Análisis de Datos Categóricos

Tarea 01

Rivera Torres Francisco de Jesús
Rodríguez Maya Jorge Daniel
Samayoa Donado Víctor Augusto
Trujillo Bariios Georgina

Marzo 14, 2019

Ejercicio 1

Lee el artículo de Tapia, José A. y Nieto, F. Javier. **Razón de posibilidades: una propuesta de traducción de la expresión odds ratio**. *Salud Pública de México*. Julio-Agosto, 1993. Vol. 35 No.4 Pág. 419 − 424. Elabora un resumen en media cuartilla.

El artículo expone cómo las diversas traducciones hispánicas del término *odds ratio* son imprecisas en distintos sentidos y propone un nuevo término que, según los autores, se adecua mejor tanto linguistica como conceptualmente al significado matemático original. Dentro del repaso histórico por las traducciones e interpretaciones imprecisas, discutidas por los autores, destacan las siguientes. 1. La estipulación de *relative risk* como sinónimo de *odds ratio* en el diccionario de términos estadísticos del *International Statistical Institute* (no obstante este error lingüistico, los autores señalan que el concepto matemático se mantuvo correcto). 2. La confusión producida en textos epidemiológicos en los que se refería a otros términos para hacer alusión al concepto de *odds ratio*: desigualdad relativa, posibilidades relativas, riesgo relativo estimado, por ejemplo. 3. La confusión del concepto matemático con su cálculo y el consecuente surgimiento de términos como *cross product ratio* en los que pierde sentido linguüistico la idea matemática original. 4. La traducción específica como *razón de momios* que sólo tiene sentido en México, por la similitud entre el uso anglosajón del término *odds* (no la traducción literal) y el uso mexicano de *momios*. La confusión entre probabilidad y *odds* reflejada en la traducción cpmo *relación* o *razón de probabilidad*. A partir de las razones mencionadas, los autores mencionan que ciertas propuestas de traducción, como *razón de ventaja*, han resultado salvaguardar el significado matemático de *odds ratio* pero su articulación en frases resulta extraña al español. Por ello proponen traducir *odds* como *posibilidades* que además de ser compatible con el significado y uso del término inglés *odds* permite articular frases que reflejan el sentido original del término.

Ejercicio 2

¿Qué es la sensibilidad (*sensitivity*) y la especificidad (*specificity*) de una prueba? ¿Qué es la curva ROC? Busca algún ejemplo para ejemplificar estos conceptos.

Para estos dos casos, consideremos la siguiente tabla:

Realidad / Prueba	Positivo	Negativo
Positivo	Verdadero positivo (TP)	Falso Positivo (FP)
Negativo	Falso Negativo (FN)	Verdadero negativo (TN)

La **sensibilidad** de una prueba hacer referencia a la capacidad de la prueba para detectar "pacientes" que efectivamente tienen cierta condición (la prueba da positivo). Esto es, es el cociente que existe entre el número de verdaderos positivos dados por la prueba entre el total de pacientes que tienen la condición:

$$\text{sensibilidad} = \frac{TP}{TP + FN}$$

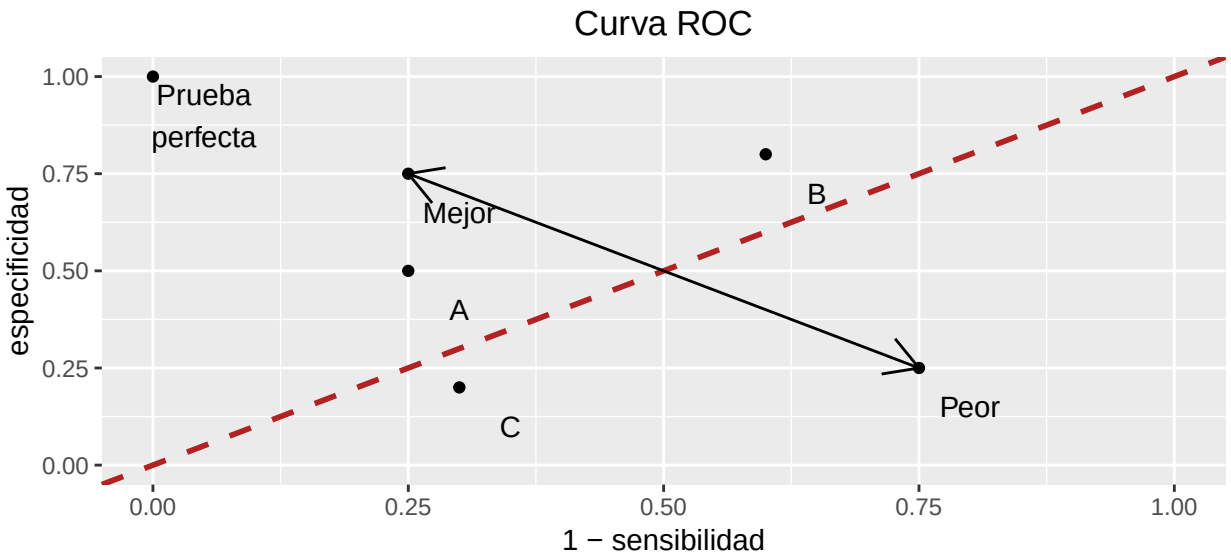
En el caso de una prueba con una alta sensibilidad, se puede afirmar que un resultado negativo es útil para descartar la presencia de la condición (enfermedad). Sin embargo, un resultado positivo, en el caso de una prueba con alta sensibilidad, no se puede usar para confirmar (asegurar) que el paciente padece cierta condición.

