I- POURQUOI ÉTUDIER LE RÉGIME SINUSOÏDAL ?

Dans beaucoup de domaines physiques, la représentation dans le temps d'une grandeur donne une courbe sinusoïdale.

Des grandeurs sinusoïdales sont rencontrées, par exemple, dans les domaines suivants :

- *Electrotechnique : La tension du secteur " EDF " est une sinusoïde de fréquence 50 Hz et de valeur efficace 230V.*
- *Radiodiffusion : Le signal porteur de la station FM " RTL2 " est une sinusoïde de fréquence 94,6 MHz.*
- *Acoustique : La note " La " fournie par un diapason est une sinusoïde de fréquence 440 Hz.*
- *Mécanique : La course d'un piston dans son cylindre présente une variation quasi-sinusoïdale.*
- *Electronique : La tension aux bornes d'un "quartz" qui cadence le microprocesseur d'un ordinateur est sinusoïdale de fréquence supérieure au GHz.*

Remarque : Lorsque le signal n'est pas sinusoïdal, on montrera qu'il peut se décomposer en une somme de plusieurs sinusoïdes appelées harmoniques.

*L'étude du régime sinusoïdal est donc **incontournable dans beaucoup de domaines et en particulier en électronique.***

II- GRANDEURS RELATIVES AU RÉGIME SINUSOÏDAL

1) Définition

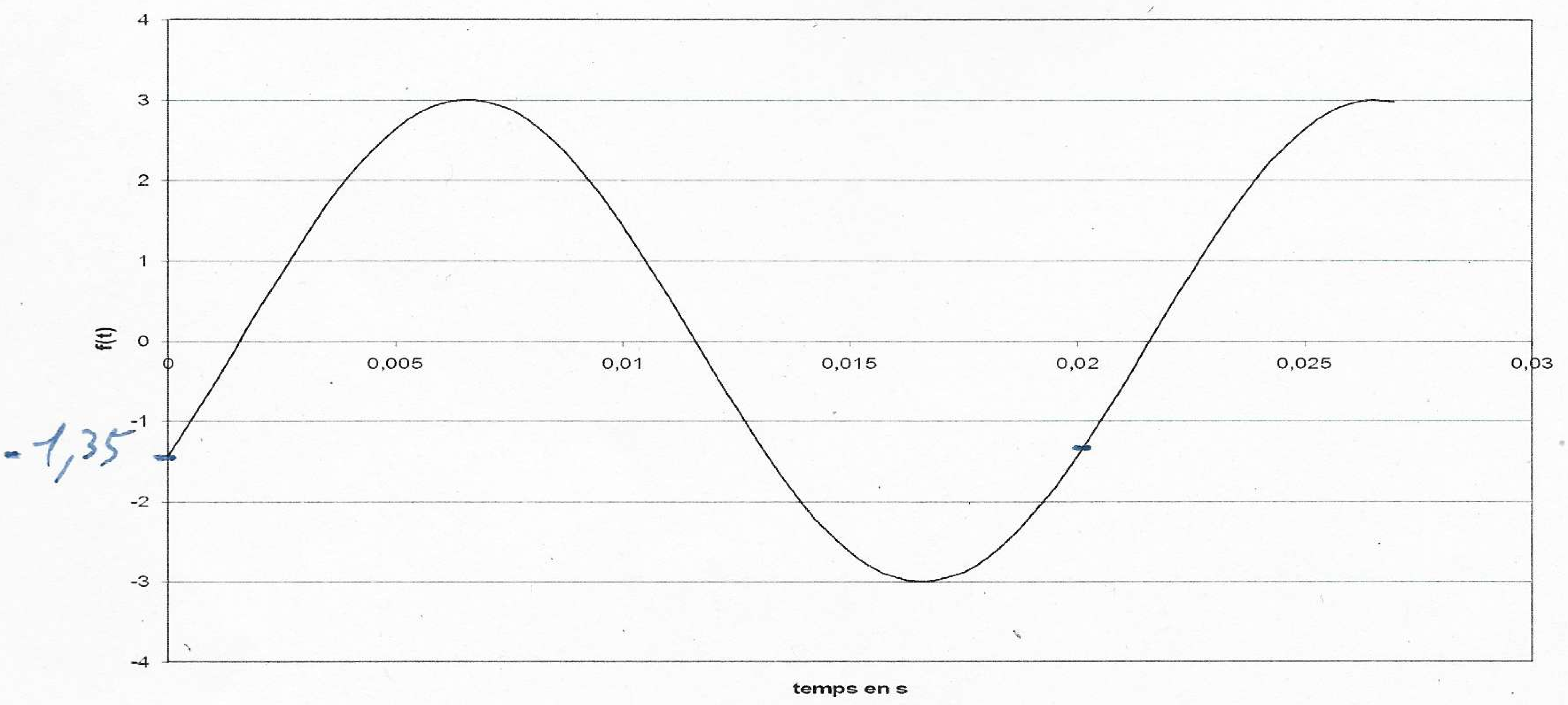
Un signal est **sinusoïdal** et **alternatif** si son équation instantanée (ou temporelle ; horaire) peut se mettre sous la forme :

