

离散数学期中考试备选题(2016年4月)

1. 【10】用谓词逻辑表述以下命题，并给出其逻辑推理过程。
 - (1) 硬的饼都不好吃，不硬的饼都是甜的，所以好吃的饼都是甜的。
 - (2) 上了艺术课的高中生都很酷，有的聪明的高中生并不酷，所以有的聪明的高中生并没上艺术课。
2. 【10】令 $, ,$ 和 $$ 为集合。试证明：
3. 【15】定义实数集合上的“算术三角函数”集合如下：
 - (1) 恒等函数 $$ 是算术三角函数；任意常函数（也就是常数）是算术三角函数；正弦函数 $\sin(x)$ 是算术三角函数；
 - (2) 若 $, ,$ 和 $$ 是算术三角函数，则 $, , ,$ 都是算术三角函数；
 - (3) 没有其他的算术三角函数。

试以结构归纳法证明：若是算术三角函数则其导数也是算术三角函数。
4. 【10】 A 和 B 是非空集合， $, ,$ 是一个函数。试证明：若 f 是单射，则 X 与等势。
5. 【10】令 $$ 为所有仅由数字 1、2 或 3 构成的无限长的序列的集合。证明该集合不可数。
6. 【10】试证明：若 p 是大于 3 的素数，则 p 是 24 的倍数。
7. 【15】 A 和 B 是两个非空集合。对任一个给定的函数 $$ ，可定义 A 上的一个关系如下：
 - a) 试证明：关系 $$ 是等价关系。
 - b) 对于非空集合 $$ 上的任意一个等价关系，试定义一个函数 $$ 使得 $$ 。（是 A 的幂集。）
8. 【20】定义：偏序集是完全格 (complete lattice) 当且仅当 的任何一个子集 都有其最小上界 (记为) 和最大下界 (记为)。
定义：从偏序集到偏序集的函数是一个单调函数当且仅当。
 - a) 请证明：若 $$ 是非空有限集合，则格必是完全格。
 - b) 请举出一个非空的偏序格但不是完全格的例子。

c) 试证明 (Tarski-Knaster 定理) :

令是一个完全格, 是一个单调函数, 则有不动点, 即存在一个使得。

(提示: 令证明是一个不动点)

d) 试证明上述提示中的不动点是的最小不动点。