

Лекция 2. Постановка задачи оптимального управления

Д.А. Притыкин

14 февраля 2022

Содержание

1	Задача оптимального управления	2
1.1	Модель системы управления	2
1.2	Начальное и терминальное многообразия	2
1.3	Цель управления	2
2	Пример задачи оптимального управления	3
2.1	Условие и постановка задачи	3
2.2	Геометрическое решение	3
2.3	Пример	6
2.4	Сравнение с другим законом управления	7

Обозначения

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния.

$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ – вектор управляющих параметров.

$\mathbb{U} \in \mathbb{R}^m$ – множество допустимых управлений.

$t \in [t_0, t_k]$ – интервал времени.

\mathbb{A} – начальное многообразие (множество начальных состояний).

\mathbb{B} – терминальное многообразие (граничные условия на правом конце траектории).

$J = \Phi(\mathbf{x}(t_k), t_k)$ – терминальный функционал задачи оптимального управления.

1 Задача оптимального управления

Для корректной постановки задачи необходимы:

1.1 Модель системы управления

Модель представляет собой дифференциальное уравнение вида:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (1)$$

где

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния (вектор фазовых переменных)
- $\mathbf{u} \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m$ – вектор управляющих параметров, \mathbb{U} – область допустимых управлений.

Если зафиксировать $\mathbf{u}(t) = \tilde{\mathbf{u}}(t)$, то (1) превращается в $\dot{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t)$, и при выборе начальных условий на \mathbf{x} : $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, получаем задачу Коши, для которой мы знаем о существовании её решения – траектории $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ и при том единственной.

Так как мы можем выбирать различные управления $\mathbf{u}(t)$, существует много различных траекторий $\mathbf{x}(t)$, удовлетворяющих уравнению (1).

1.2 Начальное и терминальное многообразия

Определение 1.1. Начальное и терминальное многообразия – \mathbb{A} и \mathbb{B} – определяют граничные условия для модели (1) на левом и правом концах соответственно. Многообразия \mathbb{A} и \mathbb{B} задаются системами ограничений на переменные вектора состояния и время:

$$\mathbb{A} = \begin{cases} a_1(\mathbf{x}, t) = 0; \\ a_2(\mathbf{x}, t) = 0; \\ \dots \\ a_\alpha(\mathbf{x}, t) = 0; \end{cases} \quad \mathbb{B} = \begin{cases} b_1(\mathbf{x}, t) = 0; \\ b_2(\mathbf{x}, t) = 0; \\ \dots \\ b_\beta(\mathbf{x}, t) = 0; \end{cases}$$

1.3 Цель управления

Необходимо знать ответ на вопрос: Зачем мы управляем системой? Целью управления является выбор такой функции $\mathbf{u}(t)$ (или $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$), которое обеспечивает системе (1) требуемые свойства (например, устойчивость некоторого движения или оптимальность по некоторому показателю качества).

Пример. Можно потребовать, чтобы траектория системы управления $\mathbf{x}(t)$ повторяла некоторую наперед заданную кривую $\mathbf{r}(t)$ в пространстве состояний или была максимально близка к ней.

Постановка задачи оптимального управления подразумевает наличие оптимизируемого показателя качества или функционала.

Определение 1.2. Функционалом Φ будем называть отображение $\Phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$.

Здесь и далее, если не оговорено иначе задачи оптимального управления будут включать терминальный функционал (вычисляемый на терминальном многообразии), причём целью задачи будет выбор управления \mathbf{u} , доставляющего функционалу

максимум:

$$J = \Phi(\mathbf{x}(t_k), t_k) \longrightarrow \max_{u \in U} \quad (2)$$

2 Пример задачи оптимального управления

Рассмотрим простейшую задачу о движении материальной точки по горизонтальной гладкой прямой под действием горизонтальной управляющей силы. Эта задача, несмотря на её простоту иллюстрирует довольно часто встречающийся закон управления, называемый в англоязычной литературе Bang-bang control.

