Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный технический университет»
Факультет электроники и вычислительной техники
Кафедра физика

Семестровая работа по дисциплине «Вакуумная и газоразрядная электроника»

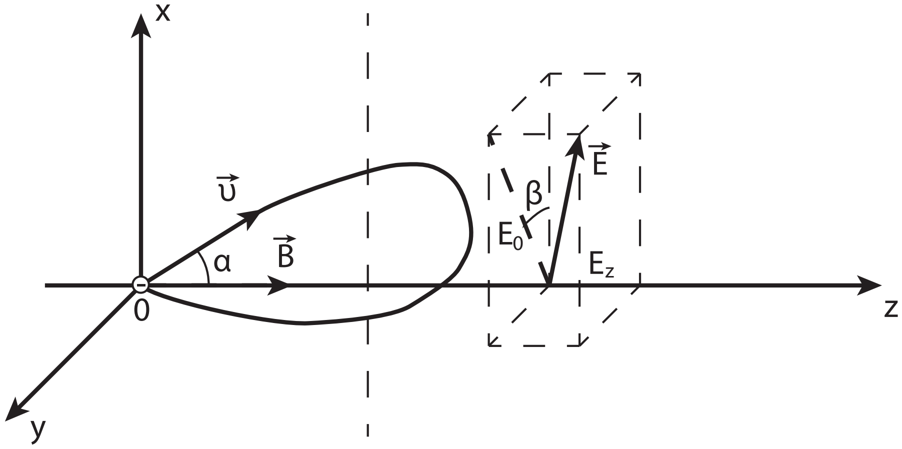
Вариант №7

Выполнил
студент группы Ф-369
Чечеткин И. А.

Проверил
доцент Ковтун Д. Г.

Волгоград, 2014

1. Электрон со скоростью v влетает под углом α к направлению вектора магнитной индукции $\vec{B} = \vec{k}B_0$. Через интервал времени, равный четверти периода циклотронной частоты, он попадает в область действия электростатического поля напряженностью $\vec{E} = \vec{i}E_0\cos\beta + \vec{j}E_0\sin\beta + \vec{k}E_z$, а магнитное поле исчезает. Определить величину E_z и E_0, если электрон вернулся в точку влета.



Запишем уравнение движение электрона в области с наведенным полем $\vec{B}$ с помощью второго закона Ньютона:

$$m\vec{a} = -e\vec{v}\times\vec{B} = -e\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} = -e\left[\vec{i}\dot{y}B_0 - \vec{j}\dot{x}B_0\right].$$

Разделим обе части на массу электрона, тогда в проекциях на координатные оси получим:

$$\text{Ox: } \ddot{x} = -\omega_c\dot{y}, \qquad (1)$$
$$\text{Oy: } \ddot{y} = \omega_c\dot{x}, \qquad (2)$$
$$\text{Oz: } \ddot{z} = 0, \qquad (3)$$

где $\omega_c = \dfrac{eB_0}{m}$ – циклотронная частота.

Интегрируя уравнение (3) с учетом начальных условий: $\dot{z}(0) = v\cos\alpha$ и $z(0) = 0$, получим

$$\dot{z} = v\cos\alpha, \quad z = vt\cos\alpha.$$

Найдем $\dot{x}$ интегрированием уравнения (1):

$$\dot{x} = -\omega_c y + C, \quad C = \omega_c y(0) + \dot{x}(0) = v\sin\alpha, \quad \dot{x} = -\omega_c y + v\sin\alpha$$

и подставим ее в уравнение (2):

$$\ddot{y} = -\omega_c^2 y + \omega_c v\sin\alpha, \text{ или } \ddot{y} + \omega_c^2 y = \omega_c v\sin\alpha.$$

