ÔN THI TOÁN RỜI RẠC CUỐI KỲ

1/ Cho hàm Boole f theo các biến x, y, z và t có dạng đa thức

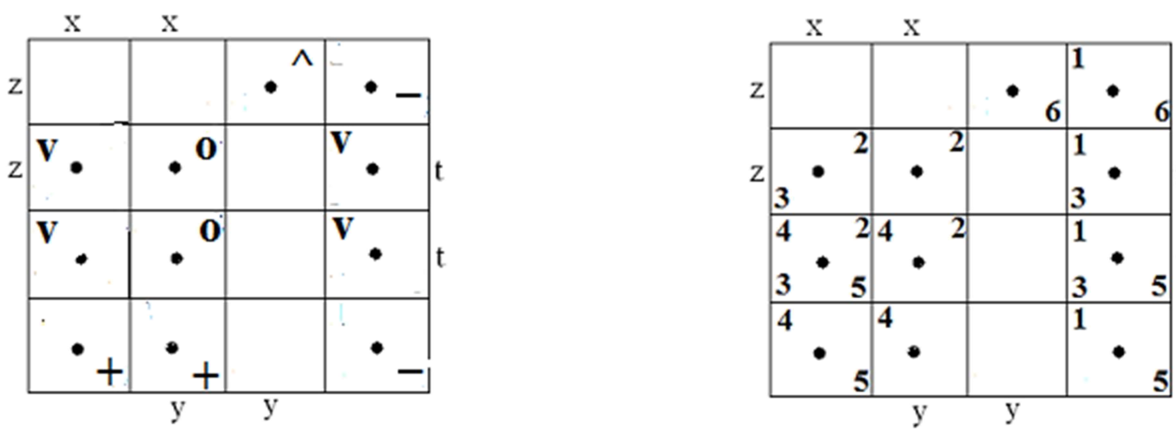
$$f(x, y, z, t) = (x\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{x}\,y\,z)\bar{t} \vee t\,(\bar{y} \vee x\,y) = x\bar{z}\,\bar{t} \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{t} \vee \bar{x}\,y\,z\bar{t} \vee \bar{y}\,t \vee x\,y\,t$$

a) Vẽ biểu đồ $S = \text{Kar}(f)$ và xác định các tế bào lớn của S.

b) Tìm công thức đa thức tối tiểu của f. Từ đó vẽ một mạng các cổng tổng hợp f.

GIẢI

a) $S = \text{Kar}(f) = \text{K}(x\bar{z}\,\bar{t})\ (+) \cup \text{K}(\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{t})\ (-) \cup \text{K}(\bar{x}\,y\,z\bar{t})\ (\wedge) \cup \text{K}(\bar{y}\,t)\ (\vee) \cup \text{K}(x\,y\,t)\ (\text{o})$



$S = \text{Kar}(f)$ (0,5 đ)

Các tế bào lớn của S là $T_1 = \bar{x}\,\bar{y}$, $T_2 = x\,t$, $T_3 = \bar{y}\,t$, $T_4 = x\bar{z}$, $T_5 = \bar{y}\,\bar{z}$ và $T_6 = \bar{x}\,z\bar{t}$.

b) Thực hiện thuật toán, ta có được 3 phép bao phủ cho $S = \text{Kar}(f)$:

$$\begin{array}{c} T_1 \text{ (tối tiểu)} \\ \uparrow \\ T_2 \to T_4 \to T_6 \to T_3 \to T_1 \text{ (chưa tối tiểu)} \\ \downarrow \\ T_5 \text{ (tối tiểu)} \end{array}$$

Ta có 3 phép phủ cho $S = \text{Kar}(f)$ là

$S = T_2 \cup T_4 \cup T_6 \cup T_1$ (1), $S = T_2 \cup T_4 \cup T_6 \cup \mathbf{T_3} \cup T_1$ (2) và $S = T_2 \cup T_4 \cup T_6 \cup T_3 \cup T_5$ (3).

