

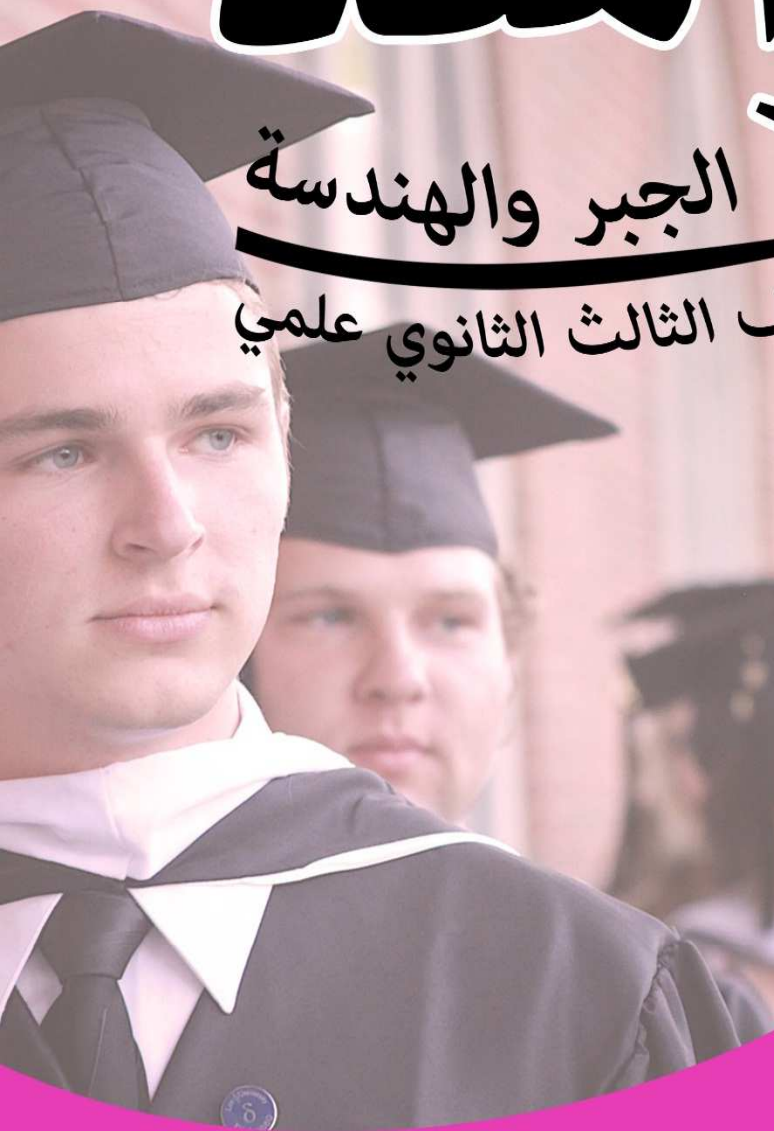
نسخة مجلدة

الراشد

في

الجبر والهندسة

للفف الثالث الثانوي علمي



إعداد:

أ. فؤاد حسن راشد العبيسي

مدرس الثانوية العامة لمادة الرياضيات
بمدرسة الميثاق - الموهوبين
ومدارس صنعاء الاهلية

قريباً
كتاب الراشد في
التفاضل والتكامل

هذا الكتاب:

- ١) يحتوي على شرح وافٍ للمادة العلمية بصورة مبسطة بعيداً عن الإسهاب.
- ٢) يحتوي على العدد الكافي من الأمثلة والتمارين المحلولة.
- ٣) يحتوي على تمارين متنوعة محلولة كثيراً ما ترد في الامتحانات النهائية.
- ٤) قريباً تطبيق للهواتف الذكية (Android) لجميع القوانين الواردة في هذا الكتاب.

الراشد في الرياضيات.. معلم بين يديك

للحصول على النسخة بالجملة أو التجزئة التواصل مع المؤلف ٧٧١٤٠٣٧٠٧



معرض لخدمات الطباعة والإعلان
Tel, 774955495-770904771
facebook www.facebook.com/marsaservice

الصف الطباعي والتنسيق: احمد فؤاد العبسي

ت: (٧٧٤٣٥٣٠٢٧)

الوحدة الأولى: الأعداد المركبة



قوانين قد تحتاجها في هذه الوحدة

$${}^{\sim} \times {}^{\sim} p = {}^{\sim} ({}^{\sim} p) \quad (١)$$

$${}^{\sim} \left(\frac{p}{b} \right) = \frac{{}^{\sim} p}{{}^{\sim} b}, {}^{\sim} (b \times p) = {}^{\sim} b \times {}^{\sim} p \quad (٢)$$

$$(٣) \quad (س - ص) (س + ص) = س^٢ - ص^٢ \quad \text{والعكس صحيح}$$

$$(٤) \quad (س \mp ص) (س \mp ص) = س^٢ \mp ٢سص + ص^٢$$

$$(٥) \quad جا^٢ ه + جتا^٢ ه = ١$$

$$(٦) \quad جا^٢ ه = ٢ جا ه جتا ه$$

$$(٧) \quad جتا^٢ ه = ٢ جتا ه جا ه - جا^٢ ه$$

$$(٨) \quad جتا^٢ ه = ١ - ٢ جا ه جتا ه$$

$$(٩) \quad جتا^٢ ه = ٢ جتا ه جا ه - ١$$

$$(١٠) \quad p = {}^{\sim} \left(\sqrt{{}^{\sim} p} \right)$$

$$(١١) \quad {}^{\sim} p \times {}^{\sim} p = {}^{\sim} + {}^{\sim} p$$

$$(١٢) \quad \frac{{}^{\sim} p}{{}^{\sim} p} = {}^{\sim} - p \times {}^{\sim} p = {}^{\sim} - {}^{\sim} p$$

$$(١٣) \quad \text{إذا كان } \frac{p}{s} = \frac{p}{s} \text{ فإن } s \times p = s \times p \quad \text{(قاعدة الضرب التبادلي)}$$

$$(١٤) \quad \text{تحليل المقدار الثلاثي المربع الكامل}$$

$$= (\text{جذر الأول} \pm \text{جذر الاخير})^٢$$

(١٥) مميز المعادلة $س^٢ + ب س + ج = ٠$ هو $\Delta = ب^٢ - ٤ ج$

وجذريها $س = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢}$

(١٦) في المثلث القائم جتاه = $\frac{\text{الجوار}}{\text{الوتر}}$ ، جا ه = $\frac{\text{اللقابل}}{\text{الوتر}}$ ، ظاه = $\frac{\text{اللقابل}}{\text{الجوار}}$

ه	ه - π
- ه	ه + π

(١٧) قيمة الزاوية حسب موقعها في الربع

(١٨) النسبة المثلثية للزاوية الشهيرة

النسبة / الزاوية	٣٠°	٤٥°	٦٠°
جاه	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
جتاه	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{٢}$
ظاه	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	١	$\sqrt{٣}$

(١٩) الزوايا التي تؤل إلى مشهورة $١٢٠ = ١٨٠ - ٦٠$ ، $١٣٥ = ١٨٠ - ٤٥$

$٢٢٥ = ١٨٠ + ٤٥$ ، $٢٤٠ = ١٨٠ + ٦٠$ ، $٢١٠ = ١٨٠ + ٣٠$

$٣٣٠ = ٣٦٠ - ٣٠$ ، $٣٠٠ = ٣٦٠ - ٦٠$

(٢٠) $\text{جتا}(\pm \theta) = \text{جتا} \theta \mp \text{جا} \theta$

$\text{جا}(\pm \theta) = \pm \text{جا} \theta \mp \text{جتا} \theta$

$٢ \text{جتا} + \text{جتا} \theta = \frac{\text{جتا} + \theta}{٢} \text{جتا} - \frac{\text{جتا} - \theta}{٢} \text{جتا} = \text{جتا} - \text{جتا} \theta$ ، $٢ \text{جتا} + \theta = \frac{\text{جتا} + \theta}{٢} \text{جتا} - \frac{\text{جتا} - \theta}{٢} \text{جتا} = \text{جتا} - \text{جتا} \theta$

$٢ \text{جا} + \text{جا} \theta = \frac{\text{جا} + \theta}{٢} \text{جا} - \frac{\text{جا} - \theta}{٢} \text{جا} = \text{جا} - \text{جا} \theta$ ، $٢ \text{جا} + \theta = \frac{\text{جا} + \theta}{٢} \text{جا} - \frac{\text{جا} - \theta}{٢} \text{جا} = \text{جا} - \text{جا} \theta$

الدرس الأول: الجزء التخيلي للعدد المركب

عند حل المعادلة $z^2 + 1 = 0$ نجد أن $z^2 = -1 \Leftrightarrow z = \pm \sqrt{-1}$ ومعروف أن $\sqrt{-1}$ غير موجود، ولذلك سوف نضع $z = \sqrt{-1}$ ونعني به i ، وهكذا $\sqrt{-1} = i$ ، $\sqrt{-1} = -i$ ، وإذا كان $z = \sqrt{-1}$ فإن $z^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$ ، $z^3 = z^2 \times z = -1 \times i = -i$ ، $z^4 = z^3 \times z = -i \times i = 1$.

وبصورة عامة:

$$z^n = i^n, n < 4 \text{ هو } (z) \text{ باقي قسمة } n \div 4$$

فمثلاً:

$$z^0 = 1, z^1 = i, z^2 = -1, z^3 = -i, z^4 = 1, z^5 = i, z^6 = -1, z^7 = -i, z^8 = 1, z^9 = i, z^{10} = -1, z^{11} = -i, z^{12} = 1, \dots$$

حقق ذلك باستخدام القاعدة السابقة.

تمارين:

(١) أوجد الناتج:

(أ) i^4 **الحل:** $(i^4) = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

(ب) i^{16} **الحل:** $i^{16} = (i^4)^4 = 1^4 = 1$

(ج) $\sqrt{-5}$ **الحل:** $\sqrt{-5} = \sqrt{-1 \times 5} = i\sqrt{5}$

(د) $(\sqrt{-3})^4$ **الحل:** $(\sqrt{-3})^4 = (i\sqrt{3})^4 = i^4 \times 3^2 = 1 \times 9 = 9$

أ. فؤاد حسن راشد العبيسي



(ج) t^{10} **الحل:** $3 = 4 \div 10$ والباقي 3 $t^{10} = t^3 = t^7$ $t^7 = t^3 = t^0 = 1$

(2) أكمل الجدول:

t^4	t^3	t^2	t
...

الحل: بالترتيب: $t, -t, 1, -1$

(3) أوجد ناتج كل من:

(أ) t^{102} **الحل:** $20 = 4 \div 102$ والباقي 2 $t^{102} = t^2 = t^{100} = 1$

(ب) $\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{2^7} = 2^2 = 4$ **الحل:** $\sqrt[3]{128} = 4$

(ت) t^{2+28} **الحل:** $t^{2+28} = t^{30} = t^{30 \div 3} = t^{10} = 1$

(4) أثبت أن: $t^3 + t^2 + t + 1 = 0$

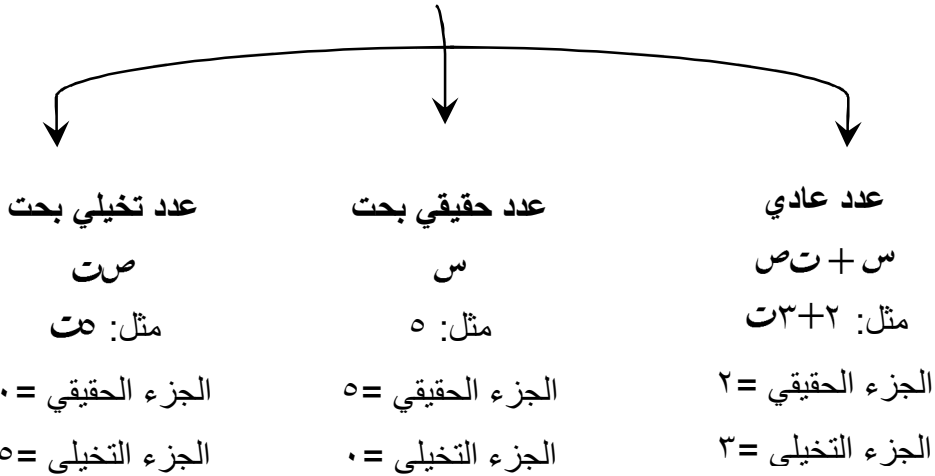
الحل: $t^3 + t^2 + t + 1 = 0$

$0 = (t^3 - 1) - (t^2 - 1) + (t - 1) = 0$

الدرس الثاني: العدد المركب بالصورة الجبرية

تعريف العدد المركب الجبري: هو كل عدد على صورة $s + t\sqrt{-1}$ حيث

$s, t \in \mathbb{R}$ ، $\sqrt{-1} = i$ ، وينقسم إلى:



مما سبق نجد أن:

العدد الحقيقي البحت هو العدد الذي جزئه التخيلي = صفر.

العدد التخيلي البحت هو العدد الذي جزئه الحقيقي = صفر.

مثال ١

اكتب الأعداد المركبة التالية بالصورة $s + t\sqrt{-1}$ ثم حدد الجزء الحقيقي والتخيلي:

(أ) $\sqrt{36} + \sqrt{-36}$ **الحل:** $6 + 6i = 6 + 6\sqrt{-1}$

الحقيقي = 6 والتخيلي = 6

(ب) $1 - 2i$ **الحل:** $1 - 2i = 1 - 2\sqrt{-1}$

الحقيقي = 1 والتخيلي = -2



ت) $\sqrt{-4} - ت$ **الحل:** $٢ - ت = ت$

الحقيقي = صفر والتخيلي = ١

ث) $٢ - ٣ - ت = ٤ - ٣ - ١ - ت$ **الحل:** $٣ - ٥ = ٤ - ٣ - ١ - ت$

الحقيقي = ٥ - والتخيلي = ٣ -

ج) $\sqrt{٥٠} - ت$ **الحل:** $\sqrt{٥٠} = ٢ \times ٢ \times ٥ = ٢ \sqrt{٥٠}$

الحقيقي = صفر والتخيلي = $\sqrt{٥٠}$

ح) $٧ - ت^٣$ **الحل:** $٧ - ت$

الحقيقي = صفر والتخيلي = ٧ -

خ) $(\sqrt{-٢})^\circ - (\sqrt{-٣})^\circ$ **الحل:**

$٣ \times (\sqrt{-٢})^\circ - ٢ \times (\sqrt{-٢})^\circ \times ت^\circ$

$٩٧٢ - ت - ١٢٨ - ت = ٨٤٤ - ت$

الحقيقي = صفر والتخيلي = $\sqrt{٨٤٤}$

مثال ٢

إذا كان $٤ = ٢ + ٥ + ت$ حقيقي بحث، أوجد قيمة أ.

الحل:

العدد $٤ = ٢ + ٥ + ت$ \therefore العدد حقيقي بحث \therefore التخيلي = صفر

$\therefore ٢ - ت = ٠ \Leftarrow ١ = ٢ \Leftarrow ١ = \frac{١}{٢}$

مثال ۳

إذا كان $٤ = ٢٢س - ٤ب + ٩$ تخيلي بحث. أوجد قيمة ب

الحل:

∴ العدد تخيلي بحت ∴ الجزء الحقيقي = صفر

$$\frac{9}{2} = \text{ب} \Leftarrow 9 - = \text{ب} \Leftarrow 1 = 9 + \text{ب} \Leftarrow$$

مثال ٤

اكتب العدد بصورة $s + t$ ص:

$$(أ) \quad 1 + \frac{2}{n} \quad \text{الحل:} \quad -n^2 + 1 = 1 + n^2 - n^2$$

(ب) $1 - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{-n} = 1 - \frac{1}{-n} = 1 + \frac{1}{n}$ الحل:



الدرس الثالث: مرافق العدد المركب بالصورة $s + t$

قاعدة

إذا كان $e = s + t$ فإن مرافقه هو $\bar{e} = s - t$ ، بمعنى أنه لإيجاد مرافق العدد المركب بالصورة الجبرية نغير إشارة الجزء التخيلي فيه.

أمثلة

(١) أوجد \bar{e} في كل مما يأتي:

(١) $e = 5$ **الحل:** $\bar{e} = 5$

أي أن مرافق العدد الحقيقي البحت هو نفسه.

(ب) $e = 2 + 2i$ **الحل:** $e = 2 - 2i \Leftarrow \bar{e} = 2 + 2i$

(ت) $e = (2 - i)^4$ **الحل:** $e = 4i \Leftarrow \bar{e} = 1 \times 4 = 4$

$\therefore \bar{e} = 4$

(ث) $e = \sqrt{4 - i} + t$ **الحل:** $e = 2 + t = 3 \therefore \bar{e} = 3 - t$

(ج) $e = t^{94}$ **الحل:** $e = t^2 \Leftarrow \bar{e} = 1 \therefore 1 - t = 1$

(ح) $e = 3 + \frac{1}{t}$ **الحل:** $e = 3 - t \therefore \bar{e} = 3 + t$

(خ) $e = \sqrt{5 - t} + 1$ **الحل:** $e = (1 + \sqrt{5 - t}) - t$

$\therefore \bar{e} = (1 + \sqrt{5 - t}) + t$

الدرس الرابع: العمليات الحسابية للعدد المركب

الجبري

أولاً: جمع الأعداد الجبرية

لجمع عددين مركبين بالصورة الجبرية نجمع الجزء الحقيقي في العدد الأول مع الجزء الحقيقي في العدد الثاني، نجمع الجزء التخيلي في العدد الأول مع الجزء التخيلي في العدد الثاني مع مراعاة قواعد الإشارات.

مثال:

أوجد ناتج جمع الأعداد التالية:

$$(١) \quad ١٤ - ٢ = ١٤، \quad ٣ - ٤ = ٣ - ٤$$

$$(٢) \quad ١٤، ٥ = ١٤، ٥ = ١٤ - ١٦$$

الحل:

(١) أولاً نبسط الأعداد:

$$١٤ - ٢ = ١٤، \quad ٣ - ٤ = ٣ - ٤$$

$$(١٤ - ٢) + (٣ - ٤) = ١٤ + ٣ - ٢ - ٤$$

$$١٤ + ٣ - ٢ - ٤ = ١٤ - ٣$$

$$(٢) \quad ١٤، ٥ = ١٤، ٥ = ١٤ - ١٦$$

$$١٤ + ٥ = ١٤ - ١٦ + ٥ = ١٤ - ١١ = ٣$$

ثانياً: طرح الأعداد المركبة

لنطرح عددين مركبين بالصورة الجبرية نضع العددين بالصورة $١ع - ٢ع$ ، ثم نستخدم طريقة الجمع نفسها، مع مراعاة تغيير إشارة $٢ع$.

مثال:

أوجد $١ع - ٢ع$ إذا كان: $١ع = ٣ - ٢ت$ ، $٢ع = ٤ - ١ت$

الحل:

$$(١ع - ٢ع) = (٣ - ٢ت) - (٤ - ١ت)$$

$$١ع - ٢ع = ٣ - ٢ت - ٤ + ١ت$$

$$١ع - ٢ع = ١ + ت$$

ثالثاً: ضرب الأعداد المركبة

لضرب عددين مركبين بالصورة الجبرية نضع العددين بالصورة $١ع \times ٢ع$ ثم نستخدم طريقة ضرب المقادير الجبرية (الصف الثامن).

مثال:

أوجد ناتج الضرب:

$$(١) \quad ١ع = ٢ - ت ، ٢ع = ٣ - ت$$

$$(٢) \quad ١ع = ٥ - ت ، ٢ع = ٤ - ٢ت$$

$$(٣) \quad ١ع = ١ - ت ، ٢ع = ١ + ت$$

$$(٤) \quad ١ع = ٢ - ت ، ٢ع = ٢ - ت$$

الحل:

(١) لا توجد علاقة بين $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$

∴ نستخدم الضرب المباشر بفكرة خاصية التوزيع

$$(\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \times (\mathbb{C} - 3) = (\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \times (\mathbb{C} - 2)$$

$$= (\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \times (\mathbb{C} - 2) - 3 \times (\mathbb{C} \times \mathbb{C}) - 3 \times (\mathbb{C} \times \mathbb{C})$$

$$= (\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \times (\mathbb{C} - 2) - 6 \times (\mathbb{C} \times \mathbb{C})$$

$$= (\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \times (\mathbb{C} - 2) - 6 \times (\mathbb{C} \times \mathbb{C}) = 5 \times (\mathbb{C} \times \mathbb{C})$$

(٢) \mathbb{C}, \mathbb{R} جبري، \mathbb{Q} مقدار جبري، ضرب مباشر حد \times مقدار

$$(\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \times (\mathbb{C} - 2) = (\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \times (\mathbb{C} - 2)$$

$$= (\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \times (\mathbb{C} - 2) - 2 \times (\mathbb{C} \times \mathbb{C})$$

$$= (\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \times (\mathbb{C} - 2) - 2 \times (\mathbb{C} \times \mathbb{C})$$

$$= (\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \times (\mathbb{C} - 2) - 2 \times (\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \Leftarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \times (\mathbb{C} - 2) - 2 \times (\mathbb{C} \times \mathbb{C})$$

(٣) $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ مترافقان

∴ $\mathbb{C} \times \mathbb{C} = \mathbb{C} \times \mathbb{C} - \text{مربع الأول} - \text{مربع الثاني}$

$$= (\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \times (\mathbb{C} - 2) - 2 \times (\mathbb{C} \times \mathbb{C}) = 2 \times (\mathbb{C} \times \mathbb{C})$$

(٤) $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ متساويان

$$(\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \times (\mathbb{C} - 2) = (\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \times (\mathbb{C} - 2) = (\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \times (\mathbb{C} - 2)$$

= مربع الأول - الأول \times الثاني $\times 2$ + مربع الثاني

$$= (\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \times (\mathbb{C} - 2) - 4 \times (\mathbb{C} \times \mathbb{C}) + 2 \times (\mathbb{C} \times \mathbb{C})$$

$$= (\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \times (\mathbb{C} - 2) - 4 \times (\mathbb{C} \times \mathbb{C}) + 2 \times (\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \Leftarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \times (\mathbb{C} - 2) - 4 \times (\mathbb{C} \times \mathbb{C}) + 2 \times (\mathbb{C} \times \mathbb{C})$$

رابعاً: قسمة عددين مركبين

أ. فؤاد حسن راشد العبيسي

لقسمة عددين مركبين بالصورة الجبرية نضع العددين بالصورة $\frac{١ع}{٢ع}$ ثم نضرب \times

مرافق $٢ع$ بسط ومقام.

