Лекция 6. Устойчивость линейных систем управления

Д.А. Притыкин

14 марта, 2022

Содержание

Обозначения

F - фильтр (filter)
C - блок управления, контроллер (controller)
P = процесс (plant)
$r(t)$ - задающее воздействие
$e(t)$ - ошибка управления
$u(t)$ - управляющее воздействие
$d(t)$ - возмущающай сигнал
$n(t)$ - шум
$y(t)$ - наблюдаемый выход
$x(t)$ - выход системы

1 Следящая система (Gang of Six/Four)

Определение 1.1. Следящая система - система автоматического регулирования (управления), воспроизводящая на выходе с определённой точностью входное задающее воздействие, изменяющееся по заранее неизвестному закону.

Приведённая блок-схема на рисунке 1 демонстрирует устройство следящей системы.

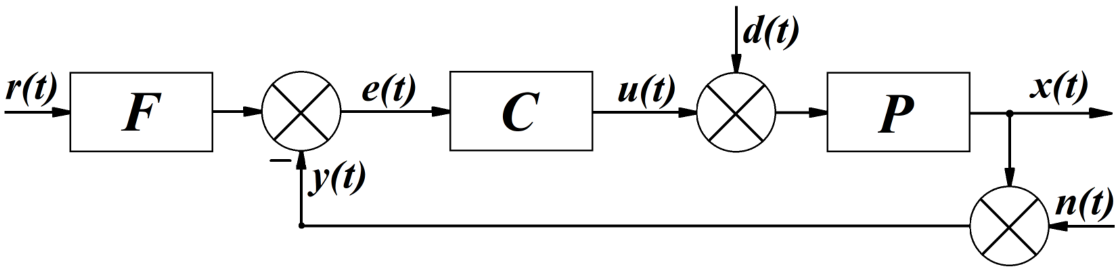

Рис. 1: Следящая система.

Рассмотрим устройство следящей системы: F - фильтр, C - управляющее устройство (регулятор), P - процесс. $r(t)$ - задающее воздействие, $e(t) = r(t) - x(t)$ - ошибка управления, $u(t)$ - управляющее воздействие, $d(t)$ - возмущающий сигнал, $n(t)$ - шум измерений, $y(t) = x(t) + n(t)$ - наблюдаемый выход, $x(t)$ - выход.

Для того, чтобы подобрать блок управления C, можно составить передаточные функции между элементами системы.

2 Вычисление передаточных функций

Вычислим передаточные функции для $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$.

$$X(s) = P(U(s) + D(s)) = P(C(FR - Y) + D) = P(C(FR - X - N) + D)$$

$$X = \underline{\frac{PCF}{1 + PC}R} + \underline{\frac{P}{1 + PC}D} - \frac{PC}{1 + PC}N$$

Такое же получим для Y и U:

$$Y = X + N = \frac{PCF}{1 + PC}R + \frac{P}{1 + PC}D - \underline{\frac{1}{1 + PC}N}$$
$$U = \frac{X}{P} - D = \underline{\frac{CF}{1 + PC}R} - \underline{\frac{PC}{1 + PC}D} - \underline{\frac{C}{1 + PC}N}$$

Получаем 9 передаточных функций, из которых только 6 разных, они подчеркнуты.

Замечание. Если $F = 1$, то остается только 4 разных передаточных функции.

3 Структурные схемы систем управления

О принципах работы ПИД-регуляторов говорилось в предыдущей лекции. Качество работы ПИД-регулятора зависит от подбора (настройки) коэффициентов

k_p, k_I, k_d, и если коэффициенты подобраны плохо, его работа может быть неудовлетворительной. Примеры работы ПИД-регуляторов с плохо подобранными параметрами продемонстрированы на рисунке 2.

