Devoirs surveillés de Maths expertes

Année 2020-2021

Exercice 1. **2 points**

Écrire la matrice A carrée d'ordre 3 telle que :

$$a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{i}{j} & \text{si } i \geqslant j, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 2. **9 points**

On définit les matrices A, B et M définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer, en détaillant les calculs, que : $A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On admettra, pour la suite, qu'on a également : $B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Démontrer que $M = A + 0,5B$.

3. On **admet** dans la suite que, pour tout entier naturel n non nul : $A^n = A$ et $B^n = B$.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul : $M^n = A + 0,5^n B$.
On ne cherchera pas à expliciter M^n.

Exercice 3. **9 points**

On donne les matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie A. Matrice inversible

1. On admet que $M^2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$.
Calculer, en détaillant les calculs : $M^3 - M^2 - 8M$.

2. En déduire que M est inversible et que $M^{-1} = \dfrac{1}{6}\left(M^2 - M - 8I\right)$.
On ne cherchera pas à expliciter M^{-1}.

Partie B. Étude d'un cas particulier

On cherche à déterminer trois nombres entiers a, b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A$(1\,;\,1)$, B$(-1\,;\,-1)$ et C$(2\,;\,5)$.

1. Démontrer que le problème revient à chercher trois réels a, b et c tels que

$$M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer les nombres a, b et c et vérifier que ces nombres sont des entiers.

Exercice 1. Voici la matrice A carrée d'ordre 3 demandée : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.

1. On a :

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,8 \times 0,2 + 0,8 \times (-0,2) & 0,8 \times (-0,8) + 0,8 \times 0,8 \\ 0,2 \times 0,2 + 0,2 \times (-0,2) & 0,2 \times (-0,8) + 0,2 \times 0,8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} A + 0,5B &= \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} + 0,5 \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 & -0,4 \\ -0,1 & 0,4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \\ &= M \end{aligned}$$

3. Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition : $M^n = A + 0,5^n B$.

- **Initialisation :** si $n = 1$ on a $M^1 = M$ et $A + 0,5^1 B = A + 0,5B$.
  Or $M = A + 0,5B$ d'après la question 2. $\mathscr{P}_1$ est donc vraie.
- **Hérédité :** on suppose $\mathscr{P}_k$ vraie pour un entier naturel k quelconque, c'est-à-dire $M^k = A + 0,5^k B$ et montrons que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie c'est-à-dire $M^{k+1} = A + 0,5^{k+1} B$.
  On a : $M^{k+1} = M \times M^k$. Or $M = A + 0,5B$ et par hypothèse de récurrence $M^k = A + 0,5^k B$, on a ainsi :

$$\begin{aligned} M^{k+1} &= M \times M^k \\ &= (A + 0,5B) \times (A + 0,5^k B) \\ &= A^2 + 0,5^k AB + 0,5BA + 0,5^{k+1} B^2 \end{aligned}$$

  D'après l'énoncé on sait que pour tout entier naturel n non nul $A^n = A$ et $B^n = B$ on a donc $A^2 = A$ et $B^2 = B$.
  De plus $AB = BA = 0_2$, on en déduit donc que : $M^{k+1} = A + 0,5^{k+1} B$ et donc $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

Conclusion : $\mathscr{P}_1$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire à partir du rang $n = 1$. On en déduit que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n non nul.

$$\boxed{\forall \in \mathbb{N}^*,\ M^n = A + 0,5^n B}.$$

Exercice 3.

Partie A. Matrice inversible

1. On a $M^3 - M^2 - 8M = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 8 & -8 & 8 \\ 32 & 16 & 8 \end{pmatrix}$ donc
   $M^3 - M^2 - 8M = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ donc : $M^3 - M^2 - 8M = 6I$.
2. M est inversible si et seulement si il existe une matrice P carrée d'ordre 3 telle que $M \times P = P \times M = I$.
   Or, $M^3 - M^2 - 8M = 6I \iff \frac{1}{6}(M^3 - M^2 - 8M) = I$.
   Ainsi $\frac{1}{6}(M^3 - M^2 - 8M) = I \iff M \times \frac{1}{6}(M^2 - M - 8I) = \frac{1}{6}(M^2 - M - 8I) \times M = I$. On en déduit que M est inversible et son inverse est $M^{-1} = \frac{1}{6}\left(M^2 - M - 8I\right)$.

Partie B. Étude d'un cas particulier

1. $A(1\,;\,1) \in \mathscr{P} \iff a \times 1^2 + b \times +c = 1 \iff a + b + c = 1$.
   De même B$(-1\,;\,-1) \in \mathscr{P} \iff a - b + c = -1$ et C$(2\,;\,5) \in \mathscr{P} \iff 4a + 2b + c = 5$.

   On obtient le système suivant :
   $\begin{cases} a + b + c & = & 1 \\ a - b + c & = & -1 \\ 4a + 2b + c & = & 5 \end{cases} \iff \text{(matriciellement)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.
2. Le résultat précédent peut s'écrire : $MX = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ où M est la matrice inversible de la partie A.

   Ainsi : $M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.
   À la calculatrice :
   $$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   On a donc $a = 1$, $b = 1$ et $c = -1$ qui sont bien entiers.

Exercice 1 **/3.5**

On donne $z_1 = 2 + \mathrm{i}$ et $z_2 = 1 + 3\mathrm{i}$.
Donner la forme algébrique de :

1. $z_1 + 2\overline{z_2}$ **2.** $z_1 \times \overline{z_2}$ **3.** $\dfrac{z_1}{z_2}$

Exercice 2. **/6**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $2(1+z) - \mathrm{i} = (1+\mathrm{i})z$ **2.** $2z + \mathrm{i}\overline{z} = 2 - 2\mathrm{i}$. **3.** $(-\mathrm{i}z+1-3\mathrm{i})(3\overline{z}-4+\mathrm{i}) = 0$

Exercice 3. **/5**

Soient z et Z deux complexes tels que $Z = z^2 - 2\overline{z} + 1$. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec $(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Démontrer que $Z = x^2 - 2x - y^2 + 1 + \mathrm{i}(2xy + 2y)$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Z soit réel.

