cela

BTS ~~SNEC~~	THEOREME DE FOURIER	Chapitre 6
Physique		

1. Introduction : un peu de lecture :

Un signal complexe est donc composé de plusieurs sinusoïdes de fréquences, d'amplitudes et de phases différentes.

Un mathématicien français Joseph Fourier (1768 - 1830) établit une relation entre un signal complexe et sa composition en sinusoïdes. Il a réussi à démontrer mathématiquement qu'un signal périodique peut être décomposé en une série de sinusoïdes dont les fréquences sont en rapport entier. C'est l'invention de la série de Fourier.

On appelle la fréquence fondamentale (ou fondamentale) la vibration sinusoïdale la plus lente d'un signal complexe. Elle est à la fréquence du signal complexe.

La composante fondamentale de l'onde détermine la hauteur du son complexe, donc sa note musicale ou encore sa fréquence fondamentale.

On appelle fréquences harmoniques (ou harmoniques) les vibrations sinusoïdales complémentaires produites simultanément avec la fondamentale.

Les fréquences des harmoniques sont des multiples entiers de la fréquence fondamentale. L'harmonique de rang 2 (H2) a une fréquence double du fondamental, H3 une fréquence triple, H4 fréquence x4 ....

Le timbre d'un son est donc la composition en harmoniques d'un signal. Il différencie d'une part un son pur d'un son complexe et d'autre part il permet de connaître et d'identifier une source sonore.
Chaque source sonore produit un timbre différent. Autrement dit, chaque source sonore produit un certain nombre d'harmoniques qui le caractérise. Ce qui nous permet de reconnaître deux instruments de musiques différents jouant la même fondamentale.

Un signal périodique **s(t)** (tension u(t) ou un courant i(t)) de fréquence f_0 peut être décomposé en une **somme** comprenant :

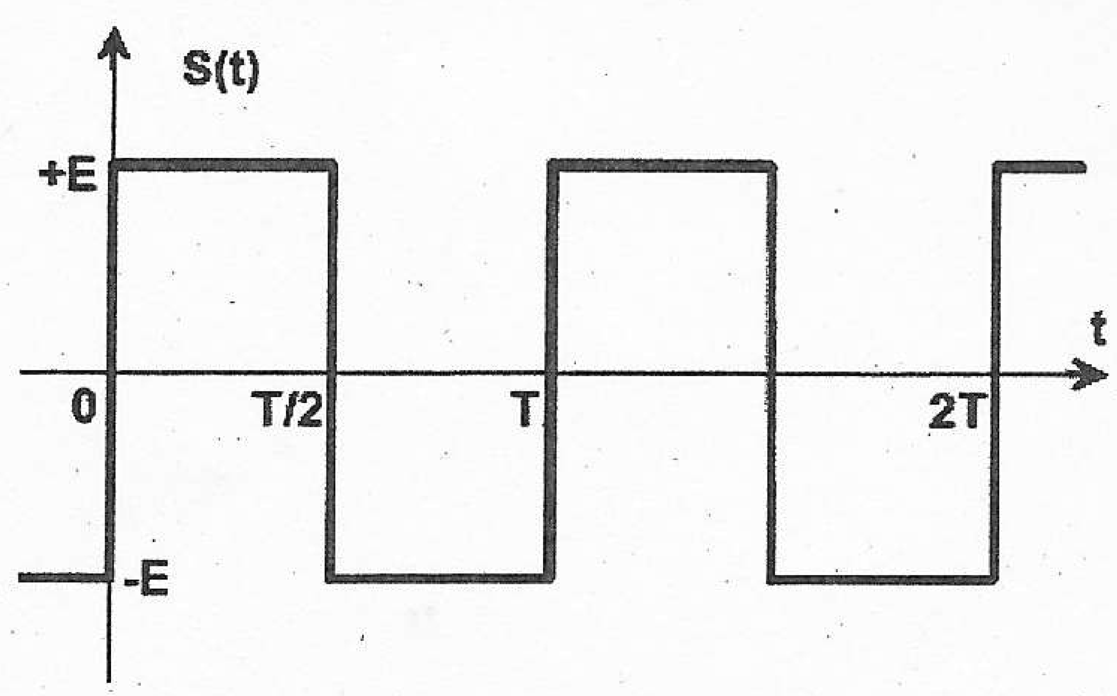
- un terme constant **<s(t)>** (valeur moyenne de s(t) ou composante continue),
- des termes sinusoïdaux de fréquence multiples de f_0 : f_0 , $2f_0$, $3f_0$, $4f_0$...

