Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный технический университет»
Факультет электроники и вычислительной техники
Кафедра «Физика»

Семестровая работа по дисциплине «Термодинамика и статистическая физика»

Вариант №16

Выполнила
студентка группы Ф-469
Слоква В. И.

Проверил
профессор, д. физ.-мат. н.
Крючков С. В.

Волгоград, 2014

Задача 10 (ТД): *Получите выражение критических параметров $V_к$, $p_к$, $T_к$ через константы уравнения состояния, предложенного Бертло для описания поведения реальных газов:*

$$\left(p+\frac{a}{TV^2}\right)\cdot\left(V-b\right)=RT.$$

Решение:

В критической точке $\left(\dfrac{\partial p}{\partial V}\right)_{T=T_{кр}}=0$ и $\left(\dfrac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_{T=T_{кр}}=0.$

Дифференцируем уравнение Бертло:

$$\left[\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{T_{кр}}-\frac{2a}{T_{кр}V_{кр}^3}\right]\left[V_{кр}-b\right]+p_{кр}+\frac{a}{T_{кр}V_{кр}^2}=0.$$

$$\left[\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_{T_{кр}}+\frac{6a}{T_{кр}V_{кр}^4}\right]\left[V_{кр}-b\right]+2\cdot\left[\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{T_{кр}}-\frac{2a}{T_{кр}V_{кр}^3}\right]=0.$$

Отсюда найдем критические параметры, обнуляя производные:

$$\frac{6a}{T_{кр}V_{кр}^4}\left[V_{кр}-b\right]=\frac{4a}{T_{кр}V_{кр}^3},\quad 3-3b/V_{кр}=2,\quad V_{кр}=3b.$$

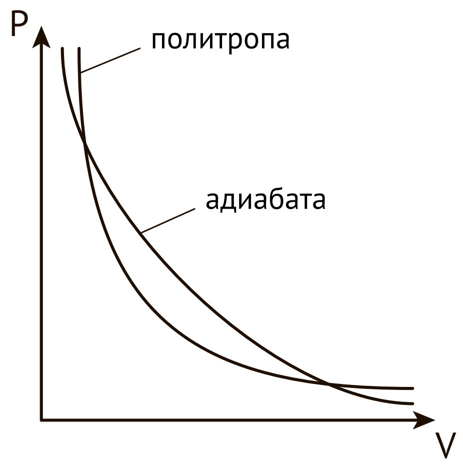
$$-\frac{2a}{T_{кр}\,27b^3}2b+p_{кр}+\frac{a}{T_{кр}\,9b^2}=0,\quad p_{кр}=\frac{a}{27b^2T_{кр}}.$$

$$\left(\frac{a}{27b^2T_{кр}}+\frac{a}{9b^2T_{кр}}\right)2b=RT_{кр},\quad \frac{8ab}{27b^2T_{кр}}=RT_{кр},\quad T_{кр}=\sqrt{\frac{8a}{27bR}}.$$

$$p_{кр}=\frac{a}{27b^2}\sqrt{\frac{27bR}{8a}}=\sqrt{\frac{aR}{216\,b^3}}.$$

Задача 86 (ТД): *Покажите, что сжатие газа по политропе, идущей на диаграмме p и V круче адиабаты, сопровождается поглощением тепла.*

Решение:



Первое начало термодинамики:

$$\delta Q = dU + \delta A, \text{ где } \delta A = p\,dV \text{ и } dU = C_V\,dT.$$
$$\delta Q = C_V\,dT + p\,dV.$$

Связь C_V с показателем адиабаты:

$$C_V = R/(\gamma - 1).$$

Из уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$pV = RT, \quad R\,dT = p\,dV + V\,dp.$$

Тогда количество теплоты:

$$\delta Q = \frac{p\,dV}{\gamma - 1} + \frac{V\,dp}{\gamma - 1} + p\,dV = \frac{\gamma}{\gamma - 1} p\,dV + \frac{1}{\gamma - 1} V\,dp.$$

