Задача 1. *Количество различных слов, получаемых перестановкой букв в слове "папарацци" равно*

Решение. В слове "папарацци" 2 раза повторяются буквы "п, ц", 3 раза "а", по одному разу "р" и "и". То есть из набора букв "а,п,ц,р,и" мы составляем слова в которых указанные буквы встречаются нужное количество раз. Это в точности полиномиальный коэффициент $P(3,2,2,1,1) = \frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = 15120.$

Задача 2. *Имеется 18 различных шаров и 4 различных ящика. Сколькими способами можно в первые два ящика положить по 5 шаров, а в оставшиеся два — по 4 шара (Отметьте все подходящие варианты)?*

Решение. Занумеруем ящики $\{1,2,3,4\}$. Тогда каждому способу разложить шары по ящикам можно поставить в соответствие последовательность из $\{1,2,3,4\}$ длины 18, причём 1 и 2 встречается по 5 раз, а 3 и 4 — по 4. Отсюда искомое количество способов равно $P(5,5,4,4) = \frac{18!}{5! \cdot 5! \cdot 4! \cdot 4!} = P(5,4,4,5).$

Задача 3. *У продавца антиквариата имеется 12 разных монет. Четверо нумизматов (Андрей, Борис, Виктор и Геннадий) купили эти монеты: Андрей и Борис по 4 монеты, а Виктор и Геннадий — по 2 монеты. Сколькими способами они могли осуществить свои покупки?*

Решение. Данная задача аналогична предыдущим: можно занумеровать нумизматов или считать, что мы собираем "слово" из четырёх букв А, четырёх букв Б, двух В и двух Г. Ответ: $P(4,4,2,2) = \frac{12!}{4! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 2!} = 207900.$

Задача 4. *У продавца антиквариата имеется 12 разных монет. Четверо нумизматов купили эти монеты: какие-то двое по 4 монеты, а оставшиеся двое — по 2 монеты. Сколькими способами они могли осуществить свои покупки?*

Решение. В чём отличие данной задачи от предыдущей? Теперь мы дополнительно выбираем, кому достанется 4 монеты, а кому 2. Аналогично задаче про цветки и девочек, выбираем двух нумизматов, котором достанется по 4 монеты (это можно сделать C_4^2 способами). А затем, как в предыдущей задаче раздаём им монеты $P(4,4,2,2)$ способами. Итого, получаем: $C_4^2 \cdot P(4,4,2,2) = 6 \cdot 207900 = 1247400.$

Задача 5. Полиномиальный коэффициент $P(5,4,3,2,1)$ равен

Решение. По полиномиальной формуле, $P(5,4,3,2,1) = \frac{15!}{5! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!}$.

$C_{15}^{10} \cdot C_{10}^{6} \cdot C_6^3 \cdot C_3^2 = \frac{15!}{10! \cdot 5!} \cdot \frac{10!}{6! \cdot 4!} \cdot \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{15!}{5! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!}$.

$C_{15}^5 \cdot C_{10}^4 \cdot C_6^3 \cdot C_3^2 = \frac{15!}{5! \cdot 10!} \cdot \frac{10!}{4! \cdot 6!} \cdot \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{15!}{5! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!}$.

Задача 6.

Сумма

$$\sum_{(n_1,n_2,n_3),n_1+n_2+n_3=15,n_i\geq 0,n_i\in\mathbb{Z}} (-1)^{n_3} P(n_1,n_2,n_3)$$

равна

Решение.

$$\sum_{(n_1,n_2,n_3),n_1+n_2+n_3=15,n_i\geq 0,n_i\in\mathbb{Z}} (-1)^{n_3} P(n_1,n_2,n_3) =$$

$$= \sum_{(n_1,n_2,n_3),n_1+n_2+n_3=15,n_i\geq 0,n_i\in\mathbb{Z}} P(n_1,n_2,n_3) \cdot 1^{n_1} \cdot 1^{n_2} \cdot (-1)^{n_3} = (1+1-1)^{15} = 1.$$

Задача 7. *В чемпионате Европы по футболу участвуют 24 команды. Золотые медали получает команда победитель, серебряные — команда, проигравшая в финале, бронзовые — две команды, которые проиграли в полуфинале. Сколькими способами могут распределиться медали между командами? (Отметьте все правильные варианты)*

Решение. Из 24 команд надо выбрать 1 победителя, 1 финалиста, 2 полуфиналиста и 20 команд, не попавших в полуфинал. Количество способов — полиномиальный коэффициент $P(20,1,1,2) = \frac{24!}{20! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2!} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{2!}$.

Задача 8. *Коэффициент при* x^{10} *в разложении* $(1+x^2+x^3)^6$ *равен*

Решение. Чтобы получить x^{10} надо сколько-то раз взять x^2, а сколько-то x^3 (а из оставшихся скобок взять 1). Какие могут быть варианты? Надо взять x^3 чётное количество раз, то есть 0 или 2. Отсюда получаем два способа получить x^{10}. Первый: из 5 скобок взять x^2, а из оставшейся $- 1$. Таких способов всего $P(1,5,0)$. Второй способ: из двух скобок взять 1, из двух $- x^2$, и из оставшихся двух $- x^3$. Количеств таких способов равно $P(2,2,2)$. Итого получаем сумму $P(1,5,0)+P(2,2,2)$.

Mark as completed