Лекция 1. Введение в теорию управления

Д.А. Притыкин

7 февраля 2022

Содержание

Обозначения

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния.
$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ – вектор управляющих параметров.
$\mathbb{U} \in \mathbb{R}^m$ – множество допустимых управлений.
$t \in [t_0, t_к]$ – интервал времени.
$\mathbb{A}$ – начальное многообразие (множество начальных состояний).
$\mathbb{B}$ – терминальное многообразие (граничные условия на правом конце траектории).

1 Управление в динамических системах

Основная цель курса – рассказать о наиболее распространенных подходах развитых в теории управления динамическими системами и проиллюстрировать их упражнениями в Python.

1.1 Динамические системы

Определение 1.1. Динамическая система – любой объект или процесс, для которого однозначно определено понятие состояния, как совокупности некоторых величин в некоторый момент времени, и задан закон, описывающий эволюцию начального состояния с течением времени.

Динамические системы – физические, биологические, химические объекты, вычислительные процессы или процессы преобразования информации

Закон эволюции может быть задан как диференциальное уравнение (непрерывные динамические системы) или дискретное отображения (дискретные динамические системы).

Примеры.

примером непрерывной динамической системы может служить математический маятник или задача трёх тел;

пример дискретной динамической системы - любая настольная игра.

Будем говорить, что определена математическая модель динамической системы, если введены параметры (координаты), характеризующие в каком-то приближении состояние системы, и указан оператор φ_t, позволяющий установить изменение координат во времени.

Определение 1.2. Состояние системы в любой момент времени t характеризуется с помощью n вещественных чисел $x_1(t), ...x_n(t)$ называемых фазовыми координатами.

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \text{ – вектор состояния, точка в пространстве } \mathbb{R}^n.$$

Модель непрерывной динамической системы будем задавать уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \tag{1}$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ - вектор состояния (набор фазовых переменных). Такие модели позволяют исследовать динамику системы, анализировать отдельные траектории, строить фазовые портреты, исследовать устойчивость тех или иных режимов движения, строить бифуркационные диаграммы...

Замечание. Изменение любой фазовой координаты происходит непрерывно во времени, поэтому фазовые траектории $\mathbf{x}(t) = \{\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n | t_0 \le t \le t_к\}$ являются непрерывными функциями времени.

1.2 Управляемые динамические системы

Модель управляемой динамической системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \tag{2}$$

где $\mathbf{u} \in \mathbf{U} \in \mathbb{R}^m$ - вектор управляющих параметров, $\mathbf{U}$ - область допустимых значений вектора управляющих параметров или просто область допустимых управлений.

Определение 1.3. Выбор решения задачи управления, который нужно осуществлять в любой момент времени t из заданного интервала $[t_0, t_к]$, характеризуется m вещественными числами $u_1(t), u_2(t), ..., u_m(t)$, называемых управляющими параметрами.

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \text{ – вектор управляющих параметров.}$$

Определение 1.4. Управлением называется функция

$$\mathbf{u}(t) = \{\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m | t_0 \le t \le t_к\}.$$

Предполагается, что возможные значения управляющих параметров удовлетворяют некоторым ограничениям, то есть управление в любой момент времени должно принадлежать некоторому фиксированному непустому множесту $\mathbb{U} \in \mathbb{R}^m$, называемому множеством допустимых управлений.

Определение 1.5. Управление $\mathbf{u}(t)$ называется допустимым, если

$$\forall t \in [t_0, t_к] \mathbf{u}(t) \in \mathbb{U}.$$

1.3 Начальное и терминальное многообразия

Определение 1.6. Начальное и терминальное многообразия – $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ – определяют граничные условия для модели (2) на левом и правом концах соответственно. Многообразия $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ задаются системами ограничений на переменные вектора состояния и время:

$$\mathbb{A} = \begin{cases} a_1(\mathbf{x}, t) = 0; \\ a_2(\mathbf{x}, t) = 0; \\ ... \\ a_\alpha(\mathbf{x}, t) = 0; \end{cases} \qquad \mathbb{B} = \begin{cases} b_1(\mathbf{x}, t) = 0; \\ b_2(\mathbf{x}, t) = 0; \\ ... \\ b_\beta(\mathbf{x}, t) = 0; \end{cases}$$

Если терминальное многообразие задачи в явном виде не задано, можно ввести следующие понятия:

Определение 1.7. Допустимая траектория - решение задачи Коши для уравнений модели (2) при фиксированных начальных условиях, принадлежащих $\mathbb{A}$, и фиксированном допустимом управлении.

