Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный технический университет»
Факультет электроники и вычислительной техники
Кафедра физики

Семестровая работа №1 по дисциплине «Электродинамика»

Выполнил
студент группы Ф-369
Чечеткин И. А.

Проверил
доцент Грецов М. В.

Волгоград, 2014

83. Заряд электрона распределен в атоме водорода, находящемся в нормальном состоянии, с плотностью

$$\rho(r) = -\frac{e_0}{\pi a^3} e^{-\frac{2r}{a}},$$

где $a = 0,529 \cdot 10^{-8}$ см – боровский радиус электрона, $e_0 = 4,80 \cdot 10^{-10}$ CGSE – элементарный заряд. Найти потенциал φ_e и напряженность E_{er} электрического поля электронного заряда, а также полные потенциал φ и напряженность поля $\boldsymbol{E}$ в атоме, считая, что протонный заряд сосредоточен в начале координат. Построить приблизительный ход величин φ и E.

Решение:

Из теоремы Гаусса:

$$E_{er}(r) = \frac{1}{\varepsilon_0 r^2} \int\limits_0^r \rho(r') {r'}^2 \delta r'.$$

Потенциал точечного заряда на бесконечности стремится к нулю, поэтому

$$\varphi_e(r) = \int\limits_r^\infty \frac{1}{\varepsilon_0 r^2} \int\limits_0^r \rho(r') {r'}^2 \delta r' = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int\limits_r^\infty \delta\left(\frac{1}{r}\right) \int\limits_0^r \rho(r') {r'}^2 \delta r'.$$

Взяв интеграл по частям, получим:

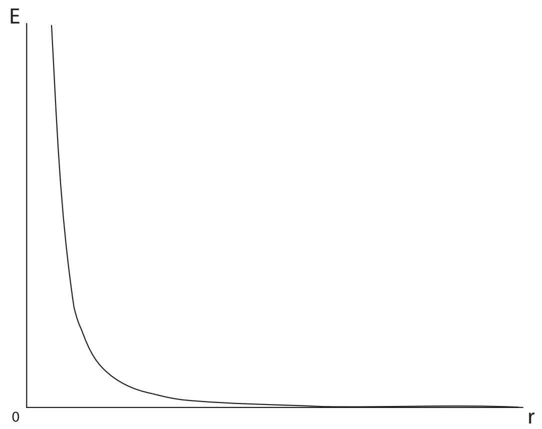
$$\varphi_e(r) = \frac{1}{\varepsilon_0 r} \int\limits_0^r \rho(r') {r'}^2 \delta r' + \frac{1}{\varepsilon_0} \int\limits_r^\infty \rho(r') r' \delta r'.$$

Подставляя плотность распределения заряда ρ в формулы для $E_{er}(r)$ и $\varphi_r(r)$, получим:

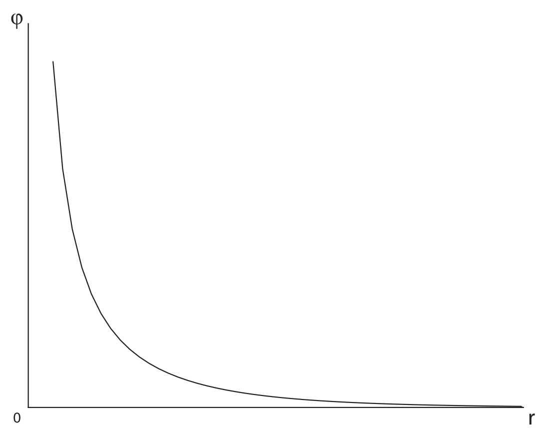
$$\varphi_e(r) = \frac{e_0}{r}\left[e^{-\frac{2r}{a}} - 1\right] + \frac{e_0}{a} e^{-\frac{2r}{a}},$$
$$E_{er}(r) = \frac{e_0}{r^2}\left[\left(1 + \frac{2r}{a}\right) e^{-\frac{2r}{a}} - 1\right] + \frac{2e_0}{a^2} e^{-\frac{2r}{a}}.$$

Воспользовавшись принципом суперпозиции, найдем потенциал $\varphi(r)$ и напряженность поля $E(r)$ в атоме:

$$\varphi(r) = \varphi_e(r) + \varphi_n(r) = \varphi_e(r) + \frac{e_0}{r} = e_0 e^{-\frac{2r}{a}} \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{a}\right],$$
$$E(r) = E_{er}(r) + E_n(r) = E_{er}(r) + \frac{e_0}{r^2} = e_0 e^{-\frac{2r}{a}} \left[\frac{1}{r^2} + \frac{2}{ar} + \frac{2}{a^2}\right].$$



Зависимость $E(r)$



Зависимость $\varphi(r)$

Ответ:

$$\varphi_e(r) = \frac{e_0}{r}\left[e^{-\frac{2r}{a}} - 1\right] + \frac{e_0}{a}e^{-\frac{2r}{a}},$$
$$E_{er}(r) = \frac{e_0}{r^2}\left[\left(1 + \frac{2r}{a}\right)e^{-\frac{2r}{a}} - 1\right] + \frac{2e_0}{a^2}e^{-\frac{2r}{a}};$$
$$\varphi(r) = e_0 e^{-\frac{2r}{a}}\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{a}\right],$$
$$E(r) = e_0 e^{-\frac{2r}{a}}\left[\frac{1}{r^2} + \frac{2}{ar} + \frac{2}{a^2}\right].$$

253. Сфера радиуса a заряжена зарядом e равномерно по поверхности и вращается вокруг одного из своих диаметров с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Найти магнитное поле внутри и вне сферы. Выразить напряженность поля $\boldsymbol{H}$ во внешней области через магнитный момент $\boldsymbol{m}$ сферы.

