Cálculo III
Integral de linha de campo vetorial

Profª Mariana Villapouca

24 de outubro de 2024

Campo vetorial em $\mathbb{R}^2$

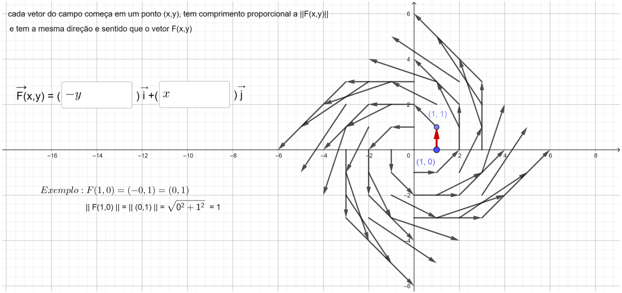
Um **campo vetorial em** $\mathbb{R}^2$ é uma função

$$\begin{array}{rccl} F: & D \subseteq \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y)) \end{array}$$

Exemplo

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & F(x,y) = (-y,x) \end{array}$$

é um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$.



https://www.geogebra.org/m/httsweat

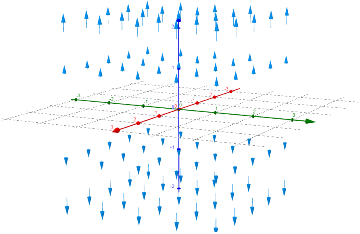
Campo vetorial em $\mathbb{R}^3$

Um **campo vetorial em** $\mathbb{R}^3$ é uma função

$$\begin{array}{rccl} F: & D \subseteq \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)) \end{array}$$

Exemplo

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & F(x,y,z) = (0,0,z) \end{array}$$ *é um campo vetorial em* $\mathbb{R}^3$.



https://www.geogebra.org/3d/shvuvan4

Integral de linha de um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$

Consideremos uma curva C em $\mathbb{R}^2$ parametrizada por $\sigma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, onde σ é de classe C^1, e $F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ um campo vetorial contínuo em C (isto é, F_1, F_2 são contínuas em C). Definimos a **integral de linha de F ao longo de C** por

$$\int_C F \cdot dr = \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt$$

$\downarrow$
produto escalar

Assim,

$$\int_C F \cdot dr = \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt = \int_a^b F_1(\sigma(t))x'(t) + F_2(\sigma(t))y'(t)\, dt$$

com isso podemos usar a seguinte notação

$$\int_C F \cdot dr = \int_C F_1 dx + F_2 dy$$

Integral de linha de um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$

Consideremos uma curva C em $\mathbb{R}^3$ parametrizada por $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in [a, b]$, onde σ é de classe C^1, e $F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ um campo vetorial contínuo em C (isto é, F_1, F_2, F_3 são contínuas em C). Definimos a **integral de linha de F ao longo de C** por

$$\int_C F \cdot dr = \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt$$

$\downarrow$

produto escalar

Assim,

$$\int_C F \cdot dr = \int_a^b F_1(\sigma(t))x'(t) + F_2(\sigma(t))y'(t) + F_3(\sigma(t))z'(t)\, dt$$

com isso podemos usar a seguinte notação

$$\int_C F \cdot dr = \int_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

Observações

Se a curva C é fechada, isto é, $\sigma(a) = \sigma(b)$, então a integral de linha é denotada por $\displaystyle\oint_C F \cdot dr$.

Obs: A fórmula ainda é válida se $F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)$ é contínua por partes em $[a, b]$.

Exemplo 1

Calcule $\int_C F \cdot dr$, onde $F(x,y,z) = (x,y,z)$ e C é a curva parametrizada por $\sigma(t) = (sent, cost, t), 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

Resolução

- $F(x,y,z) = (x,y,z)$
- $F(\sigma(t)) =$
- $\sigma'(t) =$
- $\int_C F \cdot dr = \int_0^{2\pi} F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\; dt =$

$$\vdots$$

Exemplo 2

Calcule a integral de linha do campo vetorial

$$F(x,y) = (x^2 - 2xy, x^3 + y)$$

de $(0,0)$ a $(1,1)$ ao longo do segmento de reta C_1 de equações paramétricas $x = t, y = t, 0 \leqslant t \leqslant 1$.

- $F(x,y) = (x^2 - 2xy, x^3 + y)$
- $F(\sigma(t)) =$
- $\sigma'(t) =$
- $\displaystyle\int_{C_1} F \cdot dr = \int_0^1 F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt =$

$$\vdots$$

Exemplo 3

Calcule a integral de linha do campo vetorial

$$F(x,y) = (x^2 - 2xy, x^3 + y)$$

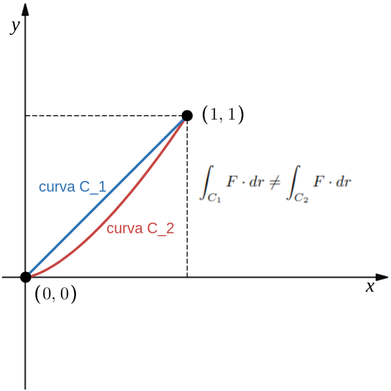
de $(0,0)$ a $(1,1)$ ao longo da curva C_2 de equações paramétricas $x = t^2, y = t^3, 0 \leqslant t \leqslant 1$.

