Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный технический университет»
Факультет электроники и вычислительной техники
Кафедра «Физика»

Семестровая работа по дисциплине «Термодинамика и статистическая физика»

Вариант №18

Выполнил
студент группы Ф-469
Чечеткин И. А.

Проверил
профессор, д. физ.-мат. н.
Крючков С. В.

Волгоград, 2014

Задача 8 (ТД): *Вычислите критические параметры $V_к$, $p_к$, $T_к$ газа Ван-дер-Ваальса, выражая их через постоянные a и b для этого газа.*

Решение:

Уравнение Ван-дер-Ваальса:

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)\left(V - b\right) = RT.$$

Домножим на V^2 и раскроем скобки:

$$PV^3 - (RT + Pb)V^2 + aV - ab = 0. \tag{1.1}$$

По определению критических параметров, это уравнение можно записать в виде:

$$\begin{gathered} P_{\text{к}}(V - V_{\text{к}})^3 = 0, \text{ раскрывая куб, получим:} \\ P_{\text{к}}(V^3 - 3V^2V_{\text{к}} + 3VV_{\text{к}}^2 - V_{\text{к}}^3), \text{ или,} \\ P_{\text{к}}V^3 - 3P_{\text{к}}V^2V_{\text{к}} + 3P_{\text{к}}VV_{\text{к}}^2 - P_{\text{к}}V_{\text{к}}^3 = 0. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Сравнивая (1.2) с (1.1) видно, что:

$$ab = P_{\text{к}}V_{\text{к}}^3; \quad 3P_{\text{к}}V_{\text{к}}^2 = a; \quad RT_{\text{к}} + P_{\text{к}}b = 3P_{\text{к}}V_{\text{к}}.$$

Подставляя второе равенство в первое, находим, что $V_{\text{к}} = 3b$.
Подставляя это обратно во второе равенство, получим, что $P_{\text{к}} = a/(27b^2)$.
Подставляя $P_{\text{к}}$ и $V_{\text{к}}$ в третье равенство, получим, что $T_{\text{к}} = 8a/(27Rb)$.
Таким образом, $P_{\text{к}} = \dfrac{a}{27b^2}$, $V_{\text{к}} = 3b$, $T_{\text{к}} = \dfrac{8}{27}\dfrac{a}{Rb}$.

Задача 88 (ТД): *Воздух сжимается по политропе, описываемой уравнением* $pV^{1,45} = \mathrm{const}$. *Как при этом будет изменяться его температура?*

Решение:

Поскольку воздух можно считать идеальным газом, то его состояние описывается уравнением Менделеева–Клапейрона:

$$PV = \nu RT, \quad P = \nu R\frac{T}{V}.$$

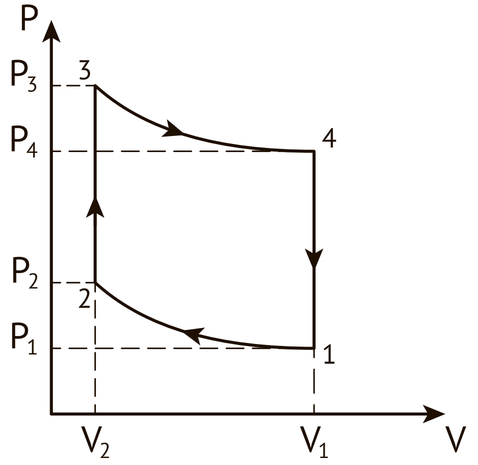
Подставляя P в уравнение политропы, получим

$$PV^{1,45} = TV^{0,45} = \mathrm{const}.$$

Поскольку газ сжимается, то объем уменьшается, а температура, следовательно, возрастает: $\Delta T > 0$.

Задача 130 (ТД): *Найдите выражение для к. п. д. карбюраторного четырехтактного двигателя внутреннего сгорания, работающего по циклу Отто, состоящему из двух адиабатических и двух изохорических процессов. Параметром цикла является величина $\varepsilon = V_1/V_2$ – степень сжатия горючей смеси, которую можно считать идеальным газом.*

Решение:



К. п. д. цикла равен:

$$\eta = \frac{A}{Q_i} = \frac{Q_i - Q_o}{Q_i}. \qquad (3.1)$$

Теплота Q_i поступает при изохорическом процессе $2 \to 3$, теплота Q_o уходит при изохорическом процессе $4 \to 1$.
Тогда

$$Q_i = C_V \nu \Delta T_{23}, \quad Q_o = C_V \nu \Delta T_{41}, \qquad (3.2)$$

где $\Delta T_{23} = T_3 - T_2$, $\Delta T_{41} = T_4 - T_1$.