La **especificidad** de una prueba hacer referencia a la capacidad de la prueba a detectar de forma correcta "pacientes"" carecen de cierta condición (la prueba da negativo). Esto es, es el cociente que existe entre entre los verdaderos negativos dados por la prueba entre el total de pacientes que efectivamente carecen de la condición en cuestión:

$$\text{especificidad} = \frac{TN}{TN + FP}$$

En el caso de una prueba con alta especificidad, se puede afirmar que un resultado positivo es útil para confirmar la precencia del padecimiento de cierta condición (enfermedad). Mientras que, para un resultado negativo, en el caso de una pruba con alta especificidad, no se puede usar para confirmar que el paciente carece de cierto padecimiento.

La **curva ROC** es una representación gráfica de la sensibilidad respecto a la especificidad cuando se trabaja en pruebas de clasificación binaria (tiene el pedecimiento, carece del padecimiento). En el eje X se coloca el valor de $1 - \textit{sensibilidad}$ y en el eje Y se coloca el valor de la especificidad. En el caso de la "prueba ideal" se tendría un valor de sensibilidad igual a 1 y un valor especificidad igual a 1, por lo que dicha prueba se colocaría en la coordenada $(1 - \textit{sensibilidad}, \textit{especificidad}) = (0, 1)$.



La gráfica anterior representa la posición de tres pruebas *prueba perfecta*, *prueba A* y *prueba B*. La prueba perfecta es, como se mencionó previamente, es aquella que tiene especificidad y sensibilidad igual a 1. La prueba A tiene una sensibilidad mayor respecto a la prueba B, pero tiene una especificidad menor que la prueba B. La prueba C no tiene un buen desempeño al tener el valor de 1 - sensibilidad y la especificidad por abajo de la recta puntada (el área "peor"), implica que su desempeño es peor que el de "adivinar" lanzando una moneda para determinar el resultado.

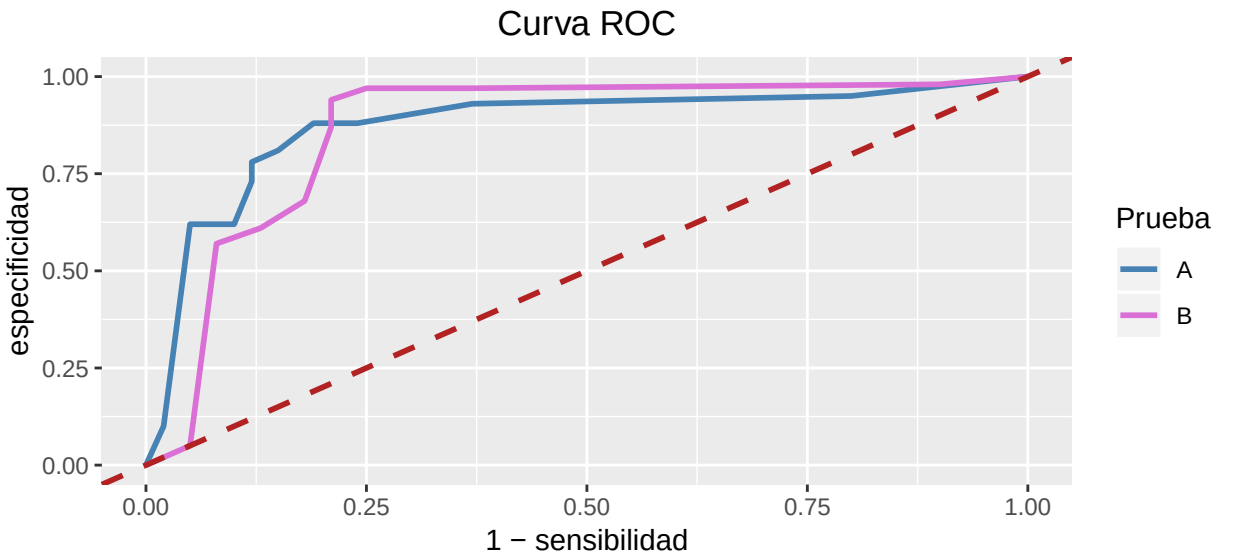
La gráfica anterior permite determinar de una forma visual la comparación entre el desempeño entre distintas pruebas. Por ejemplo, si nos interesa una prueba con alta sensibilidad, se tomaría la prueba A. Mientras que si serequiere una prueba con alta especificidad se elegirá la prueba B.

