Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный технический университет»
Факультет электроники и вычислительной техники
Кафедра физики

Семестровая работа по дисциплине «Физика атомов»

Вариант №16

Выполнил
студент группы Ф-369
Чечеткин И. А.

Проверил
доцент Еремин А. В.

Волгоград, 2014

Задача 1 (ИОФ 6.229). Имеются три параллельные друг другу абсолютно черные плоскости. Найти установившуюся температуру T_x:

а) внешних плоскостей, если внутреннюю плоскость поддерживают при температуре T;

б) внутренней плоскости, если внешние плоскости поддерживают при температурах T и $2T$.

Решение:

а) Излучение, падающее на плоскости, равно излучению, которое испускает центральная плоскость. По закону Стефана-Больцмана:

$$\sigma T_x^4 + \sigma T_x^4 = \sigma T^4,$$

откуда:

$$T_x = \frac{T}{\sqrt[4]{2}}.$$

б) Излучение, падающее на две стороны центральной плоскости, равно излучению, которое испускают боковые плоскости. По закону Стефана-Больцмана:

$$\sigma T^4 + 16\sigma T^4 = 2\sigma T_x^4,$$

откуда:

$$T_x = \sqrt[4]{\frac{17}{2}}\,T.$$

Ответ: а) $T_x = T/\sqrt[4]{2}$, б) $T_x = T \cdot \sqrt[4]{17/2}$.

Задача 2 (ИАЯФ 1.62). Фотон с энергией $\hbar\omega$ испытал столкновение с электроном, который двигался ему навстречу. В результате столкновения направление движения фотона изменилось на противоположное, а его энергия осталась прежней. Найти скорость электрона до и после столкновения (v и v').

Решение:

Из закона сохранения энергии

$$\hbar\omega + T = \hbar\omega + T'$$

следует, что кинетическая энергия и, следовательно, скорость электрона, а также импульс фотона не изменились: $T = T'$, $v = v'$, $p_\phi = p'_\phi$.

Из закона сохранения импульса

$$p_\phi - p_e = p_e - p_\phi$$

следует, что импульс фотона равен импульсу электрона:

$$p_\phi = p_e, \quad \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{mv}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)}}.$$

Выражая из последнего соотношения скорость электрона v, получим:

$$v = \frac{\frac{\hbar\omega}{c}}{\sqrt{\left(\frac{\hbar\omega}{c^2}\right)^2 + m^2}}$$

Окончательно, обозначая $\varepsilon = \hbar\omega/(mc^2)$:

$$v = \frac{c\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + 1}}.$$

Ответ: $$v = \frac{c\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + 1}}, \qquad \text{где } \varepsilon = \frac{\hbar\omega}{mc^2}.$$

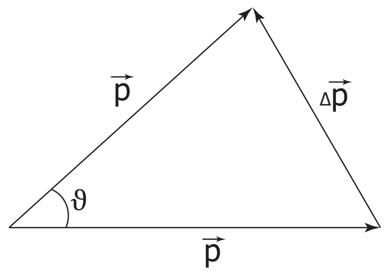
Задача 3 (ИОФ 5.42). Протон с кинетической энергией T и прицельным параметром b рассеялся на кулоновском поле неподвижного ядра атома золота. Найти импульс, переданный данному ядру.

Решение:

Изменение импульса частицы будет происходить за счет передачи импульса ядру, поэтому найдем изменение импульса протона.

По теореме косинусов:

$$\begin{aligned}
\Delta p^2 &= 2p^2 + 2p^2\cos\vartheta,\\
\Delta p &= p\sqrt{2(1+\cos\vartheta)},\\
\Delta p &= 2p\sin\tfrac{\vartheta}{2}.
\end{aligned}$$



Треугольник импульсов

По формуле Резерфорда для угла рассеяния:

$$\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2} = \frac{m_p v^2 b}{ke^2 Z} = \frac{2Tb}{ke^2 Z}.$$

Воспользовавшись известным тригонометрическим тождеством

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\frac{\vartheta}{2}}}$$

и соотношениями $p = \sqrt{2m_pT}$, $m_pv^2 = 2T$, получим:

$$\Delta p = \frac{2p}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\frac{\vartheta}{2}}} = \sqrt{\frac{4p^2}{1+\left(\frac{m_pv^2b}{ke^2Z}\right)^2}} = \sqrt{\frac{8m_pT}{1+\left(\frac{2Tb}{ke^2Z}\right)^2}}.$$

Ответ:
$$\Delta p = \sqrt{\frac{8m_pT}{1+\left(\frac{2Tb}{ke^2Z}\right)^2}}.$$

Задача 4 (ИАЯФ 2.47). Вычислить для мезоатома водорода (в котором вместо электрона движется мезон, имеющий тот же заряд, но массу в 207 раз больше):

а) расстояние между мезоном и ядром в основном состоянии;
б) длину волны резонансной линии;
в) энергии связей основных состояний мезоатомов водорода, ядра которых протон и дейтрон.