$$s(t) = \langle s(t)\rangle + A_1 \sin(2\pi f_0 t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\pi(2f_0)t + \varphi_2) + A_3 \sin(2\pi(3f_0)t + \varphi_3) + \ldots\ldots\ldots$$

- $s(t)$: Fonction périodique du temps de **fréquence f_0**
- $\langle s(t)\rangle$: Valeur moyenne de s(t)
- $A_1 \sin(2\pi f_0 t + \varphi_1)$: Harmonique de rang 1 OU Fondamentale de fréquence f_0
- $A_2 \sin(2\pi(2f_0)t + \varphi_2)$: Harmonique de rang 2 de fréquence $2f_0$
- $A_3 \sin(2\pi(3f_0)t + \varphi_3)$: Harmonique de rang 3 de fréquence $3f_0$

<u>Exemple :</u>

Signal carré d'amplitude E = 3 V (variant de -E à +E):



On montre que la décomposition en série de Fourier du signal rectangulaire ci-contre est :

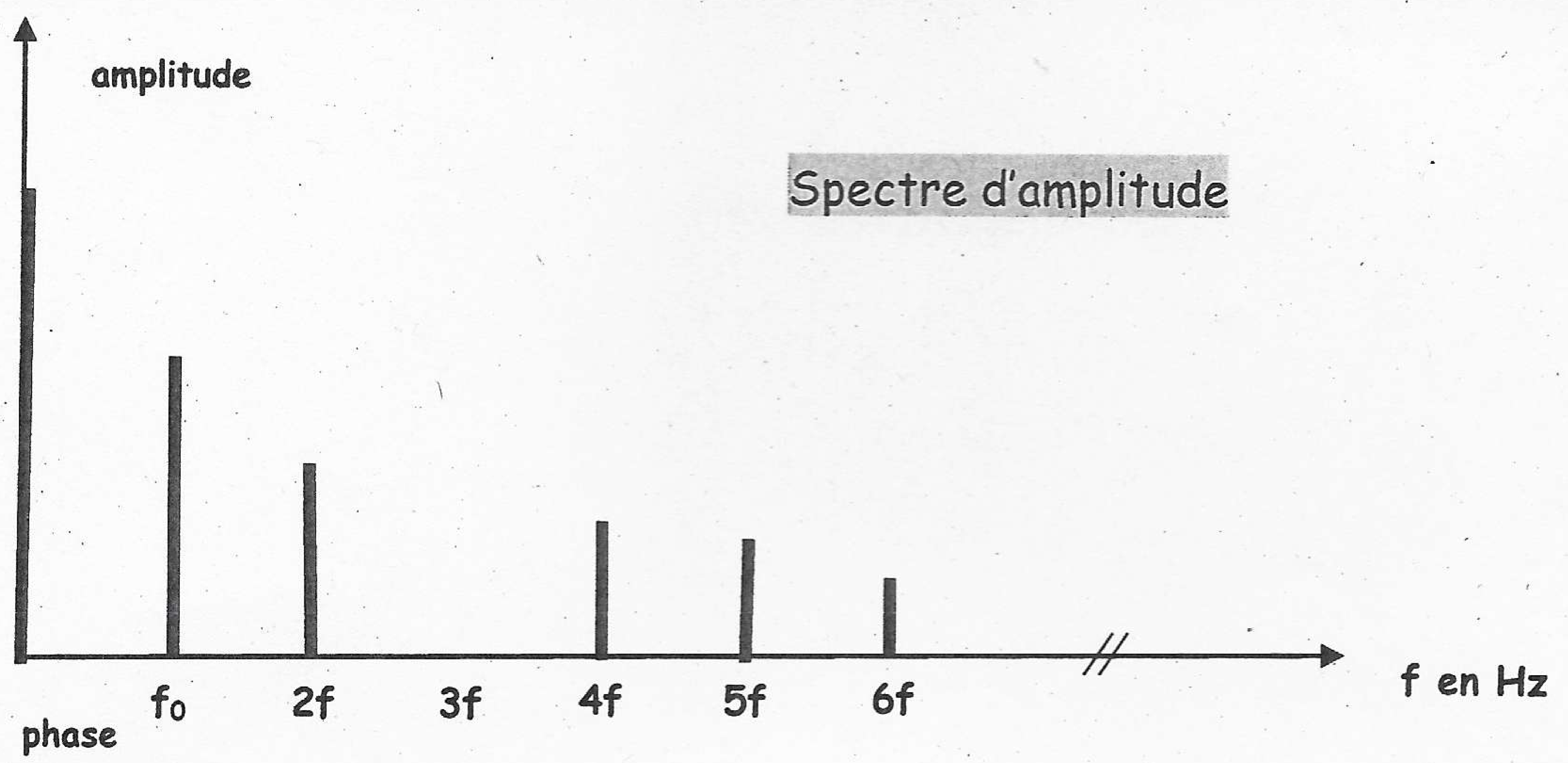
$$s(t) = 4\, sin\omega t + 1.3 \sin\left(3\omega t + \frac{\pi}{5}\right) + 0.8 \sin\left(5\omega t - \frac{\pi}{3}\right) + \cdots$$