2.1 Условие и постановка задачи

Материальная точка массы m может двигаться по гладкой горизонтальной оси под действием управляющей силы $\mathbf{F} : |\mathbf{F}| \leq F^*$. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ известны координата x_0 и скорость v_0 точки. Требуется за наименьшее время привести точку в состояние покоя в начале координат.

Приведем задачу к виду задачи теории управления.

Модель задачи составим с помощью 2 закона Ньютона:

$$\ddot{x} = F \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = \frac{F}{m} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = u \end{cases},$$

где $|u| \leq u^*$ - управляющий параметр, абсолютная величина которого ограничена значением u^* .

Начальное многообразие - фиксированная точка начальных условий (x_0, v_0) :

$$\mathbb{A} : \forall x_0, v_0.$$

Терминальное многообразие - начало координат фазовой плоскости:

$$\mathbb{B} : x = 0, v = 0.$$

Функционал задачи - время, за которое система достигает терминального многообразия:

$$\Phi(x(t_k), t_k) = -t_k \longrightarrow \max_u$$

2.2 Геометрическое решение

В качестве рабочей гипотезы предположим, что искомое управление $u(t)$ будет всегда принадлежать границе области допустимых управлений, то есть либо $u(t) = u^*$, либо $u(t) = -u^*$.

Случай 1 Пусть на некотором интервале $u(t) = u^*$, тогда уравнения движения системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = u^* \end{cases}$$

имеют решение

$$\begin{cases} x(t) = \frac{u^* t^2}{2} + v_0 t + x_0, \\ v(t) = u^* t + v_0. \end{cases}$$

Исключая из системы время, получим уравнение семейства траекторий в фазовой плоскости:

$$x = \frac{(v - v_0)^2}{2u^*} + \frac{(v - v_0)v_0}{u^*} + x_0 = \frac{v^2}{2u^*} + \left(x_0 - \frac{v_0^2}{2u^*}\right).$$

Таким образом при $u(t) = u^*$ система движется по одной из семейства парабол, графики которых приведены ниже.

