

# 离散数学 (2024) 作业 11 - 离散概率

离散数学教学组

## Problem 1

设  $A$  和  $B$  是两个事件,  $P(A) = 0.5$ ,  $P(B) = 0.3$  且  $P(A \cap B) = 0.1$ , 求

1.  $P(A | B)$
2.  $P(B | A)$
3.  $P(A | A \cup B)$
4.  $P(A | A \cap B)$
5.  $P(A \cap B | A \cup B)$

答案:

1.  $P(A | B) = 0.1/0.3 = \frac{1}{3}$
2.  $P(B | A) = 0.1/0.5 = \frac{1}{5}$
3.  $P(A | A \cup B) = 0.5/(0.5 + 0.3 - 0.1) = \frac{5}{7}$
4.  $P(A | A \cap B) = 1$
5.  $P(A \cap B | A \cup B) = 0.1/(0.5 + 0.3 - 0.1) = \frac{1}{7}$

## Problem 2

设  $E_1$  和  $E_2$  是两个事件, 如果  $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$ , 就称  $E_1$  和  $E_2$  是独立的。如果把一枚硬币被抛掷 3 次时所有可能的结果构成一个集合, 把这个集合的子集看做事件, 确定下面的每一对事件是否是独立的。

1.  $E_1$ : 第一次硬币头像向下;  $E_2$ : 第二次硬币头像向上。
2.  $E_1$ : 第一次硬币头像向下;  $E_2$ : 在连续 3 次中有 2 次但不是 3 次头像向上。
3.  $E_1$ : 第二次硬币头像向下;  $E_2$ : 在连续 3 次中有 2 次但不是 3 次头像向上。

答案: 所有可能的结果:  $(TTT), (TTH), (THT), (THH), (HTT), (HHT), (HTH), (HHH)$ 。

1.  $P(E_1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ ,  $P(E_2) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ ,  $P(E_1 \cap E_2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = P(E_1)P(E_2)$ 。所以  $E_1$  和  $E_2$  是独立事件。
2.  $P(E_1) = \frac{1}{2}$ ,  $P(E_2) = \frac{3}{8}$ ,  $P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{8} \neq P(E_1)P(E_2)$ 。所以  $E_1$  和  $E_2$  不是独立事件。
3.  $P(E_1) = \frac{1}{2}$ ,  $P(E_2) = \frac{3}{8}$ ,  $P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{8} \neq P(E_1)P(E_2)$ 。所以  $E_1$  和  $E_2$  不是独立事件。

### Problem 3

某工厂有甲乙丙三个车间，其产量比为 5 : 3 : 2，其良品率分别为 0.95, 0.96, 0.98。请问从三个车间的产品中任取一件，取到次品的概率。

答案：  $P = \sum_{i=1}^3 P(A_i)P(B_i|A_i) = 0.5 \times 0.05 + 0.3 \times 0.04 + 0.2 \times 0.02 = 0.041$

### Problem 4

设离散型随机变量  $X \in \{1, 2, 3\}, Y \in \{1, 2, 3\}$  的联合概率  $P(X \cap Y)$  分布为：

(X, Y)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)
Pr	1/6	1/9	1/18	1/3	a	b

若  $X, Y$  相互独立，求  $a, b$ 。

答案：  $a = \frac{2}{9}, b = \frac{1}{9}$

### Problem 5

假如某诊所对病人的检测中有 4% 的人感染了禽流感病毒。此外，假定对给定的禽流感血液检测（检测结果为阳性不等价于感染病毒，即感染了禽流感的人也可能呈阴性，没有感染的人也可能呈阳性），感染了禽流感的人中有 97% 的人禽流感检测呈阳性，没感染禽流感的人中有 2% 的人禽流感检测呈阳性。那么，下列概率是多少？

1. 禽流感检测呈阳性的人真的感染了禽流感病毒。
2. 禽流感检测呈阳性的人没有感染禽流感病毒。
3. 禽流感检测呈阴性的人感染了禽流感病毒。
4. 禽流感检测呈阴性的人没有感染禽流感病毒。

答案：记  $E$ ：检测呈阳性， $F$ ：感染了禽流感。

1.  $P(F | E) = \frac{P(E|F)*P(F)}{P(E|F)*P(F)+P(E|\bar{F})*P(\bar{F})} = \frac{0.97*0.04}{0.97*0.04+0.02*0.96} \approx 0.669$
2.  $P(\bar{F} | E) = \frac{P(E|\bar{F})*P(\bar{F})}{P(E|\bar{F})*P(\bar{F})+P(E|F)*P(F)} = \frac{0.02*0.96}{0.02*0.96+0.97*0.04} \approx 0.331$
3.  $P(F | \bar{E}) = \frac{P(\bar{E}|F)*P(F)}{P(\bar{E}|F)*P(F)+P(\bar{E}|\bar{F})*P(\bar{F})} = \frac{0.03*0.04}{0.03*0.04+0.98*0.96} \approx 0.0013$
4.  $P(\bar{F} | \bar{E}) = \frac{P(\bar{E}|\bar{F})*P(\bar{F})}{P(\bar{E}|\bar{F})*P(\bar{F})+P(\bar{E}|F)*P(F)} = \frac{0.98*0.96}{0.03*0.04+0.98*0.96} \approx 0.9987$

### Problem 6

当一个均匀的骰子被掷 10 次时，出现 6 点的次数的方差是多少？

答案：设随机变量  $X$  是骰子抛掷十次的结果，则  $V(x) = n(p-p^2) = 10 \times (\frac{1}{6} - (\frac{1}{6})^2) = \frac{25}{18}$ 。

