BTS SNEC / Physique	FILTRAGE DES SIGNAUX	Chapitre 8

Nécessité du filtrage dans divers domaines

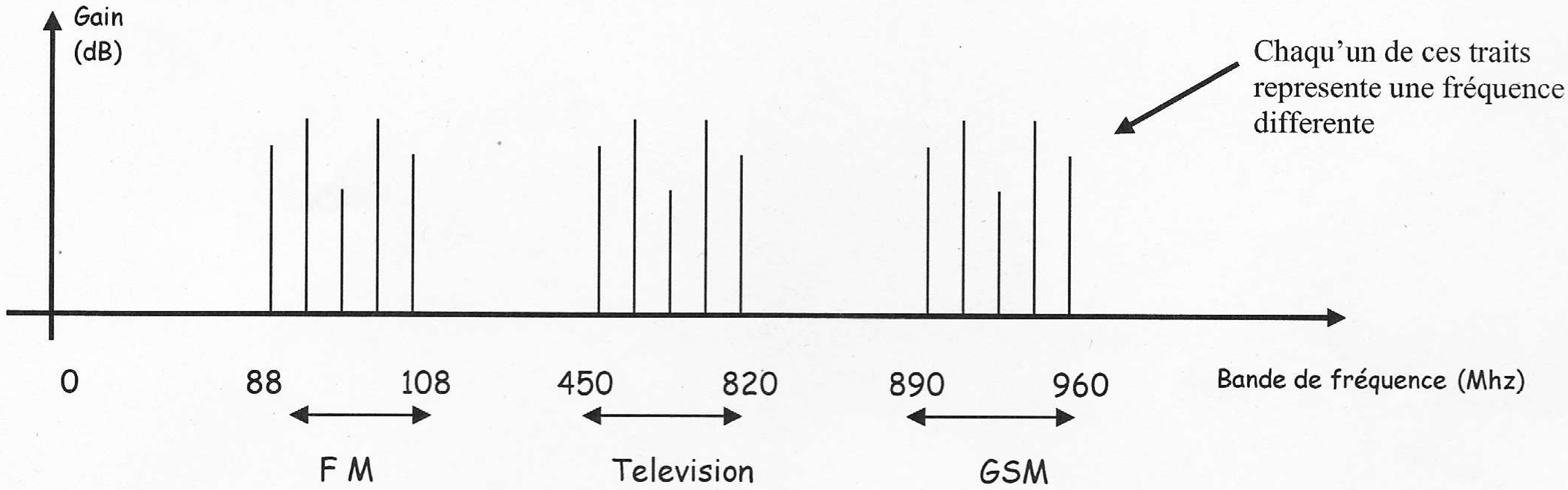
- *En télécommunications : séparer la réception de signaux émis sur des fréquences différentes (multiplexage fréquentiel)*
- *Extraire un signal d'un bruit*
- *Réalisation d'une tension continue à partir d'une tension redressée*
- *Conversion de signaux analogiques en signaux numériques*

I . Principe du filtrage

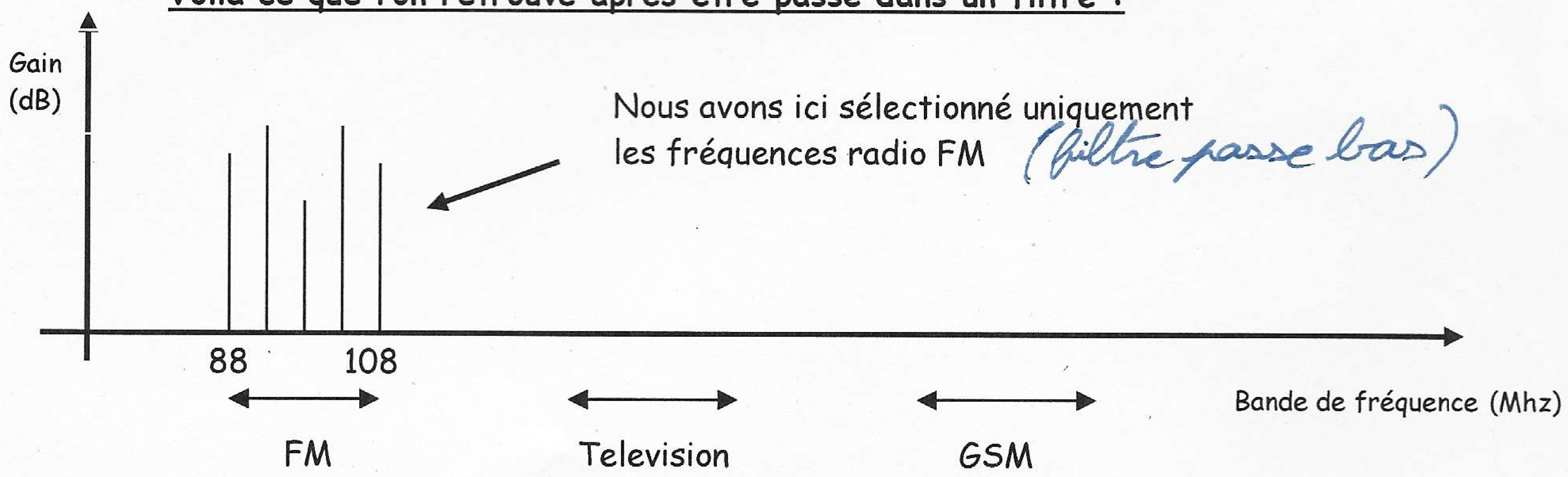
I.1 Exemples

- Filtres correcteurs audio ➔ Augmenter ou diminuer l'amplitude des sons graves ou aigu
- Filtres pour sélectionner la gamme de fréquence hertzienne désiré

Exemple de réception sur une antenne FM :



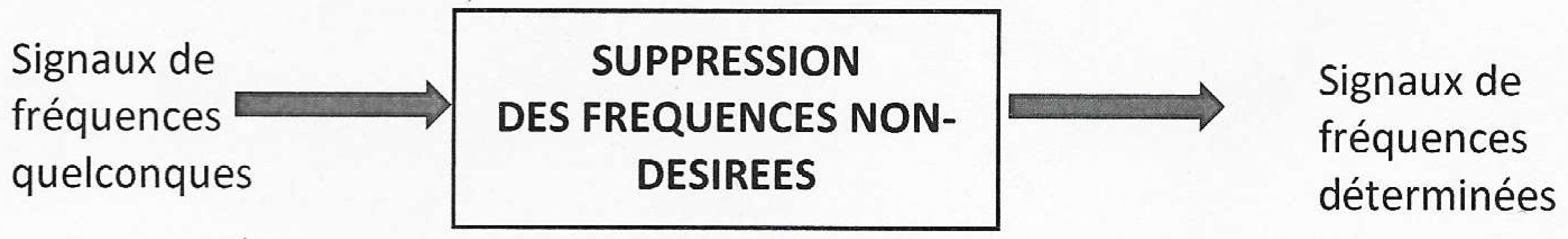
Voila ce que l'on retrouve après être passé dans un filtre :



I.2 Propriétés générales des filtres

La fonction de filtrage de fréquences consiste à :

- supprimer les fréquences indésirables
- laisser passer les fréquences désirées



Conséquences :

La réponse d'un filtre à un signal d'entrée sinusoïdal, est un signal sinusoïdal de même fréquence.

