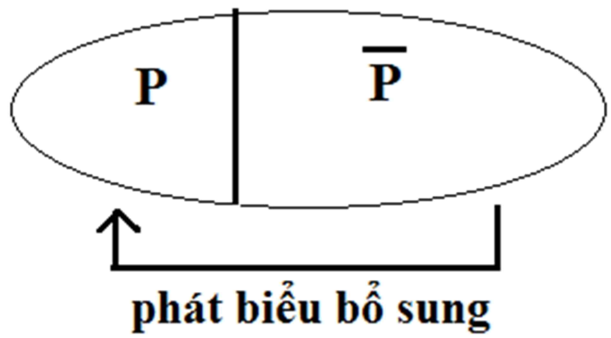
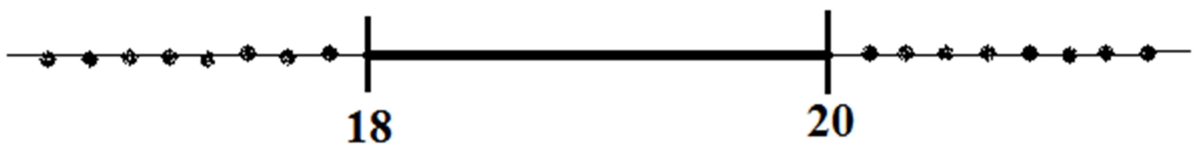
MINH HỌA CƠ SỞ LOGIC

C = “ $4 \le 1$” $\Leftrightarrow$ C = “ ($4 < 1$) *hay* ($4 = 1$) ” (mệnh đề phức hợp).



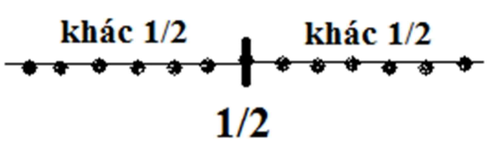


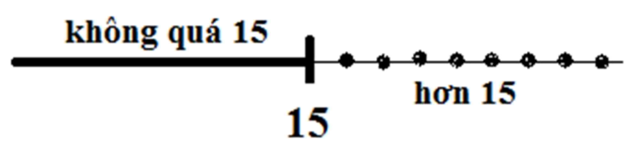
E = “ Tỉ lệ số sinh viên của lớp 20CTT thi đạt môn Toán là 1/2 ($= 1 / 2$) ”.

$\overline{E}$ = “ Tỉ lệ số sinh viên của lớp 20CTT thi đạt môn Toán không phải là 1/2 ($\neq 1 / 2$) ”.

F = “ Không quá 15 (≤ 15) học sinh của trường được dự trại hè quốc tế ”.

$\overline{F}$ = “ Hơn 15 (> 15) học sinh của trường được dự trại hè quốc tế ”.





A = “ Đại dịch Covid 19 chấm dứt trước năm 2025 ” (?).

B = “ Đội tuyển bóng đá Lào đoạt chức vô địch worldcup năm 2030 ” (*sai*).

C = “ Đội tuyển bóng đá Anh đoạt chức vô địch Euro trước năm 2060 ” (?).

B *sai* nên ($B \to C$) *đúng* và do đó $D = [A \to (B \to C)]$ *đúng.*

P_1 (chân trị 1 hoặc 0), P_2 (chân trị 1 hoặc 0), …. và P_n (chân trị 1 hoặc 0) nên

$P_1, P_2, \ldots$ và P_n có đồng thời $2 \times 2 \times \cdots \times 2$ (n lần) $= 2^n$ trường hợp về chân trị.

$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in \mathbf{R}$ (hằng đúng) và $g(x) = 3x^4 + 2e^x = 0, \forall x \in \mathbf{R}$ (hằng sai).

$a \in \mathbf{R}$. Ta có $[(a > -7) \to (a \le 8)]$ (hình thức) và $[(a < -4) \Rightarrow (a \neq 5)]$ (thực sự)

$k \in \mathbf{Z}$. Ta có $[\,(k \vdots 12) \leftrightarrow (k \vdots 2 \text{ và } k \vdots 6)\,]$ (hình thức) và

$[\,(k \vdots 12) \Leftrightarrow (k \vdots 4 \text{ và } k \vdots 6)\,]$ (thực sự).