El nombre de "curva" proviene de la determinación sobre el comportamiento de cada una de las pruebas para distintos "puntos de corte". Esto es, al determinar una prueba es normal obtener como resultado un valor numérico entre 0 y 1 que indica la "probabilidad de padecer" cierta condición. En este caso, se determina un valor de probabilidad a partir del cual si el resultado de la prueba es mayor a este valor se considerará un resultado positivo y si el resultado de la prueba es menor a este valor se considerará un resultado negativo.

La selección de dicho punto de corte conlleva a que la tabla de contingencia se vea modificada al cambiar los valores de verdaderos positivo (TP), falsos positivos (FP), falsos negativos (FN) y verdaderos negativos (TN) y por ende cambia el valor de la sensibilidad y la especificidad.

Lo anterior permite elegir el "punto de corte" de acuerdo con el objetivo de la prueba. Esto es, se requiere crear una prueba que me de una gran certeza que los resultados negativos aseguren una ausencia de una condición, entonces se desea elegir el punto de corte que nos de una alta sensibilidad. Si por el contrario, se busca que los resultados positivos aseguren la presencia de una condición, entonces se desea elegir el punto de corte que nos de una alta especificidad.

Como ejemplo, consideremos las pruebas A y B para determinar si una persona tiene diabetes. Ambas pruebas dan como resultado un "score" (valor entre 0 y 1), y por cada punto de corte definido para determinar si se padece o no diabetes se obtienen distintos valores de sensibilidad y especificidad (ver gráfica inferior).



Ejercicio 3

En el artículo Clopper, C. J. & Pearson, E. S. 1934. **The Use of Confidence or Fiducial Limits Illustrated in the Case of the Binomial**. *Biometrika*, Vol. 26, No. 4, vienen las tablas para calcular un intervalo EXACTO de confianza para p. Úsa esas tablas para calcular un intervalo al 95% y otro al 99% para una muestra tamaño $n = 50$ y $x = 9$.

No se encontraron las tablas en el artículo, pero se encontraron las gráficas asociadas a dichas tablas. Se usarán estas gráficas para obtener los intervalos de confianza.

El procedimiento para encontrarlos es fijar el valor de x en el eje horizontal y seguir una línea recta vertical hasta itnersectar las dos curvas que esten asociadas al valor de n. Ahí se obtendrá la coordenada en y reference a los límites inferior y superior del intervalo de confianza para p.

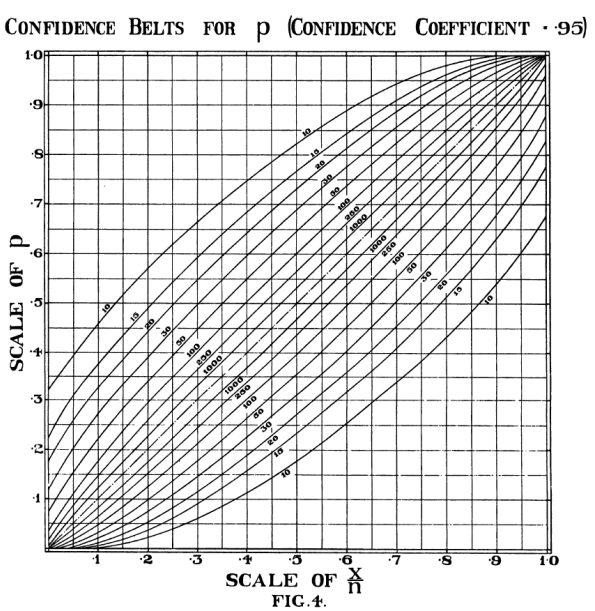


FIG.4.