Phép phủ (2) chưa tối tiểu [vì dư $\mathbf{T_3}$ so với (1)]. Như vậy có hai phép phủ tối tiểu cho $S = \text{Kar}(f)$ là và (3). Từ (1) và (3), ta có $f(x, y, z, t) = x\,t \vee x\bar{z} \vee \bar{x}\,z\bar{t} \vee \bar{x}\,\bar{y}$ (nhận là công thức đa thức tối tiểu của f) và $f(x, y, z, t) = x\,t \vee x\bar{z} \vee \bar{x}\,z\bar{t} \vee \bar{y}\,t \vee \bar{y}\,\bar{z}$ (bị loại vì phức tạp hơn công thức trên).

Tự vẽ một mạng các cổng tổng hợp f từ công thức đa thức tối tiểu của nó.

2/ Cho hàm Boole f theo các biến x, y, z và t có dạng đa thức

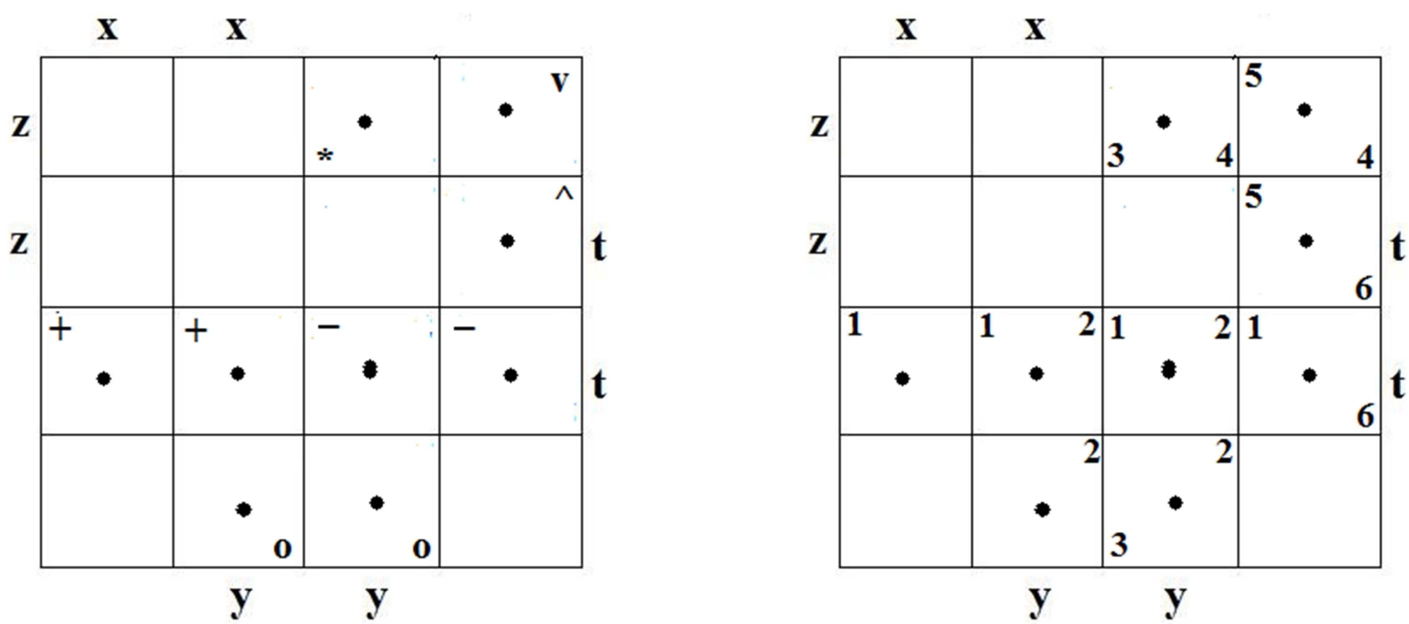
$$f(x, y, z, t) = (x\bar z \vee \bar x\,\bar z \vee \bar x\,\bar y z)\,t \vee \bar t\,(\bar x\,\bar y z \vee y\bar z \vee \bar x y z)$$
$$= x\bar z t \vee \bar x\,\bar z t \vee \bar x\,\bar y z t \vee \bar x\,\bar y z\bar t \vee y\bar z\,\bar t \vee \bar x y z\bar t\,.$$

a) Vẽ biểu đồ $S = \text{Kar}(f)$ và xác định các tế bào lớn của S.

b) Tìm các công thức đa thức tối tiểu của f. Từ đó vẽ một mạng các cổng tổng hợp f.