Или

$$\frac{\delta Q}{dV} = \frac{\gamma p}{\gamma - 1} + \frac{V}{\gamma - 1}\frac{dp}{dV}.$$

Если процесс адиабатный, то $\delta Q = 0$ и

$$\frac{dp}{dV} = -\gamma \frac{p}{V}.$$

В нашем случае, поскольку политропа идет круче адиабаты,

$$\frac{dp}{dV} < -\gamma \frac{p}{V}.$$

И тогда

$$\frac{\delta Q}{dV} < \frac{\gamma p}{\gamma - 1} - \frac{\gamma p}{\gamma - 1} = 0.$$

Так как газ сжимается, то $dV < 0$ и, следовательно, $\delta Q > 0$, то есть тепло поступает в систему.

Задача 127 (ТД): *Определите к. п. д. цикла Карно, рабочим веществом в котором является газ Ван-дер-Ваальса, и покажите, что он равен к. п. д. цикла Карно с идеальным газом.*

Решение:

Уравнение Ван-дер-Ваальса относительно давления p:

$$p(T,V) = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}. \tag{3.1}$$

Внутренняя энергия газа Ван-дер-Ваальса:

$$U(T,V) = C_V T - a/V. \tag{3.2}$$

В адиабатическом процессе $\delta Q = dU + \delta A = 0$:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + p\,dV = 0. \tag{3.3}$$

Подставив (3.1) и (3.2) в (3.3), получим

$$C_V\,dT + \frac{a}{V^2}\,dV + \frac{RT}{V-b}\,dV - \frac{a}{V^2}\,dV = 0,$$
$$C_V\,dT + \frac{RT}{V-b}\,dV = 0, \quad \frac{dT}{T} + \frac{R}{C_V(V-b)}\,dV = 0, \quad \frac{dT}{T} + \frac{\gamma-1}{V-b}\,dV = 0,$$

поскольку $\gamma = C_p/C_V = R/C_V + 1$. Проинтегрировав, получим

$$0 = \ln T + (\gamma-1)\ln(V-b) + \mathrm{const}, \text{ или } T(V-b)^{\gamma-1} = \mathrm{const}.$$

Таким образом, для адиабатических процессов

$$T_1(V_2-b)^{\gamma-1} = T_2(V_3-b)^{\gamma-1}, \quad T_1(V_1-b)^{\gamma-1} = T_2(V_4-b)^{\gamma-1},$$
$$\frac{V_2-b}{V_1-b} = \frac{V_3-b}{V_4-b}.$$

Подводимое Q_1 и отводимое Q_2 количества теплоты:

$$Q_1 = \int_{V_1}^{V_2} p(V,T_1)\,dV + U(V_2,T) - U(V_1,T) = \int_{V_1}^{V_2} \frac{RT_1}{V-b}\,dV - \int_{V_1}^{V_2} \frac{a}{V^2}\,dV +$$
$$+U(V_2,T) - U(V_1,T) = RT_1\ln(V_2-b) - RT_1\ln(V_1-b) + \frac{a}{V_2} - \frac{a}{V_1} +$$
$$+C_V T_1 - \frac{a}{V_2} - C_V T_1 + \frac{a}{V_1} = RT_1 \ln\frac{V_2-b}{V_1-b}.$$

Аналогично, $Q_2 = RT_2 \ln \dfrac{V_3 - b}{V_4 - b}$.
КПД для цикла Карно с газом Ван-дер-Ваальса:

$$\eta' = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 \ln \frac{V_2 - b}{V_1 - b} - T_2 \ln \frac{V_3 - b}{V_4 - b}}{T_1 \ln \frac{V_2 - b}{V_1 - b}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Для идеального газа, аналогично:

$$P(T, V) = \frac{RT}{V}, \quad U(T) = C_V T;$$

$$C_V\, dT + \frac{RT}{V}\, dV = 0, \quad C_V \frac{dT}{T} + R\frac{dV}{V} = 0, \quad C_V \ln T + R \ln V = \text{const}.$$

$$\ln T + \frac{R}{C_V} \ln V = \ln T + (\gamma - 1) \ln V = \text{const}, \quad TV^{\gamma - 1} = \text{const}.$$