Et plus généralement :

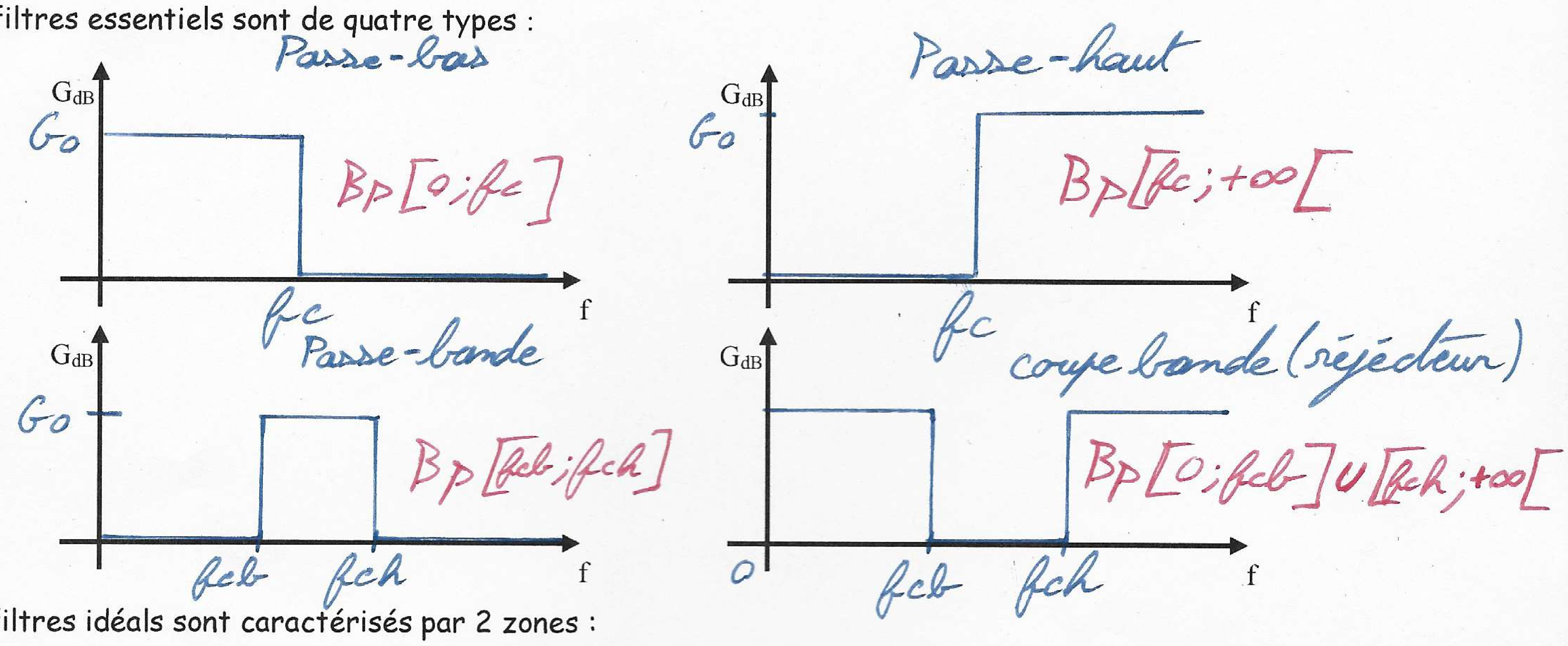
Le signal de sortie d'un filtre ne peut pas contenir plus de composantes spectrales que le signal d'entrée.
Autrement dit,

- un filtre **ne crée jamais de composantes spectrales**,
- un filtre ne fait que **transformer les composantes spectrales existant dans le signal d'entrée**.
  Autrement dit, un filtre ne crée jamais d'harmoniques, il ne fait que les transformer

I.3 Interprétation spectrale du filtrage : notion de fonction de transfert

I.3.1 Filtres idéaux

Les filtres essentiels sont de quatre types :



Les filtres idéals sont caractérisés par 2 zones :

1^er^ zone : Le signal est amplifié → Bande Passante (BP)

2eme zone : Le signal ne passe pas → Hors Bande Passante

I.3.2 Filtres réels : fonction de transfert

Définition :

> **La fonction de transfert d'un filtre est le nombre complexe défini en régime sinusoïdal par le rapport $\underline{V}_s/\underline{V}_e$.**
> Ce rapport dépend de la fréquence et on le note $\underline{T}(f)$ ou $\underline{T}(\omega)$.
>
> $$\underline{T}(\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}$$

Très fréquemment, le module de la F.T. est remplacé par le gain en décibels (dB)

> Gain du filtre en dB : $G(f) = 20 \log |\underline{T}(f)|$

On retiendra que

- le gain est nul lorsque $|\underline{T}(f)| = V_s/V_e$, c'est-à-dire lorsque $V_s = V_e$. (1)
- le gain augmente de 20 lorsque $|\underline{T}(f)|$ est multiplié par 10, donc 40 dB lorsque $|\underline{T}(f)|$ est multiplié par 100, etc.
- le gain diminue de 20 dB lorsque $|\underline{T}(f)|$ est divisé par 10, donc de 40 dB lorsque $|\underline{T}(f)|$ est divisé par 100, etc.
- le gain tend vers $-\infty$ lorsque $|\underline{T}(f)| \to 0$

I.4 Diagramme de Bode ou courbes de réponse en fréquence

I.4.1 Définitions

On appelle diagramme de Bode ou (courbes de réponses) en fréquence d'un filtre, les courbes qui représentent l' :

- évolution du gain G ou T en fonction de la fréquence : G = f(f)
- évolution du déphasage $\varphi_{s/e}$ (argument $\underline{T}$) en fonction de la fréquence : $\varphi_{s/e} = f(f)$

Remarque : pour ces deux caractéristiques, on utilisera une échelle logarithmique pour les fréquences.