Решение:

а) По правилу квантования боровских орбит:

$$L_n = \hbar n = mvr,$$

где $m = m_p m_\mu/(m_p + m_\mu)$ — приведенная масса, m_p — масса протона, $m_\mu = 207 m_e$ — масса мезона. Отсюда $v = \hbar n/(mr)$.

Подставляем значение v во второй закон Ньютона

$$m\frac{v^2}{r} = k\frac{e^2}{r^2}, \quad \frac{\hbar^2 n^2}{mr} = ke^2.$$

Найдем значение r в основном состоянии:

$$r = \frac{\hbar^2 n^2}{mke^2} = \frac{\hbar^2}{m_\mu ke^2}\cdot\left(1 + \frac{m_\mu}{m_p}\right) = \frac{\hbar^2}{207 m_e ke^2}\cdot\left(1 + \frac{207 m_e}{m_p}\right) = 2{,}85\cdot 10^{-14}\ \text{м}.$$

б) Резонансная линия – головная линия серии Лаймана:

$$\omega = R_\mu\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}R_\mu.$$

Постоянная Ридберга для мезоатома водорода:

$$R_\mu = \frac{k^2 e^4}{2\hbar^3}m = \frac{k^2 e^4}{2\hbar^3}\cdot\frac{207 m_e m_p}{207 m_e + m_p} = \frac{207 m_p \cdot R}{207 m_e + m_p}.$$

Длина волны этой линии:

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{8\pi c}{3R_\mu} = \frac{8\pi c\cdot(207 m_e + m_p)}{621 m_p\cdot R} = 6{,}54\cdot 10^{-11}\ \text{м} = 654\ \text{пм}.$$

в) Энергия связи основного состояния мезоатома водорода, ядром которого является протон:

$$E_n = \hbar\omega_\infty = \hbar R_\mu \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{\infty}\right) = \hbar R_\mu = \frac{207 m_p \cdot \hbar R}{207 m_e + m_p} = 2{,}53 \text{ КэВ}.$$

Если ядром является дейтрон, то постоянная Ридберга:

$$R_\partial = \frac{k^2 e^4}{2\hbar^3} \cdot \frac{207 m_e m_\partial}{207 m_e + m_\partial} = \frac{207 m_\partial \cdot R}{207 m_e + m_\partial},$$

где m_∂ – масса дейтрона.

А энергия связи:

$$E_\partial = \hbar\omega_{\infty_\partial} = \hbar R_\partial = \frac{207 m_\partial \cdot \hbar R}{207 m_e + m_\partial} = 2{,}67 \text{ КэВ}.$$

Ответ: а) $r = 285$ фм; б) $\lambda = 654$ пм; в) $E_n = 2{,}53$ КэВ, $E_\partial = 2{,}67$ КэВ.

Задача 5 (ИАЯФ 3.32). Оценить минимально возможную энергию электронов в атоме He и соответствующее расстояние электронов от ядра.

Решение:

Полная энергия электрона в кулоновском поле для водородоподобного атома равна

$$E_1 = T + U = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{Ze^2}{r} = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{2e^2}{r}.$$

Так как в атоме гелия два электрона, то энергия взаимодействия электронов с атомом:

$$E_e = 2E_1 = 2\left(\frac{p^2}{2m_e} - \frac{2e^2}{r}\right) = \frac{p^2}{m_e} - \frac{4e^2}{r}.$$

Также электроны будут взаимодействовать и между собой. Энергия их взаимодействия, согласно закону Кулона:

$$E_в = \frac{e^2}{d} = \frac{e^2}{2r}.$$

Полная энергия электронов в атоме гелия будет равна сумме энергий:

$$E = E_e + E_в = \frac{p^2}{m_e} - \frac{4e^2}{r} + \frac{e^2}{2r} = \frac{p^2}{m_e} - \frac{7e^2}{2r}.$$

Из соотношения неопределенностей Гейзенберга, полагая $\Delta r \sim r$, $\Delta p \sim p$:

$$r \cdot p \sim \hbar, \quad p \sim \frac{\hbar}{r}.$$

Тогда энергия:

$$E = \frac{\hbar^2}{m_e r^2} - \frac{7e^2}{2r}.$$

Найдем минимум этой функции:

$$\frac{dE}{dr} = -\frac{2\hbar^2}{mr^3} + \frac{7e^2}{2r^2} = 0,$$

откуда расстояние электронов до ядра при минимальной энергии:

$$r = \frac{4\hbar^2}{7m_e e^2} = 3 \text{ пм}.$$

Минимальное значение энергии:

$$E_{min} = \frac{\hbar^2}{m_e} \cdot \left(\frac{7e^2 m_e}{4\hbar^2}\right)^2 - \frac{7e^2}{2} \cdot \frac{7e^2 m_e}{4\hbar^2} = -\left(\frac{7}{4}\right)^2 \frac{m_e e^4}{\hbar^2} = -83 \text{ эВ}.$$

Ответ: $E_{min} = -\frac{49}{16}\frac{m_e e^4}{\hbar^2} = -83 \text{ эВ}, \ r = \frac{4\hbar^2}{7m_e e^2} = 3 \text{ пм}.$

Задача 6 (ИАЯФ 5.29). Выписать электронные конфигурации и с помощью правила Хунда найти основной терм атомов: а) C и N; б) S и Cl. Электронные конфигурации этих атомов соответствуют застройке электронных оболочек в нормальном порядке.