Уравнения состояний 1, 2, 3 и 4:

$$P_1 V_1 = \nu R T_1, \quad P_2 V_2 = \nu R T_2, \quad P_3 V_2 = \nu R T_3, \quad P_4 V_1 = \nu R T_4. \qquad (3.3)$$

Уравнения адиабат $3 \to 4$ и $1 \to 2$:

$$P_3 V_2^\gamma = P_4 V_1^\gamma, \quad P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma. \qquad (3.4)$$

Выразим из (3.3) давления P_1, P_2, P_3 и P_4 и подставим в (3.4):

$$T_3 V_2^{\gamma-1} = T_4 V_1^{\gamma-1}, \quad T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}.$$

Тогда $T_3 = T_4 \big(V_1/V_2\big)^{\gamma-1}$ и $T_2 = T_1 \big(V_1/V_2\big)^{\gamma-1}$, откуда $T_3 - T_2 = \big(T_4 - T_1\big)\varepsilon^{\gamma-1}$.
Подставим это и (3.2) в (3.1):

$$\eta = \frac{\Delta T_{23} - \Delta T_{41}}{\Delta T_{23}} = 1 - \frac{\Delta T_{41}}{\Delta T_{23}} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_4 - T_1}\frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}}.$$

Таким образом, $\eta = 1 - 1/\varepsilon^{\gamma-1}$.

Задача 246 (ТД): *Докажите, что для однородной изотропной системы теплоемкость при постоянном давлении равна*

$$C_p = T\left[\left(\frac{\partial^2 I}{\partial S^2}\right)_p\right]^{-1},$$

где I – энтальпия.

Решение:

По определению энтальпии, $dI = \delta Q$ при постоянном p. Далее, $\delta Q = T\,dS$. Тогда первая производная по S от I при постоянном p:

$$\left(\frac{\partial I}{\partial S}\right)_p = \left(T\frac{\partial S}{\partial S}\right)_p = T.$$

Вторая производная:

$$\left(\frac{\partial^2 I}{\partial S^2}\right)_p = \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_p = T\cdot\left(\frac{\partial T}{T\partial S}\right)_p = T\cdot\frac{1}{C_p}, \tag{4.1}$$

поскольку

$$\frac{\delta Q}{dT} = C.$$

Выражая C_p из (4.1), получим в итоге

$$C_p = T\cdot\left[\left(\frac{\partial^2 I}{\partial S^2}\right)\right]^{-1}.$$

Задача 321 (СФ): *Для линейного гармонического осциллятора с энергией ε вычислить фазовый объем $\mathit{\Gamma}$, ограниченный гиперповерхностью энергии. Оценить объем элементарной фазовой ячейки, используя формулу энергетического спектра*

$$\varepsilon_n = h\nu\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Решение:

Путь линейный осциллятор совершает колебания по закону $x = A\sin\omega t$. Тогда его импульс:

$$p = m\frac{dx}{dt} = Am\omega\cos\omega t.$$

Исключим время из уравнений движения:

$$\sin^2\omega t = \frac{x^2}{A^2}, \quad \cos^2\omega t = \frac{p^2}{m^2A^2\omega^2};$$
$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{p^2}{m^2A^2\omega^2} = 1. \tag{5.1}$$

Уравнение (5.1) есть уравнение фазовой траектории – эллипса с полуосями $a = A$ и $b = mA\omega$. Его площадь есть фазовый объем:

$$S_{\text{эл}} = \mathit{\Gamma} = \pi ab = \pi A^2 m\omega.$$

Найдем полную энергию осциллятора:

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2x^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2}\left(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t\right) = \frac{mA^2\omega^2}{2}.$$

Тогда

$$\mathit{\Gamma}(\varepsilon) = \pi A^2 m\omega = 2\pi\frac{\varepsilon}{\omega} = \frac{\varepsilon}{\nu}.$$

Объем элементарной фазовой ячейки:

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon(1) - \varepsilon(0)}{\nu} = \frac{h\nu}{\nu} = h.$$

Задача 410 (СФ): *Пользуясь теоремами о равномерном распределении кинетической энергии по степеням свободы и о вириале в виде*

$$\overline{q_i \frac{\partial H}{\partial q_i}} = \overline{p_i \frac{\partial H}{\partial p_i}},$$

вычислить среднюю энергию линейного гармонического осциллятора.

Решение:

Из теоремы о равномерном распределении кинетической энергии по степеням свободы имеем $\overline{T} = k_0 T/2$. «««< HEAD

Гамильтониан системы есть сумма кинетической и потенциальной энергии:

$$H = \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \frac{p^2}{2m}.$$

Тогда

$$q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} = x \frac{\partial H}{\partial x} = x \cdot m\omega^2 x = m\omega^2 x^2, \quad p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} = p \frac{\partial H}{\partial p} = p \cdot \frac{p}{m} = \frac{p^2}{m}.$$

Записывая вириал, получаем

$$\overline{m\omega^2 x^2} = \overline{p^2/m}, \text{ или } \overline{\frac{m\omega^2 x^2}{2}} = \overline{\frac{p^2}{2m}}.$$

Выражение, стоящее слева от знака равенства есть средняя потенциальная энергия, справа – кинетическая.

