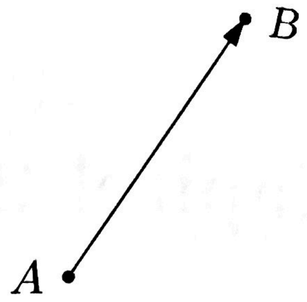
Riktade sträckor



Låt A och B vara två punkter i *rummet*. De bestämmer en **sträcka**, betecknad AB, som utgörs av linjestycket mellan punkterna. Om man tar hänsyn till ordningsföljden mellan punkterna, att "A kommer före B", så får man vad som kallas för en **riktad sträcka** $\overrightarrow{AB}$. I figurer åskådliggörs riktade sträckor med en pil. A sägs vara den riktade sträckans **fotpunkt** och B dess **spets**. Tar man punkterna i omvänd ordning erhålles en annan riktad sträcka, $\overrightarrow{BA}$. Trots att samma punkter A och B är inblandade så är $\overrightarrow{BA} \neq \overrightarrow{AB}$. Den riktade sträcka $\overrightarrow{AA}$ för vilken fotpunkt och spets sammanfaller kallas **nollsträcka**.

Ett annat till synes klumpigare sätt att beskriva den riktade sträckan $\overrightarrow{AB}$ är följande: Starta i *punkten* A och gå i *riktning* mot B en sträcka vars *storlek* (längd) är lika med avståndet mellan A och B. En riktad sträcka bestäms alltså genom att man anger

(i) en riktning,
(ii) en storlek (längd),
(iii) en punkt (fotpunkten).

Vektorer

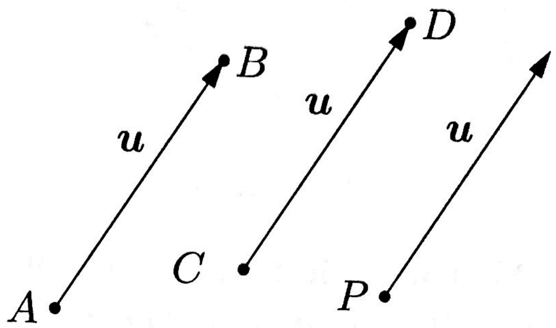
I många sammanhang behöver man ett begrepp som beskriver storlek och riktning utan att vara kopplat till några speciella punkter. Genom att slopa *(iii)* i ovanstående beskrivning av vad som menas med en riktad sträcka uppkommer vektorbegreppet. En **vektor**[1] bestäms alltså genom att man anger

(i) en riktning,
(ii) en storlek (längd).

Som beteckning för vektorer brukar man använda fetstilsbokstäver $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, ... Vanliga beteckningar när man skriver för hand eller maskin är $\bar{u}$, $\vec{u}$, eller enbart u.

[1]Ordet vektor är latin och betyder *dragare*.

Vi måste precisera innebörden av *(i)* och *(ii)*. Att två riktade sträckor $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{CD}$ har samma riktning och storlek är detsamma som att de kan överföras i varandra genom parallellförflyttning. Enligt vad som sagts ovan bestämmer de i så fall samma vektor $\boldsymbol{u}$. Var och en av dem sägs vara **representant** för $\boldsymbol{u}$. Till varje punkt P i rummet finns en representant för $\boldsymbol{u}$ som har P som fotpunkt.



För fullständighets skull ger vi också en formell definition:

Definition 1. *En* **vektor** $\boldsymbol{u}$ *är en mängd av riktade sträckor, med egenskapen att två riktade sträckor* $\overrightarrow{AB}$ *och* $\overrightarrow{CD}$ *båda tillhör* $\boldsymbol{u}$ *om och endast om de kan överföras i varandra genom parallellförflyttning. Varje riktad sträcka i mängden sägs vara en* **representant** *för vektorn.*

Vi inledde detta avsnitt med att anta att A, B, C,... är punkter i rummet. Via riktade sträckor kom vi till begreppet **vektor i rummet**. Om man i stället startar med att anta att A, B, C, ... är punkter i planet, så kommer texten ovan ordagrant att leda till definitionen av **vektor i planet**. Om man begränsar punkterna till att ligga på linjen (en godtycklig linje), så leds man till begreppet **vektor på linjen**.