Решение:

а) Электронная конфигурация атома ^{6}C: $1s^2 2s^2 2p^2$.

По правилам Хунда максимальное число $S = 2 \cdot 1/2 = 1$, наибольшее возможное L для p-электронов при такой конфигурации, согласно принципу Паули, равно 1: ^{3}P. Так как подоболочка атома заполнена менее, чем наполовину, то число $J = |L - S| = 0$.

Основной терм атома ^{6}C: $^3\mathrm{P}_0$.

Электронная конфигурация атома ^{7}N: $1s^2 2s^2 2p^3$.

По правилам Хунда максимальное число $S = 3 \cdot 1/2 = 3/2$, наибольшее возможное L для p-электронов при такой конфигурации, согласно принципу Паули, равно 0: ^{4}S. Так как подоболочка заполнена наполовину, то число $J = L + S = 3/2$.

Основной терм атома ^{7}N: $^4\mathrm{S}_{3/2}$.

б) Электронная конфигурация атома ^{16}S: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^4$.

По правилам Хунда максимальное число $S = (3-1) \cdot 1/2 = 1$, наибольшее возможное L для p-электронов при такой конфигурации, согласно принципу Паули, равно 1: ^{3}P. Так как подоболочка атома заполнена более, чем наполовину, то число $J = L + S = 2$.

Основной терм атома ^{16}S: $^3\mathrm{P}_2$.

Электронная конфигурация атома ^{17}Cl: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5$.

По правилам Хунда максимальное число $S = (3-2) \cdot 1/2 = 1/2$, наибольшее возможное L для p-электронов при такой конфигурации, согласно принципу Паули, равно 1: ^{2}P. Так как подоболочка заполнена более, чем наполовину, то число $J = L + S = 3/2$.

Основной терм атома ^{17}Cl: $^2\mathrm{P}_{3/2}$.

Ответ: а) ^{6}C: $^3\mathrm{P}_0$, ^{7}N: $^4\mathrm{S}_{3/2}$; б) ^{16}S: $^3\mathrm{P}_2$, ^{17}Cl: $^2\mathrm{P}_{3/2}$.

Задача 7 (ИОФ 5.192). При увеличении напряжения на рентгеновской трубке от $U_1 = 10$ кВ до $U_2 = 20$ кВ интервал длин волн между K_α-линией и коротковолновой границей сплошного рентгеновского спектра увеличился в $n = 3,0$ раза. Определить порядковый номер элемента антикатода этой трубки, имея в виду, что данный элемент является легким.

Решение:

Длина волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра определяется выражением

$$\lambda_{\textit{кг}} = \frac{2\pi c\hbar}{eU},$$

где U – напряжение на рентгеновской трубке.

Длина волны K_α-линии:

$$\lambda_{K\alpha} = \frac{2\pi c}{\omega_{K\alpha}} = \frac{8\pi c}{3R(Z-1)^2},$$

где $\omega_{K\alpha} = \frac{3}{4}R(Z-1)^2$ – частота K_α-линии.

Интервал между этими двумя линиями при увеличении напряжения увеличился в n раз:

$$\lambda_{K\alpha} - \lambda_{\textit{кг}\,2} = n(\lambda_{K\alpha} - \lambda_{\textit{кг}\,1});$$

$$\frac{8\pi c}{3R(Z-1)^2} - \frac{2\pi c\hbar}{eU_2} = n\frac{8\pi c}{3R(Z-1)^2} - n\frac{2\pi c\hbar}{eU_1};$$

$$\frac{4(n-1)}{3R(Z-1)^2} = \frac{\hbar(nU_2 - U_1)}{eU_1U_2};$$

$$3R(Z-1)^2 = \frac{4eU_1U_2(n-1)}{\hbar(nU_2 - U_1)}.$$

Окончательно:

$$Z = 2\sqrt{\frac{eU_1(n-1)}{3R\hbar\left(n - \frac{U_1}{U_2}\right)}} + 1 = 29.$$

Ответ: $$Z = 2\sqrt{\frac{eU_1(n-1)}{3R\hbar\left(n - \frac{U_1}{U_2}\right)}} + 1 = 29.$$