I.4.2 Utilisation du diagramme de bode : recherche du signal de sortie

.2.a Action du filtre sur un signal périodique quelconque

Un signal périodique est une somme de termes spectraux du genre

$$v_e(t) = \langle v_e \rangle + A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + A_3 \sin(3\omega t + \varphi_3) + \ldots\ldots\ldots$$

Le filtre étant un quadripôle linéaire, on peut déterminer le signal de sortie pour chaque terme séparément puis sommer ensuite les signaux de sortie obtenus : ce que l'on peut résumer formellement de la manière suivante :

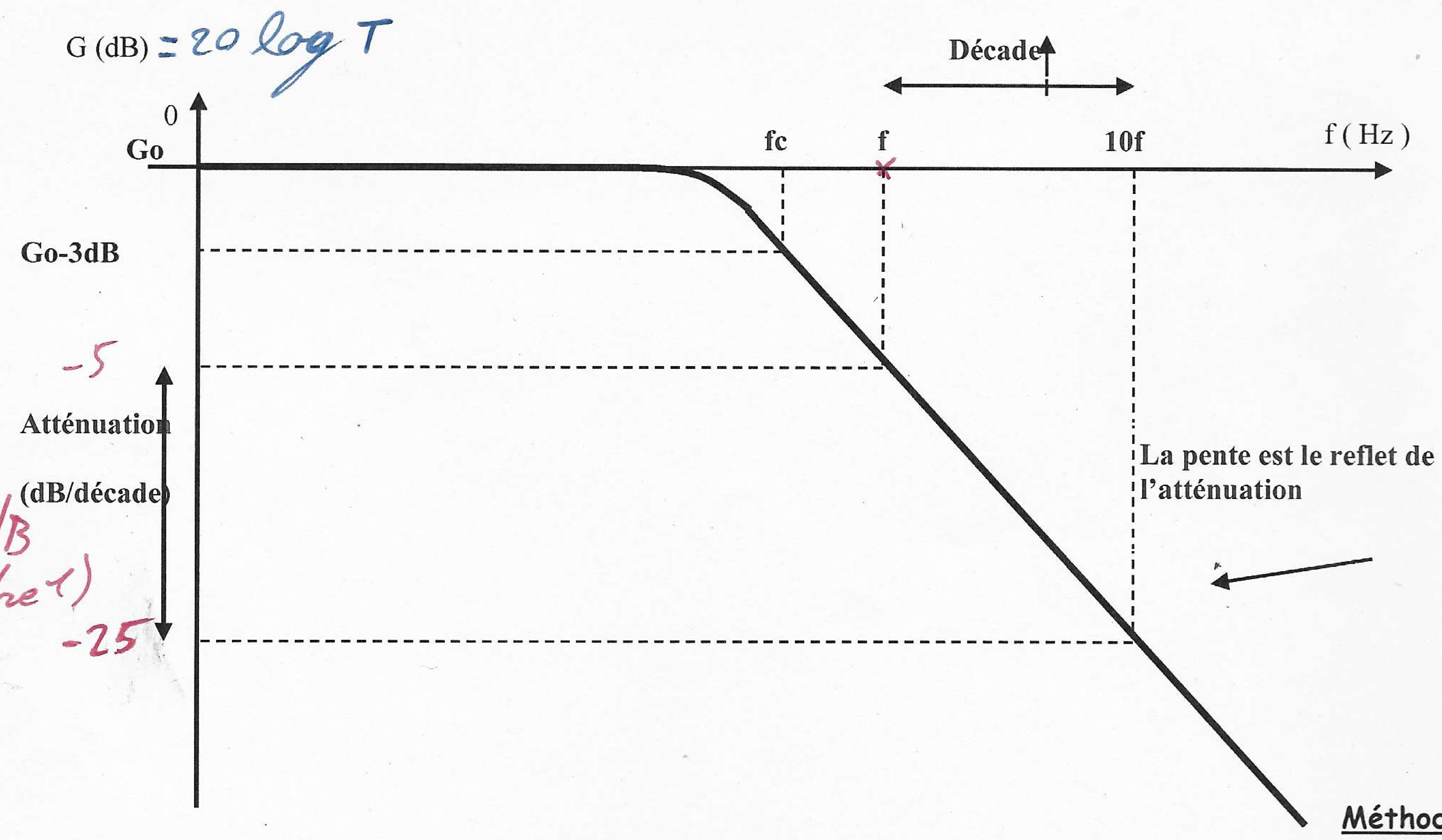
$v_s(t) = \langle v_s \rangle + A'_1 \sin(\omega t + \varphi'_1) + A'_2 \sin(2\omega t + \varphi'_2) + A'_3 \sin(3\omega t + \varphi'_3) + \ldots\ldots\ldots$

avec $\langle v_s \rangle = T.\langle v_e \rangle$; $A'_1 = T(\omega).A_1$; $A'_2 = T(2\omega).A_2$ ….. et $\varphi'_1 = atg(\underline{T}(\omega)) + \varphi_1$; $\varphi'_2 = atg(T(2\omega)) + \varphi_2$ ….

La transmittance T et l'argument Arg ($\underline{T}$) peuvent donc être soit calculés à partir de la fonction de transfert soit déterminés graphiquement grâce aux diagrammes de Bode.

Ces deux grandeurs permettront de savoir ce que devient en sortie d'un système linéaire n'importe quel signal d'entrée qui sera au préalablement décomposé en série de FOURIER.

I.4.2.b Notion d'atténuation et d'ordre d'un filtre



<u>Méthode</u> :

1) Prendre une fréquence f au-delà de fc (Fréquence de coupure)
2) Prendre une deuxième fréquence à 10 fois la fréquence f (Cela fait 1 décade)
3) Regarder sur l'axe du gain l'atténuation obtenue