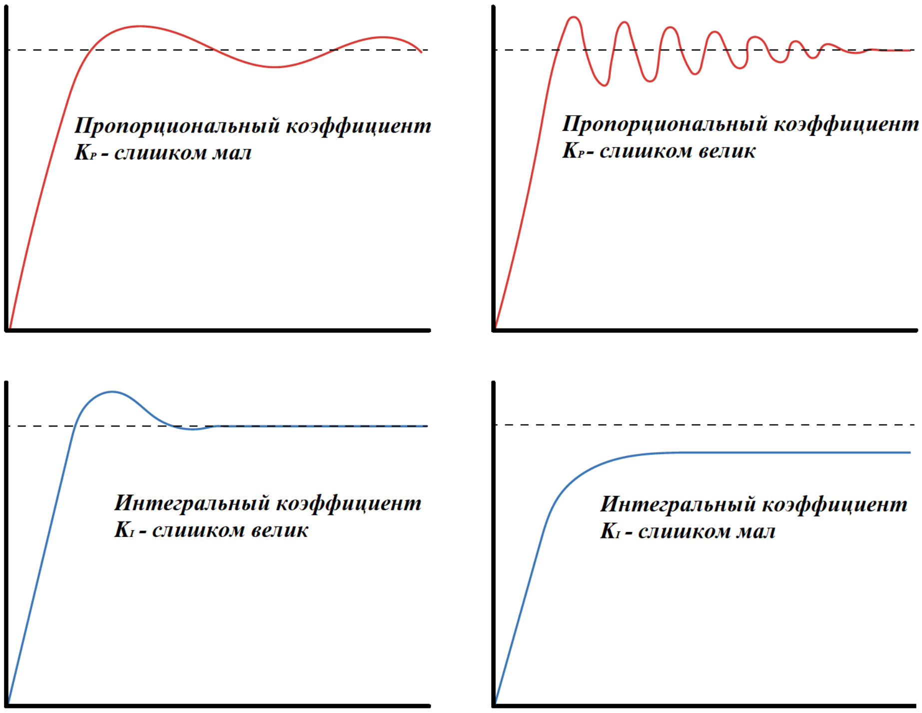

Рис. 2: Пример плохих ПИД-регуляторов.

Теперь выясним, как зависит работа ПИД-регулятора от различных его параметров. Рисунок 3.

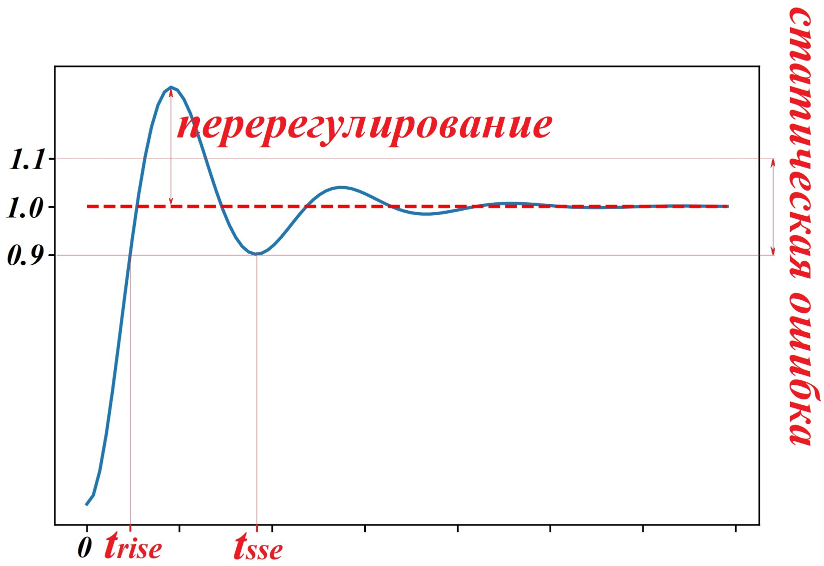

Рис. 3: Параметры системы.

- t_{rise} – время нарастания сигнала (rise time)
- t_{stl} – время установления сигнала (settling time)
- ПИД-регулятор: $U(t) = k_P e(t) + k_I \int\limits_0^\infty e(\tau)d\tau + k_D \dot{e}(\tau)$

Реакция основных показателей качества процесса регулирвания на увеличение коэффициентов ПИД-регулятора k_p, k_I, k_d (таблица 1) приведена в следующей таблице :

Таблица 1: Зависимость параметров системы от увеличения k_P, k_I, k_D

	t_{rise}	перерегулирование	t_{stl}	статическая ошибка
k_p	$\searrow$	$\nearrow$	$\sim$	$\searrow$
k_I	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$
k_d	$\sim$	$\searrow$	$\searrow$	$\sim$

4 Устойчивость систем управления

Назначением систем управления является поддержание некоторого заданного режима движения. Одним из основных требований к системам управления является устойчивость, то есть способность поддерживать невозмущенное движение (заданный режим) даже при наличии неучтённых возмущений в динамический модели системы и ошибок в модели наблюдения. Важно уметь определять устойчивость системы управления и обеспечивать её соответствуюим выбором структуры или параметров.

Будем говорить о двух видах устойчивости:

- устойчивость по начальным условиям;
- устойчивость по входу.