$F(p, q, r, t) = [\,(p \wedge \bar{q}) \rightarrow (\bar{q} \vee r \vee \bar{t})\,] \Leftrightarrow \mathbf{1}$ bằng cách lập luận như sau : Nếu $p = 0$ thì $(p \wedge \bar{q}) = 0$ nên $F(p, q, r, t)$ *đúng*. Nếu $q = 0$ thì $(\bar{q} \vee r \vee \bar{t}) = 1$ nên $F(p, q, r, t)$ *đúng*. Khi $(p = 1$ và $q = 1)$ thì $(p \wedge \bar{q}) = 0$ nên $F(p, q, r, t)$ *cũng đúng*. Vậy $F(p, q, r, t) \Leftrightarrow \mathbf{1}$.

Khi $(p = 1$ và $q = 1)$ thì $[\,p \rightarrow (p \wedge \bar{q})\,]$ *sai*. Do đó *không có* $[\,p \Rightarrow (p \wedge \bar{q})\,]$.

Khi $(p = 1$ và $q = 0)$ thì $[\,(p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge q)\,]$ *sai*. Do đó *không có* $[\,(p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge q)\,]$.

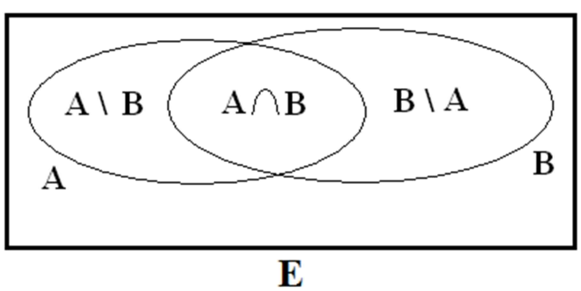
Nếu $p = 0$ thì $(p \wedge \bar{r}) = 0$ nên $[\,(p \wedge \bar{r}) \rightarrow (p \vee \bar{q} \vee s)\,]$ *đúng*. Nếu $p = 1$ thì $(p \vee \bar{q} \vee s) = 1$ nên $[\,(p \wedge \bar{r}) \rightarrow (p \vee \bar{q} \vee s)\,]$ *cũng đúng*. Vậy $[\,(p \wedge \bar{r}) \Rightarrow (p \vee \bar{q} \vee s)\,]$.

Nếu $p = 0$ thì ta có $[\,p \wedge (p \vee q)\,] = 0$, $(p \wedge q) = 0$ và $[\,p \vee (p \wedge q)\,] = 0$.

Nếu $p = 1$ thì ta có $[\,p \vee (p \wedge q)\,] = 1$, $(p \vee q) = 1$ và $[\,p \wedge (p \vee q)\,] = 1$.

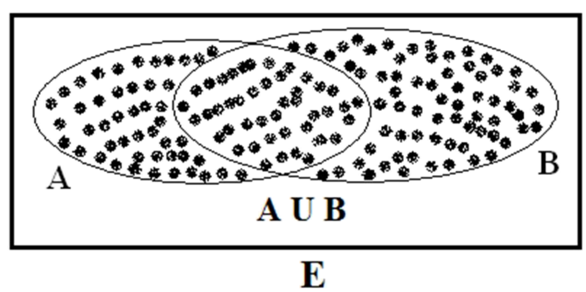
Vậy ta có *sự tương đương* $[\,p \wedge (p \vee q)\,] \Leftrightarrow [\,p \vee (p \wedge q)\,] \Leftrightarrow p$.

Cho các tập hợp A và B $\subset$ E. Xét *luật hấp thu* tập hợp đối với các phép toán $\cap$ và $\cup$:



$A \cup (A \cap B) = A$

[A : tập hợp *lớn*, $A \cap B$: tập hợp *nhỏ*]



$A \cap (A \cup B) = A$

[A : tập hợp *nhỏ*, $A \cup B$: tập hợp *lớn*]

Tương tự, ta cũng có *luật hấp thu mệnh đề* đối với các phép toán $\wedge$ và $\vee$:

$$[\,\mathbf{E} \wedge (\mathbf{E} \vee F)\,] \Leftrightarrow \mathbf{E}. \qquad [\,\mathbf{E} \vee (\mathbf{E} \wedge F)\,] \Leftrightarrow \mathbf{E}.$$

$a.(b + c) = a.b + a.c$: phép nhân số thực (.) *phân phối với* phép cộng (+) số thực.

