

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный технический университет»
Факультет электроники и вычислительной техники
Кафедра физика

Семестровая работа по дисциплине
«Вакуумная и газоразрядная электроника»

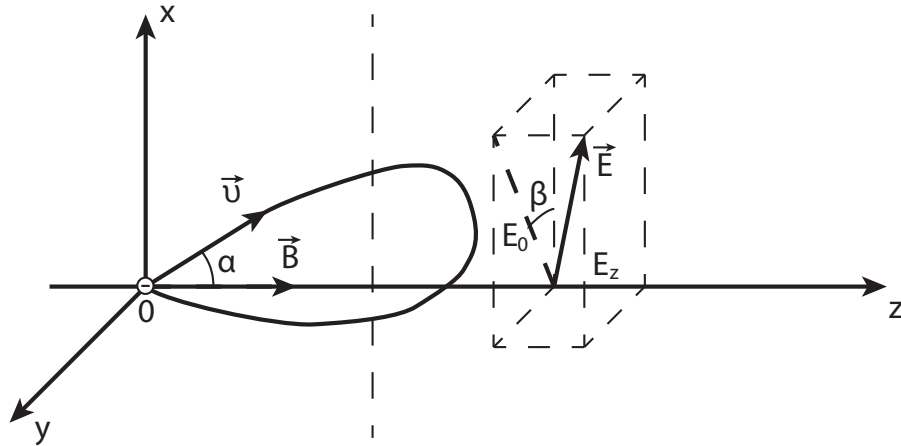
Вариант №7

Выполнил
студент группы Ф-369
Чечеткин И. А.

Проверил
доцент Ковтун Д. Г.

Волгоград, 2014

1. Электрон со скоростью v влетает под углом α к направлению вектора магнитной индукции $\vec{B} = \vec{k}B_0$. Через интервал времени, равный четверти периода циклотронной частоты, он попадает в область действия электростатического поля напряженностью $\vec{E} = \vec{i}E_0 \cos \beta + \vec{j}E_0 \sin \beta + \vec{k}E_z$, а магнитное поле исчезает. Определить величину E_z и E_0 , если электрон вернулся в точку влета.



Запишем уравнение движение электрона в области с наведенным полем \vec{B} с помощью второго закона Ньютона:

$$m\vec{a} = -e\vec{v} \times \vec{B} = -e \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} = -e[\vec{i}\dot{y}B_0 - \vec{j}\dot{x}B_0].$$

Разделим обе части на массу электрона, тогда в проекциях на координатные оси получим:

$$\text{Ox: } \ddot{x} = -\omega_c \dot{y}, \quad (1)$$

$$\text{Oy: } \ddot{y} = \omega_c \dot{x}, \quad (2)$$

$$\text{Oz: } \ddot{z} = 0, \quad (3)$$

где $\omega_c = \frac{eB_0}{m}$ – циклотронная частота.

Интегрируя уравнение (3) с учетом начальных условий: $\dot{z}(0) = v \cos \alpha$ и $z(0) = 0$, получим

$$\dot{z} = v \cos \alpha, \quad z = vt \cos \alpha.$$

Найдем \dot{x} интегрированием уравнения (1):

$$\dot{x} = -\omega_c y + C, \quad C = \omega_c y(0) + \dot{x}(0) = v \sin \alpha, \quad \dot{x} = -\omega_c y + v \sin \alpha$$

и подставим ее в уравнение (2):

$$\ddot{y} = -\omega_c^2 y + \omega_c v \sin \alpha, \quad \text{или} \quad \ddot{y} + \omega_c^2 y = \omega_c v \sin \alpha.$$