مثال:

أوجد $١ع \div ٢ع$ إذا كان:

$$(١) \quad ١ع = ١ - ت، ٢ع = ٣ - ت$$

$$(٢) \quad ١ع = ٥ت، ٢ع = ١ - ت$$

$$(٣) \quad ١ع = ٣ - ٣ت، ٢ع = ٣$$

الحل:

$$(١) \quad \frac{١ع}{٢ع} = \frac{١ - ت}{٣ - ت} \times \frac{١ - ت}{٣ + ت} = \frac{١ع}{٢ع}$$

$$\frac{١ - ت^٢ + ٣ - ت}{١ + ٩} = \frac{١ - ت^٢ + ٣ - ت}{١٠} = \frac{١ع}{٢ع}$$

$$\frac{١ - ت^٢ + ٣ - ت}{١٠} = \frac{١ع}{٢ع} \Rightarrow \frac{١ - ت^٢ + ٣ - ت}{١٠} = \frac{١ع}{٢ع}$$

$$(2) \quad \frac{t+1}{t+1} \times \frac{5t}{t-1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \div \frac{1}{2}$$

$$\frac{5-t}{2} = \frac{5-t}{1+1} = \frac{5+t}{2} = \frac{5-t}{2}$$

$$\frac{5}{2} + \frac{5}{2} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2} =$$

(3) $\frac{t^3-3}{t^3} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \div \frac{1}{2}$ يمكن توزيع البسط على المقام في هذا النوع.

$$t-1- = 1-t- = 1-\frac{1}{t} = \frac{t^3}{t^3} - \frac{3}{t^3} =$$

تمارين على العمليات الحسابية

(1) بسط ما يلي:

أ) $\frac{1}{t^2(t+1)} = \frac{1}{2(t+1)}$ **الحل:**

$$\frac{1}{t^2} - = t - \times \frac{1}{t} = \frac{1}{t^2} = \frac{1}{1-t^2+1} =$$

ب) $(t^3-2)(t^3+2)$ **الحل:**

$$13 = 9 + 4 = 1 - \times 9 - 4 = 2 \quad 9 - 4$$

$$\frac{{}^2(3)}{{}^2(t+2)} = {}^2\left(\frac{t-4}{t+2}\right) \text{ الحل: } \left(\frac{{}^3t+4}{t+2}\right)^2$$

$$\frac{36+27-}{16+9} = \frac{4-3}{4-3} \times \frac{9-}{4+3} = \frac{9-}{1-4+4} =$$

$$\frac{36}{25} + \frac{27}{25} - = \frac{36+27-}{25} =$$

$$(2) \text{ ليكن } 1 = \frac{2-1}{3-1} \text{ ، } 2 = \frac{2-2}{3-3} \text{ أثبت أن } 1 \text{ ، } 2 \text{ مترافقان.}$$

الحل:

$$\frac{t}{10} + \frac{7}{10} = 1 \therefore \frac{6+t-3+1}{9+1} = \frac{3+1}{3+1} \times \frac{2-1}{3-1} = 1$$

$$\frac{t}{10} - \frac{7}{10} = 2 \therefore \frac{1+t-2+6}{1+9} = \frac{t+3}{t+3} \times \frac{2-2}{t-3} = 2$$

$\therefore 1, 2$ مترافقان

(3) حل ما يأتي إلى عددين مترافقين:

$$(1) \text{ أ } 1+2 \text{ س } = \text{ الحل: } 2 - (1-)$$

$$2 - 2 \text{ س } = (2 - \text{س})(\text{س} + 2)$$

$$(2) \text{ أ } 4 \text{ س } + 9 \text{ ص } = \text{ الحل:}$$

$$4 \text{ س } - (9 \text{ ص } -) = 4 \text{ س } - 9 \text{ ص } 2$$

$$= (2 \text{ س } - 3 \text{ ص } 3)(2 \text{ س } + 3 \text{ ص } 3)$$

(ت) ٣٧ **الحل:** $(1-) - 36 = 1 + 36 =$

$$(ت + ٦)(ت - ٦) = ٦ ت - ٣٦ =$$

(ث) $س٢ + ٢ + ٢$ **الحل:** $(س٢ + ٢ + ٢) + ١ - ٢ =$

$$(١-) - ٢ (١ + س) = ١ + ٢ (١ + س)$$

$$(١ + س) - ٢ (١ + س) = ٢ ت - ٢ (١ + س)$$

(٤) أوجد قيمة $ت + ٥$

الحل: $١ = ت - ت = \frac{١}{ت} + ت =$

(٥) إذا كان $١,٤ = (٣, ١)$ ، $١,٤ = -٣$. أوجد $١,٤ \cdot ٣$.

الحل: $٣ = ١,٤$ ، $-٣ = ١,٤$

$$١,٤ \cdot ٣ = -٣ \times ٣ = -٩$$

(٦) إذا كان $١,٤$ ، $٢,٤$ مترافقان. برهن أن: $٢,٤$ ، $٢,٤$ مترافقان أيضاً.

الحل: $١,٤ = س + ت$ ، $٢,٤ = س - ت$ لأنهما مترافقان

$$\therefore ١,٤ = (س + ت) = ٢,٤ + ٢,٤ - ٢,٤ =$$

$$= (٢,٤ - ٢,٤) + ٢,٤ =$$

$$\therefore ١,٤ = (س - ت) = ٢,٤ - ٢,٤ - ٢,٤ =$$

$$= (٢,٤ - ٢,٤) - ٢,٤ = -٢,٤$$



(٧) إذا كان $ع = (س - ص)$ ، $ع = س + ص$. أوجد $ع \cdot ع$.

الحل: $ع = س - ص$

$$ع \cdot ع = (س - ص)(س + ص)$$

$$ع \cdot ع = س^2 - ص^2 = س^2 + ص^2$$

(٨) إذا كان $ع = -1 + \sqrt{3}ت$ ، $ع \cdot ع = 3$. أوجد $ع$

الحل: $ع \cdot ع = 3$

$$\frac{3}{-1 + \sqrt{3}ت} = ع \Leftrightarrow 3 = ع(-1 + \sqrt{3}ت)$$

$$\frac{-1 + \sqrt{3}ت}{-1 + \sqrt{3}ت} \times \frac{3}{-1 + \sqrt{3}ت} = ع$$

$$\frac{\sqrt{3}ت^3 - 3}{4} = \frac{\sqrt{3}ت^3 - 3}{3 + 1} = ع$$

(٩) إذا كان $ع = 2 - ت$ أوجد $ع$

الحل: $ع = 2 - ت$

$$ع = \frac{2 - ت}{ت} \Leftrightarrow ع = 1 - \frac{2}{ت} \Leftrightarrow ع = 1 - 2ت = 1 - 2ت$$

(١٠) إذا كان $ع = (2 - 2ت)$ فما $ع^6$

الحل: هنا نستخدم فكرة قوة القوة

(١٧) إذا كان $1 = {}^{\sim} \left(\frac{t+1}{t-1} \right)$ أوجد أصغر عدد موجب يحقق المعادلة.

الحل: $1 = {}^{\sim} \left(\frac{t+1}{t-1} \times \frac{t+1}{t-1} \right)$

$$1 = {}^{\sim} t \Leftarrow 1 = {}^{\sim} \left(\frac{t^2}{t} \right) \Leftarrow 1 = {}^{\sim} \left(\frac{1-t^2+1}{1+t} \right) \Leftarrow$$

(١٨) أثبت أن: ${}^{\sim} t^2 = \frac{{}^{\sim} (t+1)}{{}^{\sim} (t-1)}$ ، $\exists {}^{\sim} \nu$

الحل: $\frac{{}^{\sim} (t-1) {}^{\sim} (t+1)}{{}^{\sim} (t-1)} = \frac{{}^{\sim} (t+1)}{{}^{\sim} (t-1)}$

$$(t^2 -) {}^{\sim} \left(\frac{t+1}{t-1} \times \frac{t+1}{t-1} \right) = (1 - t^2 - 1) {}^{\sim} \left(\frac{t+1}{t-1} \right) =$$

$${}^{\sim} t^2 = {}^{\sim} t \times {}^{\sim} t = t^2 - \times {}^{\sim} t = (t^2 -) {}^{\sim} \left(\frac{1-t^2+1}{1+t} \right) =$$

= الأيسر

(١٩) برهن أن $0 = {}^{\sim} (t-1) - {}^{\sim} (t+1)$

الحل: ${}^{\sim} \left({}^{\sim} (t-1) \right) - {}^{\sim} \left({}^{\sim} (t+1) \right)$

$${}^{\sim} (1 - t^2 - 1) - {}^{\sim} (1 - t^2 + 1)$$

$$0 = {}^{\sim} (t^2) - {}^{\sim} (t^2) = {}^{\sim} (t^2 -) - {}^{\sim} (t^2)$$

٢٠) أثبت أن $16 = \left(\frac{1}{t} - 1\right)^4 \left(\frac{1}{t} + 1\right)^4$

الحل: $(t - 1)^4 (t + 1)^4 = \left(t^2 - 1\right)^2 \left(t^2 + 1\right)^2$

$$\begin{aligned} (t^2 - 1)^2 (t^2 + 1)^2 &= (t^2 - 1 + 1)^2 (t^2 - 1 - 1)^2 = \\ &= t^4 - 4t^2 + 4 \times t^4 = 16 \end{aligned}$$

الدرس الخامس: خواص العمليات الحسابية وخواص العدد المركب

أولاً: خواص العمليات الحسابية

(١) خاصية التبديل $١ع + ٢ع = ٢ع + ١ع$

فمثلاً: $(٣ - ٤ت) + (٢ - ٥ت) = (٢ - ٥ت) + (٣ - ٤ت)$

حقق ذلك بإثبات أن الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

(٢) خاصية التجميع $(٣ع + ٢ع) + ١ع = ٣ع + (٢ع + ١ع)$

فمثلاً:

$$[(٣ - ٤ت) + (٢ - ٥ت)] + (١ - ٦ت) = (١ - ٦ت) + [(٣ - ٤ت) + (٢ - ٥ت)]$$

حقق ذلك بإثبات أن الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

(٣) العنصر المحايد الجمعي

العنصر المحايد الجمعي في الأعداد المركبة (صفر، صفر) ويسمى بالعدد

المركب الصفري أي: $ع + (صفر، صفر) = (صفر، صفر) + ع = ع$

فمثلاً:

$$(٢ - ٣ت) + (صفر، صفر) = (صفر، صفر) + (٢ - ٣ت) = ٢ - ٣ت$$

حقق ذلك.

(٤) العنصر المحايد الضربي

العنصر المحايد الضربي في الأعداد المركبة هو $(١, ٠)$ ، أي:

$$ع = ع \times (١, ٠) = (١, ٠) \times ع$$

فمثلاً: $(٢ - ٣ت) \times (١, ٠) = (١, ٠) \times (٢ - ٣ت) = ٢ - ٣ت$

حقق ذلك

٥) النظرير الجمعي

إذا كان E عدد مركب فإن $E -$ هو نظيره.

أي إذا كان $E = S + T$ فإن $E - = S - - T -$

بمعنى أنه لإيجاد المعكوس (النظير) الجمعي لعدد مركب، نغير إشارة الجزء الحقيقي والتخيلي.

مثال:

أوجد $E -$ في كل من:

(أ) $E = 3 - 2T$

(ب) $E = \frac{1}{T} - T^2$

(ت) $E = 5$

(ث) $E = 5T$

الحل:

(أ) $E - = -3 + 2T$

(ب) العدد غير جاهز، $E = T - T - T^2 = 1 + T - 1 - T$

$\therefore E - = 1 - T$

(ت) $E - = -5$

(ث) $E - = -5T$

٦) النظرير الضربي

إذا كان $ع$ عدد مركب فإن $ع^{-1}$ أو $\frac{1}{ع}$ هو نظيره (معكوسه) الضربي.

أي إذا كان $ع = س + ت ص$ فإن

$$\frac{ص}{س + ت ص} - \frac{س}{س + ت ص} = \frac{س - ت ص}{س + ت ص} = \frac{س - ت ص}{س - ت ص} \times \frac{1}{س + ت ص} = \frac{1}{ع}$$

مثال:

أوجد النظرير الضربي لكل من:

(أ) $ع = ٣ - ٢$

(ب) $ع = \frac{٢ - ت}{ت + ٢}$

(ت) $ع = ٣$

(ث) $ع = ٣$

الحل:

(أ) $\frac{٣}{١٣} + \frac{٢}{١٣} = \frac{١}{ع} \therefore \frac{٣ + ٢}{٩ + ٤} = \frac{٣ + ٢}{٣ + ٢} \times \frac{١}{٣ - ٢} = \frac{١}{ع}$

(ب) $\frac{٤}{٥} + \frac{٣}{٥} = \frac{١ - ت + ٤}{١ + ٤} = \frac{ت + ٢}{ت + ٢} \times \frac{ت + ٢}{ت - ٢} = \frac{١}{ع}$

(ث) $\frac{١}{٣} = \frac{١}{ع}$

(ج) $\frac{١}{٣} - = ت - \times \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣} = \frac{١}{ع}$

ثانياً: خواص العدد المركب

ليكن \bar{z} مرافق z إذن:

$$(1) \quad z + \bar{z} = \text{عدد حقيقي}$$

$$(2) \quad z - \bar{z} = \text{عدد تخيلي}$$

$$(3) \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$(4) \quad \overline{z \cdot \bar{z}} = \text{عدد حقيقي}$$

$$(5) \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$(6) \quad \overline{\bar{z}} = z$$

أمثلة محلولة:

$$(1) \quad \text{إذا كان } z = \frac{2}{t+1} + \frac{t-1}{t}i, \quad \bar{z} = -1 - ti. \text{ أوجد:}$$

$$-z, \quad z - \bar{z}, \quad \bar{z}$$

$$\text{الحل: } -z = -\frac{2}{t+1} - \frac{t-1}{t}i$$

$$z - \bar{z} = \frac{2}{t+1} + \frac{t-1}{t}i - (-1 - ti) = \frac{2}{t+1} + \frac{t-1}{t}i + 1 + ti$$

$$\bar{z} = -1 - ti$$

$$-z = -\frac{2}{t+1} - \frac{t-1}{t}i = -\frac{2}{t+1} - \frac{t-1}{t}i$$

$$\therefore \bar{z} = -1 - ti$$

(٢) لتكن $ع, ٢ = ت + ٢, ع = ٢ - ٥$ أوجد:

(أ) $\overline{ع \cdot ٢}$

(ب) $\overline{ع} + \overline{٢}$

الحل: (أ) $\overline{ع \cdot ٢} = \overline{(٢ - ٥)(ت + ٢)} = \overline{٢ - ٥} \cdot \overline{ت + ٢} = ٢ \cdot ٥ = ١٠$

$٨ - ٩ = \overline{٨ + ٩} = ١٧$

(ب) $\overline{ع} + \overline{٢} = \overline{٢ - ٥} + \overline{ت + ٢} = ٢ + ٥ = ٧$

(٣) إذا كان $ع = \frac{٥ - ت}{٥ + ١}$. أثبت أن $\overline{ع} = \frac{١}{ع}$.

الحل: العدد ع غير جاهز

$\overline{ع} = \overline{\frac{٥ - ت}{٥ + ١}} = \frac{\overline{٥ - ت}}{\overline{٥ + ١}} = \frac{٥ - ١}{٥ + ١} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

$\therefore \overline{ع} = \frac{٢}{٣} , ع = \frac{٣}{٢}$

$\therefore \overline{ع} = \frac{١}{ع}$ فعلاً

(٤) إذا كان $ع = \frac{١ - ت}{٢ + ت}$ ، أوجد الجزء الحقيقي والتخيلي للعدد $\frac{١ + ع}{ع}$.

الحل:

$\frac{١ + ع}{ع} = \frac{١ + \frac{١ - ت}{٢ + ت}}{\frac{١ - ت}{٢ + ت}} = \frac{١ + ١ + \frac{١ - ت}{٢ + ت}}{\frac{١ - ت}{٢ + ت}} = \frac{٢ + \frac{١ - ت}{٢ + ت}}{\frac{١ - ت}{٢ + ت}} = \frac{٢(٢ + ت) + ١ - ت}{١ - ت} = \frac{٤ + ٢ت + ١ - ت}{١ - ت} = \frac{٥ + ت}{١ - ت}$

$$\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{3+1+2}{2} = \frac{3+1}{2} + 1 =$$

$$\frac{3}{2} = \text{الجزء الحقيقي} \quad \frac{3}{2} = \text{الجزء التخيلي} \quad \therefore$$

(٥) إذا كان $٥ + ٢ = ١,٤$ ، $٣ - ٢ = ١,٤ + ٢$ أوجد $١,٤$.

الحل:

$$\therefore ٣ - ٢ = ١,٤ + ٢ \quad \text{بأخذ المرافق للطرفين}$$

$$٣ + ٢ = ١,٤ - ١,٤ \Leftarrow \overline{٣ - ٢} = \overline{١,٤ - ١,٤}$$

$$٥ - ٢ - ٢ + ٣ = ١,٤ - \Leftarrow ٣ + ٢ = ١,٤ - ٥ + ٢$$

$$٣ + ١ - = ١,٤ \Leftarrow ٣ - ١ = ١,٤ -$$

(٦) إذا كان $٢ = ١,٤$ ، $٦ - = ١,٤$ أوجد $١,٤$.

الحل:

$$\therefore ٢ - = ١,٤ \quad ٦ - = ١,٤$$

$$\therefore \frac{٦ -}{٢ -} = \frac{٢ -}{٢ -} \quad \therefore$$

$$\frac{٣}{٢} = ١,٤ \Leftarrow ٣ - = ١,٤$$

(٧) كل عددين مركبين مترافقين مجموعهما حقيقي بحت. فهل كل عددين مجموعهما حقيقي بحت مترافقان. وضح ذلك بمثال عددي.

الحل:

الإجابة لا فمثلاً $٢ + ت، - ت$ عددين مجموعهما حقيقي بحت ولكنهما غير مترافقان.

(٨) إذا كان $\bar{ع}$ مرافق $ع$. أثبت أن $ع + \bar{ع} = ٢$ حقيقي بحت.

الحل:

$$\text{نفرض } ع = س + ت \text{ ص} \Leftarrow \bar{ع} = س - ت \text{ ص}$$

$$ع = (س + ت \text{ ص}) = ٢ \text{ ص} = ٢ + ٢ \text{ ص} - ٢ \text{ ص} = ٢ \text{ ص}$$

$$\bar{ع} = (س - ت \text{ ص}) = ٢ \text{ ص} = ٢ - ٢ \text{ ص} - ٢ \text{ ص} = ٢ \text{ ص}$$

$$ع + \bar{ع} = ٢ \text{ ص} + ٢ \text{ ص} = ٢ \text{ ص} \text{ حقيقي بحت}$$

(٩) برهن أن $\bar{ع \cdot ع} = \bar{ع} \cdot \bar{ع}$.

الحل:

$$\text{نفرض } ع = س + ت \text{ ص} , \bar{ع} = س - ت \text{ ص}$$

$$\text{نفرض } ع = س + ت \text{ ص} , \bar{ع} = س - ت \text{ ص}$$

$$\text{الطرف الأيمن: } \bar{ع \cdot ع} = \bar{(س + ت \text{ ص})(س + ت \text{ ص})}$$

$$= \bar{س \text{ ص} + س \text{ ص} + ت \text{ ص} + ت \text{ ص} - س \text{ ص} - س \text{ ص} - ت \text{ ص} - ت \text{ ص}}$$

$$= \bar{س \text{ ص} + س \text{ ص} - ت \text{ ص} - ت \text{ ص}} = \bar{س \text{ ص} + س \text{ ص} - ت \text{ ص} - ت \text{ ص}}$$

$$= \bar{س \text{ ص} + س \text{ ص} - ت \text{ ص} - ت \text{ ص}} = \bar{س \text{ ص} + س \text{ ص} - ت \text{ ص} - ت \text{ ص}}$$

$$\text{الطرف الأيسر: } \bar{ع} \cdot \bar{ع} = (س - ت \text{ ص})(س - ت \text{ ص})$$



$$\overline{٢٤٠,١٤} = \overline{٢٤٠,١٤} = \overline{٢٤٠,١٤} = \overline{٢٤٠,١٤} = \overline{٢٤٠,١٤}$$

$$\overline{٢٤٠,١٤} = \overline{٢٤٠,١٤} = \overline{٢٤٠,١٤} = \overline{٢٤٠,١٤} = \overline{٢٤٠,١٤}$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

$$(١٠) \text{ إذا كان } \overline{٢٤٠,١٤} = \overline{٢٤٠,١٤} = \overline{٢٤٠,١٤} = \overline{٢٤٠,١٤} = \overline{٢٤٠,١٤}$$

الحل:

$$\overline{٢٤٠,١٤} = \overline{٢٤٠,١٤} = \overline{٢٤٠,١٤} = \overline{٢٤٠,١٤} = \overline{٢٤٠,١٤}$$

$$\frac{\overline{٢٤٠,١٤}}{\overline{٢٤٠,١٤}} = \overline{٢٤٠,١٤} \Leftrightarrow \overline{٢٤٠,١٤} = \overline{٢٤٠,١٤} (١ - \overline{٢٤٠,١٤})$$

$$\overline{٢٤٠,١٤} + \overline{٢٤٠,١٤} = \frac{\overline{٢٤٠,١٤} + \overline{٢٤٠,١٤}}{١ + ١} = \frac{(١ + \overline{٢٤٠,١٤}) \overline{٢٤٠,١٤}}{(١ + \overline{٢٤٠,١٤})(١ - \overline{٢٤٠,١٤})} = \overline{٢٤٠,١٤}$$

$$\overline{٢٤٠,١٤} + \overline{٢٤٠,١٤} = \overline{٢٤٠,١٤} \therefore \overline{٢٤٠,١٤} - \overline{٢٤٠,١٤} = \overline{٢٤٠,١٤}$$

الدرس السادس: تساوي عددين مركبين (حل المعادلات)

$$\text{إذا كان } {}_1\text{س} + {}_1\text{ت} = {}_2\text{س} + {}_2\text{ت} \text{ فإن}$$

$${}_1\text{س} = {}_2\text{س} \text{ ، } {}_1\text{ت} = {}_2\text{ت}$$

$$\text{إذا كان } {}_1\text{س} = {}_2\text{س} \text{ ، } {}_1\text{ت} = {}_2\text{ت} \text{ فإن}$$

$${}_1\text{س} + {}_1\text{ت} = {}_2\text{س} + {}_2\text{ت}$$

وتستخدم هذه العلاقات في حل المعادلات التي تحوي جزء حقيقي وجزء تخيلي.

$$\text{فمثلاً: إذا كان } {}_2\text{س} - 1 = {}_1\text{ت} + {}_1\text{ت} - 5 = 4 - \text{ت} \text{ ،}$$

$$\text{فإن } {}_2\text{س} = 5 \Leftarrow {}_2\text{س} = \frac{5}{2} \text{ ، } \text{ت} = -4$$

تمارين:

(١) حل المعادلات التالية:

$$\text{أ) } 7\text{ت} = (3\text{س} - \text{ت})(\text{ت} - \text{ص}) - 1$$

الحل:

$$7\text{ت} = \text{سص} - \text{ست} - 3\text{صت} - 3 - 1 \Leftarrow 7\text{ت} = \text{سص} - \text{ست} - 3\text{صت} - 4$$

$$0 = \text{سص} - 4 \Leftarrow \text{سص} = 4 \Leftarrow \text{س} = \frac{4}{\text{ص}} \text{ بالتعويض في المعادلة الأولى}$$

$$7\text{ت} = 3\text{ص} - \frac{4}{\text{ص}} - 4 \Leftarrow 7\text{ت} \times \text{ص}$$

$$7\text{تص} = 3\text{ص}^2 - 4 - 4\text{ص} \Leftarrow 3\text{ص}^2 + 7\text{تص} + 4 = 0$$

$$0 = (1 + v)(4 + 3v) \Leftarrow$$

$$\frac{4-v}{3} = v \Leftarrow 4-v = 3v \Leftarrow 0 = 4 + 3v \text{ إما}$$

$$1-v = v \Leftarrow 0 = 1 + v \text{ أو}$$

$$3-v = \frac{3 \times 4}{4-v} = s \Leftarrow \frac{4-v}{3} = v \text{ عندما}$$

$$4-v = \frac{4}{1-v} = s \Leftarrow 1-v = v \text{ عندما}$$

$$\begin{array}{c|c|c} 1-v & \frac{4-v}{3} & s \\ \hline 4-v & 3-v & v \end{array} \text{ مجموعة الحل:}$$

$$\frac{4v+1}{1-v} = \frac{s+2+v}{s-1-v} \text{ (ب)}$$

الحل: حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$(1-v)(4v+1) = (s+2+v)(s-1-v)$$

$$\Leftarrow 4v + s + 2 + v = s^2 - 1 - v + s - 2 - v - s + 1 - v$$

$$= s^2 - 1 - v + s - 2 - v - s + 1 - v$$

$$\Leftarrow 4v + s + 2 + v = s^2 - 1 - v + s - 2 - v - s + 1 - v$$

$$\Leftarrow 3s - 6 = s^2 - 2 \Leftarrow s = 2, \text{ ، } -v - s - 1 + 4v = s^2 - 2$$

$$-5v - 2s = 1 \text{ بالتعويض عن } s$$

$$-5v - 2 \times 2 = 1 \Leftarrow -5v = 5 \Leftarrow v = -1$$

$$\Leftarrow 5 = 5 \Leftarrow 1 = 1$$

$$\begin{array}{c|c} 2 & \text{س} \\ \hline 1 & \text{ص} \end{array} \quad \text{مجموعة الحل:}$$

$$(ت) (س + ت) = 2 \Rightarrow 28 - 45 = 2$$

الحل:

$$س + 2 = 2 \Rightarrow س = 0 \Rightarrow 28 - 45 = 2$$

$$س - 2 = 2 \Rightarrow س = 4 \Rightarrow 28 - 45 = 2$$

$$28 - 45 = 2 \Rightarrow 28 - 45 = 2 \Rightarrow 28 - 45 = 2$$

بتعويض [2] في [1]:

$$(28 - 45) = 2 \Rightarrow 28 - 45 = 2 \Rightarrow 28 - 45 = 2$$

$$28 - 45 = 2 \Rightarrow 28 - 45 = 2 \Rightarrow 28 - 45 = 2$$

$$28 - 45 = 2 \Rightarrow 28 - 45 = 2 \Rightarrow 28 - 45 = 2$$

ص = 2 + 4 = 6 مستحيلة الحل في ح. لماذا؟

$$28 - 45 = 2 \Rightarrow 28 - 45 = 2 \Rightarrow 28 - 45 = 2$$

بالتعويض عن ص في [2]

$$28 - 45 = 2 \Rightarrow 28 - 45 = 2 \Rightarrow 28 - 45 = 2$$

عندما $ص = ٢- \Leftarrow س = \frac{١٤-}{٢-} = ٧$

٧	٧-	س
٢-	٢	ص

مجموعة الحل:

$$\frac{٢٣}{٥} = \frac{س٣ + ت٥}{ت + ٢} + \frac{س + ت٥}{ت + ٢} \quad (ث)$$

الحل: بضرب الطرفين $\times ٥(ت + ٢)$

$$٥(س + ت٥) + ٥(س٣ + ت٥) = (ت + ٢)٢٣$$

$$٥س + ٥ت٥ + ٥س٣ + ٥ت٥ = ٢٣ت + ٤٦$$

$$\Leftarrow ٥س + ١٥ = ٤٦ - ٢٣ت \Leftarrow ٤٦ = ٢٠س \Leftarrow س = \frac{٤٦}{٢٠} = \frac{٢٣}{١٠}$$

$$٢٣ = ٥س + ٥س \Leftarrow ٢٣ = ١٠ص \Leftarrow ٢٣ = ص$$

$\frac{٢٣}{١٠}$	س
$\frac{٢٣}{١٠}$	ص

مجموعة الحل:

$$(ج) \quad (١٠ + ت) = (٢ + ت)(٣س + ٢ت)$$

الحل: $(٣س + ٢ت)(٤ + ت - ١) = ١٠ + ١٠ت$

$$(٣س + ٢ت)(٤ + ت) = ١٠ + ١٠ت$$

$$٩س + ٢٢ت + ١٢س + ٢٠ت = ١٠ + ١٠ت$$

$$\boxed{1} \leftarrow 10 = 8ص - 9س \Leftarrow$$

$$\boxed{2} \leftarrow 10 = 6ص + 1س$$

بضرب المعادلة $3 \times \boxed{1}$ والمعادلة $4 \times \boxed{2}$

$$\begin{aligned} 30 &= 24ص - 9س \\ 40 &= 24ص + 1س \end{aligned}$$

بالجمع

$$\frac{70}{75} = س \Leftarrow 70 = 75س$$

بالتعويض في $\boxed{1}$: $10 = 8ص - \frac{70}{75} \times 9 \Leftarrow 10 = 8ص - \frac{14}{5} \times 9 \Leftarrow 10 = 8ص - \frac{126}{5}$

$$8 = \frac{42}{5}ص - 42 \Leftarrow 50 = 42ص - 42 \Leftarrow 92 = 42ص \Leftarrow 8 = 42ص - 50$$

$$\frac{1}{5} = ص \Leftarrow \frac{8}{42} = ص$$

$\frac{14}{15}$	س
$\frac{1}{5}$	ص

مجموعة الحل:

(ح) $س + 4 = \frac{س}{ص} + 4 = ت$

الحل: $س + 4 = ت + 4 = 4ص + 4 = 4(ص + 1) = 4(س + 4) = 4س + 16$

$$0 = 4(س + 4) - 4س - 16 \Leftarrow 0 = 4س + 16 - 4س - 16 \Leftarrow 0 = 0$$

إما $ص = 0$ أو $س = 4$

$$س = ص$$

$$\text{بالتعويض: } س \times س = ٤ \Leftarrow س^2 = ٤ \Leftarrow س = \pm ٢$$

$$\text{مجموعة الحل: } \begin{array}{c|c|c} س & ٠ & ٢ \pm \\ \hline ص & ٠ & ٢ \pm \end{array}$$

(٢) إذا كانت $س = ٩$ و $ص = ٩$ $س - ١ = ٩$ أوجد قيمة ١ .

الحل: $٩ = ١$ يمكن اختصار $س$ في الطرفين

$$\text{لأن المطلوب } ١ \Leftarrow ٩ = ١$$

(٣) إذا كان $س^٢ + ٣ص + ١س = ٥ + ٤$ أوجد قيمة ١ ، $ب$ عند النقطة

$$(١, ١)$$

الحل:

$$س^٢ + ١س = ٥ \Leftarrow س^٢ + ١ \times ٢ + ١ \times ١ = ٥ \Leftarrow ٣ = ١$$

$$٣ص = ٤ \Leftarrow ٣ \times ب = ٤ \Leftarrow ٣ب = ٤ \Leftarrow ب = \frac{٤}{٣}$$

(٤) إذا كان $س + ص = س^٢ + ٥(١ + ت)$. أوجد $س$ ، $ص$

$$\text{الحل: } س + ص = س^٢ + ٥ + ٥ت \Leftarrow س = ص = س^٢ + ٥ \Leftarrow \boxed{١}$$

$$س = ٥ \text{ بالتعويض عن } س \Leftarrow ص = ٥ + ٢٥ = ٣٠ \Leftarrow ص = ٣٠$$

(٥) إذا كان $٥س + ٤تص = ت + ص + ٥$ أوجد قيمة $س$ ، $ص$ التي تحقق المعادلة

$$\text{الحل: } ٥س = ص + ٥ \Leftarrow \boxed{١}$$

$$٤ص = س \text{ بالتعويض في } \boxed{١}$$

أ. فؤاد حسن راشد العليسي

$$\frac{5}{19} = ص \Leftarrow 5 = ص 19 \Leftarrow 5 + ص = 20 \Leftarrow 5 + ص = 20$$

$$\frac{20}{19} = س \Leftarrow \frac{5}{19} \times 4 = س$$

(٦) إذا كان $\frac{2ت}{ت+1} = ص + ت + س$ أوجد $س + ص$

الحل:

$$2ت = (س + ت + ص)(ت + 1) \Leftarrow 2ت = ص - س + ت + ص + س + ت + س + ت$$

$$\begin{array}{l} \boxed{1} \leftarrow س - ص = 0 \\ \boxed{2} \leftarrow س + ص = 2 \end{array} \text{ بالجمع}$$

$$\boxed{1} \text{ بالتعويض في } 2 = س \Leftarrow 1 = س$$

$$1 = ص - 1 \Leftarrow 1 - 1 = ص \Leftarrow 1 = ص$$

$$\therefore 2 = 1 + 1 = ص + س$$

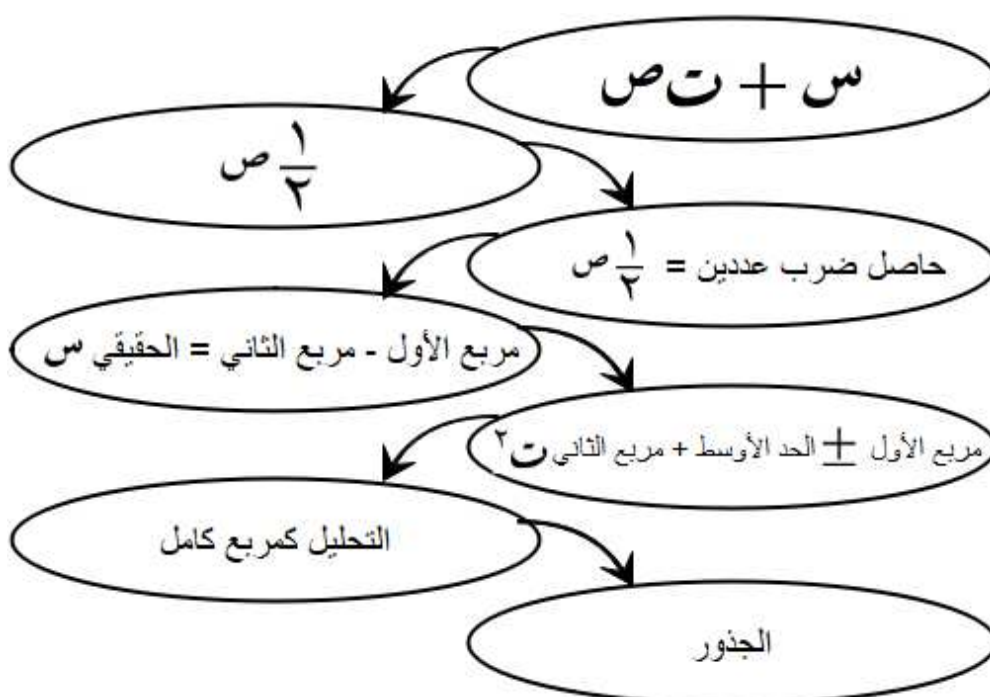
الدرس السابع: إيجاد الجذر التربيعي لعدد مركب جبري

هناك عدة طرق لإيجاد الجذر التربيعي للعدد المركب.

الطريقة الأولى:

- (١) نضع العدد المطلوب إيجاد جذره $ع$ بالصورة $ع = س + ت ص$
- (٢) نقوم بتربيع الطرفين للتخلص من الجذر.
- (٣) نحل المعادلة لإيجاد $س$, $ص$ فيكون $ع = (س + ت ص) \pm$ هو الجذر وهي طريقة عامة لأي عدد مركب.

الطريقة الثانية: طريقة إكمال المربع



ولاستخدام هذه الطريقة شروط أهمها أن يكون معامل الجزء التخيلي $<$ معامل الجزء الحقيقي وبذلك فهي ليست عامة.

أ. فؤاد حسن راشد العيسى

الطريقة الثالثة: طريقة القانون

وهي $\sqrt{e} = \pm(1 \pm \beta t)$ إشارة الوسط بحسب إشارة التخلي، حيث:

$$\sqrt[۲]{ص + ۲س} = ر, \sqrt[۲]{س - ر} = ب, \sqrt[۲]{س + ر} = ۲$$

مثال:

أوجد الجذر التربيعي للعدد $4 = 5 - 1$ بالطرق الثلاث

الحل: الطريقة الأولى: نضع $\sqrt{512 - 1} = 22 + 1$ ثم تربيع الطرفين

$$\boxed{1} \leftarrow 5 = 2 \text{ ص} - 2 \text{ س} \Leftarrow 2 \text{ ص} - 2 \text{ صت} + 2 \text{ س} = 2 - 5$$

$$\boxed{۲} \leftarrow \frac{۶-}{ص} = س \Leftarrow ۶- = س ص \Leftarrow ۱۲- = س ص ۲$$

بالتعويض عن ٢ في ١ :

$$\text{بالمضرب} \times \text{ص}^2 \quad 5 = \frac{36}{\text{ص}^2} \Leftarrow 5 = \frac{6}{\text{ص}} - \text{ص}^2$$

$$٠ = ٣٦ - ٢ص٥ + ٤ص \Leftarrow ٢ص٥ = ٤ص - ٣٦$$

$$v = (x - \frac{1}{2}) (x + \frac{1}{2}) \Leftarrow$$

ص $9 + 2 = 0$ ليس لها حل في ح

$$٢_{\pm} = \text{ص} \Leftarrow \quad \text{٤} = \text{ص} \Leftarrow \quad \text{٠} = \text{ص} - \text{ص}$$

عندما $۲ = ۳ \Leftarrow \frac{۶}{۲} = ۳$

∴ الجذر الأول $2 - 3 = -4$

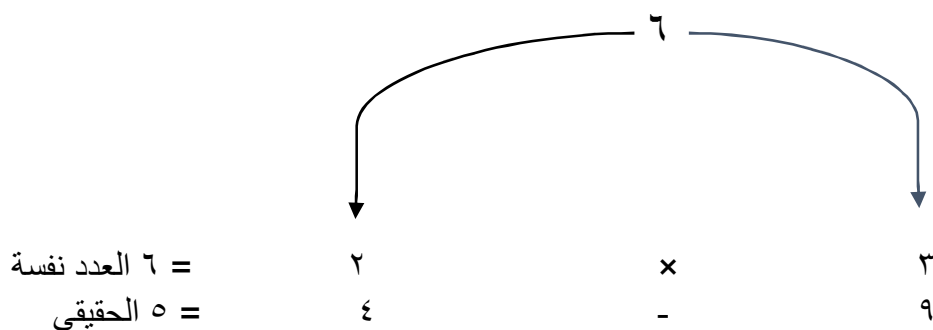


$$\text{عندما } 2- = \text{ص} \Leftarrow 3 = \frac{6-}{2-} = \text{س}$$

$$\therefore \text{الجذر الثاني } 2-3 = 4$$

الطريقة الثانية:

$$\frac{12}{2} \text{ نصف معامل التخلي}$$



$$(2-3) \pm = \sqrt{(2-3)} = \sqrt{4+12-9} = \sqrt{4-12-9}$$

لاحظ وضع 3 ثم 2 لأن إشارة الحقيقية موجبة ، 1- = 2

الطريقة الثالثة:

$$5 = \text{س} ، 13 = \sqrt{169} = \sqrt{44+25} = \sqrt{\text{ص} + \text{س}} = \text{ر}$$

$$3 = 1 \Leftarrow 9 = \frac{5+13}{2} = \frac{\text{س} + \text{ر}}{2} = 1$$

$$2 = \text{ب} \Leftarrow 4 = \frac{5-13}{2} = \frac{\text{س} - \text{ر}}{2} = \text{ب}$$

$$(2-3) \pm = 4 \Leftarrow (1-\text{ب}) \pm = 4$$

أ. فؤاد حسن راشد العليسي

لاحظ إشارة الوسط سالبة لأن معامل التخيلي سالب
وللطالب اختيار الطريقة المناسبة

قاعدة:

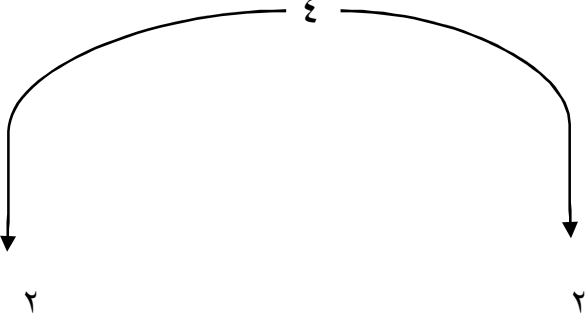
- (١) حاصل ضرب الجذرين التربيعيين للعدد المركب = سالب العدد المركب نفسه.
- (٢) حاصل جمع الجذرين التربيعيين للعدد المركب = صفر.

تمارين محلولة:

- (١) أوجد الجذر التربيعي للعدد المركب :

أ) $٨ = ٤$ **الحل:**

سوف احل هنا بالطريقة الوسطى (اكمال المربع)

$$\begin{array}{c} ٨ \\ \hline ٢ \\ \hline ٤ \end{array}$$


$٢ \quad ٢$

$٤ \quad - \quad ٤$

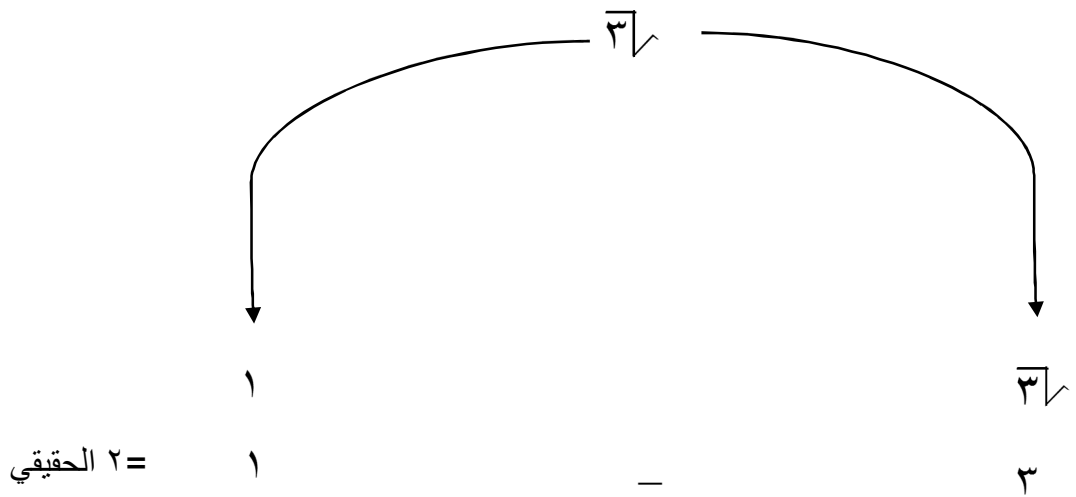
$=$ صفر الحقيقي

$$\sqrt{٤ + ٨ + ٤} = \sqrt{٤ - ٨ + ٤}$$

$$\sqrt{(2+2t)} \pm \sqrt{(2+2t)} = (2+2t)$$

(ب) $2 - 2 = 0$ $\sqrt{3}t$ **الحل :**

$$\frac{\sqrt{3}t}{2}$$



$$\sqrt{2+2t} - \sqrt{3} = 1 - \sqrt{2+2t}$$

$$(t - \sqrt{3}) \pm \sqrt{(t - \sqrt{3})} =$$

(٢) أكمل الفراغات التالية:

(أ) مجموع الجذرين التربيعين للعدد المركب هو

الحل: صفر

(ب) إذا كان $2 - t$ أحد الجذرين التربيعين للعدد المركب 0 فإن الجذر

التربيعي الآخر هو

الحل: $-2 + 2$

أي معكوسه الجمعي

(3) أوجد $\sqrt[2]{4}$ إذا كان :

$$\frac{40}{2} \quad (1) \quad 4 - 9 = 40 \text{ تن}$$

$$20$$

$$4$$

$$5$$

$$16 = 9 \text{ الحقيقي}$$

$$-$$

$$25$$

$$\sqrt[2]{40 - 25 - 16 + 4} = \sqrt[2]{40 - 25 - 16 + 4}$$

$$\sqrt[2]{(4 - 5) \pm} = \sqrt[2]{(4 - 5)}$$

$$\frac{12}{2}$$

$$(2) \quad 4 + 5 = 12 \text{ تن}$$

الحل:

$$6$$

$$3$$

$$2$$

$$9 = 5 - \text{الحقيقي}$$

$$4$$

أ. فؤاد حسن راشد العبيسي

$$\sqrt[2]{4-12t+9t^2} = \sqrt[2]{9-12t+4t^2}$$

$$\sqrt[2]{(2-3t)^2} = \pm(2-3t)$$

(ت) $1+t = 2$ **الحل:**

لا يمكن حلها بالطريقة السابقة لان معامل التخيلى ليس اكبر من معامل الحقيقي

وسوف نحلها بالطريقة الأولى

$$\sqrt[2]{1+t} = s+2t \text{ بتربيع الطرفين}$$

$$1+t = s^2+4st+4t^2$$

$$s^2-4st+4t^2 = 1 \quad (1)$$

$$2s-4t = 1 \Rightarrow s = \frac{1}{2} + 2t$$

$$s = \frac{1}{2} + 2t \quad (2)$$

بالتعويض عن (2) في (1)

$$\left(\frac{1}{2} + 2t\right)^2 - 4t\left(\frac{1}{2} + 2t\right) + 4t^2 = 1 \quad \text{بالتعويض عن (2) في (1)}$$

$$1 + 2t + 4t^2 - 2 - 8t + 4t^2 = 1$$

$$1 = 4t^2 - 6t \quad , \quad 4 = 1 \quad , \quad 4 = 1$$

$$\Delta = 16 - 4 \times 4 \times 1 = 0$$

$$t = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2 \times 4} = \frac{3}{4} \Rightarrow s = \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{4} = \frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \sqrt[2]{\frac{\pm 1 - \sqrt{2}}{2}} = \pm \sqrt[2]{\frac{\pm 1 - \sqrt{2}}{2}} & \Leftrightarrow \sqrt[2]{\frac{\pm 1 - \sqrt{2}}{2}} = \pm \sqrt[2]{\frac{\pm 1 - \sqrt{2}}{2}} \\ \text{ومنه } \sqrt[2]{\frac{\pm 1 - \sqrt{2}}{2}} = \pm \sqrt[2]{\frac{\pm 1 - \sqrt{2}}{2}} & \text{ مرفوض} \end{aligned}$$



الدرس الثامن: حل المعادلات في مجموعة الأعداد المركبة (م)

سوف نقسم هذه المعادلات إلى قسمين:

(١) معادلات تحوي ع فقط وتحل بإحدى طرق التحليل (المقدار الثلاثي – فرق بين مربعين – فرق بين مكعبين – مجموع مكعبين – عامل مشترك – القانون العام)

مثال: حل المعادلة:

$$٠ = ٤٣ - ٢٤٢$$

الحل: بإخذ العامل المشترك

$$٠ = (٣ - ٤٢)٤$$

$$٠ = ٣ - ٤٢ \text{ أو } ٠ = ٤$$

$$\frac{٣}{٢} = ٤ \Leftarrow ٣ = ٤٢$$

نلاحظ أن جذور هذه المعادلة حقيقية بحته

$$٠ = (١ + ٢٤٣)٤ \text{ (ب)}$$

$$\frac{١}{٣} - = ٢٤ \Leftarrow ١ - = ٢٤٣ \text{ أو } ٠ = ٤ \text{ (الحل: إما } ٠ = ٤ \text{ أو } ١ - = ٢٤٣ \text{)}$$

$$\frac{١}{\sqrt{٣}} \pm = \frac{١ -}{٣} \sqrt{\pm} = ٤$$

نلاحظ أن هذه المعادلة جذورها حقيقية وتخيلية
أ. فؤاد حسن راشد العيسى

(٢) معادلات تحوي \bar{c} ، \bar{c} وتحل بفرض $c = s + t$ ، $\bar{c} = s - t$ ثم تحل بنفس طريقة حل المعادلات التي تحوي s ، t أي بإيجاد قيم s ، t