Для адиабатических процессов

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}, \quad T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}, \qquad \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}.$$

Количества теплоты:

$$Q_1 = \int\limits_{V_1}^{V_2} \frac{RT_1}{V}\, dV + C_V T_1 - C_V T_1 = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1},$$

$$Q_2 = \int\limits_{V_4}^{V_3} \frac{RT_2}{V}\, dV + C_V T_2 - C_V T_2 = RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}.$$

Тогда КПД цикла Карно с идеальным газом:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Видно, что КПД цикла Карно с идеальным газом равен КПД цикла Карно с газом Ван-дер-Ваальса: $\eta = \eta' = (T_1 - T_2)/T_1$.

Задача 206 (ТД): *Вычислите разность молярных теплоемкостей $C_p - C_V$ газа, состояние которого описывается уравнением Бертло, оставляя лишь линейные члены по отношению к a и b.*

Решение:

Из первого начала термодинамики: $\delta Q = dU + p\,dV$. Теплоемкость:

$$C = \frac{\delta Q}{dT} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right]\frac{dV}{dT}.$$

Тогда

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V, \qquad C_p = C_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p.$$

В равновесном процессе $\delta Q = T\,dS$, $T\,dS = dU + p\,dV$,

$$dS = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + \frac{P}{T}\right] dV.$$

Имеем

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + \frac{p}{T}.$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = \left(\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V\right)_T = \left(\frac{\partial}{\partial V}\left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V\right]\right)_T = \frac{1}{T}\frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T}.$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \left(\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T\right)_V = \left(\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + \frac{p}{T}\right]\right)_V =$$

$$= \frac{1}{T}\frac{\partial^2 U}{\partial T \partial V} - \frac{1}{T^2}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + \left(\frac{\partial p/T}{\partial T}\right)_V.$$

Поскольку $\dfrac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \dfrac{\partial^2 S}{\partial V \partial T}$ и $\dfrac{\partial^2 U}{\partial T \partial V} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial V \partial T}$, получим

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T^2\left(\frac{\partial p/T}{\partial T}\right)_V = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p.$$

Из уравнения Бертло $p = \dfrac{RT}{V-b} - \dfrac{a}{TV^2}$:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{V-b} + \frac{a}{T^2V^2}, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \frac{2a}{TV^2}.$$

Дифференцируя уравнение Бертло по T при постоянном p:

$$\left[\frac{\partial}{\partial T}\left(T+\frac{a}{TV^2}\right)(V-b)\right]_p=\left(\frac{\partial RT}{\partial T}\right)_p,$$

$$\left(1-\frac{a}{T^2V^2}-\frac{a}{T}\frac{2}{V^3}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\right)(V-b)+\left(T+\frac{a}{TV^2}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p=R.$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\left(\frac{2ab}{TV^3}+T-\frac{a}{TV^2}\right)=R+\left(\frac{a}{T^2V^2}-1\right)(V-b),$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p=\frac{R+\left(\frac{a}{T^2V^2}-1\right)(V-b)}{\frac{2ab}{TV^3}+T-\frac{a}{TV^2}},\qquad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p=\frac{RTV^3+(aV/T-TV^3)(V-b)}{2ab+T^2V^3-aV}.$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\approx\frac{RT+a/T-TV^2-bTV}{T^2V-a/V}.$$