3. Proposer deux nombres complexes z non nuls tels que Z soit imaginaire pur.

Exercice 4. **/2.5**

On considère la fonction Python suivante :

```python
def developpe(a,b):
        S=0
        L=[1,3,3,1]
        for k in range(4):
                S=S+L[k]*a**(3-k)*b**k
        return(S)
```

Léa a testé la fonction et a obtenu le résultat suivant :

```
In [2]: developpe(1,complex(0,3))
Out[2]: (-26-18j)
```

1. Quelle égalité mathématique peut-elle écrire ?

2. Démontrer cette égalité.

Exercice **/3**

Soit P le polynôme de degré 2 défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^2 - 2az + a^2 + b^2$ où a et b sont deux réels.

1. Démontrer que $P(a + \mathrm{i}b) = 0$.

2. Démontrer pour pour tout nombre complexe z on a $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$.

3. En déduire une autre racine de polynôme P. *Aucun calcul n'est attendu mais justifiez avec soin le raisonnement effectué.*

Exercice 1.

1. $\boxed{z_1 + 2\overline{z_2} = 4 - 5\mathrm{i}}$.

2. $\boxed{z_1 \times \overline{z_2} = 5 - 5\mathrm{i}}$.

3. $\boxed{\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}}$

Exercice 2.

1. $\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \left\{-\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right\}$.

2. $\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \{2 - 2\mathrm{i}\}$.

3. $\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \left\{3 - 3\mathrm{i}\,;\, \dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{3}\mathrm{i}\right\}$.

Exercice 3.

Soient z et Z deux complexes tels que $Z = z^2 - 2\overline{z} + 1$. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec $(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. $Z = (x + \mathrm{i}y)^2 - 2(x - \mathrm{i}y) + 1$ donc $Z = x^2 + 2xy\mathrm{i} - y^2 - 2x + 2y\mathrm{i} + 1$ d'où :
$$Z = x^2 - 2x - y^2 + 1 + \mathrm{i}(2xy + 2y).$$
2. Z réel $\Longleftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Longleftrightarrow 2xy + 2y = 0 \Longleftrightarrow 2y(x+1) = 0 \Longleftrightarrow y = 0 \quad \text{ou} \quad x = -1$.
3. Z soit imaginaire pur $\Longleftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \Longleftrightarrow x^2 - 2x - y^2 + 1 = 0$.
On fixe, par exemple x : si $x = 0$ on a alors $y^2 = 1$ soit $y = 1$ ou $y = -1$ et donc une proposition possible est i et $-\mathrm{i}$.

Exercice 4.

1. On reconnaît l'utilisation de la formule du binôme de Newton avec $n = 3$, $a = 1$ et $b = 2\mathrm{i}$.
On peut alors écrire : $(1 + 2\mathrm{i})^3 = -11 - 2\mathrm{i}$.
2. On a :
$$\begin{array}{rcl} (1+2\mathrm{i})^3 & = & 1 \times 1^0 \times (2\mathrm{i})^3 + 3 \times 1^1 \times (2\mathrm{i})^2 + 3 \times 1^2 \times (2\mathrm{i})^1 + 1 \times 1^3 \times (2\mathrm{i})^0 \\ & = & -8\mathrm{i} - 12 + 6\mathrm{i} + 1 \\ & = & -11 - 2\mathrm{i} \end{array}$$

Exercice 5.

1. On a :
$$\begin{array}{rcl} P(a + \mathrm{i}b) & = & (a + \mathrm{i}b)^2 - 2a(a + \mathrm{i}b) + a^2 + b^2 \\ & = & a^2 + 2ab\mathrm{i} - b^2 - 2a^2 - 2ab\mathrm{i} + a^2 + b^2 \\ & = & 0 \end{array}$$
2. $\forall z \in \mathbb{C}$,
$$\begin{array}{rcl} P(\overline{z}) & = & (\overline{z})^2 - 2a\overline{z} + a^2 + b^2 \\ & = & \overline{z^2} - \overline{2a}\overline{z} + \overline{a^2 + b^2} \quad \text{car} \quad \overline{2a} = 2a,\ \overline{a^2 + b^2} = a^2 + b^2 \\ & = & \overline{z^2 - 2az + a^2 + b^2} \\ & = & \overline{P(z)} \end{array}$$

3. On a démontré que $z = a + \mathrm{i}b$ est une racine de P. On utilise la relation précédente avec $z = a + \mathrm{i}b$.
Il vient : $P(\overline{a + \mathrm{i}b}) = \overline{P(a + \mathrm{i}b)}$. Or $P(a + \mathrm{i}b) = 0$ d'après la question 1.
Ainsi $P(\overline{a + \mathrm{i}b}) = \overline{0} = 0$ ce qui démontre que $\overline{a + \mathrm{i}b} = a - \mathrm{i}b$ est une autre racine de P.

Exercice 1. **/4.5**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $5z - 1 = 3\mathrm{i}z - 1$ **2.** $(\overline{z} + 2)(\overline{z} - 4 + \mathrm{i}) = 0$ **3.** $2z + 3\overline{z} = 4 - 3\mathrm{i}$

Exercice 2. **/4**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 - 4z + 9 = 0$ **2.** $\sqrt{2}z^2 = \mathrm{i}z$ **3.** $4z^2 + 81 = 0$

Exercice 3. **/5.5**

On considère le polynôme $P(z) = z^3 + (2 - 2\mathrm{i})z^2 + (4 - 4\mathrm{i})z - 8\mathrm{i}$.

1. Démontrer que $2\mathrm{i}$ est une racine de P.

2. Déterminer les trois réels a, b et c tels que : $P(z) = (z - 2\mathrm{i})(az^2 + bz + c)$.

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 4. **/3**

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^4 - \mathrm{i}z^3 + z - \mathrm{i}$ où z est un complexe.

1. Démontrer que pour tout complexe z, $P(z) = (z - \mathrm{i})(z^3 + 1)$.

2. Factoriser au maximum $P(z)$.

Exercice 5$^{\text{MPSI/PCSI}}$. **/3**

On considère l'équation d'inconnue z complexe : $(E)\ : z^2 - 5z + 4 + 10\mathrm{i} = 0$.

1. Développer $(5 - 4\mathrm{i})^2$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

Exercice 1.