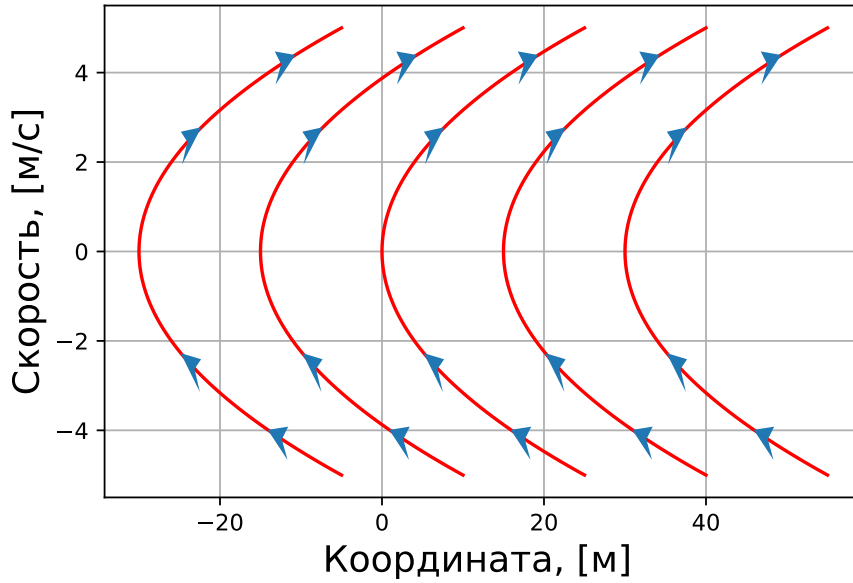


Рис. 1: Фазовые траектории при $u(t) = u^*$

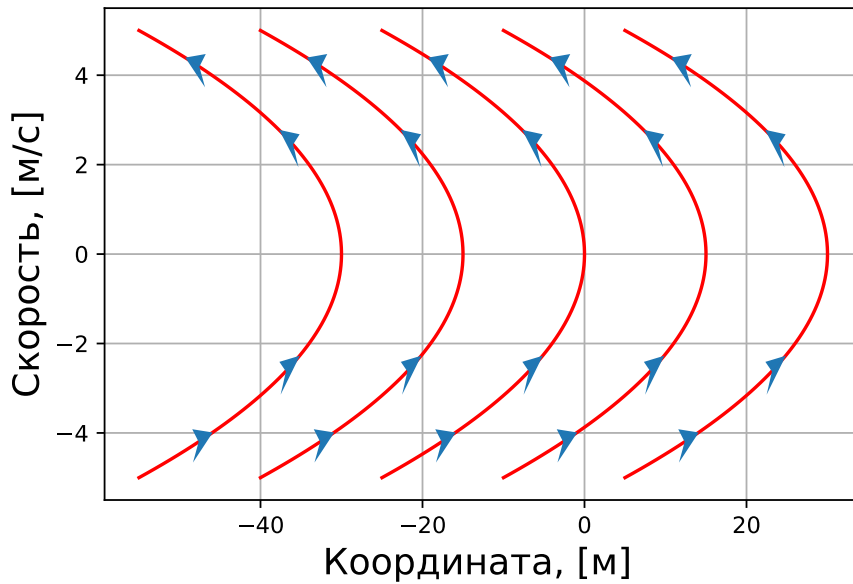


Рис. 2: Фазовые траектории при $u(t) = -u^*$

Случай 2 Пусть на некотором интервале $u(t) = -u^*$, тогда решение уравнений движения системы запишется так же как и для Случая 1, однако на фазовой плоскости

их изображение будет представлено семейством парабол, ветви которых направлены в обратную сторону (поскольку коэффициент при v^2 меняет знак).

Таким образом, движение системы происходит по траекториям одного из двух семейств парабол. Параболы, ветви которых направлены вправо, соответствуют $u = +u^*$. Параболы, ветви которых направлены влево, соответствуют $u = -u^*$.