Подставим $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$, $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ и p в разность C_p-C_V:

$$C_p-C_V=\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T+p\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p=$$
$$=\left[\frac{2a}{TV^2}+\frac{RT}{V-b}-\frac{a}{TV^2}\right]\frac{RT+a/T-TV^2-bTV}{T^2V-a/V}=$$
$$=\left[\frac{a}{TV^2}+\frac{RT}{V-b}\right]\frac{RT+a/T-TV^2-bTV}{T^2V-a/V}\approx$$
$$\approx\frac{a(RT-TV^2)}{TV^2(T^2V-a/V)}+R\frac{RT^2+a-T^2V^2-bT^2V}{T^2V^2-a-bT^2V}=$$
$$=\frac{a(R-V^2)}{T^2V^3-aV}+R\frac{RT^2+a-T^2V^2-bT^2V}{T^2V^2-a-bT^2V}.$$

Задача 329 (СФ): *Найти положение $E_{вер}$, ширину ΔE, отношение $\Delta E/E_{вер}$ и высоту $w_{\max}$ максимума плотности вероятности $w(E)$ канонического распределения Гиббса для системы с большим числом невзаимодействующих частиц N.*
Указание. *Воспользоваться выражением*

$$w(E) = Be^{-\frac{E}{k_0T}}E^{\frac{3N}{2}-1}$$

для плотности вероятности. Для получения окончательного результата применить формулу Стирлинга: $N! \approx \big(N/e\big)^N$.

Решение:

Найдем $E_{\text{вер}}$ из условия экстремума:

$$\left.\frac{d\omega}{dE}\right|_{E=E_{\text{вер}}} = -B\frac{1}{k_0T}e^{-\frac{E_{\text{вер}}}{k_0T}}E_{\text{вер}}^{\frac{3N}{2}-1} + Be^{-\frac{E_{\text{вер}}}{k_0T}}\left(\frac{3N}{2}-1\right)E_{\text{вер}}^{\frac{3N}{2}-2} = 0,$$

$$\frac{1}{k_0T}E_{\text{вер}} = \left(\frac{3N}{2}-1\right), \qquad E_{\text{вер}} = \left(\frac{3N}{2}-1\right)k_0T.$$

Подставив $E_{\text{вер}}$ в $\omega(E)$ найдем $\omega_{\max}$:

$$\omega_{\max} = Be^{-\frac{E_{\text{вер}}}{k_0T}}E_{\text{вер}}^{\frac{3N}{2}-1} = B\left[\left(\frac{3N}{2}-1\right)\frac{k_0T}{e}\right]^{\frac{3N}{2}-1}.$$

Константу B определим из условия нормировки:

$$\int\limits_0^\infty \omega\,dE = B\int\limits_0^\infty e^{-\frac{E}{k_0T}}E^{\frac{3N}{2}-1}\,dE = B\big(k_0T\big)^{\frac{3N}{2}}\int\limits_0^\infty e^{-z}z^{\frac{3N}{2}-1}\,dz =$$

$$= B\big(k_0T\big)^{\frac{3N}{2}}\left(\frac{3N}{2}-1\right)! = 1.$$

Таким образом, $B = \dfrac{\big(k_0T\big)^{-3N/2}}{\left(\frac{3N}{2}-1\right)!}$.

Тогда

$$\omega_{\max} = \frac{1}{\left(\frac{3N}{2}-1\right)!}\frac{1}{\big(k_0T\big)^{3N/2}}\left[\left(\frac{3N}{2}-1\right)\frac{k_0T}{e}\right]^{\frac{3N}{2}-1} \approx$$

$$\approx \frac{1}{\big(k_0T\big)^{3N/2}}\frac{1}{\left[\frac{\frac{3N}{2}-1}{e}\right]^{\frac{3N}{2}-1}}\left[\left(\frac{3N}{2}-1\right)\frac{k_0T}{e}\right]^{\frac{3N}{2}-1} = \frac{1}{k_0T}.$$

По определению, $\Delta E = 1/\omega_{\max} = k_0 T$. Тогда

$$\frac{\Delta E}{E_{\text{вер}}} = \frac{k_0 T}{k_0 T} \left(\frac{3N}{2} - 1 \right)^{-1} = \left(\frac{3N}{2} - 1 \right)^{-1}.$$

Задача 404 (СФ): *Вычислить поправку к уравнению состояния для разреженного газа, частицы которого взаимодействуют по закону*

$$U(r) = \begin{cases} \infty \text{ при } 0 \leqslant r < d, \\ -\alpha/r^n \text{ при } r \geqslant d, \end{cases}$$

где d – диаметр частицы, $\alpha > 0$, $n > 3$.

