



清华大学
Tsinghua University

应用模拟退火算法解决投资组合优化问题 ——图论PROJECT

经42-计48 陈奕涵

学号: 2024011483

一、项目基本介绍

- 项目背景：随着金融市场的不断发展，投资者面对的资产种类和投资工具日益丰富，也普遍面临“在追求收益的同时规避风险”，所以，如何合理分配资金以实现收益最大化和风险最小化成为金融工程领域的重要问题。
- 传统组合优化算法局限性：
 - 1、**高维性和非线性**，随着投资资产数量的增加，组合优化问题的维度急剧增大，且涉及的目标函数通常为非线性且带有多种约束，导致求解空间复杂且非凸，容易陷入局部最优；
 - 2、**约束条件复杂**，实际投资决策中常伴随多种约束，如投资比例上下限、最小交易单位、交易成本、税收、市场流动性限制等，这些约束使得优化问题变得更加难以用传统解析方法求解；
 - 3、**不确定性和噪声**，金融市场数据本身存在高度不确定性和波动性，协方差矩阵估计误差及市场异常波动均对模型精度带来挑战。

二、模拟退火算法简介

1. 初始化

- 选择初始解 x (可以随机选择)。
- 设定初始温度 T (较高的初始温度)。
- 设定降温参数 (例如温度衰减率 α , 通常 $0 < \alpha < 1$)。

2. 迭代搜索

- 在当前温度 T 下, 从当前解 x 的邻域中随机选择一个新解 x' 。
- 计算当前解和新解的目标函数值, 记为 $f(x)$ 和 $f(x')$ 。

3. 判断是否接受新解

- 若新解更优 (对于最小化问题, 若 $f(x') < f(x)$), 则无条件接受新解: 令 $x = x'$ 。
- 若新解较差, 则以概率 $p = e^{-\frac{\Delta f}{T}}$ 接受新解, 其中 $\Delta f = f(x') - f(x)$ 。
该概率随着温度降低而减小, 使得算法早期容易跳出局部最优, 后期逐渐趋于稳定。

4. 降温

- 按照预设的降温策略, 降低温度 $T \leftarrow \alpha T$ 。
- 一般采用指数衰减: $T = \alpha \times T$ 。

5. 终止条件

- 当温度 T 低于某个阈值, 或者达到最大迭代次数时, 算法终止。
- 返回当前解 x 作为近似最优解。

三、模拟退火算法在投资组合优化问题中的具体应用

1、引入目标函数： $\min_w (\lambda \cdot w^T \Sigma w - (1 - \lambda) \cdot w^T \mu)$

w : 投资比例向量

μ : 期望收益向量

Σ : 协方差矩阵

$\lambda \in [0, 1]$: 权衡风险与收益的参数

其中，自由度体现在 λ 上。 $\lambda=1$ ，只最小化风险； $\lambda=0$ ，只最大化收益； $\lambda=0.5$ ，风险与收益权重相同。(取决于投资者对风险和收益的权衡)

2、微调新解的方式：

前期（粗搜索）：所有权重都进行微扰，加扰动后进行归一化

$$w'_i = w_i + \delta_i, \quad \delta_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$$

$$w'_i = \max(w'_i, 0)$$

$$w''_i = \frac{w'_i}{\sum_j w'_j}$$

后期（精搜索）：在投资比例向量中任选两个资产索引 i 和 j ，随机生成一个微扰，更新权重，其他资产权重保持不变。

$$w'_i = w_i + \delta, \quad w'_j = w_j - \delta$$

四、具体代码说明（具体代码见压缩包中的main.cpp）

1、需要提供的参数(原始代码中提供了默认参数，可供替换)：

初始温度、温度衰减指数、风险收益权衡系数 λ 、微扰小量的范围、迭代终止条件（最低温度和最大迭代次数）、进行粗搜索和精搜索的边界温度、资产数目、各资产的收益率、资产之间的协方差矩阵。

2、代码函数说明

`normalize()`：将权重向量归一化，使其元素和为1，表示投资总金额固定。

`generate_initial()`：随机生成一个合法的初始解（资产权重向量），并归一化。

`portfolio_return()` 和 `portfolio_variance()`：分别计算当前组合的预期收益和风险（方差）。使用线性加权和矩阵乘法实现。

`objective()`：目标函数，用于模拟退火优化。将收益最大化、风险最小化的问题转化为统一的最小化目标。

`perturb_local()`：高温阶段使用，全局扰动（高斯噪声），适合粗搜索。

`perturb_local()`：低温阶段使用，局部扰动（在两个资产之间微调权重），适合精细搜索。

`simulated_annealing()`：模拟退火。



清华大学
Tsinghua University

谢谢!