Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный технический университет»
Факультет электроники и вычислительной техники
Кафедра «Физика»

Семестровая работа по дисциплине
«Статистическая радиофизика»

Вариант №19

Выполнил
студент группы Ф-469
Чечеткин И. А.

Проверил
доцент, к. физ.-мат. наук
Поляков И. В.

Волгоград, 2014

Задача 6: *Определите непосредственным интегрированием* $m_k(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k w(x)\,dx$ *начальные моменты непрерывной случайной величины, имеющей закон распределения Накагами (m-распределения):*

$$w(x) = \frac{2m^m x^{2m-1}}{\mu^m \Gamma(m)}\, e^{-\frac{m}{\mu}x^2},$$

при $x \geqslant 0$, $m \geqslant 1/2$.

Решение:

Математическое ожидание:

$$M = m_1 = \int\limits_0^{\infty} \frac{2m^m x^{2m-1}}{\mu^m \Gamma(m)}\, e^{-\frac{m}{\mu}x^2} x\,dx = \frac{2m^m}{\mu^m \Gamma(m)} \int\limits_0^{\infty} x^{2m}\, e^{-\frac{m}{\mu}x^2}\,dx.$$

Введем замену $y = mx^2/\mu$ $(dy = 2mx/\mu\,dx)$, тогда:

$$M = \frac{m^{-1/2}}{\mu^{-1/2}} \frac{1}{\Gamma(m)} \int\limits_0^{\infty} y^{m-\frac{1}{2}}\, e^{-y}\,dy = \sqrt{\frac{\mu}{m}}\,\frac{\Gamma(m+1/2)}{\Gamma(m)}.$$

Второй момент:

$$m_2 = \int\limits_0^{\infty} \frac{2m^m x^{2m-1}}{\mu^m \Gamma(m)}\, e^{-\frac{m}{\mu}x^2} x^2\,dx = \frac{2m^m}{\mu^m \Gamma(m)} \int\limits_0^{\infty} x^{2m+1}\, e^{-\frac{m}{\mu}x^2}\,dx.$$

Введем замену $y = mx^2/\mu$ $(dy = 2mx/\mu\,dx)$, тогда:

$$m_2 = \frac{m^{-1}}{\mu^{-1}} \frac{1}{\Gamma(m)} \int\limits_0^{\infty} y^m\, e^{-y}\,dy = \frac{\mu}{m}\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m)} = \mu\frac{m\Gamma(m)}{m\Gamma(m)} = \mu.$$

Дисперсия:

$$D = \mu_2 = m_2 - m_1^2 = \mu - \frac{\mu}{m}\left(\frac{\Gamma(m+1/2)}{\Gamma(m)}\right)^2 = \mu\left[1 - \frac{1}{m}\left(\frac{\Gamma(m+1/2)}{\Gamma(m)}\right)^2\right].$$

Задача 16: *Найдите плотность вероятности и начальные моменты случайной величины $\eta = e^{\xi}$, где ξ – случайная гауссовская величина с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2.*

Решение:

Плотность вероятности $w_\xi(x)$: $w_\xi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$.

Зависимость $x(y)$: $x(y) = \ln y$. Производная от y по x: $\dfrac{dy}{dx} = e^x = y$.

Таким образом, плотность вероятности $w_\eta(y)$:

$$w_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(\ln y-a)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{y}.$$

Проверим нормировку в пределах от $y_1 = e^{-\infty} = 0$ до $y_2 = e^{\infty} = \infty$:

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma y} e^{-\frac{(\ln y-a)^2}{2\sigma^2}}\, dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(\ln y-a)^2}{2\sigma^2}}\, d(\ln y - a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \sqrt{\pi}\sqrt{2\sigma^2} = 1.$$

Математическое ожидание:

$$M_\eta = m_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_0^\infty y e^{-\frac{(\ln y-a)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{y}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{(\ln y-a)^2}{2\sigma^2}}\, dy.$$

