Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный технический университет»
Факультет электроники и вычислительной техники
Кафедра физики

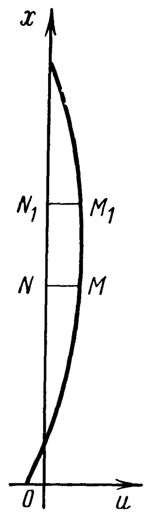
Семестровая работа по дисциплине «Специальные функции»

Выполнил
студент группы Ф-369
Чеченкин И. А.

Проверил
к. ф.-м. н., доцент
Никулин Р. Н.

Волгоград, 2014

№17. Дана тяжелая однородная тонкая нить длины l. Нить закреплена верхним концом в точке $x = l$ и совершает колебания под действием силы тяжести. Максимальное отклонение ее нижнего конца $x = 0$ по вертикали равно h. За ось примем вертикальное направление, вдоль которого расположится нить, когда под действием своего веса она займет прямолинейное положение. Обозначим через $u = u(x,t)$ отклонение точек нити от положения равновесия в момент времени t (см. рис). Рассматривая малые колебания нити такие, что можно пренебречь величиной $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ по сравнению с единицей, найти выражение для $u(x,t)$.
[Найти $u(x,t)$.]



Решение. Так как рассматриваются малые колебания, то:

$$\sin\alpha(x) = \frac{\operatorname{tg}\alpha(x)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha(x)}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial x},$$
$$\cos\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx 1,$$

где $\alpha(x)$ — угол между касательной в точке с абсциссой x к нити в момент времени t и положительным направлением оси Ox.

Натяжение T нити в точке N с абсциссой x равно весу части нити, расположенной вниз от N, т. е. $T = g\rho x$, где ρ — линейная плотность нити, а g — ускорение силы тяжести.

Выделим произвольный элемент нити MM_1, длиной δx, который при равновесии занимал положение NN_1 (см. рис). Горизонтальная составляющая равнодействующей сил натяжения, действующих на концы элемента MM_1, выражается разностью

$$T_H = \left(g\rho x\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_1} - \left(g\rho x\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M,$$

которая с точностью до бесконечно малых высшего порядка равна выражению

$$T_H = g\rho\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)\delta x.$$

Вертикальная составляющая равна

$$T_V = (g\rho x\cos\alpha(x))_{M_1} - (g\rho x\cos\alpha(x))_M \approx g\rho\delta x.$$

Отсюда видно, что вертикальная составляющая равнодействующей сил натяжения и сила тяжести, равная $g\rho\delta x$ и направленная вниз, взаимно уничтожаются. Поэтому можно считать, что элемент нити MM_1 движется под действием только горизонтальной составляющей силы T_H. Тогда искомое дифференциальное уравнение малых колебаний подвешенной нити:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{1}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{1}$$

Задача о колебании подвешенной нити сводится к интегрированию уравнения (1) с граничным условием

$$u\Big|_{x=l} = 0 \tag{2}$$

и с начальными условиями

$$u\Big|_{t=0} = f(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(x). \tag{3}$$

Чтобы применить метод разделения переменных преобразуем уравнение (1) к новой переменной $\xi = \sqrt{x}$, тогда преобразованное уравнение примет вид:

$$\frac{1}{4\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = \frac{1}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{4}$$

Будем искать решение уравнения в виде (5):

$$u = v(\xi)T(t). \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4), получим следующее:

$$\frac{1}{\xi v}\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{dv}{d\xi}\right) = \frac{4}{g}\frac{1}{T}\frac{d^2 T}{dt^2}.$$

Обозначая обе части равенства через постоянную $-\lambda^2$, получим два уравнения:

$$\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{dv}{d\xi}\right) + \lambda^2\xi v = 0, \tag{6}$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + g\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 T = 0. \tag{7}$$

Уравнение (6) является уравнением Бесселя, общее решение которого можно представить в виде

$$v(\xi) = C_1 J_0(\lambda\xi) + C_2 Y_0(\lambda\xi), \tag{8}$$

где $J_0(\lambda\xi)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка:

$$J_0(\lambda\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\lambda\xi}{2}\right)^{2k}}{k!\Gamma(k+1)};$$

а $Y_0(\lambda\xi)$ – функция Бесселя второго рода нулевого порядка:

$$Y_0(\lambda\xi) = \frac{2}{\pi} J_0(\lambda\xi) \ln\frac{\lambda\xi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\lambda\xi}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} \frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}.$$

Так как при $\xi \to 0$ значение $\left|Y_0(\lambda\xi)\right| \to \infty$, то постоянную C_2 в уравнении (8) приравниваем к нулю. Тогда граничное условие (2) даст

$$J_0(\lambda\sqrt{l}) = 0.$$

Уравнение $J_0(\mu) = 0$ имеет бесчисленное множество вещественных корней: μ_1, μ_2, ... Отсюда вытекает, что собственные числа задачи определяются равенством

$$\lambda_k^2 = \frac{\mu_k^2}{l}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{9}$$

Следовательно, собственные функции, соответствующие этим собственным числам имеют следующий вид:

$$v_k(x) = J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right).$$

Общее решение уравнения (7) с учетом (9) имеет вид:

$$T_k(t) = A_k \cos\frac{\sqrt{g}\,\mu_k t}{2\sqrt{l}} + B_k \sin\frac{\sqrt{g}\,\mu_k t}{2\sqrt{l}}.$$

Следовательно, ряд (10)

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos\frac{\sqrt{g}\,\mu_k t}{2\sqrt{l}} + B_k \sin\frac{\sqrt{g}\,\mu_k t}{2\sqrt{l}}\right) J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right) \tag{10}$$

даст решение уравнения (1) при граничном условии (2).

Положив в разложении (10) $t = 0$, получим, что

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right).$$

Это выражение является разложением функции $f(x)$ в ряд Фурье–Бесселя. Тогда коэффициенты A_k выражаются следующим образом:

$$A_k = \frac{1}{lJ_1^2(\mu_k)} \int\limits_0^l f(x) J_0\left(\mu_k \sqrt{\frac{x}{l}}\right) \delta x.$$

Взяв производную от разложения (10) и рассуждая аналогичным образом, найдем коэффициенты B_k:

$$B_k = \frac{2}{\sqrt{gl}\,\mu_k J_1^2(\mu_k)} \int\limits_0^l F(x) J_0\left(\mu_k \sqrt{\frac{x}{l}}\right) \delta x.$$

Обозначая $A_k = N_k \sin\varphi_k$, $B_k = N_k \cos\varphi_k$, перепишем (10) в форме:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} N_k J_0\left(\mu_k \sqrt{\frac{x}{l}}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{g}\,\mu_k t}{2\sqrt{l}} + \varphi_k\right). \tag{11}$$

Отсюда видно, что малые колебания подвешенной нити можно рассматривать как движение, складывающееся из бесчисленного множества гармонических колебаний.

Список литературы

[1] Кошляков, Н. С. Уравнения в частных производных математической физики [Текст] / Кошляков Н. С., Глинер Е. Б., Смирнов М. М. Учебное пособие. – М.: «Высшая школа», 1970.– 712с.