Задача 1. *Шестая строчка треугольника Паскаля выглядит следующим образом:*

Решение. По определению, шестая строчка треугольника Паскаля получается из пятой 1 5 10 10 5 1 суммированием чисел стоящих слева сверху и справа сверху. Получаем следующую строчку: 1 6 15 20 15 6 1.

Задача 2. *На дереве висит 10 разных яблок. Сколькими способами можно сорвать нечётное количество яблок?*

Решение. Из задачи **Наборы из чётного числа символов** мы знаем, что чётное количество яблок можно сорвать $2^{10-1} = 2^9 = 512$ способами. Так как общее количество способов сорвать яблоки равно 2^{10}, то нечётное количество яблок можно сорвать также 512 способами.

Задача 3. *Сумма $C_{10}^1+C_{10}^2+\ldots+C_{10}^{10}$ равна*

Решение. Мы знаем, что $C_{n}^0 + C_n^1+ \ldots +C_n^n = 2^n$. Подставляя $n=10$, получаем, что $C_{10}^0 + C_{10}^1+C_{10}^2+\ldots+C_{10}^{10} = 2^{10}=1024$. Наша сумма получается из данной вычитанием $C_{10}^0 = 1$. Следовательно, ответ равен 1023.

Задача 4. *Коэффициент при x^7 в разложении $(1+x)^{11}$ равен*

Решение. По формуле бинома Ньютона коэффициент при x^7 равен $C_{11}^7 = C_{11}^4$.

Задача 5. *В наборе из 12 сосудов имеется 5 неразличимых стаканов и 7 различных чашек. Сколькими способами можно выбрать 6 сосудов из 12?*

Решение. Для каждого фиксированного k существует только один способ выбрать k неразличимых стаканов. Отсюда искомое количество способов равно количеству способов выбрать от 1 до 6 чашек. Искомая сумма равна $C_{7}^1+ \ldots + C_{7}^6 =C_{7}^0+ C_{7}^1+ \ldots + C_{7}^6 + C_7^7 - (C_7^0+C_7^7) = 2^{7} - 2 =128-2=126$.

Задача 6. *Сумма $C_{n+m-1}^m+C_{n+m-2}^m+\ldots + C_{m}^m$ при всех $m \ge 1$, $n \ge 1$ равна:*

Решение. Эта в сумма в точности равна сумме чисел в треугольнике Паскаля, расположенных на одной диагонали, начиная с числа C_{n+m-1}^m и выше. Эта задача разобрана на видео, и ответ $-$ число, стоящее под C_{n+m-1}^m справа, то есть $C_{n+m}^{m+1} = C_{n+m}^{n-1}$.

Задача 7. Отметьте тождества, выполненные при всех $n \ge k \ge 0$.

Решение.

$2^n = C_{n}^0+\ldots + C_{n}^{n}$ $-$ верно;

$0 = C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^n C_n^n$ $-$ неверно для $n=0$;

$C_{n-k}^k = C_{n-k}^{n-k}$ $-$ неверно для $n=3$, $k=1$;

$C_{n}^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k+1}$ $-$ неверно для $n=4$, $k=1$ ($4=C_4^1 \neq C_3^1 + C_3^2 = 3 + 3 =6$.