec{x})$$

$$\vec{x}'' \to \vec{y}''(\vec{x}'') \qquad \vec{y}' \succ \vec{y}'' \Rightarrow U(\vec{x}') < U(\vec{x}'')$$

Модели исследования операций.
Построение целевых функций
Многокритериальные задачи

Свертывание векторных критериев оптимальности

$$\min U(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j F_j(\vec{x})$$

$$\min U(\vec{x}) = \max_j \left[\alpha_j F_j(\vec{x}) \right]$$

$$\min U(\vec{x}) = F_l(\vec{x}); \quad F_j(\vec{x}) \le F_j^+,$$

$$j = 1, 2 \ldots m; \; j \ne l$$