考试科目名称 离散数学 （A 卷）

考试方式：开卷 考试日期________年 ___月___日 教师 赵建华，姚远

系（专业） 软件学院（软件工程） 年级____________ 班级________________

学号______________________ 姓名_____________________ 成绩________________

注意：所有作答请写在答题纸上。

1. (8 points) Let *p* be the statement “It’s raining”, *q* be the statement “The field is wet”, *r* be the statement “The flowers need watering”. Please represent the following statements as logical formulas.
   a) It’s raining, the filed is wet, and the flowers need watering.
   b) It is not raining, the field is wet, and the flowers need watering.
   c) If it is raining and the filed is wet, the flowers need watering.
   d) If the flowers don’t need watering, then it is not raining or the field is not wet.

   参考答案：
   a）p∧q∧r
   b）~p∧q∧r
   c）p∧q => r
   d）~r => ~q∨~r
   注：如果学生使用了其它可理解的符号来表示逻辑运算，例如∧写成 and，~写成¬，都可以。

2. (8 points) Suppose there are 10 persons and each of them flips a coin. We know that the probability of the ‘HEAD’ outcome of the *i*-th person is 1/(2i+1). What is probability that the number of ‘HEAD’ outcomes is even?

   参考答案（其他解也可以，过程对结果错了可酌情给分）：
   定义 f(x)=(2/3+1/3x) (4/5+1/5x) … (20/21+1/21x) (4')
   上式可以展开成 $f(x)=a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{10}x^{10}$形式。
   显然，f(x)的展开式中 x 偶数次方（包括 0 次方）前的系数和即为所求。
   于是，偶数次方前的系数和可以通过下式求得：
   (f(1)+f(−1))/2 = 1/2（1+ 1/3*3/5*…*19/21） = 11/21 (4')

3. (10 points) Let relation R be a reflexive and transitive relation on the set A. Define

relation R' as x R' y if and only if x R y and y R x.

a) Prove that R' is an equivalence relation.

b) Let R_P be a relation on the quotient set A/R' defined as:

$$[x]\ R_P\ [y] \text{ if and only if } x\ R\ y$$

Prove that R_P is a partial order relation on A/R'.

参考答案：

a) 实际上要证明 R'具有自反、传递、对称的性质。

- 对称：如果 x R' y，根据定义 x R y 且 y R x 都成立，因此 y R' x 成立；
- 自反：因为 R 是自反的，因此对于 A 中的任意 x，x R x，因此 x R' x；
- 传递：如果 x R' y 和 y R' z 都成立，根据 R'的定义，x R y, y R x, y R z, z R y 都成立。因为 R 是自反的，因此 x R z 和 z R x 都成立，因此 x R' z 成立。

b) 要证明 Rp 是偏序，只要证明 Rp 具有自反、传递和反对称性质。

- 自反：因为 R 具有自反性，因此对于 A 中的任意 x，x R y 成立，根据 R_p 的定义，[x] R_p [y]成立。
- 传递：如果[x] R_p [y]且[y] R_p [z]，根据定义，x R y 和 y R z 成立，根据 R 的传递性质可知 x R z 成立。根据 Rp 的定义，[x] Rp [z]。
- 反对称：如果[x] Rp [y]和[y] Rp [x]都成立，根据 Rp 的定义，x R y 和 y R x 都成立。根据 R'的定义可知 x R' y。因此[x] == [y]。
- 注意：这个证明实际上还需要考虑 Rp 定义的合理性，也就是 Rp 是 well-defined。但是因为 Rp 的定义已经在题目中给出，所以如果学生没有证明 Rp 的良定义，不扣分。

  具体证明如下：

  因为 Rp 是根据等价类中的元素之间是否具有 R 关系来定义的。因此需要证明对于 A/R'中的等价类[x]、[y]，可以选取[x]、[y]中的任意元素 x'和 y'来确定[x]和[y]之间的关系。也就是说要证明：

  如果 x',y'分别是[x]和[y]中的元素，那么 x R y 当且仅当 x' R y'。证明如下：

  - x R y => x' R y'：因为 x' R' x 和 y' R' y，根据 R'的定义可知 x' R x 且 y R y'。根据 R 的传递性可知：x' R y'成立。
  - 同样易证 x' R y' => x R y。

4. (8 points) Define relation on the set of all integers. Give and prove the transitive closure of R.

参考答案：

R 的传递闭包是<关系。 (2')

证明：（1）显然<满足传递性 (2')

（2）显然 R< (2')

（3）假设存在传递关系 R’包含 R，显然有<R’ (2')

5. (10 points) Prove the following properties by mathematical induction.

a) For any two elements a, b in a communitive group (S,*), and any positive integer n, $ab^n=b^na$.

b) Using the above property to prove that $a^mb^n=b^na^m$ holds for any two elements a, b in S, and any two positive integers m, n.

参考答案：

a) BASE:当n = 1时，因为S是communitive的，所以ab = ba

INDUCTION: 假设当n=k时，$ab^k=b^ka$。

那么当n = k + 1时，$ab^{k+1} == ab^kb = b^kab = b^kba = b^{k+1}a$

b) 可以对m使用数学归纳法证明。

BASE: 当m=1的时候，根据a的结论$ab^n = b^na$

INDUCTION: 假设当m=k时,$a^kb^n = b^na^k$.

