Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный технический университет»
Факультет электроники и вычислительной техники
Кафедра «Физика»

Семестровая работа по дисциплине «Статистическая радиофизика»

Вариант №17

Выполнила
студентка группы Ф-469
Слоква В. И.

Проверил
доцент, к. физ.-мат. наук
Поляков И. В.

Волгоград, 2014

Задача 4: *Определите непосредственным интегрированием* $m_k(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k w(x)\,dx$ *начальные моменты непрерывной случайной величины, имеющей гамма-распределение:*

$$w(x) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\, x^{n-1} e^{-\lambda x},$$

при $x > 0$, $\lambda > 0$, $n > 0$.

Решение:

Математическое ожидание:

$$M = m_1 = \int\limits_0^{\infty} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\, x^{n-1} e^{-\lambda x} x\,dx = \frac{1}{\Gamma(n)} \int\limits_0^{\infty} \left(\lambda x\right)^n e^{-\lambda x}\,dx.$$

Введем замену $y = \lambda x$ ($dy = \lambda\,dx$), тогда:

$$M = \frac{1}{\lambda\Gamma(n)} \int\limits_0^{\infty} y^n e^{-y}\,dy = \frac{\Gamma(n+1)}{\lambda\Gamma(n)} = \frac{n\Gamma(n)}{\lambda\Gamma(n)} = \frac{n}{\lambda}.$$

Второй момент:

$$m_2 = \int\limits_0^{\infty} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\, x^{n-1} e^{-\lambda x} x^2\,dx = \frac{1}{\lambda\Gamma(n)} \int\limits_0^{\infty} \left(\lambda x\right)^{n+1} e^{-\lambda x}\,dx.$$

Введем замену $y = \lambda x$ ($dy = \lambda\,dx$), тогда:

$$m_2 = \frac{1}{\lambda^2\Gamma(n)} \int\limits_0^{\infty} y^{n+1} e^{-y}\,dy = \frac{\Gamma(n+2)}{\lambda^2\Gamma(n)} = \frac{n(n+1)\Gamma(n)}{\lambda^2\Gamma(n)} = \frac{n(n+1)}{\lambda^2}.$$

Дисперсия:

$$D = \mu_2 = m_2 - m_1^2 = \frac{n^2}{\lambda^2} + \frac{n}{\lambda^2} - \frac{n^2}{\lambda^2} = \frac{n}{\lambda^2}.$$

Задача 14: *Случайная величина x распределена с плотностью вероятности*

$$w(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \geqslant 0.$$

Найдите распределение величины $y = x^2$. Определите непосредственным интегрированием начальные моменты $m_k(\eta)$.

Решение:

Зависимость $x(y) = \pm\sqrt{y}$; производная от y по x: $\dfrac{dy}{dx} = 2x = \pm 2\sqrt{y}$.

Поскольку $x \geqslant 0$, то $x(y) = \sqrt{y}$ и $\dfrac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}$.

Таким образом, плотность вероятности $w_\eta(y)$:

$$w_\eta(y) = \frac{\sqrt{y}}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{y}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{y}{2\sigma^2}\right).$$

Проверка нормированности:

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{y}{2\sigma^2}\right) dy = \int\limits_0^\infty e^{-z}\, dz = -e^{-z}\Big|_0^\infty = 1,$$

где $z = y/2\sigma^2$, $dz = dy/2\sigma^2$.

Найдем математическое ожидание и дисперсию величины η. Обозначим $\vartheta = 1/2\sigma^2$ и

$$I = \int\limits_0^\infty \exp(-y\vartheta) = -\frac{1}{\vartheta} \exp(-y\vartheta)\Big|_0^\infty = \frac{1}{\vartheta}.$$

Тогда математическое ожидание:

$$M = m_1 = \int\limits_0^\infty y\vartheta e^{-y\vartheta}\, dy = -\vartheta \cdot \frac{\partial I}{\partial \vartheta} = -\vartheta \cdot \left(-\frac{1}{\vartheta^2}\right) = \frac{1}{\vartheta} = 2\sigma^2.$$

Второй момент:

$$m_2 = \int\limits_0^\infty y^2\vartheta e^{-y\vartheta}\, dy = \vartheta \cdot \frac{\partial^2 I}{\partial \vartheta^2} = \vartheta \cdot \left(\frac{2}{\vartheta^3}\right) = \frac{2}{\vartheta^2} = 8\sigma^4.$$

Дисперсия:

$$D = \mu_2 = m_2 - m_1^2 = 8\sigma^4 - 4\sigma^4 = 4\sigma^4.$$

Задача 37: *Корреляционная функция случайного процесса* $x(t)$ *имеет вид* $B_x(\tau) = D_x e^{-\alpha\tau^2}$. *Найти корреляционную функцию случайного процесса* $y(t) = x(t) + \dfrac{dx(t)}{dt}$.

