

离散数学（2024）作业 17 - 代数系统与半群

离散数学教学组

Problem 1

设 S 为 n 元集，问：

1. 集合 S 上可以定义多少个不同的二元运算？
2. 其中有多少个二元运算是可交换的？
3. 其中有多少个二元运算是幂等的？
4. 其中有多少个二元运算是既不可交换又不幂等的？

答案：

1. n^{n^2} 个
2. $n^{\frac{n(n+1)}{2}}$ 个
3. n^{n^2-n} 个
4. $n^{n^2} - n^{\frac{n(n+1)}{2}} - n^{n^2-n} + n^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 个

Problem 2

设 $A = \{a, b, c\}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, 能否确定 a, b, c 的值, 使得:

1. A 对普通加法封闭？
2. A 对普通乘法封闭？

答案：

1. 不能。假设存在满足题意的集合 A , 那么 A 中必然存在绝对值最大的非零元素, 不妨假设是 a , 那么 $|a+a| = 2|a| > |a|$ 比 A 中绝对值最大的元素还大, 因此不属于 A , 矛盾。故不存在满足题意的集合。
2. 能, $A = \{-1, 0, 1\}$ 。

Problem 3

判断下列集合对所给的二元运算是否封闭:

1. 整数集合 \mathbb{Z} 和普通的减法运算
2. 非零整数集合 \mathbb{Z}^* 和普通的除法运算
3. 全体 $n \times n$ 实数矩阵集合 $M_n(\mathbb{R})$ 和矩阵加法及乘法运算, 其中 $n \geq 2$
4. 全体 $n \times n$ 实可逆矩阵集合关于矩阵加法和乘法运算, 其中 $n \geq 2$
5. 正实数集合 \mathbb{R}^+ 和 \circ 运算, 其中 \circ 运算定义为:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, a \circ b = ab - a - b$$

6. $\mathbb{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, n \geq 2$, 其中 \circ 运算定义如下:

$$\forall a, b \in \mathbb{A}, a \circ b = b$$

7. $\mathbb{S} = \{0, 1\}$ 关于普通加法和乘法运算
8. $\mathbb{S} = \{x|x = 2^n, n \in \mathbb{Z}^+\}$ 关于普通的加法和乘法运算
9. $\mathbb{S} = \{x|x = \ln n, n \in \mathbb{Z}^+\}$ 关于普通的加法和乘法运算

答案:

1. 封闭
2. 不封闭
3. 加法, 乘法都封闭
4. 加法不封闭, 乘法封闭
5. 不封闭
6. 封闭
7. 加法不封闭, 乘法封闭
8. 加法不封闭, 乘法封闭
9. 加法封闭, 乘法不封闭

Problem 4

\mathbb{R} 为实数集, 定义以下 4 个函数 f_1, f_2, f_3, f_4 . $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 有

$$\begin{aligned} f_1((x, y)) &= x \cdot y, & f_2((x, y)) &= x - y, \\ f_3((x, y)) &= \max(x, y), & f_4((x, y)) &= |x - y|. \end{aligned}$$

1. 判断上述二元运算是否为可交换, 可结合, 幂等的;
2. 求上述二元运算的单位元, 零元以及每一个可逆元素的逆元;
3. 设 $A = \{a, b\}$, 试给出 A 上一个不可交换, 也不可结合的二元运算。

答案:

	可交换	可结合	幂等
1.	f_1	√	×
	f_2	×	×
	f_3	√	√
	f_4	√	×

	单位元	零元	逆元
2.	f_1	1	$1/x(x \neq 0)$
	f_2	×	×
	f_3	×	×
	f_4	×	×

3.	○	a	b
	a	b	b
	b	a	a

Problem 5

设 $S = \{1, 2, \dots, 10\}$, 问下面定义的运算能否与 S 构成代数系统 $(S, *)$? 如果能, 则说明 * 运算是否满足交换律、结合律, 并给出单位元和零元。

1. $x * y = \gcd(x, y)$, $\gcd(x, y)$ 是 x 与 y 的最大公约数;
2. $x * y = \text{lcm}(x, y)$, $\text{lcm}(x, y)$ 是 x 与 y 的最小公倍数;
3. $x * y = \max(x, y)$;
4. $x * y =$ 质数 p 的个数, 其中 $x \leq p \leq y$ 。

答案:

	代数系统	交换律	结合律	单位元	零元
1	√	√	√	×	1
2	×				
3	√	√	√	1	10
4	×				

Problem 6

设 A 是一个非空集合, 定义 $\circ: a \circ b = a, \forall a, b \in A$ 。试证明: (A, \circ) 是一个半群。

答案: 显然 \circ 是 A 上的二元运算。对于任意的 $a, b, c \in A$, 由

$$(a \circ b) \circ c = a \circ c = a, a \circ (b \circ c) = a \circ b = a,$$

恒有

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

即结合律成立, 所以 (A, \circ) 是一个半群。

Problem 7

设 $(S, *)$ 是一个半群, $a \in S$, 在 S 上定义 $\circ: x \circ y = x * a * y, \forall x, y \in S$ 。证明: (S, \circ) 也是一个半群。

