Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный технический университет»
Факультет электроники и вычислительной техники
Кафедра физики

Семестровая работа №2 по дисциплине «Электродинамика»

Выполнил
студент группы Ф-369
Чеченкин И. А.

Проверил
доцент Грецов М. В.

Волгоград, 2014

698. Определить закон движения частицы во взаимно перпендикулярных однородных постоянных электрическом $\boldsymbol{E}$ и магнитном $\boldsymbol{B}$ полях. Сделать это двумя способами:

1. используя преобразование Лоренца и считая известным движение частицы в чисто электрическом или чисто магнитном поле;
2. интегрируя следующие уравнения:

$$\frac{dp_i}{d\tau} = eF^i, \quad m\frac{du_i}{d\tau} = \frac{e}{c}F_{ik}u_k. \tag{1}$$

Решение:

1. Примем, что в системе S электрическое поле $E \| y$, а магнитное $B \| z$. Пусть в начальный момент частица находилась в начале координат $x = y = z = 0$ и имела импульс $\boldsymbol{p}_0$.

   Движение будет различным в зависимости от соотношений между величинами E и B.

   Если $E > B$, то, как следует из инвариантов поля $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B} = \mathrm{inv} = 0$ и $E^2 - B^2 = \mathrm{inv} > 0$, существует такая система отсчета S', в которой отсутствует магнитное поле.

   Из преобразования Лоренца для магнитного поля $\boldsymbol{B}$ следует, что система S' должна двигаться относительно S параллельно оси x со скоростью $\mathrm{v} = cB/E$.

2. Дифференциальные уравнения движения имеют вид:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{qB}{mc}\frac{dy}{d\tau}, \quad \frac{d^2y}{d\tau^2} = \frac{qE}{mc}\frac{d(ct)}{d\tau} - \frac{qB}{mc}\frac{dx}{d\tau}, \quad \frac{d^2z}{d\tau^2} = 0, \quad \frac{d^2(ct)}{d\tau^2} = \frac{qE}{mc}\frac{dy}{d\tau},$$

где τ – собственное время частицы.

Пусть в начальный момент частица находилась в начале координат $x = y = z = 0$ и имела импульс $\boldsymbol{p}_0$.

Интегрируя эту систему со следующими начальными условиями ($\tau = 0$):

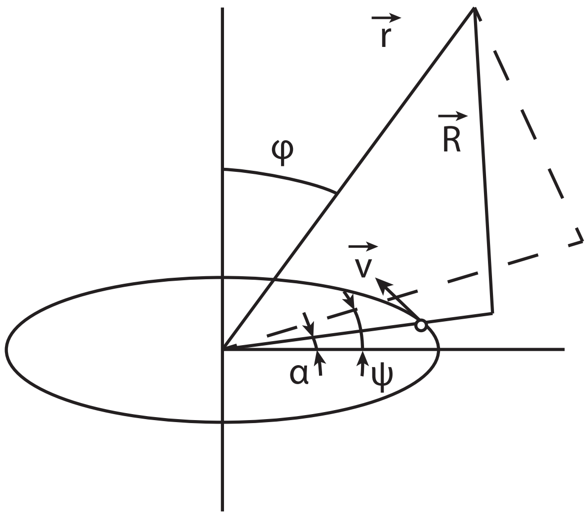
$$x = y = z = ct = 0, \ \frac{\partial x}{\partial \tau} = \frac{p_{0x}}{m}, \ \frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{p_{0y}}{m}, \ \frac{\partial z}{\partial \tau} = \frac{p_{0z}}{m}, \ \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\mathscr{E}_0}{mc},$$

где $\mathscr{E}_0 = \sqrt{c^2|\boldsymbol{p}_0|^2 + m^2c^4}$, найдем

Ответ:

732. Найти электромагнитное поле $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$ заряда e, движущегося равномерно по окружности радиуса a. Движение нерелятивистское, угловая скорость ω. Расстояние до точки наблюдения $r \gg a$. Найти средние по времени угловое распределение $\left\langle \frac{dI}{d\Omega} \right\rangle$ и полную интенсивность $\langle I \rangle$ излучения, а также исследовать его поляризацию.