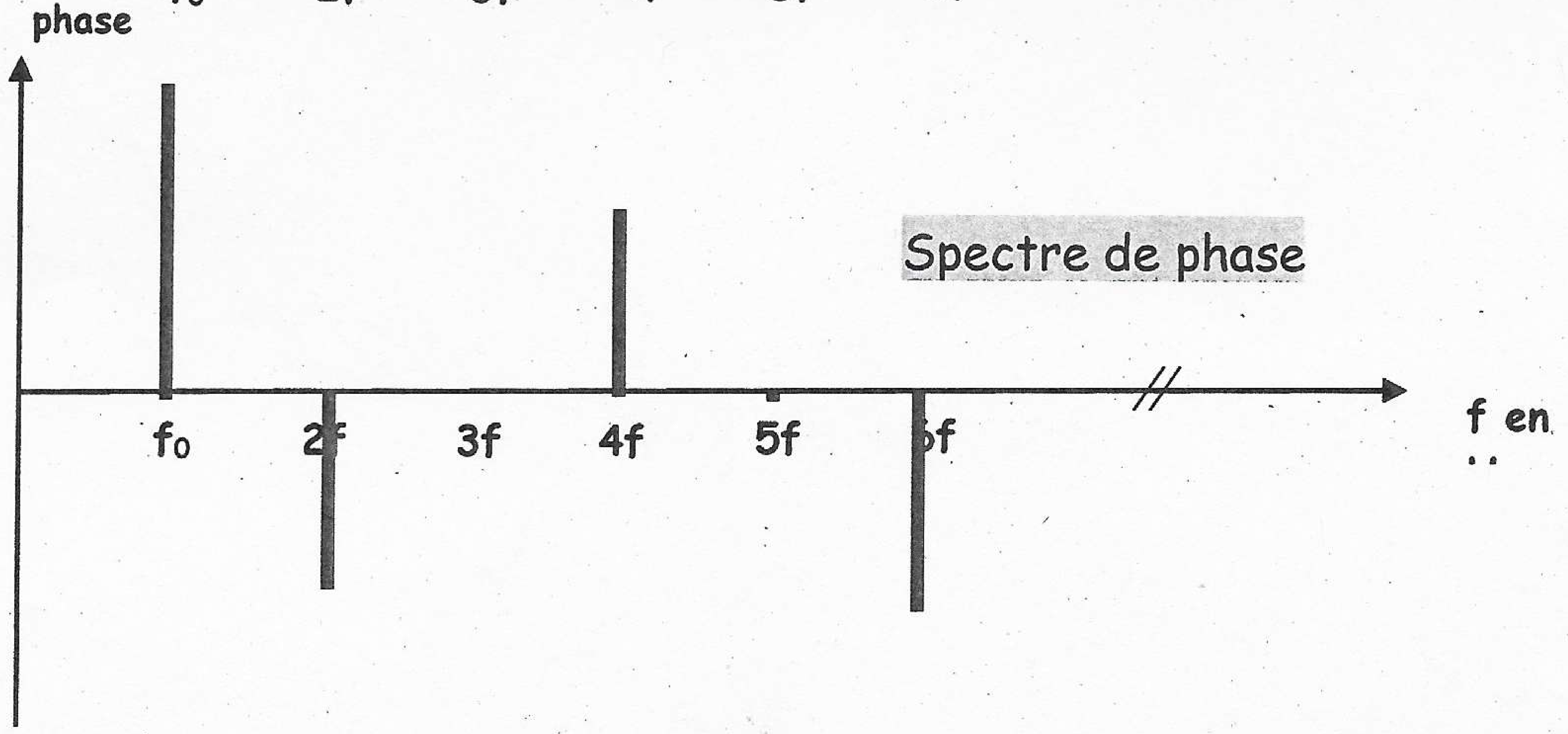
Indiquer :