1. $3\mathrm{i}z - 1 = 5z - 1 \Leftrightarrow (3\mathrm{i} - 5)z = 0 \Leftrightarrow z = 0.$
2. $(\overline{z} + 2)(\overline{z} - 4 + \mathrm{i}) = 0 \iff \overline{z} + 2 = 0 \quad \text{ou} \quad \overline{z} - 4 + \mathrm{i} = 0 \iff z = -2 \quad \text{ou} \quad z = 4 + \mathrm{i}.$
3. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec $(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} 2z + 3\overline{z} = 4 - 3\mathrm{i} &\Leftrightarrow 2(x + \mathrm{i}y) + 3(x - \mathrm{i}y) - 4 + 3\mathrm{i} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x + 2\mathrm{i}y + 3x - 3\mathrm{i}y - 4 + 3\mathrm{i} = 0 \\ &\Leftrightarrow 5x - 4 + (-y + 3)\mathrm{i} = 0 \\ &\Leftrightarrow 5x = 4 \quad \text{et} \quad -y + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \tfrac{4}{5} \quad \text{et} \quad y = 3 \text{ donc } \mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \left\{-\frac{4}{5} + 3\mathrm{i}\right\} \end{aligned}$$

Exercice 2.

1. $z^2 - 4z + 9 = 0$: $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 9 = -20 = (2\sqrt{5}\mathrm{i})^2$.

   $\Delta < 0$: l'équation a donc deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{4 - 2\sqrt{5}\mathrm{i}}{2} = 2 - \sqrt{5}\mathrm{i}$ et $z_2 = \overline{z_1} = 2 + \sqrt{5}\mathrm{i}$ donc $\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \left\{2 - \sqrt{5}\mathrm{i}\,;\, 2 + \sqrt{5}\mathrm{i}\right\}$.
2. $\sqrt{2}z^2 = \mathrm{i}z = \iff z(\sqrt{2}z - \mathrm{i}) = 0$.

   Or $z(\sqrt{2} - \mathrm{i}) = 0 \iff z = 0 \quad \text{ou} z = \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \left\{0\,;\, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right\}$
3. $4z^2 + 81 = 0 \iff z^2 = -\dfrac{81}{4} = \left(\dfrac{9}{2}\mathrm{i}\right)^2$.

   $z^2 = \left(\dfrac{9}{2}\mathrm{i}\right)^2 \iff z = \pm\dfrac{9}{2}\mathrm{i}$ donc $\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \left\{-\dfrac{9}{2}\mathrm{i}\,;\, \dfrac{9}{2}\mathrm{i}\right\}$.

Exercice 3. On considère le polynôme $P(z) = z^3 + (2 - 2\mathrm{i})z^2 + (4 - 4\mathrm{i})z - 8\mathrm{i}$.

1. $P(2\mathrm{i}) = 0$ donc $2\mathrm{i}$ est une racine de P.
2. Facile : $P(z) = (z - 2\mathrm{i})(z^2 + 2z + 4)$.
3. On résout les équation $z - 2\mathrm{i} = 0$ et $z^2 + 2z + 4 = 0$. On obtient $\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \left\{-2\mathrm{i}\,;\, -1 - \sqrt{3}\mathrm{i}\,;\, -1 + \sqrt{3}\mathrm{i}\right\}$.

Exercice 4.

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^4 - \mathrm{i}z^3 + z - \mathrm{i}$ où z est un complexe.

1. $(z - \mathrm{i})(z^3 + 1) = z^4 + z - \mathrm{i}z^3 - \mathrm{i} = P(z)$.
2. On a $z^3 + 1 = z^3 - (-1)^3$ donc $z^3 + 1 = (z + 1)(z^2 - z + 1)$.

   Les racines de $z^2 - z + 1$ sont $\alpha = \dfrac{1 - \sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$ et $\overline{\alpha} = \dfrac{1 + \sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$ donc :

$$z^4 - \mathrm{i}z^3 + z - \mathrm{i} = (z - 2\mathrm{i})(z + 1)(z - \alpha)(z - \overline{z}).$$

Exercice n° 1

1. Soit a, b et c trois nombres entiers relatifs avec c non nul ; démontrer que si c divise a et c divise b, alors c divise $7a+9b$.
2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Démontrer que la fraction $\dfrac{9n+11}{5n+6}$ est irréductible.

Exercice n° 2

Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(x\,;\,y)$ tels que $x^2 = 2xy + 15$.

Exercice n° 3

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Démontrer, en utilisant la méthode de disjonction des cas, que $A = n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 3.

Exercice n° 4

La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = 9^n - 2^n$.

1. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 9u_n + 7 \times 2^n$.
2. En déduire, en utilisant une démonstration par récurrence sur n, que, pour tout entier naturel n, u_n est divisible par 7.

Exercice n° 5

Déterminer les entiers naturels n qui, dans la division euclidienne de n par 4, ont un quotient égal à deux fois le reste.

« *En mathématiques, "évident" est le mot le plus dangereux.* »
Eric Temple Bell

Barème indicatif

- Exercice 1 : 4 points
- Exercice 2 : 4 points
- Exercice 3 : 4 points
- Exercice 4 : 5 points
- Exercice 5 : 3 points

Exercice 1.

1. Soit $c \in \mathbb{Z}^*$. Si c est un diviseur commun de a et b alors il existe deux entiers relatifs a' et b' tels que $a = a'c$ et $b = b'c$. Ainsi $7a + 9b = 7a'c + 9b'c = (7a' + 9b')c$ avec $7a' + 9b' \in \mathbb{Z}$. Donc $7a + 9b$ est multiple de c avec c non nul, par conséquent c divise $7a + 9b$.
2. Soit $c \in \mathbb{Z}^*$ un diviseur commun de $9n + 11$ et $5n + 6$. On a donc $c|(5(9n + 11) - 9(5n + 6))$ soit $c|1$. Cela implique donc que $c = \pm 1$: la fraction $\dfrac{9n + 11}{5n + 6}$ est irréductible.

Exercice 2.

$x^2 = 2xy + 15 \iff x(x - 2y) = 15$. Les diviseurs positifs de 15 sont : 1 ; 3 ; 5 ; 15.
Par ailleurs, x et y étant des entiers naturels on a $x \geqslant x - 2y$. Deux cas sont donc envisagés :

— Premier cas : $\begin{cases} x = 15 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 15 \\ y = 7 \end{cases}$

— Deuxième cas : $\begin{cases} x = 5 \\ x - 2y = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$

Conclusion : $S_{\mathbb{N}^2} = \{(15\,;\,7);\,(5\,;\,1)\}$.

