

考试科目名称 离散数学 (B 卷)

考试方式: 闭 卷 考试日期 2019 年 月 日 教师
系 (专业) 计算机科学与技术系 年级 班级
学号 姓名 成绩

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九
分 数									

得 分

一、(本题满分 10 分)

请运用命题逻辑进行表示，并证明下列推理。

(1) “今天海面不平稳并且紫外线不强”，(2)“若今天海面不平稳或紫外线很强，则探险队不出海”，(3)“若探险队不出海，则探险队将修理船只”，(4)“若探险队修理船只，则探险队在晚上发布行程记录”，证明结论“探险队在晚上发布行程记录”。

答案：

p : 今天海面平稳, q : 今天紫外线不强, r : 探险队出海, s : 探险队修理船只, t : 探险队在晚上发布行程记录 (2 分)

表示: $\neg p \wedge q$, $\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg r$, $\neg r \rightarrow s$, $s \rightarrow t$, 证明 t (2 分)

1. $\neg p \wedge q$
2. $\neg p$
3. $\neg p \vee \neg q$
4. $\neg r$ ($\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg r$)
5. s ($\neg r \rightarrow s$)
6. t ($s \rightarrow t$)

(上述证明过程 6 分)

得 分

二、(本题满分 12 分)

定义集合 $S = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{N}\}$ 上的关系 R : 若 $(x,y,z)R(a,b,c)$, 当且仅当存在非负实数 k , 使得 $(x,y,z)=k(a,b,c)$,

- (1) 证明 R 为等价关系;
- (2) 请至少写出三个元素分别与 $(1, 2, 3)$ 和 $(2, 2, 2)$ 属于同一等价类;
- (3) 除等价类 $\{(0, 0, 0)\}$ 外, 请分析其他等价类属于有限集合、属于可数无穷集、属于不可列集合的情况。

答案：

- (1) 证明 R 为等价关系，分别证明自反性、对称性、传递性
自反性：

对任意 $(x,y,z) \in S$, 存在非负整数 $k=1$, 使得 $(x,y,z)=1(x,y,z)$

由关系 R 的定义, 有 $(x,y,z)R(x,y,z)$,

即对任意 (x,y,z) 有 $(x,y,z)R(x,y,z)$, 关系 R 满足自反性.

对称性易见。

传递性：

对任意 R 中的两个元素满足 $(x_1,y_1,z_1)R(x_2,y_2,z_2)$,
 $(x_2,y_2,z_2)R(x_3,y_3,z_3)$

存在非负整数 k_1, k_2 使得 $(x_1,y_1,z_1)=k_1(x_2,y_2,z_2)$,
 $(x_2,y_2,z_2)=k_2(x_3,y_3,z_3)$

令 $K=k_1*k_2$, 则有 $(x_1,y_1,z_1)=k_1k_2(x_3,y_3,z_3)=K(x_3,y_3,z_3)$, K 是非负整数。根据 R 的定义, 有 $(x_1,y_1,z_1)R(x_3,y_3,z_3)$, 关系 R 满足传递性

- (2) $(2,4,6), (4,8,12), (8,16,24) \dots$

$(1,1,1), (4,4,4), (8,8,8) \dots$

- (3) 因为 k 是非负整数, $\{(0,0,0)\}$ 以外的所有等价类都是可数无穷集。

得 分

三、(本题满分 10 分)

设方程 $X \times Y = (X \vee Y) \times (X \wedge Y)$, 其中未知整数 $X, Y \in [0,31]$, \times 表示普通乘法运算, $X \vee Y$ 表示变量 X 和 Y 对应二进制数的按位或运算, $X \wedge Y$ 表示变量 X 和 Y 对应二进制数的按位与运算. 试求此方程所有整数解的组数.