- la valeur moyenne de s(t) : est = à 0
- L'amplitude du fondamentale est : 1,3 V
- La période du signal est T = 10 ms, la fréquence du fondamentale est $f_0 = \frac{1}{10.10^{-3}} = 100\,Hz$
- La phase à l'origine du fondamental est φ_1 = 0V
- L'amplitude de l'harmonique de rang 3 est : 1,3V
- La fréquence de l'harmonique de rang 3 est : 300 Hz
- L'amplitude de l'harmonique de rang 2 est : 0V

2. Représentation spectrale d'un signal :

Le spectre d'un signal s(t) est une représentation graphique de l'amplitude en fonction de la fréquence et la phase en fonction de la fréquence respective de chaque constituante du signal (fondamental et harmoniques).



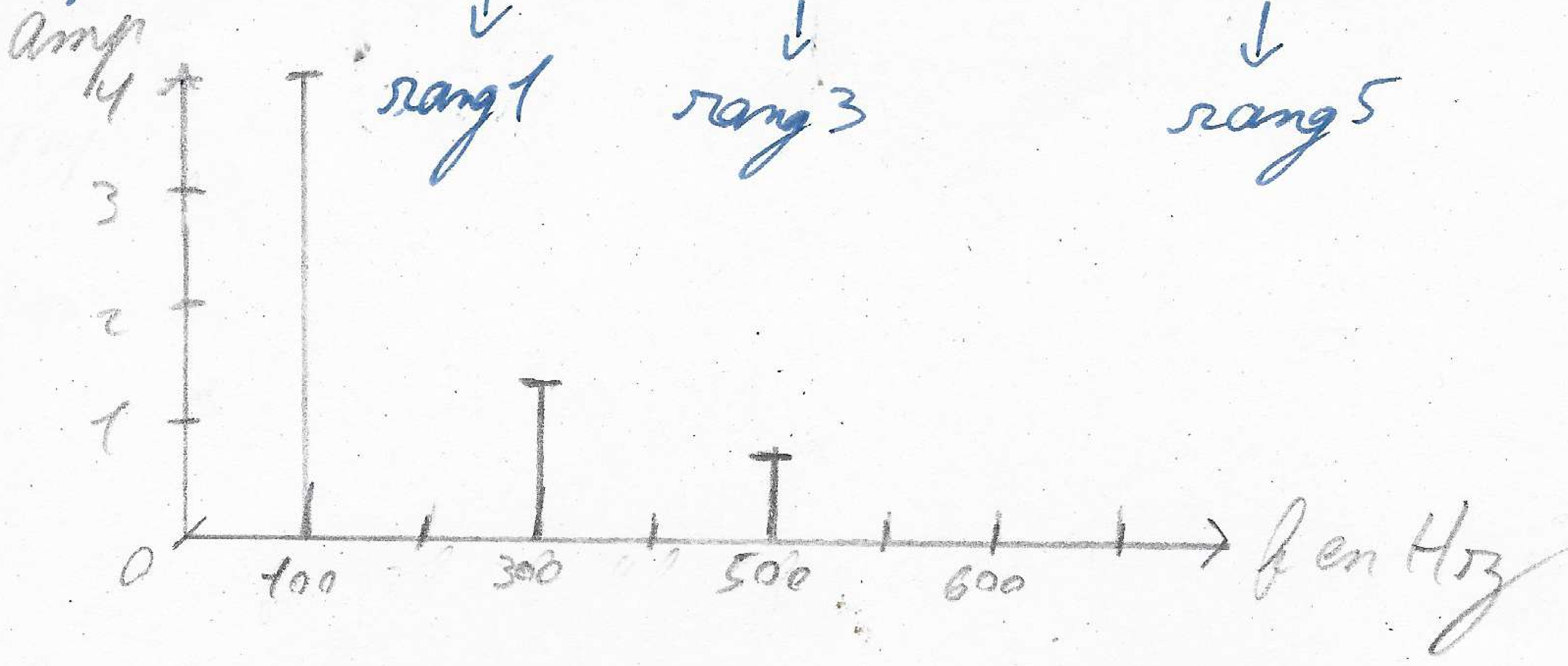


Exemple : Tracer le spectre d'amplitude du signal carré de l'exemple précédent :

spectre d'amplitude

$$s(t) = 4\,sin\omega t + 1.3\sin\left(3\omega t + \frac{\pi}{5}\right) + 0.8\sin\left(5\omega t - \frac{\pi}{3}\right) + \cdots$$

rang 1 rang 3 rang 5



Remarque : spectre d'un signal sinusoïdal
Lorsqu'un signal est de type "**sinusoïdal**" alternatif, il n'est composé que **d'un harmonique :** **"le fondamental"**.

