Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный технический университет»
Факультет электроники и вычислительной техники
Кафедра физики

Семестровая работа №3 по дисциплине «Электродинамика»

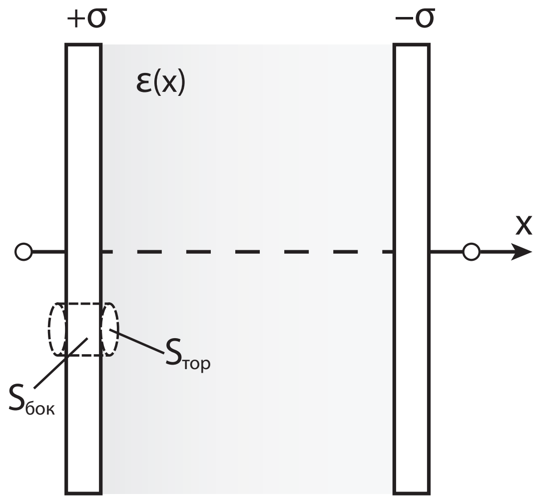
Выполнила
студентка группы Ф-369
Слоква В. И.

Проверил
доцент Грецов М. В.

Волгоград, 2014

Задача 1.14: *Определить поле плоского конденсатора, обкладки которого равномерно заряжены с поверхностной плотностью зарядов $+\sigma$ и $-\sigma$. Пространство между ними заполнено неоднородным диэлектриком, проницаемость которого $\varepsilon = \varepsilon(x)$. Краевым эффектом пренебречь. Ось x направлена перпендикулярно к обкладкам от положительно заряженной обкладки к отрицательной.*

Решение:



Поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{D}$, в силу симметрии задачи, имеют только одну компоненту и направлены вдоль оси x.
Окружим малый участок пластины замкнутой цилиндрической поверхностью. Запишем теорему Гаусса для $\boldsymbol{D}$:

$$\oiint\limits_S \boldsymbol{D}\delta\boldsymbol{S} = \sigma S_{н.тор}$$

Первый интеграл можно расписать следующим образом:

$$\oiint\limits_S \boldsymbol{D}\delta\boldsymbol{S} = \iint\limits_{S_{бок}} \boldsymbol{D}\delta\boldsymbol{S} + \iint\limits_{S_{н.тор}} \boldsymbol{D}\delta\boldsymbol{S} + \iint\limits_{S_{в.тор}} \boldsymbol{D}\delta\boldsymbol{S}.$$

Так как вне конденсатора поля нет, то $\iint\limits_{S_{в.тор}} \boldsymbol{D}\delta\boldsymbol{S} = 0$. Поле $\boldsymbol{D}$ сонаправлено с осью x, следовательно, $\iint\limits_{S_{бок}} \boldsymbol{D}\delta\boldsymbol{S} = 0$.

Тогда

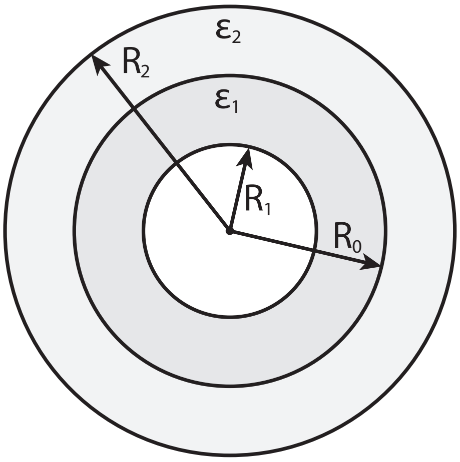
$$\sigma S_{н.тор} = \iint\limits_{S_{н.тор}} \boldsymbol{D}\delta\boldsymbol{S} = D \iint\limits_{S_{н.тор}} dS = DS_{н.тор},$$

откуда $D = \sigma$. С другой стороны $D = \varepsilon\varepsilon_0 E$, откуда $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$.

Ответ: $\boldsymbol{E} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_x$.

Задача 1.58: *Вычислить емкость цилиндрического конденсатора. Длина его l, радиусы обкладок R_1 и R_2. Между обкладками два коаксиальных слоя однородных диэлектриков с проницаемостью ε_1 и ε_2, граница раздела между ними – цилиндрическая поверхность радиуса R_0. Краевым эффектом пренебречь.*

Решение:



Пусть конденсатор заряжен с погонным зарядом $\gamma = q/2\pi r$.
Поле $\boldsymbol{E}$ между обкладками создается только внутренним цилиндром

$$E(r)\Big|_{R_1<r<R_2} = \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}\Big|_{R_1<r<R_2}.$$