مثال: حل المعادلة:

$$(a) \quad c + \bar{c}^2 = 0$$

الحل: نضع $c = s + t$ ، $\bar{c} = s - t$

$$\Leftrightarrow 0 = (s + t) + (s - t)^2$$

$$\Leftrightarrow 0 = s + t + s^2 - 2st + t^2 \Leftrightarrow 0 = s^2 + s + t^2 - 2st$$

$$\Leftrightarrow 0 = s^3 \Leftrightarrow 0 = s^2$$

$$, s - 2t = 0 \Leftrightarrow s = 2t \Leftrightarrow 0 = s$$

$$\therefore (0, 0) = c \quad \text{العدد المركب الصفري}$$

$$(b) \quad c^2 - \bar{c} = 0$$

الحل: نضع $c = s + t$ ، $\bar{c} = s - t$ بالتعويض

$$(s + t)^2 - (s - t) = 0$$

$$s^2 + 2st + t^2 - s + t = 0$$

$$s^2 - s + 2st + t^2 + t = 0 \quad \boxed{1}$$

$$s^2 + s + t^2 - 2st = 0 \Leftrightarrow s^2 + s + (t - s)^2 = 0$$

$$\text{أو } s^2 + s + 1 = 0 \Leftrightarrow s = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2}$$

$$\text{عند } s = 0 \quad \text{بالتعويض في } \boxed{1}$$



$$س^2 - س = 0 \Leftrightarrow س(س - 1) = 0$$

$$س = 0 \text{ أو } س = 1$$

$$س = 1 \text{ أو } س = 0$$

$$س = 0 \text{ أي } ع = 0, ع + 1 = ت \times 0 \Leftrightarrow ع = 1$$

$$\text{عند } س = 1 \text{ بالتعويض في } \boxed{1}$$

$$\frac{1}{4} - ص^2 = 0 \Leftrightarrow ص^2 = \frac{1}{4}$$

$$ص = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{أي } ع = 1 + \frac{1}{2} = ت \text{ أو } ع = 1 - \frac{1}{2} = ت$$

$$ت(ع^2 - ٩ + ع - ٢) = 0$$

الحل: بالقانون العام

$$١ = أ \quad ب = ٦ \quad ج = ٩ - ٢ = ٧$$

$$\Delta = ب^2 - ٤ أ ج = ٣٦ - ٢٨ = ٨$$

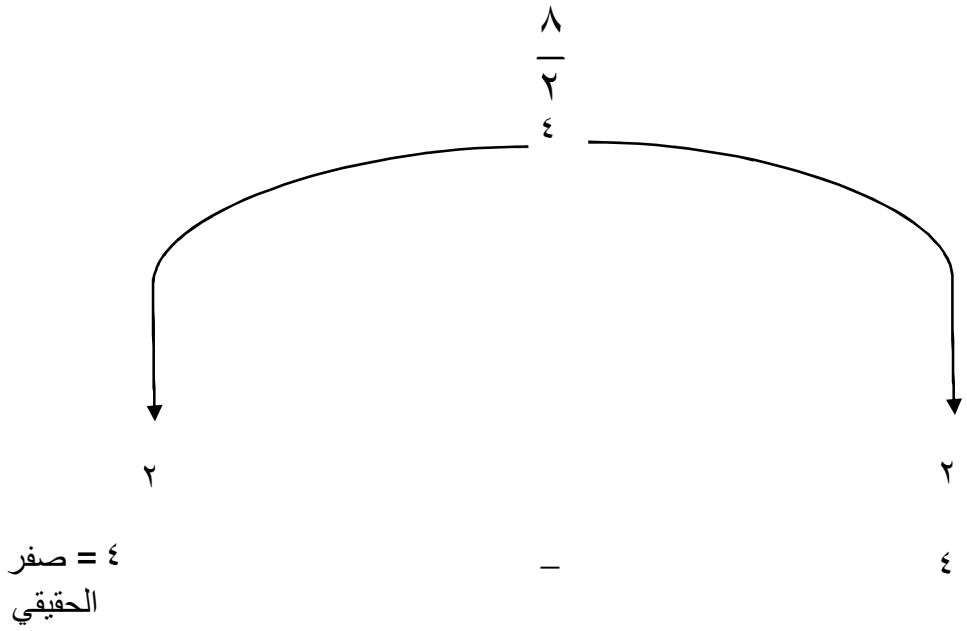
$$= ٣٦ - ٢٨ + ٨ = ١٦$$

$$= ٤$$

$$\boxed{1} \quad ع = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢ أ} = \frac{-٦ \pm ٤}{٢ \times ١}$$

الان نوجد $\sqrt{٨} = ٢\sqrt{٢}$

أ. فؤاد حسن راشد العيسى



$$\sqrt[2]{4t + 8 + 4} = \sqrt[2]{4 - 8 + 4}$$

$$\boxed{1} \text{ بالتعويض في } (t^2 + 2) \pm = \sqrt[2]{(t^2 + 2)}$$

$$\frac{(t^2 + 2) \pm 6}{2}$$

$$t + 4 = \frac{t^2 + 8}{2} = \frac{t^2 + 2 + 6}{2} = 4 \text{ إما}$$

$$t - 2 = \frac{t^2 - 4}{2} = \frac{t^2 - 2 - 6}{2} = 4 \text{ أو}$$

$$(ث) \quad ع^2 = ٢ت + ١$$

الحل: المعادلة تحوي $\overline{ع}$

$$\text{نضع } ع = ت + ص \quad , \quad \overline{ع} = \overline{ت} - \overline{ص}$$

$$(س + ت)(س + \overline{ت}) = ٢(ت + ص) + ١$$

$$س^2 + س\overline{ت} + س\overline{ص} + \overline{ت}\overline{ص} = ٢ت + ٢ص + ١$$

$$\overline{ت}\overline{ص} = ٢ص - ٢ت \quad \leftarrow \quad ١ + ص^2 = ٢ص - ٢ت$$

$$٢ص = ٢ص - ٢ص \quad \leftarrow \quad ٠ = ٢ص - ٢ص \quad \leftarrow \quad ٠ = ٢ص - ٢ص \quad \leftarrow \quad ٠ = ٢ص - ٢ص$$

$$\overline{٠} = ٢ص \quad \leftarrow \quad ٠ = ٢ص$$

$$\overline{٠} = ١ - ص \quad \leftarrow \quad ١ = ص$$

عند $٠ = ص$ بالتعويض في [١]

$$٠ - ٠ = ٢ص + ١$$

$$٠ = ٢ص + ١ + ١ \quad \leftarrow \quad ٠ = ٢ص + ٢$$

$$١ - ١ = ص$$

ومنه $ع = ١ - ٠ = ١$

وعند $١ = ص$ بالتعويض في [١]

$$١ - ١ = ٢ص + ١$$

$$٣ = ١ - ٢$$

$$٢ \pm ٢ = ٤ \quad \leftarrow \quad ٢ \pm ٢ = ٤$$

$$\therefore \epsilon = 1 + 2 = 3$$

$$\epsilon = 1 + 2 - = 3$$

$$(ج) \epsilon^2 = \frac{1}{\epsilon} - 3$$

الحل: بضرب الطرفين $\times \epsilon^2$

$$\epsilon^4 = 1 - 3\epsilon^2 \iff \epsilon^4 - 3\epsilon^2 + 1 = 0$$

بالقانون العام

$$1 = 1 \quad 3 = 3 \quad 1 = 1$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 1 = 5$$

$$13 = 4 + 9 = \Delta$$

$$\frac{\sqrt{13} \pm 3}{2} = \frac{\sqrt{13} \pm 3}{1 \times 2} = \epsilon^2$$

$$\epsilon^2 = \frac{\sqrt{13} + 3}{2} \iff \epsilon = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{13} + 3}{2}} \quad \text{عند}$$

$$\epsilon^2 = \frac{\sqrt{13} - 3}{2} \iff \epsilon = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{13} - 3}{2}} \quad \text{عند}$$

لاحظ الجذرين الأخيرين تخيليين (لماذا)



$$٠ = ١ + \epsilon + \epsilon^2 + \epsilon^3 \quad (\text{ح})$$

الحل: لأن المقدار أكثر من ثلاثة حدود نستخدم التجميع (التقسيم)

$$٠ = (١ + \epsilon) + (\epsilon^2 + \epsilon^3)$$

$$٠ = (١ + \epsilon)(١ + \epsilon^2) \Leftarrow ٠ = (١ + \epsilon) + (١ + \epsilon)\epsilon^2$$

$$١ - \epsilon = \epsilon \Leftarrow ٠ = ١ + \epsilon \quad \text{إما}$$

$$١ - \epsilon^2 = \epsilon^2 \Leftarrow ٠ = ١ + \epsilon^2 \quad \text{أو}$$

$$\epsilon \pm 1 = \epsilon \Leftarrow \epsilon \pm 1 = \epsilon$$

$$(خ) \quad ٨ = \epsilon + \bar{\epsilon} \quad , \quad ٨ = \epsilon^2 - \epsilon - \epsilon^2 \quad ٦٤ =$$

$$\text{الحل: نضع } \epsilon = س + ت \quad , \quad \bar{\epsilon} = س - ت$$

بالتعويض في المعادلة الأولى

$$٨ = (س + ت) + (س - ت)$$

$$٨ = س + ت + س - ت$$

$$٨ = ٢س \Leftarrow ٤ = س$$

ولأن لإيجاد ص نعوض في الثانية

$$٦٤ = (س + ت)^2 - (س - ت)^2$$

$$٦٤ = س^2 + ٢ست + ت^2 - (س^2 - ٢ست + ت^2)$$

$$٦٤ = ٤ست$$

$$\Leftarrow \text{خمسة} = 64 \text{ بالتعويض عن س}$$

$$64 = 4 \times 4 \times 4 \Leftarrow 64 = 16 \times 4$$

$$4 = \text{ص}$$

$$\Leftarrow \text{ع} = 4 + \text{ت}$$

$$\bar{\text{ع}} = 4 - \text{ت}$$

$$\text{(د) ع}^3 - \text{ت}^3 = 0$$

$$\text{الحل: ع}^3 + \text{ت}^3 = 0 \text{ مجموع مكعبين}$$

$$\Leftarrow (ع + \text{ت})(ع^2 - ع\text{ت} + \text{ت}^2) = 0$$

$$0 = (ع + \text{ت})(ع^2 - ع\text{ت} + \text{ت}^2)$$

$$\text{إما } 0 = (ع + \text{ت}) \Leftarrow \text{ع} = -\text{ت}$$

$$\text{أو ع}^2 - ع\text{ت} + \text{ت}^2 = 0 \text{ بالقانون العام}$$

$$1 = 1 \quad \text{ب} = -\text{ت} \quad \text{ج} = -1$$

$$\Delta = \text{ب}^2 - 4\text{ج} = 1 - 4 = -3$$

$$\Delta = 1 + 4 = 5$$

$$\frac{\sqrt{5} \pm 1}{2} = \frac{\sqrt{5} \pm \text{ت}}{1 \times 2} = \text{ع}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \pm = \text{ع}$$

$$(ذ) \quad \frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5} \quad , \quad 4 = \bar{4} + 4$$

الحل:

نضع $4 = \bar{4} + 4$ ، $\bar{4} = 4 - 4$ بالتعويض في المعادلة الأولى

$$4 = \bar{4} + 4 - 4 + 4$$

$$4 = \bar{4} + 4 - 4 + 4$$

بالتعويض في الثانية لإيجاد ص

$$\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$(1 + 3)(4 - 4) = (4 + 4)5$$

$$10 + 12 + 3 + 6 = 20 + 20$$

$$4 = \bar{4} + 4 - 4 + 4$$

$$\frac{1}{4} = \bar{4} + 4 - 4 + 4$$

$$\frac{1}{4} + 2 = 4 \quad , \quad 4 + 2 = 4$$

$$(ر) \quad \bar{ع} + ٢ = (٣، -١)$$

$$\text{الحل: أي } \bar{ع} + ٢ = ٣ - ت$$

$$\text{نضع } ع = ت + ص، \quad \bar{ع} = ص - ت$$

$$٣ - ت = (ت + ص) + ٢$$

$$٣ - ت = ت + ص + ٢$$

$$١ = ت + ص \quad ٣ = ت + ص \quad ٣ = ت + ص$$

$$١ = ت + ص \quad ١ = ت + ص \quad ١ = ت + ص$$

$$ع = ١ + ت، \quad \bar{ع} = ١ - ت$$

$$(ز) \quad ع^٢ - ٢٧ت = ٠$$

$$\text{الحل: } ع^٢ + ٢٧ت = ٠$$

$$٠ = (ع^٢ - ٢٧ت)(٣ + ع)$$

$$\text{إما } ع + ٣ = ٠ \quad \text{أو } ع^٢ - ٢٧ت = ٠$$

$$\text{أو } ع^٢ - ٢٧ت = ٠$$

بالقانون العام

$$١ = ١ \quad ٣ = ٣ \quad ٩ = ٩$$

$$\Delta = ٩ - ٤ \times ١ \times ٩ = ٩ - ٣٦ = -٢٧$$

$$\Delta = ٩ + ٣٦ = ٤٥$$

$$\frac{\sqrt[3]{3 \pm 3} \pm 3}{2} = \frac{\sqrt[3]{27} \pm 3}{1 \times 2} = \epsilon$$

$$\frac{3}{2} + \frac{\sqrt[3]{3 \pm 3}}{2} = \epsilon$$

$$0 = 5 - \epsilon(-3 + 5) + \frac{3}{2} \epsilon \quad (\text{س})$$

الحل: بالقانون العام

$$\frac{3}{2} \epsilon = 1 \quad -3 + 5 = \beta \quad 5 - \epsilon = \alpha$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha = (-3 + 5)^2 - 4 \times \frac{3}{2} \epsilon = 5 - \epsilon$$

$$\Delta = 9 - 30 + 25 = 4$$

$$\frac{\sqrt[3]{16} \pm (-3 + 5) -}{\frac{3}{2} \times 2} = \frac{\sqrt[3]{\Delta} \pm \beta -}{2} = \epsilon$$

$$\frac{3 - 5 \pm 4}{3} =$$

$$\frac{3 - 5}{3} = \frac{3 - 5 + 4}{3} = \epsilon \quad (\text{إما})$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} =$$

$$\frac{9-3}{3} = \frac{4-3}{3} = \text{أو } \text{ع}$$

$$-3- = 3 - \frac{1}{3} =$$

الدرس التاسع: إيجاد معادلة الدرجة الثانية إذا علم

جذريها

قواعد هامة:

(القاعدة الأولى) في المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$

$$(1) \text{ مجموع جذري المعادلة } = -\frac{b}{a}$$

$$(2) \text{ حاصل ضرب جذري المعادلة } = \frac{c}{a}$$

(3) مميز المعادلة $\Delta = b^2 - 4ac$ ويميز إلى

• المميز = صفر الجذرين متساويين

• المميز $<$ الصفر الجذرين مختلفين

$$(4) \text{ جذري المعادلة هما } \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = x$$

(القاعدة الثانية) إذا علم جذري المعادلة من الدرجة الثانية فإن المعادلة هي

$$x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$$

(القاعدة الثالثة) المعادلة من الدرجة الثانية التي معاملاتها حقيقية جذريها مترافقان

بمعنى المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ إذا كان $a, b, c \in \mathbb{R}$ فإن جذري المعادلة مترافقان.

تمارين محلولة:

(١) كون المعادلات التي جذريها:

(أ) $٢ت - ٤$ ، $٤ - ت$

الحل: المعادلة $٢ع - (٢ت - ٤ + ت) + ٤ = ٠$

$$٢ع = ٢ + ت + ٤ + (٤ - ت) = ١٠$$

(ب) $١ + ت$ ، $١ - ت$

الحل: المعادلة $٢ع - (١ + ت + ١ - ت) + ٤ = ٠$

$$٢ع = ٢ + ٢ = ٤$$

لاحظ أن المعادلة معاملاتها حقيقية وذلك لأن الجذرين كانا مترافقان

(ت) معاملاتها حقيقية وأحد جذريها $\frac{٢ - ٣}{٤ - ت}$ ومن الدرجة الثانية

الحل: ∴ المعاملات حقيقية \Leftarrow الجذرين مترافقين

$$\frac{٢ + ت + ٨ - ٣ + ١٢}{١ + ١٦} = \frac{٢ + ت}{٤ + ت} \times \frac{٢ - ٣}{٤ - ت} = ١ع$$

$$\frac{٥}{١٧} + \frac{١٤}{١٧} = ١ع \therefore \frac{٥}{١٧} - \frac{١٤}{١٧} = \frac{٥ - ١٤}{١٧} =$$

المعادلة هي

$$٢ع = \frac{٢٢١}{٢٨٩} + ٤ \frac{٢٨}{١٧} - ٢ع \therefore ٠ = \frac{٢٥}{٢٨٩} + \frac{١٩٦}{٢٨٩} + ٤ \frac{٢٨}{١٧} - ٢ع$$



ث) معاملات غير حقيقية ومجموع جذريها $\frac{3}{5}$ وحاصل ضربهما $\frac{2}{5}$

وحدها المطلق ٢

الحل: المعادلة $٥ = \frac{2}{5} + ٤\frac{3}{5} - ٢$

$٥ \times$

$$\Leftarrow ٥ = ٢ + ٤ - ٢$$

(٢) إذا كان $٢ + ٢$ جذور المعادلة $٥ = ٥ - ٢$ فأوجد قيمة ٢ ثم أوجد الجذر الآخر

الحل:

الجذر يحقق المعادلة

$$٥ = ٥ - ٢(٢ + ٢)$$

$$\Leftarrow ٥ = ٥ - (٨ - ٨ + ٨)$$

$$\Leftarrow ٥ = ٥ - ٨$$

$$\frac{٥}{٨} = ١ \Leftarrow ٥ = ٨$$

$$\therefore \text{المعادلة } \frac{٥}{٨} = ٥ - ٢$$

$$\frac{٥}{٨} = ٢ + ٢ + ٢ \Leftarrow \frac{٥}{٨} = ٢ + ٢ + ٢$$

$$٢ - ٢ - ٢ = ٢ \Leftarrow ٥ = ٢ + ٢ + ٢$$

(٣) إذا كان $٢ + ٣$ جذر للمعادلة $٥ = س + ع + ج + ع^٢$ فأوجد قيمة $ج، س$ ثم أوجد الجذر الآخر

الحل: الجذر يحقق المعادلة $٥ = س + (٢ + ٣)ج + (٢ + ٣)^٢$

$$٥ = س + ١٢ + ٩ - ٦ج + ٣ج + ٤ = س + ١٦ - ٣ج$$

$$٥ = س + ١٦ - ٣ج + ٥ \Leftarrow ٥ = س + ١٦ - ٣ج$$

$$٠ = س + ١٦ - ٣ج \Leftarrow \boxed{١}$$

$$١٢ + ٩ = ٣ج \Leftarrow ٢١ = ٣ج \Leftarrow ٧ = ج$$

بالتعويض

$$٠ = س + ١٦ - ٣ \times ٧$$

$$١٨ = س \Leftarrow ٠ = س + ١٨ - ٢١$$

المعادلة $٥ = س + ع + ج + ع^٢$ $٥ = ١٨ + ع + ٧ + ع^٢$ $٠ = ع^٢ + ع + ١٣$

$$\frac{٦}{١} = \frac{٢}{١}ع + \frac{٣}{١} \Leftarrow \frac{٦}{١} = \frac{٢}{١}ع + \frac{٣}{١}$$

$$٦ = ٢ع + ٣ \Leftarrow ٣ = ٢ع$$

$$٣ + ٢ = ٢ع$$

(٤) معادلة الدرجة الثانية التي مجموع جذريها $٢ - ن$ وحاصل ضربهما ٧ هي

الحل: $٠ = ع^٢ - (٢ - ن)ع + ٧$



$$(٥) \text{ إذا كان } ١ + ت + جذر للمعادلة ت ع^٢ + (ت - ٣) + ع + ج = ٠$$

أوجد ج ثم أوجد الجذر الآخر

الحل:

$$\text{الجذر يحقق المعادلة } ت (ت + ١) + (ت - ٣) + (ت + ١) + ج = ٠$$

$$ت = ج + (١ + ت - ٣ + ٣) + (١ - ت^٢ + ١)$$

$$ج = ت^٢ - ٢ - ت$$

$$\text{المعادلة هي } ت ع^٢ + (ت - ٣) + ع + ج = ٠$$

$$\frac{(ت - ٣) -}{ت} = ٢ع + ١ + \frac{ب}{٢} \Leftarrow$$

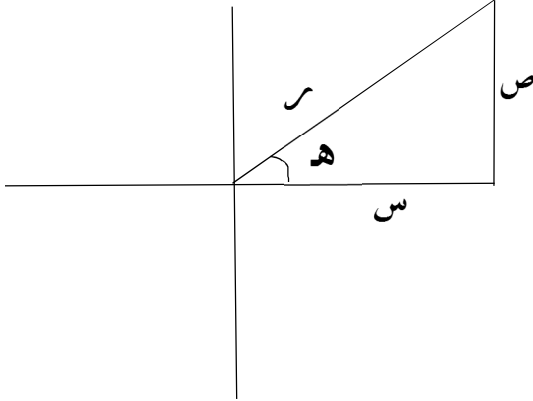
$$١ + \frac{٣}{ت} - = ٢ع + ١ +$$

$$١ + ت^٣ = ٢ع + ١ + \Leftarrow$$

$$ت^٢ = ٢ع$$

الدرس العاشر: (أولاً) تحويل العدد المركب من الصورة

الجبرية إلى المثلثية



من الشكل: $r^2 = s^2 + v^2$

$$r = \sqrt{s^2 + v^2} \Leftarrow$$

ويستخدم هذا القانون لإيجاد طول العدد

المركب r أو ما يسمى بمقياس العدد

المركب $|z|$

من الشكل كذلك $\frac{s}{r} = \cos \theta \Leftarrow s = r \cos \theta$

$\frac{v}{r} = \sin \theta \Leftarrow v = r \sin \theta$

وبالتعويض في $z = s + jt$ نجد أن

$$z = r \cos \theta + jr \sin \theta$$

$$z = r (\cos \theta + j \sin \theta)$$

وهذه هي الصيغة النموذجية للعدد المركب بصورته المثلثية (القطبية) ويمكن كتابتها

بصوره أخرى تسمى بالصورة المختصرة $z = [r, \theta]$ حيث r هو طول العدد

(مقياس العدد) θ هي زاوية العدد (سعة العدد)

إذا كان $z = [r, \theta]$ فإن $z^* = [r, -\theta]$

تمارين محلولة:

