Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный технический университет»
Факультет электроники и вычислительной техники
Кафедра физики

Семестровая работа №2 по дисциплине «Электродинамика»

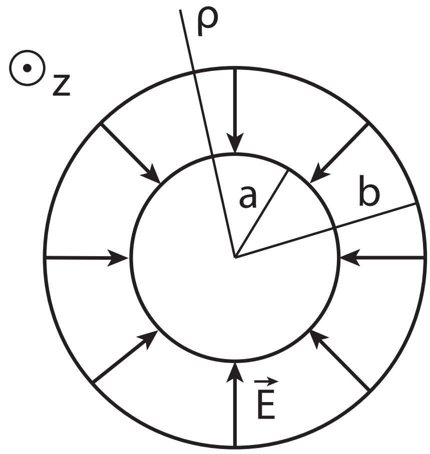
Выполнила
студентка группы Ф-369
Слоква В. И.

Проверил
доцент Грецов М. В.

Волгоград, 2014

705. Длинный прямой цилиндрический катод радиуса a, по которому течет равномерно распределенный ток I, испускает электроны с нулевой начальной скоростью. Эти электроны движутся под действием ускоряющего потенциала V к длинному коаксиальному аноду радиуса b. Каково должно быть минимальное значение разности потенциалов $V_{кр}$ между катодом и анодом, чтобы электроны достигали анода, несмотря на заворачивающее действие магнитного поля тока I?

Решение:



Проекции уравнения движения

$$\frac{dp}{dt} = e\boldsymbol{E} + e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

на оси ρ и z:

$$\frac{dp_\rho}{dt} = eE;$$
$$\frac{dp_z}{dt} = ev_\rho B,$$

так как $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = v_\rho B \boldsymbol{e}_z$.

Полная энергия электрона в поле:

$$\mathscr{E} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} + \frac{\alpha}{r},$$

где $\alpha = ee'$, $e' = -e$:

$$mc^2 = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - eV.$$

Выражаем eV:

$$eV = \sqrt{(cp)^2 + m^2c^4} - mc^2.$$

$p = p_z$, так как нас интересует крайний случай, при котором еще наблюдается долет электрона до анода. Тогда:

$$dp_z = ev_\rho B\, dt;$$
$$dp_z = eB\delta\rho;$$
$$\int_0^{p_z} dp_z = e\int_a^b B\delta\rho.$$

По закону Био-Савара:

$$B = \frac{\mu\mu_0 J}{2\pi\rho}.$$

Перейдя для удобства в СГС, получаем:

$$B = \frac{4\pi}{c^2}\frac{J}{2\pi\rho} = \frac{2J}{c^2\rho}.$$

Тогда p_z:

$$p_z = e\int\limits_a^b \frac{2J}{c^2}\frac{d\rho}{\rho} = \frac{2Je}{c^2}\ln\frac{b}{a}.$$

А $eV_{кр}$ тогда:

$$eV_{кр} = \sqrt{\frac{4J^2e^2}{c^2}\ln^2\frac{b}{a} + m^2c^4} - mc^2 = mc^2\sqrt{\frac{e^2}{m^2c^4}\cdot\frac{4J^2}{c^2}\ln^2\frac{b}{a} + 1} - mc^2 \approx$$
$$\approx mc^2\left(1 + \frac{e^2}{m^2c^4}\cdot\frac{2J^2}{c^2}\ln^2\frac{b}{a}\right) - mc^2 = \frac{e^2}{mc^2}\cdot\frac{2J^2}{c^2}\ln^2\frac{b}{a},$$