4.1 Устойчивость по начальным условиям

Пусть система управления задана дифференциальным уравнением:

$$a_n x^{(n)}(t) + ... + a_0 x(t) = b_m u^{(m)}(t) + ... + b_0 u(t) \tag{1}$$

Определение 4.1. Устойчивость по начальным условиям - это устойчивость нулевого решения (1) при $u(t) \equiv 0$

Определение 4.2. Положение равновесия :
точка пространства состояний системы $\mathbf{x} = 0$ - называется положением равновесия (1), если уравнения движения системы допускают решение $x(t) = 0$.

Определение 4.3. Устойчивость по Ляпунову:
точка $\mathbf{x} = 0$ называется устойчивой по Ляпунову, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x_0 \in U_\delta(0) \Rightarrow x(t) \in U_\varepsilon(0) \quad \forall t > 0.$$

Определение 4.4. Асимптотическая устойчивость:
точка $\mathbf{x} = 0$ называется асимптотически устойчивой, если:

- она устойчива по Ляпунову
- $\exists \Delta > 0 : \forall x_0 \in U_\Delta(0) \Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0.$

Общее решение однородного дифференциального уравнения (1):

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k t} \tag{2}$$

где λ_k - корни характеристического полинома, соответствующего левой части (1):

$$Q_n(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_0. \tag{3}$$

Корни полинома $Q_n(\lambda)$, вообще говоря, комплексные $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$, поэтому для асимптотической устойчивости нулевого решения (2) необходимо и достаточно, чтобы действительные части всех корней были отрицательны $\alpha_k < 0 \quad \forall k$.

Коэффициенты a_n не всегда заданы в виде конкретных числовых значений, часто они выражены через параметры системы (масса, жесткость, вязкость, ...). В этом случае и корни будут выражаться через параметры и нам необходимо найти допустимые значения параметров, при которых действительные части корней будут отрицательными.

Определение 4.5. Полином $P(\lambda)$ (3) называется устойчивым, если все его корни имеют отрицательные действительные части.

Теорема 4.6. Небходимое условие устойчивости полинома $P(\lambda)$ – все коэффициенты a_k одного знака.

Теорема 4.7. Критерий Рауса-Гурвица.
Пусть $a_n > 0$. Тогда $P_n(\lambda)$ устойчив тогда и только тогда, когда положительны все главные миноры матрицы Гурвица:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & ... & 0 \\ a_n & a_{n-2} & ... & 0 \\ 0 & a_{n-1} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_0 \end{pmatrix}$$

4.2 Устойчивость систем управления по входу

Определение 4.8. Сигнал $y(t)$ ограничен, если $\sup\limits_{t\in[0;+\infty]} |y(t)| < y^+ < \infty$

Определение 4.9. Система управления (1) называется устойчивой по входу, если ее выход $x(t)$ ограничен при любом ограниченном входе $u(t)$.

Теорема 4.10. Система управления (1) устойчива по входу тогда и только тогда, когда ее весовая функция $h(t)$ абсолютно интегрируема

$$\int\limits_0^{+\infty} |h(t)|dt = h^+ < \infty$$

Доказательство.

Достаточность:
По теореме о свертке для любого входа $u(t)$

$$x(t) = \int\limits_0^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

$$x(t)| = |\int\limits_0^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau| \leq \int\limits_0^{+\infty} |h(\tau)||u(t-\tau)|d\tau \leq h^+u^+$$

Таким образом выходной сигнал $x(t)$ ограничен.

Необходимость:
Пусть система управления устойчива, тогда

$$\int\limits_0^{+\infty} |h(t)|dt = \infty$$

По теореме о свертке получим, что ограниченному управлению

$$u(t) = sign(h(t))$$

соответствует неограниченный выход $x(t)$

$$x(t) = \int\limits_0^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau,$$

что противоречит сделанному предположению об устойчивости. ■

Теорема 4.11. Линейная система (1) с дробно-рациональной передаточной функцией $H(s)$ устойчива по входу тогда и только тогда, когда $H(s)$ ограничена при всех $s : Re(s) \geq 0$.

Доказательство.

Необходимость:

$$H(s) = \int\limits_0^{+\infty} h(t)e^{-st}dt \Rightarrow |H(s)| \leq \int\limits_0^{+\infty} |h(t)||e^{-st}|dt \leq h^+.$$

Достаточность:

$$H(s) = \frac{P_m(s)}{Q_n(s)}$$

Если $m \leq n : H(s) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{C_k}{s-\lambda_k}$, где λ_k - корни $Q_n(s)$[a]

Если $m > n : H(s) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{C_k}{s-\lambda_k} + G_{m-n}$, где G_{m-n} - полином степени $m-n$

Так как $H(s)$ ограничена при $s : Re(s) \geq 0$, то
- $\lambda_k : Re(\lambda_k) < 0$
- $G_{m-n}(s) = g_0$

$$h(t) = L^{-1}(\sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{s - \lambda_k} + g_0) = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{\lambda_k t} + g_0 \delta(t)$$

$\Rightarrow h(t)$ абсолютно интегрируема $\Rightarrow$ система управления устойчива по входу.