$a + (b.c) \neq (a + b).(a + c)$: phép cộng số thực ***không*** *phân phối với* phép nhân số thực.

$4x^2 + e^y > 0$ (vì $4x^2 \geq 0$ và $e^y > 0$) nên ($4x^2 + e^y \geq -1$) $\Leftrightarrow$ **1**.

$8\sin x - 5\cos(y^3) \leq 13$ (vì $8\sin x \leq 8$ và $-5\cos(y^3) \leq 5$) nên [$8\sin x - 5\cos(y^3) = 14$] $\Leftrightarrow$ **O**.

Do $|\sin b| \leq |b|$ nên $\sin^2 b \leq b^2$, nghĩa là ($b^2 < \sin^2 b$) $\Leftrightarrow$ **O**.

Do $e^{ab} + e^{-ab} \geq 2\sqrt{e^{ab}e^{-ab}} = 2$ nên ($e^{ab} + e^{-ab} \geq 1$) $\Leftrightarrow$ **1**.

Rút gọn dạng mệnh đề $A = [\,(p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge q) \vee (p \wedge \overline{q})\,]$

$A \Leftrightarrow [\,(p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge q)\,] \vee (p \wedge \overline{q})$ [*luật kết hợp*]

$\Leftrightarrow [\,(p \vee \overline{p}) \wedge q\,] \vee (p \wedge \overline{q})$ [*luật phân phối (thu gọn lại)*]

$\Leftrightarrow (\mathbf{1} \wedge q) \vee (p \wedge \overline{q})$ [*luật bù*] $\Leftrightarrow q \vee (p \wedge \overline{q})$ [*luật trung hòa*]

$\Leftrightarrow (q \vee p) \wedge (q \vee \overline{q})$ [*luật phân phối (khai triển ra)*] $\Leftrightarrow (q \vee p) \wedge \mathbf{1}$ [*luật bù*]

$\Leftrightarrow (q \vee p)$ [*luật trung hòa*].

Chứng minh $B = \{\,[\,p \rightarrow (q \vee r)\,] \rightarrow [\,(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)\,]\,\} \Leftrightarrow \mathbf{1}$.

$B \Leftrightarrow \overline{p \rightarrow (q \vee r)} \vee \overline{p} \vee q \vee \overline{p} \vee r$ [*xóa các dấu → thứ hai, thứ ba, thứ tư và luật kết hợp*]

$\Leftrightarrow \overline{p \rightarrow (q \vee r)} \vee (\overline{p} \vee \overline{p}) \vee (q \vee r)$ [*luật giao hoán và luật kết hợp*]

$\Leftrightarrow \overline{p \rightarrow (q \vee r)} \vee [\,\overline{p} \vee (q \vee r)\,]$ [*luật lũy đẳng*]

$\Leftrightarrow \overline{G} \vee G$ với $G = [\,p \rightarrow (q \vee r)\,]$ (*phép đổi biến*) $\Leftrightarrow \mathbf{1}$ [*luật bù*].

Chứng minh $C = \{\,[\,p \wedge (q \vee r)\,] \wedge \overline{(p \wedge q) \vee r}\,\} \Leftrightarrow \mathbf{O}$.

$C \Leftrightarrow [\,(p \wedge q) \vee (p \wedge r)\,] \wedge \overline{p \wedge q} \wedge \overline{r}$ [*luật phân phối (khai triển ra) và luật De Morgan*]

$\Leftrightarrow (H \vee K) \wedge (\overline{H} \wedge \overline{r})$ với $H = (p \wedge q)$ và $K = (p \wedge r)$ (*phép đổi biến*)

$\Leftrightarrow (H \wedge \overline{H} \wedge \overline{r}) \vee (K \wedge \overline{H} \wedge \overline{r})$ [*luật phân phối (khai triển ra) và luật kết hợp*]