(١) اكتب ما يأتي بالصورة [ر، هـ]

$$(٢) \quad ١ + ٤ = ٤$$

الحل:

$$\sqrt{٢} = \sqrt{١+١} = \sqrt{٢} \quad \leftarrow \quad ١ = \sqrt{١} \quad \text{س} \quad ١ = \sqrt{١} \quad \text{ص}$$

$$\frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢}}{٢} = \text{جناه} \quad ، \quad \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢}}{٢} = \text{جناه} \quad \text{ص}$$

$$\text{هـ} = ٤٥^\circ = \frac{\pi}{٤} \quad \text{في الربع الأول}$$

$$[٤٥, \sqrt{٢}]$$

$$(ب) \quad ٢ - ٢ = ٤$$

$$\sqrt{٢} \cdot ٢ = \sqrt{٨} = \sqrt{٤+٤} = \sqrt{٨} \quad \leftarrow \quad ٢ = \sqrt{٤} \quad \text{س} \quad ٢ = \sqrt{٤} \quad \text{ص}$$

$$\frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢}}{٢} = \text{جناه} \quad \text{ص} \quad \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢}}{٢} = \text{جناه} \quad \text{ص}$$

هـ في الربع الرابع (لماذا)

$$\therefore \text{هـ} = ٤٥^\circ = \frac{\pi}{٤} \quad \leftarrow \quad \left[\frac{\pi}{٤}, \sqrt{٢} \cdot ٢ \right] = ٤$$

$$(ت) \quad ٣ + ١ = ٤$$

$$\sqrt{٣} = \sqrt{١+٢} = \sqrt{٣} \quad \leftarrow \quad ١ = \sqrt{١} \quad \text{س} \quad ٣ = \sqrt{٩} \quad \text{ص}$$

$$\frac{\sqrt[3]{1}}{2} = \frac{ص}{ر} = \text{جاه} , \quad \frac{1}{2} = \frac{س}{ر} = \text{جناه}$$

$$\left[\frac{\pi}{3}, 2 \right] = \epsilon \quad \frac{\pi}{3} = 60 = \text{هـ} \quad \text{في الربع الأول}$$

$$\text{(ث)} \quad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt[3]{1}}{2} = \epsilon$$

$$\text{الحل:} \quad \frac{\sqrt[3]{1}}{2} = \frac{س}{ر} \quad \frac{1}{2} = \frac{ص}{ر} \quad \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{1}{2} = \frac{ص}{ر} \quad \frac{1}{4} = \frac{ص}{ر} \quad \frac{3}{4} = \frac{س}{ر} \quad \frac{1}{4} = \frac{ص}{ر} \quad \frac{3}{4} = \frac{س}{ر}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{ص}{ر} = \text{جاه} \quad \frac{\sqrt[3]{1}}{2} = \frac{س}{ر} = \text{جناه}$$

$$\frac{\pi}{6} = 30 = \text{هـ} \quad \therefore \text{في الربع الرابع}$$

$$\left[\frac{\pi}{6}, 1 \right] = \epsilon$$

$$\text{(ج)} \quad \epsilon = 5$$

$$\text{الحل:} \quad \frac{0}{5} = \frac{س}{ر} = 0 = \text{ص} \quad \frac{5}{5} = \frac{ص}{ر} = 1 = \text{جاه}$$

$$\frac{0}{5} = \frac{س}{ر} = \text{جناه}$$

$$\frac{5}{5} = \frac{ص}{ر} = \text{جاه}$$

$$\left[\frac{\pi}{2}, 5 \right] = \epsilon \quad \frac{\pi}{2} = 90 = \text{هـ} \quad \therefore \text{محورية}$$

(ج) $ع = ٩ - ت$

الحل: $س = ٠$ ، $ص = ٩ -$ ، $ر = \sqrt{٨١} = ٩$

جناها $= \frac{٠}{٩} = ٠$ ، جها $= \frac{٩}{٩} = ١ -$

هـ محورية: $\therefore هـ = ٢٧٠ = \frac{\pi^3}{٢}$

$ع = \left[\frac{\pi^3}{٢} , ٩ \right]$

(خ) $ع = ٥$

الحل: $س = ٥$ ، $ص = ٠$ ، $ر = \sqrt{٢٥} = ٥$

جناها $= ١$ ، جها $= ٠$

هـ محورية: $هـ = ٠$

$ع = [٠, ٥]$

(د) $ع = ٥ -$

الحل: $س = ٥ -$ ، $ص = ٠$ ، $ر = \sqrt{٢٥} = ٥$

جناها $= ١ -$ ، جها $= ٠$

هـ محورية: $\therefore هـ = ١٨٠ = \pi$

$ع = [\pi, ٥]$

$$(ذ) \quad ع = جئا + ٦٠جا$$

الحل: العدد بصورته النموذجية

$$\therefore ع = [٦٠, ١]$$

$$(ر) \quad ع = جئا - تجا$$

الحل: (س، - ص) في الربع الرابع تثبت

$$ع = جئا - هـ + تجا - (هـ)$$

$$ع = [١, - هـ]$$

$$(ز) \quad ع = جئا - تجا$$

الحل: (- س، - ص) في الربع الثالث تثبت

$$ع = جئا + (\pi + هـ) + تجا + (\pi + هـ)$$

$$ع = [١ + \pi, هـ + \pi]$$

$$(س) \quad ع = جئا - تجا$$

الحل: (- س، - ص) في الربع الثالث قلب (لماذا)

$$ع = جئا + \left(هـ - \frac{\pi^3}{2}\right) + تجا + \left(هـ - \frac{\pi^3}{2}\right)$$

$$= \left[١ - \frac{\pi^3}{2}, هـ - \frac{\pi^3}{2}\right]$$

(ش) $\frac{ت}{جاه} = ع$ ، $٠ < هـ < ٩٠$

الحل: $٠ = س$ ، $\frac{١}{جاه} = ص$ ، $\frac{١}{جاه} = \sqrt{\frac{١}{جاه^٢}} = ر$

جناه $= \frac{٠}{\frac{١}{جاه}} = ٠$ ، $جاه = ١$ ، $\frac{\pi}{٢} = هـ$.

$\left[\frac{\pi}{٢} , \frac{١}{جاه} \right] = ع$

قواعد هامة:

(من الأمثلة السابقة نستنتج)

(١) إذا كان $٢ \ni ع^+$ فان

العدد	٢	٢ -	٢	٢ -
الطول	٢	٢	٢	٢
الزاوية	صفر	π	$\frac{\pi}{٢}$	$\frac{\pi^٣}{٢}$

(٢) إذا كان الجزء الحقيقي = الجزء التخيلي أي $س = ص$ فإن الزاوية ٤٥° مع مراعات موقعها في أي ربع.

(٣) إذا كان $\sqrt[٣]{٣}$ هو معامل التخيلي فإن الزاوية ٦٠° مع مراعات موقعها في أي ربع.

(٤) إذا كان $\sqrt[٣]{٣}$ هو الحقيقي فإن الزاوية ٣٠° مع مراعات موقعها في أي ربع.

ثانياً) تحويل العدد المركب من الصورة المثلثية إلى

الجبرية

لتحويل العدد من الصورة المثلثية إلى الجبرية نقوم بفك النسبة فقط

تمارين محلولة:

(١) حول ما يأتي إلى الصورة الجبرية $s + jt$

$$(١) \quad ٤ = (١٢ + j١٢ + ١٢ - j١٢)$$

$$\text{الحل:} \quad ٤ = (٦٠ - j١٨ + ٦٠ + j١٨)$$

$$٤ = (٦٠ + j٦٠ - ٦٠ - j٦٠)$$

$$\left(\frac{3}{2} \times t + \frac{1}{2} - \right)^2 = ٤$$

$$٤ = ١ - ٣t$$

$$(ب) \quad ٤ = ٢٤ + j٢٤ + ٢٤ - j٢٤$$

$$\text{الحل:} \quad ٤ = ٦٠ + j١٨ + ٦٠ - j١٨$$

$$٤ = ٦٠ - ٦٠ - j٢٤ + j٢٤$$

$$٤ = \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}$$

$$٤ = \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}$$

$$(ت) ع = ج٦٠ + ت٣٠$$

$$\text{الحل: } ع = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times ت$$

$$ع = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} ت$$

$$(٢) \text{ إذا كان } ع = ج٦٠ + ت٣٠ \text{ أكتب } ع \text{ بالصورة } [ر، هـ]$$

الحل: لاحظ أن الزاوية غير متساوية

∴ نحول العدد إلى جبري ثم إلى مثلثي

$$ع = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times ت$$

$$ر = \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{2}$$

$$ع = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} ت$$

$$\text{لاحظ } س = ص ، هـ = ٤٥$$

∴ هـ في الربع الأول

$$ع = \left[٤٥ , \frac{1}{2} \right]$$

$$(٣) \text{ إذا كان } ع = س + ٤ت \text{ أوجد قيمة } س \text{ التي نجعل } |ع| = ٥$$

$$\text{الحل: } |ع| = ٥ = ر = \sqrt{١٦ + ٢س}$$

$$\Leftarrow ٥ = \sqrt{١٦ + ٢س} \text{ بالتربيع}$$

$$٢٥ = ١٦ + ٢س \Leftarrow ٩ = ٢س \Leftarrow ٣ \pm = س$$

أ. فؤاد حسن راشد العبسي

(٤) هل العدد $\epsilon \left(\frac{\pi}{2} \text{جا} + \frac{\pi}{2} \text{تجا} \right)$ حقيقي أم تخيلي وضح ذلك

الحل: $\epsilon = (1 + 0 \times \text{ت} + 0 \times \text{جا}) \epsilon = (1) \epsilon$

∴ حقيقي بحت

(٥) حول إلى مثلثي

$$1) \quad \sqrt{2} - \sqrt{8} - \sqrt{2} = \epsilon$$

الحل: $\epsilon = \sqrt{2} - 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = -2\sqrt{2}$

$$\epsilon = -\sqrt{2} - \sqrt{2} - \sqrt{2} = -3\sqrt{2}$$

$$\epsilon = -\sqrt{2} - (1 - 3\sqrt{2})$$

لاحظ $3\sqrt{2}$ في التخيلي

هـ في الربع الثالث ∴ $\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \times \sqrt{2} = \sqrt{3+1} \times \sqrt{2} = \sqrt{6}$$

$$\left[\frac{4\pi}{3}, \sqrt{6} \right] = \epsilon$$

لاحظ اننا الان نحول إلى مثلثي بطريقة النظر بعد معرفتنا لشكل الاعداد المركبة المشهورة

$$\text{ب) } \frac{3 - \text{ت}}{1 - 2\text{ت}} = \epsilon$$

الحل:

البسط والمقام عددين مركبين غير مشهورين ∴ نضرب \times مرافق المقام للتبسيط
أ. فؤاد حسن راشد العبسي

$$\frac{2+t-3+3}{4+1} = \frac{2+1}{2+1} \times \frac{3-t}{2-1} = \epsilon$$

$$t+1 = \frac{5+5}{5} = \epsilon$$

الآن $s = \text{ص}$ والزاوية في الربع الأول $\therefore h = 50$

$$\sqrt{2} = \sqrt{1+1} = r$$

$$[\epsilon, \sqrt{2}] = \epsilon$$

$$\frac{4+4}{\sqrt{3}+1} = \epsilon \quad (\text{ت})$$

الحل: بأخذ عامل مشترك في البسط

$$\epsilon = \frac{4(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)} = \epsilon$$

العدد حقيقي بحت موجب

$$\therefore \text{الزاوية} = 0, \quad \epsilon = r$$

$$[\epsilon, \epsilon] = \epsilon$$

(٦) أوجد $|\epsilon|$ أي طول العدد

$$(أ) \quad \sqrt{3} + \sqrt{6} = \epsilon$$

$$\text{الحل: } |\epsilon| = r = \sqrt{s^2 + v^2}$$

$$3 = \sqrt{6} = \sqrt{3+3} =$$

أ. فؤاد حسن راشد العباسي

الحل: $\epsilon = \sqrt{16} = \sqrt{5+11} = \sqrt{2\text{ص} + 2\text{س}} = r = |\epsilon|$

الحل: العدد غير جاهز

$\mathfrak{E} = \mathcal{r} = |\mathcal{E}|$ العدد نفسه

الحل: $|ع| = ٢$ مباشرة بالنظر

الحل: ∴ الزاوية $\frac{\pi}{2}$ ∴ العدد تخيلي أي الحقيقي فيه = 0

$$\xi = \text{س} \Leftarrow \quad \cdot = \xi - \text{س} \Leftarrow$$

(٨) إذا كان $ع = ٩ + ٢ + ١ = ت$ وكانت $هـ = \frac{\pi}{٤}$ أوجد $ل$

الحل: جناه $\frac{س}{ر} = \frac{\pi}{٤} \Leftarrow$ جناه $\frac{٢ + ١}{\sqrt[٢]{٩ + (٢ + ١)}} = \frac{\pi}{٤}$

بالتربيع $\frac{٢ + ١}{\sqrt[٢]{٨١ + (٢ + ١)}} = \frac{١}{\sqrt[٢]{٢}} \Leftarrow$

$\frac{(٢ + ١)}{\sqrt[٢]{٨١ + (٢ + ١)}} \times \frac{١}{\sqrt[٢]{٢}}$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$٨١ + (٢ + ١) = (٢ + ١)٢$

بأخذ الجذر للطرفين $٨١ = (٢ + ١)$

$٧ = ١ \Leftarrow ٩ = ٢ + ١ \Leftarrow ٩ \pm = (٢ + ١)$

أو $١١ = ١ \Leftarrow ٩ = ٢ + ١$

(٩) إذا كانت زاوية العدد المركب $ع = -٤ + (٣ - ٤)ت$ هي π فما قيمة

ص

الحل: \therefore الزاوية π \therefore العدد حقيقي التخيلي $= ٠$

$\frac{٤}{٣} = ص \Leftarrow ٣ - ٤ = ٠ \Leftarrow ٣ - ٤ = ص$

الدرس الحادي عشر: العمليات الحسابية للعدد

المركب [ر، هـ]

$$\text{إذا كان } [ر، هـ] = {}_١ع ، [ر، هـ] = {}_٢ع$$

فإن:

$$(١) [ر، هـ + ر، هـ] = {}_٢ع \times {}_١ع$$

أي في الضرب: نضرب الطولين ونجمع الزاويتين

$$(٢) \left[ر، هـ - ر، هـ \right] = {}_٢ع \div {}_١ع$$

أي في القسمة: نقسم الطولين ونطرح الزاويتين

$$\text{مثال: إذا كان } [ر، هـ] = \left[\frac{\pi}{٤} ، ٢ \right] ، [ر، هـ] = -٤$$

أوجد ${}_١ع \times {}_٢ع$ ، ${}_٢ع \div {}_١ع$

$$\text{الحل: } [ر، هـ] = \left[\frac{\pi}{٤} ، ٢ \right] ، [ر، هـ] = [\pi ، ٤]$$

$$[ر، هـ] \times \left[\frac{\pi}{٤} ، ٢ \right] = {}_٢ع \times {}_١ع$$

$$\left[\frac{\pi ٥}{٤} ، ٨ \right] = \left[\pi + \frac{\pi}{٤} ، ٨ \right] =$$

$$\left[\frac{\pi ٣}{٤} - ، \frac{١}{٢} \right] = \left[\pi - \frac{\pi}{٤} ، \frac{١}{٢} \right] = \frac{\left[\frac{\pi}{٤} ، ٢ \right]}{[ر، هـ]} = {}_٢ع \div {}_١ع$$



تمارين محلولة:

(١) إذا كان

$${}_1\epsilon = {}_1\text{ر}({}_1\text{جناه} + {}_1\text{تجاه}), \quad {}_2\epsilon = {}_2\text{ر}({}_2\text{جناه} + {}_2\text{تجاه})$$

أثبت أن

$$(أ) \quad [{}_2\epsilon, {}_1\epsilon] = {}_2\epsilon \cdot {}_1\epsilon$$

$$(ب) \quad \left[\frac{{}_1\epsilon}{{}_2\epsilon}, {}_2\epsilon - {}_1\epsilon \right] = \frac{{}_1\epsilon}{{}_2\epsilon}$$

$$\text{الحل: (١)} \quad {}_2\epsilon \cdot {}_1\epsilon = {}_2\text{ر}({}_2\text{جناه} + {}_2\text{تجاه}) \times {}_1\text{ر}({}_1\text{جناه} + {}_1\text{تجاه})$$

$$= {}_2\text{ر}({}_2\text{جناه} + {}_2\text{جناه} + {}_2\text{تجاه} + {}_2\text{تجاه} - {}_2\text{جناه} - {}_2\text{تجاه})$$

$$= {}_2\text{ر}({}_2\text{جناه} - {}_2\text{جناه} + {}_2\text{جناه} + {}_2\text{جناه} - {}_2\text{تجاه} + {}_2\text{تجاه})$$

$$= {}_2\text{ر}({}_2\text{جنا} + {}_2\text{جنا} + {}_2\text{تجا} + {}_2\text{تجا})$$

$$= [{}_2\epsilon, {}_1\epsilon]$$

$$(ب) \quad \frac{{}_1\epsilon}{{}_2\epsilon} = \frac{{}_1\text{ر}({}_1\text{جناه} + {}_1\text{تجاه})}{{}_2\text{ر}({}_2\text{جناه} + {}_2\text{تجاه})}$$

$$= \frac{{}_1\text{ر}({}_1\text{جناه} + {}_1\text{تجاه})({}_2\text{جناه} - {}_2\text{تجاه})}{{}_2\text{ر}({}_2\text{جناه} + {}_2\text{تجاه})({}_2\text{جناه} - {}_2\text{تجاه})} \times \frac{{}_2\text{جناه} - {}_2\text{تجاه}}{{}_2\text{جناه} - {}_2\text{تجاه}} =$$

$$\frac{جناه، جناه - ت جناه، جاه + ت جاه، جناه + جاه، جاه}{جناه + جاه} \times \frac{١}{٢} =$$

$$\frac{جناه، جناه + جاه، جاه + ت (جاه، جناه - جناه، جاه)}{١} \times \frac{١}{٢} =$$

$$\left((جناه - جاه) + (جاه - جناه) \right) \times \frac{١}{٢} =$$

$$\left[جاه - جاه، \frac{١}{٢} \right] =$$

(٢) أوجد $جاه، جاه$ ، $\frac{١}{٢} جاه$ بالصورة $[جاه، جاه]$

(أ) $جاه = ٢ (جناه + ت جناه)$

$جاه = ٣ (جناه + ت جناه)$

الحل: نلاحظ أن $جاه، جاه$ جاهز بالصيغة النموذجية يحول إلى المختصرة مباشرة

$$جاه = ٢، جاه = ٣ [جاه، جاه] = ٢، جاه = ٣ [جاه، جاه]$$

$$جاه \times جاه = ٢، جاه \times ٣، جاه = [جاه، جاه] \times [جاه، جاه]$$

$$جاه، ٦ = [جاه + جاه، ٦] =$$

$$\left[جاه - \frac{٢}{٣} \right] = \left[جاه - جاه، \frac{٢}{٣} \right] = \frac{جاه، ٢}{[جاه، ٣]} = \frac{١}{٢}،$$

(ب) $جاه = جاه + ت جناه$ ، $جاه = ١، جاه$

الحل: نلاحظ أن $جاه$ غير جاهز العدد في الربع الأول (قلب)

أ. فواز حسن راشد العبيسي



$$\left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) + \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \pi - 2\theta$$

$$\left[\frac{\pi}{2} - \theta, 1 \right] =$$

$$\left[\frac{\pi}{2}, 1 \right] = [1, \theta] \times \left[\frac{\pi}{2} - \theta, 1 \right] = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\left[\frac{\pi}{2} - \theta, 1 \right] = \frac{\left[\frac{\pi}{2} - \theta, 1 \right]}{[1, \theta]} = \frac{1}{2}$$

$$(3 - \theta) = \frac{1}{2}, \quad (4 - \theta) = \frac{1}{2}$$

نلاحظ $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ غير جاهزين

$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ في الحقيقي \therefore الزاوية 30° في الربع الرابع (س، -ص)

$$2 = \sqrt{4} = \sqrt{1+3} = r \quad \therefore \theta = 30^\circ$$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{2} = [30^\circ, 2]$ لاحظ استخدمنا طريقة النظر ويمكن استخدام الطريقة المباشرة

بتحديد س، ص و جاه، جناه

$$[150^\circ, 4] = \frac{1}{2}$$

$$[120^\circ, 8] = [150^\circ, 4] \times [30^\circ, 2] = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\left[180^\circ - \frac{1}{2} \right] = \frac{[30^\circ, 2]}{[150^\circ, 4]} = \frac{1}{2}$$

(3) إذا كان $\frac{1}{2} = 1 + \theta$ ، $\frac{1}{2} = 1 + \theta$ ، $0 < \theta$ أوجد $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

بالصورة [ر، هـ]

أ. فؤاد حسن راشد العيسى

الحل: نلاحظ أن $\epsilon, \epsilon, \epsilon$ ليس عدد مركب مشهور. \therefore نبدأ بالجمع قبل التحويل

إلى $[\epsilon, \epsilon]$

$$\epsilon + \epsilon + (1 + \epsilon) = \epsilon + 1 + \epsilon + \epsilon = \epsilon + \epsilon$$

$$= (1 + \epsilon) + (1 + \epsilon) \quad \text{عدد مشهور في الربع الأول صيغته } \epsilon = \text{ص}$$

$$\therefore \epsilon = \frac{\pi}{4}$$

$$\sqrt[2]{(1 + \epsilon) + \sqrt[2]{(1 + \epsilon)}} = \sqrt[2]{\text{ص} + \sqrt[2]{\text{س}}} = \epsilon$$

$$\sqrt[2]{(1 + \epsilon)} = \sqrt[2]{(1 + \epsilon)} = \epsilon$$

$$\left[\frac{\pi}{4}, \sqrt[2]{(1 + \epsilon)} \right] = [\epsilon, \epsilon] = \epsilon \therefore$$

$$\frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon} = \epsilon \quad (4) \quad \text{أوجد } |\epsilon| \text{ (طول العدد) وكذلك سعته } \epsilon$$

الحل: العدد غير جاهز

$$\frac{\frac{\text{جاه} + \text{جاه}}{\text{جاه}}}{\frac{\text{جاه} - \text{جاه}}{\text{جاه}}} = \frac{\frac{1 + \epsilon}{\epsilon}}{\frac{1 - \epsilon}{\epsilon}} = \epsilon \therefore$$

$$\Leftarrow \epsilon = \frac{\text{جاه} + \text{جاه}}{\text{جاه} - \text{جاه}} = \frac{\text{جاه} + \text{جاه}}{\text{جاه} - \text{جاه}}$$

$$= \frac{[\epsilon, 1]}{[1, -\epsilon]} = [\epsilon, 1] = \frac{1}{\epsilon} = \text{الطول} = 1 \text{ والسعة} = \epsilon$$

(٥) أوجد طول العدد وزاويته:

$$\frac{1-}{1+\sqrt{3}} = \epsilon$$

الحل: البسط $1-\pi$ (لماذا)

$$\text{المقام } \sqrt{1+\sqrt{3}} = \sqrt{4} = 2 \leftarrow \sqrt{1+\sqrt{3}} = r$$

$\sqrt{3}$ في التخيلي ، ه في الربع الأول

$$\therefore \text{ ه } = 60 = \frac{\pi}{3} \text{ المقام } \left[\frac{\pi}{3}, 2 \right]$$

$$\left[\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2} \right] = \left[\frac{\pi}{3} - \pi, \frac{1}{2} \right] = \frac{[\pi, 1]}{\left[\frac{\pi}{3}, 2 \right]} = \epsilon$$