Представим решение этого уравнения в виде суммы общего и частного решений:

$$y = y_{\text{общ}} + y_{\text{част}}.$$

$$y_{\text{общ}} = A\cos\omega_c t + B\sin\omega_c t, \quad y_{\text{част}} = \frac{v\sin\alpha}{\omega_c};$$

$$y = A\cos\omega_c t + B\sin\omega_c t + \frac{v}{\omega_c}\sin\alpha.$$

Константы A и B найдем из начальных условий:

$$\dot{y}(0) = 0\colon \quad -\omega_c A\sin 0 + \omega_c B\cos 0 = 0 \Rightarrow B = 0;$$

$$y(0) = 0\colon \quad A\cos 0 + \frac{v}{\omega_c}\sin\alpha = 0 \Rightarrow A = -\frac{v}{\omega_c}\sin\alpha.$$

Таким образом, $y = \dfrac{v}{\omega_c}\Big[1 - \cos\omega_c t\Big]\sin\alpha$, $\dot{y} = v\sin\alpha\sin\omega_c t$.

Тогда:

$$\dot{x} = -v\sin\alpha\big[1 - \cos\omega_c t\big] + v\sin\alpha = v\sin\alpha\cos\omega_c t.$$

$$x = \frac{v}{\omega_c}\sin\alpha\sin\omega_c t.$$

В момент времени τ, равный четверти периода циклотронной частоты $\tau = \dfrac{1}{4}T_c = \dfrac{1}{4}\dfrac{2\pi}{\omega_c} = \dfrac{\pi}{2\omega_c}$:

$$\dot{x}(\tau) = v\sin\alpha\cos\frac{\pi}{2} = 0, \qquad x(\tau) = \frac{v}{\omega_c}\sin\alpha\sin\frac{\pi}{2} = \frac{v}{\omega_c}\sin\alpha;$$

$$\dot{y}(\tau) = v\sin\alpha\sin\frac{\pi}{2} = v\sin\alpha, \qquad y(\tau) = \frac{v}{\omega_c}\Big[1 - \cos\frac{\pi}{2}\Big]\sin\alpha = \frac{v}{\omega_c}\sin\alpha;$$

$$\dot{z}(\tau) = v\cos\alpha, \qquad z(\tau) = \frac{v}{\omega_c}\frac{\pi}{2}\cos\alpha.$$

Запишем уравнение движение электрона в области с наведенным полем $\vec{E}$ с помощью второго закона Ньютона:

$$m\vec{a} = -e\vec{E}.$$

Разделим обе части на массу электрона, тогда в проекциях на координатные оси получим:

$$\text{Ox: } \ddot{x} = -\frac{eE_0}{m}\cos\beta,$$

$$\text{Oy: } \ddot{y} = -\frac{eE_0}{m}\sin\beta,$$

$$\text{Oz: } \ddot{z} = -\frac{eE_z}{m}.$$

Интегрируя по времени два раза и учитывая, что в качестве начальных условий используются значения координат и скоростей в момент времени τ, получим зависимости координат от времени:

$$x = -\frac{eE_0}{2m}t^2\cos\beta + \frac{v}{\omega_c}\sin\alpha,$$
$$y = -\frac{eE_0}{2m}t^2\sin\beta + vt\sin\alpha + \frac{v}{\omega_c}\sin\alpha,$$
$$z = -\frac{eE_z}{2m}t^2 + vt\cos\alpha + \frac{v}{\omega_c}\frac{\pi}{2}\cos\alpha.$$

По условию, электрон вернется в начальную точку за время T:

$$0 = -\frac{eE_0}{2m}T^2\cos\beta + \frac{v}{\omega_c}\sin\alpha, \tag{4}$$
$$0 = -\frac{eE_0}{2m}T^2\sin\beta + vT\sin\alpha + \frac{v}{\omega_c}\sin\alpha, \tag{5}$$
$$0 = -\frac{eE_z}{2m}T^2 + vT\cos\alpha + \frac{v}{\omega_c}\frac{\pi}{2}\cos\alpha. \tag{6}$$