答案:

- (1) 证明结论: 若满足此方程式, 当且仅当 $(X \vee Y)$ 等于 X 和 Y 中的较大值, 且 $(X \wedge Y)$ 等于 X 和 Y 中的较小值。

证明: 假设 $X \leq Y$, 则 $(X \wedge Y) \leq X, (X \vee Y) \geq Y$, 且设 $X \vee Y = Y + a$ (a 为整数), 则 $(X \wedge Y) = X - a$

$(X \vee Y) \times (X \wedge Y) = (X-a) \times (Y+a) = X \times Y - a \times (Y-X) - a^2 \leq X \times Y$, 且当且仅当 $a=0$ 时等号成立。

所以当 $X \leq Y$, 等式成立时当且仅当 $(X \vee Y) = Y$ 且 $(X \wedge Y) = X$ 。

所以由对称性, 若满足此方程式, 当且仅当 $(X \vee Y)$ 等于 X 和 Y 中的较大值, 且 $(X \wedge Y)$ 等于 X 和 Y 中的较小值。

- (2) 根据以上定理, 枚举 1 的个数, 整数解个数为

$$2 * (C(5,0) * 2^0 + C(5,1) * 2^1 + C(5,2) * 2^2 + C(5,3) * 2^3 + C(5,4) * 2^4 + C(5,5) * 2^5) - 2^{^5} = 454$$

得 分

四、(本题满分 10 分)

一辆出租车在夜晚肇事之后逃逸，一位目击证人辨认出肇事车辆是蓝色的。已知这座城市 85% 的出租车是绿色的，15% 是蓝色的。警察经过测试，认为目击者在当时可以正确辨认出这两种颜色的概率是 80%，辨别错误的概率是 20%。请问，肇事出租车是蓝色的概率是多少？

答案：

事件 A：目击证人辨认车是蓝色的，B：肇事车是蓝色的，

则 $P(B)=0.15$ ，

根据全概率公式， $P(A)=0.85*(1-0.8)+0.15*0.8=0.29$

根据贝叶斯公式

$P(B|A)=P(B)*P(A|B)/P(A) = 0.15*0.8/0.29$ 约等于 0.41

肇事出租车是蓝色的概率是 41%。

得 分

五、(本题满分 12 分)

考虑整数加群 $(\mathbb{Z}, +)$ 的循环子群 $\langle a \rangle$ 和 $\langle b \rangle$ ，其中 a, b 分别是两个循环群的生成元，则 $\langle a \rangle$ 是 $\langle b \rangle$ 的子群当且仅当 $b|a$ 。

答案：

先证明充分性，即：

考虑整数加群 $(\mathbb{Z}, +)$ 的循环子群 $\langle a \rangle$ 和 $\langle b \rangle$ ，其中 a, b 分别是两个循环群的生成元， $b|a$ ，证明 $\langle a \rangle$ 是 $\langle b \rangle$ 的子群

证明：由 $b|a$ 得，存在一整数 k ，使得 $b=k*a$ 。

n 和 k 为整数， $n*k$ 为整数，

所以对于任意 $\langle a \rangle$ 中的元素 $a^i=a^i$ ，存在一整数 k ，使得 $a^i=b^{(i*k)} \in \langle b \rangle$ 所以 $\langle a \rangle$ 是 $\langle b \rangle$ 的子群。

再证明必要性，即：

考虑整数加群 $(\mathbb{Z}, +)$ 的循环子群 $\langle a \rangle$ 和 $\langle b \rangle$ ，其中 a, b 分别是两个循环群的生成元且， $\langle a \rangle$ 是 $\langle b \rangle$ 的子群，证明 $b|a$

证明：由 $\langle a \rangle$ 是 $\langle b \rangle$ 的子群，对任意 $\langle a \rangle$ 中元素 $a^i=a^i, a^j=a^j$ ，则 $a^i, a^j \in \langle b \rangle$

令 $j=i+1$ ，则存在整数 p, q ，满足 $a^i=b^p, a^{(i+1)}=b^q$

两边分别做商，得 $a=b^{(q-p)}=b+b+\dots+b(q-p \uparrow b \text{ 相加})=(q-p)*b$

令 $r=q-p$ ，由 p 和 q 为整数， r 为整数，即存在整数 r ，使得 $a=r*b$

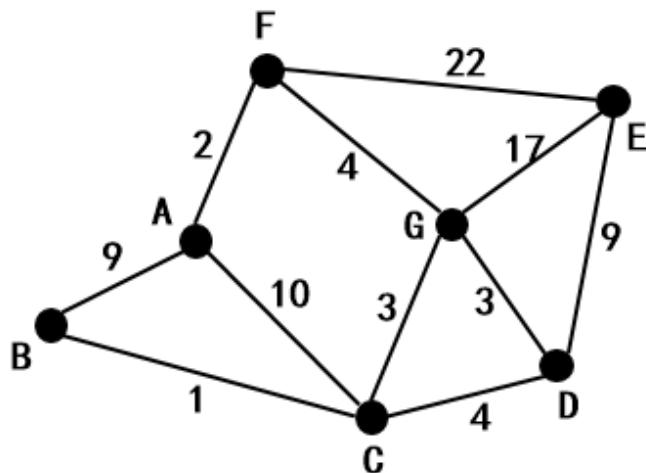
所以 $b|a$ 。

因此， $\langle a \rangle$ 是 $\langle b \rangle$ 的子群，当且仅当 $b|a$ 。

得分

六、(本题满分 10 分)