Решение: Найдем магнитный момент сферы. Для этого возьмем на поверхности сферы узкий кольцевой сегмент, заключенный между углами ϑ и $\vartheta + \delta\vartheta$. Заряд, вращаясь вместе со сферой, создает ток, величина которого на выделенном сегменте равна

$$\delta J = v\sigma a\delta\vartheta = \frac{1}{4\pi}e\omega\sin\vartheta\delta\vartheta,$$

где $v = \omega a\sin\vartheta$ – скорость вращения сегмента, $\sigma = e/4\pi a^2$ – поверхностная плотность заряда. Магнитный момент этого тока:

$$\delta\boldsymbol{m} = \frac{\delta J\boldsymbol{s}}{c} = \frac{\pi a^2 e\boldsymbol{\omega}}{4\pi c}\sin^3\vartheta\delta\vartheta.$$

Интегрируя по ϑ, найдем магнитный момент всей сферы:

$$\boldsymbol{m} = \frac{ea^2\boldsymbol{\omega}}{4c}\int\limits_0^\pi \sin^3\vartheta\delta\vartheta = \frac{ea^2\boldsymbol{\omega}}{3c}.$$

Тогда поле $\boldsymbol{H}$ при $r > a$ можно найти через векторный потенциал:

$$\boldsymbol{H} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \mathrm{rot}\,\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{3\boldsymbol{r}(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r})}{r^5} - \frac{\boldsymbol{m}}{r^3} = \frac{2\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r})}{cr^5} - \frac{2e\boldsymbol{\omega}}{3cr^3}.$$

При $r < a$ можно воспользоваться законом Био–Савара–Лапласа:

$$\delta\boldsymbol{H} = \frac{J}{cr^3}\boldsymbol{r}\times\delta\boldsymbol{l}.$$

Так как $\boldsymbol{r}\perp\delta\boldsymbol{l}$, то $\boldsymbol{r}\times\delta\boldsymbol{l} = r\delta l\,\boldsymbol{n}$.
Интегрируя, получим:

$$H = \frac{\boldsymbol{J}}{cr^2}\oint\limits_L \delta l = \frac{2\pi\boldsymbol{J}}{cr}.$$

Так как $\boldsymbol{J} = e\boldsymbol{\omega}\sin\vartheta\delta\vartheta/4\pi$ и $r = a\sin\vartheta$, то

$$\delta\boldsymbol{H} = \frac{2\pi\delta\boldsymbol{J}}{cr} = \frac{e\boldsymbol{\omega}}{2ca\sin\vartheta}\sin\vartheta\delta\vartheta = \frac{e\boldsymbol{\omega}}{2ca}\delta\vartheta.$$

Интегрируя от 0 до π, получим окончательный результат:

$$\boldsymbol{H} = \frac{e\boldsymbol{\omega}}{2ca} \int\limits_0^\pi \delta\vartheta = \frac{e\pi\boldsymbol{\omega}}{2ca}.$$

Ответ:

$$\boldsymbol{H}_{in} = \frac{e\pi\boldsymbol{\omega}}{2ca};$$
$$\boldsymbol{H}_{ex} = \frac{2\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r})}{cr^5} - \frac{2e\boldsymbol{\omega}}{3cr^3}.$$

548. Пусть для измерения времени используется периодический процесс отражения светового «зайчика» попеременно от двух зеркал, укрепленных на концах стержня длиной l. Один период – это время движения «зайчика» от одного зеркала до другого и обратно. Световые часы неподвижны в системе S' и ориентированы перпендикулярно направлению относительной скорости. Пользуясь постулатом о постоянстве скорости света, показать, что интервал собственного времени $\delta\tau$ выражается через промежуток времени δt в системе S.

Решение:

В системе S' имеем:

$$c\delta\tau = 2l.$$

В системе S:

$$c\delta t = 2\sqrt{l^2 + \left(\frac{v\delta t}{2}\right)^2}.$$

Возводя последнее равенство в квадрат и перенося $v^2\delta t^2$ в левую часть, получим

$$\delta t^2 c^2 \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right] = 4l^2.$$

Разделив полученное выражение на c^2 и извлекая квадратный корень, получим:

$$\delta\tau = \frac{2l}{c} = \delta t\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

Ответ:

$$\delta\tau = \frac{2l}{c} = \delta t\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$