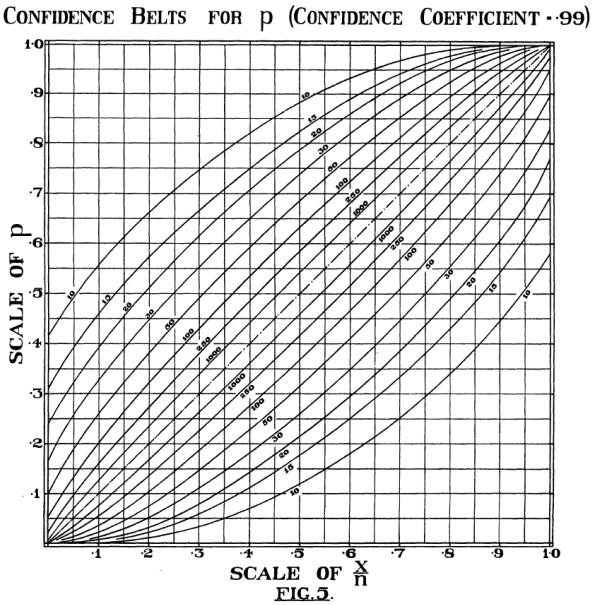


FIG.5.

Para el caso de $n = 50$ y $x = 9$, con un intervalo de confianza al 95%, se tiene $(0.775, 0.960)$.

Para el caso de $n = 50$ y $x = 9$, con un intervalo de confianza al 99%, se tiene $(0.740, 0.975)$.

Ejercicio 4

Indica el esquema de muestreo y la hipótesis nula y alternativa para cada uno de los siguientes ejemplos:

Ejemplo a)

En un hospital se decide registrar el número de parejas que lleguen en 1 año con la finalidad de someterse a un tratamiento de fertilidad. Al cabo del año, se genera una tabla en donde se registra el grupo de edad de la mujer al iniciar el tratamiento (20 a 30 y 31 a 45) y el resultado (embarazo o no embarazo).

El esquema de muestreo es **Poisson**

Las hipótesis nula y alternativa son:

$$\mathrm{H}_0 = \text{Edad y resultado (del tratamiento) no estan relacionados}$$
$$\mathrm{H}_a = \text{Edad y resultado presentan algún grado de asociación}$$

Ejemplo b)

En un hospital de quiere evaluar la asociación entre edad de la mujer y resultado de un tratamiento de fertilidad. Se establece al inicio del estudio que se registraran los resultados de 722 personas. Al

finalizar el tratamiento se genera una tabla en donde se registra el grupo de edad de la mujer al iniciar el tratamiento (20 a 30 y 31 a 45) y el resultado (embarazo o no embarazo).

El esquema de muestreo es **Multinomial**

Las hipótesis nula y alternativa son:

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_0 &= \text{Las variables edad y resultado (del tratamiento) son independientes} \\ \mathrm{H}_a &= \text{Las variables edad y resultado presentan algún grado de dependencia} \end{aligned}$$

Expresado en términos de ecuaciones se tiene

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_0 &= \mathrm{P}(edad, resultado) = \mathrm{P}(edad) \cdot \mathrm{P}(resultado) \\ \mathrm{H}_a &= \mathrm{P}(edad, resultado) \neq \mathrm{P}(edad) \cdot \mathrm{P}(resultado) \end{aligned}$$

Ejemplo c)

En un hospital de quiere evaluar sí el resultado de un tratamiento de fertilidad cambia de acuerdo a la edad de la mujer que desea embarazarse. Para ello se deciden registrar los resultados de 350 mujeres cuya edad está entre los 20 y 30 años, y 360 mujeres cuya edad está entre los 31 y 45 años. Al finalizar el tratamiento se genera una tabla en donde se registra el grupo de edad de la mujer al iniciar el tratamiento y el resultado (embarazo o no embarazo)

El esquema de muestreo es **Multinomial-Producto**

Las hipótesis nula y alternativa son:

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_0 &= \text{Hay homogeneidad en los resultados respecto a los dos grupos de mujeres} \\ \mathrm{H}_a &= \text{No hay homogeneidad en los resultados respecto a los dos grupos de mujeres} \end{aligned}$$

Si denotamos por p_1 la distribución de probabilidad del resultado (del tratamiento) para las mujeres con edad entre 20 a 30 años y por p_2 la disribución de probabilidad del resultado (del tratamiento) para las mujeres con edad entre 31 a 45 años, entonces

$$\mathrm{H}_0 = p_1 = p_2 \qquad \text{v.s.} \qquad \mathrm{H}_a = p_1 \neq p_2$$

