Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный технический университет»
Факультет электроники и вычислительной техники
Кафедра физики

Семестровая работа по дисциплине «Термодинамика и статистическая физика»

Вариант №19

Выполнил
студент группы Ф-469
Чечеткин И. А.

Проверил
профессор,
доктор физ.-мат. наук
Крючков С. В.

Волгоград, 2014

2.41: некоторое количество идеального газа с одноатомными молекулами совершило при $p = 1{,}00 \cdot 10^5$ Па обратимый изобарический процесс, в ходе которого объем газа изменился от значения $V_1 = 10{,}0$ л до $V_2 = 20{,}0$ л. Определить:
а) приращение внутренней энергии газа Δu,
б) совершенную газом работу A,
в) полученное газом количество теплоты Q.

Решение:

запишем выражение для внутренней энергии через теплоемкость при постоянном объеме C_V: $u = C_V T = \dfrac{i}{2} RT$. Для одноатомного газа число степеней свободы $i = 3$, поэтому

$$u = \frac{3}{2} \cdot RT = 1{,}5RT.$$

Тогда, по закону Менделеева-Клапейрона:

$$PV = RT; \quad u = 1{,}5PV.$$

Приращение внутренней энергии газа:

$$\Delta u = u_2 - u_1 = 1{,}5P(V_2 - V_1) = 1{,}5 \cdot 10^5 \text{ Па} \cdot 10 \text{ л} = 1{,}5 \text{ кДж}.$$

Работа, совершенная газом:

$$A = P\Delta V = P(V_2 - V_1) = 10^5 \text{ Па} \cdot 10 \text{ л} = 1 \text{ кДж}.$$

Полученное газом количество теплоты:

$$Q = \Delta u + A = 2{,}5 \text{ кДж}.$$

Ответ: $\Delta u = 1{,}5$ кДж, $A = 1$ кДж, $Q = 2{,}5$ кДж.

2.69: вычислить молярные теплоемкости C_V и C_P (выразить их через R), а также отношение этих теплоемкостей γ для идеального газа с:
а) одноатомными молекулами;
б) двухатомными жесткими молекулами;
в) двухатомными упругими молекулами;
г) трехатомными жесткими молекулами (атомы которых не лежат на одной прямой).

Решение:

выразим теплоемкости при постоянном объеме и при постоянном давлении через количество степеней свободы:

$$C_V = \frac{i}{2}R, \quad C_P = \frac{i+2}{2}R, \quad \gamma = \frac{C_P}{C_V}.$$

Для одноатомных молекул $i = 3$ (3 пространственные степени свободы):

$$C_V = \frac{3}{2}R, \quad C_P = \frac{5}{2}R, \quad \gamma = \frac{5}{3}.$$

Для жестких двухатомных молекул $i = 5$ (3 пространственные степени свободы + 2 вращательные):

$$C_V = \frac{5}{2}R, \quad C_P = \frac{7}{2}R, \quad \gamma = \frac{7}{5}.$$

Для упругих двухатомных молекул $i = 7$ (3 пространственные степени свободы + 2 вращательные + $2 \cdot 1$ колебательные):

$$C_V = \frac{7}{2}R, \quad C_P = \frac{9}{2}R, \quad \gamma = \frac{9}{7}.$$

Для жестких трехатомных молекул $i = 6$ (3 пространственные степени свободы + 3 вращательные):

$$C_V = 3R, \quad C_P = 4R, \quad \gamma = \frac{4}{3}.$$

2.101: в сосуде содержатся пять молекул.
а) Каким числом способов могут быть распределены эти молекулы между левой и правой половинами сосуда?
б) Чему равно $\Omega(0,5)$ – число способов осуществления такого распределения, при котором все пять молекул оказываются в правой половине сосуда? Какова вероятность $P(0,5)$ такого состояния?
в) Чему равно $\Omega(1,4)$ – число способов осуществления такого распределения, при котором в левой половине сосуда оказывается одна молекула, а в правой – четыре? Какова вероятность $P(1,4)$ такого состояния?
г) Чему равно $\Omega(2,3)$? Какова вероятность $P(2,3)$ такого состояния?