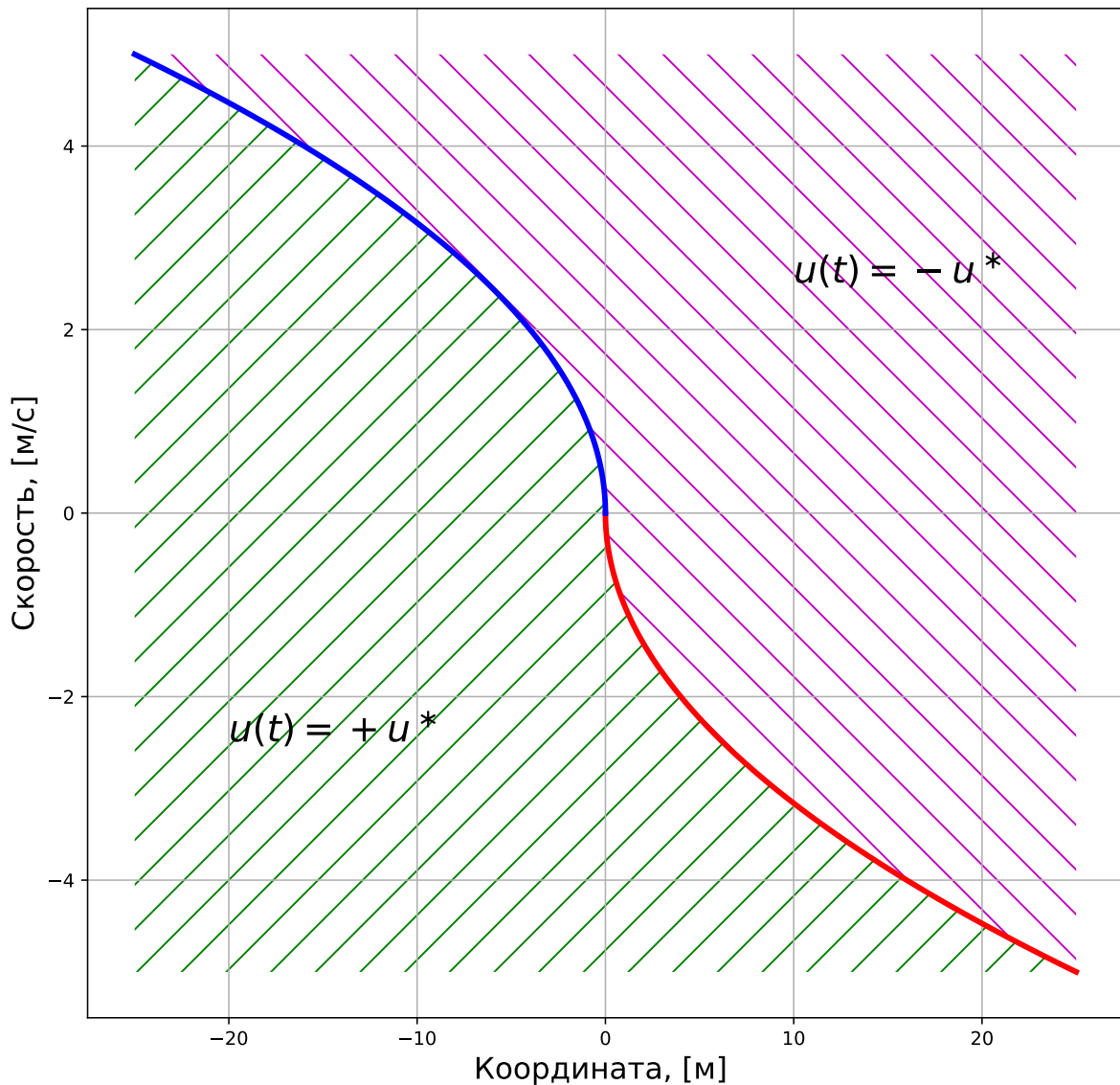


Рис. 3: Разбиение фазовой плоскости на области выбора начального управления

Если нам повезёт, точка начальных условий сразу попадёт на параболу, ведущую в начало координат (синяя ветвь с отрицательным управлением $x = -\frac{v^2}{2u^*}$ или красная ветвь с положительным управлением $x = \frac{v^2}{2u^*}$).

В противном случае, мы всегда можем выбрать начальную траекторию, пересекающуюся с одной из ветвей, ведущих в начало координат и переключить управление

в точке пересечения.

Объединение синей и красной ветвей дели всю фазовую плоскость на две области. В верхней области любая точка начальных условий требует выбора $u(t) = -u^*$ на первом участке траектории, в нижней области - $u(t) = u^*$. При пересечении границы между областями, знак управления следует изменить, что приведёт к движению по ветви параболы, ведущей в начало координат.

Таким образом, закон управления строится объединением двух участков, на которых управление идёт по границе разрешённых значений и при смене участка меняет знак. Такой алгоритм управления в англоязычной литературе получил название "bang-bang-control"

Замечание. Отметим, что для задач оптимального управления с терминальным функционалом, не зависящим от управляющих параметров, и моделью линейной по u , "bang-bang" управление довольно распространённый вид решения.