(٦) إذا كان $\epsilon = 3 - 3\text{جاه} - 3\text{جتاه}$ أوجد سعة ϵ

الحل: $\epsilon = 3 - (3\text{جاه} - 3\text{جتاه})$

العدد غير جاهز وهو في الربع الثالث (قلب)

$$\left(\left(3 - \frac{\pi}{2} \right) \text{جا} + \left(3 - \frac{\pi}{2} \right) \text{جتا} \right)^3 = \epsilon$$

$$\left[3 - \frac{\pi}{2}, 3 \right] \times [\pi, 2] = \epsilon \leftarrow \left[3 - \frac{\pi}{2}, 3 \right] = \epsilon$$

$$\left[3 - \frac{\pi}{2}, 6 \right] = \left[3 - \frac{\pi}{2} + \pi, 6 \right] = \epsilon \leftarrow$$

∴ السعة هي $\frac{\pi}{2} - \theta$

(٧) إذا كان $e = 2 + 2i$ أوجد قيمة θ التي تجعل زاوية العدد $\frac{\pi}{4}$

الحل: جناه $\frac{s}{r} = \cos \theta \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{\pi}{4}$

جناه $\frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$

بالتربيع

$$8 = 2 + 2 \Rightarrow \frac{4}{2 + 2} = \frac{1}{2}$$

$$2 \pm 2 = 2 \Rightarrow 4 = 2 \Rightarrow 4 - 8 = 2$$



الدرس الثاني عشر: خواص العدد المركب بالصورة

[ر، هـ]

إذا كان $ع = [ر، هـ]$ فإن

$$(١) \quad \bar{ع} = [ر - هـ] \text{ ويسمى مرافق العدد}$$

$$(٢) \quad ع^{-١} = \frac{١}{ع} = \left[\frac{١}{ر} - هـ \right] \text{ ويسمى المعكوس الضربي للعدد}$$

$$(٣) \quad ع - \pi = [ر، هـ + \pi] \text{ ويسمى المعكوس الجمعي للعدد}$$

مثال: إذا كان $ع + ١ = ت$ ° أوجد $\bar{ع}$ ، $ع - ع$ ، $\frac{١}{ع}$ بالصورة [ر، هـ]

الحل: نحول $ع$ إلى الصورة [ر، هـ]

$$\left[\frac{\pi}{٤}، \sqrt{٢} \right] = ت + ١ = ع \Leftarrow$$

$$\left[\pi + \frac{\pi}{٤}، \sqrt{٢} \right] = ع - ع = \bar{ع} \therefore \left[\frac{\pi}{٤} - ، \sqrt{٢} \right]$$

$$\left[\frac{\pi}{٤}، \sqrt{٢} \right] = ع - ع \Leftarrow$$

$$\left[\frac{\pi}{٤} - ، \frac{١}{\sqrt{٢}} \right] = \frac{١}{ع}،$$

مثال:

(١) إذا كان $\bar{z} = [z, h]$ أثبت أن

$$(أ) \quad \bar{\bar{z}} = z$$

$$(ب) \quad \bar{z - \pi} = \bar{z} - \pi$$

$$(ج) \quad \bar{\left[z, \frac{1}{h} \right]} = \frac{1}{\bar{h}}$$

الحل:

$$(أ) \quad \text{نضع } z = r(j\theta + t\phi)$$

$$\bar{z} = r(j\theta - t\phi) \quad \text{في الربع الرابع (تثبيت)}$$

$$\bar{\bar{z}} = r(j\theta + t\phi) = z$$

$$\bar{[z, h]} = \bar{z} - \pi$$

$$(ب) \quad \text{نضع } z = r(j\theta + t\phi)$$

$$\bar{z - \pi} = \bar{z} - \pi \quad \text{في الربع الثالث (تثبيت)}$$

$$\bar{z - \pi} = \bar{z} - \pi$$

$$\bar{[z, h + \pi]} = \bar{z} - \pi$$

(ج) نضع $\varepsilon = r(\text{جناه} + \text{تجاه})$

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{r} \left(\frac{\text{جناه} - \text{تجاه}}{\text{جناه} + \text{تجاه}} \times \frac{1}{\text{جناه} + \text{تجاه}} \right)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{r} \left(\frac{\text{جناه} - \text{تجاه}}{\text{جناه} + \text{تجاه}} \right)$$

$$\left[\frac{1}{r}, -\varepsilon \right] = \frac{1}{\varepsilon} \frac{(\text{جناه} - \text{تجاه}) + (\text{جناه} - \text{تجاه})}{1} = \frac{1}{\varepsilon}$$

تمارين محلولة:

(١) أوجد $\varepsilon - \bar{\varepsilon}$ ، $\frac{1}{\varepsilon}$ في كل من:

(أ) $[\pi - \varepsilon, \pi]$

الحل: $[\pi - \varepsilon, \pi] = [\pi + \pi - \varepsilon, \pi] = \varepsilon -$

$$[\pi - \varepsilon, \pi] = \bar{\varepsilon}$$

$$\left[\pi, \frac{1}{\varepsilon} \right] = \frac{1}{\varepsilon}$$

(ب) $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$

الحل: $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$

$$1 = 2 \times \frac{1}{2} = \sqrt{3+1} \sqrt{\frac{1}{2}} = r$$

لاحظ $\sqrt{3}$ عند الجزء التخيلي $h = 60^\circ$ في الربع الثاني

$$أي هـ = 120 = 60 - 180$$

$$[30, 0, 1] = [180, 0, 1] = \varepsilon - \leftarrow [120, 0, 1] = \varepsilon$$

$$[120, 0, 1] = \bar{\varepsilon}$$

$$[120, 0, 1] = \frac{1}{\varepsilon}$$

(٢) إذا كان $\varepsilon = \text{جاه} - \text{تجاه}$ أوجد سعة ε^{-1}

الحل: ε غير جاهز العدد في الربع الثالث (قلب)

$$\varepsilon = \text{جنا} \left(h - \frac{\pi^3}{2} \right) + \text{تجا} \left(h - \frac{\pi^3}{2} \right)$$

$$\left[h - \frac{\pi^3}{2}, 1 \right] = \varepsilon$$

$$\left[\frac{\pi^3}{2} - h, 1 \right] = \varepsilon^{-1}$$

$$\frac{\pi^3}{2} - h = \text{سعة } \varepsilon^{-1} \leftarrow$$

(٣) إذا كان ${}_١ع = ٢-٢جاه-٢تجناه، {}_٢ع = \left[\frac{\pi}{٣}, {}_٣ن \right]$ أوجد ${}_٣هـ، {}_٣ن$ إذا

كان ${}_١ع، {}_٢ع، {}_٣ع$ مترافقين

الحل:

${}_١ع$ غير جاهز $\Leftarrow {}_١ع = ٢-٢جاه-٢تجناه$ (العدد في الربع الثالث (قلب)

$${}_١ع = ٢-٢جنا\left(\frac{\pi}{٣} - {}_٣هـ\right) + ٢جا\left(\frac{\pi}{٣} - {}_٣هـ\right)$$

$${}_١ع = \left[٢-٢جنا\left(\frac{\pi}{٣} - {}_٣هـ\right), ٢جا\left(\frac{\pi}{٣} - {}_٣هـ\right) \right]$$

$\therefore {}_١ع، {}_٢ع، {}_٣ع$ مترافقين

فإنهما متساويان في الطول ولكن ${}_١هـ = -{}_٢هـ$ أو العكس

$$\Leftarrow {}_٣ن = ٢, \quad \left(\frac{\pi}{٣} - {}_٣هـ\right) - {}_٣هـ = \frac{\pi}{٣}$$

$$\frac{\pi}{٣} = {}_٣هـ \Leftarrow \frac{\pi}{٣} + \frac{\pi}{٣} = {}_٣هـ$$

الدرس الثالث عشر: القوى والجذور بالصورة [ر، هـ]

(قاعدة دي موافر)

أولاً: القوى

$$\text{إذا كان } [ر، هـ] = ع \text{ فإن } [ر^٢، هـ] = ع^٢$$

$$\text{فمثلاً: إذا كان } [ر، هـ] = ع \text{ فإن } \left[\frac{\pi ٣}{٢}, ٢ \right] = ع$$

$$\text{فإن } [ر، هـ] = ع \text{ فإن } \left[\frac{\pi ٣}{٢} \times ٢, ٢ \right] = ع^٢$$

$$\left[\frac{\pi ١٥}{٢}, ٣٢ \right] = \left[\frac{\pi ٣}{٢} \times ٥, ٢ \right] = ع^٥$$

ثانياً: الجذور

$$\text{إذا كان } [ر، هـ] = ع \text{ فإن } \left[\frac{ر + \pi ٢}{٢}, ٢ \right] = ع^{\frac{١}{٢}}$$

$$ع = ١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦, ٧, ٨, ٩, ١٠, ١١, ١٢, ١٣, ١٤, ١٥, ١٦, ١٧, ١٨, ١٩, ٢٠, \dots$$

$$\left[\frac{\pi ٣}{٢}, ٢ \right] = ع$$

$$\left[\frac{ر + \frac{\pi ٣}{٢}}{٢}, ٢ \right] = ع^{\frac{١}{٢}} \text{ فإن}$$

ولان الجذر تربيعي فإن له جذرين وذلك



$$\left[\frac{\pi^3}{4}, \sqrt[4]{} \right] = 1, \text{ع} \text{ عند } 0 = \text{هو}$$

$$\left[\frac{\pi^7}{4}, \sqrt[4]{} \right] = \left[\frac{\pi^2 + \frac{\pi^3}{2}}{2}, \sqrt[4]{} \right] = 1, \text{ع} \text{ عند } 1 =$$

$$\left[\frac{\pi^2 + \frac{\pi^3}{2}}{0}, \sqrt[4]{}^\circ \right] = \sqrt[4]{}^\circ,$$

ولان الجذر الخامس \Leftarrow له خمسة جذور

$$\left[\frac{\pi^3}{10}, \sqrt[4]{}^\circ \right] = 1, \text{ع} \text{ عند } 0 =$$

$$\left[\frac{\pi^7}{10}, \sqrt[4]{}^\circ \right] = \left[\frac{1 \times \pi^2 + \frac{\pi^3}{2}}{0}, \sqrt[4]{}^\circ \right] = 1, \text{ع} \text{ عند } 1 =$$

وبقية الجذور نحصل عليها من إضافة الفرق بين الجذر الأول والثاني وهو هنا $\frac{\pi^4}{10}$

$$\left[\frac{\pi^{11}}{10}, \sqrt[4]{}^\circ \right] = 3, \text{ع} \text{ أي}$$

$$\left[\frac{\pi^{15}}{10}, \sqrt[4]{}^\circ \right] = 4, \text{ع}$$

$$\left[\frac{\pi^{19}}{10}, \sqrt[4]{}^\circ \right] = 0, \text{ع}$$

تمارين محلولة:

(١) إذا كان $z = \sqrt[3]{2} (t + j\sqrt{3})$ اكتب z بالصورة $[r, \theta]$

الحل: $r = \sqrt[3]{2^2 + 3} = \sqrt[3]{10} = 2$ θ في الربع الأول

$$\sqrt[3]{2} \text{ في الحقيقي } \Leftarrow \theta = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

$$z = \sqrt[3]{2} \left[\frac{\pi}{6}, 2 \right] \text{ العدد يحوي قوة وجذور}$$

$$z = \sqrt[3]{2} \left[\frac{\pi}{3}, 4 \right] = \sqrt[3]{2} \left[2 \times \frac{\pi}{6}, 2^2 \right]$$

$$\left[\frac{2\pi + \frac{\pi}{3}}{3}, 4 \right] = z$$

$$\left[\frac{\pi}{15}, 4 \right] = z \text{ ومنه عند } \theta = 0^\circ$$

$$\left[\frac{\pi}{15}, 4 \right] = \left[\frac{1 \times 2 + \frac{\pi}{3}}{3}, 4 \right] = z \text{ عند } \theta = 1^\circ$$

وباقى الجذور نوجدتها بإضافة $\frac{\pi}{15}$ هي الفارق بين الجذرين الثاني والأول

$$\left[\frac{\pi}{15}, 4 \right] = z$$

$$\left[\frac{\pi 19}{10}, \sqrt[4]{4} \right] = \epsilon$$

$$\left[\frac{\pi 20}{10}, \sqrt[4]{4} \right] = \epsilon$$

(٢) إذا كان $\epsilon = (1 - t)^2$ أكتب ϵ بالصورة $[r, \theta]$

الحل: $\epsilon = \left[\frac{\pi}{4}, \sqrt[4]{4} \right]$ لأن $s = v$ والزاوية في الربع الرابع

$$\left[\frac{\pi}{4}, \sqrt[4]{4} \right] = \epsilon$$

$$\left[\frac{\pi}{2}, 8 \right] = \left[\frac{\pi}{4}, \sqrt[4]{4} \times 2 \right] = \epsilon$$

(٣) إذا كان $\epsilon = 2 + 2\sqrt{3}t$ أوجد ϵ بالصورة $[r, \theta]$

الحل: $\epsilon = (1 + \sqrt{3}t)^2$

$$4 = \sqrt[4]{4}^2 = \sqrt[3]{4 + 1}^2 = r$$

θ في الربع الأول ، $\sqrt{3}$ في التخيلى $\Leftarrow \theta = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$

$$\sqrt[4]{4} [\pi, 64] = \sqrt[4]{4} \left[\frac{\pi 3}{3}, 4 \right] = \epsilon \Leftarrow \left[\frac{\pi}{3}, 4 \right] = \epsilon$$

$$\left[\frac{\pi 2 + \pi}{2}, \sqrt[4]{4} \right] = \epsilon \Leftarrow$$

$$\left[\frac{\pi}{2}, 8 \right] = \epsilon$$

$$\left[\frac{\pi^3}{2}, 8 \right] = \left[\frac{1 \times \pi^2 + \pi}{2}, 8 \right] = {}_2\mathcal{E} \quad \text{عند } k=1$$

$$(4) \text{ إذا كان } \mathcal{E} = \left[\frac{\pi}{3}, 2\sqrt{3} \right] \text{ أوجد } {}_6\mathcal{E}$$

$$\text{الحل: } {}_6\mathcal{E} = \left[\frac{\pi}{3} \times 6, {}_6(2\sqrt{3}) \right] = \left[\pi^2, 8 \right]$$

$$(5) \text{ إذا كان } (1 - 3\sqrt{3})\mathcal{E} = {}_4\mathcal{E} \text{ ، } 3\sqrt{3} + \mathcal{T} = {}_4\mathcal{E} \text{ ، } \left[\frac{\pi^3}{4}, 2 \right] \text{ أثبت أن}$$

$$({}_4\mathcal{E} \cdot {}_4\mathcal{E}) \text{ حقيقي صرف}$$

الحل: أولاً نوجد \mathcal{E} نلاحظ العددين مشهورين \therefore نحولهما إلى مثلثي

$$1 - 3\sqrt{3} = \mathcal{R} \text{ نلاحظ } 2 = 4\sqrt{3}$$

$3\sqrt{3}$ في التخييلي والعدد في الربع الرابع

$$\therefore \mathcal{H} = \frac{\pi}{3} - \text{العدد} - 1 = 3\sqrt{3} - \left[\frac{\pi}{3} - 2 \right]$$

$$\text{بالمثل } 3\sqrt{3} + \mathcal{T} = \mathcal{R} \quad 2 = 4\sqrt{3}$$

$3\sqrt{3}$ في الحقيقي والعدد في الربع الأول

$$\left[\frac{\pi}{6}, 2 \right] = 3\sqrt{3} + \mathcal{T} \Leftarrow \frac{\pi}{6} = \mathcal{H}$$

بالتعويض في المعادلة

$$\left[\frac{\pi}{6}, 2 \right] = \mathcal{E} \left[\frac{\pi}{3} - 2 \right]$$



$$\left[\frac{\pi}{2}, 1\right] = \left[\frac{\pi^3}{6}, 1\right] = \left[\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, 1\right] = \frac{\left[\frac{\pi}{6}, 2\right]}{\left[\frac{\pi}{3}, -2\right]} = \varepsilon$$

$$\left(\left[\frac{\pi^3}{4}, 2\right] \cdot \left[\frac{\pi}{2}, 1\right]\right) = {}^{\varepsilon}(\varepsilon, \varepsilon) \Leftarrow$$

$$[\pi, 16] = [\pi^5, 16] = \left[\frac{\pi^5}{4} \times 4, {}^{\varepsilon}2\right] = {}^{\varepsilon}\left[\frac{\pi^5}{4}, 2\right] =$$

إذا ضربنا π في عدد فردي يبقى π

الزاوية $\pi \Leftarrow$ العدد حقيقي

$${}^6\left(\frac{{}^3\sqrt{t} + 1}{t + 1}\right) \quad (6) \text{ أثبت أن}$$

الحل:

يمكن استخدام فوق القوة ولكن لان البسط والمقام عددين مشهورين يفضل تحويلهما

إلى $[r, \theta]$

$$\text{البسط} \quad \left[\frac{\pi}{3}, 2\right] = {}^3\sqrt{t} + 1 \quad (\text{حق ذلك})$$

$$\text{المقام} \quad t + 1 = \left[\frac{\pi}{4}, {}^2\sqrt{t}\right] \quad (\text{حق ذلك})$$

$${}^6\left[\frac{\pi}{12}, \frac{2}{{}^2\sqrt{t}}\right] = \left(\frac{\left[\frac{\pi}{3}, 2\right]}{\left[\frac{\pi}{4}, {}^2\sqrt{t}\right]}\right) \Leftarrow$$

$$\left[\frac{\pi}{2}, 8 \right] = \left[\frac{\pi}{12} \times 6, \frac{64}{8} \right] =$$

الزاوية $\frac{\pi}{2} \Leftarrow$ العدد تخيلي بحت (صرف) هو 8 ت (بالنظر)

ويمكن التأكد بتحويل العدد إلى الصيغة النموذجية

$$(7) \text{ أثبت أن } \left(\frac{2-t}{t+1} \right)^{12} \text{ حقيقي صرف}$$

الحل: البسط - 2 ت تخيلي صرف سالب

$$\left[\frac{\pi 3}{2}, 2 \right] = \text{البسط} \quad \frac{\pi 3}{2} \text{ والزاوية } 2 \text{ الطول} \therefore$$

, المقام س = ص والعدد في الربع الأول

$$\left[\frac{\pi}{4}, \sqrt{2} \right] = \text{المقام} \quad \frac{\pi}{4} \text{ الزاوية}, \sqrt{2} = \sqrt{1+1} = r \therefore$$

$$\left(\frac{\left[\frac{\pi 3}{2}, 2 \right]}{\left[\frac{\pi}{4}, \sqrt{2} \right]} \right)^{12} = \left(\frac{2-t}{t+1} \right)^{12} \Leftarrow$$

$$^{12} \left[\frac{\pi 5}{4}, \sqrt{2} \right] = ^{12} \left[\frac{\pi 5}{4}, \frac{\sqrt{2} \times 2}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \right] = ^{12} \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\pi 3}{2}, \frac{2}{\sqrt{2}} \right] =$$

$$[\pi, 64] = [\pi 15, 64] = \left[\frac{\pi 5 \times 12}{4}, ^{12}(\sqrt{2}) \right] =$$

لان الزاوية $\pi \Leftarrow$ العدد حقيقي صرف هو - 64



(٨) إذا كان $\varepsilon = \left[\frac{\pi}{4}, \sqrt{2} \right)$ وكان $|\varepsilon| = 8$ أوجد قيمة η

الحل: $\varepsilon = \left[\frac{\pi}{4}, \sqrt{2} \right)$ $\eta = |\varepsilon| = 8 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2} \right)^\eta = 8$

$$2^{\frac{\eta}{2}} = 2^3 \Leftrightarrow \frac{\eta}{2} = 3 \Leftrightarrow \eta = 6$$

الدرس الرابع عشر: حل المعادلات بالصورة $[r, \theta]$

جميع قوانين حل المعادلات تنطبق هنا ونعتبر $e = [r, \theta]$ أو

$$e = r(\cos \theta + j \sin \theta)$$

(١) حل المعادلات التالية:

$$e^6 = 64$$

$$\text{الحل: } e^6 = 64 \quad \text{بأخذ } \sqrt[6]{}$$

$$e = \sqrt[6]{64} = 2 \leftarrow e = 2 \quad \text{حل حقيقي وهو عند } \theta = 0$$

$$\text{وعند } \theta = 1 \leftarrow e = 2 \leftarrow \left[\frac{\pi}{3}, 2 \right] = \left[\frac{\pi \cdot 2 + 0}{6}, 2 \right]$$

$$\text{وعند } \theta = 2 \leftarrow e = 2 \leftarrow \left[\frac{\pi \cdot 2}{3}, 2 \right]$$

$$\text{عند } \theta = 3 \leftarrow e = 2 \leftarrow [\pi, 2]$$

$$\text{عند } \theta = 4 \leftarrow e = 2 \leftarrow \left[\frac{\pi \cdot 4}{3}, 2 \right] = \left[\frac{\pi}{3} + \pi, 2 \right]$$

$$\text{عند } \theta = 5 \leftarrow e = 2 \leftarrow \left[\frac{\pi \cdot 5}{3}, 2 \right]$$

$$\text{ب) } e^6 = 64$$

$$\text{الحل: } e^6 = 64 \quad \text{بأخذ } \sqrt[6]{}$$

$$e = \sqrt[6]{64}$$

$$\left[\frac{\pi}{2}, 64 \right]_6 = 8 \quad \text{لان العدد تخيلي بحث موجب}$$

$$\left[\frac{6\pi + \frac{\pi}{2}}{6}, 64 \right]_6 = 8$$

الجذر الأول نضع $6 = 0$

$$\left[\frac{\pi}{12}, 2 \right]_1 = 8$$

الجذر الثاني نضع $6 = 1$

$$\left[\frac{\pi}{12}, 2 \right] = \left[\frac{1 \times \pi + \frac{\pi}{2}}{6}, 2 \right]_2 = 8$$

ونوجد قيمة الجذور بإضافة الفرق بين الجذرين الثاني والأول وهو $\frac{\pi}{12}$

$$\left[\frac{\pi}{12}, 2 \right] = 8, \left[\frac{\pi}{12}, 2 \right] = 8$$

$$\left[\frac{\pi}{12}, 2 \right] = 8, \left[\frac{\pi}{12}, 2 \right] = 8$$

$$8 = 0 + 8$$

الحل:

سبق وأن تم حلها بالطريقة الجبرية (بالتحليل) والآن سوف نحلها بالطريقة المثلثية

$$8 = 0 - 8 \quad \text{بأخذ}$$

$$\left[\frac{\pi^3}{2}, 1 \right] \sqrt[3]{} = \varepsilon \Leftarrow \overline{-\sqrt[3]{}} = \varepsilon \Leftarrow$$

العدد تخيلي صرف سالب

$$\left[\frac{\pi^2 + \frac{\pi^3}{2}}{3}, 1 \right] \sqrt[3]{} = \varepsilon$$

لإيجاد الجذر الأول نضع $\varepsilon = 0$

$$\left[\frac{\pi^3}{6}, 1 \right] = \varepsilon$$

$$\left[\frac{\pi^7}{6}, 1 \right] = \left[\frac{1 \times \pi^2 + \frac{\pi^3}{2}}{3}, 1 \right] = \varepsilon \Leftarrow 1 = \varepsilon$$