Tracer les spectres et de phase de la tension $u(t) = 12 \sin(2.\pi.150.t + \pi/3)$

3. Valeur moyenne et efficace de s(t) :

$s(t) = \langle s(t) \rangle + A_1 \sin(2\pi f_0 t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\pi(2f_0)t + \varphi_2) + A_3 \sin(2\pi(3f_0)t + \varphi_2) + \dots\dots$

La valeur moyenne est évidemment $\langle s(t) \rangle$
La valeur efficace est calculée à partir de la relation suivante :

$$S_{eff}{}^2 = \langle s(t) \rangle^2 + \frac{1}{2}\left(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + \cdots\right)$$

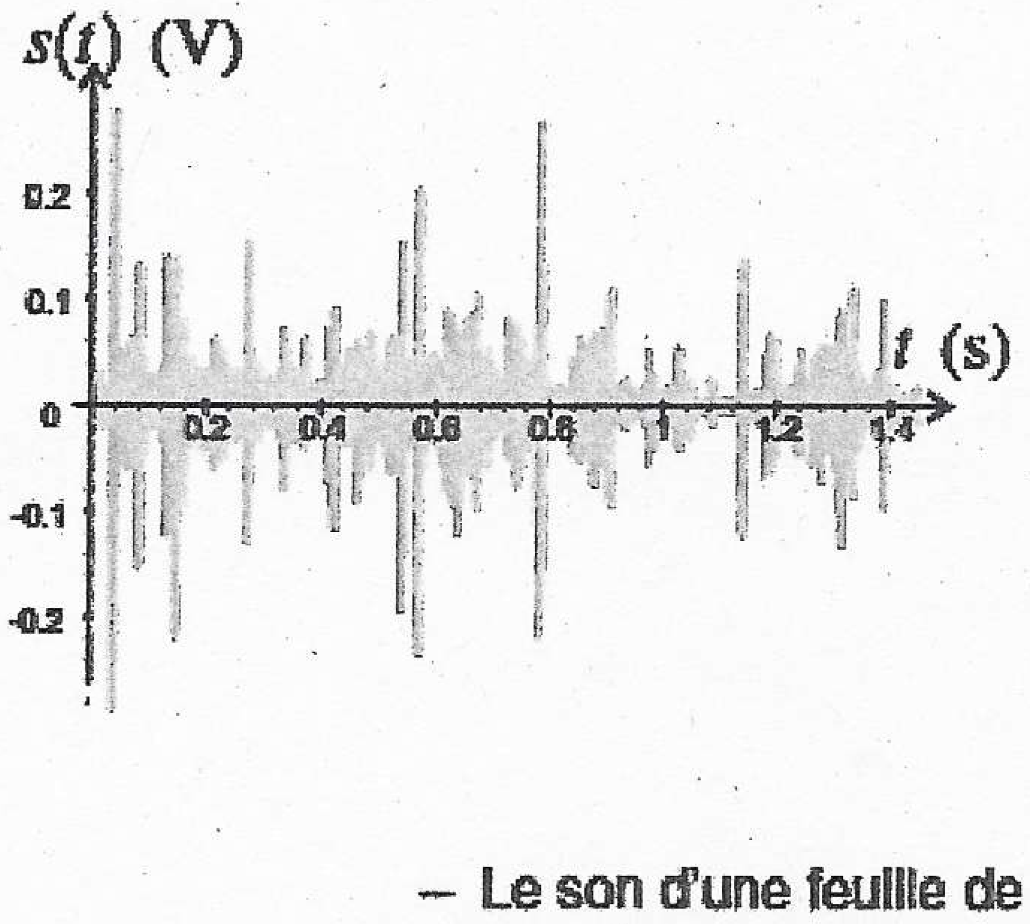
4. Taux de distorsion harmonique :