Из уравнения (4) найдем время возврата электрона T:

$$\frac{eE_0}{2m}T^2\cos\beta = \frac{v}{\omega_c}\sin\alpha,\;\; T^2 = \frac{2m^2v}{e^2E_0B_0}\frac{\sin\alpha}{\cos\beta};\;\; T = \frac{m}{e}\sqrt{\frac{2v}{E_0B_0}\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}}.$$

Из уравнения (5) найдем E_0:

$$\frac{eE_0}{2m}\frac{m^2}{e^2}\frac{2v}{E_0B_0}\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\sin\alpha = \frac{mv}{e}\sin\alpha\sqrt{\frac{2v}{E_0B_0}\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}} + \frac{mv}{eB_0}\sin\alpha,$$

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{B_0} = \sqrt{\frac{2v}{E_0B_0}\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}} + \frac{1}{B_0}, \quad \frac{1}{B_0}\Big(\operatorname{tg}\beta - 1\Big) = \sqrt{\frac{2v}{E_0B_0}\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}},$$

$$(\operatorname{tg}\beta - 1)^2 = \frac{2vB_0}{E_0}\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}, \quad E_0 = \frac{2vB_0\cos\alpha}{\cos\beta(\operatorname{tg}\beta-1)^2} = \frac{2vB_0\sin\alpha}{1-\sin 2\beta}\cos\beta.$$

А теперь из уравнения (6) найдем E_z:

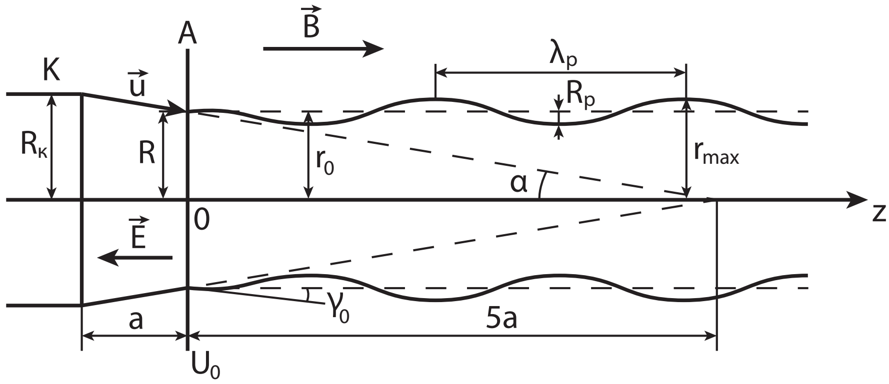
$$\frac{eE_z}{2m}\frac{m^2}{e^2}\frac{2v}{E_0B_0}\frac{\sin\alpha}{\cos\beta} = \frac{mv}{e}\sqrt{\frac{2v}{E_0B_0}\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}}\cos\alpha + \frac{\pi}{2}\frac{mv}{eB_0}\cos\alpha,$$

$$E_z\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2vE_0B_0\cos\beta\sin\alpha} + \frac{\pi}{2}E_0\cos\beta,$$

$$E_z = \sqrt{\frac{2vE_0B_0\cos\beta\cos^2\alpha}{\sin\alpha}} + \frac{\pi E_0\cos\beta\cos\alpha}{2\sin\alpha};$$

$$E_z = \frac{2vB_0\cos\beta\cos\alpha}{\sqrt{1-\sin 2\beta}}\left(1 + \frac{\pi\cos\beta}{2\sqrt{1-\sin 2\beta}}\right).$$

2. Сходящийся электронный поток эмитируется с торца цилиндрического катода радиуса $R_к$ с начальной скоростью u и ускоряется под действием напряжения U_0 первого анода электронного прожектора, расположенного на расстоянии a от катода. Электроны вылетают под углами, определяемыми образующими конуса, вершина которого лежит на расстоянии $6a$ от катода. За анодом поток летит в продольном фокусирующем магнитном поле с величиной магнитной индукции B_0. Считая, что с катода снимается ток величиной $I_к$, определить: период пульсаций, максимальный радиус электронного потока. Считать, что распределение поля между катодом и первым анодом эквивалентно распределению поля между двумя параллельными плоскостями.