ويصبح الجذر الثالث $\varepsilon = \frac{\pi^3}{6}$ (لماذا)

$$\varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = 0$$

الحل: بالقانون العام

$$1 = \frac{1}{2} \quad \varepsilon = -\frac{1}{2} \quad \varepsilon^2 = \frac{1}{2}$$

$$\varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = \Delta \Leftarrow \varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = 1 \times 1 \times \varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = \Delta$$

$$\frac{\varepsilon^2 - \varepsilon + 1}{2} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2 - \varepsilon + 1}{4}} = \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon + 1}{2} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2 - \varepsilon + 1}{4}} = \varepsilon$$



$$\frac{2\text{جناه} \pm 2\text{جاهت}}{2} = \frac{2\sqrt{-\text{جاه}}}{2} =$$

$$\text{ع} = 2\text{جناه} \pm 2\text{جاه}$$

$$(2) \text{ إذا كان } \text{ع} = [1, \text{هـ}] \text{ أثبت أن } \text{ع}^2 = \frac{1}{\text{ع}} + 2\text{جناه}$$

$$\text{الحل: نضع } \text{ع} = [r, \text{هـ}]$$

$$\frac{1}{(r(2\text{جناه} + 2\text{جاه}))} + r(2\text{جناه} + 2\text{جاه}) = \frac{1}{[r, \text{هـ}]} + [r, \text{هـ}]$$

$$r = \frac{1}{r(2\text{جناه} + 2\text{جاه})} + r(2\text{جناه} + 2\text{جاه})$$

$$1 = r$$

$$= \frac{\text{جناه} - 2\text{جاه}}{(2\text{جناه} + 2\text{جاه})(\text{جناه} - 2\text{جاه})} + 2\text{جناه} + 2\text{جاه}$$

$$= \cancel{2\text{جاه}} + \cancel{2\text{جاه}} + \text{جناه} - 2\text{جاه}$$

والمقام = 1 (لماذا)

$$= 2\text{جناه} = \text{الايسر}$$

$$(3) \text{ إذا كان } \text{ع}^2 = \left[\frac{\pi}{3}, 8\right] \text{ أثبت أن } \text{ع}^3 = 8$$

$$\text{الحل: نفرض } \text{ع} = [r, \text{هـ}]$$

$$\Leftarrow [r, \text{هـ}] \times [r, \text{هـ}] = \left[\frac{\pi}{3}, 8\right]$$

أ. فؤاد حسن راشد العيسى

$$\left[\frac{\pi}{3}, 8 \right] = [r, -h] \times [r^2, h^2] \Leftarrow$$

$$2 = r \text{ ومنه } 8 = r^3 \left[\frac{\pi}{3}, 8 \right] = [r^3, h^2] \Leftarrow$$

$$\left[\frac{\pi}{3}, 2 \right] = \frac{\pi}{3} \text{ أي } \epsilon$$

$$[\pi, 8] = \left[\frac{\pi}{3} \times 3, r^2 \right] = r^2 \left[\frac{\pi}{3}, 2 \right] = r^2 \epsilon$$

∴ الزاوية = π

∴ العدد حقيقي سالب هو $-8 = \epsilon^3$

$$(4) \text{ إذا كان } \epsilon = \left[\frac{\pi}{4}, 1 \right] \text{ أثبت أن } \epsilon^2 = \left(\frac{1}{\epsilon} + \epsilon \right)$$

الحل: بالتعويض

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\left(\frac{\pi}{4} \text{ جتا} + \frac{\pi}{4} \text{ ت جا} \right)} + \left(\frac{\pi}{4} \text{ جتا} + \frac{\pi}{4} \text{ ت جا} \right) \right) \\ & \left(\frac{\frac{\pi}{4} \text{ جتا} - \frac{\pi}{4} \text{ ت جا}}{\left(\frac{\pi}{4} \text{ جتا} - \frac{\pi}{4} \text{ ت جا} \right) \left(\frac{\pi}{4} \text{ جتا} + \frac{\pi}{4} \text{ ت جا} \right)} + \frac{\pi}{4} \text{ جتا} + \frac{\pi}{4} \text{ ت جا} \right) = \end{aligned}$$



$$\sim \left(\cancel{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi}{4} + \cancel{\frac{\pi}{4}} + \frac{\pi}{4} \right) =$$

والمقام = ١ (فيثاغورث)

$$\sim \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \times 2 \right) = \sim \left(\frac{\pi}{4} \right) =$$

$$\sim \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sim \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \right) =$$

الايسر =

تمارين متنوعة على الوحدة الأولى

(١) إذا كان $z = \frac{2+3i}{-3-i}$ أوجد z بالصورة $[r, \theta]$

الحل: البسط والمقام عددين مركبين غير مشهورين. \therefore نضرب \times مرافق المقام

$$\frac{2+3i}{-3-i} \times \frac{-3+i}{-3+i} = z$$

$$\frac{20}{10} = \frac{-18 + 2i + 9 - 3i}{10}$$

$z = 2$ العدد تخيلي صرف موجب

$$\left[\frac{\pi}{2}, 2 \right] = z \Leftarrow$$

(٢) إذا كان $z = 1 + i + \cos \theta + i \sin \theta$ أكتب z بالصورة $[r, \theta]$

الحل: $z = 1 + \cos \theta + i(1 + \sin \theta)$

$$1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$z = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

$$z = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[\frac{\theta}{2}, 1 \right] = \left[\frac{\theta}{2}, 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]$$



(٣) إذا كان $e = \sqrt[n]{(t + 3)}$ أوجد اصغر قيمة n تجعل العدد تخيلي

صرف

الحل: $e = \sqrt[n]{\left[\frac{\pi}{3}, 2\right]}$ حقق ذلك

$e = \sqrt[n]{\left[\frac{\pi}{3} \times n, 2\right]}$ لكي يكون العدد حقيقي صرف يجب أن تكون $n = 3$

فتصبح زاوية العدد π

(٤) أوجد مقياس وسعة العدد $e = \frac{(1 + t \text{ ظاه})^2}{1 + \text{ظا}^2}$

الحل: $e = \frac{(1 + t \text{ جاه})^2}{\text{جاه}^2} \times \left(\frac{\text{جاه} + t \text{ جاه}}{\text{جاه}}\right)^2 = \frac{(1 + t \text{ جاه})^2}{\text{جاه}^2}$

$[1, \text{جاه}] = \frac{(1 + t \text{ جاه})^2}{\text{جاه}^2} \times \frac{\text{جاه}^2}{\text{جاه}^2} =$

$[1, 2] \Leftarrow \text{المقياس} = 1 \text{ والسعة } 2$

(٥) إذا كان $e = 1 + 2t$, سعة $e = \frac{\pi}{6}$, $|e| = 4$ فأوجد قيمة e

الموجبتين

الحل: $\therefore \text{سعة } e = \frac{\pi}{6} \Leftarrow \text{سعة } e = \frac{\pi}{6}, |e| = 4$

$$\left[\frac{\pi}{6}, 4 \right] = [\pi, 4] = 4$$

$$\left(\frac{1}{2} \times 4 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) 4 = \left(\frac{\pi}{6} \times 4 + \frac{\pi}{6} \right) 4 =$$

$$\Leftarrow 4 = 4 + \sqrt{3} \times 2 \text{ بالمقارنة مع}$$

$$4 = 4 + \sqrt{3} \times 2 \Leftarrow 4 = 4 + \sqrt{3} \times 2$$

$$4 = 4 \text{ بالتعويض } 4 = 4 + \sqrt{3} \times 2$$

$$\therefore \sqrt{3} = 2$$

(٦) إذا كان $4 = 4 + \sqrt{3} \times 2 + 10 = \pi^2$ فأوجد قيمة s

الحل: ∴ زاوية العدد $\pi^2 \Leftarrow$ العدد حقيقي صرف

$$\Leftarrow 4 + \sqrt{3} \times 2 = 4 \Leftarrow 4 = 4 \Leftarrow s = 2$$

(٧) إذا كان $4 = (8 + 4s + 6t)$ وكانت زاويته $h = 220^\circ$ أوجد قيمة m

الحل:

$$h = 220^\circ \text{ من مضاعفات } 45^\circ \text{ لأن } h = 45 + 180$$

$$\frac{8}{\sqrt{(6+4s)^2 + 8^2}} = \cos 220^\circ$$

$$\Leftarrow \frac{8}{\sqrt{(6+4s)^2 + 64}} = \cos (45 + 180)$$

$$\Leftarrow \frac{8}{\sqrt{(6+4s)^2 + 64}} = \cos 45^\circ$$

$$\overline{\frac{8}{\sqrt{2}(6+24)+64}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \leftarrow \text{بالتربيع}$$

$$128 = \sqrt{2}(6+24)+64 \leftarrow \frac{64}{\sqrt{2}(6+24)+64} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$64 = \sqrt{2}(6+24) \leftarrow \text{بأخذ } \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 2 \leftarrow 2 = 24 \leftarrow 8 = 6+24 \leftarrow 8 \pm = 6+24$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 2 \leftarrow 14 = 24 \leftarrow 8 = 6+24 \text{ أو } \frac{1}{\sqrt{2}} = 2 \leftarrow 14 = 24 \leftarrow 8 = 6+24$$

(٨) إذا كان $1 - \epsilon = 3 - \epsilon$ أكتب ϵ بالصورة $[مر، هـ]$

$$\text{الحل: } \epsilon - \epsilon = 3 - 1 \leftarrow \epsilon = (3 - 1) = 2$$

$$\frac{[\pi, 2]}{\left[\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right]} = \frac{2-}{1-\epsilon} = \epsilon \text{ حقق ذلك}$$

$$\left[\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right] = \left[\frac{\pi}{4} + \pi, \frac{2}{\sqrt{2}}\right] = \epsilon$$

(٩) اكتب سعة العدد $2 - \epsilon$ ^{٩٣}

$$\text{الحل: } \epsilon = 2 \times 2 - 1 = 2 - \epsilon$$

$$\leftarrow \text{سعة العدد } = \frac{\pi}{2} \text{ لأنه عدد تخيلي صرف}$$

(١٠) إذا كان $\epsilon, \epsilon, \epsilon$ هما الجذرين التربيعيين للعدد المركب $[4, \epsilon]$ فإن

$$\epsilon + \epsilon + \epsilon = \dots\dots\dots$$

الحل: صفر لأن مجموع الجذرين التربيعيين = صفر دائماً

(١١) إذا كان $\epsilon = \left[\frac{\pi 5}{6}, 2 \right]$ احد جذري معادلة تربيعية ذات المعاملات الحقيقية

فأوجد المعادلة

الحل: المعادلات حقيقية \therefore الجذرين مترافقين

$$\epsilon = \left[\frac{\pi 5}{6}, 2 \right] = \epsilon \quad (2 + 10. \text{جنا} + 10. \text{تجا})^2 =$$

$$= ((30 - 180) \text{جنا} + (30 - 180) \text{تجا})^2 =$$

$$= ((30 \text{جنا} + 30 \text{تجا})^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{2} \text{ت} + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ت} \right)^2 =$$

$$\epsilon = \sqrt{3} - \text{ت}$$

المعادلة

$$\epsilon = 1 + 3 + \epsilon (\sqrt{3} - 2) - \epsilon^2$$

$$\epsilon = 4 + \epsilon \sqrt{3} - 2\epsilon$$

(١٢) العدد المركب الذي سعته π يكون بينما العدد المركب الذي سعته

$$\frac{\pi}{2} \text{ يكون } \dots\dots\dots$$

الحل: بالترتيب حقيقي صرف , تخيلي صرف

$$(١٣) \text{ اكتب سعة العدد } ع = تظا \frac{\pi^2}{3}$$

$$\text{الحل: } ع = ت \times ظا = ١٢٠ تظا = (٦٠ - ١٨٠)$$

$$= - ت \times ظا = ٦٠ - ٣ ت$$

$$\text{أي تخيلي صرف سالب } \therefore \text{السعة } \frac{\pi^3}{2}$$

$$(١٤) \text{ إذا كانت } ع = جا هـ + ت جتا هـ \text{ أوجد بالصورة } [ر، هـ] \text{ كلاً من}$$

$$(أ) - ت ع \quad (ب) ع^3$$

الحل: $ع = جا هـ + ت جتا هـ$ العدد يقع في الربع الأول (قلب)

$$\Leftarrow ع = جتا هـ \left(\frac{\pi}{2} - هـ \right) + ت جا هـ \left(\frac{\pi}{2} - هـ \right) \Leftarrow ع = \left[١, \frac{\pi}{2} - هـ \right]$$

$$(أ) - ت ع = \left[\frac{\pi^3}{2}, ١ \right] \times \left[١, \frac{\pi}{2} - هـ \right] = \left[١, \pi^2 - هـ \right]$$

$$(ب) ع^3 = \left[١, \frac{\pi}{2} - هـ \right]^3$$

$$= \left[١, \left(\frac{\pi}{2} - هـ \right)^3 \right] = \left[١, \frac{\pi^3}{2} - هـ^3 \right]$$

$$(١٥) \left[\frac{\pi}{2}, ٧ \right]^2 = \left[\pi, ٤١ \right] \text{ صح أم خطأ}$$

الحل:

خطأ $\left[\frac{\pi}{2}, 14 \right]$ لأن العدد يضرب في المقياس فقط وليس في المقياس والزاوية

$$(16) \text{ إذا كانت } \left[\frac{\pi^2}{3}, 1 \right] = \mathcal{C} \text{ أوجد سعة } - \mathcal{C}$$

$$\text{الحل: } - \mathcal{C} = \left[\frac{\pi^5}{3}, 1 \right] = \left[\pi + \frac{\pi^2}{3}, 1 \right] = \mathcal{C}$$

$$\Leftarrow \text{سعة } - \mathcal{C} \text{ هي } \frac{\pi^5}{3}$$

$$(17) \text{ إذا كانت } \mathcal{C} = [5, \mathcal{H}] = \mathcal{C} - \mathcal{C} = [210, 5] \text{ فإن } \mathcal{H} = \dots\dots\dots$$

$$\text{الحل: } \mathcal{H} = 180 + 210 = 390 \Leftarrow \mathcal{H} = 180 - 210 = -30 \Leftarrow \mathcal{H} = 30$$

$$(18) \text{ إذا كان } \mathcal{C} = [3, 60] = \mathcal{C} - \mathcal{C} = [3, 210 + \mathcal{H}] \text{ فإن } \mathcal{H} = \dots\dots\dots$$

$$\text{الحل: } \mathcal{H} = 30 \text{ لأن } 180 + 60 = 240 + \mathcal{H} = 210$$

$$240 = 210 + \mathcal{H} \Leftarrow \mathcal{H} = 210 - 240 = -30 \Leftarrow \mathcal{H} = 30$$

$$(19) \text{ إذا كان } \mathcal{C} = \left[\frac{\pi}{2} - 2, \right] \text{ فإن } \mathcal{C} \text{ بالصورة الجبرية } \dots\dots\dots$$

$$\text{الحل: } - 2 = \frac{\pi^3}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ لأن } \frac{\pi^3}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ العدد تخيلي سالب}$$

$$(20) \text{ إذا كان } \mathcal{C} \times \bar{\mathcal{C}} = 9 \text{ فإن } \mathcal{C} = \dots\dots\dots$$

$$\text{الحل: معروف أن } |\mathcal{C}| = |\bar{\mathcal{C}}|$$

$$\Leftarrow \mathcal{C} \times \bar{\mathcal{C}} = \mathcal{C}^2 \Leftarrow \mathcal{C} = 3$$



(٢١) إذا كان z_1, z_2 جذري معادلة تربيعية معاملاتها حقيقية فإن $z_1, z_2 =$ حقيقي صرف

الحل: صح لأن z_1, z_2 مترافقان في هذه الحالة

الوحدة الثانية: مبدأ العد والتباديل والتوافيق ومبرهنة ذات الحدين

أ. فؤاد حسن راشد العبيسي



قوانين سابقة قد تحتاجها في هذه الوحدة

تعتبر هذه الوحدة من الدروس الجديدة ولذلك لا يوجد قوانين سابقة تذكر باستثناء
قوانين العد المباشر وتحليل الاعداد وحل المعادلات وهي قواعد مباشرة الكل يعرفها
وسيأتي ذكرها ضمن الدروس

أولاً: مبدأ العد والتباديل والتوافيق

الدرس الأول: مبدأ العد

مضروب العدد: $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 5!$ ، $1 \times 2 \times 3 = 3!$

وبصورة عامة: $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n = n!$

أي أن $n!$ حاصل ضرب اعداد متتالية اكبرها ما داخل المضروب (n) واصغرها الواحد الصحيح.

ويمكن التعبير عن المضروب بصورة أخرى **فمثلاً:** $3! = 3 \times 2!$ ،

$6! = 6 \times 5 \times 4! = 4! \times 5 \times 6$ وهكذا حسب الحاجة كذلك يمكن كتابة $n! = n \times (n-1)!$

، $5! = 5 \times 4! = 4! \times 5$ وهكذا $1! = 1$ ، $2! = 2$ ،

ويمكن التعبير عن حاصل ضرب اعداد متتالية بصورة مضروب كالتالي **فمثلاً:**

$$(1) \quad 5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$$

$$(2) \quad 3! = 1 \times 2 \times 3$$

$$(3) \quad 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

$$(4) \quad 5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

$$(5) \quad 6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$$

$$(6) \quad 7! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040 \text{ وهكذا}$$

ونستخدم الأفكار السابقة في حل المعادلات التي تحوي مضروب وذلك بالقاعدة التالية

$$\text{إذا كان } n! = m! \iff n = m$$

فمثلاً: بحل المعادلة $5 = 3 - 2$

الحل: $5 = 3 - 2$

$$2 \div 8 = 2 \Leftarrow 3 + 5 = 2 \Leftarrow 5 = 3 - 2 \Leftarrow$$

$$4 = 2 \Leftarrow$$

مثال آخر:

$$4 = 1 - 3 \Leftarrow 24 = 1 - 3$$

$$5 = 3 \Leftarrow 4 = 1 - 3 \Leftarrow$$

مثال آخر:

$$3 = \frac{3}{2} \Leftarrow 6 = \frac{3}{2}$$

$$2 = 3 \Leftarrow 3 = \frac{3}{2} \Leftarrow$$

تمارين محلولة:

(١) حل المعادلات التالية:

$$5040 = 2$$

الحل: $7 = 2 \Leftarrow 7 = 2$

$$(ب) \quad 35280 = \underline{7} | 2 - \underline{7}$$

$$\underline{7} \div 35280 = \underline{7} | 2 - \underline{7} \quad \text{الحل:}$$

$$\underline{7} = \underline{7} | 2 - \underline{7} \Leftarrow 5040 = \underline{7} | 2 - \underline{7} \Leftarrow$$

$$9 = \underline{7} \Leftarrow 7 = 2 - \underline{7} \Leftarrow$$

$$72 = \underline{1 - \underline{7}} : \underline{1 + \underline{7}} \quad (ت)$$

$$\text{الحل:} \quad 72 = \frac{1 + \underline{7}}{1 - \underline{7}} \quad \text{نفك البسط حتى يصل إلى المقام}$$

$$72 = \frac{\cancel{1 - \underline{7}} (\underline{7}) (1 + \underline{7})}{\cancel{1 - \underline{7}}}$$

$$1 - 9 = \underline{7} \Leftarrow 9 = 1 + \underline{7} \Leftarrow 8 \times 9 = (\underline{7}) (1 + \underline{7})$$

$$8 = \underline{7} \Leftarrow$$

$$120 = \underline{7} | \frac{1}{2} \quad (ث)$$

$$\underline{5} = \underline{7} | \frac{1}{2} \Leftarrow \underline{5} = \underline{7} | \frac{1}{2} \quad \text{الحل:}$$

$$10 = \underline{7} \Leftarrow$$

$$(ج) \frac{5}{2-n} = \frac{3-n}{3}$$

الحل: حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$5 \times 3 = (3-n) \times 2$$

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 1 \times 2 \times 3 = (3-n) \times 2$$

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = (3-n) \times 2$$

$$8 = n \Leftarrow 6 = 2-n \Leftarrow 6 = 2-n$$

(لاحظ استخدام قاعدة ارجاع المضرب)

$$(ح) \frac{4}{4-s} = \frac{2}{2-s}$$

$$12 = \frac{2-s}{4-s} \quad \text{الحل: نضع}$$

$$3 \times 4 = \frac{(3-s)(2-s)}{4-s} \Leftarrow$$

$$(3 \times 4 = (3-s)(2-s)) \quad \text{(لاحظ التتالي في الطرفين)}$$

$$6 = s \Leftarrow 4 = 2-s$$

$$720 = 1-n \quad (خ)$$

$$\text{الحل: } 720 = n \Leftarrow 6 = n \Leftarrow 6 = n$$

(لاحظ استخدام قاعدة ارجاع المضروب)

$$٢٠ = \frac{ن}{٢-ن} \quad (د)$$

$$\text{الحل: } ٤ \times ٥ = \frac{٢-ن}{٢-ن} (١-ن) ن$$

$$(قاعدة التتالي في الطرفين) \quad ٥ = ن \Leftarrow ٤ \times ٥ = (١-ن) ن$$

$$(ذ) \quad ١-٢ن | ن = ١-٥ | ٥$$

الحل: لكي نطبق القاعدة نبدأ بضرب الطرفين $ن \times$ (لماذا؟)

$$١-٢ن | ٢ن = ١-٥ | ٥$$

$$(قاعدة الارجاع في الطرفين) \quad ٢ن | = ٥ | \Leftarrow$$

$$٠ = ٢ن - ٥ \Leftarrow ٢ن = ٥ \Leftarrow$$

$$٠ = ن \Leftarrow ٠ = (ن-٥) ن \Leftarrow$$

$$\text{أو} \quad ٥ = ن \Leftarrow ٠ = ن - ٥$$

$$(ر) \quad ٣٦٠ = ١-٢ص | ص$$

الحل: قبل تطبيق القاعدة نبدأ بضرب الطرفين $٢ \times$

$$٣٦٠ \times ٢ = ١-٢ص | ٢ص$$

$$٧٢٠ = ١-٢ص | ٢ص$$

$$٦ | = ٢ص |$$

$$٣ = ٢ص \Leftarrow ٦ = ٢ص$$

$$٥٦ = \frac{٥ + \sqrt{3}}{٣ + \sqrt{3}} \quad (ز)$$

الحل: فك البسط حتى يصل إلى المقام

$$٧ \times ٨ = \frac{\cancel{٣ + \sqrt{3}} (٤ + \sqrt{3})(٥ + \sqrt{3})}{\cancel{٣ + \sqrt{3}}}$$

$$٧ \times ٨ = (٤ + \sqrt{3})(٥ + \sqrt{3})$$

$$٣ = \sqrt{3} \Leftarrow ٥ - ٨ = \sqrt{3} \Leftarrow ٨ = ٥ + \sqrt{3}$$

$$\underline{١ - \sqrt{3}} = \underline{٤} \mid ٥ \quad (س)$$

$$\underline{١ - \sqrt{3}} = ٥ \Leftarrow \underline{١ - \sqrt{3}} = ٥ \quad \text{الحل:}$$

$$٣ = \sqrt{3} \Leftarrow ٦ = \sqrt{3} \Leftarrow ١ + ٥ = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{٢ - \sqrt{3}} - \frac{١ + \sqrt{3}}{١ - \sqrt{3}} \quad (٢) \text{ أثبت أن}$$

$$\frac{\cancel{٢ - \sqrt{3}} (١ - \sqrt{3})\sqrt{3}}{\cancel{٢ - \sqrt{3}}} - \frac{\cancel{١ - \sqrt{3}} (\sqrt{3})(١ + \sqrt{3})}{\cancel{١ - \sqrt{3}}} \quad \text{الحل:}$$

$$(\sqrt{3})(١ - \sqrt{3}) - (\sqrt{3})(١ + \sqrt{3}) =$$

$$(٢)\sqrt{3} = (١ + \cancel{\sqrt{3}} - ١ + \cancel{\sqrt{3}})\sqrt{3}$$

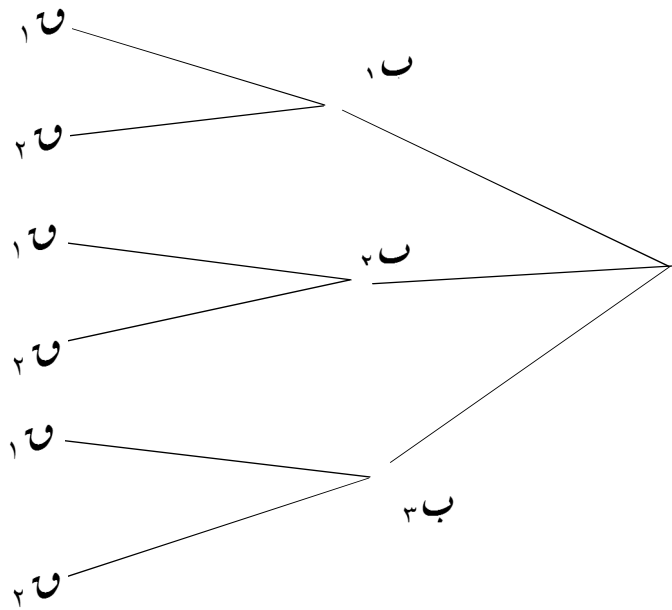
$$\underline{\text{الأيسر}} = \sqrt{3} =$$

