考试科目名称　　离散数学（A卷）

考试方式：闭 卷　考试日期 2015 年 6 月 26 日 教师________

系（专业）　计算机科学与技术系　　年级_____ 班级________

学号__________________ 姓名________________ 成绩________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九
分 数									

得 分	

一、（本题满分 10 分）

所有整系数一元二次方程的根的集合是否可数？请证明你的结论.

答： 所有整系数一元二次方程的根的集合**是可数的**。(4 分)

这样的方程最多有 2 个根，只需证明整系数一元二次方程最多有可数个。(2 分)

一个整系数一元二次方程可以表示成 ，其中 均是整数。这样，对应到 ZZZ 中的元素（a，b，c）。这个对应是**单射**。(2 分)

由于 Z 是可数的，不难证明 ZZZ 是可数的。(1 分)

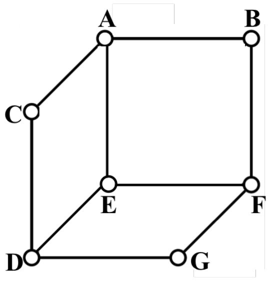
因此，整系数一元二次方程最多有可数个。(1 分)

得 分	

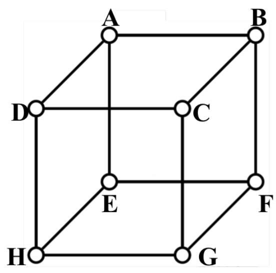
二、（本题满分 10 分）

以下两图是否为哈密尔顿图？若是，请给出哈密尔顿回路；若不是，请说明理由.

答：



(图 1)



(图 2)

图 1 不是哈密尔顿图，因为删除 A, D, F 三个顶点，形成 4 个连通分支。(3+2 分)

图 1 是哈密尔顿图，一条哈密尔顿回路：A，B，C，G，F，E，H，D，A.　(3+2 分)

得 分	

三、（本题满分 10 分）

设阶图的边数为，试证明：若，则为连通图.

证明. 假设不连通，有 2 个或以上连通分支。 （2 分）

设其中一个连通分支中顶点数为，其余顶点数为. =

\+ （4 分）

可以验证：+即 n1(n1-1)+n2(n2-1) (n-1)(n-2) （4 分）

验证中用到关键等式： (n1-1)(n2-1)

因此 . 矛盾. 所以 为连通图.

得 分	

四、（本题满分 12 分）

假设集合非空，集合至少有两个元素. 令，即所有从到的函数组成的集合. 试证明：不存在从到的满射.

证明（方法一）.

因为，所以 （4 分）

因为 ，所以 （4 分）

所以不存在从到 的满射。 （4 分）

证明（方法二）. //难度大

使用反证法来证明。假设 G 是一个从到 的满射。(2 分)

因为集合至少有两个元素，任取中 2 个不相等的元素，记为 a 和 b。

那么，定义如下：

若

若 （4 分）

因为 G 是满的，所以存在，使得 G()=h。 （2 分）

若 G()() =，则 h()

若 G()()，则 h() （2 分）

无论哪种情形，均有 h() （2 分）

这与 G()=h 矛盾。因此，不存在从到 的满射。

得 分	

五、（本题满分 12 分）

给定一个非空集合及定义在上的偏序关系，试证明：存在某个集合的某些子集

（*i.e.* ），使得偏序集同构于.

证明：

证明. 设（, ）是一个偏序集。

对 x，f(x)={ y| yx}是的一个子集。(2 分)

以下证明 iff (2 分)

不难证明必要性和充分性 (4+4 分)

得 分	

六、（本题满分 12 分）

对于任意一个十进制数，其各位数字之和与其本身模 9 同余。例如：

但对于十六进制表示则不然，例如：

⑴ 十六进制下，对于哪些大于 1 的正整数，满足任意数各位相加之和与该数模同余?

⑵ 将你的结论推广到任意进制数，并给出证明.