Ordet vektor kommer senare att användas i en allmännare betydelse. När det behöver förtydligas kommer vi att använda benämningen **geometrisk vektor** för dem vi just definierat.

Terminologi. Om $A = B$ i vektordefinitionen ovan så erhålles **nollvektorn**, som betecknas $\boldsymbol{0}$. Dess representanter utgörs av alla nollsträckor $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$, ...

Låt $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ vara två vektorer, och tag för var och en av dem en representant. Om dessa är parallella sägs vektorerna vara **parallella**. En beteckning för detta är $\boldsymbol{u} \parallel \boldsymbol{v}$. Nollvektorn är definitionsmässigt parallell med varje annan vektor.

Två parallella vektorer $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ kan vara **lika riktade** eller **motsatt riktade**, enligt nedanstående figur.

lika riktade motsatt riktade

Med **längden** av en vektor menas längden av en av dess representanter. (Det kvittar vilken man väljer, eftersom alla har samma längd). Längden betecknas $|\boldsymbol{u}|$. Speciellt är $|\boldsymbol{0}| = 0$. □

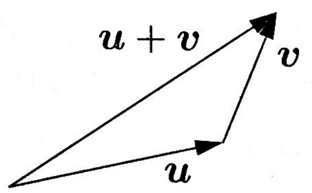
2.2 Räkneoperationer för vektorer

Definitioner

Vi inför nu de två fundamentala räkneoperationerna för vektorer.

Definition 2.

Addition: *Summan $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ av två vektorer $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ definieras enligt figuren*



För att konstruera $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ väljer man först en representant för $\boldsymbol{u}$ och tar därefter med dess spets som fotpunkt en representant för $\boldsymbol{v}$. Den riktade sträckan som har fotpunkt i $\boldsymbol{u}$:s fotpunkt och spets i $\boldsymbol{v}$:s spets är en representant för summavektorn $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$.

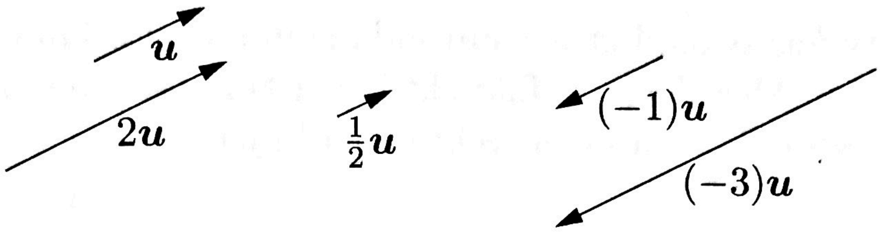
Multiplikation med skalär: *Låt $\lambda \in \mathbb{R}$. Med $\lambda\boldsymbol{u}$ menas den vektor parallell med $\boldsymbol{u}$ som har*

(i) längden $|\lambda|\,|\boldsymbol{u}|$,

(ii) samma riktning som $\boldsymbol{u}$ om $\lambda > 0$, motsatt om $\lambda < 0$. Om $\lambda = 0$ så är $\lambda\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.

I den andra definitionen kunde vi lika gärna ha sagt "multiplikation med tal".

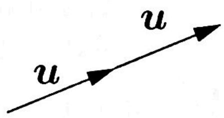
Exempel 1. Följande figur illustrerar definitionen av multiplikation med skalär.



□

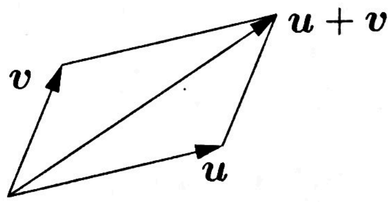
Exempel 2. Visa att $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{u}$.

