Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный технический университет»
Факультет электроники и вычислительной техники
Кафедра физики

Семестровая работа по дисциплине «Специальные функции»

Выполнила
студентка группы Ф-369
Слоква В. И.

Проверил
к. ф.-м. н., доцент
Никулин Р. Н.

Волгоград, 2014

№15. Решить задачу о распространении ТЕ-волн в полости проводника, представляющей круглый цилиндр неограниченной длины (круглая труба).

[Найти составляющие $H_{z,nm}(\rho,\varphi)$.]

Решение. Данный волновод представляет собой полую бесконечно протяженную трубку с внутренним радиусом ρ_0. На границе волновода $\left.\frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right|_{\rho_0} = 0$.

Запишем уравнения Максвелла для нашей задачи:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot}\vec{H} = \lambda\vec{E} + \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},\\
&\operatorname{rot}\vec{E} = -\mu\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t},\\
&\operatorname{div}\vec{E} = 0,\\
&\operatorname{div}\vec{H} = 0.
\end{aligned}$$

Найдем ротор от обеих частей первого уравнения, учитывая, что порядок операций ротора и производной по времени можно менять $\left(\operatorname{rot}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial\operatorname{rot}\vec{E}}{\partial t}\right)$:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{H} = \lambda\operatorname{rot}\vec{E} + \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial\operatorname{rot}\vec{E}}{\partial t}. \tag{1}$$

Продифференцируем по t второе уравнение:

$$\frac{\partial\operatorname{rot}\vec{E}}{\partial t} = -\mu\mu_0\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получим:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{H} = -\lambda\mu\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}.$$

С учетом того, что $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{H} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{H} - \Delta\vec{H}$ и $\operatorname{div}\vec{H} = 0$, получим:

$$\Delta\vec{H} = \lambda\mu\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} + \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}. \tag{3}$$

Представим $\vec{H}$ в виде волны, распространяющейся вдоль оси z:

$$\vec{H} = \vec{H}(r,\varphi)e^{i(kz-\omega t)}, \tag{4}$$

где $\vec{H}(r,\varphi)$ – функция, зависящая только от r и φ.

Лапласиан в цилиндрических координатах имеет вид:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial z} = \vec{H}(r,\varphi)\, ike^{i(kz-\omega t)} = ik\vec{H},$$
$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -i\omega\vec{H}, \quad \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = -k^2\vec{H}, \quad \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \omega^2\vec{H};$$

получим, перенося производную по z в правую часть:

$$\Delta_{\rho\varphi}\vec{H} = [\omega^2\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 - i\lambda\mu\mu_0\omega + k^2]\vec{H} = \gamma\vec{H},$$

где $\gamma = -i\lambda\mu\mu_0\omega + \omega^2\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 + k^2$.

Нас интересует только проекция на ось z, поэтому:

$$\Delta_{\rho\varphi}H_z = \gamma H_z.$$

Расписывая радиальную и полярную части лапласиана, получим уравнение:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2} = \gamma H_z. \tag{5}$$

Используем метод разделения переменных:

$$\tilde{H}(r,\varphi) = v(r)\cdot w(\varphi). \tag{6}$$

Подставляя (6) в уравнение (5), получим:

$$w\frac{d^2v}{d\rho^2} + w\frac{1}{\rho}\frac{dv}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2}v\frac{d^2w}{d\varphi^2} = \gamma vw.$$

Домножив это уравнение на ρ^2 и разделив на vw, получим:

$$\rho^2\frac{v''}{v} + \rho\frac{v'}{v} - \gamma\rho^2 = -\frac{w''}{w}.$$

Левая часть зависит только от ρ, а правая – только от φ. Следовательно, справедливы равенства:

$$\rho^2\frac{v''}{v} + \rho\frac{v'}{v} - \gamma\rho^2 = \beta,$$
$$-\frac{w''(\varphi)}{w(\varphi)} = \beta.$$

Таким образом, получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\rho^2 v'' + \rho v' + (\gamma\rho^2 - \beta)v = 0, \tag{7}$$
$$w'' + \beta w = 0. \tag{8}$$

Из условия периодичности этой функции $w(\varphi) = w(\varphi + 2\pi)$ следует, что $\beta = n^2$, где $n = 1, 2, \ldots$. Тогда

$$w = A\cos n\varphi + B\sin n\varphi.$$

Подставляя β в уравнение (7), получим:

$$\rho^2 v'' + \rho v' + (\gamma\rho^2 - n^2)v = 0.$$

Проведем замену: $-\gamma = \alpha$, $\sqrt{\alpha}\,\rho = r$, $\sqrt{\alpha}\,\delta\rho = \delta r$. Тогда уравнение примет вид уравнения Бесселя:

$$r^2\frac{d^2v}{dr^2} + r\frac{dv}{dr} + (r^2 - n^2)v = 0.$$

Его общим решением является функция вида

$$v(r) = C_1 J_n(r) + C_2 Y_n(r),$$

где C_1 и C_2 – некоторые постоянные, $J_n(r)$ – функция Бесселя первого рода, $Y_n(r)$ – функция Неймана.

Так как $|Y_n(0)| \to \infty$, то постоянную C_2 полагаем равной нулю. Таким образом, функция $v(r)$:

$$v(r) = C_1 J_n(\sqrt{\alpha_{nm}}\,\rho),$$

где значения $\sqrt{\alpha_{nm}}$ находятся из уравнения, определяемого граничным условием:

$$\left.\frac{\partial H_z}{\partial\rho}\right|_{\rho_0} = 0 \;\Rightarrow\; \left.\frac{dv}{d\rho}\right|_{\rho_0} = 0 \;\Rightarrow\; \left.\frac{dJ_n(\sqrt{\alpha_{nm}}\,\rho_0)}{d\rho}\right|_{\rho_0} = 0.$$

Таким образом, частные решения уравнения (5), удовлетворяющие граничному условию, имеют вид:

$$H_{z,nm}(\rho,\varphi) = J_n(\sqrt{\alpha_{nm}}\,\rho)\left[A_{nm}\cos n\varphi + B_{nm}\sin n\varphi\right],$$

где A_{nm} и B_{nm} – произвольные постоянные.

Список литературы

[1] Кошляков, Н. С. Уравнения в частных производных математической физики [Текст] / Кошляков Н. С., Глинер Е. Б., Смирнов М. М. Учебное пособие. – М.: «Высшая школа», 1970.– 712с.

[2] Тарабрин, Г. Т. Методы математической физики [Текст] / Тарабрин Г. Т. Учебное пособие. – М.: «АСВ», 2009.– 208с.