Представим решение этого уравнения в виде суммы общего и частного решений:

$$y = y_{\text{общ}} + y_{\text{част}}.$$

$$y_{\text{общ}} = A \cos \omega_c t + B \sin \omega_c t, \quad y_{\text{част}} = \frac{v \sin \alpha}{\omega_c};$$

$$y = A \cos \omega_c t + B \sin \omega_c t + \frac{v}{\omega_c} \sin \alpha.$$

Константы A и B найдем из начальных условий:

$$\dot{y}(0) = 0: \quad -\omega_c A \sin 0 + \omega_c B \cos 0 = 0 \Rightarrow B = 0;$$

$$y(0) = 0: \quad A \cos 0 + \frac{v}{\omega_c} \sin \alpha = 0 \Rightarrow A = -\frac{v}{\omega_c} \sin \alpha.$$

Таким образом, $y = \frac{v}{\omega_c} [1 - \cos \omega_c t] \sin \alpha$, $\dot{y} = v \sin \alpha \sin \omega_c t$.

Тогда:

$$\dot{x} = -v \sin \alpha [1 - \cos \omega_c t] + v \sin \alpha = v \sin \alpha \cos \omega_c t.$$

$$x = \frac{v}{\omega_c} \sin \alpha \sin \omega_c t.$$

В момент времени τ , равный четверти периода циклотронной частоты $\tau = \frac{1}{4}T_c = \frac{1}{4} \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{\pi}{2\omega_c}$:

$$\dot{x}(\tau) = v \sin \alpha \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad x(\tau) = \frac{v}{\omega_c} \sin \alpha \sin \frac{\pi}{2} = \frac{v}{\omega_c} \sin \alpha;$$

$$\dot{y}(\tau) = v \sin \alpha \sin \frac{\pi}{2} = v \sin \alpha, \quad y(\tau) = \frac{v}{\omega_c} \left[1 - \cos \frac{\pi}{2} \right] \sin \alpha = \frac{v}{\omega_c} \sin \alpha;$$

$$\dot{z}(\tau) = v \cos \alpha, \quad z(\tau) = \frac{v}{\omega_c} \frac{\pi}{2} \cos \alpha.$$

Запишем уравнение движение электрона в области с наведенным полем \vec{E} с помощью второго закона Ньютона:

$$m\vec{a} = -e\vec{E}.$$

Разделим обе части на массу электрона, тогда в проекциях на координатные оси получим:

$$\text{Ox: } \ddot{x} = -\frac{eE_0}{m} \cos \beta,$$

$$\text{Oy: } \ddot{y} = -\frac{eE_0}{m} \sin \beta,$$

$$\text{Oz: } \ddot{z} = -\frac{eE_z}{m}.$$

Интегрируя по времени два раза и учитывая, что в качестве начальных условий используются значения координат и скоростей в момент времени τ , получим зависимости координат от времени:

$$\begin{aligned}x &= -\frac{eE_0}{2m}t^2 \cos \beta + \frac{v}{\omega_c} \sin \alpha, \\y &= -\frac{eE_0}{2m}t^2 \sin \beta + vt \sin \alpha + \frac{v}{\omega_c} \sin \alpha, \\z &= -\frac{eE_z}{2m}t^2 + vt \cos \alpha + \frac{v}{\omega_c} \frac{\pi}{2} \cos \alpha.\end{aligned}$$

По условию, электрон вернется в начальную точку за время T :

$$0 = -\frac{eE_0}{2m}T^2 \cos \beta + \frac{v}{\omega_c} \sin \alpha, \quad (4)$$

$$0 = -\frac{eE_0}{2m}T^2 \sin \beta + vT \sin \alpha + \frac{v}{\omega_c} \sin \alpha, \quad (5)$$

$$0 = -\frac{eE_z}{2m}T^2 + vT \cos \alpha + \frac{v}{\omega_c} \frac{\pi}{2} \cos \alpha. \quad (6)$$

Из уравнения (4) найдем время возврата электрона T :

$$\frac{eE_0}{2m}T^2 \cos \beta = \frac{v}{\omega_c} \sin \alpha, \quad T^2 = \frac{2m^2 v}{e^2 E_0 B_0} \frac{\sin \alpha}{\cos \beta}; \quad T = \frac{m}{e} \sqrt{\frac{2v}{E_0 B_0} \frac{\sin \alpha}{\cos \beta}}.$$

