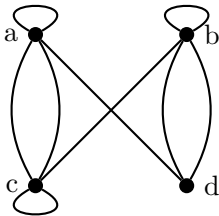


# 离散数学 (2024) 作业 22 - 图的连通性

离散数学教学组

## Problem 1

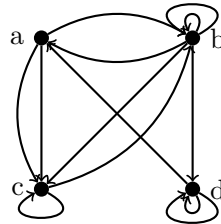
用邻接矩阵表示左侧的图；并画出右侧邻接矩阵表示的有向图。



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

答案:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



## Problem 2

具有 2, 3, 4 个顶点的非同构的简单图分别有多少个?

答案: 2, 4, 11

## Problem 3

具有 4 个顶点的非同构简单图中, 有多少个

1. 包含  $C_3$ ?
2. 无孤立点?

答案:

1. 4
2. 7

## Problem 4

$G$  的围长是指  $G$  中最短回路的长；若  $G$  没有回路，则定义  $G$  的围长为无穷大。证明：围长为 4 的  $k$ -正则图至少有  $2k$  个顶点，且恰有  $2k$  个顶点的这样的图（在同构意义下）只有一个。

**答案：** 设  $u, v$  是  $G$  中相邻顶点， $N(u)$  和  $N(v)$  分别代表  $u$  和  $v$  的邻居构成的集合，则  $N(u)$  和  $N(v)$  不相交，否则  $G$  的围长为 3，产生矛盾。因此， $G$  至少有  $2(k-1)+2$  个顶点。

因为是  $k$ -正则图，每个顶点应该连接  $k$  个顶点，易知  $N(u)$  和  $N(v)$  内部不能相连，否则围长为 3，因此将  $N(u) \setminus \{v\}$  中的  $k-1$  个顶点分别和  $N(v) \setminus \{u\}$  中的  $k-1$  个顶点相连，这样每个顶点的度数都为  $k$ ，即可得到  $2k$  个顶点的围长为 4 的图，此时  $G - \{u, v\}$  是一个完全二部图，这样的图（在同构意义下）只有一个，加上  $\{u, v\}$  后在同构意义下依然唯一。

## Problem 5

证明：简单图  $G$  是二部图，当且仅当  $G$  没有包含奇数条边的简单回路。

「提示：一个图  $G = (V, E)$  被称为二部图，如果顶点集  $V$  可以被划分为两个不相交的子集  $V_1$  和  $V_2$ ，并且图中的每条边都连接两个来自不同子集的顶点。」

**答案：**

- 必要性：设  $G$  是偶图，设两个不相交的非空顶点集合为  $A$  和  $B$ 。若  $G$  存在回路  $c$ ，设  $c$  的起点属于  $A$ ，则从  $A$  出发时通路在奇数步后停在  $B$ ，在偶数步后停在  $A$ 。所以回路  $c$  的长度必为偶数。
- 充分性：若所有的回路长度都为偶数，要证图  $G$  是偶图。假设  $G$  是连通图，若不连通，则每次仅考虑一个连通分支。设  $v$  是图的一个顶点，设  $A$  是有从  $v$  出发奇数长度通路的所有顶点的集合，设  $B$  是有从  $v$  出发偶数长度通路的所有顶点的集合。由于这个分支是连通的，所以每个顶点都属于  $A$  或  $B$ 。没有顶点同时属于  $A$  和  $B$ ，若假设存在一个顶点  $v'$  同时属于  $A$  和  $B$ ，则从  $v$  到  $v'$  的奇长度通路，加上  $v'$  到  $v$  的偶长度通路，就得到一个奇回路，与前提矛盾。因此，顶点集合划分成两个部分。要证每条边的端点都在不同的部分中，假设  $(x, y)$  是一条边， $x \in A$ ，则从  $v$  到  $x$  的奇长度通路加上  $(x, y)$  就产生从  $v$  到  $y$  的偶长度通路，所以  $y \in B$ 。同理可证  $x \in B$  的情况。综上所述可得  $G$  是二部图。

## Problem 6

证明： $\kappa(G) = 1$  的  $r$ -正则图  $G$ ，若  $r > 1$ ，总满足  $\lambda(G) \leq \frac{r}{2}$ 。

**答案：** 考虑  $G$  的割点  $v$ ， $G - v$  至少有 2 个连通分量  $C_1, C_2$ ，其中至少一个与  $v$  相连的边数量不超过  $\frac{r}{2}$ ，这些边构成  $G$  的一个割边集，于是  $\lambda(G) \leq \frac{r}{2}$ 。