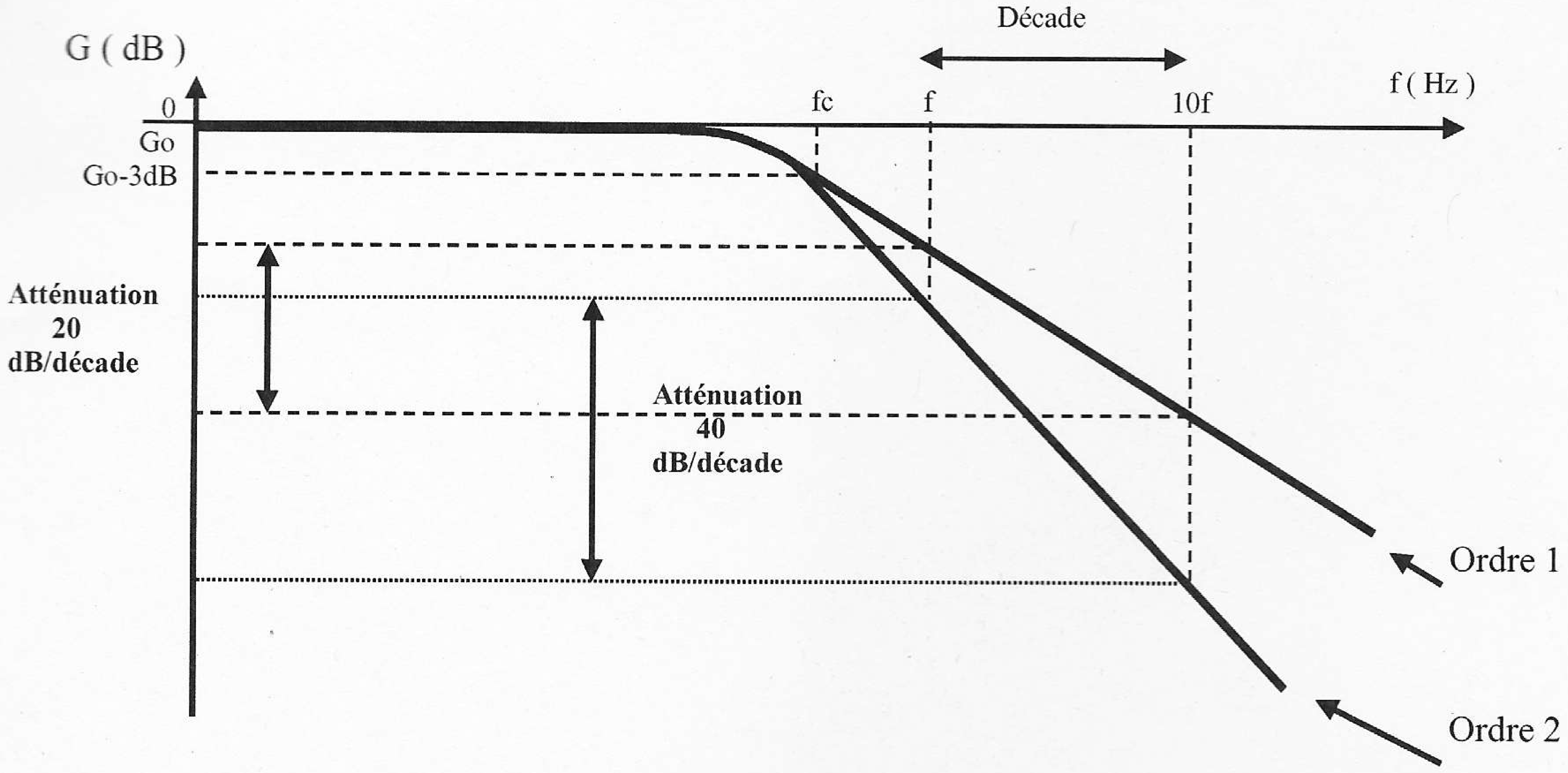
➔ L'atténuation déterminera l'**Ordre du filtre**

Classification des ordres du filtre :

Un filtre d'ordre 1 à une atténuation de **20dB/décade**

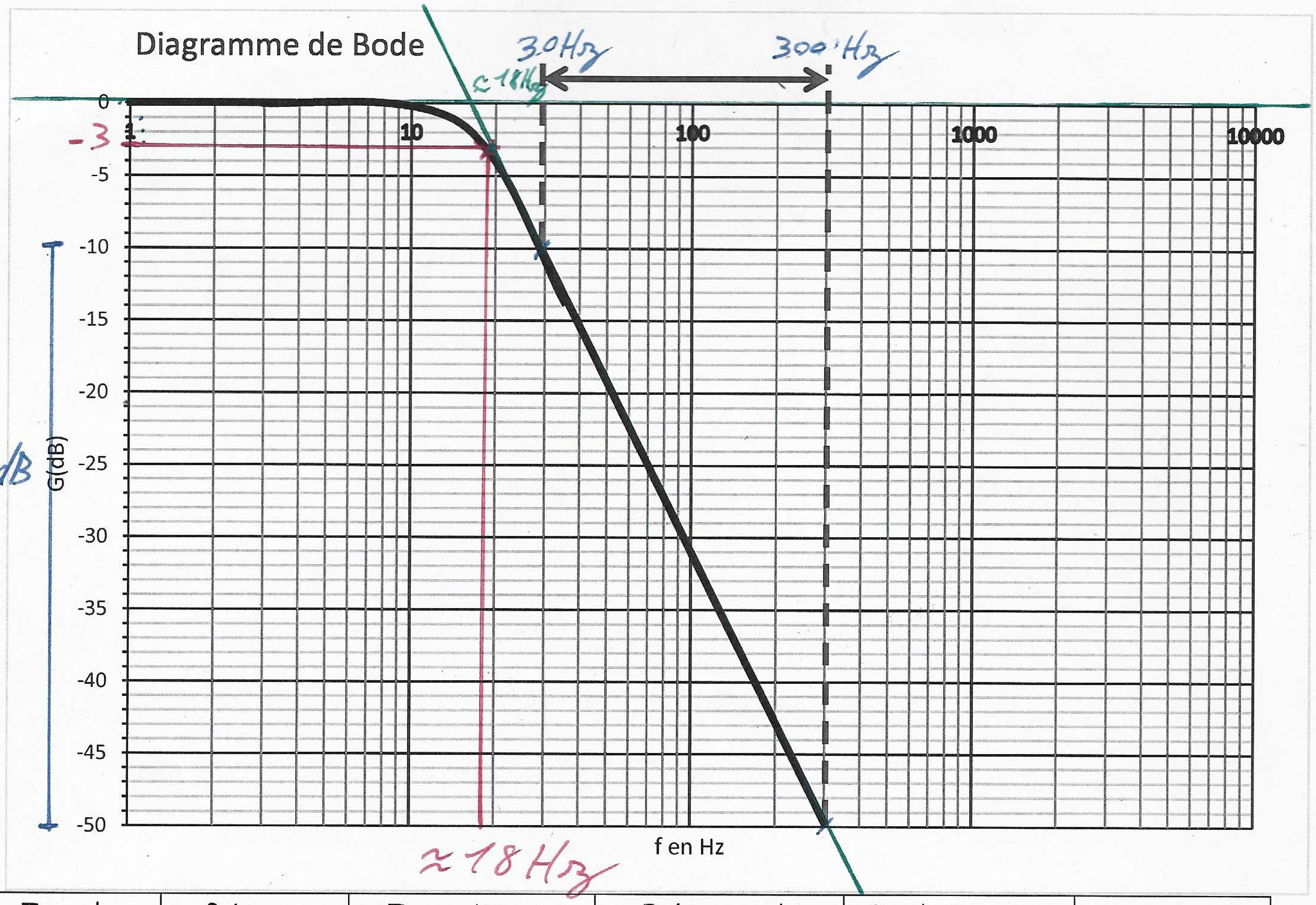
------//---------- 2 --------//----------- **40dB/décade**

Et ainsi de suite..............