Запишем уравнение движения электрона потока в области между катодом и первым анодом:

$$m\vec{a} = -e\vec{E},\ \vec{a} = -\frac{e}{m}\vec{E},\ \vec{E} = -\frac{U_0}{a}\vec{k}.$$

В цилиндрических координатах, с учетом того, что $\dot{\varphi} = 0$:

$$\ddot{r} = 0, \quad \ddot{z} = \frac{e}{m}\frac{U_0}{a}.$$

Для крайнего электрона потока: $\dot{r}(0) = -u\sin\alpha$, $r(0) = R_к$, $\dot{z}(0) = u\cos\alpha$, $z(0) = -a$, $\alpha = \operatorname{arctg} R_к/6a$. Интегрируя уравнение движения с такими начальными условиями, получим:

$$\dot{r} = -u\sin\alpha,\ r = -ut\sin\alpha + R_к, \quad \dot{z} = \frac{e}{m}\frac{U_0}{a}t + u\cos\alpha,\ z = \frac{e}{m}\frac{U_0}{a}\frac{t^2}{2} + ut\cos\alpha - a.$$

Из последнего уравнения найдем время пролета области «катод-анод»:

$$\frac{e}{m}\frac{U_0}{a}\frac{\tau^2}{2} + u\tau\cos\alpha - a = 0, \quad \tau = -\frac{amu\cos\alpha}{eU_0} + \sqrt{\left(\frac{amu\cos\alpha}{eU_0}\right)^2 - \frac{2a^2m}{eU_0}}.$$

Тогда в момент τ:

$$\dot{z}(\tau) = \sqrt{u^2\cos^2\alpha - 2\frac{eU_0}{m}} = v_0,$$

$$r(\tau) = R_{\text{к}} + \frac{amu^2\cos\alpha\sin\alpha}{eU_0} - u\sin\alpha\sqrt{\left(\frac{amu\cos\alpha}{eU_0}\right)^2 - \frac{2a^2m}{eU_0}} = R.$$

Запишем уравнение движения электрона потока в области за анодом:

$$m\vec{a} = -e\vec{E}_{\text{пр}} - e\vec{v}\times\vec{B}, \quad \vec{v}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \dot{r} & r\dot{\varphi} & \dot{z} \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} = \vec{e}_r\big(r\dot{\varphi}B_0\big) - \vec{e}_\varphi\big(\dot{r}B_0\big).$$

В проекциях на оси координат:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r(\dot{\varphi})^2 = -\dfrac{e}{m}E_r - \dfrac{e}{m}B_0 r\dot{\varphi}, \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}\big(r^2\dot{\varphi}\big) = \dfrac{e}{m}B_0\dot{r}, \end{cases} \quad \text{где } E_r = -\frac{I_{\text{к}}}{2\pi\varepsilon_0 v_0 r}. \tag{7}$$

Поток вектора $\vec{B}$ через поверхность круга радиуса r:

$$\psi(r,z) = 2\pi\int\limits_0^r B_0 r\,dr = 2\pi B_0\frac{r^2}{2} = \pi r^2 B_0.$$

Тогда $\dot{\psi}$:

$$\dot{\psi} = \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = 2\pi r B_0\frac{\partial r}{\partial t} = 2\pi r B_0\dot{r}.$$

Распишем второе уравнение системы (7):

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\big(r^2\dot{\varphi}\big) = \frac{e}{m}B_0\dot{r}, \;\; \frac{d}{dt}\big(r^2\dot{\varphi}\big) = \frac{e}{m}B_0 r\dot{r}, \;\; \frac{d}{dt}\big(r^2\dot{\varphi}\big) = \frac{\psi}{2\pi}\frac{e}{m}.$$