Ejercicio 5

Los datos del ejemplo $4a$) se han resumido en la siguiente tabla:

Edad de la mujer \ Resultado	Embarazo	No Embarazo
20 a 30 años	26	85
31 a 45 años	146	565

Inciso 5.1

Realicen *a mano* la prueba de Ji cuadrada. Concluyan.

```
##        resultado
## edad    embarazo no embarazo
##   20-30       26          85
##   31-45      146         565
```

Calculando las marginales:

Dimensión 1 (filas)

```
## edad
## 20-30 31-45
##   111   711
```

Dimensión 2 (columnas)

```
## resultado
##    embarazo no embarazo
##         172         650
```

Y el total

```
## [1] 822
```

Ahora calculamos los valores esperados

```
esperados <- c(totalFilas[1]*totalColumnas[1]/total,
               totalFilas[2]*totalColumnas[1]/total,
               totalFilas[1]*totalColumnas[2]/total,
               totalFilas[2]*totalColumnas[2]/total
              )
esperados
```

```
##     20-30     31-45     20-30     31-45
##  23.22628 148.77372  87.77372 562.22628
```

Y obtenemos las diferencias cuadradas entre los observados y esperados. Y luego las dividimos entre esperados

```
##      20-30      31-45      20-30      31-45
## 0.33124280 0.05171301 0.08765194 0.01368406
```

Finalmente, obtenemos la Chi cuadrada al sumar estos valores

```
## [1] 0.4842918
```

Y realizamos la prueba. Sabiendo que la prueba tiene 1 grado de libertad.

```
## [1] 0.4864847
```

Dado este resultado, no podemos rechazar la hipótesis nula y concluir que exista relación entre la prueba de embarazo y la edad.

Inciso 5.2

Corroboren el resultado en R. Muestren el resultado.

Aplicamos el comando *chisq.test()* y obtenemos el mismo resultado.

```
##
##  Pearson's Chi-squared test with simulated p-value (based on 2000
##  replicates)
##
## data:  xtabs(conteos ~ edad + resultado, data = tabla, )
## X-squared = 0.48429, df = NA, p-value = 0.5392
```

Inciso 5.3

Calculen la probabilidad de embarazo para mujeres de $20 - 30$ años y la probabilidad de embarazo para mujeres de $31 - 45$ años

La probabilidad de embarazo para mujeres de entre 20 y 30 años es

```
##     20-30
## 0.2342342
```

La probabilidad de embarazo para mujeres de entre 31 y 45 años es

```
##     31-45
## 0.2053446
```

Inciso 5.4

Calculen el Odds Ratio a mano y en R. Interpreten el valor OR y los límites superior e inferior del intervalo de confianza.

Calculemos primero la probabilidad de no embarazo dado que se pertenece a ambos grupos:

```
##     20-30
## 0.7657658
```

```
##     31-45
## 0.7946554
```

Así, el *odds ratio* es el siguiente

```
##   20-30
## 1.87453
```

El valor del *or* podemos interpretarlo como que hay más posibilidades (en particular 80% más) de embarazo que de no embarazo si se tienen de 20 a 30 años en vez de 31 a 45 años.

Para calcular el intervalo de confianza (al 95%) primero calculamos el error

```
error <- sqrt((1/conteos[1])+(1/conteos[2]) +(1/conteos[3]) +(1/conteos[4]))
error
```

```
## [1] 0.2425809
```

Y luego los límites

```
LI <- exp(log(or)-1.96*error)
LS <- exp(log(or)+1.96*error)
print(c(LI, LS))
```

```
##    20-30    20-30
## 1.165208 3.015653
```

De esta manera, tenemos que el límite inferior es 1.1652077 y el superior 3.0156526. Podemos decir entonces, que con un nivel de confianza del 95% el verdadero valor del *odds ratio* caerá en este intervalo.

Inciso 5.5

Calculen el Relative Risk a mano y en R. Interpreten el valor RR y los límites superior e inferior del intervalo de confianza.

```
## [1] 1.140689
```

Este valor podemos interpretarlo como el riesgo que las mujeres de entre 20 y 30 años tienen de embarazo en contra del embarazo de las mujeres de entre 31 y 45.

El error para el *risk ratio* es

```
##     20-30
## 0.1728663
```

El interalo de confianza asociado es

```
##     20-30     20-30
## 0.8018708 1.4795065
```

De esta manera, tenemos que el límite inferior es 0.8018708 y el superior 1.4795065. Podemos decir entonces, que con un nivel de confianza del 95% el verdadero valor del *risk ratio* caerá en este intervalo.

