Лекция 4 Линейные системы. Передаточные функции. ПИД-регулятор.

Д.А. Притыкин

28 февраля, 2022

Содержание

Обозначения

$\mathcal{L}\{x(t)\}$ – преобразование Лапласа оригинала $x(t)$.
$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ – обратное преобразование Лапласа изображения $X(s)$.
$\delta(t)$ – дельта-функция Дирака.
$\theta(t)$ – функция Хевисайда.
$H(s)$ – передаточная функция.
$h(t)$ – весовая функция.
$\pi(t)$ – переходная функция.

1 Описание и анализ одномерных систем

Линейная непрерывная система управления с одним входом $u(t)$ и одним выходом $x(t)$ описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 x(t) = \\ b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1}u^{(m-1)}(t) + \ldots + b_0 u(t). \qquad (1)$$

2 Передаточные функции

Введя оператор дифференцирования:

$$p = \frac{d}{dt},$$

получим запись уравнения (1) в операторной форме:

$$(a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} \ldots a_0)x(t) = (b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} \ldots b_0)u(t),$$

или

$$Q_n(p)x(t) = P_m(p) \ldots b_0)u(t),$$

где $Q_n(p)$ – собственный оператор, $P_m(p)$ – оператор воздействия.

Определение 2.1. Передаточной функцией системы (1) в операторной форме называется отношение оператора воздествия к собственному оператору:

$$H(p) = \frac{P_m(p)}{Q_n(p)}.$$

Замечание. Передаточная функция в операторной форме является оператором. Её не рассматривают как обычную дробь, в частности не сокращают на общий множитель, содержащий оператор дифференцирования.

Применим к обеим частям уравнения (1) преобразование Лапласа. Воспользовавшись линейностью преобразования Лапласа и теоремой о дифференцировании оригинала (при нулевых начальных условиях), получим:

$$Q(s)X(s) = P(s)U(s). \qquad (2)$$

Определение 2.2. Передаточной функцией системы (1) в изображениях Лапласа называют имеющее наименьший порядок отношение изображений её выходной и входной переменных при нулевых начальных условиях.

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}.$$

Замечание. Согласно определению передаточная фукнция в изображениях Лапласа не может иметь равные между собой нули и полюсы, так как в этом случае её порядок можно было бы понизить, сократив числитель и знаменатель на общий делитель.

Замечание. В силу линейности преобразования Лапласа, а также в силу свойства дифференцирования изображения полином $Q(s)$ является характеристическим полиномом однородного уравнения, соответствующего уравнению (1).

Упражнение. Сравните вид передаточных функций в операторном описании и в изображениях Лапласа для систем, заданных следующими уравнениями:

$$\text{а)}\dot{x} + x = u,$$
$$\text{б)}\dot{x} - x = \dot{u} - u.$$

3 Структурные схемы систем управления

Структурной схемой системы управления называют их графическое представление, показывающее прохождение сигнала через элементарные звенья/блоки системы (звенья изображаются прямоугольниками с указанием передаточных функций). Ветвления пути сигнала изображаются с помощью точек съёма сигнала и суматоров (круг на схеме, в который может входить несколько сигналов).

Соединение двух звеньев называется последовательным, если выходная переменная предшествующего звена является входной переменной последующего звена.

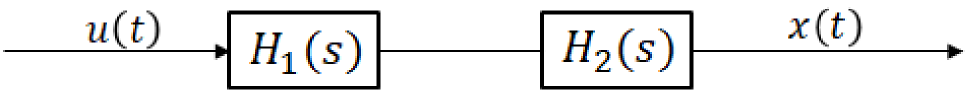

Рис. 1: Последовательное соединение звеньев

Предложение 3.1. При последовательном соединении двух звеньев с передаточными функциями $H_1(s)$ и $H_2(s)$ соответственно, передаточная функция результирующей системы вычисляется как

$$H(s) = H_2(s)H_1(s).$$

Соединение двух звеньев называется параллельным, если на входы обобих звеньев подаётся один и тот же сигнал, а выходные сигналы звеньев складываются.