■

[a] рассмотрите отдельно случай кратных корней

ИТОГО: система управления (1) устойчива по входу, если:
1. $m \leq n$
2. Все корни характеристического полинома собственного оператора системы $Q_n(s)$ имеет все корни с отрицательной действительной частью.

4.3 Некоторые инструменты синтеза устойчивых систем управления

4.3.1 Метод корневого годографа (root locus, pole placement)

Качество системы управления с точки зрения быстродействия и запаса устойчивости может характеризоваться расположением корней числителя и знаменателя передаточной функции замкнутой системы, т. е. расположением нулей и полюсов передаточной функции. Зная эти корни, можно изобразить их расположение па комплексной плоскости корней. При расчете системы целесообразно проследить, как меняется общая картина расположения корней при изменении отдельных параметров, например коэффициента передачи разомкнутой системы, постоянных времени корректирующих цепей и т. п., с целью установления оптимальных значений этих параметров. При изменении значения какого-либо параметра корни будут перемещаться на плоскости корней, прочерчивая некоторую кривую, которую называют корневым годографом или траекторией корней. Построив траектории всех корней, можно выбрать такое значение варьируемого параметра, которое соответствует наилучшему расположению корней.

4.3.2 Диаграммы Боде (Bode diagrams)

Логарифмическая амплитудно-фазовая частотная характеристика (ЛАФЧХ) — представление частотного отклика линейной стационарной системы в логарифмическом масштабе. ЛАФЧХ строится в виде двух графиков: логарифмической амплитудно-частотной характеристики и фазо-частотной характеристики, которые обычно располагаются друг под другом.

Если передаточная функция системы является рациональной, тогда ЛАФЧХ может быть аппроксимирована прямыми линиями. Это удобно при рисовании ЛАФЧХ вручную, а также при составлении ЛАФЧХ простых систем. С помощью ЛАФЧХ удобно проводить синтез систем систем управления, а также цифровых и аналоговых фильтров: в соответствии с определёнными критериями качества строится желаемая ЛАФЧХ, аппроксимированная с помощью прямых линий, которая затем разбивается на ЛАФЧХ отдельных элементарных звеньев, из которых восстанавливается передаточная функция системы (регулятора) или фильтра.

4.3.3 Метод D-разбиения

Если полином (3) соответствующий собственному оператору системы (1) зависит от варьируемых параметров d_k

$$Q_n(\lambda) = Q_n(\lambda, d_1, d_2, d_3...),$$

можно перейти на плоскость двух параметров (например, d_1 и d_2) и разбить её на области $D(k)$, которым соответствует фиксированное число k левых (то есть лежащих слева от мнимой оси) корней. Границей области будет кривая

$$Q(i\omega, d_1, d_2) = U(\omega, d_1, d_2) + iV(\omega, d_1, d_2) = 0,$$

задающая конформное отображение мнимой оси ($\lambda = i\omega$) на плоскость (d_1, d_2).

Построив D-разбиение можно, срели прочих, найти область $D(n)$, в которой устойчивость гарантируется при любых значениях $(d_1, d_2) \in D(n)$.

4.3.4 Критерий Найквиста

Критерий Найквиста позволяет определить устойчивость системы с обратной связью (так называемой замкнутой системы) по экспериментально снятой или полученной на основе передаточной функции амплитудно-фазовой частотной характеристике разомкнутой системы.

Если передаточная функция разомкнутой системы равна

$$H_{\text{р}} = \frac{P_m(s)}{Q_n(s)}$$

, то передаточная функция замкнутой системы равна

$$H_{\text{з}} = \frac{P_m(s)}{P_m(s) + Q_n(s)}$$

,

Введя параметр $\mu = d_1 + id_2$ и полином

$$R(s) = \mu P_m(s) + Q_n(s),$$

заметим, что пердаточная функция

$$H(s) = \frac{P_m(s)}{R(s)}$$

при $\mu = 0$ совпадает с [$H_{\text{р}}$, а при при $\mu = 1$ совпадает с [$H_{\text{з}}$.

Построив для полинома $R(s)$ D-разбиение на плоскости (d_1, d_2), можно определить, принадлежат ли точки $\mu = 0$ и $\mu = 1$ одной области и сделать вывод об устойчивости замкнутой системы по устойчивости разомкнутой системы.