$$s(t) = S_{max} \sin(\omega t + \varphi) = S.\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$$

où

- S_{max} est la valeur maximale de s(t) (en unité de s(t)) appelée aussi amplitude
- S est la valeur efficace de s(t) (en unité de s(t))
- ω est la pulsation de cette sinusoïde (en rad/s) avec $\omega = 2.\pi.f = \frac{2.\pi}{T}$
- φ est la phase à l'origine de s(t) (en rad)

Exemple



$S_{max} = 3$

$\omega = \frac{2.\pi}{0,02} = 100\pi$

$s(t=0) = -1,35$

On retrouve sur le graphe les trois grandeurs caractéristiques d'une sinusoïde :

→ Sa pulsation grâce à la période T : $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ...... $T = 0{,}02\ s$ $\frac{2\pi}{0{,}02} = 100\pi\ rad/s$

→ Sa valeur maximale S_{max} ou sa valeur efficace $S = \frac{S_{max}}{\sqrt{2}}$ Attention : cette relation n'est vraie que pour une sinusoïde alternative ...... $S_{max} = 3$ $S = \frac{3}{\sqrt{2}} = 2{,}1$

→ Sa phase à l'origine φ grâce à la valeur initiale $s(t{=}0) = S_{max} \sin\varphi$: ...... $\Rightarrow \sin\varphi = \frac{s(t=0)}{S_{max}}$

...... $s(t{=}0) = -1{,}35 \rightarrow \varphi = \sin^{-1}\left(\frac{-1{,}35}{3}\right) \simeq -0{,}47\ rad$ ......

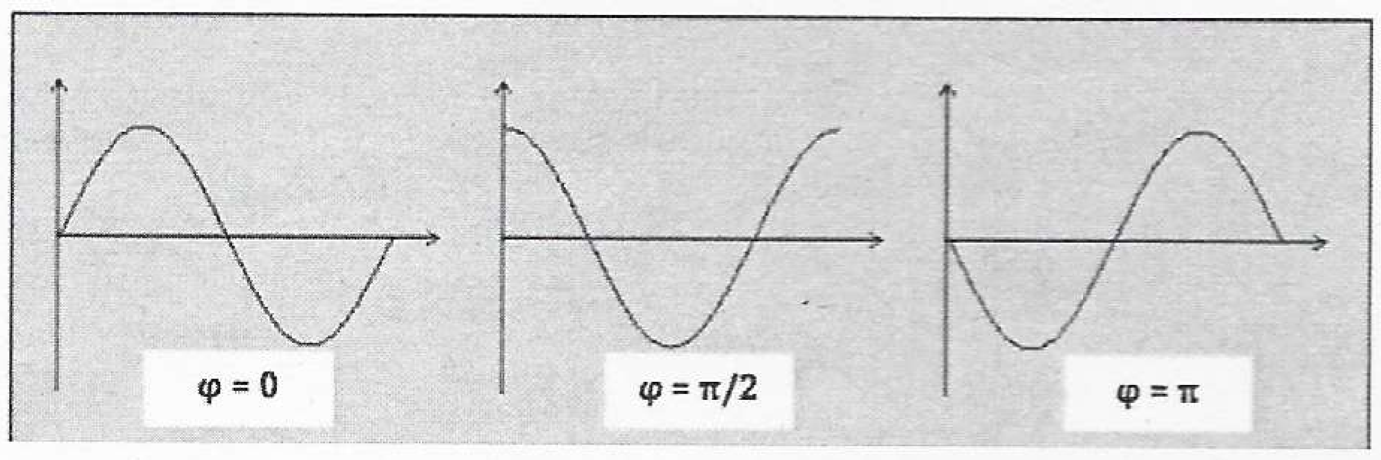
→ Son équation horaire : ......