Application

Indiquez pour le filtre suivant : Le type de filtre, son gain max, sa transmittance statique T_0, sa fréquence de coupure et sa bande passante



Type du filtre	Gain max	Transmittance statique T_0	Fréquence de coupure	Bande passante	Ordre
passe bas	0 dB	1	18 Hz	BP[0;18]	ordre 2

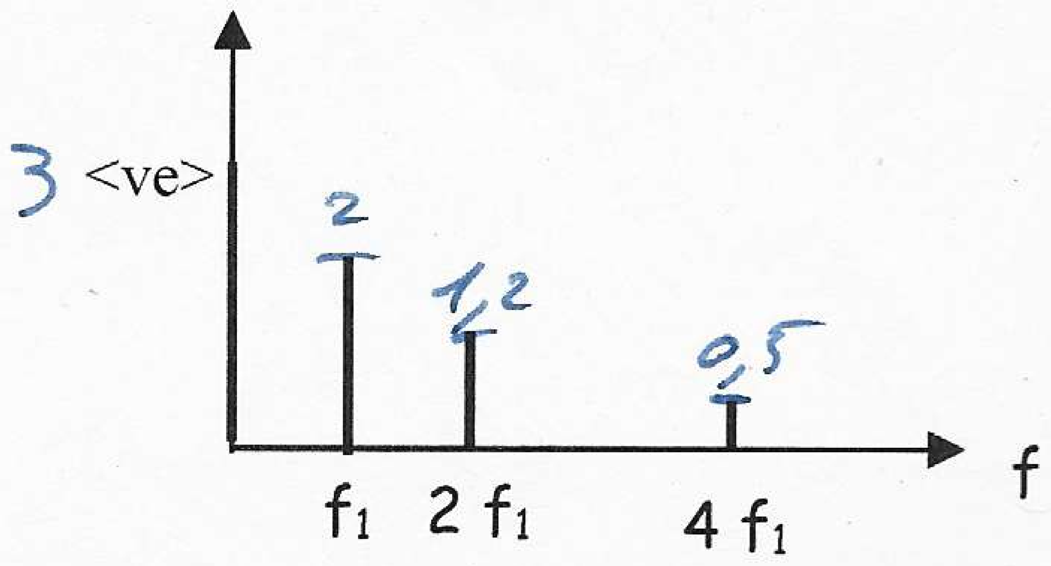
$T_0 = 10^{\frac{G_0}{20}}$ (−40 dB)

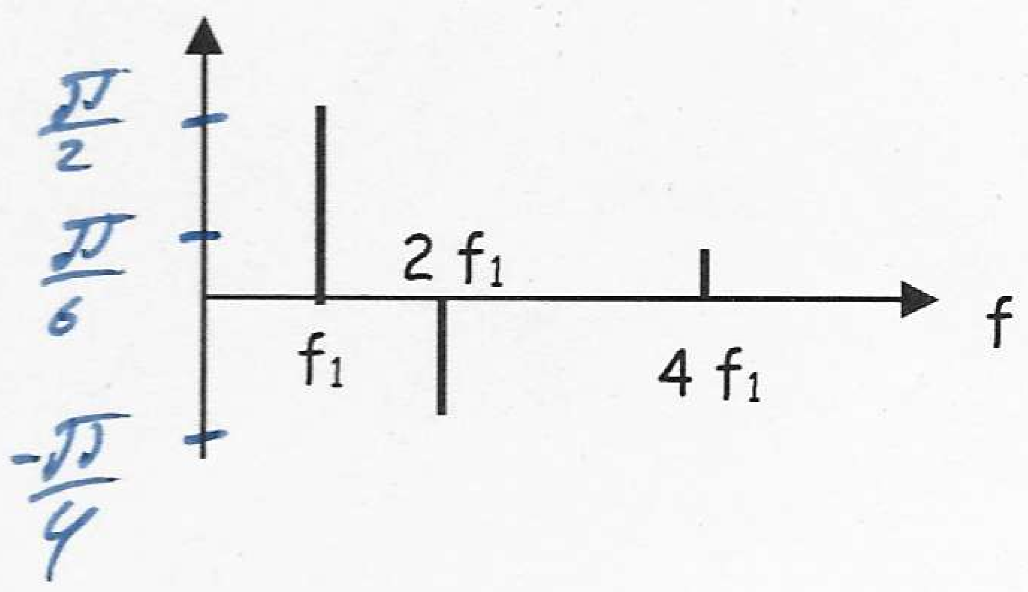
II . Filtres du 1er ordre

Type de filtre	Fonction de transfert $\underline{T}$	Module de $\underline{T}$	Argument de $\underline{T}$	Fréquence(s) de coupure(s)
Passe-bas	$\frac{T_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{T_0}{1+j\frac{f}{f_0}}$	$\frac{T_0}{\sqrt{1+(\frac{\omega}{\omega_0})^2}}$	$-\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$	$\omega_c = \omega_0$ $f_c = f_0$
Passe-haut	$\frac{T_0 j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{T j\frac{f}{f_0}}{1+j\frac{f}{f_0}}$	$\frac{T_0 \frac{f}{f_0}}{\sqrt{1+(\frac{\omega}{\omega_0})^2}}$	$\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$	$\omega_c = \omega_0$ $f_c = f_0$

Exemple pour un système passe bas d'ordre 1 :

$$|\underline{T}| = T = \frac{T_0}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \quad \text{et} \quad \arg(\underline{T}) = -arctang\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$





$f_1 = 100\,Hz$

On remplira un tableau du type : avec $T_0 = 1$ $\omega = 6,28\ rad.s^{-1}$

	Composante continue (f=0)	Fondamental	Harmoniques			
Fréquence	0	$f_1 = 100\,Hz$	$2f_1$	$3f_1$	$4f_1$	$5f_1$
Amplitude de e(t)	3V	2V	1,2	0	0,5	0
Phase de e(t)		$\pi/2$	$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{6}$	
Transmittance T	$T_0 = 1$	$\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{100}{1})^2}} \simeq 0,01$	0,005			
arg($\underline{T}$)		$-\tan^{-1}\frac{100}{1} \simeq -1,56\,rad$	-1,57			
Amplitude de s(t)	3V	0,02V	0,006			
Phase de s(t)		$\varphi_{vs} = \arg(T) + \varphi_{ve} =$	-2,36			

$-1,56 + \frac{\pi}{2} = 0$

III Filtres du second ordre

On définit, comme pour l'ordre 1, la fonction de transfert $\underline{T}$:

→ Pour un filtre du **second ordre passe-bas**, elle est de la forme :

$$\underline{T} = \frac{T_0}{1+2mj\frac{\omega}{\omega_0}-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$!