$\Leftrightarrow (\mathbf{O} \wedge \overline{r}) \vee (K \wedge \overline{H} \wedge \overline{r})$ [*luật bù*] $\Leftrightarrow \mathbf{O} \vee (K \wedge \overline{H} \wedge \overline{r})$ [*luật thống trị*]

$\Leftrightarrow K \wedge \overline{H} \wedge \overline{r}$ [*luật trung hòa*] $\Leftrightarrow \overline{H} \wedge K \wedge \overline{r}$ [*luật giao hoán*]

$\Leftrightarrow \overline{H} \wedge (p \wedge r) \wedge \overline{r}$ [*trở về K*] $\Leftrightarrow (\overline{H} \wedge p) \wedge (r \wedge \overline{r})$ [*luật kết hợp*]

$\Leftrightarrow (\overline{H} \wedge p) \wedge \mathbf{O}$ [*luật bù*] $\Leftrightarrow \mathbf{O}$ [*luật thống trị*].

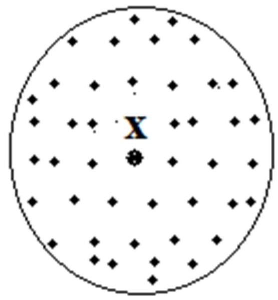
Cho $E = \{ [\, q \rightarrow (p \wedge r)\,] \wedge \overline{(p \vee r) \rightarrow q} \}$ và $F = \overline{(p \vee r) \rightarrow q}$. Chứng minh $E \Leftrightarrow F$.

$E \Leftrightarrow [\, \overline{q} \vee (p \wedge r)\,] \wedge (p \vee r) \wedge \overline{q}$ [*xóa dấu* $\rightarrow$ *và phủ định dấu* $\rightarrow$]

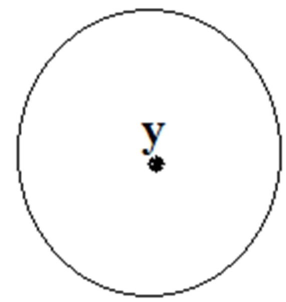
$\Leftrightarrow (\overline{q} \vee u) \wedge \overline{q} \wedge v$ với $u = (p \wedge r)$ và $v = (p \vee r)$ [*luật giao hoán và phép đổi biến*]

$\Leftrightarrow [\, (\overline{q} \vee u) \wedge \overline{q}\,] \wedge v$ [*luật kết hợp*] $\Leftrightarrow \overline{q} \wedge (p \vee r)$ [*luật hấp thu và trở về* v]

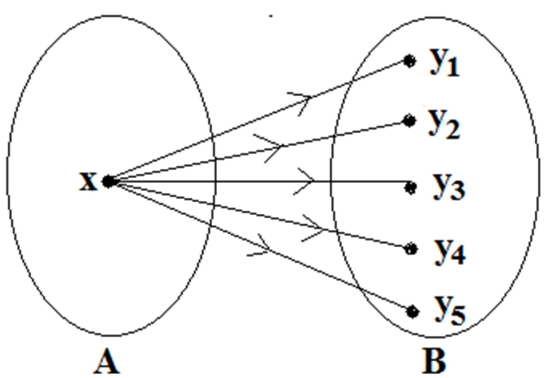
$\Leftrightarrow (p \vee r) \wedge \overline{q}$ [*luật giao hoán*] $\Leftrightarrow \overline{(p \vee r) \rightarrow q} = F$ [*phục hồi dấu* $\rightarrow$ *dạng phủ định*].

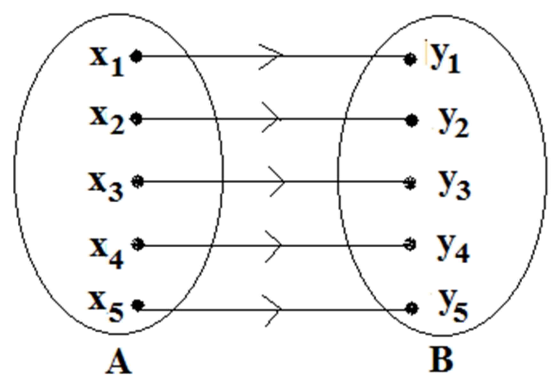


$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{A}$



$\exists\, \mathbf{y} \in \mathbf{B}$





$\exists x \in A$ $\quad\quad$ $\forall y \in B$ $\quad\quad$ $\forall x \in A$ $\quad\quad$ $\exists y \in B$

" $\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$ " : có một x *cố định* thuộc A sao cho với mọi y thuộc B, $p(x, y)$ xảy ra.