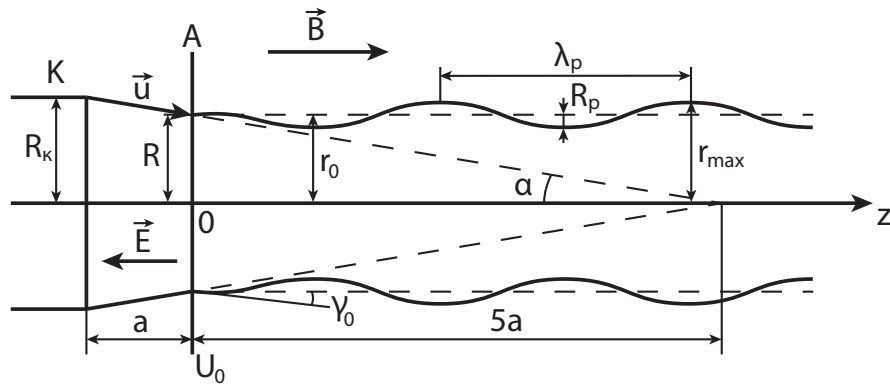
Из уравнения (5) найдем E_0 :

$$\begin{aligned}\frac{eE_0}{2m} \frac{m^2}{e^2} \frac{2v}{E_0 B_0} \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \sin \alpha &= \frac{mv}{e} \sin \alpha \sqrt{\frac{2v}{E_0 B_0} \frac{\sin \alpha}{\cos \beta}} + \frac{mv}{e B_0} \sin \alpha, \\ \frac{\operatorname{tg} \beta}{B_0} &= \sqrt{\frac{2v}{E_0 B_0} \frac{\sin \alpha}{\cos \beta}} + \frac{1}{B_0}, \quad \frac{1}{B_0} (\operatorname{tg} \beta - 1) = \sqrt{\frac{2v}{E_0 B_0} \frac{\sin \alpha}{\cos \beta}}, \\ (\operatorname{tg} \beta - 1)^2 &= \frac{2v B_0 \sin \alpha}{E_0 \cos \beta}, \quad E_0 = \frac{2v B_0 \cos \alpha}{\cos \beta (\operatorname{tg} \beta - 1)^2} = \frac{2v B_0 \sin \alpha}{1 - \sin 2\beta} \cos \beta.\end{aligned}$$

А теперь из уравнения (6) найдем E_z :

$$\begin{aligned}\frac{eE_z}{2m} \frac{m^2}{e^2} \frac{2v}{E_0 B_0} \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} &= \frac{mv}{e} \sqrt{\frac{2v}{E_0 B_0} \frac{\sin \alpha}{\cos \beta}} \cos \alpha + \frac{\pi}{2} \frac{mv}{e B_0} \cos \alpha, \\ E_z \operatorname{tg} \alpha &= \sqrt{2v E_0 B_0 \cos \beta \sin \alpha} + \frac{\pi}{2} E_0 \cos \beta, \\ E_z &= \sqrt{\frac{2v E_0 B_0 \cos \beta \cos^2 \alpha}{\sin \alpha}} + \frac{\pi E_0 \cos \beta \cos \alpha}{2 \sin \alpha}; \\ E_z &= \frac{2v B_0 \cos \beta \cos \alpha}{\sqrt{1 - \sin 2\beta}} \left(1 + \frac{\pi \cos \beta}{2 \sqrt{1 - \sin 2\beta}} \right).\end{aligned}$$

2. Сходящийся электронный поток эмитируется с торца цилиндрического катода радиуса R_k с начальной скоростью u и ускоряется под действием напряжения U_0 первого анода электронного прожектора, расположенного на расстоянии a от катода. Электроны вылетают под углами, определяемыми образующими конуса, вершина которого лежит на расстоянии $6a$ от катода. За анодом поток летит в продольном фокусирующем магнитном поле с величиной магнитной индукции B_0 . Считая, что с катода снимается ток величиной I_k , определить: период пульсаций, максимальный радиус электронного потока. Считать, что распределение поля между катодом и первым анодом эквивалентно распределению поля между двумя параллельными плоскостями.