По теореме Гаусса:

$$\oiint\limits_S \boldsymbol{E}\delta\boldsymbol{S} = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

Первый интеграл можно расписать следующим образом:

$$\oiint\limits_S \boldsymbol{E}\delta\boldsymbol{S} = \iint\limits_{S_{бок}} \boldsymbol{E}\delta\boldsymbol{S} + 2\iint\limits_{S_{тор}} \boldsymbol{E}\delta\boldsymbol{S}.$$

Так как поле $\boldsymbol{E} \uparrow\uparrow \boldsymbol{n}_{бок}$, то $\iint\limits_{S_{тор}} \boldsymbol{E}\delta\boldsymbol{S} = 0$ и $\iint\limits_{S_{бок}} \boldsymbol{E}\delta\boldsymbol{S} = E\iint\limits_{S_{бок}} dS = 2\pi r l E$.

Тогда поле $E = \dfrac{q}{2\pi r l \varepsilon\varepsilon_0}$, и разность потенциалов:

$$\Delta\varphi = \int\limits_{R_1}^{R_2} E\,dr = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\left(\int\limits_{R_1}^{R_0}\frac{dr}{\varepsilon_1 r} + \int\limits_{R_0}^{R_2}\frac{dr}{\varepsilon_2 r}\right) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\ln R\Big|_{R_1}^{R_0} + \frac{1}{\varepsilon_2}\ln R\Big|_{R_0}^{R_2}\right) =$$

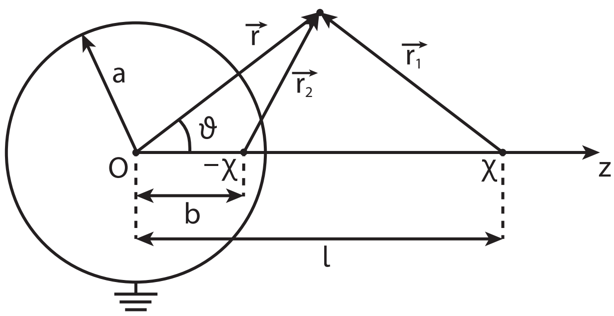
$$= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\ln\frac{R_0}{R_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\ln\frac{R_2}{R_0}\right).$$

Тогда емкость цилиндрического конденсатора: $C = \dfrac{q}{\Delta\varphi} = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 l}{\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\ln\frac{R_0}{R_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\ln\frac{R_2}{R_0}\right)}$.

Ответ: $C = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 l}{\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\ln\frac{R_0}{R_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\ln\frac{R_2}{R_0}\right)}$.

Задача 1.115: *В вакууме имеется бесконечно длинный заземленный проводящий круглый цилиндр радиуса a. Параллельно его оси протянута нить на расстоянии $l > a$ от нее. Нить равномерно заряжена с линейной плотностью χ. Определить создаваемое ею поле и силу, действующую на единицу длины нити.*

Решение:



Для решения задачи воспользуемся методом изображений.

В виду того, что цилиндр заземлен, внутри цилиндра поля нет: $E_{in} = 0$, $\varphi_{in} = \text{const}$.

Вне цилиндра поле создается заряженной нитью χ и ее изображением, находящимся на расстоянии b от оси цилиндра.

Поле $\boldsymbol{E}$ бесконечной заряженной прямой нити имеет вид: $E = \dfrac{\chi}{2\pi\varepsilon_0 r}$, откуда потенциал: $\varphi = -\dfrac{\chi}{2\pi\varepsilon_0}\ln r$.

Тогда потенциал вне цилиндра имеет вид:

$$\varphi_{ex} = -\frac{\chi}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln r_1 - c\ln r_2\right),$$

где $c = \text{const}$, $r_1, r_2 > a$; $r_1 = \sqrt{l^2 + r^2 - 2lr\cos\vartheta}$, $r_2 = \sqrt{b^2 + r^2 - 2br\cos\vartheta}$ – расстояния от рассматриваемой точки до нити и ее изображения.

Рассмотрим граничное условие $\varphi\Big|_{r=a} = 0$:

$$\frac{\chi}{4\pi\varepsilon_0}\Big(-\ln\left(l^2 + a^2 - 2al\cos\vartheta\right) + c\ln\left(b^2 + a^2 - 2ab\cos\vartheta\right)\Big) = 0.$$

Перепишем в виде:

$$-\ln l - \ln\left(l + a^2/l - 2a\cos\vartheta\right) + c\ln b + c\ln\left(b + a^2/b - 2a\cos\vartheta\right) = 0.$$

Далее $\ln\left(l + a^2/l - 2a\cos\vartheta\right) = \ln\left(b + b^2/l - 2a\cos\vartheta\right)$, и $l + a^2/l = b + b^2/l$, откуда $b = a^2/l$.