Exercice 3.

Dans la division euclidienne de n par 3, les restes possibles sont $r = 0$, $r = 1$ et $r = 2$.

— **1^er^ cas :** si $r = 0$ alors $n = 3k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
$A = 3k(3k + 1)(6k + 1)$ donc $A = 3K$ avec $K = k(3k + 1)(6k + 1) \in \mathbb{Z}$ donc A est multiple de 3.

— **2^e^ cas :** si $r = 1$ alors $n = 3k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
$A = (3k + 1)(3k + 2)(6k + 3)$ donc $A = 3K'$ avec $K = (3k + 1)(3k + 2)(2k + 1) \in \mathbb{Z}$ donc A est multiple de 3.

— **3^e^ cas :** si $r = 2$ alors $n = 3k + 2$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
$A = (3k + 2)(3k + 3)(6k + 5)$ donc $A = 3K''$ avec $K'' = (3k + 2)(k + 1)(6k + 5) \in \mathbb{Z}$ donc A est multiple de 3.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{Z}$, A est multiple de 3.

Exercice 4.

1. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 9^{n+1} - 2^{n+1} \\ &= 9(u_n + 2^n) - 2^{n+1} \\ &= 9u_n + 9 \times 2^n - 2^{n+1} \\ &= 9u_n + (9 - 2) \times 2^n \\ &= 9u_n + 7 \times 2^n \end{aligned}$$

2. Soit $\mathscr{P}_n$: « u_n est divisible par 7 ».

   Initialisation : $u_0 = 0$ et $0 = 7 \times 0$ donc u_0 est divisible par 7 ce qui prouve que $\mathscr{P}_0$ *est bien vraie.*
   Hérédité : supposons $\mathscr{P}_k$ vraie pour un entier naturel k quelconque, c'est-à-dire u_k est divisible par 7 et montrons que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie c'est-à-dire u_{k+1} est aussi divisible par 7.
   Par hypothèse de récurrence, u_k est divisible par 7 donc il existe un entier naturel K tel que $u_k = 7K$. Or $u_{k+1} = 9u_k + 7 \times 2^k$ donc $u_{k+1} = 9 \times 7K + 7 \times 2^k$ soit $u_{k+1} = 7(9K + 2^k)$ avec $9K + 2^k \in \mathbb{Z}$ ce qui prouve que u_{k+1} est divisible par 7 et que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

<u>Conclusion :</u> $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire à partir du rang $n = 0$. On en déduit que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n, c'est-à-dire, u_n est divisible par 7.

Exercice 5.

D'après l'énoncé, il vient le système : $\begin{cases} n = 4q + r \\ 0 \leqslant r < 4 \end{cases}$ et $q = 2r$. On a donc : $\begin{cases} n = 9r \\ 0 \leqslant r < 4 \end{cases}$.
La condition $0 \leqslant r < 4$ impose que $r = 0$ ou $r = 1$ ou $r = 2$ ou $r = 3$:

- Si $r = 0$ alors $n = 0$.
- Si $r = 1$ alors $n = 9$.
- Si $r = 2$ alors $n = 18$.
- Si $r = 3$ alors $n = 27$.

<u>Conclusion</u> : $\boldsymbol{S = \{0\ ;\ 9\ ;\ 18\ ;\ 27\}}$.

★☆☆☆☆ Exercice 1 — 4 points

1. Soit n un entier relatif. Quels sont les restes possibles dans la division euclidienne de n par 3 ?
2. Démontrer que pour tout entier relatif n, $n(n^2-7)$ est divisible par 3.
   On pourra utiliser un tableau de congruence.

★★☆☆☆ Exercice 2 — 3 points

Calculer le reste dans la division euclidienne de 3^{2021} par 25.

★★★☆☆ Exercice 3 — 3 points

Démontrer que pour tout entier naturel n, 17 divise $2^{6n+3}+3^{4n+2}$

★★☆☆☆ Exercice 4 — 6 points

On veut montrer que l'équation $(E)\ :\ 3x^2+7y^2=10^{2n}$ avec $n\in\mathbb{N}$ n'a pas de solution entière.

1. On suppose que $(x\,;\,y)$ est solution de (E). On raisonne modulo 7.
   a. Vérifier que $100\equiv 2\ [7]$.
   b. En déduire que l'équation (E) peut se mettre sous la forme $3x^2\equiv 2^n\ [7]$.
2. Compléter le tableau suivant :

$x\equiv\ldots\ [7]$	0	1	2	3	4	5	6
$3x^2\equiv\ldots\ [7]$							

3. Étudier les restes dans la division euclidienne de 2^n par 7.
4. Conclure quant au problème posé.

★★★★☆ Exercice 5 — 4 points

Vous traiterez, au choix, l'une des deux questions suivantes :

1. Soit $a\in\mathbb{N}$. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $(a+1)^{n+1}-a(n+1)-1$ est multiple de a^2.
2. On considère l'équation (E) : $17x^2-31y^2=22$ où x et y sont deux entiers relatifs. En utilisant les congruences modulo 8, montrer que l'équation (E) n'a pas de solution.

★★☆☆☆ Exercice 1 — 5 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{v})$.
Les points A, B et C ont pour affixes respectives $a=-4$, $b=2$ et $c=4$.

On considère les trois points A′, B′ et C′ d'affixes respectives $a'=ja$, $b'=jb$ et $c'=jc$ où j est le nombre complexe $-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Calculer les formes algébriques de a', b' et c'.

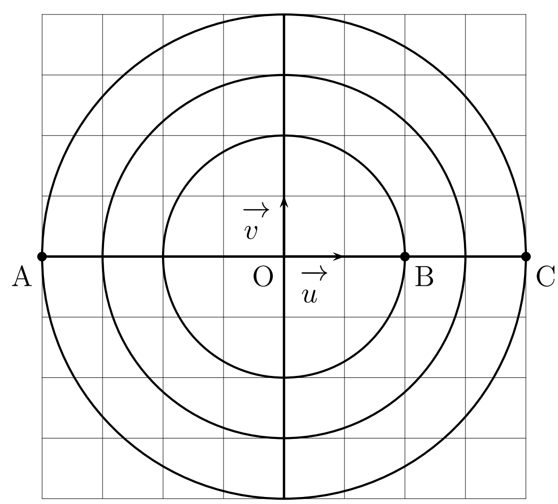
2. a. Déterminer le module et un argument de j.

b. En déduire le module et un argument de a', b' et c'.