解.

a) 若 16=1 (mod k)，则 (mod k)

从而 (mod k)

因此，于 k=3, 5, 15 满足要求。 （6 分）

b) 对于 b-1 的不等于 1 的正因子 k，*b* 进制数的各位相加之和与该数模 *k* 同余。

（2 分）

证明要点如下：

b=1 (mod k) （2 分）

(mod k) （2 分）

得 分	

七、（本题满分 12 分）

定义(正规子群)：群的子群称为**正规子群**当且仅当.

定义（同态映射的核）：群同态于群当且仅当存在函数使,这里称为**同态映射**.设的单位元为，称的子集　为上述同态映射的**核**.

⑴ 试证明：群的子群是正规子群当且仅当；

⑵ 试证明：从到的同态映射的核是的一个正规子群.

证明：

a).必要性：

由于是的正规子群，对于任意的，有,于是必有使得，于是。 (3 分)

充分性：

先证明：对于任意的，我们有，令，有，于是。类似可证。(3 分)

证毕。

b). 首先，非空，因为我们知道的单位元必在其中；

其次证明它是的一个子群：对于任意的, ;

于是，即。

(3 分)

最后证明它是正规的：对于任意的，我们有，故

证毕。 (3 分)

得 分	

八、（本题满分 12 分）

⑴ 设为某带权无向连通图，假设包含回路. 试证明：对于中的任意一个回路，若其中有一条权重**严格**最大的边（即其权重大于该回路上任何一条其他的边），则该边不在任何一个最小生成树中.

⑵ 考虑某种"聚类"问题.假设有个对象，表示为个顶点；对象之间有不同的距离，表示为顶点之间边的权重.我们希望把距离较近的对象归为同一类，而使不同类的对象之间距离较远.这有时称为"聚类".可用计算最小生成树的 Kruskal 算法来做聚类，但只运行其前步（即选出条边），而不必一定要将其运行结束.试问：

① 若只考虑选出的边，此时整个图有几个连通分支（即几个类）?

【注：在第一步开始之前，选出的图是个孤立点.】

② 对于这种"聚类"，我们可以保证哪些性质?

a).证明：

记这个回路为，其中权重**严格**最大的边为。假设在某个最小生成树中。考虑从中删除，必包含两个连通分支，但在中回路内必存在另外一条边连接这两个连通分支，于是这两个连通分支加上构成一个生成树。

。于是，与是最小生成树矛盾。(6 分)

b). 解：

(1) 每一步加一条边，且不会与已选边构成回路，则必连通两个分支，即分支数减 1。故运行其前步后，有个连通分支。(3 分)

(2) 若第步所选边权重为，则所有 Kruskal 算法未选择的边要么是会与已选边构成回路，要么权重不低于。故每个聚类内的已选边权重不高于，聚类之间的边的权重不低于。 (3 分)

得 分	

九、（本题满分 10 分）

所谓命题逻辑公式中的一个"**文字**"（*literal*）是指一个命题变元或者其否定. 一个"**子句**"（*k–clause*）是个文字的析取，其中每个变元都不重复出现。例如：是一个子句，而则不是子句（因为重复出现了）. 令为个–子句组成的集合，这些子句中的变元取自个变元的集合，满足. 注意不同子句涉及的变元可以相同也可以不同. 先对这个变元各自独立地、随机等可能地赋值以真或假. 现在我们逐一考察中子句的真值.

⑴ 最后一个–子句取值为真的概率是多少?

⑵ 中取值为真的子句的个数的期望值是多少?

⑶ 用上一步的结论证明：若则是**可满足**的（即：存在某种变元赋值方案，使得中所有子句取值都为真）.

解：a). 这里每个-子句取值为真的概率是一样的。对于中任一个-子句中的每个文字，不论是肯定或否定，其为假的概率是，且由于每个变元都不重复出现，它们相互独立；整个子句为假的概率就是每个文字均为假的概率，即，于是该子句为真的概率是。 **(3 分)**

b). 令随机变量 ，则

令为中取值为真的子句的个数，则

注意这里各个无需相互独立。 **(4 分)**

c). 证明：若则中取值为真的子句的个数的期望值

而我们知道中子句的个数只有个，若不是可满足的，则其中取值为真的子句最多为个，根据期望值的定义，矛盾。故是可满足的。证毕。 **(3 分)**

草　稿　纸

草　稿　纸