Запишем уравнение движения электрона потока в области между катодом и первым анодом:

$$m\vec{a} = -e\vec{E}, \quad \vec{a} = -\frac{e}{m}\vec{E}, \quad \vec{E} = -\frac{U_0}{a}\vec{k}.$$

В цилиндрических координатах, с учетом того, что $\dot{\varphi} = 0$:

$$\ddot{r} = 0, \quad \ddot{z} = \frac{e}{m} \frac{U_0}{a}.$$

Для крайнего электрона потока: $\dot{r}(0) = -u \sin \alpha$, $r(0) = R_k$, $\dot{z}(0) = u \cos \alpha$, $z(0) = -a$, $\alpha = \arctg \frac{R_k}{6a}$. Интегрируя уравнение движения с такими начальными условиями, получим:

$$\dot{r} = -u \sin \alpha, \quad r = -ut \sin \alpha + R_k, \quad \dot{z} = \frac{e}{m} \frac{U_0}{a} t + u \cos \alpha, \quad z = \frac{e}{m} \frac{U_0}{a} \frac{t^2}{2} + ut \cos \alpha - a.$$

Из последнего уравнения найдем время пролета области «катод-анод»:

$$\frac{e}{m} \frac{U_0}{a} \frac{\tau^2}{2} + u\tau \cos \alpha - a = 0, \quad \tau = -\frac{amu \cos \alpha}{eU_0} + \sqrt{\left(\frac{amu \cos \alpha}{eU_0}\right)^2 - \frac{2a^2m}{eU_0}}.$$

Тогда в момент τ :

$$\dot{z}(\tau) = \sqrt{u^2 \cos^2 \alpha - 2 \frac{eU_0}{m}} = v_0,$$

$$r(\tau) = R_{\kappa} + \frac{amu^2 \cos \alpha \sin \alpha}{eU_0} - u \sin \alpha \sqrt{\left(\frac{amu \cos \alpha}{eU_0} \right)^2 - \frac{2a^2 m}{eU_0}} = R.$$

Запишем уравнение движения электрона потока в области за анодом:

$$m\vec{a} = -e\vec{E}_{\text{пр}} - e\vec{v} \times \vec{B}, \quad \vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \dot{r} & r\dot{\varphi} & \dot{z} \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} = \vec{e}_r(r\dot{\varphi}B_0) - \vec{e}_\varphi(\dot{r}B_0).$$

В проекциях на оси координат:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r(\dot{\varphi})^2 = -\frac{e}{m}E_r - \frac{e}{m}B_0r\dot{\varphi}, \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = \frac{e}{m}B_0\dot{r}, \end{cases} \quad \text{где } E_r = -\frac{I_{\kappa}}{2\pi\epsilon_0 v_0 r}. \quad (7)$$

Поток вектора \vec{B} через поверхность круга радиуса r :

$$\psi(r, z) = 2\pi \int_0^r B_0 r dr = 2\pi B_0 \frac{r^2}{2} = \pi r^2 B_0.$$

Тогда $\dot{\psi}$:

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = 2\pi r B_0 \frac{\partial r}{\partial t} = 2\pi r B_0 \dot{r}.$$

Распишем второе уравнение системы (7):

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = \frac{e}{m}B_0\dot{r}, \quad \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = \frac{e}{m}B_0r\dot{r}, \quad \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = \frac{\psi}{2\pi} \frac{e}{m}.$$