3. Placer les points A′, B′ et C′ dans le repère donné ci-dessous.

4. Démontrer que les points A′, B′ et C′ sont alignés.

5. On note M le milieu du segment [A′C], N le milieu du segment [C′C] et P le milieu du segment [C′A]. Démontrer que le triangle MNP est isocèle.



★★★☆☆ Exercice 2 — 3.5 points

On se place dans un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{v})$.
On considère la suite (z_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $z_0=1$ et pour tout entier naturel n,

$$z_{n+1}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)z_n$$

1. Déterminer le module et un argument de $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\mathrm{i}}{2}$.

2. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a $|z_n|=1$ et $\arg(z_n)=-\dfrac{n\pi}{6}\ [2\pi]$ autrement dit :

$$z_n=\left[1\,;\,-\frac{n\pi}{6}\right].$$

3. Pour quelles valeurs de n, z_n est-il réel ? Justifier.

★★★☆☆ Exercice 3 **1.5 point**

Vous traiterez au choix une des trois questions suivantes.

1. Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ et $c = \dfrac{z+1}{z-1}$.

Démontrer que l'ensemble des nombres complexes z tels que c soit imaginaire pur est l'ensemble $\mathbb{U}$ privé du complexe d'affixe 1.

D'après MPSI, Lycée Montaigne, Bordeaux.

2. Soit a, b et c trois nombres complexes de module 1.

Démontrer que $|a+b+c| = |ab+ac+bc|$.

D'après MPSI, Lycée Saint-Louis, Paris.

3. Soit $(z\,;\,z') \in \mathbb{C}^2$. Montrer que $|z|^2 + |z'|^2 = \dfrac{1}{2}\left(|z+z'|^2 + |z-z'|^2\right)$.

D'après MPSI, Lycée Louis Le Grand, Paris.

Exercice 1.

Les points A, B et C ont pour affixes respectives $a=-4$, $b=2$ et $c=4$.

1. $a'=ja$ donc $a'=-4\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ soit $a'=2-2\sqrt{3}\mathrm{i}$.

De même $b'=-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $c'=-2+2\sqrt{3}\mathrm{i}$.

2. a. $|j|=1$ et $\arg(j)=\frac{2\pi}{3}$ par exemple.

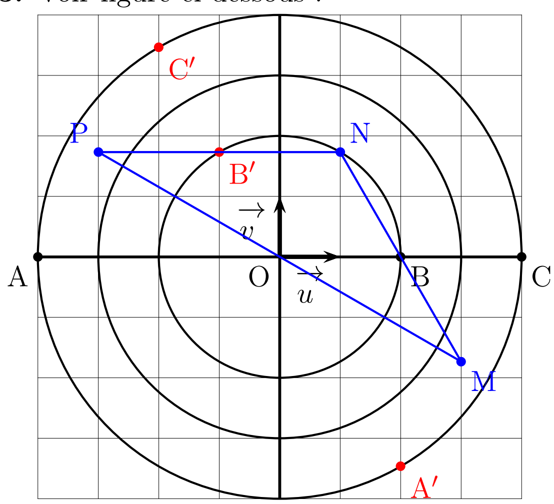
b. $|a'|=|ja|=|j||a|=1\times|-4|$ donc $|a'|=4$.

De plus $\arg(a')=\arg(j)+\arg(a')\ [2\pi]$. Or $\arg(j)=\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ et $\arg(a')=\pi\ [2\pi]$.

Ainsi $\arg(a')=\frac{5\pi}{3}$ par exemple.

De même $|b'|=2$ et $\arg(b')=\frac{2\pi}{3}$ par exemple et $|c'|=4$ et $\arg(c')=\frac{2\pi}{3}$.

3. Voir figure ci-dessous :



$|a'|=4$ donc A′ est sur le cercle de centre O et de rayon 4 et on a $Re\,(a')=2$ et $Im\,(a')<0$, on peut donc placer A′

$|b'|=2$ donc B′ est sur le cercle de centre O et de rayon 2 et on a $Re\,(b')=-1$ et $Im\,(b')>0$, on peut donc placer B′

$|c'|=4$ donc C′ est sur le cercle de centre O et de rayon 4 et on a $Re\,(c')=-2$ et $Im\,(c')>0$, on peut donc placer C′

4. $a'=-c'$ donc A′ et C′ sont symétriques par rapport à O alors O, A′ et C′ sont alignés

$\arg(b')=\arg(c')=\frac{2\pi}{3}(2\pi)$ donc $\overrightarrow{OB'}$ et $\overrightarrow{OC'}$ sont colinéaires d'où O, B′ et C′ sont alignés. Finalement O, A′, B′ et C′ sont alignés.

5. $z_{\mathrm{M}}=\frac{a'+c}{2}=3-\mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_{\mathrm{N}}=\frac{c'+c}{2}=1+\mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_{\mathrm{P}}=\frac{c'+a}{2}=-3+\mathrm{i}\sqrt{3}$

MNP semble isocèle en N

$MN=|z_{\mathrm{N}}-z_{\mathrm{M}}|=\left|2-2\mathrm{i}\sqrt{3}\right|=4$ et $PN=|z_{\mathrm{N}}-z_{\mathrm{P}}|=|4|=4$

On a $MN=NP$ donc MNP est bien isocèle en N

Exercice 2.

1. $\left|\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right|=1$ et $\arg\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$ soit $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\mathrm{i}}{2}=\left[1\,;\,-\dfrac{\pi}{6}\right]$.

2. Soit $\mathscr{P}_n$: « $z_n=\left[1\,;\,-\dfrac{n\pi}{6}\right]$ ».

   Initialisation : $z_0=1$ donc $|z_0|=1$ et $\arg(1)=0\ [2\pi]$ car 1 est un réel strictement positif ce qui prouve que $\mathscr{P}_0$ *est bien vraie.*

   Hérédité : supposons $\mathscr{P}_k$ vraie pour un entier naturel k quelconque, c'est-à-dire $z_k=\left[1\,;\,-\dfrac{k\pi}{6}\right]$ et montrons que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie soit $z_{k+1}=\left[1\,;\,-\dfrac{(k+1)\pi}{6}\right]$

   Par hypothèse de récurrence, $z_k=\left[1\,;\,-\dfrac{k\pi}{6}\right]$.