Определение 1.8. Достижимая точка - любая точка допустимой траектории, которую можно достичь за конечное время.

1.4 Цель управления

Если зафиксировать допустимое управление $\mathbf{u}(t) = \tilde{\mathbf{u}}(t)$, то (2) можно записать как $\dot{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t)$, и при выборе начальных условий на $\mathbf{x}$: $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, получаем задачу Коши, для которой известно о существовании её решения - траектории $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ и при том единственной.

Так как выбор управления $\mathbf{u}(t)$, как правило, не единственный, существует множество различных допустимых траекторий $\mathbf{x}(t)$, удовлетворяющих уравнению (2).

Таким образом, для решения задачи управления, то есть выбора управления $\mathbf{u}(t)$ из всех допустимых управлений, необходимо определить цель управления, которая, как правило, состоит в том, чтобы обеспечить системе (2) требуемые свойства (например, устойчивость некоторого движения или оптимальность по некоторому показателю качества).

Пример. Можно потребовать, чтобы траектория управляемой системы $\mathbf{x}(t)$ повторяла некоторую наперед заданную кривую $\mathbf{r}(t)$ в пространстве состояний или была максимально близка к ней.

Постановка задачи оптимального управления подразумевает наличие оптимизируемого показателя качества или функционала.

Определение 1.9. Функционалом Φ будем называть отображение $\Phi : \mathbf{C} \to \mathbb{R}$.

В литературе различают три вида критериев качества в задачах оптимального управления:

- задача Больца
$$J = \int_{t_0}^{t_\text{к}} I(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)dt + F(\mathbf{x}(t_\text{к}), t_\text{к})$$
- задача Лагранжа
$$J = \int_{t_0}^{t_\text{к}} I(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)dt$$
- задача Майера
$$J = F(\mathbf{x}(t_\text{к}), t_\text{к})$$

Далее, если не оговорено иначе, задачи оптимального управления будут включать терминальный функционал (вычисляемый на терминальном многообразии), причём целью задачи будет выбор управления $\mathbf{u}$, доставляющего функционалу максимум:

$$J = \Phi(\mathbf{x}(t_\text{к}), t_\text{к}) \longrightarrow \max_{u \in U} \tag{3}$$

2 Виды систем управления

2.1 Пассивные и активные системы управления

Различают активные и пассивные системы управления.

Пассивные системы управления При пассивном управлении оператор эволюции управляемой системы выстраивается таким образом, что в силу собственных свойств, динамических уравнений, которым подчиняется система, он обеспечивает требуемое движение системы.

Пример пассивной системы ориентации. Примером применения такого вида управления может быть пасивная система ориентации космического аппарата (КА). Задача — направить камеру в надир (вниз в сторону Земли по местной вертикали). Рассмотрим факторы, влияющие на движение спутника и его положение в пространстве. Для некоторых КА основное влияние на угловую динамику может оказывать гравитационный момент. Таким оразом, если КА оpентирован так, что его ось с минимальным моментом инерции направлена по местной вертикали, а ось с максимальным моментом инерции – по нормали к плоскости орбиты, КА попадёт в так называемый гравитационный захват и гравитационный момент будет сособствовать поддержанию такой ориентации (при отсуствии более сильных возмущающих моментов).

Другой вариант, использовавшийся в системах ориентации и стабилизации КА – пассивная магнитная система ориентации. Если в КА закреплен достаточно сильный магнит и момент сил вследствие взаимодействия этого магнита с геомагнитным полем является основным, то этот магнит стремится ориентироваться по силовым линиям магнитного поля Земли, что влечёт за собой ориентацию КА.

Проблемы. Если удаётся создать решающую поставленную задачу пассивную систему ориентации, то это абсолютный успех. Однако на практике существует большое количество факторов, которые нужно учесть, что зачастую (почти всегда) сделать крайне сложно, и вероятность успешной реализации пассивной системы ориентации достаточно мала.

Активные системы управления Активные системы управления тратят энергию. Например, с помощью какого-либо двигателя можно осуществлять коррекцию траектории спутника. В маленьких спутниках применяется система магнитного управления: магнитные катушки управляемо генерируют переменный магнитный момент, ориентированный требуемым образом, и тогда магнитное поле Земли поворачивает КА в нужную сторону. Системы активного управления делятся на два класса: разомкнутые системы (англ. Open Loop) и замкнутые (англ. Closed Loop).