Интегрируем, учитывая начальные условия $r(\tau) = R$, $\dot{\varphi}(\tau) = 0$, $\psi\Big|_{t=\tau} = 0$:

$$r^2\dot{\varphi} = \frac{e\psi}{2\pi m} = \frac{e}{2\pi m}\pi r^2 B_0, \quad \dot{\varphi} = \frac{eB_0}{2m} = \frac{\omega_c}{2}.$$

Подставляя значение $\dot{\varphi}$ в первое уравнение системы (7):

$$\ddot{r} - r\frac{\omega_c^2}{4} = \frac{eI_{\text{к}}}{2\pi\varepsilon_0 v_0 rm} - r\frac{\omega_c^2}{2}, \quad \ddot{r} + r\frac{\omega_c^2}{4} - \frac{eI_{\text{к}}}{2\pi\varepsilon_0 v_0 rm} = 0.$$

Перейдем к уравнению траектории $r(z)$ $\left(\ddot{r} = \dfrac{d^2r}{dz^2}v_0\right)$:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial z^2} + \frac{r\omega_c^2}{4v_0^2} - \frac{eI_{\text{к}}}{2\pi\varepsilon_0 v_0^3 rm} = 0.$$

При некотором равновесном радиусе $r_0^2 = \dfrac{4v_0^2 eI_к}{2\pi\varepsilon_0 v_0^3 m\omega_c^2} = \dfrac{2eI_к}{m\omega_c^2\varepsilon_0 v_0\pi}$ ускорение по радиусу будет отсутствовать, и электронный поток будет сохранять свою форму, то есть будет бриллюэновским.

Пусть поток отклоняется от равновесного радиуса r_0 на некоторую величину $\delta \ll 1$: $r = r_0(1+\delta)$.

Учитывая разложение $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_0}\bigl(1-\delta\bigr)$, получим дифференциальное уравнение относительно δ:

$$\frac{d^2}{dz^2}\Bigl[r_0(1+\delta)\Bigr] + \frac{r_0(1+\delta)\omega_c^2}{4v_0^2} - \frac{eI_к}{2\pi\varepsilon_0 v_0^3 r_0 m}\Bigl(1-\delta\Bigr) = 0, \quad \frac{d^2\delta}{dz^2} + \frac{\omega_c^2}{2v_0^2}\delta = 0.$$

Обозначая $\alpha^2 = \dfrac{\omega_c^2}{2v_0^2}$, тогда $\dfrac{d^2\delta}{dz^2} + \alpha^2\delta = 0$.

Решение этого уравнения $\delta = D\cos(\alpha z + \beta)$.

Из начальных условий $\delta(0) = \dfrac{R}{r_0}\left(1-\dfrac{r_0}{R}\right)$, $\delta'(0) = \dfrac{\operatorname{tg}\gamma_0}{r_0}$ найдем D и β:

$$D = \sqrt{\delta^2(0) + \left(\frac{\delta'(0)}{\alpha}\right)^2} = \frac{R}{r_0}\sqrt{\left(1-\frac{r_0}{R}\right)^2 + 2\left(\frac{\operatorname{tg}\gamma_0 v_0}{\omega_c R}\right)^2};$$

$$\beta = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\delta'(0)}{\alpha\delta(0)}\right) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}\,v_0\operatorname{tg}\gamma_0}{\left(1-\frac{r_0}{R}\right)R\omega_c}\right)$$ – начальная фаза пульсаций.

Радиус пульсаций: $R_p = r_0 D$. Длина волны пульсаций: $\lambda_p = \dfrac{2\pi}{\alpha} = \dfrac{\sqrt{8}\,\pi v_0}{\omega_c}$.

Период пульсаций: $T_p = \dfrac{\lambda_p}{c} = \dfrac{\sqrt{8}\,\pi v_0}{\omega_c c}$. Максимальный радиус пучка:

$$r_{max} = r_0 + R_p = r_0\left(1 + R\sqrt{\left(1-\frac{r_0}{R}\right)^2 + 2\left(\frac{\operatorname{tg}\gamma_0 v_0}{\omega_c R}\right)^2}\right).$$