Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный технический университет»
Факультет электроники и вычислительной техники
Кафедра физики

Семестровая работа №3 по дисциплине «Электродинамика»

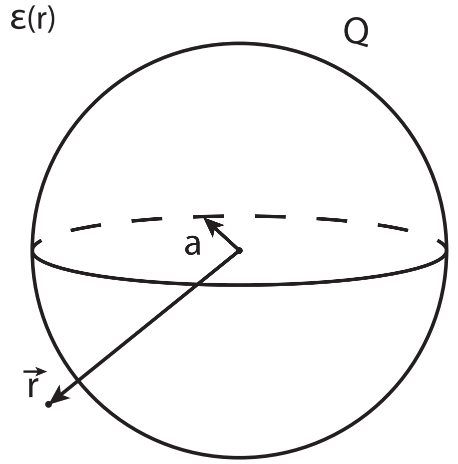
Выполнил
студент группы Ф-369
Чечеткин И. А.

Проверил
доцент Грецов М. В.

Волгоград, 2014

Задача 1.15: *Определить поле, создаваемое заряженным проводящим шаром радиуса a. Заряд его Q. Диэлектрическая проницаемость окружающей среды $\varepsilon = \varepsilon(r)$, где r – расстояние от центра шара.*

Решение:



Учитывая, что задача имеет сферическую симметрию, воспользуемся для решения сферической системой координат. Тогда можно записать следующие соотношения:

$$D_r = D(r), \quad D_\vartheta = D_\psi = 0.$$

Запишем уравнение Максвелла для индукции электрического поля: $\operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho$.

Воспользовавшись теоремой Остроградского-Гаусса, имеем:

$$\int \operatorname{div} \boldsymbol{D}\, dV = \oint \boldsymbol{D}\delta\boldsymbol{S} = D \oint dS = 4\pi r^2 D; \quad \int \rho\, dV = q.$$

Поле внутри шара, то есть при $r < a$ и $q = 0$:

$$D = E = 0.$$

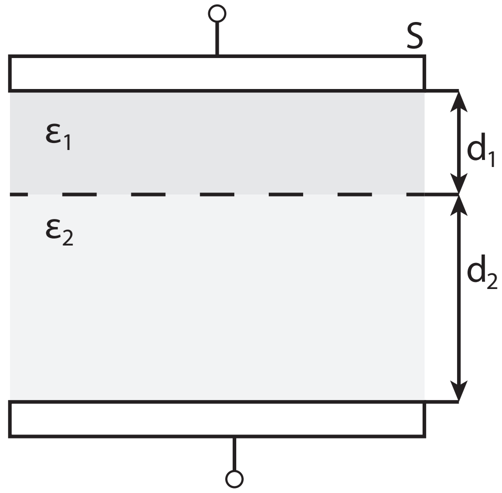
Поле вне шара, то есть при $r > a$ и $q = Q$:

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}; \quad E = \varepsilon\varepsilon_0 D = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(r)\cdot r^2}.$$

Ответ: $D = \dfrac{Q}{4\pi r^2}, \quad E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(r)\cdot r^2}.$

Задача 1.59: *Вычислить емкость плоского конденсатора. Поверхность обкладок S, между ними два плоскопараллельных слоя однородных диэлектриков. Толщина первого слоя d_1, проницаемость ε_1, второго – соответственно d_2 и ε_2. Краевым эффектом пренебречь.*

Решение:



По определению емкости плоского конденсатора: $C = q/\Delta\varphi = \sigma S/\Delta\varphi$.
По определению разности потенциалов:

$$\Delta\varphi = \int\limits_0^{d_1+d_2} \boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{l} = \int\limits_0^{d_1} \boldsymbol{E}_1\cdot\delta\boldsymbol{l} + \int\limits_{d_1}^{d_1+d_2} \boldsymbol{E}_2\cdot\delta\boldsymbol{l}.$$

Поле внутри однослойного конденсатора: $E = \sigma/(\varepsilon\varepsilon_0)$.

