Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный технический университет»
Факультет электроники и вычислительной техники
Кафедра физики

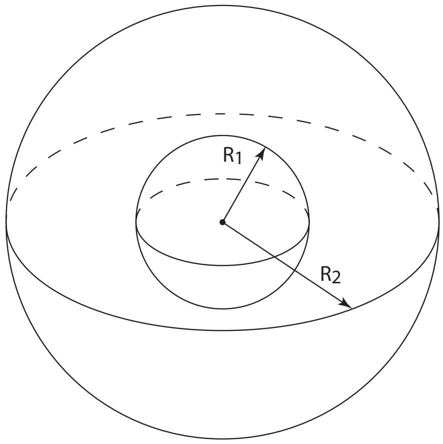
Семестровая работа №1 по дисциплине «Электродинамика»

Выполнила
студентка группы Ф-369
Слоква В. И.

Проверил
доцент Грецов М. В.

Волгоград, 2014

79. Пространство между двумя концентрическими сферами, радиусы которых R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$), заряжено с объемной плотностью $\rho = \alpha/r^2$. Найти полный заряд q, потенциал φ и напряженность $\boldsymbol{E}$ электрического поля. Рассмотреть предельный случай $R_2 \to R_1$, считая при этом $q = \text{const}$.



Решение:

Найдем заряд q:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \delta V = \frac{4}{3}\pi 3r^2\delta r = 4\pi r^2\delta r;$$

$$q = \int \rho\delta V = \int\limits_{R_1}^{R_2} 4\pi\rho r^2\delta r = 4\pi\int\limits_{R_1}^{R_2} \frac{\alpha}{r^2}r^2\delta r = 4\pi\alpha(R_2 - R_1).$$

Если точка находится внутри сферы радиуса R_1, то есть $r \leqslant R_1$, то по теореме Гаусса: $\oint \boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{S} = 4\pi q$, а так как $q = E(\boldsymbol{r})r^2$, то $\oint \boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{S} = 4\pi E r^2$.

Но так как внутри сферы нет зарядов, то $4\pi E r^2 = 0$, следовательно, $E = 0$.

Из уравнения Пуассона $\Delta\varphi = -4\pi\rho$:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = -4\pi\frac{\alpha}{r^2};$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = -4\pi\alpha;$$

$$r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -4\pi\alpha r;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -4\pi\frac{\alpha}{r};$$

$$\varphi = -4\pi\alpha\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r}\delta r = 4\pi\alpha\ln\frac{R_2}{R_1}.$$

Так как $4\pi\alpha = q/(R_2 - R_1)$, то

$$\varphi = \frac{q}{R_2 - R_1}\ln\frac{R_2}{R_1}.$$

Если точка находится между сферами, то есть $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, то

$$\begin{aligned}
&\div \boldsymbol{E} = 4\pi\rho;\\
&\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2E_r\right) = 4\pi\frac{\alpha}{r^2};\\
&r^2E_r = 4\pi\alpha\int\limits_{R_1}^{r}\delta r = 4\pi\alpha(r - R_1);\\
&E_r = \frac{4\pi\alpha(r-R_1)}{r^2} = \frac{q(r-R_1)}{r^2(R_2-R_1)}.
\end{aligned}$$

Так как $E = -\operatorname{grad}\varphi$, то

$$\varphi(r) = \int\limits_{r}^{R_1} E(\boldsymbol{r})\delta r = \int\limits_{r}^{R_1}\frac{q(r-R_1)}{(R_2-R_1)r^2}\delta r = \int\limits_{r}^{R_1}\frac{qr}{(R_2-R_1)r^2}\delta r - \int\limits_{r}^{R_1}\frac{qR_1}{(R_2-R_1)r^2}\delta r =$$
$$= \frac{q}{R_2-R_1}\left(\ln\frac{R_1}{r} + R_1\cdot\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r}\right)\right) = \frac{q}{R_2-R_1}\left(1 - \frac{R_1}{r} - \ln\frac{r}{R_1}\right).$$

Если точка находится за сферой радиуса R_2, то есть $r \geqslant R_1$.

По теореме Гаусса: $\oint \boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{S} = 4\pi q$. Так как $S = 4\pi r^2$, то $E\cdot 4\pi r^2 = 4\pi q$, откуда $E = q/r^2$. Тогда

$$\varphi = -\int\limits_{0}^{r} q\cdot\frac{1}{r^2}\delta r = \frac{q}{r}.$$

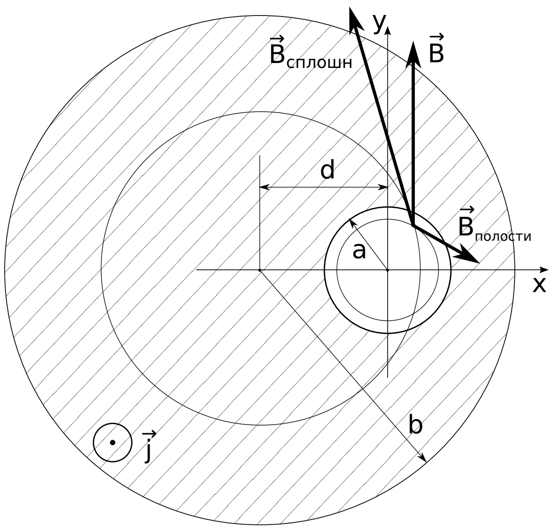
Ответ: $q = 4\pi\alpha(R_2 - R_1)$;