" $\forall x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$ " : với mỗi x thuộc A, *có tương ứng* y thuộc B sao cho $p(x, y)$ xảy ra (x này có tương ứng với y này, x khác có thể tương ứng với y khác).

" $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, (x^2 - 3).y = y$ " (có $x = \pm 2 \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, [\, (\pm 2)^2 - 3\,].y = y$).

" $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \exists y \in \mathbf{R}, xy^3 = -1$ " [$\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \exists y = -x^{-\frac{1}{3}} \in \mathbf{R}, xy^3 = x(-x^{-\frac{1}{3}})^3 = -1$].

a) [$p \to t$ (1) và $\overline{r} \to q$ (2) và p (3) và $t \to \overline{q}$ (4)] $\Rightarrow$ [$r \vee s$] (5).

Ta chứng minh a) *đúng* bằng ***Cách 1***:

Từ (1) và (3), ta có t (6) [*qui tắc khẳng định dạng 1*].

Từ (6) và (4), ta có $\overline{q}$ (7) [*qui tắc khẳng định dạng 1*].

Từ (7) và (2), ta có $\overline{\overline{r}}$ (8) [*qui tắc phủ định*]. Từ (8), ta có r (9) [*luật phủ định kép*].

Từ (9), ta có $r \vee s$ (5) [*qui tắc tuyển đơn giản*]. Như vậy suy luận a) *đúng*.

a) [$p \to t$ (1) và $\overline{r} \to q$ (2) và p (3) và $t \to \overline{q}$ (4)] $\Rightarrow$ [$r \vee s$] (5).

Ta chứng minh a) *đúng* bằng ***Cách 2***: Giả sử (1), (2), (3), (4) *đúng* và (5) *sai*.

Do (3) đúng nên p đúng.

Do (5) sai nên r và s đều sai.

Do (1) đúng và p đúng nên t đúng.

Do (2) đúng và r sai nên q đúng.

Do t và q đều đúng nên (4) sai : *mâu thuẫn với điều đã giả sử*.

Như vậy suy luận a) *đúng*.

b) [$p \to r$ (1) và $\overline{u}$ (2) và $s \to t$ (3) và $\overline{s} \to \overline{r}$ (4) và $\overline{t} \vee u$ (5)] $\Rightarrow$ [$p \to q$] (6).

Ta chứng minh b) *đúng* bằng C***ách 2***: Giả sử (1), (2), (3), (4), (5) *đúng* và (6) *sai*.

Do (2) đúng nên u sai.

Do (6) sai nên p đúng và q sai.

Do (1) đúng và p đúng nên r đúng.

Do (5) đúng và u sai nên t sai.

Do (3) đúng và t sai nên s sai.

Do s sai và r đúng nên (4) sai : *mâu thuẫn với điều đã giả sử*.

Như vậy suy luận b) *đúng*.

b) [$p \to r$ (1) và $\overline{u}$ (2) và $s \to t$ (3) và $\overline{s} \to \overline{r}$ (4) và $\overline{t} \vee u$ (5)] $\Rightarrow$ [$p \to q$] (6).

Ta chứng minh b) *đúng* bằng ***Cách 3***: Giả sử (1), (2), (3), (4) và (5) *đều đúng*.

Do (2) đúng nên u sai.

Do (5) đúng và u sai nên t sai.

Do (3) đúng và t sai nên s sai.

Do (4) đúng và s sai nên r sai. Do (1) đúng và r sai nên p sai.

Do p sai nên (6) đúng. Như vậy suy luận b) *đúng*.

c) [$(\overline{p} \vee q) \to (r \wedge s)$ (1) và $\overline{t}$ (2) và $r \to t$ (3)] $\Rightarrow$ [$s \to p$] (4).

Ta chứng minh c) *đúng* bằng ***Cách 1***:

Từ (2) và (3), ta có $\overline{r}$ (5) [*qui tắc phủ định*].