$- s(t) = 3 \sin(100\pi . T - 0{,}47)$

$- s(t) = 2{,}1\sqrt{2} \sin(100\pi . T - 0{,}47)$

$\varphi = \arcsin\left(\frac{s(t=0)}{S_{max}}\right)$

Remarque : phase à l'origine : valeurs évidentes



2) Représentation d'une grandeur sinusoïdale :

__Par sa représentation complexe__ :

Un nombre complexe à la faculté de comporter deux informations, un module S et un argument φ. On supposera connu et constant la pulsation et on mettra les deux autres grandeurs S et φ dans un nombre complexe $\underline{S}$ associé à s(t).

Un nombre complexe $\underline{S}$ peut s'écrire sous deux formes :

Trigonométrique ↓ **$\underline{S} = [S\ ;\varphi]$** ET cartésienne (algébrique) ↓ **$\underline{S} = a + jb$**

$\underline{S}$ est défini de la manière suivante :

- **module de $\underline{S}$ = valeur efficace de s(t) → $\underline{S}$ = |$\underline{S}$|** $(=)\ |\underline{S}| = \sqrt{a^2+b^2}$
- **argument de $\underline{S}$ = phase à l'origine de s(t) → Arg($\underline{S}$) = φ** $(=)\ \arg \underline{S} = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

Exemple : Le signal sinusoïdal u(t) = 5.2$\sqrt{2}$ sin(2000πt – 0.85) est représenté par le nombre complexe $\underline{U}$ = [U ; φ] = [5,2 ; -0,85] qui est donc **la valeur complexe associée à la tension sinusoïdale** u(t). (S_{eff})

Rappel math : *Comment passer d'une forme à l'autre :*

→ *De la forme trigo à la forme cartésienne :*

Si $\underline{S}$ = [S ;φ] alors a = S.cosφ et b = S.sinφ d'où $\underline{S}$ = a+jb

→ *De la forme cartésienne à la forme trigo :*

Si $\underline{S}$ = a+jb alors $S = \sqrt{a^2+b^2}$ et $\varphi = tg^{-1}(\frac{b}{a})$ (si a>0)

Exemple : $u(t) = 7 \sin\left(200\pi t - \frac{\pi}{5}\right)$

$V_{eff} = \frac{7}{\sqrt{2}} = 5$ $\quad U = \left[5\ ; -\frac{\pi}{5}\right]$

cartésienne :

$a = 5 . \cos -\frac{\pi}{5} \simeq 4$

$b = 5 . \sin -\frac{\pi}{5} \simeq -3$

$\underline{U} = 4 - 3j$

$\underline{U} = 2 + 3j$

$S = \sqrt{2^2 + 3^2} \simeq 3{,}6$

$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) \simeq 1$

$U = [3{,}6\ ; 1]$

$U(t) = 3{,}6 . \sqrt{2} \sin(\omega t + 1)$

3) Somme de deux signaux sinusoïdaux

3.1 Signaux de même fréquence f

Soient $s_1(t)$ et $s_2(t)$ des signaux sinusoïdaux de même fréquence f, dont les valeurs complexes associées sont $\underline{S}_1$ et $\underline{S}_2$, on peut énoncer :

Propriété fondamentale 1 : la somme s(t) de deux signaux sinusoïdaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ de même fréquence f est également un signal sinusoïdal de fréquence f.

Propriété fondamentale 2 : la valeur complexe $\underline{S}$ associée à la somme $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$ est la somme des valeurs complexes associées à $s_1(t)$ et à $s_2(t)$, et inversement.
Autrement dit : $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$ équivaut à $\underline{S} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2$.

3.2 Signaux de fréquences différentes f1 et f2

Soient $s_1(t)$ un signal sinusoïdal de **fréquence f_1** et $s_2(t)$ un signal sinusoïdal de **fréquence f_2**, avec f_2 **différente** de f_1. La **somme** $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$ **n'est pas** un signal sinusoïdal.
Il en résulte que la relation $\underline{S} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2$ **n'a aucun sens** dans ce cas.