答案: 显然 \circ 是 S 上的二元运算。对于 $\forall x, y, z \in S$, 有

$$(x \circ y) \circ z = (x \circ y) * a * z = (x * a * y) * a * z = (x * a) * y * a * z = x * a * (y \circ z) = x \circ y \circ z$$

因此 \circ 满足结合律, (S, \circ) 是一个半群。

Problem 8

设 $(S, *)$ 是一个半群, 如果对所有的 $a, b \in S$, 只要 $a \neq b$, 必有 $a * b \neq b * a$, 证明:

1. $\forall a \in S$, 有 $a * a = a$;
2. $\forall a, b \in S$, 有 $a * b * a = a$;
3. $\forall a, b, c \in S$, 有 $a * b * c = a * c$ 。

答案: 由题设, 对所有的 $a, b \in S$, 只要 $a * b = b * a$, 必有 $a = b$:

1. $\forall a \in S, (a * a) * a = a * (a * a)$, 故 $a * a = a$ 。
2. $\forall a, b \in S$, 由第一问有 $(a * b * a) * a = a * b * (a * a) = a * b * a, a * (a * b * a) = (a * a) * b * a = a * b * a$,
故 $(a * b * a) * a = a * (a * b * a)$, 因此 $a * b * a = a$ 。
3. $\forall a, b, c \in S$, 由第二问有 $(a * b * c) * (a * c) = a * b * (c * a * c) = a * b * c, (a * c) * (a * b * c) = (a * c * a) * b * c = a * b * c$,
故 $(a * b * c) * (a * c) = (a * c) = (a * b * c)$, 因此 $a * b * c = a * c$ 。

Problem 9

设代数系统 $(A, *)$ 是一个有限的半群, 证明 A 中必存在某个元素 a , 使得 $a * a = a$ 。

答案: 对任意 $x \in A$, $x^2, x^3, x^4, \dots, x^n, \dots$ 均在 A 中, 由于 A 是有限的, 存在 $i < j$, 使得 $x^i = x^j$, 则有 $x^j = x^{j-i} \cdot x^i$, 取 $p = j - i \geq 1$, 对任意的 $q > i$,

$$x^q = x^{q-i} \cdot x_i = x^{q-i} \cdot (x^p \cdot x^i) = x^p \cdot x^q$$

由于 $p \geq 1$, 存在 k , 使得 $kp \geq i$, 从而

$$x^{kp} = x^p \cdot x^{kp} = x^p \cdot (x^p \cdot x^{kp}) = x^{2p} \cdot x^{kp} = x^{2p} \cdot (x^p \cdot x^{kp}) = \cdots = x^{kp} \cdot x^{kp}$$

取 $a = x^{kp}$, 则有 $a \cdot a = a$ 。

Problem 10

设 (A, \oplus) 和 (B, \odot) 是两个代数系统, f 是 (A, \oplus) 到 (B, \odot) 的同构映射。证明:

1. 如果 \oplus 是可结合的, 那么 \odot 也是可结合的;
2. 如果 e 是 (A, \oplus) 的单位元, 那么 $f(e)$ 是 (B, \odot) 的单位元;
3. 如果在 (A, \oplus) 中 b 是 a 的逆元, 那么在 (B, \odot) 中 $f(a)$ 是 $f(b)$ 的逆元。

答案:

1. 如果 \oplus 是可结合的, 那么对于任意的 $x, y, z \in A$, 有 $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ 。由同构映射 f 的定义可知, f 保持运算, 即 $f(x \oplus y) = f(x) \odot f(y)$ 。因此, $(f(x) \odot f(y)) \odot f(z) = f(x) \odot (f(y) \odot f(z))$ 。根据结合律的定义, 这说明 \odot 也是可结合的。
2. 如果 e 是 (A, \oplus) 的单位元, 则对于任意的 $x \in A$, 有 $x \oplus e = e \oplus x = x$ 。根据同构映射 f 的定义, f 保持单位元, 即 $f(e)$ 是 (B, \odot) 的单位元。因此, 对于任意的 $y \in B$, 有 $y \odot f(e) = f(x \oplus e) \odot f(y) = f(x) \odot f(y) = f(x \oplus e) \odot f(y) = y \odot f(e)$ 。这说明 $f(e)$ 是 (B, \odot) 的单位元。
3. 如果在 (A, \oplus) 中 b 是 a 的逆元, 则 $b \oplus a = a \oplus b = e$, 其中 e 是 (A, \oplus) 的单位元。根据同构映射 f 的定义, f 保持逆元, 即对于任意的 $x \in A$, 有 $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ 。因此, $f(b) \odot f(a) = f(b \oplus a) = f(e) = e_B$, 其中 e_B 是 (B, \odot) 的单位元。同样地, $f(a) \odot f(b) = f(a \oplus b) = f(e) = e_B$ 。这说明 $f(a)$ 是 $f(b)$ 的逆元。