2.3 Пример

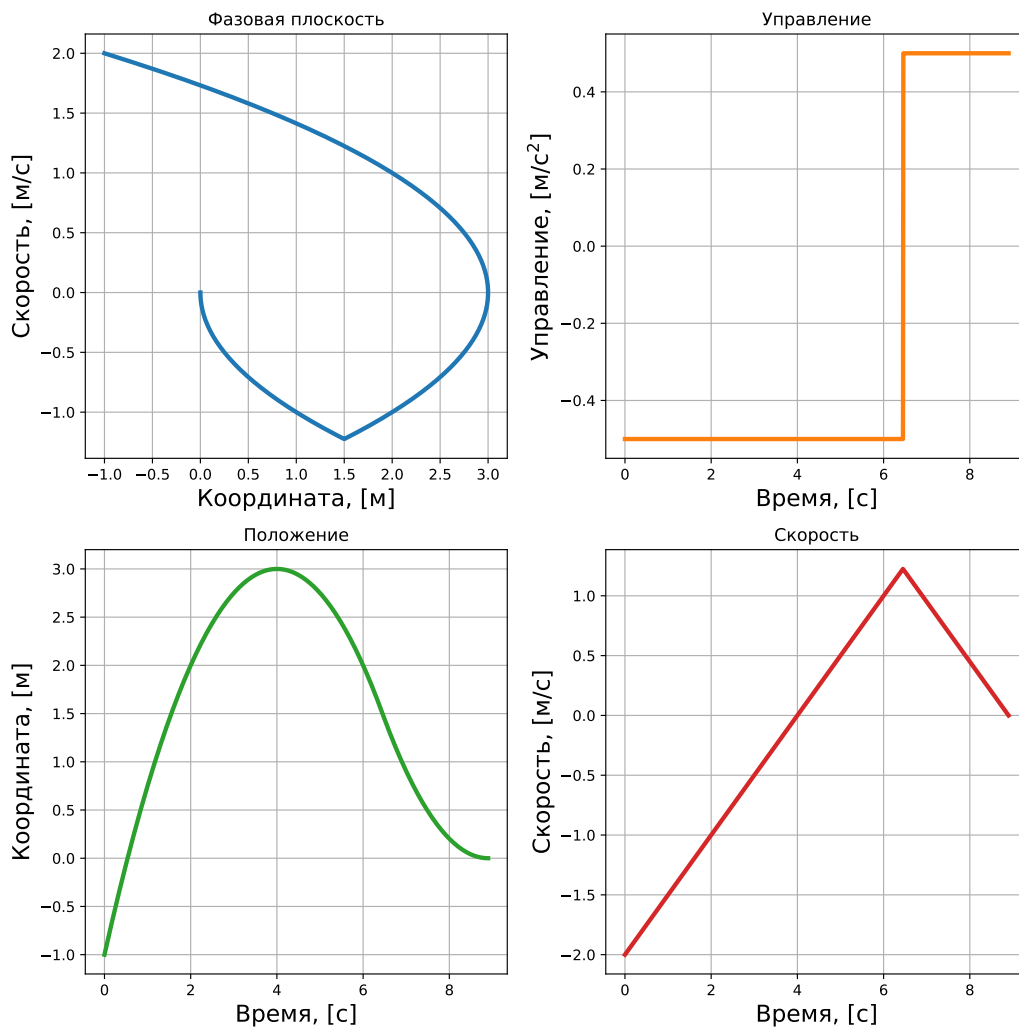


Рис. 4: Пример динамики управляемой системы

Проиллюстрируем изложенное выше геометрическое решение поставленной задачи. Для этого проинтегрируем систему (1) с начальными условиями $x_0 = -1$ м, $v_0 =$

2 м/с. В качестве ограничения на управляющее воздействие примем $u^* = 0.5$ м/с².

Графики, демонстрирующие движение системы и закон управления приведены на рисунке 2.3.

2.4 Сравнение с другим законом управления

Для сравнения, попробуем применить к задаче ещё один распространенный подход к построению закона управления - управление по ошибке.

