Лекция 3 Линейные системы. Описание в пространстве состояний. Преобразование Лапласа

Д.А. Притыкин

21 февраля, 2022

Содержание

Обозначения

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния.
$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ – вектор управляющих параметров.
$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^p$ – вектор внешних возмущений или шумов, действующих на систему.
$\mathbf{A}$ – матрица состояния.
$\mathbf{B}$ – матрица управления.
$\mathbf{C}$ – матрица выхода.
$\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2$ – матрицы возмущения.
$\mathcal{L}\{x(t)\}$ – преобразование Лапласа оригинала $x(t)$.
$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ – обратное преобразование Лапласа изображения $X(s)$.
$\delta(t)$ – дельта-функция Дирака.
$\theta(t)$ – функция Хевисайда.
$H(s)$ – передаточная функция.
$h(t)$ – весовая функция.
$\pi(t)$ – переходная функция.

Здесь и далее мы будем работать с математическими моделями управляемых диамических объектов. Эти модели составляются на основе физических законов. На предыдущих занятиях мы обсуждали, что модель системы, как правило, будет описываться системой обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющей вид:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \tag{1}$$

Довольно часто уравнение (1) представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений, однако здесь речь пойдёт о тех системах, модель управляемой динамики которых может быть представлена (в силу постановки задачи или благодаря линеаризации уравнений (1).

1 Пространство состояний

Линейная непрерывная система управления описывается векторным линейным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{v} \tag{2}$$

Определение 1.1. Управление $\mathbf{u}$, и возмущение $\mathbf{v}$ называют входами системы.

На практике часто бывает так, что состояние системы неизвестно (не измеряется непосредственно), а известен некоторый связанный с вектором состояния выход $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^l$:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{v}, \tag{3}$$

где $\mathbf{C}$ - матрица выхода.

Определение 1.2. Выход - это набор наблюдаемых или измеряемых параметров, связываемых (при помощи уравнения (3)) с состоянием системы.

Замечание. системы, в которых матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{D_1}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D_2}$ являются постоянными называют стационарными, если же элементы этих матриц меняются во времени, соответствующие системы называют нестационарными. Далее, если не оговорено обратное, мы будем рассматривать стационварно заданные системы.

Определение 1.3. Форма записи модели системы управления в виде уравнений (2) - (3) называется описанием в пространстве состояний. При этом уравнение (2) принято называть уравнением состояния, уравнение (3) - уравнением выхода (моделью наблюдения).

Целью управления является такой выбор функции управления $\mathbf{u}(t)$ или $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ которое придаёт системе управления (2) - (3) требуемые свойства (например, устойчивость или оптимальность в соответствии с некоторым критерием качества).

Пример. Рассмотрим контур системы управления ориентацией космического аппарата. Вектор состояния в этом случае включает в себя параметры ориентации, задаваемые, например, кватернионом q и угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$.
Уравнения модели (1) представлены системой кинематических уравнений Пуас-

сона и динамических уравнений Эйлера (система нелинейна):

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{1}{2} q \circ \boldsymbol{\omega} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{J}^{-1} \cdot (-\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{M}_{ext} + \mathbf{M}_{ctrl}) \end{cases}$$

где $\mathbf{M}_{ext}$ – момент внешних сил, $\mathbf{M}_{ctrl}$ – управляющий момент.

1. При наличии в контуре системы управления ориентацией звёздного датчика (ЗД) и датчика угловой скорости (ДУС) выход - это сразу q и $\boldsymbol{\omega}$:
   звёздный датчик $\longrightarrow q$
   датчик угловой скорости $\longrightarrow \boldsymbol{\omega}$
2. Однако бывают и другие комбинации датчиков ориентации, например, построить ориентацию КА позволяют показания датчика направления на Солнце и магнитометра.

Упражнения.

Попробуйте записать (нелинейное) уравнение выхода для системы ориентации, в которой измеряется магнитное поле (магнитометром, в связанным со спутником осях) и сравнивается с бортовой моделью геомагнитного поля (выход которой представляется в некоторых инерциальных осях)

То же самое, но для комбинаций датчиков магнитометр + датчик угловой скорости, магнитометр + солнечные датчики, магнитометр + солнечные датчики + датчики угловой скорости

2 Передаточные функции

Материал этой главы приводится в соответствии с [2].

Введём оператор дифференцирования:

$$p = \frac{d}{dt}.$$

Действие оператора, соответственно,

$$p \cdot x(t) = \dot{x}(t).$$

Оператор, представленный в форме полинома:

$$q(p) = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + ... + a_k p^k,$$

действует на вектор $\mathbf{x}$ как

$$q(s) \cdot x(t) = a_0 x(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_2 \ddot{x}(t) + ...$$

Рассмотрим ранее введённые уравнения состояния (2). Из системы

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = p \cdot \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

получим

$$\mathbf{x} = (p \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{v}),$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица.

