离散数学（2024）作业 13 - 关系闭包与等价关系

离散数学教学组

Problem 1

设 R 是定义在集合 $\{0,1,2,3\}$ 上的关系，R 中包含有序对 $(0,1),(1,1),(1,2),(2,0),(2,2),(3,0)$，求:

1. R 的自反闭包
2. R 的对称闭包

答案:

1. $\{(0,0),(0,1),(1,1),(1,2),(2,0),(2,2),(3,0),(3,3)\}$
2. $\{(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2),(3,0)\}$

Problem 2

设 R 是定义在整数集上的关系 $\{(a,b) \mid a$ 整除 $b\}$，R 的对称闭包是什么?
答案: $R = \{(a,b) \mid a$ 整除 b 或 b 整除 $a\}$

Problem 3

使用沃舍尔算法找出以下 $\{a,b,c,d,e\}$ 上的关系的传递闭包。

1. $\{(a,c),(b,d),(c,a),(d,b),(e,d)\}$
2. $\{(b,c),(b,e),(c,e),(d,a),(e,b),(e,c)\}$
3. $\{(a,b),(a,c),(a,e),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b),(d,a),(e,d)\}$
4. $\{(a,e),(b,a),(b,d),(c,d),(d,a),(d,c),(e,a),(e,b),(e,c),(e,e)\}$

答案:

1.

$$W_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, W_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$W_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, W_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, W_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

故传递关系闭包为 $\{(a,a),(a,c),(b,b),(b,d),(a,c),(c,c),(d,b),(d,d),(e,b),(e,d)\}$.

2.

$$W_0=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&1&0&0\end{bmatrix},W_1=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&1&0&0\end{bmatrix},W_2=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&1&0&1\end{bmatrix},$$

$$W_3=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&1&0&1\end{bmatrix},W_4=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&1&0&1\end{bmatrix},W_5=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&1&1&0&1\\0&1&1&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&1&0&1\end{bmatrix}$$

故传递关系闭包为 $\{(b,b),(b,c),(b,e),(c,b),(c,c),(c,e),(d,a),(e,b),(e,c),(e,e)\}$.

3.

$$W_0=\begin{bmatrix}0&1&1&0&1\\1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix},W_1=\begin{bmatrix}0&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix},W_2=\begin{bmatrix}1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix},$$

$$W_3=\begin{bmatrix}1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix},W_4=\begin{bmatrix}1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}W_5=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

故传递关系闭包为 $\{a,b,c,d,e\}\times\{a,b,c,d,e\}$.

4.

$$W_0=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&1&0\\0&0&0&1&0\\1&0&1&0&0\\1&1&1&0&1\end{bmatrix},W_1=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&1&1\\0&0&0&1&0\\1&0&1&0&1\\1&1&1&0&1\end{bmatrix},W_2=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&1&1\\0&0&0&1&0\\1&0&1&0&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix},$$

$$W_3=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&1&1\\0&0&0&1&0\\1&0&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix},W_4=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&1&1&1\\1&0&1&1&1\\1&0&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix},W_5=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

故传递关系闭包为 $\{a,b,c,d,e\}\times\{a,b,c,d,e\}$.

Problem 4

举例说明定义在集合 $\{a,b,c\}$ 上的关系 R 的传递闭包的自反闭包的对称闭包不是传递的。
答案： $R=\{(a,b),(c,b)\}$

Problem 5

下面是定义在所有人的集合上的关系，其中哪些是等价关系？

1. $\{(a,b)\mid a \text{ 与 } b \text{ 有相同的年龄}\}$

2. $\{(a,b)\mid a \text{ 与 } b \text{ 有相同的父母}\}$

3. $\{(a,b) \mid a$ 与 b 有一个相同的父亲或一个相同的母亲$\}$

4. $\{(a,b) \mid a$ 与 b 相识$\}$

5. $\{(a,b) \mid a$ 与 b 说同一种语言$\}$

答案:

1. 是

2. 是

3. 否

4. 否

5. 否

Problem 6

判断由下面的 0-1 矩阵表示的关系是否为等价关系。

1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

答案:

1. 否

2. 是

3. 是

Problem 7

设 R 是定义在正整数的有序对构成的集合上的关系，$((a,b),(c,d)) \in R$ 当且仅当 $a+d=b+c$。证明 R 是等价关系。

答案:

- 任意正整数的有序对 (a,b) 满足 $a+b=a+b$，故 $(a,b)R(a,b)$，因此 R 是自反的。
- 假设正整数的有序对 (a,b) 和 (c,d) 满足 $(a,b)R(c,d)$，则 $a+d=b+c$，也即 $c+b=d+a$，故 $(c,d)R(a,b)$，因此 R 是对称的。
- 假设正整数的有序对 $(a,b),(c,d)$ 和 (e,f) 满足 $(a,b)R(c,d)$ 且 $(c,d)R(e,f)$，那么 $a+d=b+c$，故 $d=b+c-a$，代入 $c+f=d+e$ 中得 $c+f=b+c-a+e$，从而 $a+f=b+e$，故 $(a,b)R(e,f)$。因此 R 是传递的。

综上所述，R 是等价关系。

Problem 8

当 n 为下列各数时，同余类 $[n]_5$（即 n 关于模 5 同余的等价类）是什么?

1. 2
2. 3
3. 6
4. -3

答案:

1. $[2]_5=\{i \mid i\equiv 2(\bmod 5)\}=\{...,-8,-3,2,7,12,...\}$
2. $[3]_5=\{i \mid i\equiv 3(\bmod 5)\}=\{...,-7,-2,3,8,13,...\}$
3. $[6]_5=\{i \mid i\equiv 6(\bmod 5)\}=\{...,-9,-4,1,6,11,...\}$
4. $[-3]_5=\{i \mid i\equiv -3(\bmod 5)\}=\{...,-8,-3,2,7,12,...\}$

Problem 9

设 $A=\{a,b,c,d,e,f\}$，R 是 A 上的关系，且 $R=\{(a,b),(a,c),(e,f)\}$，设 $R^*=t(s(r(R)))$，则 R^* 是 A 上的等价关系。

1. 给出 R^* 的关系矩阵。
2. 写出商集 A/R^*。

答案:

1. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
2. $A/R^*=\{\{a,b,c\},\{d\},\{e,f\}\}$

Problem 10

设 R 是非空有限集合 A 上的一个等价关系，A/R 是 A 关于 R 的商集，$|A| = n, |R| = r, |A/R| = t$。

1. 设 $A/R = \{A_1, A_2, \ldots, A_t\}$，证明：$\bigcup_{i=1}^{t}(A_i \times A_i) = R$；
2. 证明：$r \cdot t \geq n^2$。

答案：

1. $A/R = \{A_1, A_2, \ldots, A_t\}$，设 $|A_i| = n_i$，任取序偶 (x, y)，有：

$$
\begin{aligned}
&(x, y) \in \bigcup_{i=1}^{t}(A_i \times A_i) \\
\Leftrightarrow &\exists i(i \in \{1, 2, \ldots, t\} \wedge (x, y) \in A_i \times A_i) \\
\Leftrightarrow &\exists i(i \in \{1, 2, \ldots, t\} \wedge x \in A_i \wedge y \in A_i) \\
\Leftrightarrow &(x, y) \in R
\end{aligned}
$$

2. 根据商集的定义，商集中各等价类 $A_1, A_2, \ldots, A_t$ 均两两不相交，于是 $\forall_{1 \leq i < j \leq t}(A_i \times A_i) \cap (A_j \times A_j) = \emptyset$。结合第一问结论，有 $\sum_{i=1}^{t} n_i^2 = r$。由 Cauchy-Schwarz 不等式，有 $(\sum_{i=1}^{t} n_i)^2 \leq t \cdot \sum_{i=1}^{t} n_i^2 = r \cdot t$。又因 $\sum_{i=1}^{t} n_i = n$，即得到：$r \cdot t \geq n^2$。