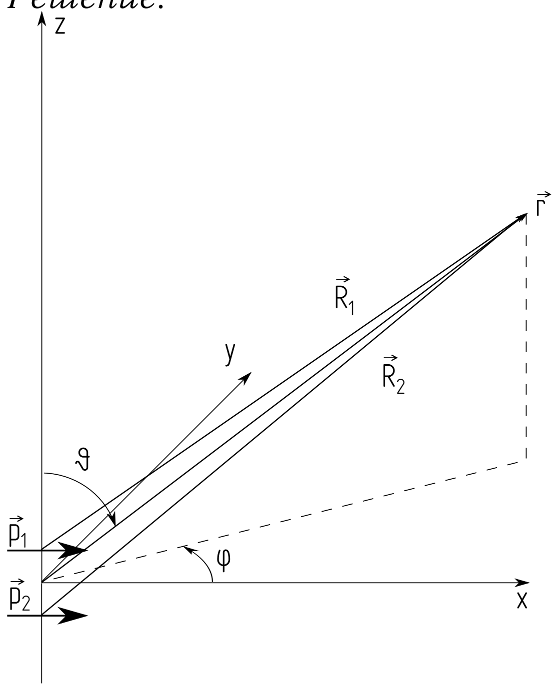
откуда

$$V_{кр} = \frac{2J^2e}{mc^4}\ln^2\frac{b}{a}.$$

Ответ: $V_{кр} = \dfrac{2J^2e}{mc^4}\ln^2\dfrac{b}{a}.$

749. Центры двух электрических дипольных осцилляторов с частотой ω и одинаковой амплитудой $p_0 \| x$ находятся на оси z, на равных расстояниях от начала координат и на расстоянии $a = \lambda/4$ друг от друга. Колебания в осцилляторах сдвинуты по фазе на $\pi/2$. Найти угловое распределение излучения $\left\langle \dfrac{dI}{d\Omega} \right\rangle$.

Решение:



Для удобства рассмотрения будем решать задачу в сферических координатах.

$$\frac{dW}{dt\, d\Omega} = |\boldsymbol{P}| \cdot r^2,$$

где $\boldsymbol{P}$ – вектор Пойнтинга. Считая в волновой зоне участок фронта волны вблизи точки наблюдения плоским, можем записать, что

$$P = \frac{c}{\mu_0} B^2.$$

Считая волну монохроматической и усредняя по времени, имеем

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{cr^2}{2\mu_0} B_0^2,$$

где B_0 – амплитудное значение индукции магнитного поля в рассматриваемой точке.

Индукция магнитного поля, создаваемого в точке волновой зоны дипольным осциллятором может быть записана в виде

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 \omega^2 \boldsymbol{p}_{t-\frac{R}{c}} \times \boldsymbol{n}}{4\pi R c}.$$

Для двух близко расположенных диполей получаем

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2 = \frac{\mu_0 \omega^2 \boldsymbol{p}_{t-\frac{R_1}{c}} \times \boldsymbol{n_1}}{4\pi R_1 c} + \frac{\mu_0 \omega^2 \boldsymbol{p}_{t-\frac{R_2}{c}+\frac{T}{4}} \times \boldsymbol{n_2}}{4\pi R_2 c}.$$

Не сделав большой ошибки, можем принять в знаменателях $R_1 = R_2 = r$, а в числителях $R_1 = r - \frac{1}{2} a \cos\vartheta$, $R_2 = r + \frac{1}{2} a \cos\vartheta$ и $\boldsymbol{n_1} = \boldsymbol{n_2} = \boldsymbol{n}$. Тогда получаем выражение

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 \omega^2 (p_{t-\frac{r}{c}+\frac{1}{2}\frac{a}{c}\cos\vartheta} + p_{t-\frac{r}{c}-\frac{1}{2}\frac{a}{c}\cos\vartheta+\frac{T}{4}}) \boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{n}}{4\pi r c}.$$

Рассмотрим сумму дипольных моментов, стоящую в скобках. Перейдём к комплексам:

$$\hat{p}_{t-\frac{r}{c}+\frac{1}{2}\frac{a}{c}\cos\vartheta} + \hat{p}_{t-\frac{r}{c}-\frac{1}{2}\frac{a}{c}\cos\vartheta+\frac{T}{4}} = p_0\big(e^{i\omega(t-\frac{r}{c}+\frac{1}{2}\frac{a}{c}\cos\vartheta)} + e^{i\omega(t-\frac{r}{c}-\frac{1}{2}\frac{a}{c}\cos\vartheta+\frac{T}{4})}\big) =$$
$$= p_0 e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}\big(e^{i\omega\frac{1}{2}\frac{a}{c}\cos\vartheta} + e^{i\omega(-\frac{1}{2}\frac{a}{c}\cos\vartheta+\frac{T}{4})}\big) = p_0 e^{i\omega(t-\frac{r}{c})} e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}\cos\left(\frac{a\omega}{2c}\cos\vartheta + \frac{\pi}{4}\right) =$$
$$= p_0\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos^2\frac{\vartheta}{2}\right) e^{i\omega(t-\frac{r}{c})} e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Заметим также, что

$$|\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{n}| = \sqrt{1-\sin^2\vartheta\cos^2\varphi}$$