Определим константу c: $\ln\left(l + a^2/l - 2a\cos\vartheta\right) = c\ln\left(a^2/l + l - 2a\cos\vartheta\right)$, далее $1 = c\cdot 1$, следовательно, $c = 1$.

Тогда напряженность поля вне цилиндра будет определяться выражением: $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi_2$.

Радиальная компонента:

$$E_r = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} = \frac{\chi}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r - l\cos\vartheta}{r_1^2} - \frac{r - \frac{a^2}{l}\cos\vartheta}{r_2^2}\right).$$

Угловая компонента:

$$E_\vartheta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\vartheta} = \frac{\sin\vartheta}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{l}{r_1^2} - \frac{a^2/l}{r_2^2}\right).$$

Сила, действующая на единицу длины нити равна силе взаимодействия между нитью и ее изображением:

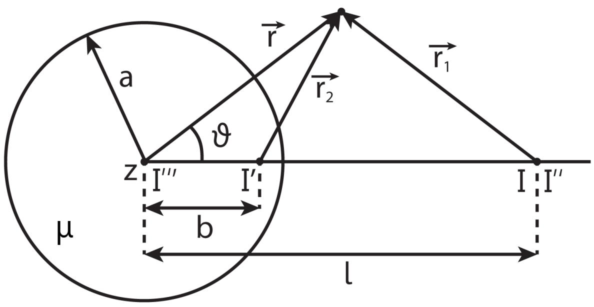
$$F = \frac{\chi^2}{2\pi\varepsilon_0(l-b)} = \frac{\chi^2}{2\pi\varepsilon_0\,(l-a^2/l)} = \frac{\chi^2 l}{2\pi\varepsilon_0(l^2-a^2)}.$$

Ответ:
$$E_r = \frac{\chi}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r-l\cos\vartheta}{r_1^2} - \frac{r-\frac{a^2}{l}\cos\vartheta}{r_2^2}\right);$$

$$E_\vartheta = \frac{\sin\vartheta}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{l}{r_1^2} - \frac{a^2/l}{r_2^2}\right); \quad F = \frac{\chi^2 l}{2\pi\varepsilon_0(l^2-a^2)}.$$

Задача 2.33: *Однородный магнетик имеет форму бесконечно длинного круглого цилиндра радиуса a, магнитная проницаемость его μ; окружающая среда – воздух. Бесконечный прямолинейный ток проходит в воздухе параллельно оси магнетика на расстоянии l от нее. Определить создаваемое им магнитное поле.*

Решение:



Рассмотрим задачу в цилиндрических координатах. Тогда напряженность магнитного поля будет иметь только одну компоненту – угловую, которая в силу теоремы Стокса будет иметь вид: $H_\alpha = \dfrac{I}{2\pi r} = -\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial A_z}{\partial r}$.

Векторный потенциал будет иметь вид: $\boldsymbol{A} = \{0, 0, A_z\}$.

Внутри цилиндра: $A_z^{in} = -\dfrac{I''\mu}{2\pi}\ln r_1$.

Вне цилиндра: $A_z^{ex} = -\dfrac{I}{2\pi}\ln r_1 - \dfrac{I'}{2\pi}\ln r_2 - \dfrac{I'''}{2\pi}\ln r$.

Положим $I' = k_1 I$, $I'' = k_2 I$, $I''' = k_3 I$ и выразим r_1 и r_2 через r: $r_1 = \sqrt{l^2 + r^2 - 2rl\cos\vartheta}$, $r_2 = \sqrt{b^2 + r^2 - 2br\cos\vartheta}$, тогда векторные потенциалы:

$$A_z^{in} = -\frac{\mu k_2 I}{4\pi}\ln(l^2 + r^2 - 2rl\cos\vartheta);$$

$$A_z^{ex} = -\frac{I}{4\pi}\ln(b^2 + r^2 - 2br\cos\vartheta) - \frac{k_1 I}{4\pi}\ln(l^2 + r^2 - 2rl\cos\vartheta) - \frac{k_3 I}{4\pi}\ln r.$$

Рассмотрим граничные условия. Первое – $A_z^{in} = A_z^{ex}$:

$$-\frac{\mu k_2 I}{4\pi}\ln(l^2 + a^2 - 2al\cos\vartheta) = -\frac{I}{4\pi}\ln(l^2 + a^2 - 2al\cos\vartheta) - \\ -\frac{k_1 I}{4\pi}\ln(b^2 + a^2 - 2ab\cos\vartheta) - \frac{k_3 I}{2\pi}\ln r.$$