T_0, m et ω_0

→ Pour un filtre du **second ordre passe-bande**, elle est de la forme :

$$\underline{T} = \frac{T_0 . 2m\frac{j\omega}{\omega_0}}{1+2mj\frac{\omega}{\omega_0}-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{T_0}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$!

→ Pour un filtre du **second ordre passe-haut**, elle est de la forme :

$$\underline{T} = \frac{T_0 . \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1+2mj\frac{\omega}{\omega_0}-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$!

avec T_0 : transmittance statique — ω_0 : pulsation propre

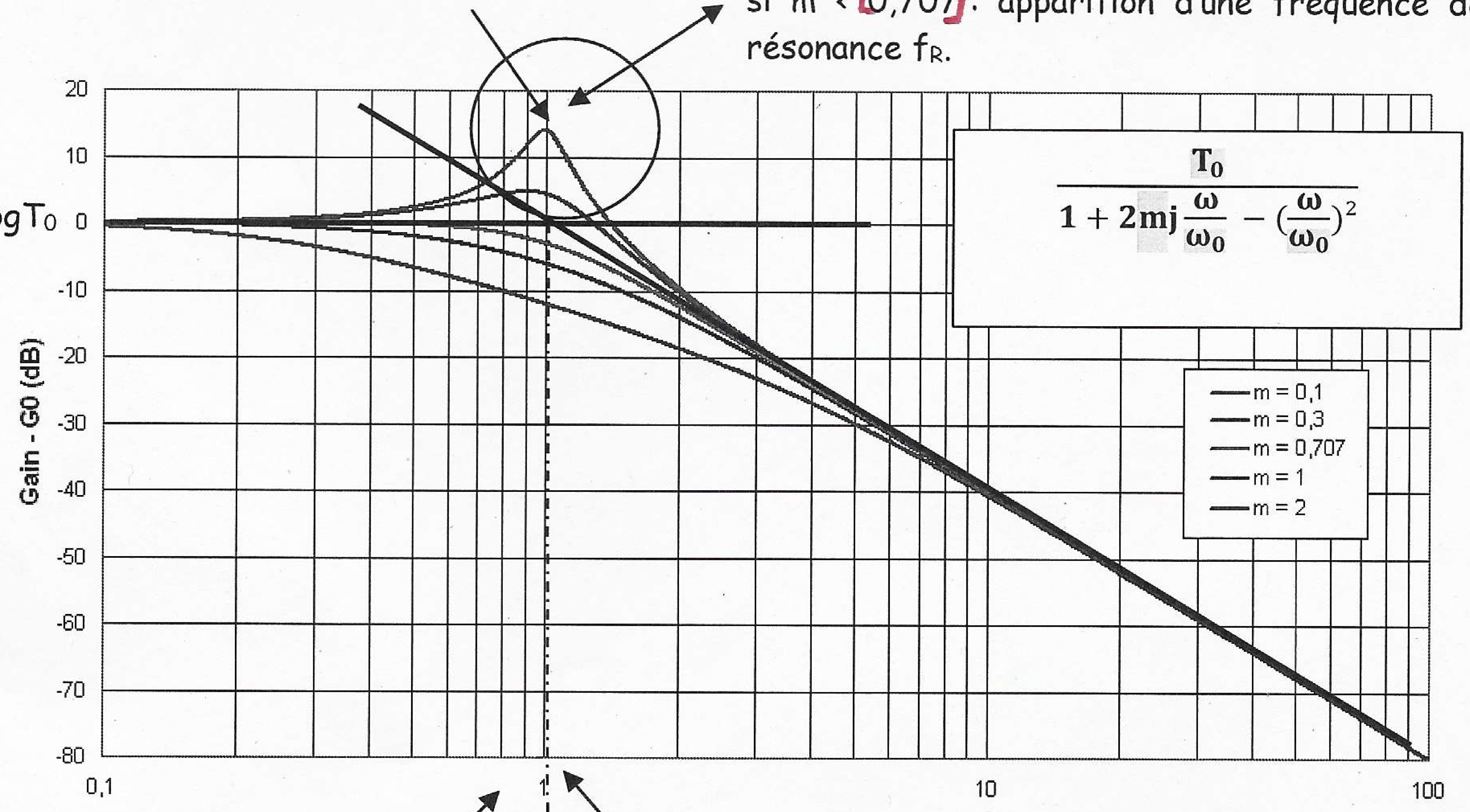
CU m : coefficient d'amortissement — **Q : facteur de qualité ou sélectivité**

Remarque : ω_0 est la pulsation du filtre, mais n'est pas toujours l'une de ses pulsations de coupure.

Exemple d'allure du diagramme de Bode d'un système passe-bas d'ordre 2

$G(\omega_0) = 20 \log \frac{T_0}{2m}$

Phénomène de dépassement (ou de résonnance) si m < 0,707 : apparition d'une fréquence de résonance f_R.



