Задача 1. *Переплётчик должен переплести 5 различных книг в красный, зелёный или коричневый переплёты. Сколькими способами он может это сделать, если в каждый цвет должна быть переплетена хотя бы одна книга? Все книги различны.*

Решение. См. решение задачи 2.

Задача 2. *Сколькими способами можно расселить 5 туристов по 3 домикам, чтобы ни один домик не оказался пустым? Все туристы и домики различны. Способы расселения, отличающиеся только перестановкой туристов, заселённых в один домик, считаются одинаковыми.*

Решение. В качестве множеств A_i (или свойства α_i) рассмотрим множества расселений туристов по домикам, при которых i-ый домик является пустым. Тогда по формуле включений и исключений мы можем найти количество расселений, при которых ни одно из свойства α_i не выполнено. То есть ни один домик не является пустым, что и требуется найти. Таким образом, искомое количество расселений n находится по формуле:

$$n = |X| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$|X|$ — это общее количество расселений, то есть 3^5. $|A_i|$ — это количество способов расселить туристов по не более чем двум домикам, т.е. 2^5, $|A_i \cap A_j|$ — это количество способов расселить туристов в оставшийся домик (не i и не j), то есть 1^5, а $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$, так как домиков для расселения не осталось.

Итого получаем: $n = 3^5 - 3 \cdot 2^5 + 3 \cdot 1^5 - 0 = 243 - 3 \cdot 32 + 3 = 150.$

Задача 3. *Дана таблица размером 2×5. В левом верхнем углу записано число 1. Сколькими способами таблицу можно дополнить числами $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ так, чтобы выполнялись оба следующих условия:*

$$\text{1) в каждой строчке присутствовало каждое из чисел от 1 до 5}$$

$$\text{2) в каждом столбце все числа были различны?}$$

(Пример такого заполнения: первая строчка: $1, 2, 5, 4, 3$, вторая строчка: $3, 5, 2, 1, 4$.)

Решение. Первую строчку можно заполнить $4!$ способами. Вторую строчку надо заполнить так, чтобы ни один элемент в нижней строке не находился в том же столбце. Поэтому это число равно числу беспорядков из 5 элементов, то есть 44 (см. следующую задачу). Итого: $44 \cdot 4! = 1056.$

Задача 4. Число беспорядков в последовательности из 5 элементов равно

Решение. По формуле из лекции получаем:
$5!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}) = 5!(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120}) = 60 - 20 + 5 - 1 = 44.$

Задача 5. На загородную прогулку поехали 92 человека. Бутерброды с колбасой взяли 48 человек, с сыром — 38 человек, с сыром и колбасой — 28 человек. Сколько человек не взяли с собой бутерброды?

Решение. По формуле включений и исключений получаем: $92 - 48 - 38 + 28 = 34.$

Задача 6. Формула включений и исключений для трёх множеств A, B, C выглядит следующим образом:

Решение. См. лекцию.

Задача 7. Пусть даны свойства α_1 , α_2 , $\ldots$ α_n , выполняющиеся или не выполняющиеся для элементов множества U. Формула включений и исключений позволяет найти количество элементов множества U, для которых

Решение. См. фрагмент лекции "Общая постановка задачи".

Mark as completed