Решение:

Уравнение состояния для разреженного газа:

$$P = \frac{NK_0T}{V}\left(1 - \frac{BN}{2V}\right),$$

где B – искомая поправка:

$$B = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \left(1 - e^{-\frac{U}{k_0T}}\right) dV = \frac{1}{2}\int\limits_0^d dV + \frac{1}{2}\int\limits_d^\infty \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{r^n}\frac{1}{k_0T}}\right) dV =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{4\pi r^3}{3}\bigg|_0^d + 2\pi\int\limits_d^\infty r^2 \frac{\alpha}{r^n}\frac{1}{k_0T}\,dr = \frac{2\pi d^3}{3} + \frac{2\pi\alpha}{kT}\frac{1}{3-n}r^{3-n}\bigg|_d^\infty =$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(d^3 + \frac{3\alpha}{k_0T}\frac{1}{n-3}\frac{1}{d^{n-3}}\right).$$

$$P = \frac{Nk_0T}{V}\left[1 - \frac{N\pi}{3V}\left(d^3 + \frac{3\alpha}{k_0T}\frac{1}{n-3}\frac{1}{d^{n-3}}\right)\right].$$

Задача 452 (СФ): *Для ультрарелятивистского электронного газа найдите:*

а) полную и среднюю энергию одной частицы при $T = 0$ K;
б) связь между давлением и полной энергией.

Решение:

Полную энергию можно найти по следующей формуле:

$$E_{\text{полн}} = \frac{cV}{\pi^2\hbar^3}\int\limits_0^{p_F} p^3\,dp = V\frac{cp_F^4}{4\pi^2\hbar^3}.$$

Количество частиц:

$$N = \frac{V}{\pi^2\hbar^3}\int\limits_0^{p_F} p^2\,dp = \frac{Vp_F^3}{3\pi^2\hbar^3}, \qquad p_F^3 = \frac{N\,3\pi^2\hbar^3}{V}.$$

Таким образом,

$$E_{\text{полн}} = \frac{Vc}{4\pi^2\hbar^3}\frac{N\,3\pi^2\hbar^3}{V}p_F = \frac{3}{4}Np_F.$$

Средняя энергия одной частицы:

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{E_{\text{полн}}}{N} = \frac{3}{4}p_F.$$

Давление газа можно получить дифференцированием энергии по объему:

$$P = -\frac{dE}{dV} = -\frac{3(3\pi^2)^{1/3}}{4}\hbar c N^{4/3}\left(-\frac{1}{3}V^{-4/3}\right).$$

Импульс Ферми $p_F = (3\pi^2)^{1/3}\,(N/V)^{1/3}\,\hbar$, тогда давление:

$$P = \frac{1}{3V}\frac{3}{4}Np_F = \frac{E}{3V}.$$

Задача 474 (СФ): *Найти зависимость числа фотонов равновесного излучения от полной энергии и объема.*

Решение:

Число фотонов в единичном объеме $n = kT^3/(\hbar c)$. Проинтегрировав по dV найдем число фотонов в объеме V:

$$N = \frac{kT^3V}{\hbar c}.$$

Объемная плотность излучения для абсолютно черного тела:

$$u_V = \frac{4\sigma}{c}T^4 = \frac{dE}{dV}, \qquad E = \frac{4\sigma}{c}T^4V.$$

Обозначив $1/\beta = 4\sigma/c$, получим

$$T = \sqrt[4]{E\beta/V}.$$

Тогда

$$N = \frac{k}{\hbar c}VE^{3/4}V^{-3/4}\beta^{3/4} \sim \alpha E^{3/4}V^{1/4}.$$