

# 离散数学期中考试备选题(2016年4月)

1. 【10'】用谓词逻辑表述以下命题，并给出其逻辑推理过程。
  - (1) 硬的饼都不好吃，不硬的饼都是甜的，所以好吃的饼都是甜的。
  - (2) 上了艺术课的高中生都很酷，有的聪明的高中生并不酷，所以有的聪明的高中生并没上艺术课。
2. 【10'】令  $S, T$  和  $U$  为集合。试证明：
3. 【15'】定义实数集合上的“算术三角函数”集合如下：
  - (1) 恒等函数  $y=x$  是算术三角函数；任意常函数（也就是常数）是算术三角函数；正弦函数  $\sin(x)$  是算术三角函数；
  - (2) 若  $f$  和  $g$  是算术三角函数，则  $f+g, f-g$  都是算术三角函数；
  - (3) 没有其他的算术三角函数。试以结构归纳法证明：若是算术三角函数则其导数也是算术三角函数。
4. 【10'】 $A$  和  $B$  是非空集合， $f: A \rightarrow B$  是一个函数。试证明：若  $f$  是单射，则  $A$  与  $B$  等势。
5. 【10'】令  $S$  为所有仅由数字 1、2 或 3 构成的无限长的序列的集合。证明该集合不可数。
6. 【10'】试证明：若  $p$  是大于 3 的素数，则是  $24$  的倍数。
7. 【15'】 $A$  和  $B$  是两个非空集合。对任一个给定的函数  $f: A \rightarrow B$ ，可定义  $A$  上的一个关系如下：
  - a) 试证明：关系  $R_f$  是等价关系。
  - b) 对于非空集合  $A$  上的任意一个等价关系  $R$ ，试定义一个函数  $f$  使得  $R = R_f$ 。（是  $A$  的幂集。）
8. 【20'】定义：偏序集是完全格（complete lattice）当且仅当  $L$  的任何一个子集都有其最小上界（记为  $\bigvee$ ）和最大下界（记为  $\bigwedge$ ）。  
定义：从偏序集  $L$  到偏序集  $M$  的函数是一个单调函数当且仅当  $f$  满足：
  - a) 请证明：若是非空有限集合，则格必是完全格。
  - b) 请举出一个非空的偏序格但不是完全格的例子。

- c) 试证明 (Tarski-Knaster 定理) :  
令  $L$  是一个完全格,  $f$  是一个单调函数, 则有不动点, 即存在一个  $x$  使得  $x = f(x)$ 。  
(提示: 令  $S$  证明  $f$  是一个不动点)
- d) 试证明上述提示中的不动点是的最小不动点。