Discrete Mathmeatics: quiz01

nju-ics-谭宇豪 (TA)

2024-4-14

[15 pts]Problem1

用自然演绎证明 $p \vee q, \neg p \vdash q$

答案:

1.	$p \vee q$	premise
2.	$\neg p$	premise
3.	p	assumption
4.	$\perp$	e 2,3
5.	q	i 4
6.	q	assumption
7.	q	e 3-5,6

[15 pts]Problem2

用自然演绎证明 $\vdash \forall x(\neg P(x) \vee A) \to \exists x P(x) \to A$

答案:

1.	$\forall x(\neg P(x) \vee A)$	assumption
2.	$\exists x P(x)$	assumption
3.	$x_0\ P(x_0)$	assumption
4.	$\neg P(x_0) \vee A$	e 1
5.	$\neg P(x_0)$	assumption
6.	$\perp$	e 3,5
7.	A	i 6
8.	A	assumption
9.	A	e 5-7,8
10.	A	e 3-9
11.	$\exists x P(x) \to A$	e 2-9
12.	$\forall x(\neg P(x) \vee A) \to \exists x P(x) \to A$	e 1-11

[30 pts]Problem3

对于可以写成两个互素的正整数 a, b 之积的数 n，n 能整除另一个数 m 等价于 a, b 都能整除 m，回答下列问题。

1. [10 pts] 将这句话写成一个谓词逻辑表达的命题。

   (a, b 互素写成 $gcd(a, b) = 1$,n 整除 m 写成 $n|m$)

2. [10 pts] 证明引理：如果 p, q, r 都是正整数，使得 $gcd(p, q) = 1$ 且 $p|qr$，则 $p|r$。

   (hint: 贝祖 (裴蜀) 定理)

3. [10 pts] 证明这个命题。

答案:

1. $\forall n, m \exists a, b(gcd(a, b) = 1 \land n = ab \to n|m \Leftrightarrow a|m \land b|m)$

2. 根据贝祖定理，有整数 s, t 使得 $sp + tq = 1$，于是 $spr + tqr = r$，由于 $p|spr \land p|tqr$，因此 $p|r$。

3. 设 $n = ab, gcd(a, b) = 1$

   先证必要性，若 $n|m$，则 $m = kn = kab$, 于是 $a|m, b|m$。

   再证充分性，若 $a|m$，则 $m = pa$，又 $b|m$ 且 $gcd(a, b) = 1$，由引理可得 $b|p$，于是 $p = qb$，则 $m = qab = qn$，即 $n|m$。

[40 pts]Problem4

对于有限集合 A, B, 设 $|A| = n, |B| = m$，回答下列问题。

1. [5 pts] A, B 之间存在多少个关系?

2. [5 pts] A 到 B 存在多少个函数?

3. [10 pts] $n \leq m$，A 到 B 存在多少个单射?

4. [10 pts] $n = 5, m = 3$，A 到 B 存在多少个满射?

5. [10 pts] $n \geq m$，A 到 B 存在多少个满射?

答案:

1. 2^{nm}

2. m^n

3. $\binom{m}{n}n!$

4. 150

5. $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}(m-k)^n$ 或 $S(n,m)m!$，$S(n,m)$ 代表第二类斯特林数在 n,m 的取值

解析:

1. 集合 A 到集合 B 的一个关系是笛卡尔积 $A \times B$ 的一个子集，$A \times B$ 的幂集包含了所有 A 到 B 的关系，因此 A, B 之间存在 2^{mn} 个关系。

2. 对于 A 的每个元素，都有 m 种指派方式，因此总共有 m^n 个函数。

3. 单射意味着 $A = |f(A)|$，因此先从 B 种选 n 个元素，然后 A 中的每个元素指派一个不同的元素，即 $\binom{m}{n}n!$。

4. 对于集合 B 的每个元素，要么它们的原像分别对应了 A 中的 $1, 1, 3$ 个元素，要么分别对应了 $1, 2, 2$ 个元素。

   对于前者，有 $\binom{3}{1}\binom{5}{3}2! = 60$ 种情况。

   对于后者，有 $\binom{3}{1}\binom{5}{2}\binom{3}{2}1! = 90$ 种情况

   于是总共有 150 种情况。

5. 对应到十二重计数法中的"将 n 个不同的小球放到 m 个不同的盒子里，不允许盒子为空"的情况

   - 容斥原理：设 A_i 表示第 i 个盒子为空的放球方案，于是所有我们要求的方案集合为 $S = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap ... \cap \bar{A_m} = \overline{A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m} = U - A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m$。

于是方案数

$$
\begin{aligned}
|S| &= |U| - |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m| \\
&= m^n - \left[\sum_{1 \le i \le m} |A_i| - \sum_{1 \le i \le j \le m} |A_i \cap A_j| + ... + (-1)^{m-1} |A_1 \cap ... \cap A_m| \right] \\
&= m^n - \left[\binom{m}{1} (m-1)^n - \binom{m}{2} (m-2)^n + ... + (-1)^{m-1} (m-m)^n \right] \\
&= m^n + \sum_{k=1}^{m} (-1)^i \binom{m}{k} (m-k)^n \\
&= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n
\end{aligned}
$$

- 第二类斯特林数 (Stirling): 设 $S(n,m)$ 是将 n 个不同的元素划分成 m 个非空集合的方案数。

  假设我们依次对每个元素进行划分，考虑第一个元素的划分:

  - 若它单独被划分到一个集合，则有 $S(n-1,m-1)$ 种方案数
  - 若它和其他元素被划分到一块儿，则有 $mS(n-1,m)$ 种方案数

  因此有 $S(n,m) = S(n-1,m-1) + mS(n-1,m)$ 由于我们要求的是“将不同小球放到不同非空集合的方案数”，还需要乘上 $m!$，即 $S(n,m)m!$