Lösning: Denna formel är inte riktigt lika självklar som den ser ut. Vänster led skall nämligen beräknas enligt definitionen av addition, medan höger led skall beräknas enligt definitionen av multiplikation med skalär. Därför måste man kontrollera att de ger samma resultat. Detta görs genom att man tittar på figuren och med hjälp av definitionerna tänker efter vad som menas med $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}$ respektive $2\boldsymbol{u}$.



□

Anmärkning. Beträffande definitionen av vektorsumman $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ observerar vi att den också kan också formuleras med hjälp av diagonalen i en parallellogram vars sidor är $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$, enligt figuren.

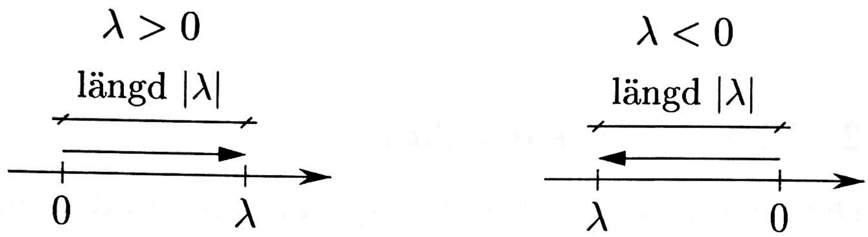


Som bekant brukar man inom fysiken åskådliggöra en kraft med en pil som pekar i kraftens riktning och vars längd är proportionell mot kraftens storlek. Krafter kan alltså *representeras* av vektorer. På grund av att räkneoperationerna för vektorer överensstämmer med fysikens lagar för sammansättning av krafter kan vektorer också användas för att *räkna* med krafter. Exempelvis gäller att om två krafter representeras av vektorerna $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ så representeras deras **resulterande kraft** av vektorn $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, enligt parallellogramkonstruktionen ovan. I detta sammanhang brukar figuren kallas **kraftparallellogrammen.** □

Anmärkning. I definitionen av multiplikation med skalär förekommer både $|\boldsymbol{u}|$, i betydelsen längd av en vektor, och $|\lambda|$, i betydelsen absolutbelopp för ett reellt tal, dvs

$$|\lambda| = \begin{cases} \lambda & \text{om} \quad \lambda \geq 0 \\ -\lambda & \text{om} \quad \lambda < 0 \end{cases} .$$

Det kan tyckas olämpligt att använda samma beteckning både för vektorer och tal. Men detta är faktiskt ingen konflikt eftersom $|\lambda|$ även kan uppfattas som längden av en vektor, på linjen:



□

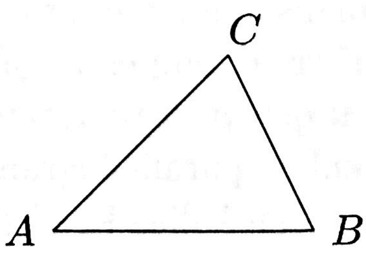
Terminologi. Vi har hittills noga skiljt på vektorer och riktade sträckor. När man väl förstått samband och skillnader mellan dessa begrepp är det ofta opraktiskt att vara alltför pedantisk ifråga om beteckningar. Om $\overrightarrow{AB}$ är en representant för $\boldsymbol{u}$ skriver man $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{AB}$, trots att detta egentligen är fel. Om $\overrightarrow{CD}$ är en annan representant för $\boldsymbol{u}$ gäller även $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{CD}$, vilket leder till sambandet

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \quad (= \boldsymbol{u}) .$$

Med detta menar man alltså inte att de riktade sträckorna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{CD}$ är lika, utan att de bestämmer samma *vektor*. När det inte kan leda till missförstånd kommer vi att använda detta skrivsätt i fortsättningen.