## Problem 7

证明： $G$  是 2-边连通图当且仅当  $G$  中任意两个顶点之间至少有两条不含公共边的通路。

「提示：证明过程中可使用 Whitney 定理，但需注意和本题的差异。」

**答案：**

- 若  $G$  中任意两顶点都至少有两边不重道路连接，显然对任意  $e \in E(G)$ ， $G - e$  是连通的，故  $G$  为 2-边连通的。

- 若  $G$  是 2-边连通的, 则  $G$  无割边。把  $G$  分解成块, 块与块之间以  $G$  中的割点互相连接。设  $u, v$  是  $G$  中任意两顶点。分两种情况:
  - 若  $u, v$  同属于  $G$  的某一块, 则由 Whitney 定理知, 结论成立。
  - 若  $u, v$  属于  $G$  的不同块, 设  $B_1, B_2, \dots, B_n$  是  $G$  的块, 其中块  $B_i$  与块  $B_{i+1}$  以割点  $V_i$  相互连接且  $|v(B_i)| \geq 3$ 。不妨设  $u \in B_1, v \in B_n$ 。由之前的证明可知, 在  $B_1$  中存在两条由  $u$  到  $v_1$  的不相交的路  $P_{11}, P_{12}$ ; 同理在  $B_i$  中存在两条由  $v_{i-1}$  到  $v_i$  的不相交的路  $P_{i1}, P_{i2}$ ; 在  $B_n$  中存在两条由  $v_{n-1}$  到  $v$  的不相交的路  $P_{n1}, P_{n2}$ 。于是我们找到两条  $u$  到  $v$  的边不相交的路:  $P_{11} \cup P_{21} \cup \dots \cup P_{n1}$  和  $P_{12} \cup P_{22} \cup \dots \cup P_{n2}$ 。

## Problem 8

证明: 若  $G$  是  $k$ -连通图, 从  $G$  中任意删除  $k$  条边, 最多得到 2 个连通分支。

**答案:** 证明: 首先, 假设图的边连通度为  $r$ , 有  $r \geq k$ ; 其次, 易知一条边最多连接两个连通分支, 任意去掉一条边, 只可能使连通分支数增加 0 个或者 1 个。考虑到边连通度  $r \geq k$ , 因此删除任意  $k-1$  条边后依然连通, 即 1 个连通分支。删除第  $k$  条边之后, 原图最多为 2 个连通分支。

## Problem 9

证明: 设  $G$  是一个简单图,  $k$  是一个自然数, 若  $\delta(G) \geq \frac{v+k-2}{2}$ , 则  $G$  是  $k$ -连通的。

**答案:** 用反证法。假如  $G$  不是  $k$ -连通的, 则  $G$  的连通  $\kappa < k$ , 即存在  $G$  的点割集  $S$ , 使得  $|S| < k$ , 且  $G-S$  不连通。因  $G-S$  有  $v-|S|$  个顶点, 且至少有两个连通分支, 故必有  $G-S$  的某个连通分支  $G'$  含有不超过  $\frac{v-|S|}{2}$  个顶点。注意到  $G'$  中任一个顶点只可能与  $G'$  内的点及  $S$  中的点相邻, 因而其在  $G$  中的顶点度  $\leq \frac{v-|S|}{2} - 1 + |S| = \frac{v+|S|-2}{2}$ 。结合  $|S| < k$ , 这意味着  $\delta(G) \leq \frac{v+|S|-2}{2} < \frac{v+k-2}{2}$ , 与定理条件矛盾。证毕。

## Problem 10

设图  $G$  顶点数为  $n$ , 边数为  $m$ , 试证明: 若  $m > C_{n-1}^2$ , 则  $G$  为连通图。

**答案:** 证明: 假设  $G$  不连通, 有 2 个或以上连通分支。设其中一个连通分支中顶点数为  $n_1 \geq 1$ , 其余顶点数为  $n_2 \geq 1, n_1 + n_2 = n, m \leq C_{n_1}^2 + C_{n_2}^2$ 。可以验证:  $C_{n_1}^2 + C_{n_2}^2 \leq C_{n-1}^2$ , 即  $n_1(n_1-1) + n_2(n_2-1) \leq (n-1)(n-2)$ , 验证中用到关键等式:  $0 \leq (n_1-1)(n_2-1)$ , 因此  $m \leq C_{n-1}^2$ , 矛盾。所以  $G$  为连通图。