Решение:

а) общее число способов распределения молекул между двумя половинам сосуда:

$$\Omega(0,5)+\Omega(1,4)+\Omega(2,3)+\Omega(3,2)+\Omega(4,1)+\Omega(5,0)=$$
$$=2(C_0^5+C_1^5+C_2^5)=2\left(1+\frac{5!}{1!4!}+\frac{5!}{2!3!}\right)=2(1+5+10)=32.$$

б) Число способов помещения пять молекул в правую половину сосуда: $\Omega(0,5)=C_0^5=1$.
Вероятность такого события: $P(0,5)=1/32=0{,}03125$.

в) Число способов помещения четырех молекул в правую половину сосуда, а одну в левую: $\Omega(1,4)=C_1^5=5$.
Вероятность такого события: $P(1,4)=5/32=0{,}15625$.

г) Число способов помещения трех молекул в правую половину сосуда, а двух в левую: $\Omega(2,3)=C_2^5=10$.
Вероятность такого события: $P(2,3)=10/32=0{,}3125$.

Ответ: а) 32; б) 1 : 0,03125; в) 5 : 0,15625; г) 10 : 0,3125.

2.123: моль одноатомного идеального газа нагревается обратимо от $T_1 = 300$ К до $T_2 = 400$ К. В процессе нагревания давление газа изменяется с температурой по закону $P = P_0 \exp(\alpha T)$, где $\alpha = 1{,}00 \cdot 10^{-3}$ K^{-1}. Определить количество теплоты Q, полученное газом при нагревании.

Решение:
из первого начала термодинамики:

$$dQ = dU + dA = C_V \cdot dT + P \cdot dV.$$

Из закона Менделеева-Клапейрона $V = RT/P$. По условию, $P = P_0 e^{\alpha T}$. Тогда dV:

$$dV = \frac{R}{P_0}\Big(e^{-\alpha T} - \alpha T e^{-\alpha T}\Big),$$

а dQ:

$$dQ = C_V \cdot dT + P_0 e^{\alpha T} \cdot \frac{R}{P_0}\Big(e^{-\alpha T} - \alpha T e^{-\alpha T}\Big) dT = (C_V + R)dT - \alpha RT \cdot dT.$$

Из соотношения Майера $C_V + R = C_P$ и dQ принимает вид

$$dQ = (C_P - \alpha RT)\, dT = \frac{R}{2}\left(\frac{2C_P}{R} - 2\alpha T\right) dT.$$

Интегрируем от T_1 до T_2:

$$Q = \frac{R}{2}\int\limits_{T_1}^{T_2}\left(\frac{2C_P}{R} - 2\alpha T\right) dT = \frac{R}{2}\left(\frac{2C_P}{R} - \alpha(T_2 + T_1)\right)\Big(T_2 - T_1\Big).$$

Подставим значения:

$$Q = 4{,}157 \cdot (5 - 10^{-3} \cdot 700) \cdot 100 \text{ Дж} \approx 1{,}8 \text{ кДж}.$$

Ответ: $Q = 1{,}8$ кДж.

208: приводимые в тепловой контакт одинаковые массы вещества имеют разные температуры T_1 и T_2. Считая, что $C_P = \mathrm{const}$, найти приращение энтропии в результате установления теплового равновесия при $P = \mathrm{const}$.