□

Exempel 3. Låt A, B, C vara hörn i en triangel. Läsaren uppmanas att med hjälp av figuren och definitionerna övertyga sig om följande samband:



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \boldsymbol{0} ,$$
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} .$$

□

Räknelagar

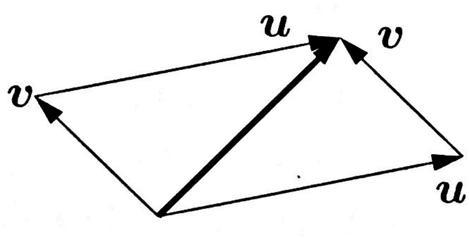
SATS 1. *För geometriska vektorer gäller följande* **räknelagar***:*

(i) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$ *(kommutativa lagen)*
$\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}$ *(associativa lagen)*
$\boldsymbol{u}+(-1)\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$
$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{u}$

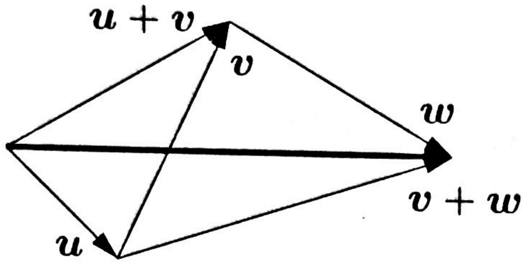
(ii) $\lambda(\mu\boldsymbol{u})=(\lambda\mu)\boldsymbol{u}$
$1\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$
$0\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$
$\lambda\cdot\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$

(iii) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}+\mu\boldsymbol{u}$ *(distributiv lag 1)*
$\lambda(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\lambda\boldsymbol{u}+\lambda\boldsymbol{v}$ *(distributiv lag 2)*

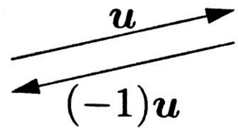
BEVIS. De tre första lagarna i *(i)* visas med hjälp av nedanstående figurer. Tolkningen av den första, som visar den kommutativa lagen, är att den tjockt ritade vektorn enligt definitionen av vektoraddition dels är lika med $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$, dels lika med $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$. På samma sätt gäller i den andra figuren, som visar den associativa lagen, att den tjockt markerade vektorn är lika med summan av $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$, men att den också är lika med summan av $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$. Observera att detta gäller även om $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$ inte ligger i ett plan. Den tredje lagen i *(i)* visas av den tredje figuren, där $(-1)\boldsymbol{u}$ enligt definitionen av multiplikation med skalär är en vektor som är lika lång men motsatt riktad mot $\boldsymbol{u}$. Summan blir alltså nollvektorn. Den fjärde lagen i *(i)* följer direkt ur definitionen av vektoraddition.



(kommutativa lagen)

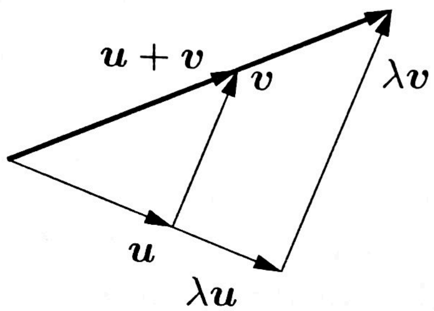


(associativa lagen)

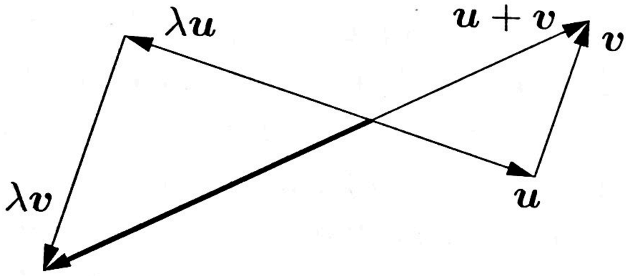


De fyra lagarna i *(ii)* visas genom att man enligt definitionen av multiplikation med skalär konstaterar att vektorerna i vänster och höger led har samma längd och samma riktning.