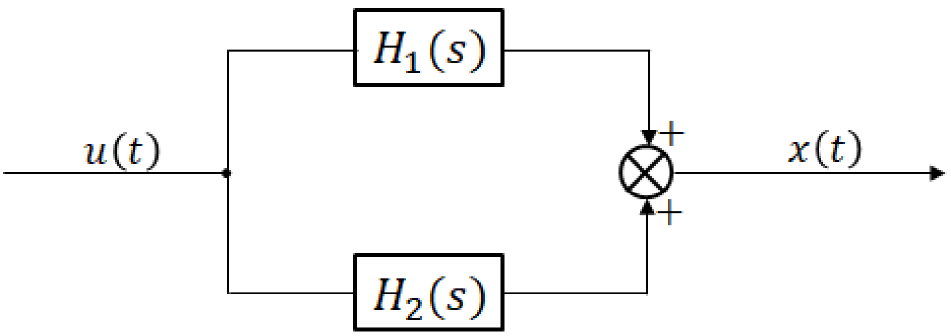

Рис. 2: Параллельное соединение звеньев

Предложение 3.2. При параллельном соединении двух звеньев с передаточными функциями $H_1(s)$ и $H_2(s)$ соответственно, передаточная функция результирующей системы вычисляется как

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s).$$

Звеном, охваченным обратной связью, называется соединение двух звеньев, при котором выход звена прямой цепи подаётся на вход звена обратной связи, выход которого складывается со входом первого звена. Если сигнал звена обратной связи вычитается из входа первого звена, обратная связь называется отрицательной.

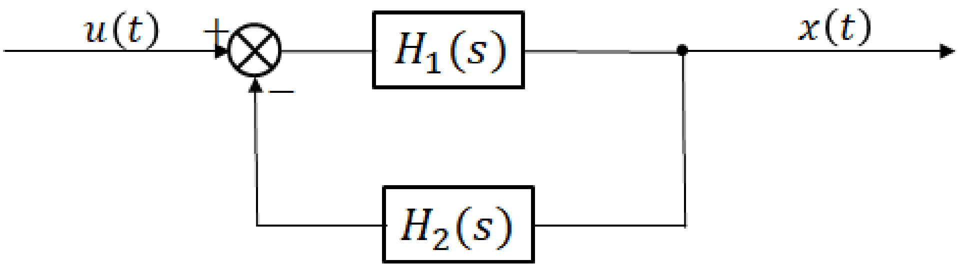

Рис. 3: Звено с отрицательной обратной связью

Предложение 3.3. Блок с обратной связью (передаточная функция звена прямой цепи – $H_1(s)$, передаточная функция звена обратной связи – $H_2(s)$) имеет передаточную функцию равную

$$H(s) = \frac{H_2(s)H_1(s)}{1 - H_2(s)H_1(s)}$$

в случае полоожительной обратной связи и

$$H(s) = \frac{H_2(s)H_1(s)}{1 + H_2(s)H_1(s)}$$

в случае отрицательной обратной связи.

Упражнение. Упростите структурную схему системы управления, приведённую на рисунке 4 и вычислить передаточную функцию этой системы.