при $r \leqslant R_1$: $E = 0,\ \varphi = \dfrac{q}{R_2-R_1}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$;

при $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$: $E = \dfrac{q(r-R_1)}{r^2(R_2-R_1)},\ \varphi = \dfrac{q}{R_2-R_1}\left(1 - \dfrac{R_1}{r} - \ln\dfrac{r}{R_1}\right)$;

при $r \geqslant R_2$: $E = \dfrac{q}{r^2},\ \varphi = \dfrac{q}{r}$.

248. Определить магнитное поле в цилиндрической полости, вырезанной в бесконечно длинном цилиндрическом проводнике. Радиусы полости и проводника соответственно a и b, расстояние между их параллельными осями d $(b > a + d)$. Ток I распределен равномерно по сечению.



Решение: Ток, текущий по проводнику с полостью можно рассматривать как суперпозицию двух токов той же плотности: тока, сонаправленного с ним и текущего по проводнику с заполненной полостью и противоположно направленного тока полости. Плотность каждого из токов равна

$$j = \frac{I}{\pi(b^2 - a^2)}.$$

Тогда во введёной на рисунке системе координат поля внутри полости имеют вид

$$\boldsymbol{B}_{полости} = \frac{\mu_0 j}{2}\{y, -x, 0\} \text{ и } \boldsymbol{B}_{сплошн} = \frac{\mu_0 j}{2}\{-y, x + d, 0\}.$$

Их суперпозиция даёт фактическое поле внутри полости $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_{полости} + \boldsymbol{B}_{сплошн} = \frac{\mu_0 j}{2}\{0, d, 0\} = \frac{\mu_0 I d}{2\pi(b^2 - a^2)}\{0, 1, 0\}.$$

Таким образом, магнитное поле внутри полости является однородным.

Ответ:

$$\boldsymbol{B} = \left\{0, \frac{\mu_0 I d}{2\pi(b^2 - a^2)}, 0\right\}.$$

549. «Поезд» $A'B'$, длина которого $l_0 = 8,64 \cdot 10^8$ км в системе, где он покоится, идет со скоростью $\mathrm{v} = 240000$ км/сек мимо «платформы», имеющей такую же длину в своей системе покоя. В голове B' и хвосте A' «поезда» имеются одинаковые часы, синхронизованные между собой. Такие же часы установлены в начале (A) и в конце (B) «платформы». В тот момент, когда голова «поезда» поравнялась с началом «платформы», совпадающие часы показывали 12 час 00 мин. Ответить на следующие вопросы:

а) можно ли утверждать, что в этот момент в какой-либо системе отсчета все часы также показывают 12 час 00 мин;

б) сколько показывают каждые из часов в момент, когда хвост «поезда» поравнялся с началом «платформы»;

в) сколько показывают часы в момент, когда голова «поезда» поравнялась с концом «платформы»?

Решение:

а) Чтобы ответить на этот вопрос рассмотрим понятие одновременности. Если в момент времени t_A (по часам в точке A) луч света выходит из точки A, идет в точку B, отражается в момент t_B (по часам в точке B), идет обратно в точку A и возвращается в момент времени t'_A (по часам в точке A). Часы в A и B будут идти, согласно определению, синхронно, если выполняется условие:

$$t_B - t_A = t'_A - t_B.$$

Это время в покоящейся системе отсчета – на платформе.

Рассмотрим движущийся поезд. Если в момент времени $t_{A'}$ из точки A' выходит луч света, отражается в точке B' в момент времени $t_{B'}$ и возвращается в точку A' в момент времени $t'_{A'}$. Принимая во внимание принцип постоянства скорости света, находим:

$$t_{B'} - t_{A'} = \frac{l_0}{\mathrm{v} - v}; \quad t'_{A'} - t_{B'} = \frac{l_0}{\mathrm{v} + v},$$

где l_0 – собственная длина поезда.

Таким образом, видно, что время не будет одинаковым на всех часах: для наблюдателя, находящегося на платформе, время будет идти синхронно лишь на часах на платформе; для наблюдателя, находящегося в поезде, время будет идти синхронно лишь для часов в поезде.

б) Рассмотрим случай, когда хвост поезда поравнялся с началом платформы.