ω_r : pulsation de résonance

ω_0 : pulsation propre : intersection des asymptotes

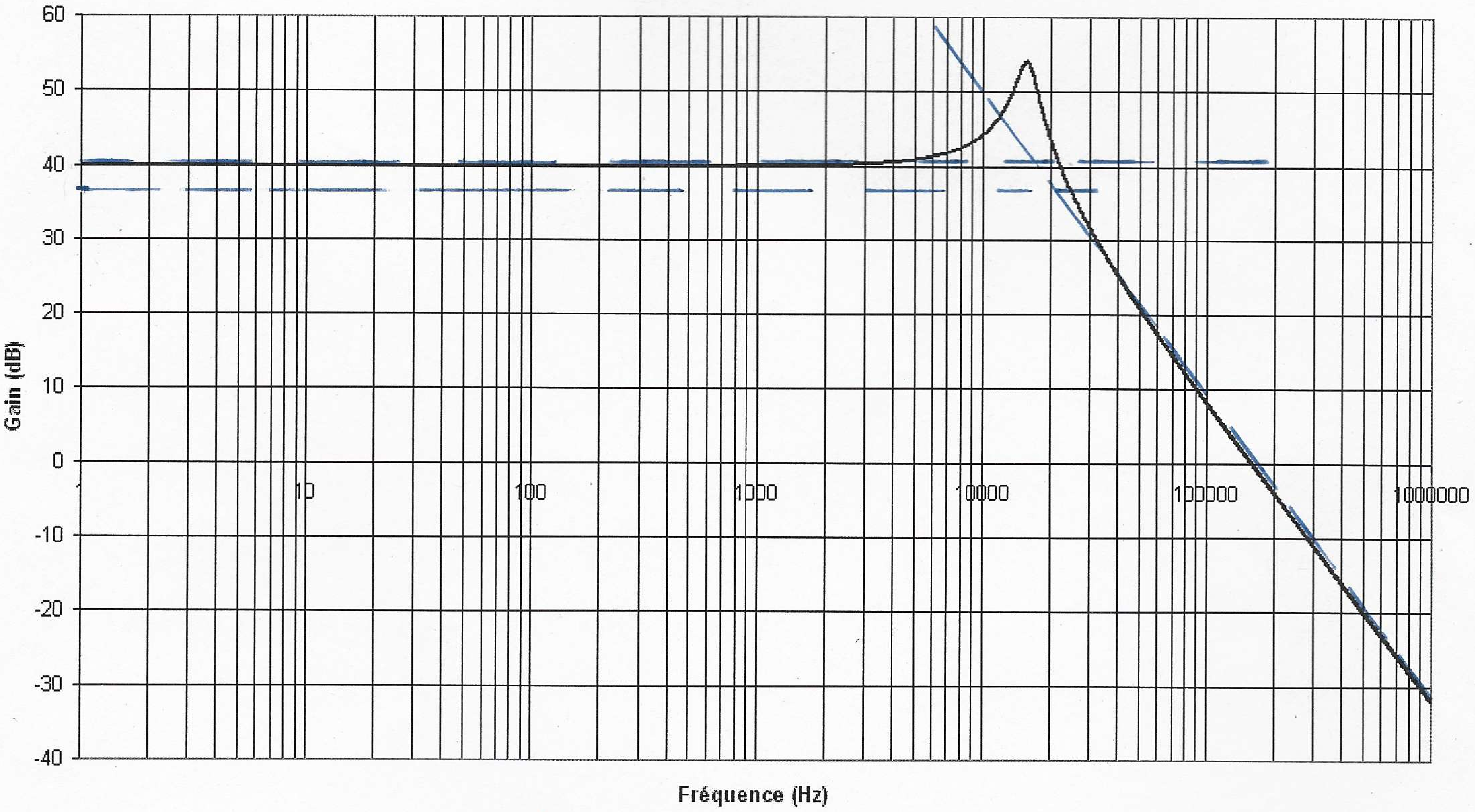
A l'aide du diagramme de Bode, on peut définir les différentes caractéristiques du filtre.

Comment on fait ?

- Ordre du système : si la somme des valeurs absolues des pentes des asymptotes est égale à 40 dB/décade, alors le système est d'ordre 2
- Fréquence propre f_0 : abscisse du point d'intersection des 2 asymptotes
- Fréquence de coupure f_c : se placer à $G_{statique}$-3dB BP : f_c est une limite haute ou basse
- Fréquence de résonance f_R : fréquence pour laquelle le gain G est maximal.
- Transmittance statique T_0 : déterminer le gain statique G_0 et en déduire T_0 ($G_0 = 20 \log T_0$)
- Coefficient d'amortissement m : à l'aide de la valeur de gain à la pulsation particulière ω_0, on en déduit m : $G_{max} = 20 \log \left(\frac{T_0}{2m}\right)$ donc $\boxed{m = \frac{T_0}{2T_{max}}}$
- Facteur de qualité Q : à l'aide du coefficient d'amortissement m : $Q = 1/(2.m)$ ou $Q = f_0/Bp$

On peut ainsi écrire la fonction de transfert complexe $\underline{T}$ du filtre considéré, en déduire son module et réaliser le même type d'étude que sur un filtre d'ordre 1.

Exemple : Exploitation du diagramme de Bode d'un filtre



40dB

1. Quelle est la valeur du gain statique G_0 ? En déduire la transmittance statique T_0. $T_0 = 10^{\frac{G_0}{20}} \Leftrightarrow T_0 = 10^{\frac{40}{20}} = 100$
2. Ce système présente-t-il un effet de résonance ? Oui
3. Déterminer graphiquement la fréquence de coupure f_c de ce système. 25000Hz
4. Donner la nature de ce filtre et sa bande passante BP. FPB BP: [0 ; 25000]
5. Déterminer la fréquence propre f_0 de ce système 15 000 Hz
6. Déterminer la fréquence de résonance f_R de ce système. 16 000 Hz
7. Calculer le coefficient d'amortissement m. $m = \frac{T_0}{2T_{max}} = \frac{100}{2 \times 562} \approx 0,1$
8. Déterminer l'ordre de ce système. ordre 2
9. Ecrire la fonction de transfert $\underline{T}$ complexe de ce système

$T_{max} = 10^{\frac{G_m}{20}} = 10^{\frac{55}{20}} \approx 562$

$$\underline{T} = \frac{T_0}{1 + 2mj\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\underline{T} = \frac{100}{1 + 0{,}2j\frac{f}{15000} - \left(\frac{f}{15000}\right)^2}$$