Для амплитуды магнитного поля получаем выражение

$$B_0 = \frac{\mu_0\omega^2 p_0\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos^2\frac{\vartheta}{2}\right)\sqrt{1-\sin^2\vartheta\cos^2\varphi}}{4\pi r c}.$$

Подставляя в выражение для интенсивности, в конечном итоге имеем

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{\mu_0\omega^4 p_0^2}{16\pi^2 c}(1-\sin^2\vartheta\cos^2\varphi)\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos^2\frac{\vartheta}{2}\right).$$

Ответ: $\dfrac{dI}{d\Omega} = \dfrac{\mu_0\omega^4 p_0^2}{16\pi^2 c}(1-\sin^2\vartheta\cos^2\varphi)\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}\cos^2\dfrac{\vartheta}{2}\right).$

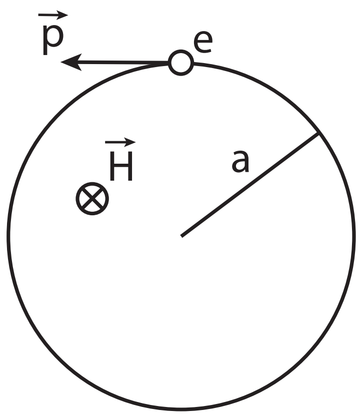
770. Релятивистская частица с зарядом e, массой m и импульсом p движется по круговой орбите в постоянном однородном магнитном поле $\boldsymbol{H}$. Радиус орбиты $a = cp/eH$. Найти суммарную по всем направлениям скорость потери энергии частицей $\left(-\dfrac{d\mathscr{E}}{dt'}\right)$.

Решение: Уравнение движения частицы в магнитном поле $\boldsymbol{H}$:

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt'} = \frac{e}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}.$$

Изменение скорости:

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt'} = \boldsymbol{v} \times \frac{e\boldsymbol{H}}{mc} = \frac{\boldsymbol{p}}{m} \times \frac{p\boldsymbol{e}_H}{ma} = \frac{p^2}{am^2}\boldsymbol{e}_p \times \boldsymbol{e}_H = \frac{v^2}{a}\boldsymbol{e}_p \times \boldsymbol{e}_H.$$



В результате излучения ускоренно движущаяся частица теряет энергию и импульс, передавая их электромагнитному полю. Потерю i-й составляющей 4-вектора энергии–импульса $p_i = \left(\dfrac{\mathscr{E}}{c},\ \boldsymbol{p}\right)$ в единицу собственного времени τ можно выразить через 4-скорость u_i и 4-ускорение w_i частицы:

$$-\frac{dp_i}{d\tau} = \frac{2e^2}{3c^3}w_k^2 u_i.$$

Потеря энергии:

$$-\frac{1}{c}\frac{d\mathscr{E}}{d\tau} = \frac{2e^2}{3c^3}w_k^2 u_0^2.$$

В лабораторной системе отсчета скорость потери энергии отличается множителем $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, так как $dt' = \gamma\delta\tau$:

$$-\gamma\frac{d\mathscr{E}}{dt'} = \frac{2e^2}{3c^2}w_k^2 u_0.$$

Так как временная компонента 4-скорости совпадает с $c\gamma$,то

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt'} = \frac{2e^2}{3c}w_k^2.$$

Так как частица движется по окружности, то поле $\boldsymbol{H}$ перпендикулярно импульсу $\boldsymbol{H} \perp \boldsymbol{p}$, а ее ускорение $w = \dfrac{v^2}{a} = w_k$. Его квадрат:

$$w^2 = \left(\frac{v^2}{a}\right)^2 = \left(\frac{p^2 eH}{m^2 cp}\right)^2 = \frac{p^2 e^2 H^2}{m^4 c^2}.$$

Тогда потеря энергии:

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt'} = \frac{2p^2 e^4 H^2}{3m^4 c^5}.$$

Ответ: $-\dfrac{d\mathscr{E}}{dt'} = \dfrac{2p^2 e^4 H^2}{3m^4 c^5}.$