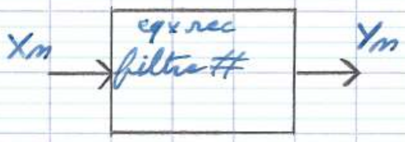
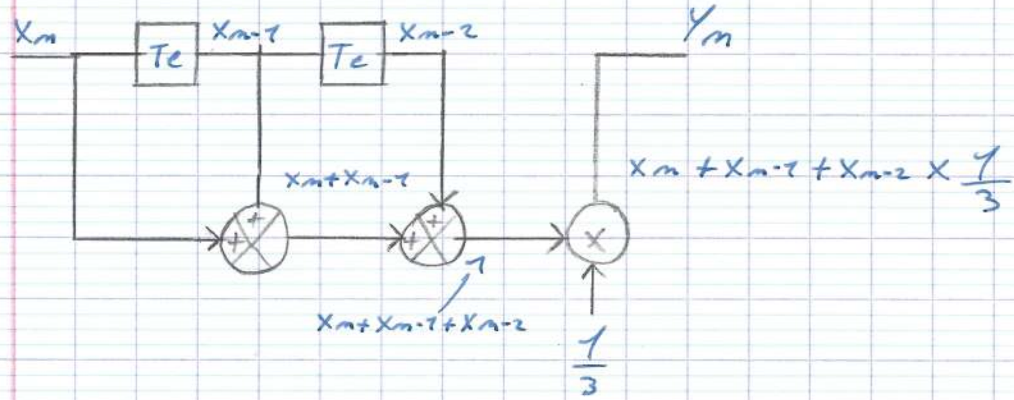
Chaîne de traitement numérique du signal :

Filtrage numérique p. 5 :



exercice : Soit le shéma d'un filtre :



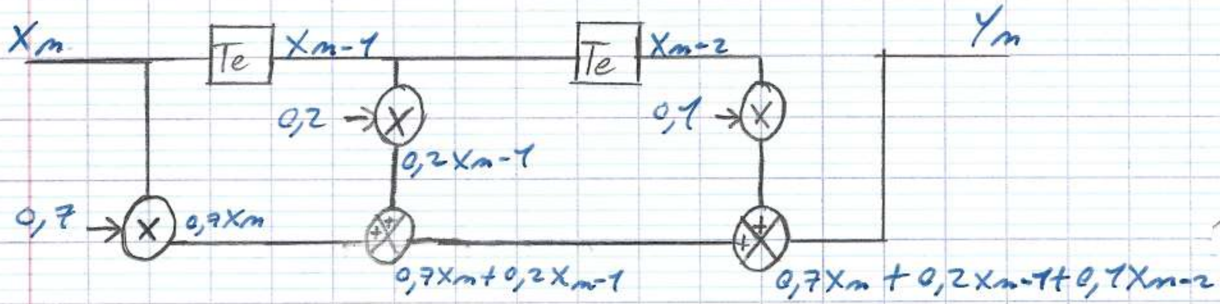
1) Donner l'équation de récurence.

$Y_n = (X_n + X_{n+1} + X_{n-2}) \times \frac{1}{3}$

2) Le filtre est recursif car la sortie Y_n ne dépend que des entrées.

exercice : Donner le shéma bloc du filtre ayant pour équation de récurrence.

$$Y_n = 0{,}7\,X_n + 0{,}2\,X_{n-1} + 0{,}1\,X_{n-2}$$



RIF : toujours stable $Y_n = X_n + X_{n-1}$

RII : soit stable ou instable $Y_n = X_n + Y_{n-1}$

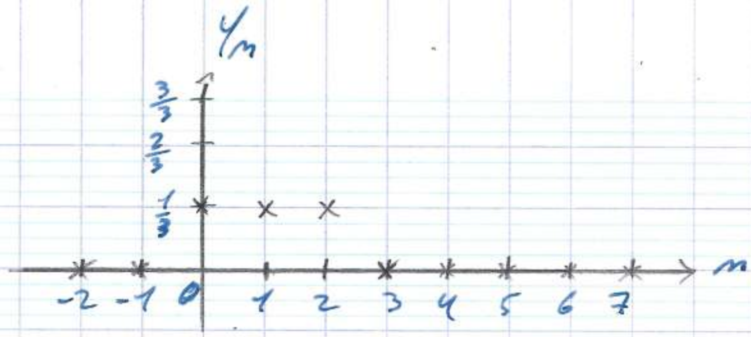
---

exercice : tracer la reponse temporel de $Y_n = \dfrac{X_n + X_{n-1} + X_{n-2}}{3}$ à un dirac