2.2 Разомкнутые и замкнутые системы управления

Разомкнутые системы

В случае разомкнутой системы считается, что все параметры объекта управления и окружающей среды известны и будут учтены: динамическая модель идеально построена и соответствует представлениям об объекте, кинематика задана. Затем записываются уравнения движения и находятся силы, которые нужно приложить для осуществления управления — и далее эти силы в качестве управления "запускаются" в систему.

Т.е. разрабатывается некая фиксированная программа управления, в соответствии с которой в дальнейшем реализуются управляющие воздествия.

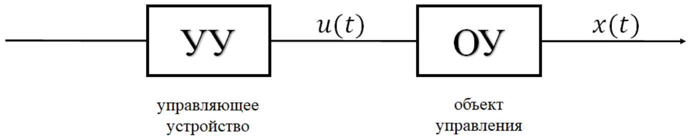

Рис. 1: Разомкнутая система

Пример. Пример разомкнутой системы – обратщенный маятник Капицы, алгоритм управления которого - высокочастотные вертикальные колебания поддерживающей платформы.

Проблемы.

- В параметрах объекта могут присутствовать неопределённости, что приводит к ошибкам модели.
- В окружающей среде могут присутствовать возмущения – неучтённые воздействия, на которые управляющая программа не может повлиять.
- При реализации данной схемы управления объект управления никак не изменяется, а соответственно, остаётся неизменным и его оператор эволюции. Значит, если исходная система является неустойчивой, то благодаря предыдущим двум факторам итоговое положение объекта управления может оказаться далёким от ожидаемого.
- Энергия может расходоваться неэффективно, так как в системы данного вида приходится её постоянно закачивать.

Замкнутые системы

Суть. В случае замкнутой системы управления измеряется выход $\mathbf{x}(t)$. При сравнении его с требованиями $\mathbf{r}(t)$ получается ошибка $\mathbf{e}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{x}(t)$, которая анализируется и учитывается при построении управляющего воздействия. Если в систему приходят некоторые возмущения $\mathbf{d}(t)$, то в данном случае они будут учтены при генерации закона управления. Кроме того, могут присутствовать шумы измерений $\mathbf{N}$. Вообще говоря, они присутствуют у всех реальных датчиков: везде есть какой-либо сдвиг нуля и шум измерений.

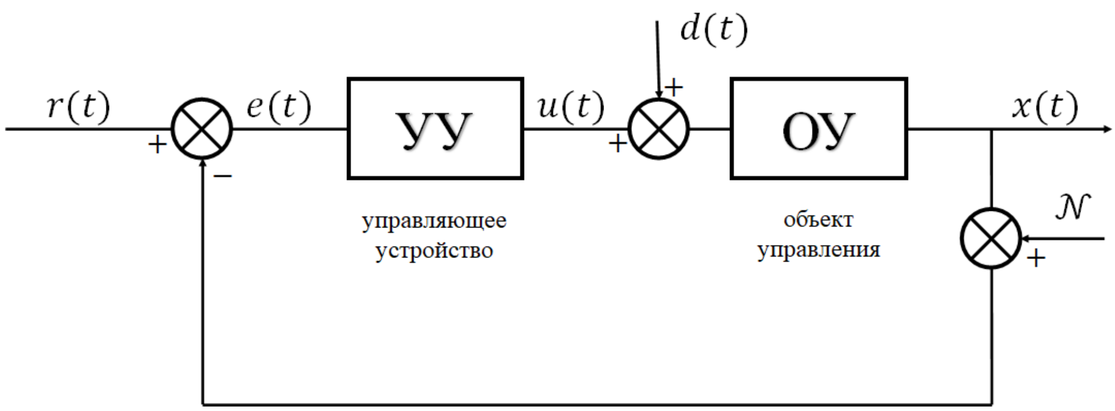

Рис. 2: Замкнутая система

Пример. Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}.$$

При этом закон управления с использованием обратной связи может иметь вид

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x},$$

где $\mathbf{K}$ — некоторая матрица.

Тогда оператор эволюции системы изменяется:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}$$

Здесь $\mathbf{K}$ можно задать таким образом, чтобы повлиять на собственные значения оператора эволюции системы, который раньше был представлен матрицей $\mathbf{A}$, а теперь – матрицей $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$. Таким образом, можно добиться сходимости и устойчивости. На этом приёме основан один из видов регуляторов, о котором речь пойдёт далее в курсе.

Итог. Большинство технических систем, которые обеспечивают требования точности, предъявляемые к управляемым объектам, являются замкнутыми.