离散数学（2024）作业 09 - 基本计数技术

离散数学教学组

Problem 1

长度为 $n(n>5)$ 且以 000 开始或以 111 结尾的二进制串有多少个?
答案： $2^{n-3}+2^{n-3}-2^{n-6}=15*2^{n-6}$

Problem 2

有多少个小于 1000 的满足以下条件的正整数?

1. 被 7 整除
2. 被 7 整除但不被 11 整除
3. 同时被 7 和 11 整除
4. 被 7 或 11 整除
5. 恰好被 7 或 11 中的一个数整除
6. 既不被 7 整除，也不被 11 整除
7. 含有不同的数字
8. 含有不同的数字且是偶数

答案：

1. $\lfloor 999/7\rfloor = 142$
2. $\lfloor 999/7\rfloor - \lfloor 999/77\rfloor = 130$
3. $\lfloor 999/77\rfloor = 12$
4. $\lfloor 999/7\rfloor + \lfloor 999/11\rfloor - \lfloor 999/77\rfloor = 220$
5. $220-12=208$
6. $999-220=779$
7. $9+81+648=738$
8. $738-365=373$

Problem 3

给定 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，问：A 有多少个子集，满足其中所有元素的乘积能被 10 整除？
答案： 必须要有 5，和（2 或 4），共 12 种。

Problem 4

从集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 到集合 $\{0, 1\}$ 有多少个函数？这里的 n 是正整数。
答案： 每个定义域的元素都有 2 个函数值可供选择，故答案为 2^n。

Problem 5

一组 10 个人选取 4 人坐在 4 人的圆桌旁边，一共有多少种坐法？当每个人左右邻座都相同时算为同一种坐法。
答案： 假设桌子不是圆的，仅仅计算从这 10 个人中选择 4 个人有序排列，那么有 $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$ 种排列方式。考虑桌子是圆的，可以以 4 种方式旋转桌子上的人，得到相同的座位排列，因此答案是 $5040/4 = 1260$。

Problem 6

在婚礼上摄影师从 10 个人中（包括新娘新郎）安排 6 个人在一排拍照。如需满足下述条件，分别有多少种安排方式？

1. 新娘必须在照片中
2. 新娘和新郎必须都在照片中
3. 新娘和新郎恰好有一个在照片中

答案：

1. 先安排新娘的位置，有 6 种安排方法，其余位置有 $9*8*7*6*5 = 15120$ 种可能，则共有 $6*15120 = 90720$ 种安排方式。
2. 先安排新娘的位置，有 6 种安排方式，再安排新郎的位置，有 5 种安排方式，其余位置有 $8*7*6*5 = 1680$ 种，则共有 $6*5*1680 = 50400$ 种。
3. 只有新娘有 $90720 - 50400 = 40320$ 种（或 $6*8*7*6*5*4$），则共有 $2*40320 = 80640$ 种。

Problem 7

离散数学班的每个学生都是计算机科学或数学专业的，或者是同时修这两个专业的。如果有 38 个人是计算机科学专业的（包含同时修两个专业的），23 个人是数学专业的（包含同时修两个专业的），7 个人是同时修两个专业的，那么这个班有多少学生？
答案： $38 + 23 - 7 = 54$

Problem 8

使用数学归纳法证明容斥原理。
答案:

- 基本步骤：$n=2$，显然公式成立。
- 归纳步骤：假设 $n=k$ 时成立。当 $n=k+1$ 时，公式可写成

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k \cup A_{k+1}| = |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k| + |A_{k+1}| - |(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) \cap A_{k+1}| \tag{1}$$

又因为

$$\begin{aligned} &|(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) \cap A_{k+1}| \\ =&|(A_1 \cap A_{k+1}) \cup (A_2 \cap A_{k+1}) \cup ... \cup (A_k \cap A_{k+1})| \\ =&\sum_{i=1}^{k} |A_i \cap A_{k+1}| - \sum_{1 \le i \le j \le k} |A_i \cap A_j \cap A_{k+1}| + ... + (-1)^{k+1} |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k+1}| \end{aligned} \tag{2}$$

且

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k| = \sum_{i=1}^{k} |A_i| - \sum_{1 \le i \le j \le k} |A_i \cap A_j| + ... + (-1)^{k+1} |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k| \tag{3}$$

将式 (2)，式 (3) 带入式 (1) 中可得 $|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k \cup A_{k+1}| = \sum_{i=1}^{k+1} |A_i| - \sum_{1 \le i \le j \le k+1} |A_i \cap A_j| + ... + (-1)^k |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k+1}|$。

综上，由数学归纳法，得证。

Problem 9

有 6 个集合，如果知道其中任 3 个集合都是不相交的，根据容斥原理写出关于这 6 个集合并集元素个数的显式公式。
答案:

$$\begin{aligned} &|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6| = \\ &\quad |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| + |A_6| \\ &\quad - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_1 \cap A_5| - |A_1 \cap A_6| \\ &\quad - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_2 \cap A_5| - |A_2 \cap A_6| \\ &\quad - |A_3 \cap A_4| - |A_3 \cap A_5| - |A_3 \cap A_6| \\ &\quad - |A_4 \cap A_5| - |A_4 \cap A_6| \\ &\quad - |A_5 \cap A_6| \end{aligned}$$

Problem 10

考虑一个 $N \times N$ 网格，其中的每一个单元格可以取值 +1 或 -1。我们称这种网格为二进制网格 *(Binary grid)*。任何行的行乘积 *(row product)* 都被定义为该单行中所有元素的乘积。同样，一列的列乘积 *(column product)* 被定义为该单个列中所有元素的乘积。如果 N 行的行乘积中，有且只有一个结果为 -1，而 N 列的列乘积中，有且只有一个结果为 -1，则该 $N \times N$ 的二元网格称为魔术网格。换句话说，魔术网格要求其他 $N-1$ 个行乘积全部为 $+1$，其他 $N-1$ 个列乘积应也全部为 $+1$。试计算所有 $N \times N$ 的网格中，魔术网格的数量。
答案:

- 确定要使其行列乘积为 -1 的行和列。可以有 n 种方式选择行，对于选定的每一行，可以有 n 种方式选择列。总共 n^2 种方式。
- 接下来，随机填充剩余的 $(n-1)^2$ 个单元格（都不属于先前选择的行或列）。这可以有 $2^{(n-1)^2}$ 种方式。
- 现在，我们得到一个 $N \times N$ 的网格, 所有行和列乘积都已知。此时，填充第一步选中的行和列。显然，对于该行和列中的元素，是可以唯一地确定要插入的数字的符号。

根据基本计数原理，魔方格子总数为 $n^2 \times 2^{(n-1)^2}$。