	n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
dirac entrée ->	X_n	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	Y_n	0	0	Y_0 $\frac{1}{3}$	Y_1 $\frac{1}{3}$	Y_2 $\frac{1}{3}$	Y_3 0	Y_4 0	Y_5 0	Y_6 0

$$Y_0 = \frac{X_0 + X_{-1} + X_{-2}}{3} = \frac{1}{3} \qquad Y_2 = \frac{X_2 + X_1 + X_0}{3} = \frac{1}{3}$$

$$Y_1 = \frac{X_1 + X_0 + X_{-1}}{3} = \frac{1}{3} \qquad Y_3 = \frac{X_3 + X_2 + X_1}{3} = 0$$



Réponse d'un filtre RIF car il n'y a que 3 termes non nuls dans la réponse temporelle à un dirac.

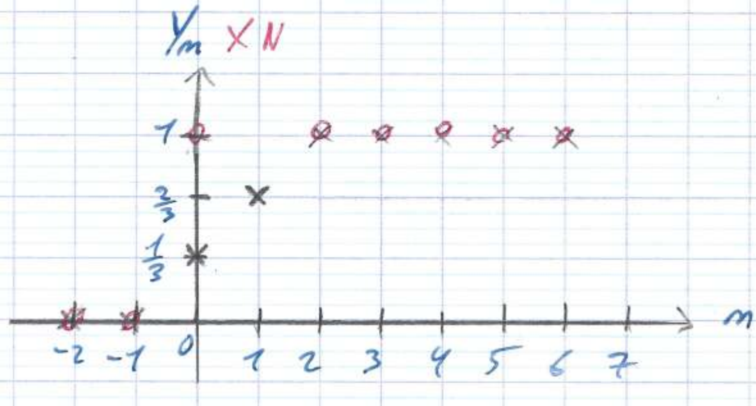
echelon →

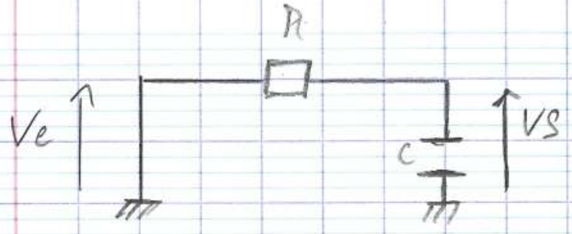
n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
x_n	0	0	1	1	1	1	1	1	1
y_n	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	1	1	1	1

$$y_0 = \frac{x_0 + x_{-1} + x_{-2}}{3} = \frac{1}{3}$$

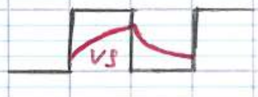
$$y_1 = \frac{x_1 + x_0 + x_{-1}}{3} = \frac{2}{3}$$