Делая замену $\ln y = z$ ($dy = e^z\, dz$), получим

$$m_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2} + z}\, dz.$$

Приводя к полному квадрату в степени экспоненты, получим окончательно

$$m_1 = \frac{e^{a+\sigma^2/2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\left[z-\left(a+\sigma^2\right)\right]^2}{2\sigma^2}}\, d\left[z - \left(a+\sigma^2\right)\right] = e^{a+\sigma^2/2} \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} = e^{a+\sigma^2/2}.$$

Производя аналогичные действия, получим для m_2:

$$m_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_0^\infty y^2 e^{-\frac{(\ln y-a)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{y}\, dy = e^{2(\sigma^2+a)}.$$

Тогда дисперсия: $D_\eta = m_2 - m_1^2 = e^{2(\sigma^2+a)} - e^{2a+\sigma^2}$.

Задача 39: *Вычислить корреляционную функцию* $B_x(t_1, t_2)$ *и дисперсию* $D_x(t)$ *случайного процесса Винера*

$$x(t) = \int\limits_0^t n(\vartheta)\, d\vartheta,$$

где $n(t)$ *– стационарный белый шум с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией* $B_n(\tau) = D\delta(\tau)$.

Решение:

По определению корреляционной функции:

$$B_x(t_1, t_2) = \big\langle x(t_1)x(t_2)\big\rangle = \left\langle \int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2} n(\vartheta_1)n(\vartheta_2)\, d\vartheta_1\, d\vartheta_2 \right\rangle =$$

$$= \int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2} \big\langle n(\vartheta_1)n(\vartheta_2)\big\rangle\; d\vartheta_1\, d\vartheta_2 = \int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2} D\delta(\vartheta_1 - \vartheta_2)\, d\vartheta_1\, d\vartheta_2.$$

Если $t_1 \geqslant t_2$:

$$\int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2} D\delta(\vartheta_1 - \vartheta_2)\, d\vartheta_1\, d\vartheta_2 = \int\limits_0^{t_2} D\, d\vartheta_2 = Dt_2.$$

Если $t_1 < t_2$, то

$$\int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2} D\delta(\vartheta_1 - \vartheta_2)\, d\vartheta_1\, d\vartheta_2 = \int\limits_0^{t_1} D\, d\vartheta_1 = Dt_1.$$

Таким образом,

$$B_x(t_1, t_2) = \begin{cases} Dt_2 \text{ при } t_1 \geqslant t_2, \\ Dt_1 \text{ при } t_1 < t_2. \end{cases}$$

Дисперсия:

$$D_x = B_x\Big|_{t_1 = t_2 = t} = Dt.$$

Задача 49: *Для равномерного прямоугольного распределения на отрезке* $\left[-\lambda/2, \lambda/2\right]$, $\lambda > 0$, *найти характеристическую функцию, а с ее помощью получить общее выражения для моментов.*

Решение:

Плотность распределения:

$$w_x = \frac{1}{\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2}\right)} = \frac{1}{\lambda}.$$

Тогда характеристическая функция равна

$$\vartheta_x = \left\langle e^{jux} \right\rangle = \int\limits_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \frac{1}{\lambda} e^{jux}\, dx = \frac{1}{ju\lambda} e^{jux} \Big|_{-\lambda/2}^{\lambda/2} =$$
$$= \frac{1}{ju\lambda}\left(e^{ju\frac{\lambda}{2}} - e^{-ju\frac{\lambda}{2}}\right) = \frac{2}{u\lambda} \sin\left(\frac{u\lambda}{2}\right).$$

Момент k-порядка:

$$m_k = \frac{1}{j^k}\left(\frac{\partial^k \vartheta_x(u)}{\partial u^k}\right)\Bigg|_{u=0} = \frac{2}{\lambda j^k}\frac{\partial^k}{\partial u^k}\left(\frac{1}{u}\sin\left[\frac{u\lambda}{2}\right]\right)\Bigg|_{u=0}.$$