   Or $z_{k+1}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right)z_k$.

   On a $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\mathrm{i}}{2}=\left[1\,;\,-\dfrac{\pi}{6}\right]$ donc

   $z_{k+1}=\left[1\,;\,-\dfrac{\pi}{6}\right]\times\left[1\,;\,-\dfrac{k\pi}{6}\right]$ soit $z_{k+1}=\left[1\times 1\,;\,-\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{k\pi}{6}\right]$ soit $z_{k+1}=\left[1\,;\,-\dfrac{(k+1)\pi}{6}\right]$.

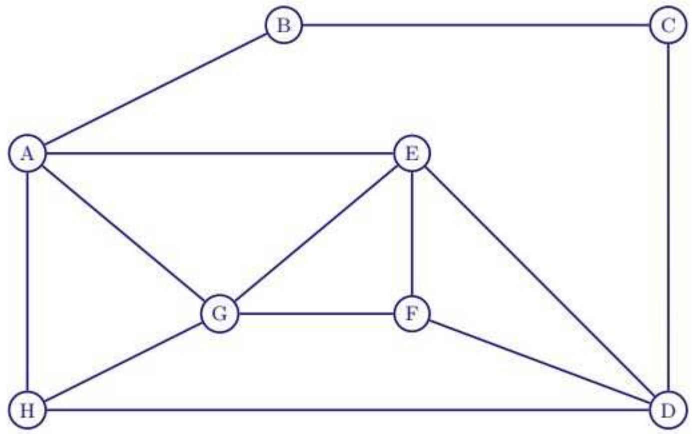
   On en déduit que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

   <u>Conclusion :</u> $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire à partir du rang $n=0$. On en déduit que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

3. z_n réel $\iff -\dfrac{n\pi}{6}\equiv 0\ [\pi] \iff -\dfrac{n\pi}{6}=k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ et $k\leqslant 0$ d'où $n=-6k$ c'est-à-dire n multiple de 6.

Exercice 1.

Le graphe Γ ci-dessous, modélise le plan d'un parc de loisirs. Les arêtes du graphe représentent les allées du parc et les sommets les attractions.



1. Donner l'ordre du graphe puis le degré de chacun des sommets. En déduire le nombre d'arêtes de ce graphe.
2. On range les sommets par ordre alphabétique. Compléter la matrice d'adjacence M associée au graphe :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. On donne la matrice M^3 :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 5 & 10 & 5 & 8 & 8 \\ 5 & 0 & 3 & 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 5 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 5 & 2 & 10 & 8 & 4 & 9 \\ 10 & 2 & 2 & 10 & 6 & 7 & 10 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 8 & 7 & 4 & 9 & 4 \\ 8 & 2 & 4 & 4 & 10 & 9 & 6 & 9 \\ 8 & 2 & 1 & 9 & 4 & 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

   a. Donner, en justifiant, le nombre de chaînes de longueur 3 reliant B à F.

   b. Les citer toutes.

4. Déterminer en justifiant si ce graphe est :

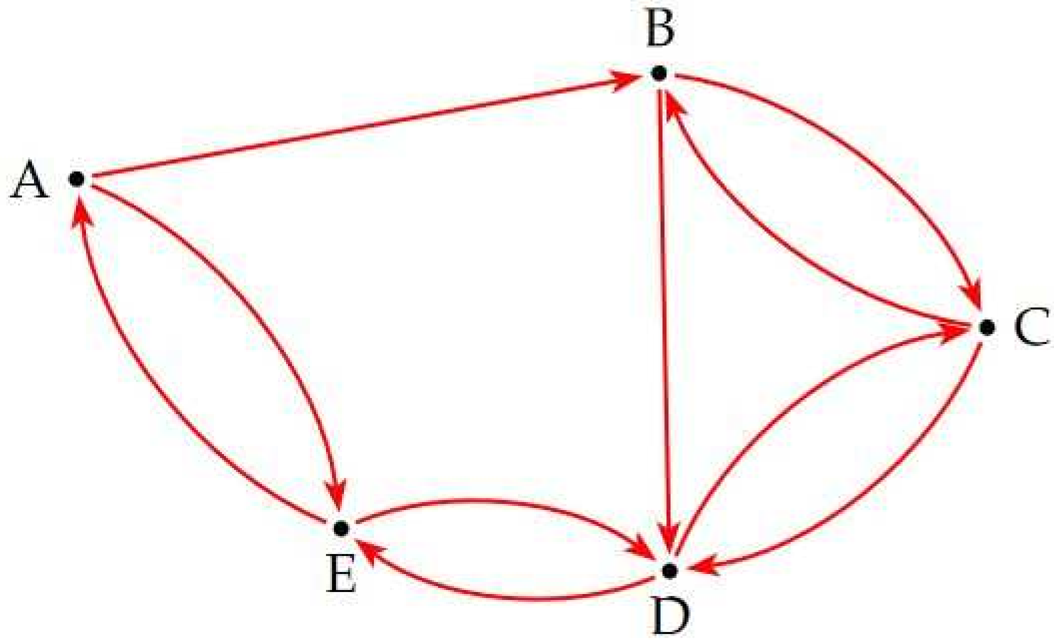
   a. complet ;

   b. connexe.

5. En justifiant la réponse, dire si ce graphe admet une chaîne eulérienne. Si oui, donner une telle chaîne.
6. Le responsable du parc souhaite réorganiser le nettoyage des allées, par un circuit commençant et finissant par le sommet A et qui passe par toutes les allées une et une seule fois.
   Quel est le nombre minimal d'allées qu'il faudrait ajouter pour obtenir un tel circuit ? Préciser les extrémités.

Exercice 2.

Une exposition est organisée dans un parc. On décide d'y instaurer un plan de circulation : certaines allées sont à sens unique, d'autres sont à double sens. Le graphe ci-dessous modélise la situation :



1. Donner la matrice d'adjacence M de ce graphe (dans l'ordre alphabétique).
2. Combien y a-t-il de chemins de longueur 4 permettant de se rendre de C à D ? Les donner tous.

★☆☆☆☆ **Exercice 1.**

On donne $z = \dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$.