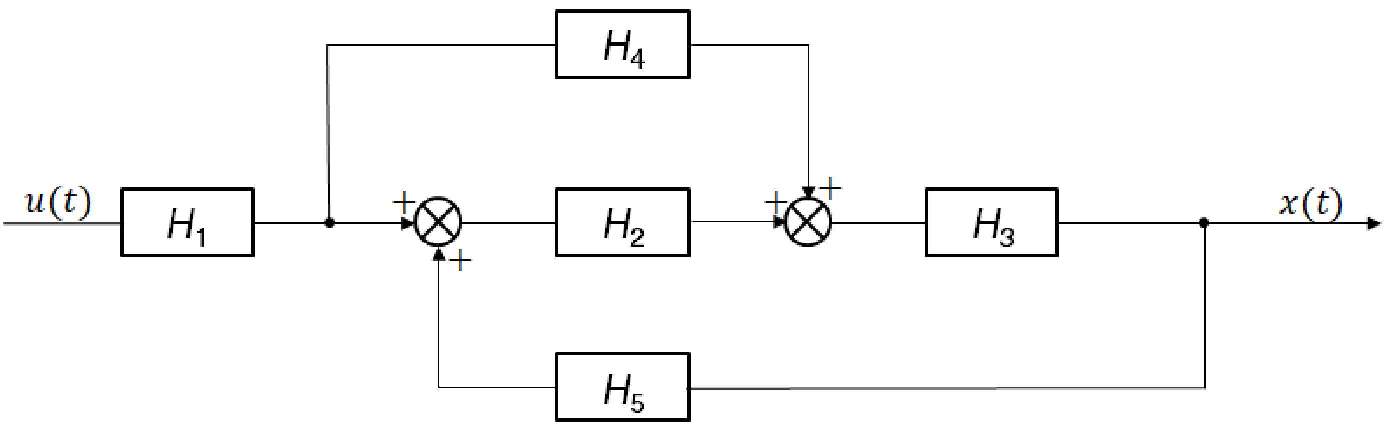

Рис. 4: Структурная схема системы управления

4 Весовая и переходная фукнции. Их связь с передаточной функцией

Определение 4.1. Весовой функцией $h(t)$ будем называть отклик системы на единичное импульсное воздействие $u(t) = \delta(t)$ (дельта функция) при нулевых начальных условиях.

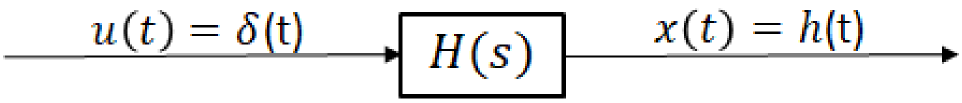

Рис. 5: Весовая функция

В силу уравнения (2) и определения передаточной функции звена в изображениях Лапласа:

$$X(s) = H(s)U(s).$$

Поскольку изображение Лапласа входного сигнала в данном случае

$$U(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1,$$

получаем

Предложение 4.2. Передаточная функция звена в изображениях Лапласа равна изображению Лапласа весовой функции этого же звена

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}. \tag{3}$$

Определение 4.3. Переходной функцией $\pi(t)$ будем называть отклик системы на единичное ступенчатое воздействие $u(t) = \theta(t)$ (функция Хевисайда) при нулевых начальных условиях.

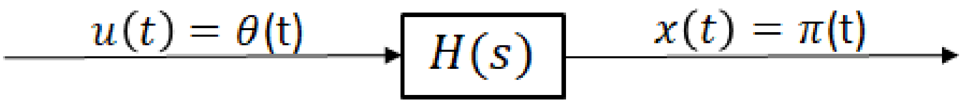

Рис. 6: Переходная функция

Исходя из

$$X(s) = H(s)U(s)$$

и принимая во внимание, что изображение Лапласа входного сигнала

$$U(s) = \mathcal{L}\{\theta(t)\} = \frac{1}{s},$$

в силу теоремы о дифференцировании сигнала

Предложение 4.4. Связь между переходной и весовой функциями звена определяется уравнением

$$\dot{\pi}(t) = h(t). \tag{4}$$

Таким образом, линейная система может быть описана с помощью дифференциальных уравнений, а также передаточной функцией в изображениях Лапласа, переходной и весовой функциями. Если известна одна из функций $H(s)$, $h(t)$ и $\pi(t)$ ведругие могут быть определены с помощью уравнений (3), (4).

Упражнение. Определите весовую и переходную функции звена, передаточная функция которого имеет вид:

$$H(s) = \frac{2}{0.5s+1}.$$

В силу теоремы о свёртке справедливо

Предложение 4.5. Отклик на произвольное воздействие (входной сигнал) в уравнении (1) может быть вычислен как

$$x(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t h(\tau)u(t-\tau)d\tau. \tag{5}$$

