

Курс: "Комбинаторика для начинающих".

Экзамен.

Александров Алексей, ИУ8-g4

2020г.

**Задание 1** Сколько четырехзначных чисел не имеют в своей десятичной записи одинаковых цифр?

**Ответ:** 4536

**Решение 1** На первое место четырехзначного числа можно поставить любую цифру, кроме 0, т.е. всего 9 вариантов; на второе место – любую цифру, кроме той, что стоит на первом месте (9 вариантов); на третье – любую, кроме двух, стоящих на первом и втором месте (8 вариантов); аналогично, для последней цифры остается 7 вариантов. В итоге по правилу умножения получаем:  $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ .

---

**Задание 2** В ящике лежат 30 черных, 30 белых и 30 красных носков. Какое минимальное количество носков надо вытащить, чтобы среди них гарантированно было 2 носка одного цвета?

**Ответ:** 4

**Решение 2** В ящике находятся носки трех цветов. Если вытащить не меньше четырех носков, то по принципу Дирихле найдется хотя бы два носка одного цвета. Значит, минимальное количество равно 4.

---

**Задание 3** В саду растёт яблоня, груша и лимонное дерево. На каждом дереве по 20 плодов (все плоды разные). Сколькими способами можно выбрать два яблока, одну грушу и один лимон?

**Ответ:** 76000

**Решение 3** Количество способов выбрать из 20 различных объектов 2 (порядок не важен) равно  $C_{20}^2 = 190$ , количество способов выбрать из 20 различных объектов 1 равно  $C_{20}^1 = 20$ . По правилу умножения получаем  $190 \cdot 20 \cdot 20 = 76000$ .

---

**Задание 4** В группе музыкантов трое гитаристов и 20 гитар. Сколькими способами музыканты могут выбрать себе по инструменту?

**Ответ:**  $A_{20}^3 = 6840$

**Решение 4** Необходимо из 20 различных объектов выбрать 3, но поскольку все люди уникальные, то важно, какому человеку какой инструмент достанется, т.е. важен порядок выбора. Значит, искомое количество равно  $A_{20}^3 = 18 \cdot 19 \cdot 20 = 6840$ .

**Задание 5** Коля загадал последовательность из чисел 1, 2, 3, 4, 5, причём ни одно из чисел не стоит на своём месте. Вася пытается угадать эту последовательность (последовательность считается угаданной, если Вася написал её на бумаге и показал Коле). Сколько вариантов надо перебрать Васе, чтобы гарантированно угадать последовательность?

**Ответ:** 44

**Решение 5** Необходимо посчитать количество беспорядков для 55 элементов (см. раздел 6 "Формула включений и исключений" задача "Количество беспорядков"). Искомое количество равно  $5! \left( \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \right) = \frac{5!}{2!} - \frac{5!}{3!} + \frac{5!}{4!} - \frac{5!}{5!} = 60 - 20 + 5 - 1 = 44$ .

**Задание 6** В институте работают 100 сотрудников, причём: английский знают 60 сотрудников; не знают немецкий 55 сотрудников; французский знают 25 сотрудников; 25 сотрудников не знают ни французский, ни английский; английский и немецкий знают 15 сотрудников; французский и немецкий знают 15 сотрудников; все три языка знают 5 сотрудников. Отметьте верные утверждения.

**Ответ:**

**Решение 6** Пусть  $\alpha_a(\alpha_n, \alpha_f)$  – свойство "знать английский (немецкий, французский) язык тогда по формуле включений и исключений можно получить следующее.

$$N(\alpha'_n) = N - N(\alpha_n) \Rightarrow N(\alpha_n) = N - N(\alpha'_n) = 100 - 55 = 45.$$

$$N(\alpha'_a, \alpha'_f) = N - N(\alpha_a) - N(\alpha_f) + N(\alpha_a, \alpha_f) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N(\alpha_a, \alpha_f) = N(\alpha'_a, \alpha'_f) - N + N(\alpha_a) + N(\alpha_f)$$

$$= 25 - 100 + 60 + 25 = 10.$$

Не знает ни одного языка  $N(\alpha'_a, \alpha'_n, \alpha'_f) = N - N(\alpha_a) - N(\alpha_n) - N(\alpha_f) + N(\alpha_a, \alpha_n) + N(\alpha_a, \alpha_f) + N(\alpha_n, \alpha_f) - N(\alpha_a, \alpha_n, \alpha_f) = 100 - 60 - 45 - 25 + 15 + 10 + 15 - 5 = 5$  человек.

Знает хотя бы один язык  $N - N(\alpha'_a, \alpha'_n, \alpha'_f) = 100 - 5 = 95$  человек.

Знает немецкий, французский, но не знает английский язык  $N(\alpha'_a, \alpha_n, \alpha_f) = N(\alpha_n, \alpha_f) - N(\alpha_a, \alpha_n, \alpha_f) = 15 - 5 = 10$  человек.

Знает французский, но не знает ни английского, ни немецкого языков  $N(\alpha'_a, \alpha'_n, \alpha_f) = N(\alpha_f) - N(\alpha_a, \alpha_f) - N(\alpha_n, \alpha_f) + N(\alpha_a, \alpha_n, \alpha_f) = 25 - 10 - 15 + 5 = 5$  человек.

---

**Задание 7** Имеются слова "коала" и "лайка". Сколько выравниваний есть у этих двух слов?

**Ответ:** 252

**Решение 7** Количество выравниваний двух слов длины 55 каждое равно  $g(5, 5) = C_{5+5}^5 = C_{10}^5 = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252$  (см. раздел 7 "Выравнивания" лекция "Следствие из теоремы о числе выравниваний.").

---

**Задание 8** Чему равна сумма всех чисел в 9-й строке треугольника Паскаля?

**Ответ:** 512

**Решение 8** Искомая сумма равна  $C_9^0 + C_9^1 + \dots + C_9^9 = 2^9 = 512$  (см. раздел 4 "Комбинаторные тождества" задача "Сумма биномиальных коэффициентов").