Решение:



Для определения полей $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{E}$ необходимо найти $\boldsymbol{A}$ и φ. Для начала найдем векторный потенциал движущегося заряда:

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} e \frac{\boldsymbol{v}_{t-\frac{R}{c}}}{R_{t-\frac{R}{c}}}.$$

Положим $R = r$. Введем сферическую систему координат $(r,\ \vartheta,\ \alpha)$. Тогда:

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} e \frac{\boldsymbol{v}_{t-\frac{r}{c}}}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} e \frac{a\omega \boldsymbol{e}_\alpha}{r},$$

где $\boldsymbol{e}_\alpha$ – взят в момент времени $t - \frac{r}{c}$. Найдем проекции $\boldsymbol{A}$ на направления $\boldsymbol{e}_r,\ \boldsymbol{e}_\varphi,\ \boldsymbol{e}_\alpha$:

$$A_r = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_n = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{e\omega a}{r} \cdot (-\sin\varphi\cos\alpha\sin\psi + \sin\varphi\sin\alpha\cos\psi) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{e\omega a}{r} \sin\varphi \sin(\alpha - \psi).$$

Примем $\psi = \omega t - \frac{\omega n}{c}$, тогда

$$A_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{e\omega a}{r} \sin\varphi \sin\Omega,$$

где $\Omega = \frac{\omega r}{c} - \omega t + \alpha$.

Аналогично,

$$A_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{e\omega a}{r} \cos\varphi \sin\Omega, \quad A_\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{e\omega a}{r} \cos\Omega.$$

Теперь, зная проекции $\boldsymbol{A}$, можем определить поле $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot e\omega a \begin{vmatrix} \frac{\boldsymbol{e}_r}{r^2\sin\varphi} & \frac{\boldsymbol{e}_\varphi}{r\sin\varphi} & \frac{\boldsymbol{e}_\alpha}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial\alpha} \\ \frac{\sin\varphi\sin\Omega}{r} & \cos\varphi\sin\Omega & \sin\varphi\cos\Omega \end{vmatrix} = \left[\frac{\boldsymbol{e}_r}{r^2\sin\varphi}(\cos\varphi\cos\Omega -\right.$$

$$-\cos\varphi\cos\Omega) + \frac{\boldsymbol{e}_\varphi}{r\sin\varphi}\left(\frac{\sin\varphi}{r}\cos\Omega + \frac{\omega}{c}\sin\varphi\sin\Omega\right) + \frac{\boldsymbol{e}_\alpha}{r}\left(\cos\varphi\frac{\omega}{c}\cos\Omega -\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\cos\varphi}{r}\sin\Omega\right)\right]\cdot\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot e\omega a = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot e\omega a\cdot\left[\boldsymbol{e}_\varphi\left(\frac{\cos\Omega}{r^2} + \frac{\omega}{rc}\sin\Omega\right) + \right.$$

$$\left.\boldsymbol{e}_\alpha\left(\frac{\omega}{rc}\cos\Omega - \frac{\sin\Omega}{r^2}\right)\cos\varphi\right].$$

В волновой зоне, пренебрегая $\frac{1}{r^2}$, получим:

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 e\omega^2 a}{4\pi rc}\left(\boldsymbol{e}_\varphi\sin\Omega + \boldsymbol{e}_\alpha\cos\Omega\cos\varphi\right).$$

Считая в волновой зоне вблизи точки наблюдения волну плоской, получим:

$$\boldsymbol{E} = c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_r = \frac{\mu_0 e\omega^2 a}{4\pi r}\left(\boldsymbol{e}_\varphi\cos\varphi\cos\Omega - \boldsymbol{e}_\alpha\sin\Omega\right).$$

Так как в верхней полусфере $\cos\varphi > 0$, то для излучения в ней имеет место левая эллиптическая поляризация, переходящая при $\varphi = 0$ в круговую. Аналогично, в нижней полусфере имеет место правая поляризация в силу $\cos\varphi < 0$, переходящая в круговую при $\varphi = \pi$.

