离散数学（2024）作业 21 - 图论的基本概念

离散数学教学组

Problem 1

是否存在一个有 15 个顶点且每个顶点的度数都为 5 的简单图？**答案：**不存在。由握手定理，由于一条边关联两个顶点，因此图中所有顶点的度数之和一定为偶数。$15 * 5$ 是奇数，因此不存在这样的简单图。

Problem 2

有 n 支球队 $(n \geq 4)$，已经比赛完了 $n + 1$ 场，证明：一定有一个球队比赛了至少 3 场。**答案：**如果没有球队比赛了至少三场，那么每支球队最多比赛两场，把球队看作顶点，一场比赛看作一条边，每只球队度数最多为 2，由握手定理，即最多有 n 次比赛，与假设矛盾。

Problem 3

设 G 是一个 n 个顶点，$n+1$ 条边的无向图，证明：G 中存在顶点 u 使得 $d(u) \geq 3$。**答案：**假设不存在顶点 u，$d(u) \geq 3$，则 G 的总点度上限为 $\max(\Sigma d(u)) \leq 2n$。根据握手定理，图边的上限为 $\max(m) \leq 2n/2 = n$，与题设 $m = n + 1$ 矛盾。因此，G 中存在顶点 u，使得 $d(u) \geq 3$。

Problem 4

证明或反驳：若无向图 G 至少有两个顶点且各顶点度数均不相同，则 G 不是简单图。**答案：**反证法。假设图 G 为 n 个顶点的简单图，由于 G 各个顶点度数均不相同，则 G 各顶点的度为 $n-1, n-2, ..., 1, 0$。其中度数为 $n-1$ 的顶点与其他所有顶点相连，与存在度为 0 的顶点矛盾。因此 G 不是简单图。

Problem 5

一个图的**度序列**是由该图的各个顶点的度按**非递增顺序**排列的序列。求下列各个图的度序列。

1. K_5
2. C_3
3. W_4
4. Q_3

答案：

1. K_5 度序列为：$4, 4, 4, 4, 4$
2. C_3 度序列为：$2, 2, 2$
3. W_4 度序列为：$4, 3, 3, 3, 3$
4. Q_3 度序列为：$3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3$

Problem 6

证明：设 $G = \langle V, E\rangle$ 是一个连通图，且 $|V| = |E| + 1$，则 G 中至少有一个度为 1 的顶点。
答案： 设 $|V| = n$，则 $|E| = n - 1$。由欧拉握手定理可知：$\sum_{v\in V} deg(v) = 2|E| = 2n - 2$。因为 G 是连通图，因此任一顶点 v，$deg(v) \geq 1$。假设 G 中不存在度数为 1 的结点，则 $\sum_{v\in V} deg(v) \geq 2|V| = 2n > 2n - 2$。因此 G 中至少有一个度为 1 的顶点。

Problem 7

设无向图 G 有 $\mathcal{V}$ 个顶点，$\mathcal{E}$ 条边，$\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ 分别表示 G 中度最小和度最大的顶点的度，证明：$\delta(G) \leq \frac{2\mathcal{E}}{\mathcal{V}} \leq \Delta(G)$。
答案： 对于 $\forall v \in V$，有 $\delta(G) \leq deg(v) \leq \Delta(G)$，对所有的顶点求和可得 $\mathcal{V} \cdot \delta(G) \leq 2\mathcal{E} \leq \mathcal{V} \cdot \Delta(G)$，各项均除以 $\mathcal{V}$ 即可得证。

Problem 8

令 G 是至少有两个顶点的无向图，证明或反驳：

1. 从图中删去一个度最大的顶点不会使其顶点平均度增加。
2. 从图中删去一个度最小的顶点不会使其顶点平均度减少。

「**提示：** Problem 7 中 $\frac{2\mathcal{E}}{\mathcal{V}}$ 称为图的**顶点平均度**。」
答案：

1. 成立，假设原图平均度数为 θ，顶点数为 n，最大度为 x，修改后的图平均度为 θ'，顶点数为 $n - 1$，去掉度最大的顶点后，因为一条边关联两个顶点，所以原图损失了 $2x$ 的总度数，有 $(n - 1)\theta' + 2x = n\theta$，即 $\theta - \theta' = \frac{2x-\theta}{n-1}$，因为 $2x - \theta \geq 0$，所以 $\theta - \theta' \geq 0$，即 $\theta' \leq \theta$，原图的平均度不会增加。
2. 不成立，对一个完全图，原图所有顶点的度数都等于 $n - 1$，删掉一个顶点后，其余顶点的度数都变成 $n - 2$，平均度减小。

Problem 9

令 G 是一个顶点平均度为 a 的无自环的无向图。

1. 证明：G 删去一个顶点 x 后平均度至少为 a，当且仅当 $deg(x) \leq \frac{a}{2}$；
2. 证明或反驳：如果 $a > 0$，那么 G 有一个最小度大于 $\frac{a}{2}$ 的子图。

答案： 记图 G 有 $\mathcal{V}$ 个顶点，$\mathcal{E}$ 条边。

1. 记删顶点 x 得到的新图 $G' = (V', E')$，由题意有 $|V'| = \mathcal{V} - 1, |E'| = \mathcal{E} - deg(x)$。
   解
   $$\frac{2|E'|}{|V'|} = \frac{2\left(\mathcal{E} - \deg(x)\right)}{\mathcal{V} - 1} \geq a$$
   得 $deg(x) \leq \mathcal{E} - \frac{a}{2}(\mathcal{V} - 1)$，将 $a = \frac{2\mathcal{E}}{\mathcal{V}}$ 代入得 $deg(x) \leq \mathcal{E}(1 - \frac{\mathcal{V}-1}{\mathcal{V}}) = \frac{a}{2}$

2. 显然 $\mathcal{V} > 1$(否则 $a = 0$)，对 $\mathcal{V}$ 做归纳

Basis. $\mathcal{V} = 2$ 时，只有 K_2 能使 $a = 1 > 0$，取 K_2 本身即可；

I.H. $\mathcal{V} = n$ 时题设成立；

I.S. $\mathcal{V} = n + 1$ 时，若 $\delta(G) \leq \frac{a}{2}$，考虑 G 删去一个最小度顶点得到的子图 G'，则由 1) 知 G' 的顶点平均度至少为 a，由归纳假设知存在一个 G' 的子图 G'' 最小度大于 $\frac{a}{2}$，G'' 即为所求；否则 $\delta(G) > \frac{a}{2}$，G 本身即为满足题设要求的子图。

Problem 10

简单图 G 有 n 个顶点且不包含三角形 K_3 作为子图，证明：其边数 m 必满足 $m \leq \frac{n^2}{4}$。
答案： 取一个度最大的顶点 u，$N(u)$ 中顶点两两之间无边（否则构成 K_3），顶点的度不会超过 $n - \Delta(G)$。于是

$$\begin{aligned}\sum_{v \in V(G)} deg(v) =& 1 \cdot \Delta(G) + \sum_{v \in N(u)} deg(v) + \sum_{v \in (V(G) \setminus N(u))} deg(v) \\ \leq& \Delta(G) + \Delta(G)(n - \Delta(G)) + (n - \Delta(G) - 1)\Delta(G) \\ =& 2(n - \Delta(G))\Delta(G) \\ \leq& 2 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

于是 $m = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} deg(v) \leq \frac{n^2}{4}$。