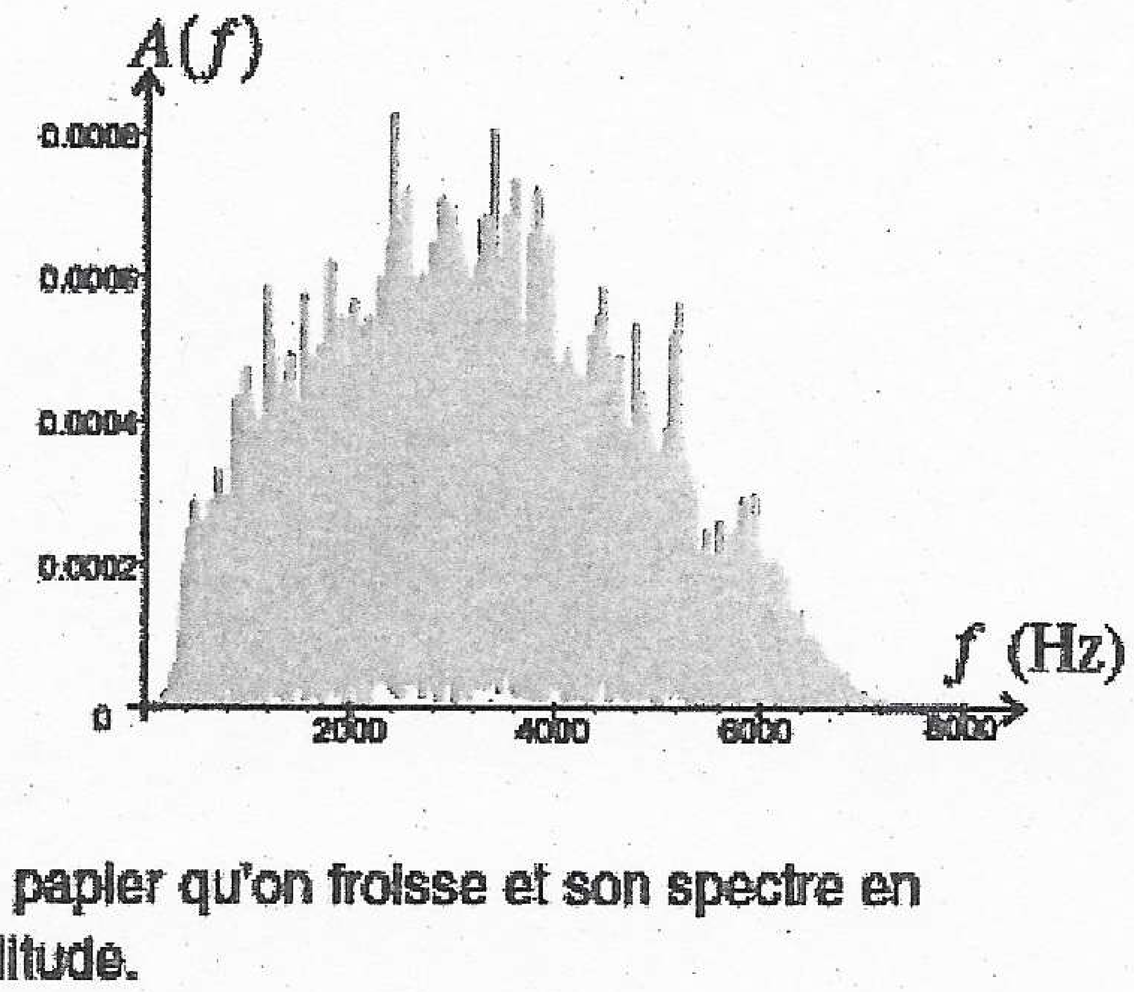
Le taux de distorsion T_{Dh} harmonique permet de **quantifier la pureté** d'un signal sinusoïdal. Il est défini par le rapport entre la valeur efficace de l'ensemble des harmoniques et la valeur efficace du fondamental :

$$T_{Dh} = \frac{\sqrt{A_2^2 + A_3^2 + \dots\dots}}{A_1}$$

5. Spectre d'un signal non périodique

Le **spectre d'un signal non périodique** est continu. Un **signal non périodique** ne possède donc ni fondamentale, ni harmonique de fréquence multiples entiers de celle de la fondamentale.
L'observation de son spectre montre qu'il est constitué de plusieurs raies qui occupent une bande de fréquences. Il s'agit donc **d'un spectre continu**, appelé **spectre de bande**.





– Le son d'une feuille de papier qu'on froisse et son spectre en amplitude.