Từ (5), ta có $\overline{r} \vee \overline{s}$ (6) [*qui tắc tuyển đơn giản*].

Từ (6), ta có $\overline{r \wedge s}$ (7) [*luật phủ định De Morgan*].

Từ (7) và (1), ta có $\overline{\overline{p} \vee q}$ (8) [*qui tắc phủ định*].

Từ (8), ta có $\overline{\overline{p}} \wedge \overline{q}$ (9) [*luật phủ định De Morgan*].

Từ (9), ta có $p \wedge \overline{q}$ (10) [*luật phủ định kép*].

Từ (10), ta có p (11) [*qui tắc hội đơn giản*].

Từ (11), ta có $\overline{s} \vee p$ (12) [*qui tắc tuyển đơn giản*].

Từ (12), ta có $s \to p$ (4) [*phục hồi dấu* $\to$]. Như vậy suy luận c) *đúng*.

c) [$(\overline{p} \vee q) \to (r \wedge s)$ (1) và $\overline{t}$ (2) và $r \to t$ (3)] $\Rightarrow$ [$s \to p$] (4).

Ta chứng minh c) *đúng* bằng ***Cách 3***: Giả sử (1), (2) và (3) *đều đúng*.

Do (2) đúng nên t sai.

Do (3) đúng và t sai nên r sai.

Do r sai nên $(r \wedge s)$ sai.

Do (1) đúng và $(r \wedge s)$ sai nên $(\overline{p} \vee q)$ sai.

Do $(\overline{p} \vee q)$ sai nên $\overline{p}$ sai.

Do $\overline{p}$ sai nên p đúng.

Do p đúng nên (4) đúng. Như vậy suy luận c) *đúng*.

d) [p (1) và $\overline{p} \to$ q (2) và $(q \wedge r) \to s$ (3) và $t \to r$ (4)] $\Rightarrow$ $\overline{s} \to \overline{t}$ (5).

Ta chứng minh d) *sai* bằng cách *gán các chân trị đặc biệt* 0 hoặc 1 cho các biến mệnh đề p, q, r, s và t sao cho (1), (2), (3), (4) *đều đúng* và (5) *sai*.

Gán chân trị 1 cho p, r, t và gán chân trị 0 cho q, s thì (1), (2), (3), (4) *đều đúng* và (5) *sai*. Như vậy suy luận d) *sai trong một trường hợp đặc biệt đã gán* nên d) *sai*.

<u>GHI CHÚ</u> **:** Trong việc kiểm tra suy luận e) dưới đây là *đúng*, ta chỉ nên dùng ***Cách 1*** hay ***Cách 2*** mà thôi (nếu dùng ***Cách 3*** sẽ phức tạp và khó khăn vì khi xem xét khả năng *đúng* của một mệnh đề dạng $\to$ hoặc dạng $\vee$, ta phải xử lý 3 trường hợp xảy ra).

e) [$\overline{p} \vee q$ (1) và $\overline{p} \to r$ (2) và $\overline{r} \vee s$ (3)] $\Rightarrow$ [$\overline{q} \to s$] (4).

Cách 1 : Từ (3), ta có $r \to s$ (5) [*phục hồi dấu* $\to$].

Từ (2) và (5), ta có $\overline{p} \to s$ (6) [*qui tắc tam đoạn luận*].

Từ (1), ta có $\overline{q} \to \overline{p}$ (7) [*phục hồi dấu* $\to$].

Từ (7) và (6), ta có (4) [*qui tắc tam đoạn luận*].

Như vậy suy luận e) *đúng*.

e) [$\overline{p} \vee q$ (1) và $\overline{p} \to r$ (2) và $\overline{r} \vee s$ (3)] $\Rightarrow$ [$\overline{q} \to s$] (4).

Cách 2 : Giả sử (1), (2) và (3) *đều đúng* và (4) *sai*.

Do (4) sai nên q và s đều sai.

Do (1) đúng và q sai nên p sai.

Do (2) đúng và p sai nên r đúng.

Do r đúng và s sai nên (3) sai : *mâu thuẫn với điều đã giả sử*.

Như vậy suy luận e) *đúng*.