Находясь в поезде, время изменится на величину δt, равную времени, за которое поезд пройдет расстояние l_0:

$$\delta t = l_0/\mathrm{v} = 1 \text{ час}.$$

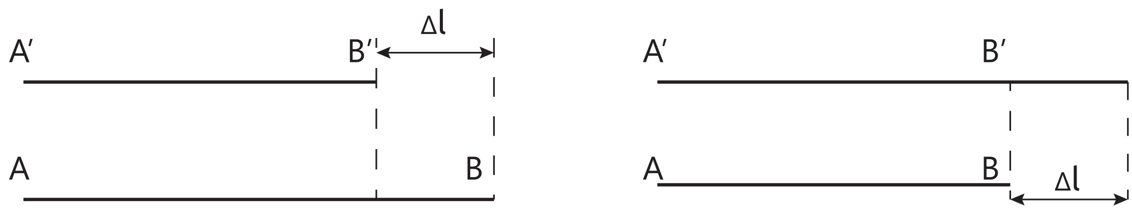
Таким образом, время в точке $t_{A'} = 12^{00} + 1^{00} = 13^{00}$.

Время, которое показывают часы в начале платформы, вычислим, учитывая лоренцево преобразование времени:

$$\delta t' = \delta t\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2} = \frac{l_0}{\mathrm{v}} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2}.$$

Откуда $t_A = 12^{36}$.

Теперь рассмотрим показание часов в начале поезда B' и в конце платформы B. Находясь в разных системах отсчета, часы не будут идти синхронно.



Наблюдатель на платформе Наблюдатель в поезде

Рассмотрим случай, когда наблюдатель находится на платформе. В таком случае часы, находящиеся в конце платформы будут показывать то же время, что часы в начале платформы:

$$t_B = t_A = 12^{36}.$$

В начале поезда время на часах будет отличным от того, что показывают часы в конце поезда. Для наблюдателя длина поезда будет короче, чем длина платформы. В таком случае, учитывая разницу в длине:

$$\delta l = l_0 - l_0 \cdot \sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2},$$

рассчитаем время в точке B':

$$\delta t = \frac{\delta l}{\mathrm{v}} = 14{,}4 \text{ мин}; \quad t_{B'} = t_B - \delta t = 12 \text{ час } 21{,}6 \text{ мин}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда наблюдатель находится в поезде. В этом случае часы в поезде синхронизированы и показывают одно время:

$$t_{B'} = t_{A'} = 13^{00}.$$

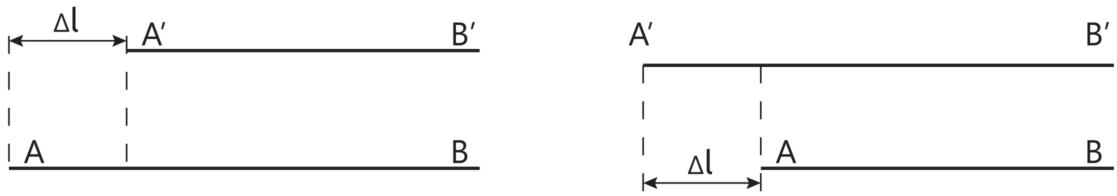
Теперь длина платформы будет казаться меньше:

$$\delta l = l_0 - l_0 \cdot \sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2}; \quad \delta t = \frac{\delta l}{\mathrm{v}} = 14{,}4 \text{ мин}.$$

Тогда время в точке B:

$$t_B = t_{B'} + \delta t = 13 \text{ час } 14{,}4 \text{ мин}.$$

в) Рассмотрим случай, когда начало поезда поравнялось с концом платформы.



Наблюдатель на платформе

Наблюдатель в поезде

Для наблюдателя, находящегося на платформе (значение $\delta t = 14,4$ мин было найдено ранее):

$$t_A = t_B = 12^{36} + \delta t = 13^{00};$$
$$t_{A'} = 13^{00} + \delta t = 13 \text{ ч } 14{,}4 \text{ м};$$
$$t_{B'} = 12 \text{ ч } 21{,}6 \text{ м} + \delta t = 12^{36}.$$

Для наблюдателя, находящегося в поезде:

$$t_{A'} = t_{B'} = 12^{00} + \frac{l_0}{\mathrm{v}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2} = 12^{36};$$
$$t_B = 12^{00} + \frac{l_0}{\mathrm{v}} = 13^{00};$$
$$t_A = t_{A'} - \delta t = 12 \text{ ч } 21{,}6 \text{ м}.$$

Ответ: а) Нельзя; б) $t_{A'} = 13^{00}$, $t_A = 12^{36}$,
для наблюдателя на платформе: $t_{B'} = 12^{21,6}$, $t_B = 12^{36}$,
для наблюдателя в поезде: $t_{B'} = 13^{00}$, $t_B = 13^{14,4}$;
в) для наблюдателя на платформе: $t_{A'} = 13^{14,4}$, $t_{B'} = 12^{36}$, $t_A = t_B = 12^{36}$,
для наблюдателя в поезде: $t_{A'} = t_{B'} = 12^{36}$, $t_A = 12^{21,6}$, $t_B = 13^{00}$.