Тогда, с учетом, что поле $\boldsymbol{E} \upuparrows \delta\boldsymbol{l}$, имеем:

$$\Delta\varphi = \frac{\sigma}{\varepsilon_1\varepsilon_0}\int\limits_0^{d_1} dl + \frac{\sigma}{\varepsilon_2\varepsilon_0}\int\limits_{d_1}^{d_1+d_2} dl = \frac{\sigma d_1}{\varepsilon_1\varepsilon_0} + \frac{\sigma(d_1+d_2-d_1)}{\varepsilon_2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1}+\frac{d_2}{\varepsilon_2}\right).$$

Тогда емкость:

$$C = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1}+\frac{d_2}{\varepsilon_2}\right)} = \frac{\varepsilon_0 S}{\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1}+\frac{d_2}{\varepsilon_2}\right)} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2 S}{\varepsilon_1 d_2+\varepsilon_2 d_1}.$$

.

Ответ: $C = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2 S}{\varepsilon_1 d_2+\varepsilon_2 d_1}$.

Задача 1.116: *Найти распределение зарядов, индуцированных на поверхности цилиндра предыдущей задачи, и суммарный заряд, индуцированный на единице длины цилиндра.*

Предыдущая задача: В вакууме имеется бесконечно длинный заземленный проводящий круглый цилиндр радиуса a. Параллельно его оси протянута нить на расстоянии $l > a$ от нее. Нить равномерно заряжена с линейной плотностью χ. Определить создаваемое ею поле и силу, действующую на единицу длины нити.

Решение:

Из решения задачи 1.115:

$$E_R = -\frac{\partial\varphi}{\partial R} = \frac{\chi}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R - l\cos\vartheta}{R_1^2} - \frac{R - l'\cos\vartheta}{R_2^2}\right),$$

где $R_1 = \sqrt{l^2 + R^2 - 2lR\cos\vartheta}$, $R_2 = \sqrt{l'^2 + R^2 - 2l'R\cos\vartheta}$, $l' = a^2/l$.

Распределение заряда на поверхности определяется формулой:

$$\sigma = -\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial R}\bigg|_{R=a} = \varepsilon_0 E_R\big|_{R=a} = \frac{\chi}{2\pi}\left(\frac{R - l\cos\vartheta}{l^2 + R^2 - 2lR\cos\vartheta} - \right.$$
$$\left. - \frac{R - a^2/l\cos\vartheta}{a^4/l^2 + R^2 - 2a^2R/l\cos\vartheta}\right)_{R=a} = \frac{\chi}{2\pi}\left(\frac{a - l\cos\vartheta}{l^2 + a^2 - 2al\cos\vartheta} - \right.$$
$$\left. - \frac{a - a^2/l\cos\vartheta}{a^4/l^2 + a^2 - 2a^3/l\cos\vartheta}\right) = \frac{\chi}{2\pi}\left(\frac{a^2 - al\cos\vartheta}{a(a^2 + l^2 - 2al\cos\vartheta)} - \right.$$
$$\left. - \frac{l^2 - al\cos\vartheta}{a(a^2 + l^2 - 2al\cos\vartheta)}\right) = \frac{\chi}{2\pi}\frac{a^2 - l^2}{a(a^2 + l^2 - 2al\cos\vartheta)}.$$

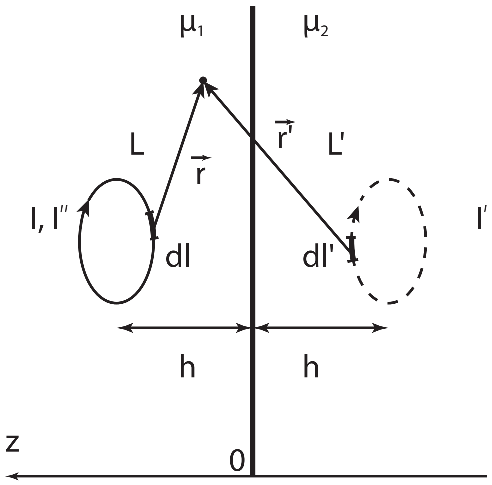
Суммарный заряд, индуцированный на единице длины цилиндра, можно выразить через поверхностную плотность зарядов следующим образом:

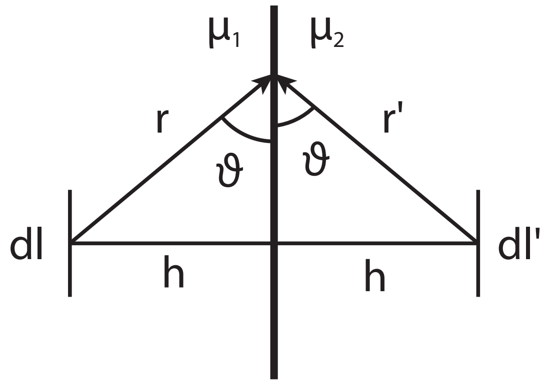
$$q_u = \int \sigma\, dS = \int_0^{2\pi} a\sigma\delta\vartheta = \frac{\chi}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2 - l^2}{a^2 + l^2 - 2al\cos\vartheta}\delta\vartheta = \frac{\chi}{2\pi}\cdot(-2\pi) = -\chi.$$

Ответ: $\sigma = \dfrac{\chi\ (a^2 - l^2)}{2a\pi(a^2 + l^2 - 2al\cos\vartheta)}$, $q_u = -\chi$.

Задача 2.35: *Полупространство заполнено однородным магнетиком с проницаемостью μ_1, а второе полупространство – однородным магнетиком с проницаемостью μ_2. В первой среде имеется плоский контур L с током I, расположенный параллельно плоскости раздела обеих сред на расстоянии h от нее. Определить создаваемое током магнитное поле.*

Решение:





Направим ось z в перпендикулярно плоскости раздела сред в сторону первой среды. Плоскость же раздела возьмем за координату $z = 0$.

Векторный потенциал искомого поля будем искать в виде:

$$\boldsymbol{A}_1 = \frac{\mu_1 I}{2\pi} \oint \frac{d\boldsymbol{l}}{r} + k_1 \frac{\mu_1 I}{2\pi} \oint \frac{d\boldsymbol{l'}}{r'}; \quad \boldsymbol{A}_2 = k_2 \frac{\mu_2 I}{2\pi} \oint \frac{d\boldsymbol{l}}{r},$$

где l' – изображение контура l, r и r' – расстояние рассматриваемой точки поля от элемента длины dl и dl', k_1, k_2 – константы токов: $I' = k_1 I$, $I'' = k_2 I$.

Рассмотрим граничные условия. Первое: условие непрерывности тангенциальной составляющей векторного потенциала на границе двух сред. Так как в данной задаче контур параллелен границе раздела, то у векторного потенциала будет только эта составляющая: $A_1 = A_2$, и тогда, учитывая то, что на границе: $r = h\cos\vartheta$; $r' = h\cos\vartheta$, и подставляя вид векторных потенциалов, получаем:

$$\frac{\mu_1 I}{2\pi h \cos\vartheta} \oint dl + k_1 \frac{\mu_1 I}{2\pi h \cos\vartheta} \oint dl' = \frac{\mu_2 I}{2\pi h \cos\vartheta} \oint dl.$$

В силу произвольности элемента dl и dl':

$$\mu_1 + k_1\mu_1 = k_2\mu_2.$$

Второе: условие непрерывности нормальной производной от векторного потенциала на границе:

$$\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial A_1}{\partial n} + \frac{1}{\mu_2}\frac{\partial A_2}{\partial n} = \frac{I}{2\pi}.$$

Подставляя уравнения для потенциалов и учитывая произвольность элементов dl и dl', получаем:

$$k_1 + k_2 = 1.$$

С учетом первого граничного условия получаем:

$$k_1 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}; \quad k_2 = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}.$$

Подставляя в векторный потенциал получаем:

$$\boldsymbol{A}_1 = \frac{\mu_1 I}{2\pi}\oint\frac{d\boldsymbol{l}}{r} + \left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}\right)\frac{\mu_1 I}{2\pi}\oint\frac{d\boldsymbol{l'}}{r'}; \quad \boldsymbol{A}_2 = \left(\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}\right)\frac{\mu_2 I}{\pi}\oint\frac{d\boldsymbol{l}}{r}.$$

Тогда поле в произвольной точке будет иметь вид:

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}_1 + \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}_2; \quad \boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0\mu_1}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}_1 + \frac{1}{\mu_0\mu_2}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}_2.$$

Ответ: $\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}_1 + \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{H} = \dfrac{1}{\mu_0\mu_1}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}_1 + \dfrac{1}{\mu_0\mu_2}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}_2$.