Ejercicio 6

Se realizó un estudio en la India para determinar la asociación entre dos tipos de virus de papiloma humano con la aparición en las lesiones del cérvix. Realicen una prueba exacta de Fisher “a mano” y en R. Interpreten.

Tipo de Virus \ Cervix	Sin lesiones	Con lesiones
HPV 11	47	3
HPV 16	14	42

Las hipótesis son: la hipótesis nula H_0, la cual es que no existe relación alguna entre los virus de papiloma humano con la aparición en las lesiones del cérvix, contra la hipótesis alternativa H_1, que indica que si existe algún tipo de relación.

$$H_0 : \theta = 0 \;\; vs \;\; H_1 : \theta \neq 0$$

Para realizar el contraste de hipótesis requerimos calcular la prueba exacta de Fisher. Con esta finalidad, calcularemos las probabilidades hipergeométricas procedentes de la prueba, de este modo:

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{\binom{k}{x}\binom{n-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Y esto lo podemos realizar con la siguiente expresión equivalente:

$$\mathbb{P} = \frac{(n_{11} + n_{12})! \cdot (n_{21} + n_{22})! \cdot (n_{11} + n_{21})! \cdot (n_{12} + n_{22})!}{n_{11}!n_{12}!n_{21}!n_{22}!n!}$$

Así tenemos para $n_{11} = 47$

$$\mathbb{P}_{n_{11}} = \frac{(47+3)! \cdot (14+42)! \cdot (47+14)! \cdot (3+42)!}{47! \cdot 3! \cdot 14! \cdot 72! \cdot 106!} = 6.026482e^{-14}$$

Sin embargo para poder encontrar el P-valor necesitamos realizar la suma de todos los valores de las probabilidades en la tabla, menores o iguales que los valores observados. Esto debido a que las colas en la distribución no son simétricas.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{n_{11}=48} &= 1.226319e^{-15} \\
\mathbb{P}_{n_{11}=49} &= 1.478863e^{-17} \\
\mathbb{P}_{n_{11}=50} &= 7.887271e^{-20} \\
\mathbb{P}_{n_{11}=10} &= 2.078427e^{-14} \\
\mathbb{P}_{n_{11}=9} &= 4.874360e^{-16} \\
\mathbb{P}_{n_{11}=8} &= 7.883063e^{-18} \\
\mathbb{P}_{n_{11}=7} &= 8.147868e^{-20} \\
\mathbb{P}_{n_{11}=6} &= 4.713643e^{-22} \\
\mathbb{P}_{n_{11}=5} &= 1.122296e^{-24}
\end{aligned}$$

Sumando estos valores tenemos entonces que el P-value $= 8.278568e^{-14}$. Ahora comparamos este valor con la prueba exacta de Fisher con ayuda de R.

```
##       sin lesiones con lesiones
## HPV11           47            3
## HPV16           14           42
```

```
##
##  Fisher's Exact Test for Count Data
##
## data:  dat
## p-value = 8.279e-14
## alternative hypothesis: true odds ratio is not equal to 1
## 95 percent confidence interval:
##   11.71904 258.15626
## sample estimates:
## odds ratio
##   44.63952
```

Rechazamos la hipótesis H_0, ya que el p-value resulta ser menor que 0.05. Por lo que podemos concluir que hay evidencia estadística significativa que sugiere, que existe relación, entre los dos tipos de virus y la aparición de lesiones en el cérvix.

Ejercicio 7

Comparación de métodos para generar intervalos de confianza.

Inciso 7.1

Generen intervalos de confianza al 99% para una p estimada de $p = 0.9$ y $p = 0.5$ con $n = 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100$ usando los comandos `binom.exact`, `binom.wilson` y `binom.asymp`.

El código utilizado en `R` es el siguiente:

Inciso 7.2

Muestra los límites de los intervalos generados a través de los tres métodos

Tabla 1: Intervalos de confianza para p = 0.9

			exacto		wilson		asymp	
x	n	media	Inferior	Superior	Inferior	Superior	Inferior	Superior
9	10	0.9	0.456	0.999	0.493	0.988	0.656	1.144
18	20	0.9	0.613	0.995	0.621	0.980	0.727	1.073
27	30	0.9	0.680	0.988	0.681	0.974	0.759	1.041

