1. 用谓词逻辑演算描述出以下推理过程：

   "没有一个女学生没有通过离散数学考试，每个足够认真而又聪明的学生都能通过离散数学考试，学生小明很聪明，但是没有通过离散数学考试，所以小明一定不是女生且不够认真。"

   解：令代表学生 x 是女生，代表 x 通过了离散数学考试，代表学生 x 足够认真，代表学生 x 聪明，a 表示学生小明， 则题中前提可表示为

   前提 1:，

   前提 2:，

   前提 3:，

   结论可表示为：

   推理过程如下

   前提 1 的逻辑等价

   (1)的全称例示

   前提 2 的全称例示

   前提 3

   (3)(4)拒取式

   (5)的逻辑等价

   前提 3

   (6)(7)消解

   (2)(4)的消解

   (8)(9)的合取引入

2. 令为上的一个关系。试证明：是一个等价关系当且仅当

   存在一个集合及一个函数使得.

   证明：

   必要性：若是一个等价关系，可令，定义 为 ,于是有，即 .

   充分性：若存在一个集合及一个函数使得，现证明是自反的、对称的、传递的：

   自反性：对于任意的，因为，所以;

   对称性：对于任意的，若，于是所以;

   传递性：对于任意的，若且，于是，所以;

   证毕。

3. Fermat 素数为 .

   a) 试用数学归纳法证明: .

   b) 试基于上述结论证明: 对于任意两个不同的自然数, 总有 .

a）证明：

基础步骤：；

归纳步骤：假设该式对于成立，现证明其对于成立。

证毕。

c） 证明：由于，有；又根据结论 a)，有，于是除余 2；根据 Euclid 辗转相除法，有

证毕。

4. 某人玩一个掷一对骰子的游戏，其玩法如下：初始得分为 0。每一轮掷两个骰子，计算点数之乘积，若大于 20，则游戏结束；否则把这轮所得的积加入得分。问：
   a) 游戏结束时得分为 0 的概率是多少?
   b) 游戏第一轮得分的期望值是多少?
   c) 游戏结束时得分的期望值是多少?

解：a）得分为 0 意味着第一轮就掷出点数之乘积大于 20 的情况。所有 36 种结构中出现(4,6), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5)，和（6,6)这 6 种结果才会积大于 20；其概率为.

b）首先计算第一轮的得分期望值，其中

计算该值为 ；

于是第一轮的得分期望为 272/36=68/9；

c）令所求之游戏结束时得分的期望值为；注意到每一轮之后，若游戏未结束，以后得分的期望值也为，于是有

可解得 。

5. 群论问题：
   a) 试证明有理数群不是循环群。
   b) 令为 Klein 四元群。请给出的各个陪集。

a） 证明：假设其为循环群，记其生成元素为，，但不存在 使得 （注意这里是该加法群的幂次运算，即个做运算，即；不是有理数幂运算)。

证毕。

b） 解：该循环子群，其各陪集为 和；

(可注意到：该群是交换群；=; ;)

6. 假设是连通图中的一条最长的初级通路（点不重复）。证明的端点不是图的割点。(10 分）

证明： 反证法，假设是的端点，而是图的割点。(2 分）

删除顶点之后，产生 2 个或者多个连通分支，因为是的端点，所以，中顶点除了之外均来自某一个连通分支。(4)

到其他连通分支有边相连，从而有更长的初级通路， 这与“是连通图中的一条最长的初级通路”矛盾。(4 分）

得证。

//如果图是平凡图，结论显然。(如果有这样的陈述，可以酌情给 1 分）

的端点不能有边连接到不在中的顶点，否则可将通过这条边延长到，这与是最长初级通路矛盾。(4 分）

考虑到是的端点，删除该端点不影响中其余顶点间的连通性，而又没有其它相邻节点，可知它不是割点。(6 分）

证毕。

7. 令 为一正整数序列，且 。(12 分）
   a) 若恰好是某个树的各个顶点的度数序列，试证明

   b) 反过来，试证明：若满足上式，则存在一个树，使得恰好是的各个顶点的度数序列。
   c) 假设满足上式。试证明：可将中各整数划分为两个序列,使得中正整数之和与中正整数之和相等。

a）证明：树的边的数目为。由握手定理可知。(4 分）
证毕。

b）证明： 对进行归纳。(1 分）

基础步骤：当时该命题显然成立。(1 分）

递归步骤：假设对于时该命题成立。现证明该命题对时也成立。中必存在（否则）;亦必有（否则）。考虑，易见满足归纳假设条件，即存在一颗树的各个顶点的度数序列恰是。今在中添加一个节点，并将其连接到对应于的

节点上。易见恰好是这个新的树的顶点的度数序列。
（2 分）

证毕。

c）证明：根据 b），存在一个树，使得恰好是的各个顶点的度数序列。
（2 分）
该树可依据各顶点距离某一给定顶点的距离的奇偶性划分为二部图，于是其两部分中各顶点的度数序列即对应于所求的。
（2 分）

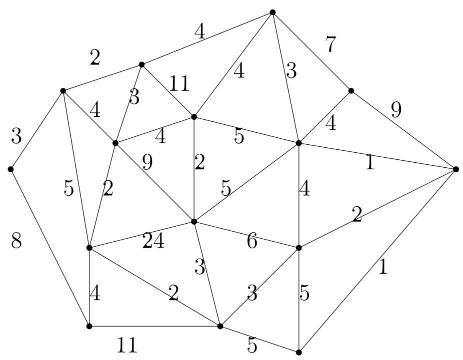
证毕。

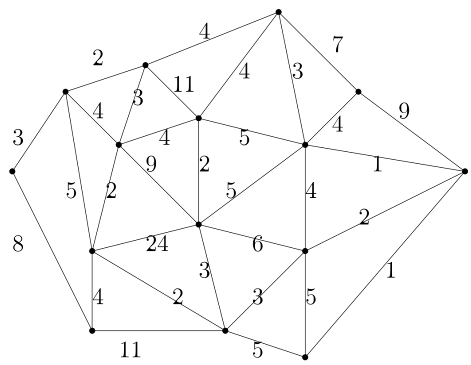
8. **假设是连通图中的一条最长的初级通路（点不重复）。证明的端点不是图的割点。**

证明：的端点不能有边连接到不在中的顶点，否则可将这通过条边延长到，这与是最长初级通路矛盾。
考虑到是的端点，删除该端点不影响中其余顶点间的连通性，而又没有其它相邻节点，可知它不是割点。

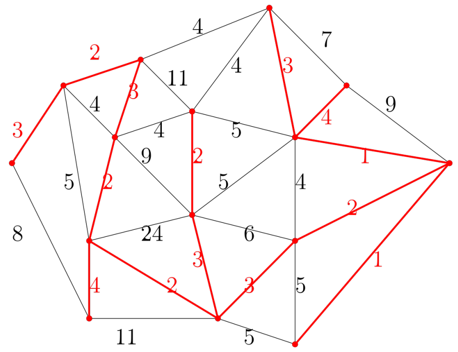
证毕。

9. **画出下图的最小生成树，并给出其权重（左图可作为草稿，答案画在右图上，把所选的边描粗）。**





解：一个可能的最小生成树如图所示。权重为 35.



10. 今有布尔代数，试证明对于任意的,以下四个命题等价：

a)

b)

c)

d)

证明：

a)➔b): ;

b)➔c): ;

c)➔d):

d)➔a):

证毕。