离散数学（2024）作业 12 - 二元关系

离散数学教学组

Problem 1

设集合 $A = \{a, b, c\}$，判断以下结论是否正确。

1. $\emptyset \subseteq A \times A$
2. $\{a, c\} \in A$
3. $\{a, b\} \in A \times A$
4. $(c, c) \in A \times A$

答案：

1. 正确
2. 错误
3. 错误
4. 正确

Problem 2

设 R 是关系 $\{(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,1)\}$，$S$ 是关系 $\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,2)\}$，求 $S \circ R$。
答案： $S \circ R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

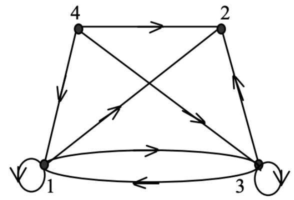
Problem 3

设 $X = \{1,2,3,4\}$，R 是 X 上的二元关系，$R = \{(1,1),(3,1),(1,3),(3,3),(3,2),(4,3),(4,1),(4,2),(1,2)\}$。

1. 画出 R 的关系图；
2. 写出 R 的关系矩阵；
3. 说明 R 是否是自反、反自反、对称、传递的。

答案：

1.



2. R 的关系矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. 由于对角线上不全为 1，R 不是自反的；由于对角线上存在非零元素，R 不是反自反的；由于矩阵不对称，R 不是对称的；经计算可得 $R^2 = R$，可知 R 是传递的。

Problem 4

设 A, B 为任意集合，证明：若 $A \times A = B \times B$，则 $A = B$。
答案： 任取 x，

$$x \in A \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in A \Leftrightarrow (x, x) \in A \times A \Leftrightarrow (x, x) \in B \times B \Leftrightarrow x \in B \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in B$$

Problem 5

证明 $A \times B \neq B \times A$ 除非 $A = B$，其中 A 和 B 均为非空集合。
答案： 证明：当 $A \neq B$ 时，有以下两种情形：

1. $\exists x \in A(x \notin B)$，则在 $A \times B$ 中第一个元素为 x 的序偶不存在于 $B \times A$ 中，因此 $A \times B \neq B \times A$。
2. $\exists x \in B(x \notin A)$，由对称性，$A \times B \neq B \times A$。

因此，当 $A \neq B$ 时，$A \times B \neq B \times A$。当且仅当 $A = B$ 时，$A \times B = A \times A = B \times A$。

Problem 6

1. 在集合 $\{a, b, c, d\}$ 上有多少个不同的关系？
2. 在集合 $\{a, b, c, d\}$ 上有多少个关系包含有序对 (a, a)？

答案：

1. 有 $2^{4^2} = 65536$ 个不同的关系。
2. 有 $2^{4^2-1} = 32768$ 个不同的关系包含有序对 (a, a)。

Problem 7

设 R 是从集合 A 到集合 B 的关系，从集合 B 到集合 A 的逆关系（记作 R^{-1}）是有序对集合 $\{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$；而补关系 $\bar{R}$ 是有序对集合 $\{(a,b) \mid (a,b) \notin R, a \in A, b \in B\}$。若 R 是正整数集合上的关系：$R = \{(a,b) \mid a \text{ 整除 } b\}$，求：

1. R^{-1}
2. $\bar{R}$

答案：

1. $R^{-1} = \{(a,b) \mid a \text{ 被 } b \text{ 整除}\}$
2. $\bar{R} = \{(a,b) \mid a \text{ 不能整除} b\}$

Problem 8

设 R_1 和 R_2 分别是整数集合上的“模 3 同余”和“模 4 同余”关系，即 $R_1 = \{(a,b) \mid a \equiv b \pmod 3\}$ 和 $R_2 = \{(a,b) \mid a \equiv b \pmod 4\}$。求

1. $R_1 \cup R_2$
2. $R_1 \cap R_2$
3. $R_1 - R_2$
4. $R_2 - R_1$
5. $R_1 \oplus R_2$

答案：

1. $R_1 \cup R_2 = \{(a,b) \mid (a \equiv b \pmod 3) \vee (a \equiv b \pmod 4)\}$
2. $R_1 \cap R_2 = \{(a,b) \mid a \equiv b \pmod{12}\}$
3. $R_1 - R_2 = \{(a,b) \mid (a \equiv b \pmod 3) \wedge \neg(a \equiv b \pmod 4)\}$
4. $R_2 - R_1 = \{(a,b) \mid (a \equiv b \pmod 4) \wedge \neg(a \equiv b \pmod 3)\}$
5. $R_1 \oplus R_2 = \{(a,b) \mid ((a \equiv b \pmod 3) \vee (a \equiv b \pmod 4)) \wedge \neg(a \equiv b \pmod{12})\}$

Problem 9

设 $A = \{1, 2, \ldots, 10\}$，定义 A 上的关系

$$R = \{(x,y) \mid x, y \in A \wedge x + y = 10\}$$

说明 R 具有哪些性质，并说明理由。

答案： 只有对称性。不具有自反性，例如 $(1,1) \notin R$。也不是反自反的，例如 $(5,5) \in R$。因为 $(1,9), (9,1)$ 都属于 R，因此也不是反对称的。也因此不是传递的（否则可得出 $(1,1) \in R$）。

Problem 10

设 R_1 和 R_2 是 A 上的关系，试证明：

1. $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$.
2. $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$.

答案：

1. 任取 (x, y),

$$\begin{aligned} &(x,y) \in (R_1 \cup R_2)^{-1} \Leftrightarrow (y,x) \in R_1 \cup R_2 \\ \Leftrightarrow &(y,x) \in R_1 \vee (y,x) \in R_2 \Leftrightarrow (x,y) \in R_1^{-1} \vee (x,y) \in R_2^{-1} \\ \Leftrightarrow &(x,y) \in R_1^{-1} \cup R_2^{-1} \end{aligned}$$

2. 任取 (x, y),

$$\begin{aligned} &(x,y) \in (R_1 \cap R_2)^{-1} \Leftrightarrow (y,x) \in R_1 \cap R_2 \\ \Leftrightarrow &(y,x) \in R_1 \wedge (y,x) \in R_2 \Leftrightarrow (x,y) \in R_1^{-1} \wedge (x,y) \in R_2^{-1} \\ \Leftrightarrow &(x,y) \in R_1^{-1} \cap R_2^{-1} \end{aligned}$$