Tabla 1: Intervalos de confianza para p = 0.9 *(continued)*

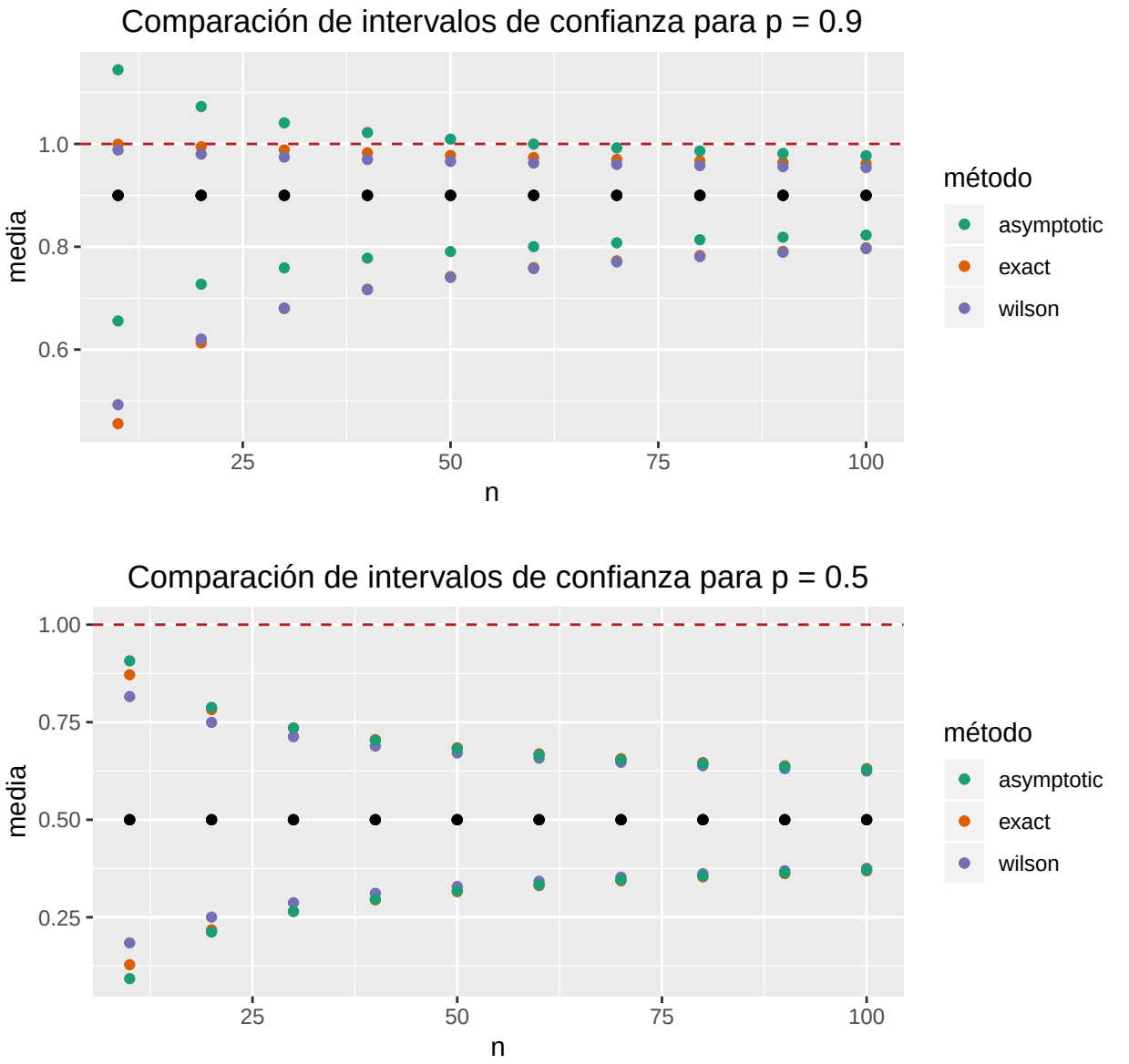
			exacto		wilson		asymp	
x	n	media	Inferior	Superior	Inferior	Superior	Inferior	Superior
36	40	0.9	0.717	0.983	0.716	0.970	0.778	1.022
45	50	0.9	0.742	0.978	0.740	0.966	0.791	1.009
54	60	0.9	0.759	0.974	0.757	0.963	0.800	1.000
63	70	0.9	0.773	0.970	0.771	0.960	0.808	0.992
72	80	0.9	0.783	0.967	0.781	0.958	0.814	0.986
81	90	0.9	0.791	0.964	0.789	0.956	0.819	0.981
90	100	0.9	0.798	0.962	0.796	0.954	0.823	0.977