## Problem 7

一个工业产品以 20 个产品为一个批次出货。由于测试每件产品确定是否有缺陷比较昂贵，因此制造商常常选择抽样测试。抽样测试是为了尽量减少运送给顾客的次品数量，要求从每批出货中抽取 5 件产品，并且如果观察到一个以上的次品则拒绝批次（如果批次被拒绝，其中的每件产品都会被检测）。如果批次中包含 4 件次品，它会被拒绝的概率是多少？样本大小为 5 的采样中次品的预期数量是多少？样本大小为 5 的采样中次品数量的方差是多少？

**答案：**设  $Y$  等于样本中次品的数量。那么  $N = 20, r = 4, n = 5$ 。如果  $Y = 2, 3, 4$ ，那么

$$\begin{aligned} P(\text{Reject}) &= P(Y \geq 2) \\ &= P(Y = 2) + P(Y = 3) + P(Y = 4) \\ &= 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) \\ &= 1 - \frac{C(4, 0) * C(16, 5)}{C(20, 5)} - \frac{C(4, 1) * C(16, 4)}{C(20, 5)} \\ &= 1 - 0.2817 - 0.4696 = 0.2487 \end{aligned} \quad (1)$$

样本大小为 5 的采样中次品的预期数量为  $\frac{5 \times 4}{20} = 1$ ，方差为  $5 \times \frac{4}{20} \times \frac{20-4}{20} \times \frac{20-5}{20-1} = 0.632$ （超几何分布）。

## Problem 8

俄罗斯同胞喜欢玩一个叫轮盘赌（*Russian roulette*）的游戏：假设左轮手枪有六个弹膛，仅在其中放入一发子弹。若有  $n$  ( $n \leq 6$ ) 个人轮流开枪，直到子弹射出为止，将子弹射出者获胜。试问：这个游戏是否公平，即是否每一个参与的玩家获胜概率相等？请回答  $n = 2, 3, 4, 5, 6$  的每个情形。

**答案：**当  $n = 2, 3, 6$  的时候，是公平的。当  $n = 4, 5$  的时候，将会有人出现少射一轮的情形，因此不公平。

## Problem 9

某人爱说谎，三句只能信两句。他扔了一个骰子，报告说是“四点”。问这个骰子真是四点的概率是多少？

**答案：**令骰子是四点为事件  $F$ ，某人报告四点为事件  $E$ 。则  $P(F) = \frac{1}{6}, P(\bar{F}) = \frac{5}{6}, P(E | F) = \frac{2}{3}, P(E | \bar{F}) = \frac{1}{15}$ 。

$$P(F | E) = \frac{P(E | F) \times P(F)}{P(E)} = \frac{2}{3}$$

## Problem 10

试构造适当的概率模型证明：从正整数中随机取 2 个数，它们互素的概率为  $\frac{6}{\pi^2}$ 。

「提示： $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ 。」

「提示：不大于自然数  $n$  且与  $n$  互素的正整数的个数为  $\phi(n) = n \cdot \prod_{p|n} (1 - \frac{1}{p})$ ，其中  $p|n$  指  $p$  整除  $n$ 。」

**答案：**

【方法一】

设  $p_1, p_2, p_3, \dots$  是从小到大排列的全体素数，即  $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$ 。从正整数中任意取一个数，它会被某一素数  $p_i$  整除的概率为  $\frac{1}{p_i}$ 。

从正整数中任意取两个数，它们同时都能被素数  $p_i$  整除，即它们有素数公因子  $p_i$  的概率为  $\frac{1}{p_i} \cdot \frac{1}{p_i} = \frac{1}{p_i^2}$ 。因

此，它们没有素数公因子  $p_i$  的概率为  $1 - \frac{1}{p_i^2}$ 。

所以，任取两个正整数，它们没有任何素数公因子，即这两个正整数互素的概率为：

$$\begin{aligned}
 \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_i^2}\right) &= \frac{1}{\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i^2}}} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{p_i^2} + \frac{1}{p_i^4} + \cdots\right)} \\
 &= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^4} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^4} + \cdots\right)\cdots} \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{2^2 \cdot 5^2} + \cdots} \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots} \\
 &= \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\frac{\pi^2}{6}} = \frac{6}{\pi^2}
 \end{aligned}$$

### 【方法二】

设任意两个自然数为  $a, b$ ，它们互素的概率为  $p$ ，设一自然数  $k$ ，则  $k$  为  $a, b$  的公因子的概率为  $\frac{1}{k^2}$ （即  $a, b$  同时是  $k$  的倍数的概率）。

令  $a = m \cdot k, b = n \cdot k$ ，则  $m, n$  互素的充分必要条件为： $k$  是  $a, b$  的最大公因子。由于在  $k$  是  $a, b$  的公因子的前提下， $m, n$  也等价于两个任意自然数，所以它们互素的概率也为  $p$ ，即在  $k$  是  $a, b$  公因子的前提下， $k$  是  $a, b$  最大公因子的概率为  $p$ 。由于  $k$  不是  $a, b$  公因子的情况下， $k$  是最大公因子的概率为零。所以  $k$  是  $a, b$  最大公因子的总概率为  $P(k \text{ 是 } a, b \text{ 公因子}) \cdot P(k \text{ 是 } a, b \text{ 最大公因子} | k \text{ 是 } a, b \text{ 公因子}) = \frac{p}{k^2}$ 。

对  $k$  取全部自然数，上述概率之和为必然概率 1。所以有  $1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p}{k^2}$ 。上式右端为  $p \cdot \frac{\pi^2}{6}$ ，所以求得  $p = \frac{6}{\pi^2}$ 。