1. Écrire z sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

2. z^{2021} est-il un imaginaire pur ? Justifier.

★★☆☆☆ **Exercice 2.**

Résoudre :

1. $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ dans $]-\pi\,;\,\pi]$.

2. $\sin(2x) < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ dans $[0\,;\,\pi[$.

★★★☆☆ **Exercice 3**

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout entier naturel n, par

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n.$$

1. **a.** Vérifier que $1 + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

b. En déduire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

2. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$z_n = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{6}}.$$

3. Pour tout entier naturel n, on pose considère la suite (d_n) définie par $d_n = |z_n|$.

a. Déterminer la nature et la limite de la suite (d_n).

b. Soit p un entier naturel quelconque.
Démontrer l'existence d'un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$ on a $d_n > 10^p$.

c. Déterminer, en résolvant une inéquation, le plus petit entier naturel n_0 dans le cas précédent si $p = 5$.

★★★☆☆ **Exercice 4.**

1. Soit x un réel. Démontrer l'égalité : $\sin(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$.

2. Les questions suivantes sont indépendantes et vous pourrez utiliser la question **1.**

a. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin^2(x)\sin(2x) = -\dfrac{1}{4}\sin(4x) + \dfrac{1}{2}\sin(2x)$.

b. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+\mathrm{i})^n - (1-\mathrm{i})^n = 2\mathrm{i}\left(\sqrt{2}\right)^n \sin\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$.

Exercice 1.

On donne $z = \dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$.

1. $z = -\mathrm{i}$ donc $z = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.
2. $\arg(z^{2021}) = 2021\arg(z)$ donc $\arg(z^{2021}) = -\dfrac{2021\pi}{2}$ donc $\arg(z^{2021}) = -\dfrac{\pi}{2}$ ce qui prouve que z^{2021} est imaginaire pur.

Exercice 2.

1. $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ dans $]-\pi\,;\,\pi]$.
   $x \in]-\pi\,;\,\pi] \iff X = x - \dfrac{\pi}{3} \in \left]-\dfrac{4\pi}{3}\,;\,\dfrac{2\pi}{3}\right]$.
   Dans $\left]-\dfrac{4\pi}{3}\,;\,\dfrac{2\pi}{3}\right]$, $\cos(X) = \dfrac{1}{2} \iff X = -\dfrac{\pi}{3}$ ou $X = \dfrac{\pi}{3}$. On a donc $x = 0$ ou $x = \dfrac{2\pi}{3}$.
2. $\sin(2x) < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ dans $[0\,;\,\pi[$.
   $x \in [0\,;\,\pi[\iff X = 2x \in [0\,;\,2\pi[$.
   Dans $[0\,;\,2\pi[$, $\sin(X) < \dfrac{\sqrt{2}}{2} \iff X \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{4}\,;\,2\pi\right[$.
   D'où $x \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{8}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{8}\,;\,\pi\right[$.

Exercice 3.

1. a. $\left|1+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right|^2 = 1^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{3}$ donc $\left|1+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right| = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; $1+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \text{ß}\dfrac{1}{2}\right)$

   On cherche θ tel que $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ donc $\theta = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

   On a donc $1 + \text{ß}\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{e}^{\text{ß}\frac{\pi}{6}}$.

   b. $z_1 = \left(1 + \text{ß}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) z_0 = \left(1 + \text{ß}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \times 1 = 1 + \text{ß}\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{e}^{\text{ß}\frac{\pi}{6}}$

   $z_2 = \left(1 + \text{ß}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) z_1 = \left(1 + \text{ß}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \times \left(1 + \text{ß}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{e}^{\text{ß}\frac{\pi}{6}} \times \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{e}^{\text{ß}\frac{\pi}{6}} = \dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{\text{ß}\frac{\pi}{3}}$

2. Soit P_n la proposition $z_n = \left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{6}}$

   - Pour $n = 0$: $z_0 = 1$ et $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\times 0\times\frac{\pi}{6}} = 1$; donc P_0 est vraie.

- On suppose P_k vraie pour $k \geqslant 0$, c'est-à-dire $z_k = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^k \mathrm{e}^{ßk\frac{\pi}{6}}$

$$z_{k+1} = \left(1 + ß\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_k = \frac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{e}^{ß\frac{\pi}{6}} \times \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^k \mathrm{e}^{ßk\frac{\pi}{6}} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^{k+1} \mathrm{e}^{ß(k+1)\frac{\pi}{6}}$$

- La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

Pour tout entier naturel n, $z_n = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{6}}$.

3. a. Pour tout entier naturel n on a $d_n = |z_n|$ donc $d_n = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^n$. d_n s'écrit sous la forme $a \times q^n$ avec $d_0 = 1$ et $q = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ donc la suite (d_n) est la suite géométrique de premier terme $d_0 = 1$ et de raison $q = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Comme $\frac{2\sqrt{3}}{3} > 1$ on en déduit que la limite de la suite (d_n) est $+\infty$.

b. La suite (d_n) a pour limite $+\infty$: il existe donc un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à 10^p.

c. $d_n > 10^5 \iff \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^n > 10^5 \iff n \ln\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) > \ln(10^5) \iff n > \dfrac{\ln(10^5)}{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)}$ et on en déduit que $n_0 = 81$.

Exercice 4.

1. Soit x un réel. On a $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = \cos(-x) + \mathrm{i}\sin(-x) = \cos(x) - \mathrm{i}\sin(x)$.
Par différence, on en déduit que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = 2\mathrm{i}\sin(x)$ donc $\sin(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$.

2. Résultat annoncé, pas de difficulté particulière.

3. On a : $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{ß\frac{\pi}{4}}$ et $1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-ß\frac{\pi}{4}}$.
Ainsi :

$$\begin{aligned}
(1+\mathrm{i})^n - (1-\mathrm{i})^n &= \left(\sqrt{2}\right)^n \mathrm{e}^{ß\frac{n\pi}{4}} - \left(\sqrt{2}\right)^n \mathrm{e}^{-ß\frac{n\pi}{4}} \\
&= \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\mathrm{e}^{ß\frac{n\pi}{4}} - \mathrm{e}^{-ß\frac{n\pi}{4}}\right) \\
&= 2ß\left(\sqrt{2}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 1.

Les deux questions sont indépendantes.

