离散数学（2024）作业 10 - 排列组合

离散数学教学组

Problem 1

求出下面每个值：

1. $P(6,2)$
2. $P(8,1)$
3. $C(8,0)$
4. $C(8,4)$

答案：

1. 30
2. 8
3. 1
4. 70

Problem 2

多少个 12 位比特串包含：

1. 恰好 3 个 1
2. 至多 3 个 1
3. 至少 3 个 1
4. 0 的个数和 1 的个数相等

答案：

1. $\mathcal{C}(12,3) = 220$
2. $\mathcal{C}(12,3) + \mathcal{C}(12,2) + \mathcal{C}(12,1) + \mathcal{C}(12,0) = 220 + 66 + 12 + 1 = 299$
3. $4096 - (66 + 12 + 1) = 4017$
4. $\mathcal{C}(12,6) = 924$

Problem 3

有多少种方式使得 10 个女士和 6 个男士站成一排并且没有两个男士彼此相邻?
答案: 首先排列 10 位女士,有 $\mathcal{P}(10,10)$ 种方式。接下来在 11 个位置中选择 6 个,排列 6 位男士站立,有 $\mathcal{P}(11,6)$ 种方式完成。因此答案为 $\mathcal{P}(10,10)\cdot\mathcal{P}(11,6)=10!\cdot 11!/5!$。

Problem 4

长度为 12 且不包含"11"子串的二进制串有多少个?
答案: 由题知二进制串最多包含 6 个 11, 且包含 k 个 11 的二进制串的集合 A_k 的元素个数为 $|A_k| = \mathcal{C}(13-k,13-2k)$, 则结果为

$$\mathcal{C}(13,13)+\mathcal{C}(12,11)+\mathcal{C}(11,9)+\mathcal{C}(10,7)+\mathcal{C}(9,5)+\mathcal{C}(8,3)+\mathcal{C}(7,1)=377$$

Problem 5

将 20 个相同的小球放入 3 个带有编号的盒子中,第一个盒子至少有 2 个球且最后一个盒子不超过 10 个球,一共有多少种放置的方法?
答案: 设三个盒子分别为 A, B, C, 且 a, b, c 为对应盒子中的小球数量。因为 $b=20-a-c$,所以需满足如下条件: $2\le a\le 20$, $0\le c\le 10$, $a+c\le 20$。

- 当 $2\le a\le 10$ 且 $0\le c\le 10$ 时, $a+c\le 20$ 可以被满足。这种情况下有 $9*11=99$ 种放置方法。
- 当 $a=11$ 且 $c\in\{0,..,9\}$ 时, $a+c\le 20$ 可以被满足。
- 当 $a=12$ 且 $c\in\{0,..,8\}$ 时, $a+c\le 20$ 可以被满足。

以此类推,最终结果为 $99+10+9+...+2+1=154$。

Problem 6

计算 $(x+2y-4z)^6$ 的展开式中, x^3y^2z 项的系数。
答案: $\frac{6!}{3!2!1!}\times 1^3\times 2^2\times(-4)=-960$

Problem 7

设 n 为任一正整数,证明: $C(2n,n+1)+C(2n,n)=\frac{1}{2}C(2n+2,n+1)$。
答案:

$$\begin{aligned}C(2n,n+1)+C(2n,n)&=C(2n+1,n+1)\\&=\frac{1}{2}[C(2n+1,n+1)+C(2n+1,n+1)]\\&=\frac{1}{2}[C(2n+1,n+1)+C(2n+1,n)]\\&=\frac{1}{2}C(2n+2,n+1)\end{aligned}$$

Problem 8

如果有 8 种不同的课程可供选择，每个学生必须选择 5 门课程来完成他/她的学习计划。那么最少有多少名学生，使得不管他们如何选择，至少有 10 名学生的学习计划相同？

答案： 由题可知一共有 $\mathcal{C}(8,5)=56$ 种不同的学习计划，如果有 n 名学生，那么根据鸽笼原理至少有 $\lceil n/56 \rceil$ 名学生学习计划相同，则 n 满足 $\lceil n/56 \rceil \geq 10$，因此 $n = 9 \times 56 + 1 = 505$。

Problem 9

使用鸽笼原理证明任何的有理数可以表示为一个整数加上一个有限或循环小数。

答案： 将有理数 $\frac{m}{n}$ 看作是在做除法，n 为除数，那么余数有 $0, 1, 2, \ldots, n-1$ 这 n 种可能性。

- 如果除尽了，则该有理数可以表示为一个整数加上一个有限小数；
- 如果除不尽，则余数有无穷多个。根据鸽巢原理，至少会有两次得到的余数相同。而得到相同的余数后，后面的步骤仍然是除 n，因此该有理数可以表示为一个整数加上一个循环小数。

综上得证。

Problem 10

证明：任一整数是平方数的必要条件是它有奇数个正因子。

答案： 设 $n^2 = p_1^{a_1} \ldots p_t^{a_t}$，其中 $a_1, \ldots, a_t$ 为偶数。显然，n^2 的正因子 m 必可表示为 $m = p_1^{b_1} \ldots p_t^{b_t}$，其中 $b_i \in \{0, 1, \ldots, a_i\}$。因此总共有 $\prod_{i=1}^{t}(a_i+1)$ 中选择，又因为 a_i 为偶数，因此得证。