5 Элементарные звенья систем управления и их характеристики

Пропорциональное звено. Описывается уравнением

$$a_0 x(t) = b_0 u(t).$$

Передаточная функция пропорционального звена

$$H_p(s) = k_p, \quad k_p = \frac{b_0}{a_0}.$$

Весовая и переходная функции:

$$h(t) = \delta(t), \quad \pi(t) = \theta(t).$$

Интегрирующее звено. Описывается уравнением

$$a_1 \dot{x}(t) = b_0 u(t).$$

Передаточная функция интегрирующего звена

$$H_I(s) = \frac{k_I}{s}, \quad k_I = \frac{b_0}{a_1}.$$

Весовая и переходная функции:

$$h(t) = k_I \theta(t), \quad \pi(t) = k_I t.$$

Дифференцирующее звено. Описывается уравнением

$$a_0 x(t) = b_1 \dot{u}(t).$$

Передаточная функция дифференцирующего звена

$$H_d(s) = k_d s, \quad k_d = \frac{b_1}{a_0}.$$

Весовая и переходная функции:

$$h(t) = k_d \delta^2(t), \quad \pi(t) = k_d \delta(t).$$

6 ПИД-регулятор

Структурная схема, изображенная на рисунке 7, представляет так называемую следящую систему управления, цель которой – синтезировать регулятор ($H_{\text{уу}}$ – управляющее устройство), такой что объект управления ($H_{\text{оу}}$) воспроизводит сигнал $r(t)$, подаваемый на вход системе. В следящей системе: $r(t)$ – задающее воздействие, $e(t) = r(t) - x(t)$ – ошибка управления, $u(t)$ – управляющее воздействие.

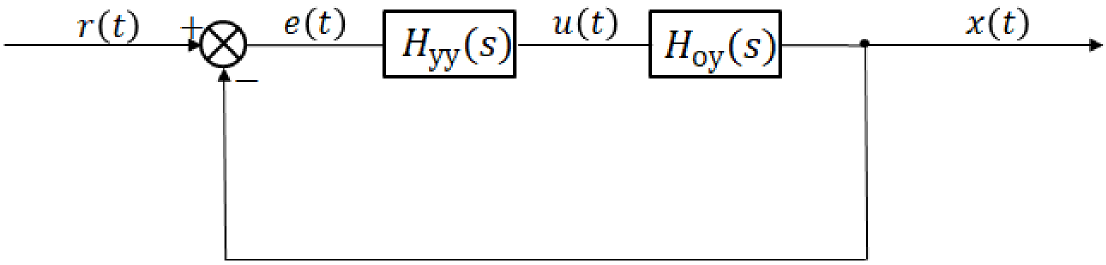

Рис. 7: Следящая система

ПИД-регулятор – распространенная структура управляющего устройства в системах с обратной связью, включающая в себя пропорциональное, интегрирующее и дифференцирующее звенья, соединенные параллельно и принимающие на вход ошибку управления $e(t)$, вычисляемую как разницу между входом системы управления $r(t)$ и выходом $x(t)$ (как показано на рисунке 7).

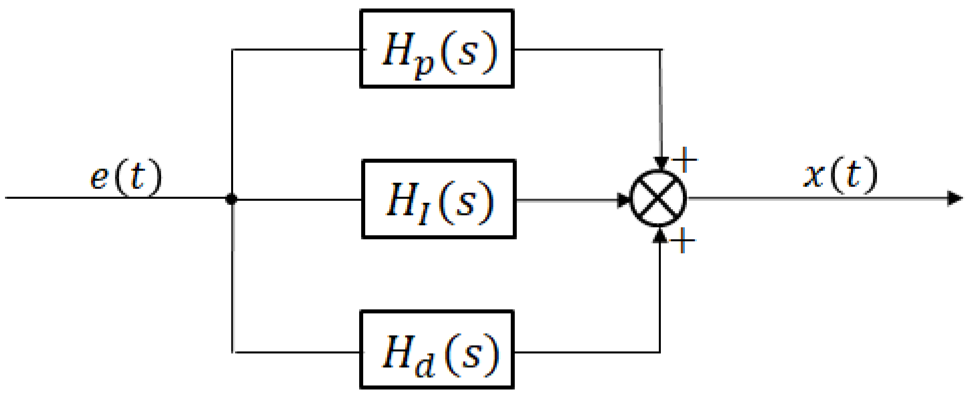

Рис. 8: Структурная схема ПИД-регулятора

$$u(t) = k_p e(t) + k_I \int_0^t e(\tau) d\tau + k_d \dot{e}(t).$$

Передаточная функция ПИД-регулятора:

$$H_{PID}(s) = k_p + \frac{k_I}{s} + k_d s.$$

Выбор коэффициентов k_p, k_I и k_d называют настройкой ПИД-регулятора.