- $F(x,y) = (x^2 - 2xy, x^3 + y)$
- $F(\sigma(t)) =$
- $\sigma'(t) =$
- $\displaystyle\int_{C_2} F \cdot dr = \int_0^1 F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt =$

$$\vdots$$

Observação 1

Note que nos exemplos 2 e 3 calculamos a integral de linha do mesmo campo vetorial mas por dois caminhos diferentes que ligam os pontos $(0,0)$ e $(1,1)$.



Logo, notamos que a integral de linha de um campo vetorial de um ponto A a um ponto B depende, em geral, da curva que liga esses dois pontos.

No entanto, para alguns campos vetoriais, a integral depende apenas dos pontos A e B e não da curva que os liga. Neste caso, dizemos que a integral de linha independe do caminho que liga A e B. Veremos quais condições o campo deve satisfazer para que isto ocorra no próximo Teorema.

Teorema

Seja F um campo vetorial contínuo definido num subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^2$) para o qual existe uma função real f tal que $\nabla f = F$ em U. Se C é uma curva em U com pontos inicial e final A e B, respectivamente, parametrizada por uma função $\sigma(t)$, C^1 por partes então

$$\int_C F \cdot dr = \int_C \nabla f \cdot dr = f(B) - f(A)$$

tal campo vetorial F é dito **campo gradiente ou campos conservativo** e a função f é dita uma **função potencial**.

Exemplo 4

Considere o campo gradiente $F(x,y) = (e^{-y} - 2x, -xe^{-y} - seny)$. Calcule $\int_C F \cdot dr$, onde C é qualquer curva C^1 por partes de $A = (\pi, 0)$ até $B = (0, \pi)$.

Resolução: Pelo Teorema anterior,

$$\int_C F \cdot dr = f(0,\pi) - f(\pi, 0)$$

onde f é uma função potencial de F em $\mathbb{R}^2$. Vamos determinar f:

$$\nabla f = F$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (e^{-y} - 2x, -xe^{-y} - seny)$$

$$\vdots$$

Propriedades

- **Linearidade**

$$\int_C (aF + bG) \cdot dr = a \int_C F \cdot dr + b \int_C G \cdot dr$$

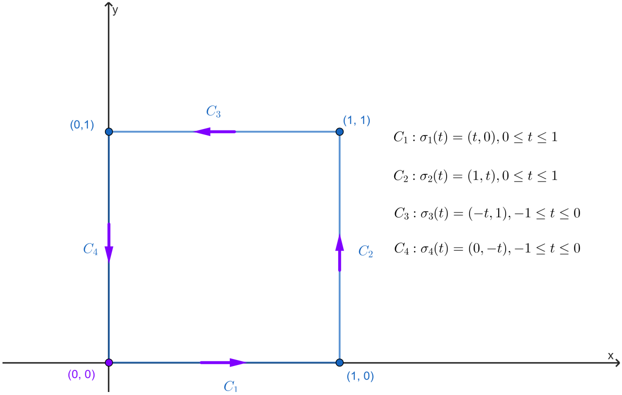
  onde a e b são constantes reais.

- **Aditividade** Se $C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n$ então

$$\int_C F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr + \int_{C_2} F \cdot dr + \cdots + \int_{C_n} F \cdot dr$$

Exemplo 5

Considere a curva C a fronteira do quadrado no plano xy de vértices $(0,0),(1,0),(1,1)$ e $(0,1)$, orientada no sentido anti-horário. Calcule a integral de linha $\displaystyle\int_C x^2\,dx + xy\,dy$.



$C_1 : \sigma_1(t) = (t, 0), 0 \leq t \leq 1$

$C_2 : \sigma_2(t) = (1, t), 0 \leq t \leq 1$

$C_3 : \sigma_3(t) = (-t, 1), -1 \leq t \leq 0$

$C_4 : \sigma_4(t) = (0, -t), -1 \leq t \leq 0$

$\vdots$

Parametrizações equivalentes

Dizemos que duas parametrizações $\sigma(t)(a \leqslant t \leqslant b)$ e $\beta(t)(c \leqslant t \leqslant d)$ são **parametrizações equivalentes** da curva C, se existe uma função $h : [c, d] \to [a, b]$ bijetora e de classe C^1 tal que

$$\beta(t) = \sigma(h(t))$$

Se h é crescente, dizemos que h **preserva a orientação**, isto é, uma partícula que percorre C com a parametrização $beta(t)$ se move no mesmo sentido que a partícula que percorre C segundo a parametrização $\sigma(t)$. Se h é decrescente, dizemos que h **inverte a orientação**.

Teorema

Sejam $\sigma(t)(a \leqslant t \leqslant b)$ e $\beta(t)(c \leqslant t \leqslant d)$ parametrizações C^1 por partes e equivalentes (como definida anteriormente).
Se h preserva a orientação, então

$$\int_{C_\beta} F \cdot dr = \int_{C_\sigma} F \cdot dr$$

Se h inverte a orientação, então

$$\int_{C_\beta} F \cdot dr = -\int_{C_\sigma} F \cdot dr$$

onde C_β e C_σ denotam a curva C parametrizada por $\beta(t)$ e $\sigma(t)$, respectivamente.

Assim, se C^- é a curva C com orientação oposta, isto é, $h(t) = -t$ então

$$\int_{C^-} F \cdot dr = -\int_C F \cdot dr$$