Решение:
изменение энтропии:

$$\Delta S = S_{\text{уст}} - (S_1 + S_2).$$

Энтропия:

$$S = \int \frac{\delta Q}{T} = \int \frac{\Delta U + \delta A}{T} = \int \frac{\nu C_V\, dT + \nu R\, dT}{T} = \nu(C_V + R)\ln T.$$

Энтропии веществ до соприкосновения:

$$S_1 = \frac{m}{\mu}(C_V + R)\ln T_1,$$
$$S_2 = \frac{m}{\mu}(C_V + R)\ln T_2.$$

Энтропия вещества после установления равновесия:

$$S_{\text{уст}} = \frac{2m}{\mu}(C_V + R)\ln T_{\text{уст}}.$$

Тогда изменение энтропии:

$$\Delta S = \frac{m}{\mu}(C_V + R)\big(2\ln T_{\text{уст}} - (\ln T_1 + \ln T_2)\big) = \frac{m}{\mu}C_P \cdot \ln\left(\frac{T_{\text{уст}}^2}{T_1 T_2}\right).$$

Так как вещество по условию одинаково, массы равны, то установившаяся температура будет полусуммой температур масс до соприкосновения:

$$T_{\text{уст}} = \frac{T_1 + T_2}{2}.$$

Окончательно,

$$\Delta S = \frac{m}{\mu}C_P \cdot \ln\left(\frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2}\right).$$

Ответ: $\Delta S = \dfrac{m}{\mu}C_P \cdot \ln\left(\dfrac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2}\right)$.

319: при каком значении температуры число молекул, находящихся в пространстве скоростей в фиксированном интервале $(v, v+dv)$*, максимально?*

Решение:

запишем распределения Максвелла по скоростям:

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot 4\pi v^2 \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right).$$

Температура, соответствующая максимальному числу молекул в интервале скоростей $(v, v+dv)$, находится из условия экстремума функции $f(v)$:

$$\frac{\partial f}{\partial T} = \left(\frac{m}{2\pi k}\right)^{3/2} \cdot 4\pi v^2 \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}T^{-5/2} + \frac{mv^2}{2kT^2}T^{-3/2}\right) = 0.$$

Так как $T \neq 0$, то:

$$-\frac{3}{2}T^{-5/2} + \frac{mv^2}{2kT^2}T^{-3/2} = 0, \text{ или}$$
$$-\frac{3}{2} + \frac{mv^2}{2kT} = 0,$$

откуда $T = \dfrac{mv^2}{3k}$.

Экстремум в этой точке является максимумом, так как вторая производная оказывается отрицательной:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial T^2}\right|_{T=\frac{mv^2}{3k}} = -81\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\,e^{-3/2} \cdot \left(\frac{k}{mv^{5/2}}\right)^2 < 0.$$

Ответ: $T = \dfrac{mv^2}{3k}$.

453: если температура газа ниже так называемой температуры Бойля, то при изотермическом сжатии его произведение PV сначала убывает, проходит через минимум, а затем начинает возрастать. Если же температура газа выше температуры Бойля, то при изотермическом сжатии произведение PV монотонно возрастает. Убедиться в этом и выразить температуру Бойля через критическую температуру для газа, подчиняющегося уравнению Ван-дер-Ваальса.

Решение:
запишем уравнение Ван-дер-Ваальса:

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)\left(V - b\right) = RT.$$

Домножим на V^2 и раскроем скобки:

$$PV^3 - (RT + Pb)V^2 + aV - ab = 0.$$

По определению критических параметров это уравнение можно записать в виде:

$$P_{\text{к}}(V - V_{\text{к}})^3 = 0.$$

Отсюда, раскрыв куб и сравнив коэффициенты, получим три уравнения:

$$3P_{\text{к}}V_{\text{к}}^2 = a, \quad P_{\text{к}}V_{\text{к}}^3 = ab, \quad 3P_{\text{к}}V_{\text{к}} = RT_{\text{к}} + P_{\text{к}}b.$$

Решая, получим:

$$V_{\text{к}} = 3b, \quad P_{\text{к}} = \frac{a}{27b^2}, \quad T_{\text{к}} = \frac{8}{27}\frac{a}{bR}.$$

По определению, температура Бойля: $T_B = \dfrac{a}{bR}$. Сравнивая ее с критической температурой, видно, что:

$$T_B = \frac{27}{8}T_{\text{к}}.$$

Ответ: $T_B = 27/8 \cdot T_{\text{к}}$.