Подставляя получившееся выражение в уравнение выхода (3), получим

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \cdot (p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} + (\mathbf{C} \cdot (p \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{v}.$$

Вводя новые обозначения, запишем последнее выражение в виде

$$\mathbf{y} = H_{yu}(p) \cdot \mathbf{u} + H_{yv}(p) \cdot \mathbf{v},$$

где

Определение 2.1. $H_{yu}(p) = \mathbf{C} \cdot (p \cdot \mathbf{I} - -\mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B}$ – передаточная функция от управления к выходу

Определение 2.2. $H_{yv}(p) = \mathbf{C} \cdot (p \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2$ – передаточная функция от возмущения к выходу

Таким образом, входы системы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ линейно преобразуется в выход $\mathbf{y}$.

Замечание. Характеристический полином матрицы $\mathbf{A}$:

$$Q(s) = \det (p \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})$$

будет находиться в знаменателе при записи формул для вычисления обратных матриц. Нули характеристического полинома, т.е. собственные числа матрицы состояния $\mathbf{A}$ - полюса передаточных функций - характеризуют положения, при которых на ограниченное воздействие происходит неограниченный отклик.

3 Преобразование Лапласа

Материал этой главы приводится в соответствии с [1].

Определение 3.1. Преобразование Лапласа $\mathcal{L} : x(t) \to X(s)$ такое, что

$$X(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt,$$

где s – комплекснозначная переменная. При этом $x(t)$ называется оригиналом преобразования, $X(s)$ – изображением.

К оригиналу преобразования Лапласа предъявляются следующие требования:

1. функция $x(t)$ определена на $[0, +\infty)$ и кусочно-дифференцируема;
2. $x(t) \equiv 0$ при $t < 0$;
3. $\exists \alpha > 0$ и $\exists M > 0 : |x(t)| < Me^{\alpha t}$ на $[0, +\infty)$.

Определение 3.2. Обратное преобразование Лапласа:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} x(s)e^{st}ds,$$

где $Re(s) = a > \alpha$.

3.1 Свойства преобразования Лапласа:

Теорема 3.3. Линейность: для люпостоянных α и β

$$\mathcal{L}\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} = \alpha\mathcal{L}\{x_1(t)\} + \beta\mathcal{L}\{x_2(t)\}.$$

то есть преобразование Лапласа от суммы функция равно сумме преобразований слагаемых и постоянные множители можно выносить за знак преобразования.

Доказательство.

$$\mathcal{L}\{\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)\} = \int_0^\infty (\alpha x_1(t)+\beta x_2(t))\, e^{-st}dt =$$
$$\alpha \int_0^\infty x_1(t)e^{-st}dt + \beta \int_0^\infty x_2(t)e^{-st}dt = \alpha\mathcal{L}\{x_1(t)\} + \beta\mathcal{L}\{x_2(t)\}$$

■

Теорема 3.4. Дифференцирование оригинала. Если производная $\dot{x}(t)$ является функцией-оригиналом, то

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = sX(s) - x(0),$$

где $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, $x(0) = \lim_{t\to+0} x(t)$.

Доказательство.

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = \int_0^\infty \dot{x}(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-st}dx(t) = e^{-st}\cdot x(t)\Big|_0^\infty +$$
$$+s\int_0^\infty x(t)e^{-st}dt = sX(s) - x(0),$$

■

Замечание. При нулевых начальных условиях дифференцированию оригинала соответствует умножение изображения на s

Теорема 3.5. Интегрирование оригинала сводится к длению изображения на s

$$\mathcal{L}\{\int_0^t x(\tau)d\tau\} = \frac{X(s)}{s}$$

Доказательство.

$$\mathcal{L}\{\int_0^t x(\tau)d\tau\} = \int_0^\infty \exp(-st)\int_0^t x(\tau)d\tau dt =$$

Изменим порядок интегрирования и получим:

$$= \int_0^\infty x(\tau)d\tau \overbrace{\int_\tau^\infty \exp(-st)dt}^{\exp(-\tau s)/s} = \frac{1}{s}\underbrace{\int_0^\infty x(\tau)\exp(-s\tau)d\tau}_{X(s)} = \frac{1}{s}X(s)$$

■

Теорема 3.6. Теорема о запаздывании. Для любого $\tau > 0$:

$$\mathcal{L}\{x(t-\tau)\} = e^{-\tau s}X(s)$$

Доказательство.

$$\mathcal{L}\{x(t-\tau)\} = \int_0^\infty x(t-\tau)\exp(-st)dt =$$

Осуществим замену: $t' = t-\tau$. Получим следующее:

$$= \int_0^\infty x(t')\exp(-s(t'+\tau))dt' = \exp(-\tau s)\int_0^\infty x(t')\exp(-st')dt' = e^{-\tau s}X(s)$$