$$y_2 = \frac{x_2 + x_1 + x_0}{3,00} = \frac{3}{3} = 1$$

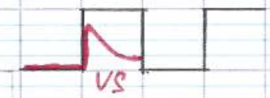


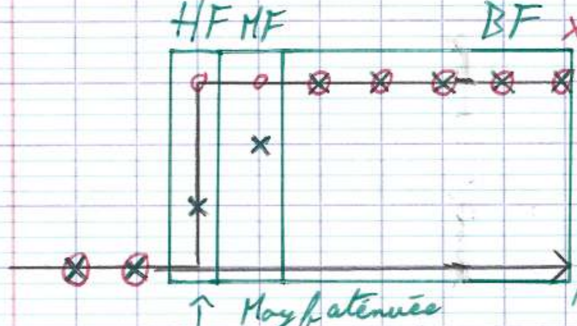


passe bas



passe haut





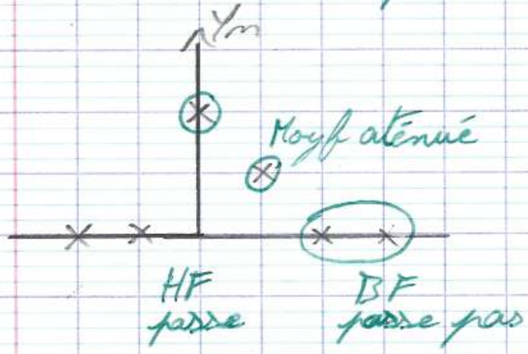
x_n : echelon

Passe bas

instant n

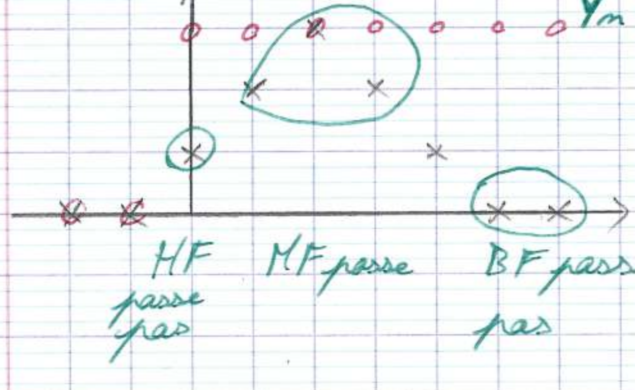
la basse frequence passe

La haute fréquence (HF) est atenuée (passe bas)



Passe haut num

x_n = échelon
Y_n = sortie



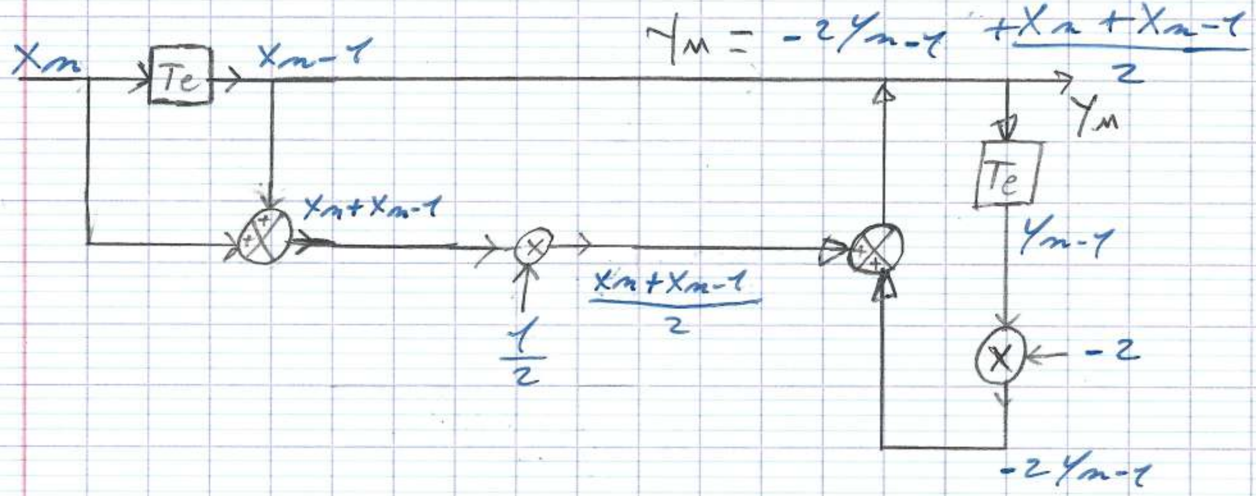
Passe bande

$$Y_n = -2Y_{n-1} + \frac{X_n + X_{n-1}}{2}$$

1) Recursife ou non recursif ?

Recursif car il dépend des anciennes sorties.

2) Donner le schéma bloc.



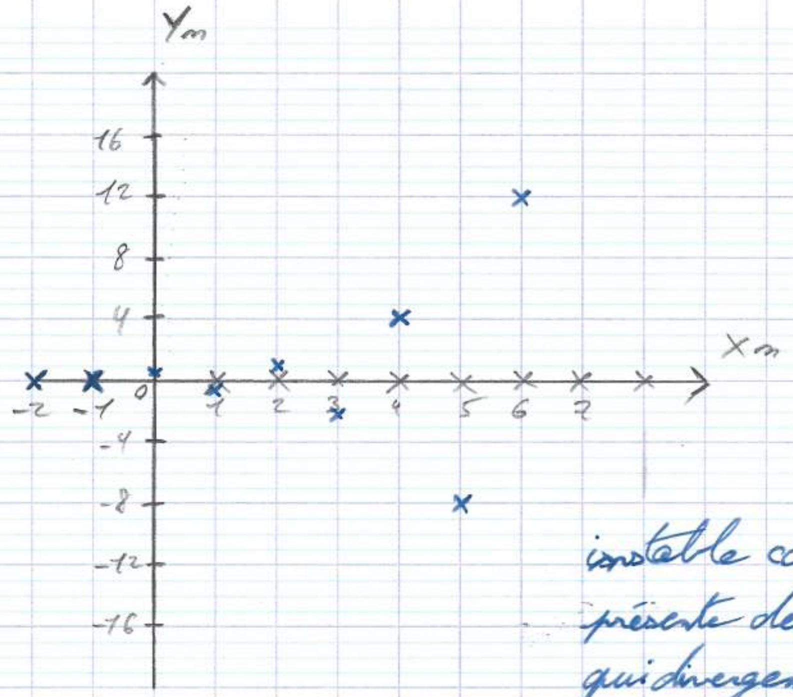
3) Reponse temporelle à un dirac + courbe