GIẢI

a) S = Kar(f) = K($x\bar z\,t$) (+) $\cup$ K($\bar x\,\bar z\,t$) (–) $\cup$ K($\bar x\,\bar y z\,t$) ($\wedge$) $\cup$ K($\bar x\,\bar y z\bar t$) ($\vee$) $\cup$ K($y\bar z\,\bar t$) (**o**) $\cup$ K($\bar x y z\bar t$) (*)



S = Kar(f)

S có 6 tế bào lớn $T_1 = \bar z\,t$, $T_2 = y\bar z$, $T_3 = \bar x y\bar t$, $T_4 = \bar x z\bar t$, $T_5 = \bar x\,\bar y z$ và $T_6 = \bar x\,\bar y t$.

b) S có 4 phép phủ như sau : $S = T_1 \cup T_2 \cup T_5 \cup T_3$ (1), $S = T_1 \cup T_2 \cup T_5 \cup T_4$ (2),

$S = T_1 \cup T_2 \cup T_4 \cup T_5$ (3), $S = T_1 \cup T_2 \cup T_4 \cup T_6$ (4),

Phép phủ (2) và (3) trùng nhau nên ta chỉ có 3 phép phủ tối tiểu là (1), (2) và (4). Từ (1), (2) và (4), ta có 3 công thức đa thức đơn giản như nhau cho f :

$T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow T_5 \rightarrow T_3$
$\quad\;\; \downarrow \quad\; \downarrow$
$T_5 \leftarrow T_4 \quad T_4$
$\quad\;\; \downarrow$
$\quad\;\; T_6$

f (x, y, z, t) $= \bar z\,t \vee y\bar z \vee \bar x\,\bar y z \vee \bar x y\bar t$ (công thức đa thức tối tiểu của f)

$= \bar z\,t \vee y\bar z \vee \bar x z\bar t \vee \bar x\,\bar y z$ (công thức đa thức tối tiểu của f)

$= \bar z\,t \vee y\bar z \vee \bar x z\bar t \vee \bar x\,\bar y\,t$ (công thức đa thức tối tiểu của f) .

Tự vẽ một mạng các cổng tổng hợp f từ một công thức đa thức tối tiểu của nó (công thức đầu chẳng hạn).

3/ f (x, y, z, t) $= y\bar t \vee x\bar y\,t \vee \bar x\,\bar t \vee \bar z\,\bar t$ (*) $= y\bar t \vee x\bar y\,t \vee \bar z\,\bar t \vee \bar x z\bar t$ (**) : công thức (*) đơn giản hơn (**).

4/ Cho $T = \{ 1, 2, 3 \}$ và đặt $\forall x, y \in T,\ x\Re y \Leftrightarrow x + 1 \geq y$.

Xác định tập hợp $L = \{ (x, y) \in T^2 \mid x\Re y \}$.

Xét các tính chất phản xạ, đối xứng, phản xứng và truyền của quan hệ hai ngôi $\Re$.

GIẢI

L = { (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3) }.

$\Re$ phản xạ ($\forall x \in T, x + 1 \geq x$ nên $x \Re x$). $\Re$ không đối xứng ($\exists 3, 1 \in T, 3\Re 1$ và $1 \overline{\Re} 3$).

$\Re$ không phản xứng ($\exists 1, 2 \in T, 1\Re 2, 2\Re 1$ và $1 \neq 2$). $\Re$ không truyền ($\exists 1, 2, 3 \in T, 1\Re 2, 2\Re 3$ và $1 \overline{\Re} 3$).