Интегрируем, учитывая начальные условия $r(\tau) = R$, $\dot{\varphi}(\tau) = 0$, $\psi|_{t=\tau} = 0$:

$$r^2\dot{\varphi} = \frac{e\psi}{2\pi m} = \frac{e}{2\pi m}\pi r^2 B_0, \quad \dot{\varphi} = \frac{eB_0}{2m} = \frac{\omega_c}{2}.$$

Подставляя значение $\dot{\varphi}$ в первое уравнение системы (7):

$$\ddot{r} - r \frac{\omega_c^2}{4} = \frac{eI_{\kappa}}{2\pi\epsilon_0 v_0 r m} - r \frac{\omega_c^2}{2}, \quad \ddot{r} + r \frac{\omega_c^2}{4} - \frac{eI_{\kappa}}{2\pi\epsilon_0 v_0 r m} = 0.$$

Перейдем к уравнению траектории $r(z)$ ($\ddot{r} = \frac{d^2 r}{dz^2} v_0$):

$$\frac{\partial^2 r}{\partial z^2} + \frac{r\omega_c^2}{4v_0^2} - \frac{eI_{\kappa}}{2\pi\epsilon_0 v_0^3 r m} = 0.$$

При некотором равновесном радиусе $r_0^2 = \frac{4v_0^2 e I_k}{2\pi\epsilon_0 v_0^3 m \omega_c^2} = \frac{2e I_k}{m \omega_c^2 \epsilon_0 v_0 \pi}$ ускорение по радиусу будет отсутствовать, и электронный поток будет сохранять свою форму, то есть будет бриллюэновским.

Пусть поток отклоняется от равновесного радиуса r_0 на некоторую величину $\delta \ll 1$: $r = r_0(1 + \delta)$.

Учитывая разложение $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0}(1 - \delta)$, получим дифференциальное уравнение относительно δ :

$$\frac{d^2}{dz^2} [r_0(1 + \delta)] + \frac{r_0(1 + \delta)\omega_c^2}{4v_0^2} - \frac{e I_k}{2\pi\epsilon_0 v_0^3 r_0 m} (1 - \delta) = 0, \quad \frac{d^2 \delta}{dz^2} + \frac{\omega_c^2}{2v_0^2} \delta = 0.$$

Обозначая $\alpha^2 = \frac{\omega_c^2}{2v_0^2}$, тогда $\frac{d^2 \delta}{dz^2} + \alpha^2 \delta = 0$.

Решение этого уравнения $\delta = D \cos(\alpha z + \beta)$.

Из начальных условий $\delta(0) = \frac{R}{r_0} \left(1 - \frac{r_0}{R}\right)$, $\delta'(0) = \frac{\text{tg } \gamma_0}{r_0}$ найдем D и β :

$$D = \sqrt{\delta^2(0) + \left(\frac{\delta'(0)}{\alpha}\right)^2} = \frac{R}{r_0} \sqrt{\left(1 - \frac{r_0}{R}\right)^2 + 2 \left(\frac{\text{tg } \gamma_0 v_0}{\omega_c R}\right)^2};$$

$$\beta = -\arctg\left(\frac{\delta'(0)}{\alpha \delta(0)}\right) = -\arctg\left(\frac{\sqrt{2} v_0 \text{tg } \gamma_0}{\left(1 - \frac{r_0}{R}\right) R \omega_c}\right) - \text{начальная фаза пульсаций}.$$

Радиус пульсаций: $R_p = r_0 D$. Длина волны пульсаций: $\lambda_p = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{\sqrt{8} \pi v_0}{\omega_c}$.

Период пульсаций: $T_p = \frac{\lambda_p}{c} = \frac{\sqrt{8} \pi v_0}{\omega_c c}$. Максимальный радиус пучка:

$$r_{max} = r_0 + R_p = r_0 \left(1 + R \sqrt{\left(1 - \frac{r_0}{R}\right)^2 + 2 \left(\frac{\text{tg } \gamma_0 v_0}{\omega_c R}\right)^2}\right).$$