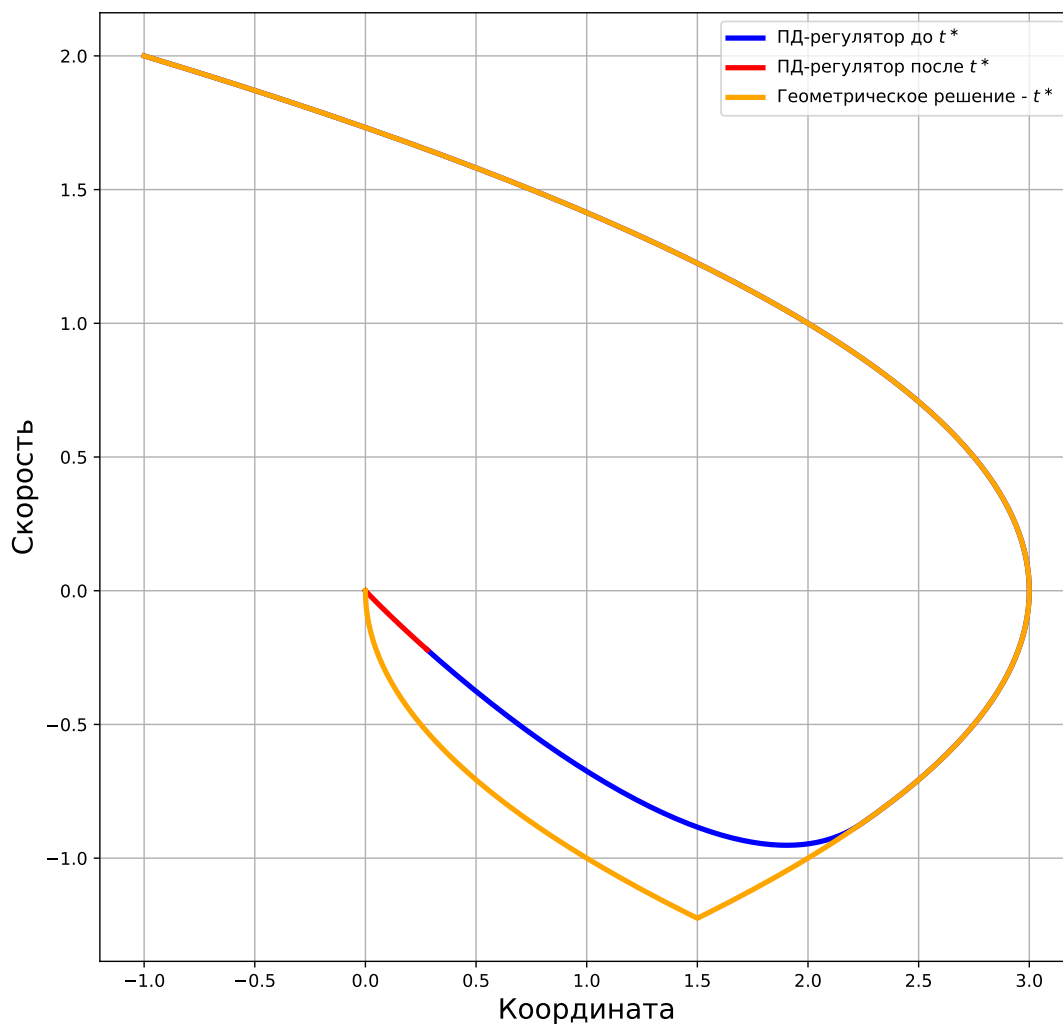


Рис. 5: Сравнение двух законов управления

Будем вычислять управление в каждый момент времени как сумму двух слагаемых:

- слагаемое пропорциональное ошибке положения точки $-k_p \cdot x$, где k_p - некоторый настраиваемый коэффициент;
- слагаемое пропорциональное ошибке скорости $-k_d \cdot v$, где k_d - некоторый настраиваемый коэффициент.

Таким образом, закон управления (так называемый ПД-регулятор, П - управление пропорциональное ошибке положения, Д - управление пропорциональное производной ошибки положения):

$$u(t) = -k_p \cdot x - k_d \cdot v. \quad (3)$$

Для примера, проиллюстрированного на рисунке ниже значения коэффициентов выбраны равными: $k_p = 1$, $k_d = 2$.

На рисунке 2.4 жёлтой линией показана фазовая траектория, соответствующая найденному аналитическому управлению, а составной (синей и красной) линией показана траектория соответствующая управлению (3). Синяя линия заканчивается в тот момент времени t^* , когда оптимальная по быстродействию траектория достигает начала координат. Траектория, соответствующая управлению (3) продолжается (красная линия), чтобы продемонстрировать, что закон управления (3) также приводит систему на терминальное многообразие.