Для углового распределения интенсивности имеет место соотношение: $\frac{dI}{d\Theta} = r^2\cdot\langle|\boldsymbol{P}|\rangle$, где $\boldsymbol{P} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ – вектор Пойнтинга. Определим его:

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{\mu_0}\cdot\frac{\mu_0^2 e^2\omega^4 a^2}{16\pi^2 r^2 c}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & \boldsymbol{e}_\varphi & \boldsymbol{e}_\alpha \\ 0 & \cos\varphi\cos\Omega & -\sin\Omega \\ 0 & \sin\Omega & \cos\varphi\cos\Omega \end{vmatrix} = \frac{\mu_0 e^2\omega^4 a^2}{16\pi^2 r^2 c}\boldsymbol{e}_r(\cos^2\varphi\cos^2\Omega + \sin^2\Omega).$$

Усредняя по времени, с учетом $\left\langle\cos^2\Omega\right\rangle = \left\langle\sin^2\Omega\right\rangle = 1/2$, имеем

$$\langle|\boldsymbol{P}|\rangle = \frac{\mu_0 e^2\omega^4 a^2}{32\pi^2 r^2 c}(1+\cos^2\varphi),\ \text{откуда}\ \frac{dI}{d\Theta} = \frac{\mu_0 e^2\omega^4 a^2}{32\pi^2 c}(1+\cos^2\varphi).$$

Теперь найдем полную интенсивность, учитывая, что в цилиндрически симметричном случае $d\Theta = 2\pi\sin\varphi\delta\varphi$:

$$I = \frac{\mu_0 e^2\omega^4 a^2}{32\pi^2 c}\int\limits_0^\pi(1+\cos^2\varphi)\cdot 2\pi\sin\varphi\delta\varphi = \frac{\mu_0 e^2\omega^4 a^2}{6\pi c}.$$

Ответ: $\langle I\rangle = \dfrac{\mu_0 e^2\omega^4 a^2}{6\pi c}, \quad \left\langle \dfrac{dI}{d\Theta}\right\rangle = \dfrac{\mu_0 e^2\omega^4 a^2}{32\pi^2 c}(1+\cos^2\varphi).$

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 e\omega^2 a}{4\pi r c}\left(\boldsymbol{e}_\varphi \sin\Omega + \boldsymbol{e}_\alpha \cos\Omega\cos\varphi\right), \quad \boldsymbol{E} = \frac{\mu_0 e\omega^2 a}{4\pi r}\left(\boldsymbol{e}_\varphi \cos\varphi\cos\Omega - \boldsymbol{e}_\alpha \sin\Omega\right).$$

761. Заряд e движется с малой скоростью $\boldsymbol{v}$ и ускорением $\dot{\boldsymbol{v}}$ в ограниченной области (задача *760*). Определить угловое распределение $\frac{dI}{d\Omega}$ и полное излучение I.

Решение:

Интенсивность излучения в направлении $\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$ выражается через напряженность электрического поля $\boldsymbol{E}$ в волновой зоне:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi}E^2(t)R^2.$$

Запишем выражение для электрического поля, воспользовавшись ответом предыдущей задачи *760*:

$$\boldsymbol{E} = \frac{e\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} \times \dot{\boldsymbol{v}})}{c^2 R}.$$

Подставим его в первую формулу:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3}\left(\boldsymbol{n} \times \dot{\boldsymbol{v}}\right)^2,$$

зная что $d\Omega = 2\pi \sin\vartheta\delta\vartheta$, найдем полное излучение:

$$dI = \frac{2\pi e^2}{4\pi c^3}\dot{v}^2 \sin^3\vartheta\delta\vartheta;$$

$$I = \frac{2\pi e^2}{4\pi c^3}\dot{v}^2 \int\limits_0^\pi \sin^3\vartheta\delta\vartheta = \frac{2e^2}{3c^3}\dot{v}^2.$$

Ответ: $I = \dfrac{2e^2}{3c^3}\dot{v}^2.$