III- NOTION DE PUISSANCE RÉGIME SINUSOÏDAL

Considérons un dipôle traversé par un courant i(t) et soumis à une tension u(t) telles que :
$u(t) = U.\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_u)$ avec U : Val eff, ω : puls ... et φ_u = phase à l'origine
$i(t) = I.\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_i)$ avec I : Val eff, ω : // et φ_i = //

- Pinstant → p(t)
  $p(t) = U(t) = I(t)$
- Pactive → P
  $P = \langle p(t) \rangle = U \times I \times \cos \varphi_{u/i}$ ← déphasage
- Papparente → S
  $S = U \times I$ → V.A
- Préactive → Q
  $Q = U \times I \times \sin \varphi_{u/i}$ → VAR

IV - DÉPHASAGE ENTRE DEUX GRANDEURS SINUSOIDALES

<u>1 - Définition</u>

On appelle déphasage $\varphi_{u/i}$ de la tension u par rapport au courant i, la différence entre la phase à l'origine φ_u de u(t) et la phase à l'origine φ_i de i(t) : $\varphi_{u/i} = \varphi_u - \varphi_i$

<u>Remarque :</u> $\varphi_{u/i} > 0$ signifie que u est en « avance » par rapport à i (ou que i est en "retard" par rapport à u).
$\varphi_{u/i} < 0$ signifie que u est en « retard » par rapport à i (ou que i est en "avance" par rapport à u).

2- Détermination du déphasage φu/i

Première méthode :

On calcule la phase à l'origine φ_u de u(t) et la phase à l'origine φ_i de i(t) puis on en déduit $\varphi_{u/i} = \varphi_u - \varphi_i$

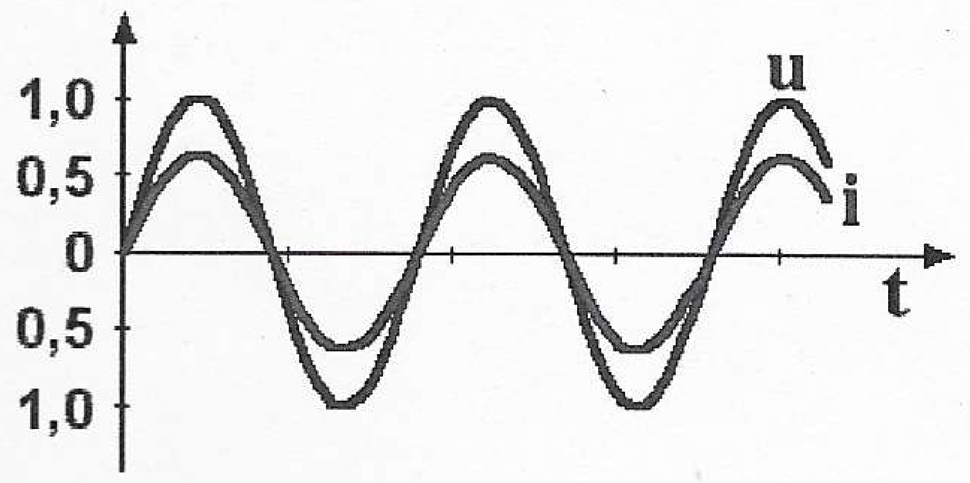
Deuxième méthode :

- On détermine le signe de $\varphi_{u/i}$ (voir remarque ci-dessus)
- On mesure la durée Δt, (en valeur absolue) qui sépare les passages ***à zéros*** et dans le ***même sens*** des deux grandeurs u(t) et i(t)
- On calcule la valeur numérique de $\varphi_{u/i}$ avec le bon signe, en radians ou en degrés avec la formule :

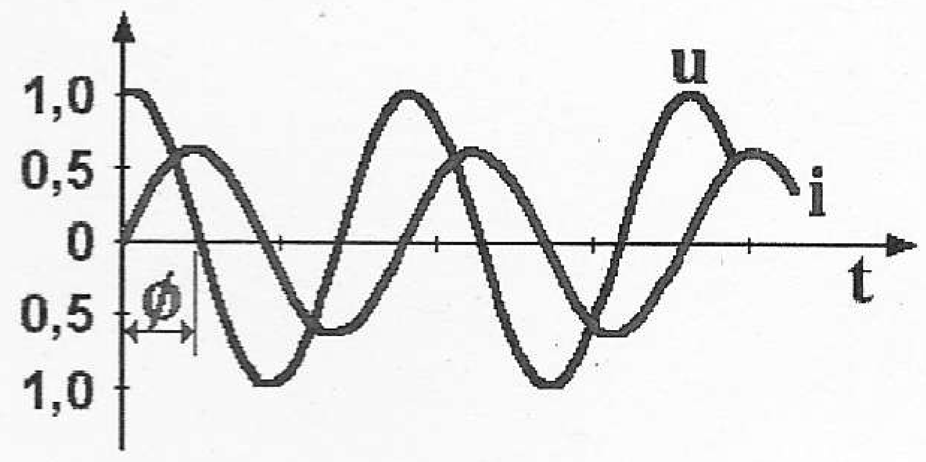
en radians : $\varphi_{u/i} = \mp 2.\pi.f.\Delta t$ ou en degré $\varphi_{u/i} = \mp 360.f.\Delta t$