1. Déterminer le PGCD de 1 958 et 4 539 par la méthode de votre choix.
2. Démontrer que pour tout entier relatif n, les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux.

Exercice 2.

Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels $(a\,;\,b)$ tels que $\text{PGCD}(a\,;\,b) = 13$ et $ab - b^2 = 3549$ avec $a > b$.

Exercice 3.

1. Démontrer que 59 et 27 sont premiers entre eux.
2. À l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer un couple d'entiers relatifs $(x\,;\,y)$ tel que : $59x+27y = 1$.

Exercice 4.

1. On considère l'équation

$$(\mathcal{E}) \quad : \quad 7x - 5y = 1,$$

   où $(x,\ y)$ est un couple d'entiers relatifs.

   a. Démontrer que cette équation admet au moins un couple solution.

   b. Vérifier que le couple $(3\,;\,4)$ est solution de l'équation $(\mathcal{E})$.

   c. Résoudre l'équation $(\mathcal{E})$.

2. Une boîte contient 25 jetons, des rouges, des verts et des blancs. Sur les 25 jetons, il y a x jetons rouges et y jetons verts.
   Sachant que $7x - 5y = 1$, quels peuvent être les nombres de jetons rouges, verts et blancs ?

Exercice 1.

1. On utilise l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} 4539 &= 1958 \times 2 + 623 \\ 1958 &= 623 \times 3 + 89 \\ 623 &= 89 \times 7 + 0 \end{aligned}$$

Le dernier reste non nul est 89 donc le PGCD de 1 958 et 4 539 est 89.

2. Pour tout entier relatif n, on a $5(14n+3) - 14(5n+1) = 1$. D'après le théorème de Bézout, on en déduit donc que les entiers relatifs $14n+3$ et $5n+1$ sont bien premiers entre eux.

Exercice 2.

$\text{PGCD}(a\,;\,b) = 13$ donc il existe deux entiers naturels a' et b' premiers entre eux tels que $a = 13a'$ et $b = 13b'$.
$ab - b^2 = 3549 \iff 169a'b' - 169b'^2 = 3549 \iff a'b' - b'^2 = 21 \iff b'(a' - b') = 21$. Les diviseurs positifs de 21 sont : 1 ; 3 ; 7 ; 21.

- Si $b' = 1$ alors $a' - b' = 21$ donc $a' = 22$ qui est bien premier avec $b' = 1$.
- Si $b' = 3$ alors $a' - b' = 7$ donc $a' = 10$ qui est bien premier avec $b' = 3$.
- Si $b' = 7$ alors $a' - b' = 3$ donc $a' = 10$ qui est bien premier avec $b' = 3$.
- Si $b' = 21$ alors $a' - b' = 1$ donc $a' = 22$ qui est bien premier avec $b' = 21$.

Conclusion : les solutions sont donc les couples $(130\,;\,39)$, $(286\,;\,273)$, $(130\,;\,91)$ et $(286\,;\,13)$.

Exercice 3.

1. Pour démontrer que 59 et 27 sont premiers entre eux, on démontre que leur PGCD est égal à 1. On utilise l'algorithme d'Euclide.

$$\begin{aligned} 59 &= 27 \times 2 + 5 \\ 27 &= 5 \times 5 + 2 \\ 5 &= 2 \times 2 + 1 \\ 2 &= 2 \times 1 + 0 \end{aligned}$$

Le dernier reste non nul est 1 donc 59 et 27 sont bien premier entre eux.

2. On utilise de nouveau l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} 1 &= 5 - 2 \times 2 \\ 1 &= 5 - 2 \times (27 - 5 \times 5) \\ 1 &= 11 \times 5 - 2 \times 27 \\ 1 &= 11(59 - 27 \times 2) - 2 \times 27 \\ 1 &= 11 \times 59 - 24 \times 27 \end{aligned}$$

Conclusion : un couple d'entiers relatifs $(x\,;\,y)$ tel que : $59x + 27y = 1$ est $(11\,;\,-24)$.

Exercice 4.

1. **a.** 7 et 5 sont deux nombres premiers, leur PGCD est donc égal à 1. D'après le théorème de Bézout, l'équation $(\mathcal{E})$ admet donc au moins un couple solution.

   b. $7 \times 3 - 5 \times 4 = 1$ donc le couple $(3\,;\,4)$ est solution de l'équation $(\mathcal{E})$.

   c. On a donc : $7x - 5y = 1$ et $7 \times 3 - 5 \times 4 = 1$. On soustrait ces deux égalités, il vient l'égalité $(E')\ :\ 7(x-3) = 5(y-4)$. On a donc 7 qui divise $5(y-4)$. Or 7 et 5 sont premiers entre eux, donc d'après le lemme de Gauss, 7 divise $y-4$. Il existe donc un entier k tel que $y - 4 = 7k$ soit $y = 7k + 4$.
   On remplace $y-4$ par $5k$ dans (E') il vient : $7(x-3) = 5 \times 7k$ donc il vient alors $x - 3 = 5k$ donc $x = 5k + 3$.
   On vérifie : $7(5k+3) - 5(7k+4) = 1$. On en déduit que les couples d'entiers solutions de $(\mathcal{E})$ sont les couples $(5k+3\,;\,7k+4)$ où k désigne un entier relatif.

2. Soit x le nombre de jetons rouges, y le nombre de jetons verts et z le nombre de jetons blancs. On a donc $x + y + z = 25$ et $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ et $z \geqslant 0$.
   De plus $7x - 5y = 1$, on en déduit donc que $x = 5k + 3$ et $y = 7k + 4$ d'après la question précédente et donc $k \geqslant 0$.
   Ainsi $x + y = 12k + 7$ et on doit avoir $x + y \leqslant 25$ ce qui impose que $12k + 7 \leqslant 25$ soit $k \leqslant \dfrac{3}{2}$ donc les seules valeurs qui conviennent sont $k = 0$ ou $k = 1$:

   - Si $k = 0$ on en déduit que $x = 3$, $y = 4$ et donc $z = 18$.
   - Si $k = 1$ on en déduit que $x = 8$, $y = 11$ et donc $z = 6$.

   Conclusion : on peut donc avoir 3 jetons rouges, 4 jetons verts et 18 jetons blancs ou 8 jetons rouges, 11 jetons verts et 6 jetons blancs.