5/ a) Giải phương trình trên $\mathbf{Z}_{14}$: $\overline{56}.\overline{x} = \overline{-79}$, $\overline{-532}.\overline{y} = \overline{420}$ và $\overline{275}.\overline{z} = \overline{-347}$.

b) Giải phương trình trên $\mathbf{Z}_{32}$: $\overline{-404}.\overline{y} = \overline{954}$ và $\overline{668}.\overline{x} = \overline{-716}$

GIẢI

a) Trên $\mathbf{Z}_{14}$: $\overline{56}.\overline{x} = \overline{-79} \Leftrightarrow \overline{0}.\overline{x} = \overline{5} \neq \overline{0}$: phương trình vô nghiệm.

$\overline{-532}.\overline{y} = \overline{420} \Leftrightarrow \overline{0}.\overline{x} = \overline{0}$: phương trình có nghiệm tùy ý trong $\mathbf{Z}_{14}$

(14 nghiệm : $\overline{y} = \overline{0}, \overline{1}, .., \overline{13}$).

$\overline{275}.\overline{z} = \overline{-347} \Leftrightarrow \overline{9}.\overline{z} = \overline{3} \Leftrightarrow \overline{z} = \overline{9}^{-1}.\overline{3} = \overline{11}.\overline{3} = \overline{33} = \overline{5}$

[nghiệm duy nhất vì $(9, 14) = 1$ và $\overline{9} \in U(\mathbf{Z}_{14})$].

b) Trên $\mathbf{Z}_{32}$: $\overline{-404}.\overline{y} = \overline{954} \Leftrightarrow \overline{12}.\overline{y} = \overline{26} \Rightarrow \overline{8}.\overline{12}.\overline{y} = \overline{8}.\overline{26} \Rightarrow \overline{96}.\overline{y} = \overline{208}$

$\Rightarrow \overline{0}.\overline{y} = \overline{16} \neq \overline{0}$: phương trình vô nghiệm.

[n = 32, a = 12, **d** = (a, n) = **4**, n = **4** × 8 = **d**n' với n' = 8, b = 26 và $\overline{b \vdots d}$. Nhân $\overline{n'} = \overline{8}$ vào hai vế].

$\overline{668}.\overline{x} = \overline{-716} \Leftrightarrow \overline{28}.\overline{x} = \overline{20}$ (1) [n = 32, a = 28, b = 20, **d** = (a, n) = **4**, n = **4** × 8, a = **4** × 7, b = **4** × 5].

$\Leftrightarrow \overline{4}.\overline{7}\,\overline{x} = \overline{4}.\overline{5}$ (trong $\mathbf{Z}_{4\times 8}$) đưa đến $\overline{7}.\overline{X} = \overline{5}$ (trong $\mathbf{Z}_8$) (2). Ta có $(7, 8) = 1$ nên $\overline{7} \in U(\mathbf{Z}_8)$.

Do $\overline{7}.\overline{7} = \overline{1}$ nên $\overline{7}^{-1} = \overline{7}$ và (2) có nghiệm duy nhất (trong $\mathbf{Z}_8$) là $\overline{X} = \overline{7}^{-1}.\overline{5} = \overline{7}.\overline{5} = \overline{35} = \overline{3}$.

Suy ra (1) có 4 nghiệm trong $\mathbf{Z}_{32}$ là $\overline{x} = \overline{3 + 8j}$ (j = 0, 1, 2 , 3), nghĩa là

$\overline{x} = \overline{3}$, $\overline{x} = \overline{11}$, $\overline{x} = \overline{19}$, $\overline{x} = \overline{27}$ (trong $\mathbf{Z}_{32}$).

6/ $\forall x, y \in \mathbf{Z}$, đặt $x \,\Re\, y \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}, x^2 - y^2 = 8\boldsymbol{k} \Leftrightarrow (x^2 - y^2) \,\vdots\, 8 \Leftrightarrow x^2 - y^2 \equiv 0 \pmod{8}$.