求下图中以 A 为源点到图中其他所有点的最短路径。



Dijkstra

迭代次数	$L(B)$	$L(C)$	$L(D)$	$L(E)$	$L(F)$	$L(G)$	点
初始	∞	∞	∞	∞	∞	∞	
1	9	∞	∞	∞	2	∞	A
2	9	∞	∞	24		6	F
3	9	9	9	23			G
4		9	9	23			B
5			9	23			C
6				18			D

$$AB = A-B = 9, \quad AC = A-F-G-C = 9, \quad AD = A-F-G-D = 9,$$

$$AE = A-F-G-D-E = 18, \quad AF = A-F = 2, \quad AG = A-F-G = 6$$

得 分	
-----	--

七、(本题满分 12 分)

有甲、乙、丙、丁 4 个人，从甲开始相互传球 6 次（自己不能传球给自己），要求球最终回到甲的手中（例如甲→乙→甲→乙→甲→乙→甲 或者甲→乙→丙→丁→丙→乙→甲 都是允许的传球方式）。

(2) 建立上述问题的数学模型.

(2) 求解这样的传球方式共有多少种?

答案：

(1)

每一步球都有 3 种传法，传球 x 次总方法数为 3^x

若第 x 次传球后球在甲手中，则第 $x-1$ 次时，球一定不在甲手中。

令 $a(x)$: 从甲开始传球 x 次，球回到甲的手里的方法数。

则 $a(1) = 0$

则可得到递推式 $a(x+1)=3^x - a(x)$

(2)

解此递推式，得 $a(x+1) - (1/4)*3^{x+1} = -a(x) + (1/4)*3^x$

令 $b(x) = a(x) - (1/4)*3^x$ ，则 $b(x+1) = -b(x)$

$b(x) = (-1)^{x+1} * b(1) = (-1)^{x+1} * (a(1) - (1/4)*3)$

$a(x)$ 通项公式为： $a(x) = \frac{3}{4} * (-1)^x + (1/4)*3^x$

根据 $a(x)$ ，得 $a(6) = 183$ 。

得分

八、(本题满分 12 分)

所谓“子图同构”(Subgraph isomorphism)问题是指：

对于任意的图和图，判定是否存在一个子图 使得与同构 (记作)。
试说明，“判断一个图是否是哈密尔顿图”这一问题可以作为上述子图同构问题的一个特例。

答案：

要证 与子图同构 (为的子图)

即证 双射函数,使得, 当且仅当

,

2 分

要证 是哈密尔顿图

即证 中存在哈密尔顿回路

2 分

设的顶点数为 n 。

1 分

中存在哈密尔顿回路 充分必要 中存在一个与同构的子图。

6 分

因此, 判断一个图是否是哈密尔顿图, 可以作为子图同构问题的一个特例 1 分

得分

九、(本题满分 12 分)

G 的围长是指 G 中最短回路的长；若 G 没有回路，则定义 G 的围长为无穷大。证明：围长为 4 的 k 正则图至少有 $2k$ 个顶点，且恰有 $2k$ 个顶点的这样的图 (在同构意义下) 只有一个。

答案：

设 u, v 是 G 中相邻顶点, $N(u)$ 和 $N(v)$ 分别代表 u 和 v 的邻居构成的集合, 则 $N(u)$ 和 $N(v)$ 不相交, 否则 G 的围长为 3, 产生矛盾。因此, G 至少有 $2(k-1)+2$ 个顶点。

将 $N(u) \setminus \{v\}$ 和 $N(v) \setminus \{u\}$ 连为完全偶图, 得到 $2k$ 个顶点的围长为 4 的图。不难证明, 这样的图 (在同构意义下) 只有一个。