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
X_n	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
Y_n	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	-2	4	-8	16	-32

$$Y_0 = -2 \times 0 + \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$Y_1 = -2 \times \frac{1}{2} + \frac{0+1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$Y_2 = -2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{0+0}{2} = 1$$



instable car la sortie Ym présente des oscillations qui divergent.

4) Reponse temporelle à l'echelon tableau + courbe

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
Xn	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
Yn	0	0	$\frac{1}{2}$	0	1	-1	3	-5	11	-21

$Y_2 = -2 \times \frac{1}{2} + \frac{1+1}{2} = 0$

$Y_3 = -2 \times 0 + 1 = 1$

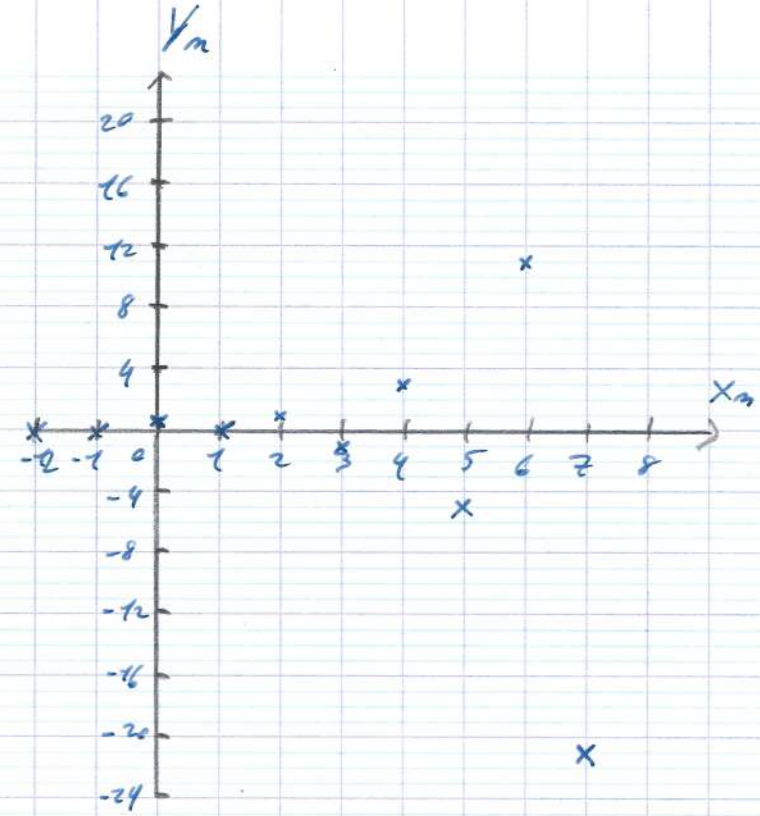
$Y_4 = -2 \times 1 + 1 = -1$

$Y_5 = -2 \times (-1) + 1 = 3$

$Y_6 = -2 \times 3 + 1 = -5$

$Y_7 = -2 \times (-5) + 1 = 11$

$Y_8 = -2 \times 11 + 1 = -21$



Yn
20
16
12
8
4
0
-4
-8
-12
-16
-20
-24
Xn
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
8

Stabilité

$$Y_n = Y_{n-1} + X_n$$

1) Récursif car Y_n dépend de Y_{n-1}.