Den andra distributiva lagen i *(iii)* bevisas med hjälp av likformiga trianglar i nedanstående figurer. Läsaren uppmanas att själv rita figurer som visar den första distributiva lagen i *(iii)*.



(andra distributiva lagen för $\lambda > 0$)



(andra distributiva lagen för $\lambda < 0$)

□

Subtraktion: Om a är ett reellt tal så definieras $-a$ som det entydigt bestämda reella tal som ger summan 0 när det adderas till a, dvs

$$a + (-a) = 0 \ .$$

På samma sätt gör man med vektorer, dvs man låter $-\boldsymbol{u}$ beteckna den entydigt bestämda vektor som ger summan $\boldsymbol{0}$, nollvektorn, när den adderas till $\boldsymbol{u}$. Enligt den tredje räknelagen i *(i)* har $(-1)\boldsymbol{u}$ denna egenskap. Alltså gäller

$$-\boldsymbol{u} = (-1)\boldsymbol{u} \ .$$

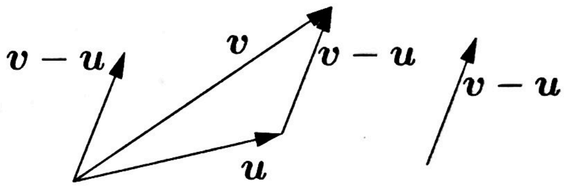
Mera allmänt gäller, enligt den associativa lagen för vektoraddition,

$$(\boldsymbol{v} + (-1)\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + ((-1)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{v} .$$

Vektorn $\boldsymbol{v} + (-1)\boldsymbol{u}$ har alltså egenskapen att när den adderas till $\boldsymbol{u}$ så erhålles vektorn $\boldsymbol{v}$ som summa. Vi betecknar denna vektor med $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$, dvs

$$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + (-1)\boldsymbol{u} .$$

Geometriskt kan skillnadsvektorn $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}$ beskrivas som den vektor som sammanbinder spetsen av $\boldsymbol{u}$ med spetsen av $\boldsymbol{v}$, i denna ordning, se figuren. För att understryka att vektorer inte är bundna till speciella punkter har vi ritat ut flera representanter för $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$.

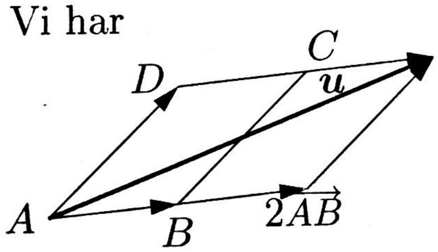


Några exempel

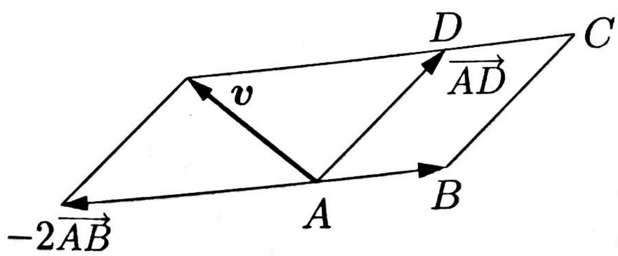
Exempel 4. Låt A, B, C, D vara hörn i en parallellogram. Illustrera i figurer vektorerna

$$\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB} \;, \quad \overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AB} \;, \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} \;.$$

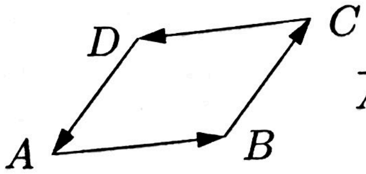
Lösning: Vi har



$$\boldsymbol{u} = \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB}$$



$$\boldsymbol{v} = \overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AB}$$



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \boldsymbol{0}$$

□