Решение:

Корреляционная функция:

$$B_y(\tau) = \langle y(t)y(t+\tau)\rangle = \left\langle \left(x(t) + \frac{dx(t)}{dt}\right)\left(x(t+\tau) + \frac{dx(t+\tau)}{dt}\right)\right\rangle =$$
$$= \left\langle x(t)x(t+\tau) + x(t)\frac{dx(t+\tau)}{dt} + x(t+\tau)\frac{dx(t)}{dt} + \frac{dx(t)}{dt}\frac{dx(t+\tau)}{dt}\right\rangle =$$
$$= \left\langle x(t)x(t+\tau)\right\rangle + \left\langle x(t)\frac{dx(t+\tau)}{dt}\right\rangle + \left\langle x(t+\tau)\frac{dx(t)}{dt}\right\rangle + \left\langle \frac{dx(t)}{dt}\frac{dx(t+\tau)}{dt}\right\rangle =$$
$$= B_x(\tau) + B_{xx'}(\tau) + B_{x'x}(\tau) + B_{x'}(\tau).$$

Поскольку

$$B_{xx'}(\tau) = -B_{x'x}(\tau) = -\frac{\partial B_x(\tau)}{\partial\tau},$$

то корреляционная функция принимает вид

$$B_y(\tau) = B_x(\tau) + B_{x'}(\tau).$$

Автокорреляционная функция производной процесса равна

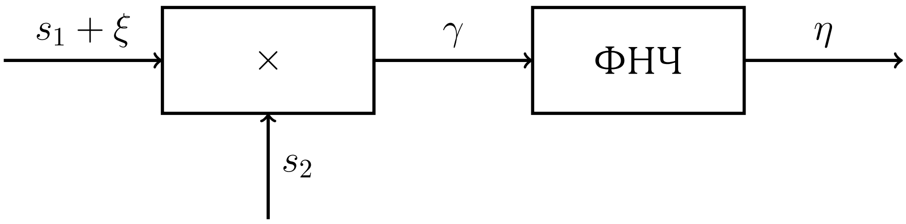
$$B_{x'}(\tau) = -\frac{\partial^2 B_x(\tau)}{\partial\tau^2} = -\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\left(D_x e^{-\alpha\tau^2}\right) =$$
$$= -D_x\frac{\partial}{\partial\tau}\left(-\alpha\cdot 2\tau e^{-\alpha\tau^2}\right) = 2\alpha D_x e^{-\alpha\tau^2}\left(1 - 2\alpha\tau^2\right).$$

В итоге,

$$B_y(\tau) = D_x e^{-\alpha\tau^2} + 2\alpha D_x e^{-\alpha\tau^2}\left(1 - 2\alpha\tau^2\right) = D_x e^{-\alpha\tau^2}\Big[1 + 2\alpha\left(1 - 2\alpha\tau^2\right)\Big].$$

Задача 47: *На вход синхронного детектора подается сумма амплитудно модулированного колебания* $s_1(t) = A_0\big(1+m\cos\Omega t\big)\cos\omega_0 t$ *и узкополосного стационарного шума* $\xi(t)$ *с дисперсией* σ_ξ^2*, а на другой – опорное колебание* $s_2(t) = A_1\cos\omega_0 t$*. Определить отношение сигнал/шум на выходе детектора (полезным сигналом считать колебание с частотой модуляции* Ω*).*

Решение:



Сигнал γ есть произведение сигналов s_2 и $s_1+\xi$:

$$\gamma = \left[A_0(1+m\cos\Omega t)\cos\omega_0 t + \xi(t)\right] A_1\cos\omega_0 t.$$

Представим шум ξ в виде

$$\xi(t) = A_c\cos\omega_0 t + A_s\sin\omega_0 t,\ \text{где}\ \left\langle A_c^2\right\rangle = \left\langle A_s^2\right\rangle = \sigma_\xi^2.$$

Тогда

$$\gamma = A_0A_1\Big(1+m\cos\Omega t\Big)\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 2\omega_0 t}{2}\right) + A_cA_1\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 2\omega_0 t}{2}\right) -$$
$$-A_1A_s\frac{\sin 2\omega_0 t}{2} = \frac{A_0A_1}{2}(1+m\cos\Omega t) + \frac{A_0A_1}{2}m\cos\Omega t\cos 2\omega_0 t + \frac{A_cA_1}{2} +$$
$$+\frac{A_cA_1}{2}\cos 2\omega_0 t - \frac{A_1A_s}{2}\sin 2\omega_0 t.$$

Представляя $\cos\Omega t\cos 2\omega_0 t$ как $\big(\cos(2\omega_0-\Omega)t - \cos(2\omega_0+\Omega)t\big)/2$, получим 4 частоты: $2\omega_0$, $2\omega_0-\Omega$, $2\omega_0+\Omega$ и Ω. Первые три являются высокими частотами, последняя – низкой. Тогда на выходе ФНЧ получим

$$\eta = \frac{A_0A_1}{2} + \frac{A_1A_c}{2} + \frac{A_0A_1}{2}m\cos\Omega t.$$

Второе слагаемое описывает шум, третье – полезный сигнал. Искомое отношение их амплитуд (отношение сигнал/шум):

$$K = \frac{A_0A_1m}{2}\frac{2}{A_1A_c} = \frac{A_0m}{A_c} = \frac{A_0m}{\sigma_\xi}.$$