Задача 1. *Автомобильные номера штата Калифорнии состоят из одной цифры, трёх больших букв латинского алфавита и ещё трёх цифр (например, 5PPP064). Сколько всего имеется номеров такого типа?*

Решение. В качестве первой цифры номера можно взять любую из 9 цифр ($\{1, \ldots, 9\}$), в качестве каждой из трех букв можно взять любую из 26 букв латинского алфавита, и ещё три цифры, для каждой из которой есть 10 вариантов выбора ($\{0, \ldots, 9\}$). Итого, по правилу умножения получаем: $9 \cdot 10^3 \cdot 26^3 = 158184000.$

Задача 2. *Путешественнику нужно добраться из города A в город F двигаясь каждый раз вправо или вверх (см. карту). Сколькими способами это можно сделать?*

Решение. Используя правила сложения и умножения, получаем, что количество способов попасть из A в F равно сумме количества способов пройти по маршрутам $A \to D \to E \to F$, $A \to B \to E \to F$ и $A \to B \to C \to F$. В итоге получаем: $2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 1 = 8 + 6 + 9 = 23.$

Задача 3. *В мешке 50 шаров, отличающихся только цветом: 8 красных, 9 синих, 9 желтых, остальные – поровну черные и белые. Какое наименьшее число шаров надо вынуть из мешка, не видя их, чтобы среди них было не менее 7 шаров одного цвета?*

Решение. Сначала заметим, что черных и белых шаров по $\frac{50-8-9-9}{2} = 12 > 7.$ Если взять всего 30 шаров, то может получиться так, что мы взяли только по 6 шаров каждого цвета. Значит, нужно брать больше 30 шаров. Попробуем вытянуть 31 шар. Тогда по принципу Дирихле, если роль "клеток" играют цвета, а роль "кроликов" вытянутые шары, получаем, что какие бы мы ни вытащили шары, среди них обязательно найдется по крайней мере 7 шаров одного цвета $(31 = 5 \cdot 6 + 1)$.

Задача 4. *15 футбольных команд (в каждой по 11 человек) летят из Москвы в Санкт-Петербург на соревнования. Какое минимальное количество мест может быть в самолете, чтобы гарантированно нашлась команда, долетевшая в полном составе?*

Решение. Если в самолете будет всего 150 мест, то можно будет посадить в него по 10 человек от каждой из 15 команд, тогда самолет будет заполнен целиком, но в нем не будет ни одной команды в полном составе. Значит, нужен с самолет больше, чем со 150 местами. Рассмотрим самолет, в котором 151 место. Тогда по принципу

Дирихле, если роль "клеток" играют команды, а роль "кроликов" футболисты, получаем, что как бы ни произошла рассадка футболистов, среди пассажиров самолета обязательно найдется хотя бы одна команда, летевшая в полном составе $(151 = 15 \cdot 10 + 1)$.

Задача 5. *Сколько чисел от 1 до 9999 (включая 1 и 9999) не имеют в своей десятичной записи одинаковых подряд идущих цифр? (к примеру, не подходят 1488, 2259, 3233)*

Решение. Первой цифрой числа, не имеющего в своей записи подряд идущих цифр, может быть любая цифра, кроме 0, то есть всего 9 вариантов. Второй цифрой этого числа может быть любая цифра, кроме той, которая стоит на первом месте, то есть 9 вариантов, третьей $-$ любая, кроме стоящей на втором месте, то есть опять 9 вариантов, и т.д. Тогда таких четырехзначных чисел всего 9^4, аналогично, трехзначных $-\ 9^3$, двузначных $-\ 9^2$ и однозначных $-\ 9$. Всего получаем $9^4 + 9^3 + 9^2 + 9 = 7380$ чисел.

Задача 6. *У вас есть 4 ящика и 15 кроликов. Отметьте верные утверждения:*

Решение. При такой рассадке найдётся ящик, в котором сидит $\geq [\frac{15}{4}]$ кроликов, то есть 4 кролика. Для 5 и 6 кроликов есть контпример: $4, 4, 4, 3$.

Задача 7. *Имеется 4 банки желтой краски, 5 банок синей краски и 7 банок красной краски. Отметьте верные утверждения:*

Решение. Одну банку краски по правилу сложения можно выбрать $4 + 5 + 7 = 16$ способами. Если же выбирать по одной банке каждой краски, то по правилу умножения получаем $4 \cdot 5 \cdot 7 = 140$ способов.