那么当m = k + 1的时候，$a^{k+1}b^n = aa^kb^n = ab^na^k=b^naa^k = b^na^{k+1}$

但是也可以这么做：因为S是一个群，因此am仍然是S中的一个元素。直接使用a的结论，可得$a^mb^n=b^na^m$

6. (8 points) Given a sequence of m numbers, prove that there must be a continuous subsequence such that the sum of this subsequence can be divided by m.

参考答案：

这个序列总共有m个前缀，长度分别为1，2，…，m。假设Si表示第i个前缀中所有整数的和。考虑Si出以m的余数。如果有某个余数为0，那么对应的前缀的和能够被m整除；如果所有和的余数都不为0，那么总共有m-1中可能的取值：1,2,…,m-1。根据鸽巢原理，必然有两个余数相同。假设Si和Sj的余数相同（i < j），那么从第i+1到第j个元素组成的子序列的和等于Sj – Si，该子序列的和能够被m整除。

7. (8 points) Prove that a connected graph G has a unique minimal span tree if the weights of the edges of G are mutually different with each other.

参考答案：

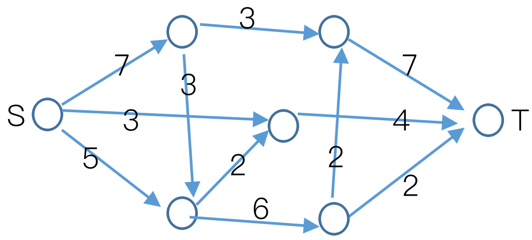
假设 G 有两棵不同的 MST，其边的集合按照权值从小到大排列分别是 e1,e2,…,em 和 e’1,e’2,…,e’m。假设 i 是最小的、使得 ei 和 e’i 不相同的边。不失一般性，假设 ei 的权值小于 e’i。将 ei 加入到第二棵树的边集合中，得到 e’1,e’2,…ei, e’i, … ,e’m,ei。新的边集必然存在包含 ei 的回路。根据 i 的定义可知，e’1 = e1，e’2 = e2, … e’i-1 == ei-1。因为 e1,e2,…,em 是一棵树，因此这个回路中必然包含了不同于 e1,e2,…,ei-1，在 T2 中的边。假设这条边是 e’。根据假设可知：e’的权值大于 ei 的权值。因此我们可以从 T2 中删除 e’得到一棵更小的生成树。这和 T2 是 MST 树矛盾。

思路二：数学归纳法
当 G 只有 1 个顶点的时候，命题成立；
对于具有 n 个顶点的图 G，首先证明最小的边 e 一定在 G 的 MST 树中。将 e 的两端合并后得到的图 G‘，G 的 MST 就是 e 加上 G’的 MST。而 G’有 n-1 个顶点，且边的权值也是各不相同的，因此 G‘的 MST 树也是唯一的。由此可知 G 的 MST 是唯一的。

8. (10 points) A subset of set A = {1, 2, 3,... , n} is called *alternating*, if the first number is odd and odd numbers and even numbers alternatingly appear after we sort all its elements in ascending order. For example, {1} and {1,2,3,4} are alternating; {2}, {1,3,4} and {1,4,6} are not alternating. Define that the empty set is alternating. Find the number of alternating subsets of A.

参考答案：
将 A 的子集分成两部分，第一部分是不含 n 的，即为{1, 2, 3,... , n–1}的子集；第二部分是含有 n 的，可以看成{1, 2, 3,... , n–1}的每个子集加个 n 后得到的子集。 (2’)
令 f(n)表示{1, 2, 3,... , n–1}的交替子集个数，则第一部分的交替子集个数显然为 f(n–1)；第二部分中，可以看成是{1, 2, 3,... , n–2}的交替子集加入{n–1, n}（当最后一个数与 n 同奇偶），或{1, 2, 3,... , n–2}的交替子集加入{n}（当最后一个数与 n 不同奇偶），因此第二部分的交替子集个数为 f(n–2)。 (4’)
于是有 $f(n)= f(n-1)+ f(n-2)$ (2’)
再由 $f(1)=2, f(2)=3$，可得 $f(n)=F(n+2)$ (2’)

9. (10 points) Given the following network:

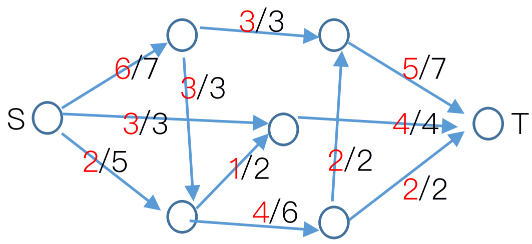


a) Calculate the maximal flow of this network.

b) Give the minimal cut of this network.