2) trouver la fonct de transfert en z.

$$T(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$X_n \xrightarrow[\text{en } z]{\text{transformé}} X(z)$$

$$Y_n \xrightarrow{T_z} Y(z)$$

$$X_{n-1} \xrightarrow{T_z} z^{-1} \cdot X(z)$$

$$X_{n-1} \xrightarrow{T_z} z^{-2} \cdot X(z)$$

$$Y_{n-1} \xrightarrow{T_z} z^{-1} \cdot Y(z)$$

$$Y_{n-3} \xrightarrow{T_z} z^{-3} \cdot Y(z)$$

3) $Y_n = Y_{n-1} + X_n$

$Y(z) = z^{-1} \cdot Y(z) + X(z)$

4) trouver $\frac{Y(z)}{X(z)}$

la fonct $T.z$

4) $Y(z) = z^{-1} \times Y(z) + X(z) \Leftrightarrow X(z) = -z^{-1} \times Y(z) \times Y_z$

$z^{-1} = \frac{1}{z}$

$Y(z) - z^{-1} \cdot Y(z) = X(z)$

$Y(z)\left(1 - z^{-1}\right) = X(z)$

$Y(z) = \frac{X(z)}{1 - z^{-1}}$

Fonct transfert en z $\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$

$X(z) = Y(z)\left(1 - z^{-1}\right)$

$Y(z) = \frac{X(z)}{1 - z^{-1}}$

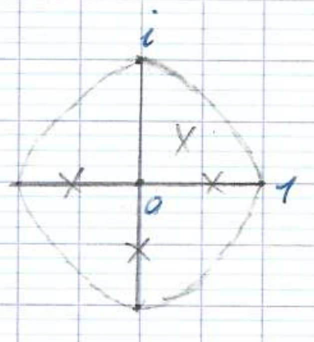
$Y(z) = \frac{X(z)}{1 - \frac{1}{z}}$

$Y(z) = \frac{X(z)}{\frac{z-1}{z}} \frac{(\times z)}{(\times z)}$

$Y(z) = \frac{X(z) \times z}{z - 1}$

$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z}{z-1}$

Diagramme de stabilité / pôles de la Fonction de transfert en z



- tous les pôles à l'intérieur du cercle -> filtre stable

- 1 seul pôle sur le cercle -> filtre limite stable/instable

- 1 seul pôle en dehors du cercle
→ filtre instable

Je cherche le pôle de cette fonction de transfert : Résoudre le dénominateur = 0

$1 - z^{-1} = 0$

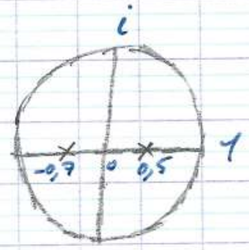
$1 = z^{-1}$

$1 = \frac{1}{z} \iff \frac{1}{1} = \frac{1}{z} \quad \frac{1 \times z}{1 \times 1} \iff z = \frac{1}{1}$

$z = 1$ Donc le pôle est sur le cercle
le filtre est limite stable/instable

$T(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z-1}{(z-0,5)(z+0,7)}$

1. 2 pôles : $0,5$; $-0,7$ $\quad 0,5-0,5=0$
$-0,7+0,7=0$

2. 

filtre stable car les 2 pôles sont dans le cercle unité.

$$Y_z = \frac{(z+7)}{(z-0{,}1)(z+0{,}2)(z+2)}$$

1. $0{,}1 - 0{,}1 = 0$ 3 pôles : $0{,}1$; $-0{,}2$; -2

$-0{,}2 + 0{,}2 = 0$

$-2 + 2 = 0$

2. Le filtre est instable car le pôle -2 est en dehors du cercle unité.

---

1 filtre à 2 poles complexes

$z_1 = 0{,}9 + 0{,}43i$

$z_2 = 0{,}9 - 0{,}43i$

$|z_1| = \sqrt{0{,}9^2 + 0{,}43^2} = 0{,}99$

$|z_2| = \sqrt{0{,}9^2 + (-0{,}43)^2} = 0{,}99$

Le filtre est stable car les pôles sont dans le cercle unité.

$$y_n = 0{,}5\, y_{n-1} + \frac{x_n + x_{n-1}}{2}$$

$$Y(z) = 0{,}5\, z^{-1} \cdot Y(z) + \frac{X(z) + z^{-1} \cdot X(z)}{2}$$

$$Y(z) - 0{,}5\, z^{-1}\, Y(z) = \frac{X(z) + z^{-1} \cdot X(z)}{2}$$

$$Y(z)\left(1 - 0{,}5\, z^{-1}\right) = \frac{1}{2} \times X(z)\left(1 + z^{-1}\right)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{1}{2}\left(1 + z^{-1}\right)}{1 - 0{,}5\, z^{-1}}$$

pôle : $1 - 0{,}5\, z^{-1} = 0$

$$1 = 0{,}5\, z^{-1}$$