Tabla 2: Intervalos de confianza para p = 0.5

			exacto		wilson		asymp	
x	n	media	Inferior	Superior	Inferior	Superior	Inferior	Superior
5	10	0.5	0.128	0.872	0.184	0.816	0.093	0.907
10	20	0.5	0.218	0.782	0.250	0.750	0.212	0.788
15	30	0.5	0.265	0.735	0.287	0.713	0.265	0.735
20	40	0.5	0.295	0.705	0.311	0.689	0.296	0.704
25	50	0.5	0.316	0.684	0.329	0.671	0.318	0.682
30	60	0.5	0.331	0.669	0.342	0.658	0.334	0.666
35	70	0.5	0.343	0.657	0.353	0.647	0.346	0.654
40	80	0.5	0.353	0.647	0.362	0.638	0.356	0.644
45	90	0.5	0.362	0.638	0.369	0.631	0.364	0.636
50	100	0.5	0.369	0.631	0.375	0.625	0.371	0.629

Inciso 7.3

Realicen una gráfica en donde comparen los intervalos generados por los tres métodos y las dos p estimadas

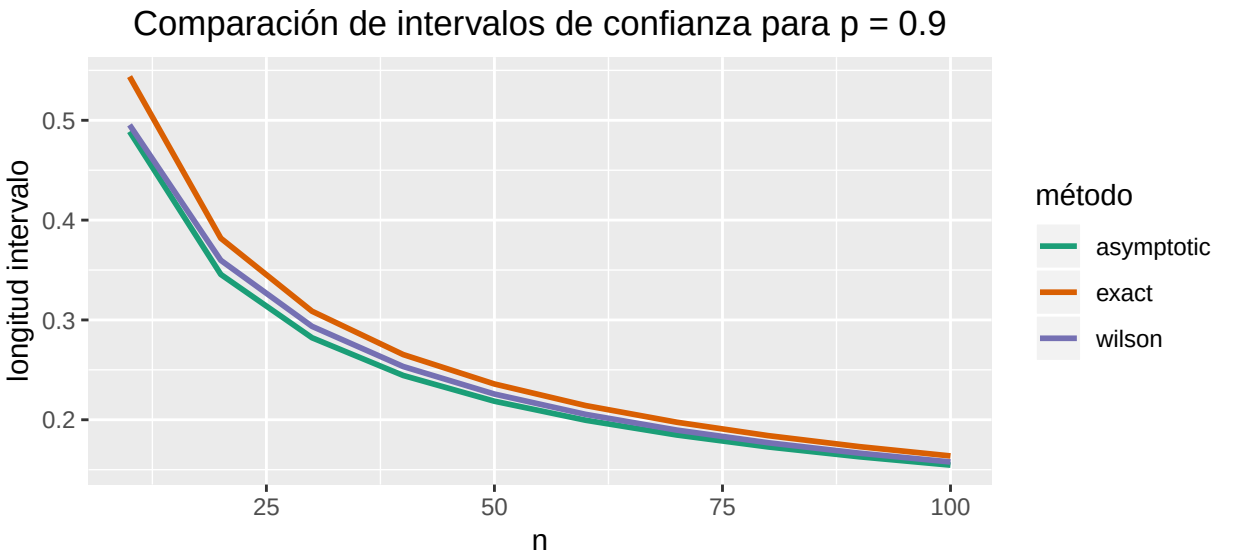


Inciso 7.4

¿Cuál método elegirían? ¿Cuál método no elegirían? ¿Por qué?

En la gráfica de intervalos de confianza al 99% para $p = 0.9$, notamos que el método `binom.asymp` contiene parte del intervalo de confiana mayor a $p = 1$ para valores con $n < 60$. Por tal motivo este método no lo usaríamos cuando p sea cercano a 0.9.

Graficando la longitud de los intervalos de confianza para $p = 0.9$, y considerando que `binom.asymp` no lo usaremos por exceder el valor de $p = 1$. Notamos que el método `binom.wilson` es el que genera los intervalos de confianza de menor longitud. Por lo que, para el caso en que $papprox0.9$ es mejor utilizar el método **Wilson** para obtener el intervalos de confianza.



Para el caso cuando $p = 0.5$ se observa todos los métodos tienen intervalos de confianza dentro del rango $(0, 1)$. Por lo tanto, usaremos el criterio de menor longitud para seleccionar el método para el cálculo del intervalos.

En la gráfica inferior, se observa que el intervalo generado con `binom.wilson` es el que tiene la menor longitud para los valores de n en el rango de $n = 10, \ldots, 100$. Por lo tanto, para el caso en que $p \approx 0.5$ se usará el método de **Wilson** para obtener el intervalo de confianza.