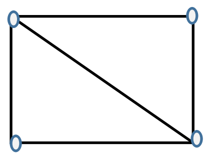
参考答案：

a) 最大流值是11，具体流值如下图所示。如果有过程，但是结果不准确，可酌情给分。如果没有过程或过程不全，答案正确可给全部分数。



b）最小割是11。如果答案错误，但是和上面的最大流值相同，可给一半分。因为我们主要考的是最小割和最大流的关系。

10. (10 points) Calculate the number of different ways to color the following graph with 5 different colors such that any two adjacent vertexes have different colors. The calculation process is required.



参考答案：

假设图中从左上角开始，按照顺时针顺序，四个顶点分别是A,B,C,D。考虑边AC，删除该边后得到一个4个顶点的环路，其染色方法个数是：

$(5-1)^4 + (-1)^4(5-1) = 256 + 4 = 260$

而合并AC后得到一个3个顶点的线性图，其不同的染色方法数量是

$5(5-1)^2 = 80$

因此，总的染色方法数量是

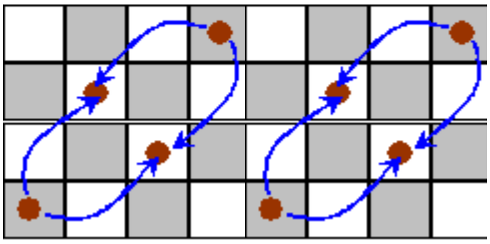
$280 – 80 = 180$

注：其它方法也可以计算。只要有正确的过程即可。例如可以考虑A,C首先染色，它们的颜色必然不同。因此A,C的染色方法总共有5*4=20种；对于AC的每一种染色方法，B，D各有3中选择，因此总共有20*3*3=180种选择。

11. (10 points) Prove that: on a 4*n Chinese chessboard, it is impossible for "horse" to traverse each grid exactly once and return to the origin.

参考答案:

即证明以每个格子为点，马的走动路线为边的图中不存在汉密尔顿回路。 (4')



以如右图所示的方式给 4*n 的棋盘着色。显然，上下两排的黑色空格，必然会走到中间两排的白色空格上。 (2')

因此，如果删除中间两排的白色空格公共 n 个，则得到了上下两排的 n 个孤立的黑色空格。即删除 n 个节点后，得到了至少 n+1 个连通分支。由汉密尔顿回路存在的必要条件得知，一定不存在汉密尔顿回路。 (4')

中文参考

1. （8 分）假设 p 表示“天正在下雨”，q 表示“地上是湿的”，r 表示“花需要浇水”，请用逻辑公式表示下列命题：
   a）天正在下雨，地上不是湿的，并且花需要浇水
   b）天不在下雨，地上是湿的，花需要浇水
   c）如果天在下雨并且地上是湿的，那么花不需要浇水
   d）如果花需要浇水，那么天不在下雨或者地上不是湿的

2. （8 分）假设第 i 个人抛硬币正面向上的概率是 1/(2i+1)。10 个人抛硬币，正面向上的个数是偶数的概率是多少?

3. （10 分）假设集合 A 上的关系 R 是自反的和传递的。定义 A 上的关系 R'如下：

   x R' y 当且仅当 x R y 且 y R x。

   a）请证明 R'是一个等价关系。
   b）A 的商集 A/R'上的关系 R_P 定义如下：

   [x] R_P [y] 当且仅当 x R y

   请证明 R_P 是 A/R'上的偏序关系。

4. （8 分）定义整数集上的关系，请给出 R 的传递闭包并证明之。

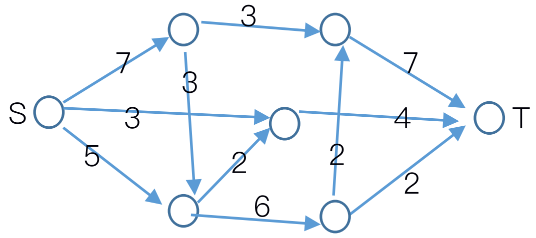
5. （10分）使用数学归纳法证明下列性质：
   a）可交换群(S,*)的元素a和b，对于任意的正整数n，都有$ab^n=b^na$。
   b）利用这个性质证明对于S中的任意元素a,b和任意正整数m,n，$a^mb^n=b^na^m$。

6. （8分）给定m个数组成的序列，请证明一定能够从该序列中选出一个连续子序列，使得这个子序列的和能够被m整除。

7. （8分）请证明如果图G中各条边的权重各不相同，那么G的最小生成树是唯一的。

8. （10分）集合的某个子集称为是交替的，如果其元素按照升序排列时是奇数、偶数交替出现的，且第一个数是奇数。例如是交替的，与不是交替的。规定空集是交替的。求的交替子集的个数。

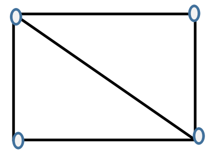
9. （10分）已知网络如下：



a）请计算出这个图的最大流。

b）给出这个图的最小割。

10. （10分）要使用5种颜色对下图中顶点进行染色并使得相邻顶点的颜色不同。请问总共有多少种染色方法。请给出演算过程。



11. （10分）试证明：在4*n的中国象棋棋盘上，“马”不可能不重复的遍历每一个格子并回到原点。