Упрощая, получим:

$$-\mu k_2 \ln(l^2+a^2-2al\cos\vartheta) = -\ln(l^2+a^2-2al\cos\vartheta) - k_1\ln(b^2+a^2-2ab\cos\vartheta) - 2k_3\ln a.$$

Аналогично предыдущей задаче: $b = a^2/l$. Тогда:

$$2\mu k_2\ln l + \mu k_2\ln(1 + a^2/l^2 - 2a/l\cos\vartheta) = 2\ln l + \ln(1 + a^2/l - 2a/l\cos\vartheta) + 2k_1\ln a + \\ +k_1\ln(1 + a^2/l^2 - a/l\cos\vartheta) + 2k_3\ln a.$$

Или: $(\mu k_2 - 1 - k_1)\ln(1 + a^2/l^2 - 2a/l\cos\vartheta) = 2\ln l + 2(k_1 + k_3)\ln a - 2\mu k_2\ln l$.

Так как зависимость от угла должна отсутствовать, то $\mu k_2 - 1 - k_1 = 0$, откуда $k_1 = \mu k_2 - 1$.

Рассмотрим теперь второе граничное условие $-\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z^{in}}{\partial r}\bigg|_{r=a} + \frac{\partial A_z^{ex}}{\partial r}\bigg|_{r=a} = \frac{I}{2\pi}$: сначала возьмем производные

$$\frac{\partial A_z^{in}}{\partial r} = -\frac{\mu k_2 I}{4\pi}\frac{2r - 2l\cos\vartheta}{r_1^2}, \frac{\partial A_z^{ex}}{\partial r} = -\frac{I}{4\pi}\left(\frac{2r - 2l\cos\vartheta}{r_1^2} + k_1\frac{2r - 2b\cos\vartheta}{r_2^2} - 2k_3\frac{1}{r}\right);$$

а затем подставим их в условие:

$$\frac{k_2 I}{4\pi}\frac{2a - 2l\cos\vartheta}{r_1^2} - \frac{I}{4\pi}\frac{2a - 2l\cos\vartheta}{r_1^2} - \frac{k_1 I}{4\pi}\frac{2a - 2b\cos\vartheta}{r_2^2} - \frac{k_3 I}{2\pi}\frac{1}{a} = \frac{I}{2\pi},$$

откуда

$$\frac{k_2}{r_1^2}(a - l\cos\vartheta) - \frac{1}{r_1^2}(a - l\cos\vartheta) - \frac{k_1}{r_2^2}(a - b\cos\vartheta) - \frac{k_3}{a} = 1.$$

Подставляя выражение для k_1, имеем:

$$\frac{k_2}{r_1^2}(a - l\cos\vartheta) - \frac{1}{r_1^2}(a - l\cos\vartheta) - \frac{\mu k_2 - 1}{r_2^2}(a - b\cos\vartheta) - \frac{k_3}{a} = 1;$$

$$\frac{1}{r_1^2}(a - l\cos\vartheta)(k_2 - 1) - \frac{1}{r_2^2}(a - b\cos\vartheta)(\mu k_2 - 1) - \frac{k_3}{a} = 1,$$

откуда, так как зависимость от угла должна быть одинаковой,

$$\frac{\frac{1}{r_1^2}(a - l\cos\vartheta)}{\frac{1}{r_2^2}(a - b\cos\vartheta)} = \frac{k_2 - 1}{-\mu k_2 + 1} = 1.$$

Тогда $k_2 - 1 = -\mu k_2 + 1$, откуда $k_2 = 2/(1+\mu)$. Подставляя в выражение для k_1, имеем: $k_1 = 2\mu/(1+\mu) - 1$, откуда $k_1 = \frac{\mu-1}{\mu+1}$.

Для нахождения коэффициента k_3 запишем циркуляцию вектора $\boldsymbol{H}$ по контуру радиуса $b < R < a$: $\oint \boldsymbol{H}\cdot\delta\boldsymbol{l} = I'' + I''' = 0$, откуда $k_3 = -k_1$.

Таким образом, $H_\alpha^{in} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z^{in}}{\partial r}$; $\quad H_\alpha^{ex} = -\frac{\partial A_z^{ex}}{\partial r}$.

Ответ:
$$H_\alpha^{in} = \frac{2I}{2\pi(\mu+1)}\frac{r - l\cos\vartheta}{r_1^2};$$

$$H_\alpha^{ex} = \frac{I}{2\pi}\frac{r - l\cos\vartheta}{r_1^2} + \frac{(\mu-1)I}{2\pi(\mu+1)}\frac{r - b\cos\vartheta}{r_2^2} - \frac{(\mu-1)I}{2\pi(\mu+1)}\frac{1}{r}.$$