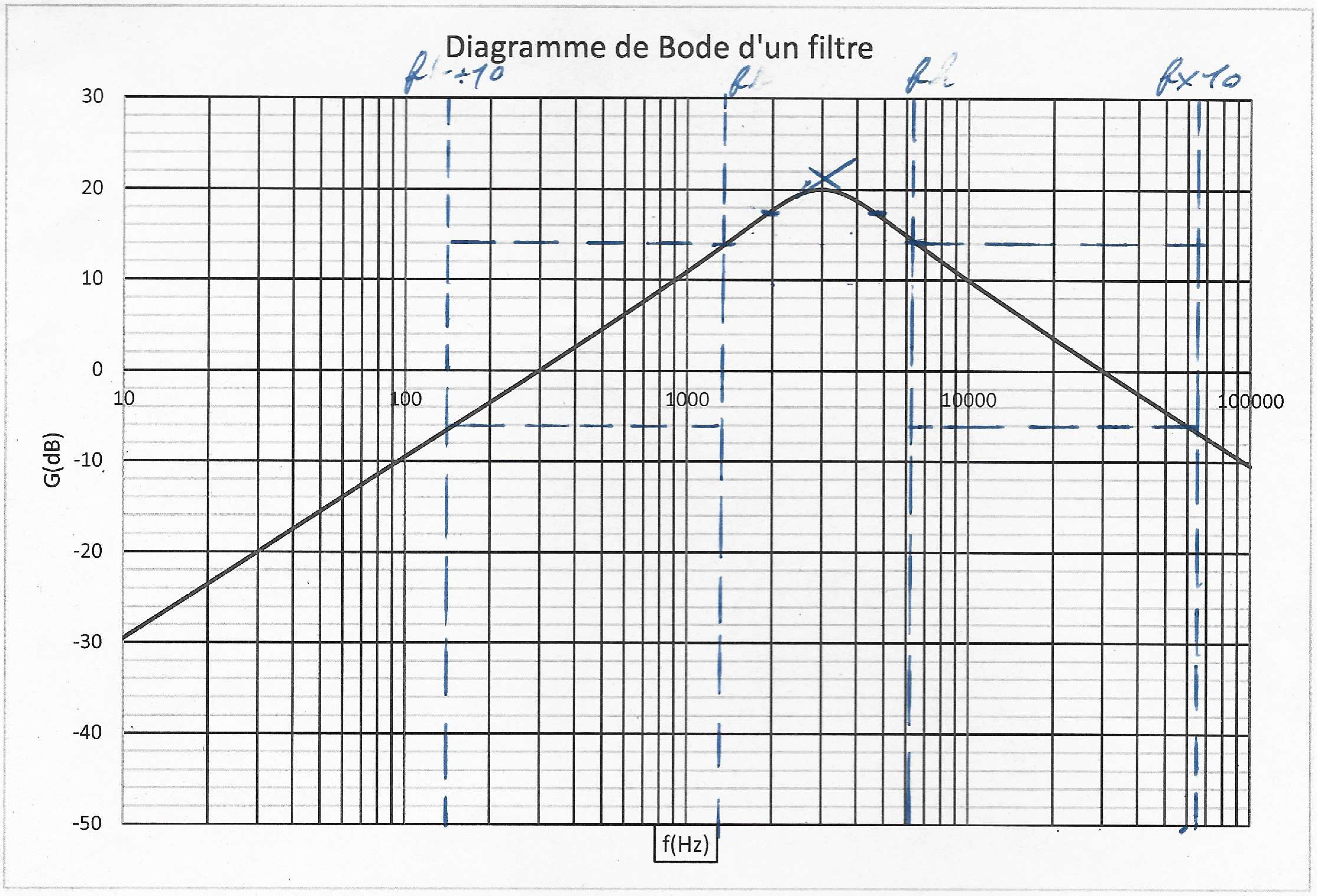


Diagramme de Bode d'un filtre
f' ÷10
f'
f''
f''×10
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
10
100
1000
10000
100000
G(dB)
f(Hz)

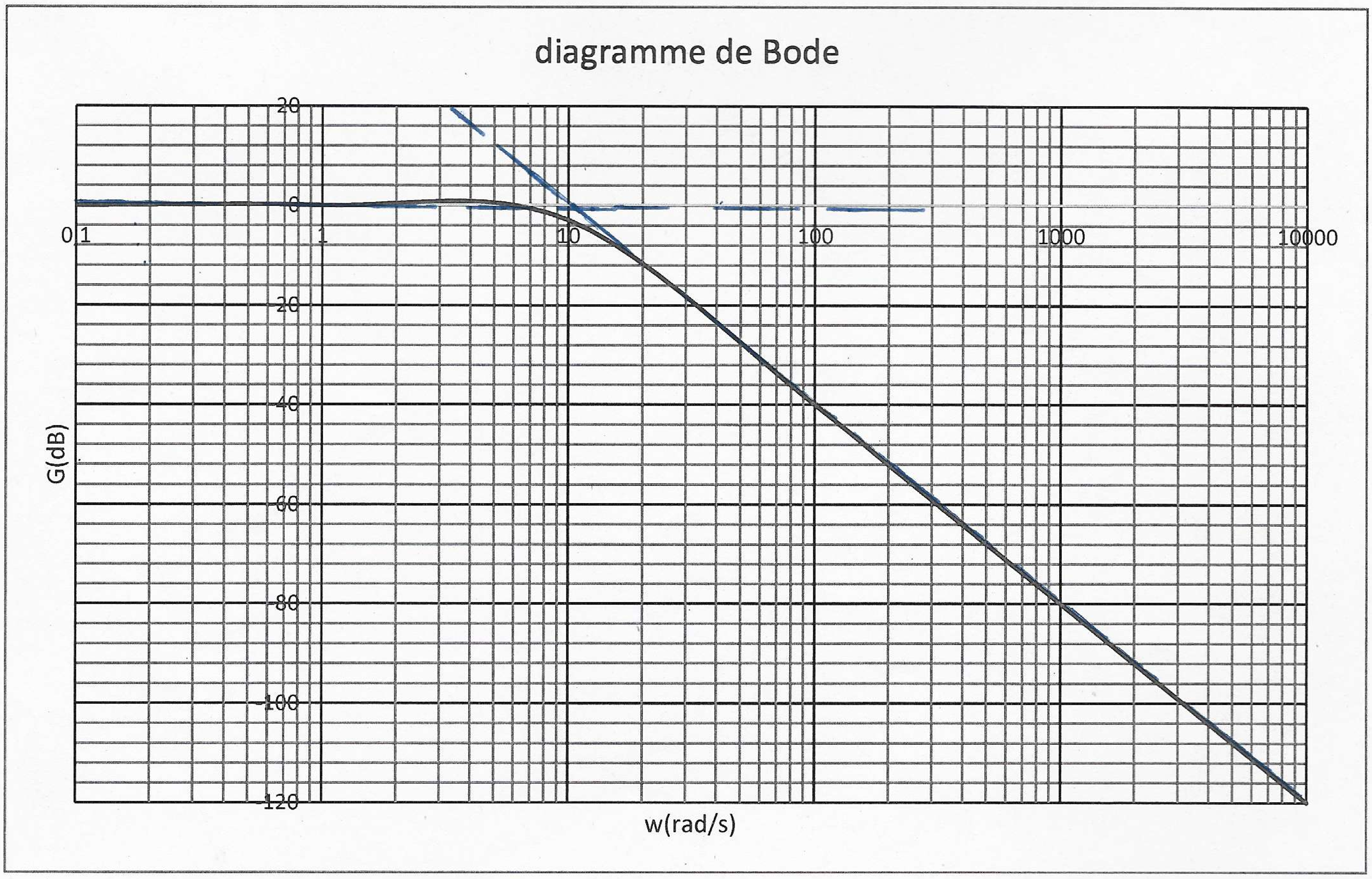


diagramme de Bode
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
0,1
1
10
100
1000
10000
G(dB)
w(rad/s)