=======

Гамильтониан системы есть сумма кинетической и потенциальной энергии:

$$H = \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \frac{p^2}{2m}.$$

Тогда

$$q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} = x \frac{\partial H}{\partial x} = x \cdot m\omega^2 x = m\omega^2 x^2, \quad p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} = p \frac{\partial H}{\partial p} = p \cdot \frac{p}{m} = \frac{p^2}{m}.$$

Записывая вириал, получаем

$$\overline{m\omega^2 x^2} = \overline{p^2/m}, \text{ или } \overline{\frac{m\omega^2 x^2}{2}} = \overline{\frac{p^2}{2m}}.$$

Выражение, стоящее слева от знака равенства есть средняя потенциальная энергия, справа – кинетическая.

»»»> aeb1104690a015b8ef3760a75fc07d5079f8f734 Таким образом, $\overline{U} = \overline{T} = k_0 T/2$.

И в итоге $\overline{\varepsilon} = \overline{U} + \overline{T} = k_0 T$.

Задача 456 (СФ): *Химический потенциал* η *бозе-газа определяется равенством*

$$\frac{N}{V} = 2\pi(2s+1)(2mk_0T)^{3/2}h^{-3}\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{z}\,dz}{e^{z-\eta/(k_0T)}-1},$$

где s *– спин частицы и* $z = \varepsilon/(k_0T)$. *Определить температуру бозе-конденсации.*

Решение:

При понижении температуры химический потенциал будет расти и, оставаясь при этом отрицательным, при некоторой температуре T_0, называемой температурой бозе-конденсации, станет равным нулю: $\eta^* = 0$. Тогда плотность N/V:

$$\frac{N}{V} = 2\pi(2s+1)(2mk_0T_0)^{3/2}h^{-3}\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{z}\,dz}{e^{z-\eta^*/(k_0T_0)}-1} = \frac{g(mk_0T_0)^{3/2}}{\sqrt{2}\,\pi^2\hbar^3}\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{z}\,dz}{e^z-1},$$

где $g = 2s+1$, $\hbar = h/2\pi$.

Интеграл в последнем выражении расписывается следующим образом:

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{z}\,dz}{e^z-1} = \int\limits_0^\infty \frac{z^{3/2-1}\,dz}{e^z-1} = \Gamma(3/2)\cdot\zeta(3/2),$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера, $\zeta(x)$ – дзета-функция Римана.

Значение специальных функций в точке 3/2:

$$\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2, \qquad \zeta(3/2) = 2{,}612.$$

Таким образом,

$$\frac{N}{V} = 1{,}306\,\frac{g(mk_0T_0)^{3/2}}{\sqrt{2}\,\pi^{3/2}\hbar^3} = 1{,}306\,\frac{g}{\sqrt{2}\,\hbar^3}\left(\frac{mk_0}{\pi}\right)^{3/2}T_0^{3/2}.$$

Выразим отсюда T_0:

$$T_0 = \left[\frac{N}{V}\frac{\sqrt{2}\,\hbar^3}{1{,}306g}\left(\frac{\pi}{mk_0}\right)^{3/2}\right]^{2/3} = \frac{\sqrt[3]{2}}{1{,}306^{2/3}}\frac{\pi\hbar^2}{mk_0}\left(\frac{N}{Vg}\right)^{2/3} = 1{,}055\frac{h^2}{4\pi mk_0}\left(\frac{N}{V(2s+1)}\right)^{2/3}.$$

Задача 450 (СФ): *Оценить удельную электронную теплоемкость (на единицу массы) для лития и натрия, предполагая, что валентные электроны в обоих случаях можно рассматривать как свободные. Плотности лития и натрия равны соответственно* 0,534 *и* 0,97 *г/см*^{3}.

Решение:

Удельная электронная теплоемкость определяется формулой

$$c_V^e = \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{m^{3/2}}{\hbar^3}\sqrt{\varepsilon_F}\,k_0^2 TV,$$

где $\varepsilon_F = (3\pi^2)^{2/3}\dfrac{\hbar^2}{2m}(N/V)^{2/3}$ – энергия Ферми.

Подставим ее в c_V^e:

$$c_V^e = \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{m^{3/2}}{\hbar^3}\sqrt{(3\pi^2)^{2/3}\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}}\,k_0^2 TV = \frac{1}{3}\frac{m}{\hbar^2}\sqrt[3]{3\pi^2\frac{N}{V}}\,k_0^2 TV =$$
$$= \frac{m}{\hbar^2}k_0^2 TV\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2/3}\left(\frac{N}{V}\right)^{1/3} = \frac{m}{\hbar^2}\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2/3} N k_0^2 T\left(\frac{V}{N}\right)^{2/3}.$$

Учитывая, что химический потенциал при абсолютном нуле выражается формулой

$$\eta_0 = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{2/3},$$

где $n = N/V$ – концентрация частиц, получим

$$c_V^e = \frac{\pi^2}{2\eta_0} N k_0^2 T.$$