■

Теорема 3.7. Теорема о свёртке (умножении изображений). Если $x_1(t)$, $x_2(t)$ – оригиналы, а $X_1(s)$, $X_2(s)$ – их изображения, то:

$$X_1(s)X_2(s) = \mathcal{L}\{\int_0^t x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau\} = \mathcal{L}\{\int_0^t x_1(t-\tau)x_2(\tau)d\tau\} =$$

Доказательство.

$$\text{a) } \mathcal{L}\{\int_0^t x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau\} = \int_0^\infty \exp(-st)\int_0^t x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau dt$$

Изменим порядок интегрирования и используем теорему о запаздывании 3.6:

$$= \int_0^\infty x_1(\tau) \underbrace{\int_\tau^\infty x_2(t-\tau)\exp(-st)dt}_{H(s)\exp(-s\tau)} d\tau =$$

$$= \int_0^\infty x_1(\tau)X_2(s)\exp(-s\tau)d\tau =$$

$$= X_2(s)\int_0^\infty x_1(\tau)\exp(-s\tau)d\tau = X_1(s)X_2(s)$$

$$\text{b) } \int_0^t x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau = \left\{ \begin{array}{lll} \tau_1 = t-\tau & \tau=0 & \tau_1 = t \\ d\tau_1 = -d\tau & \tau = t & \tau_1 = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= -\int_t^0 x_1(t-\tau_1)\,x_2(\tau_1)\,d\tau_1 = \int_0^t x_1(t-\tau_1)\,x_2(\tau_1)\,d\tau_1 = \int_0^t x_1(t-\tau)\,x_2(\tau)\,d\tau$$

■

3.2 Преобразование стандартных функций

Ниже приведены изображения преобразования Лапласа для некоторых стандартных функций

Оригинал $x(t)$	Изображение $X(s)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$\theta(t)$	$\frac{1}{s}$
e^{-at}	$\frac{1}{a+s}$
te^{-at}	$\frac{1}{(a+s)^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(a+s)^{n+1}}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{\omega^2+s^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{\omega^2+s^2}$

Таблица 1: Результат действия преобразования Лапласа на некоторые стандартные функции

Пример. Известно, что дельта-функция Дирака обладает тем своойством, что для любой непрерывной функции $\varphi(t)$ и $\forall\varepsilon > 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi(t)dt = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(t)\varphi(t)dt = \varphi(0).$$

Тогда преобразование Лапласа от дельта-функции $\delta(t)$:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^{+\infty} \delta(t)e^{-st}dt = e^{-0} = 1.$$

Пример. функция Хевисайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

Преобразование Лапласа от функции Хевисайда $\theta(t)$:

$$\mathcal{L}\{\theta(t)\} = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{s}.$$

4 Описание и анализ одномерных систем

Для простоты рассмотрим систему с одномерным входом (единичная размерность вектора управляющих параметров $\mathbf{u}$) и одномерным выходом ($\mathbf{y}$). Такие системы называют в литературе SISO (single input - single output system). Также существуют системы MIMO (multiple inpupt - multiple output).

Система описывается дифференциальным уравнением

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + ... + a_0 x(t) = b_m u^{(m)}(t) + ... + b_0 u(t) \tag{4}$$

Подействуем на уравнение (4) преобразованием Лапласа при нулевых начальных условиях:

$$Q_n(s) X(s) = P_m(s) U(s),$$

Q_n, P_m - полиномы от s.
Отсюда

$$X(s) = \frac{P_m(s)}{Q_n(s)} U(s)$$

Введём несколько определений:

Определение 4.1. Передаточной функцией (в изображениях Лапласа)

$$H(s) = \frac{P_m(s)}{Q_n(s)}$$

будем называть имеющее наименьший порядок отношение изображений её выходной и входной переменных при нулевых начальных условиях.

Замечание. В силу линейности преобразования Лапласа, а также в силу свойства дифференцирования изображения полином $Q(s)$ является характеристическим полиномом однородного уравнения, соответствующего уравнению (4).

Определение 4.2. Весовой функцией $h(t)$ будем называть отклик системы на единичное импульсное воздействие $u(t) = \delta(t)$ (дельта функция) при нулевых начальных условиях.

Определение 4.3. Переходной функцией $\pi(t)$ будем называть отклик системы на единичное ступенчатое воздействие $u(t) = \theta(t)$ (функция Хевисайда) при нулевых начальных условиях.

Список литературы

[1] Д.П. Ким. Теория автоматического управления. Т.1. Линейные системы. М.:Физматлит, 2003. ISBN: 5-9221-0379-2.

[2] Б.Т. Поляк, М.В. Хлебников, Л.Б. Рапопорт. Математическая теория автоматического управления. М.:ЛЕНАНД, 2019. ISBN: 978–5–9710–6486–2.