$\forall x, y \in \mathbf{N}$, đặt $x \,\gamma\, y \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{k} \in \mathbf{N}, x^2 - y^2 = 8\boldsymbol{k}$.

a) Chứng minh $\Re$ là một quan hệ tương đương trên $\mathbf{Z}$ mà không là quan hệ thứ tự.

b) Chứng minh γ là một quan hệ thứ tự trên $\mathbf{N}$ mà không là quan hệ tương đương.

<u>GIẢI</u>

a) $\Re$ phản xạ vì $\forall x \in \mathbf{Z}, (x^2 - x^2) = 0 \in \mathbf{Z}$ nên $x\Re x$.

$\Re$ đối xứng vì $\forall x, y \in \mathbf{Z}$, $x\Re y \Rightarrow (x^2 - y^2) = \boldsymbol{k} \in \mathbf{Z} \Rightarrow (y^2 - x^2) = (-\boldsymbol{k}) \in \mathbf{Z} \Rightarrow y\Re x$.

$\Re$ truyền vì $\forall x, y, z \in \mathbf{Z}, (x\Re y$ và $y\Re z) \Rightarrow [\,(x^2 - y^2) = \boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}$ và $(y^2 - z^2) = \boldsymbol{k'} \in \mathbf{Z}\,] \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2 - z^2) = (x^2 - y^2) + (y^2 - z^2) = (\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k'}) \in \mathbf{Z} \Rightarrow x\Re z$.

$\Re$ không phản xứng vì $\exists\, 1, -1 \in \mathbf{Z}$, $1\Re(-1), (-1)\Re 1$ và $1 \neq -1$.

$[\,1^2 - (-1)^2 = (-1)^2 - 1^2 = 8.0$ với $0 \in \mathbf{Z}\,]$.

Vậy $\Re$ là một quan hệ tương đương nhưng không là quan hệ thứ tự trên $\mathbf{Z}$.

b) γ phản xạ vì $\forall x \in \mathbf{N}, (x^2 - x^2) = 0 \in \mathbf{N}$ nên $x \,\gamma\, x$.

γ phản xứng vì $\forall x, y \in \mathbf{N}$, $(x \,\gamma\, y$ và $y \,\gamma\, x) \Rightarrow (x^2 - y^2) = \boldsymbol{k} \in \mathbf{N}$ và $(y^2 - x^2) = (-\boldsymbol{k}) \in \mathbf{N} \Rightarrow \boldsymbol{k} = 0$

$\Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$.

γ truyền vì $\forall x, y, z \in \mathbf{N}, (x \,\gamma\, y$ và $y \,\gamma\, z) \Rightarrow [\,(x^2 - y^2) = \boldsymbol{k} \in \mathbf{N}$ và $(y^2 - z^2) = \boldsymbol{k'} \in \mathbf{N}\,] \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2 - z^2) = (x^2 - y^2) + (y^2 - z^2) = (\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k'}) \in \mathbf{N} \Rightarrow x \,\gamma\, z$. .

γ không đối xứng vì $\exists\, 5, 3 \in \mathbf{Z}$, $5 \,\gamma\, 3$ và $3 \,\overline{\gamma}\, 5$

$[\,5^2 - 3^2 = 8.2$ với $2 \in \mathbf{N}$ và $3^2 - 5^2 = -16 \neq 8k, \forall k \in \mathbf{N}\,]$.

Vậy γ là một quan hệ thứ tự nhưng không là quan hệ tương đương trên $\mathbf{N}$.