3- Cas particuliers

- $\varphi_{u/i}$ = ..0.... rad ⇒ u et i sont ...en phases...



- $\varphi_{u/i}$ = $\frac{\pi}{2}$ ⇒ u et i sont en quadratures



- $\varphi_{u/i}$ = ..π..... rad > u est i sont en opposition de phases

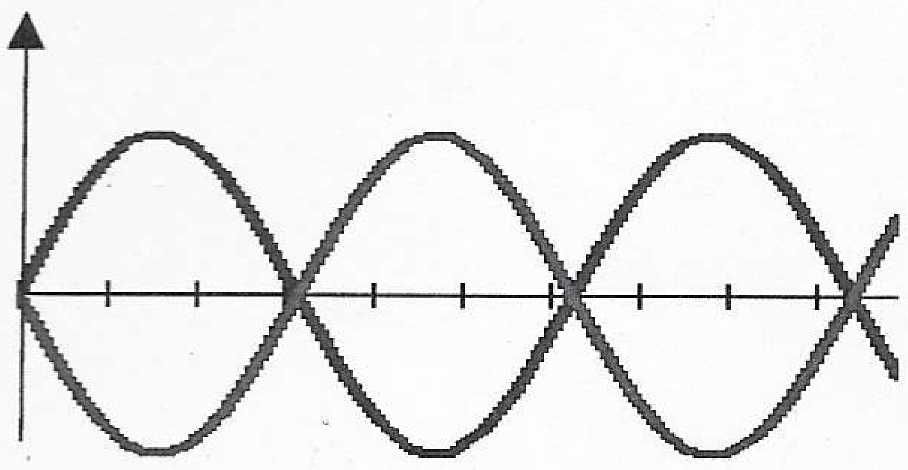


Figure 2b

4 Exercices

Exercice 1 :

1. Ecrire les expressions des équations horaires des signaux de fréquence f, dont les valeurs complexes associées sont les suivantes :

Valeur complexe	Equation horaire	Valeur complexe	Equation horaire
$\underline{I}_1$ = (12 + 5j) en mA	$13\sqrt{2}\sin(\omega t+0,4)$	$\underline{U}_1$= 3 -2,5j	$3,9\sqrt{2}\sin(\omega t-0,7)$
$\underline{I}_2$ = (30 - 15j) en µA	$33,5\sqrt{2}\sin(\omega t-0,5)$	$\underline{U}_2$ = 5,3 - 3,4j	$6,3\sqrt{2}\sin(\omega t-6)$
$\underline{I}_3$ = $7,4.10^{-3}$j	$7,4.10^{-3}\sqrt{2}\sin(\omega t+\frac{\pi}{2})$	$\underline{U}_3$ = -8,8j	$8,8\sin(\omega t-\frac{\pi}{2})$

2. Ecrire la valeur complexe associée à la valeur instantanée sous la forme a + jb :

Equation horaire	Valeur complexe	Equation horaire	Valeur complexe
$i_1(t) = 3,4.\sin(\omega t)$	[2,4;0] ⇔ $\underline{I}_1$ = 2,4	$u_1(t) = 7.\sin(\omega t)$	[5;0] ⇔ $\underline{U}_1$ = 5
$i_2(t) \approx 3,4.\sin(\omega t - \pi/2)$	[2,4; $\frac{\pi}{2}$]	$u_2(t) = 14.\sin(\omega t -12,0)$	[9,9 -1]
$i_3(t) = 2,8.\sin(\omega t + \pi/2)$	[2; $\frac{\pi}{2}$]	$u_3(t) = 7.\sin(\omega t + \pi)$	[5 +π]