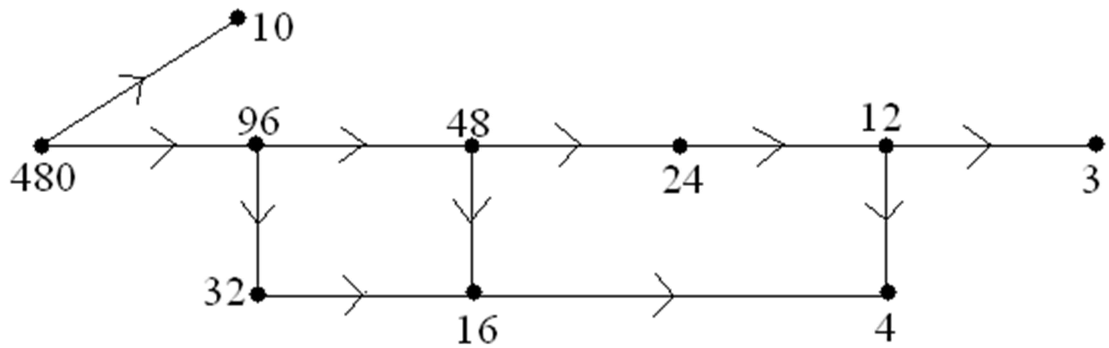
7/ Cho $S = \{3, 4, 10, 12, 16, 24, 32, 48, 96, 480\}$. Xét quan hệ hai ngôi $\vdots$ trên S như sau:

$$\forall x, y \in S,\ x \,\vdots\, y \Leftrightarrow x \text{ là một bội số của } y$$

Vẽ sơ đồ Hasse cho $(S, \vdots)$ và tìm các phần tử cực tiểu (tối tiểu), cực đại (tối đại), nếu có.

$\vdots$ là thứ tự *toàn phần* hay *bán phần*?

GIẢI



(S,⋮)

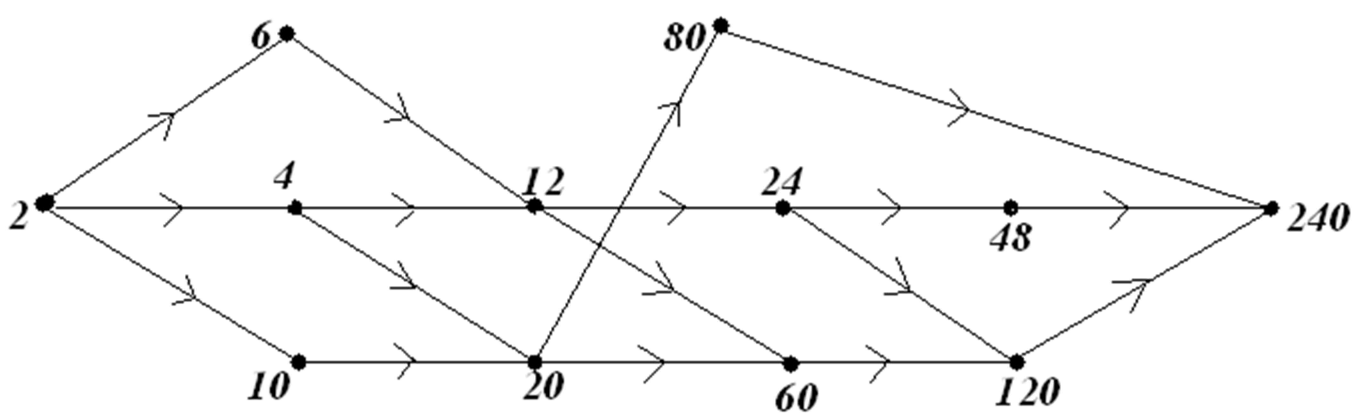
Min(S, ⋮) = 480. Các phần tử tối đại là 3, 4 và 10.

⋮ là thứ tự bán phần trên S vì 3, 4 ∈ S có $\overline{3⋮4}$ và $\overline{4⋮3}$.

8/ Cho T = { 2, 4, 6, 10, 12, 20, 24, 48, 60, 80, 120, 240} và quan hệ thứ tự | trên T như sau : $\forall x, y \in T$, x | y ⇔ x là một ước số của y.

Vẽ sơ đồ Hasse cho (T, |) và tìm min, max, các phần tử tối tiểu và tối đại (nếu có). | là thứ tự *toàn phần* hay *bán phần* ?

GIẢI



(T, |)

Min(T, |) = 2 và max(T, |) = 240 . | là thứ tự bán phần trên T vì 4, 6 ∈ T có $\overline{4|6}$ và $\overline{6|4}$.