الدرس الثاني: مسائل مبدأ العد

إذا تألف عمل من مرحلتين وأمكن للمرحلة الأولى أن تتم بـ ٢ طريقة والمرحلة الثانية تتم بـ ٣ طريقة مختلفة عن الأخرى فإن عدد الطرق $2 \times 3 = 6$

فمثلاً: شاب لديه ثلاثة بنطلونات ٢ قمصان فكم بدلات يمكن أن يكونها في ذلك

الحل: يمكن الحل بالشجرة كالتالي:



عدد الطرق هي $\{١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦\}$

← عدد الطرق بالعد المباشر = ٦

ويمكن حلها بطريقة الجدول كالتالي

بنطلون	قميص
٣	٢

$$6 = 2 \times 3 = \text{طرق}$$

وهنا بعض الحالات الخاصة:

فمثلاً: إذا كانت $S = \{١, ب, ج, د, هـ\}$ ، $V = \{١, ٢\}$

أ) كم عدد التطبيقات التي يمكن تكوينها من $S \leftarrow V$ وكم عدد التطبيقات التي

يمكن تكوينها من $V \leftarrow S$

ب) كم عدد الأزواج المرتبة التي يمكن تكوينها من $S \leftarrow V$ وكم عدد الأزواج

المرتبة التي يمكن تكوينها من $V \leftarrow S$

الحل:

أ) عدد التطبيقات من $S \leftarrow V$ هي V^S

$$= 2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = ٨ \text{ تطبيقات}$$

عدد التطبيقات من $V \leftarrow S$ هي S^V

$$= 3^2 = 3 \times 3 = ٩$$

ب) عدد الأزواج المرتبة من $S \leftarrow V$ هي $3 \times 2 = ٦$ أزواج

عدد الأزواج المرتبة من $V \leftarrow S$ هي $2 \times 3 = ٦$ أزواج

مثال آخر:

(١) عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام مختلفة من $\{٢, ٣, ٤\}$ هي

أحاد	عشرات	مئات
٣	٢	١

= ٦ أعداد



(٢) عدد الاعداد المكونة من ثلاثة أرقام من {٢، ٣، ٤}

الحل:

مئات	عشرات	احاد
٣	٣	٣

(لاحظ الفرق بين المثالين) $27 = 3 \times 3 \times 3 =$

(٣) عدد الأعداد الزوجية المكونة من ثلاثة أرقام من {٢، ٣، ٤}

الحل:

مئات	عشرات	احاد
٣	٣	٢

$18 = 3 \times 3 \times 2 =$ عدداً

يكون العدد زوجي إذا كان أوله ٠ أو ٢ أو ٤ أو ٦ أو ٨
لاحظ ذلك

(٤) عدد الأعداد الزوجية المختلفة المكونة من ثلاثة أرقام من {٢، ٣، ٤}

الحل:

مئات	عشرات	احاد
١	٢	٢

(لاحظ الفرق بين المثالين) $4 = 1 \times 2 \times 2 =$ أعداد

(٥) عدد الأعداد التي يمكن تكوينها من ثلاثة أرقام من {٢، ٣، ٠، ٤}

الحل:

أحاد	عشرات	مئات
٤	٤	٣

$$= 4 \times 4 \times 3 = 48 \text{ عدد}$$

لاحظ البداية من خانة المئات لماذا ؟

(٦) عدد الأعداد التي يمكن تكوينها من ثلاثة أرقام مختلفة من {٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

الحل:

أحاد	عشرات	مئات
٣	٢	٣

$$= 3 \times 2 \times 3 = 18 \text{ عدد (لاحظ الفرق بين المثالين والبداية من الخانة الأخيرة)}$$

وهكذا يمكن التعامل مع العدد الفردي والزوجي وفقاً للقاعدة

(١) يكون العدد زوجي إذا كان أول أرقامه زوجي (يقبل القسمة على ٢)

(٢) يكون العدد فردي إذا كان أول أرقامه لا يقبل القسمة على ٢

(٣) في تركيب الأعداد الخانة الأخيرة لا تحمل الصفر

قاعدة: ترتيب n من الأشخاص في خط مستقيم $= \frac{n!}{1}$ وحول طاولة $= \frac{n!}{2}$

هذه بعض الأمثلة البسيطة وسوف تناقش الأمثلة المركبة في التمارين:

تمارين محلولة:

(١) ما عدد طرق دخول شخص إلى حديقة لها أربعة أبواب والخروج منها في

الحالات التالية:

أ) بدون شرط

ب) الدخول من باب والخروج من باب آخر

ت) الدخول من باب محدد

ث) الدخول من باب والخروج من نفس الباب

أ. فؤاد حسن راشد العبيسي

الحل:

(أ)

الدخول	الخروج
٤	٤

$4 \times 4 = 16$ طريقة (لأنه لم يشترط في الدخول ولا في الخروج)

(ب)

الدخول	الخروج
٤	٣

$4 \times 3 = 12$ طريقة (اشترط في الخروج فقط)

(ت)

الدخول	الخروج
١	٤

$4 \times 1 = 4$ طرق (اشترط في الدخول فقط)

(ث)

الدخول	الخروج
٤	١

$4 \times 1 = 4$ طرق (اشترط في الخروج فقط)

(٢) بكم طريقة يمكن ترتيب كتب على رف احدهم عربي والثاني إنجليزي والثالث

فرنسي من بين ٧ كتب عربي ، ٥ كتب إنجليزي ، ٤ كتب فرنسي .

الحل:

عربي	إنجليزي	فرنسي
٧	٥	٤

أ. فؤاد حسن راشد العباسي

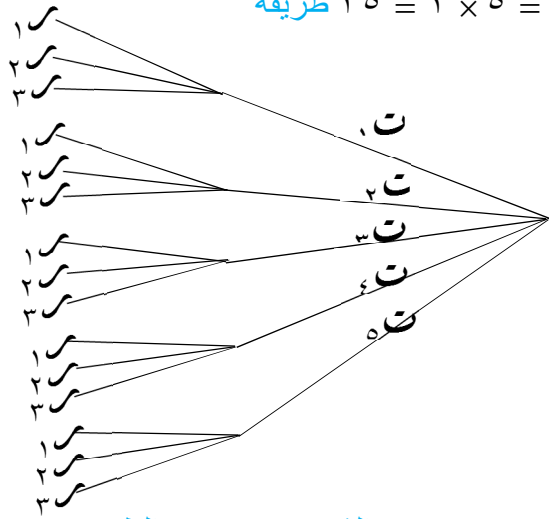
$$= 7 \times 5 \times 4 = 120 \text{ طريقة}$$

(٣) بكم طريقة يمكن اختيار تلفزيون ورسيفر من بين ٥ تلفزيونات و ٣ رسيفرات وضح ذلك بالشجرة .

الحل:

تلفزيون	رسيفر
٥	٣

$$= 5 \times 3 = 15 \text{ طريقة}$$



نقوم بعد فروع الشجرة فنجد عدد الطرق = ١٥ طريقة

(٤) بكم طريقة يمكن اختيار لجنة من بين عشرة اشخاص مكونة من رئيس وأمين عام ومسئول مالي.

الحل:

رئيس	أمين عام	مسئول مالي
١٠	٩	٨

$$= 720 \text{ طريقة}$$

(٥) ما عدد طرق ترتيب ٤ طلاب واربع طالبات في الحالات التالية:

أ) في صف مستقيم.

(ب) حول طاولة مستديرة.

(ت) فی صف بالتناوب.

(ث) بحیث یضل کل جنس بجانب بعض.

(ج) بحيث يضل أثنان متلازمان (متجاوران أو لا يفترقان)

ح) بحیث یضل الطلاب معاً.

الحل:

أ) في صف مستقيم

(ب) حول طاولة مستديرة $|V| = 1 - \xi + \xi = 1 - \eta =$

(ت) فی صف بالتناوب

طرق توزيع المجموعتين \times طرق توزيع الأولى \times طرق توزيع الثانية

$$= |2 \times 4 \times 4| \text{ (يمكن فك المضروب)}$$

(ث) یظل کل جنس بجانب بعض

طرق توزيع المجموعتين \times طرق توزيع الأولى \times طرق توزيع الثانية

$$\xi|\times\xi|\times\eta|=$$

(ج) اثنان متلازمان (متجاوران - لا يفترقان)

أثنين كتلة واحدة \times أماكن توزيعها على الباقي (٦)

$$* \mid * \mid * \mid * \mid * \mid * \mid * \mid * \times \gamma \mid =$$

$$\forall |x| =$$

حيث مثلنا الأشخاص المتبقين بالرمز ١ والأماكن بالرمز *

(ح) بحيث يضل الطلاب معاً

يصبح الطلاب كتلة واحدة

$$*1*1*1*1*1*1*1*$$

$$\begin{array}{ccc} 5 & \times & 4 \\ \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

الكتلة الأماكن

حيث فرضنا الباقي بالرمز ١ والأماكن بالرمز *

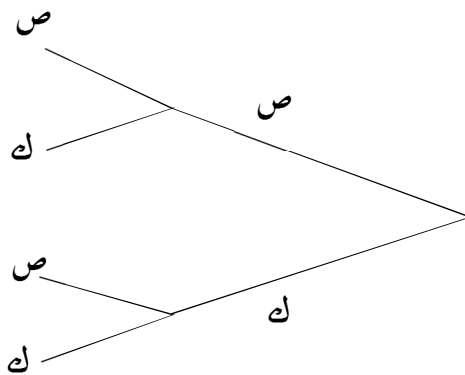
(٦) اكتب فضاء العينة لكل من مع التوضيح بالشجرة:

أ) رمي قطعة نقود مرتان

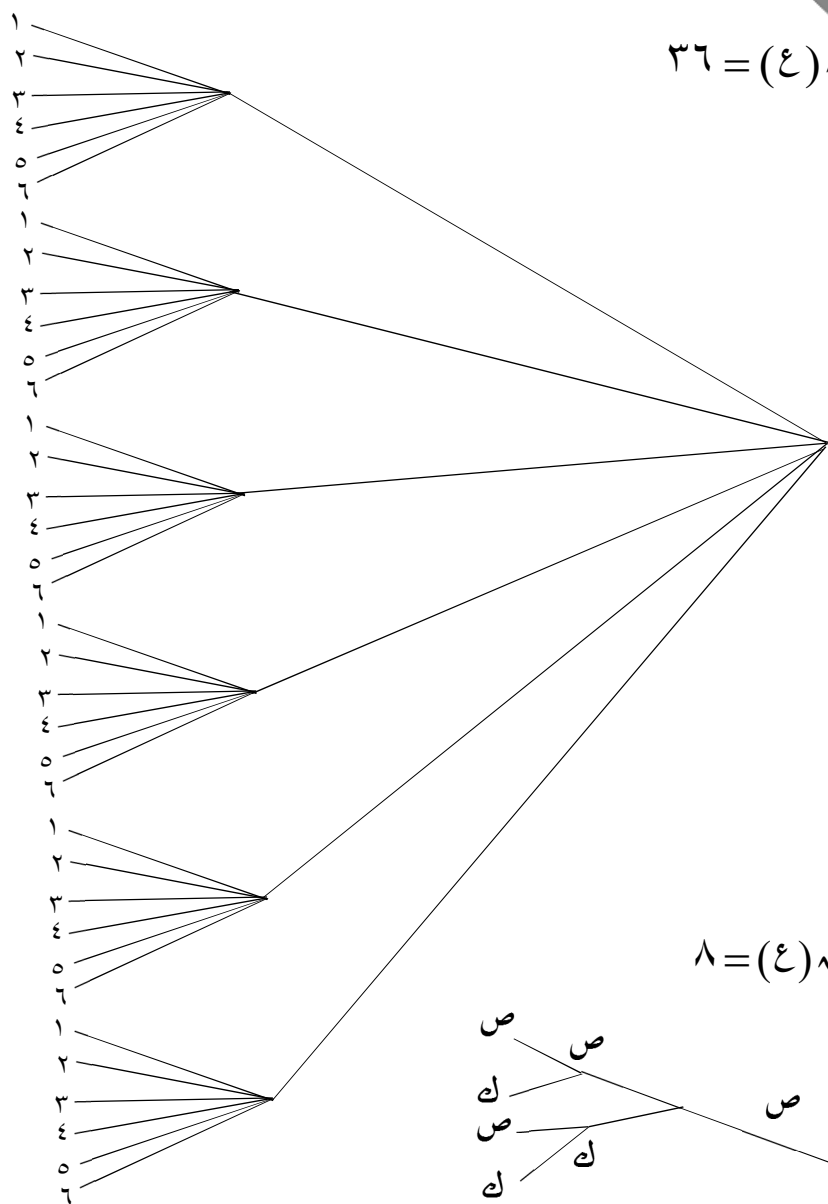
ب) رمي حجر نرد مرتان

ت) رمي قطعة نقود ثلاث مرات

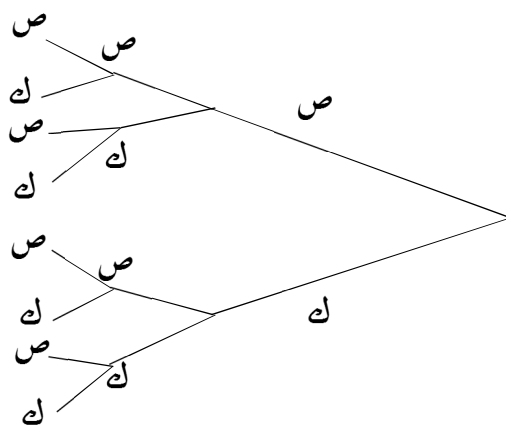
$$\text{الحل: ١) } n(E) = 4$$



(ب) $n(ع) = 36$



(ت) $n(ع) = 8$



(٧) لتكن $S =$ مجموعة حروف كلمة حضرموت بكم طريقة يمكن تكوين كلمات مختلفة الاحرف رباعية في الحالات التالية:

(أ) بدون شرط

(ب) تبدأ بالحرف م وتنتهي بالحرف ح

(ت) تبدأ بأحد الحرفين م أو ر ولا تتضمن الآخر منها

الحل: $S = \{ع، ض، م، و، ت\} \sim (ع) = ٦$

(أ) بدون شرط

١	٢	٣	٤
٦	٥	٤	٣

$$= ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ = ٣٦٠ \text{ طريقة}$$

(الشرط الوحيد هو اختلاف الاحرف)

(ب)

١	٢	٣	٤
١	٤	٣	١

$$= ١ \times ٤ \times ٣ \times ١ = ١٢ \text{ طريقة}$$

(الشرط موجود في الخانة الأولى والأخيرة وبالإضافة إلى اختلاف الاحرف)

(ت)

١	٢	٣	٤
٢	٤	٣	٢

$$= ٢ \times ٤ \times ٣ \times ٢ = ٤٨ \text{ طريقة}$$

(الشرط في الخانة الأولى بالإضافة إلى استبعاد الرقم الثاني لقوله ولا تتضمن الآخر وكذا اختلاف الحروف)

(٨) كم عدد مكون من أربعة ارقام يمكن تكوينه من $\{٢, ٤, ٦, ٨, ٩\}$ في الحالات التالية:

- (أ) بدون شرط
 (ب) مكون من ارقام مختلفة
 (ت) زوجياً وارقامه مختلفة
 (ث) فردياً وارقامه مختلفة
 (ج) زوجياً ورقم عشراته فردي
 (ح) تكبر من ٦٠٠٠ وارقامه مختلفة
 (خ) زوجياً ورقم عشراته من مضاعفات العدد ٣ ومختلفة الأرقام

الحل:

(أ)

احاد	عشرات	مئات	الوف
٥	٥	٥	٥

= ٦٢٥ طريقة

(ب)

احاد	عشرات	مئات	الوف
٥	٤	٣	٢

= ١٢٠ طريقة

(ت)

احاد	عشرات	مئات	الوف
٤	٤	٣	٢

= ٩٦ طريقة

(ث)

احاد	عشرات	مئات	الوف
١	٤	٣	٢

$24 =$ طريقة

(ج)

احاد	عشرات	مئات	الوف
٤	١	٣	٢

$24 =$ طريقة

(ح)

احاد	عشرات	مئات	الوف
٤	٣	٢	٣

$72 =$ طريقة (لاحظ في هذه الفقرة نبدأ من الخانة الأخيرة ثم الأولى)

(خ) لاحظ في هذه الفقرة تداخل بين الشرطين زوجياً , مضاعفات ٣ لأنه يوجد اشتراك بينهما

ولذلك نقسم المسألة

زوجياً بـ ٢ أو ٤ أو ٨

احاد	عشرات	مئات	الوف
٣	٢	٣	٢

+

زوجياً بـ ٦

احاد	عشرات	مئات	الوف
١	١	٣	٢

$42 = 6 + 36 =$ طريقة

(٩) كم عدداً مختلف الأرقام ومكون من ثلاثة أرقام يمكن تكوينه من {٨, ٦, ٤, ٣, ٢, ٠} في الحالات التالية:

(أ) بدون شرط

(ب) زوجياً

(ت) زوجياً ورقم عشراته من مضاعفات العدد ٣

(ث) أكبر من ثلاثمائة

(ج) مكون من ثلاثة ارقام عشراته فردي

الحل: (لاحظ وجود الصفر يمثل شرط يجب مراعاته)

(أ)

مئات	عشرات	احاد
٥	٤	٥

= ١٠٠ طريقة (لاحظ البداية كانت من الخانة الأخيرة ثم الأولى)

(ب) هنا في تداخل بين زوجياً والصفر نقسم المسألة

زوجياً بالصفر زوجياً بـ ٢ أو ٤ أو ٦ أو ٨

مئات	عشرات	احاد	+	مئات	عشرات	احاد
٤	٤	٤		٥	٤	١

$$٨٤ = ٦٤ + ٢٠ \text{ طريقة}$$

(لاحظ البداية من الخانة الأولى ثم الأخيرة في الجدولين)

(ت) تداخل في الشرطين زوجياً , مضاعفات ٣ وكذلك الصفر نقسم المسألة

زوجياً بالصفر زوجياً بـ ٢ أو ٤ أو ٨ زوجياً بـ ٦

مئات	عشرات	احاد	+	مئات	عشرات	احاد	+	مئات	عشرات	احاد
٣	١	١		٣	٢	٣		٤	٢	١

$$٢٩ = ٣ + ١٨ + ٨ = \text{طريقة}$$

(ث)

احاد	عشرات	مئات
٥	٤	٤

$80 =$ طريقة (لاحظ البداية من الخانة الأخيرة)

(ج)

احاد	عشرات	مئات
٤	١	٤

$16 =$ طريقة

(١٠) كم عدداً زوجياً من ارقام العدد ٩٢٣٥٦٦٥٠ ومختلف الأرقام يمكن تكوينه في الحالات التالية:

١) زوجياً ورقم عشراته من مضاعفات العدد ٣

ب) يقبل القسمة على ٥ ومئاته زوجياً

الحل: {٠, ٥, ٦, ٣, ٢, ٩}

عدد الخانات ستة

زوجياً بـ ٦

زوجياً بـ ٢

زوجياً بالصفير

٦	٥	٤	٣	٢	١	+	٦	٥	٤	٣	٢	١	+	٦	٥	٤	٣	٢	١
٣	١	٢	٣	٢	١		٣	١	٢	٣	٣	١		١	٢	٣	٤	٣	١

$162 = 36 + 54 + 72 =$ طريقة

ب) هنا تداخل بين الشرط يقبل القسمة على ٥، زوجياً

يقبل القسمة على ٥ يقبل القسمة على ٥ يقبل القسمة على ٥ لأن أوله

لأن أوله صفر ومئاته زوجياً بالصفير ٥ ومئاته زوجياً بـ ٢ أو ٦

٦	٥	٤	٣	٢	١	+	٦	٥	٤	٣	٢	١	+	٦	٥	٤	٣	٢	١
٣	١	٢	٢	٣	١		٤	١	٢	١	٣	١		٤	١	٢	٢	٣	١

$108 = 36 + 24 + 48 =$ طريقة

أ. فؤاد حسن راشد العبيسي

الوحدة الثانية: مبدأ العد والتباديل والتوافيق ومبرهنة ذات الحدين

(١١) ما عدد طرق اختيار ثلاثة جوائز من بين خمسة جوائز لتعطى للثلاثة الأوائل

الحل:

الأول	الثاني	الثالث
٥	٤	٣

= ٦٠ طريقة

(١٢) ما عدد طرق ترتيب ٥ كتب على رف بحيث يظل ٣ متجاورين

الحل:

$$\begin{array}{c} \boxed{3} \times \boxed{3} = \begin{array}{c} *1*1* \times \boxed{3} \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} \end{array}$$

الكتلة الأماكن الباقية

وضعنا الباقي بـ ١ ووضعنا الأماكن بـ *

الدرس الثالث: التباديل

أخذ r عنصر من بين n من العناصر مع مراعات الترتيب هو التباديل ويرمز له بالرمز ${}^n P_r$ ، $n \leq r$ أو ${}^n P_r$ ، $n \leq r$

قوانين هامة:

$$(1) \text{ الفك المباشر للتباديل } {}^n P_r = n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)$$

$$\text{فمثلاً: } {}^6 P_3 = 3 \times 4 \times 5 = 60 \quad , \quad {}^6 P_2 = 5 \times 6 = 30$$

$$\frac{{}^n P_r}{{}^n P_{n-r}} = {}^n P_n$$

(2) فك التباديل بقانون تحويل التباديل إلى مضروب

$$60 = 3 \times 4 \times 5 = \frac{3 \times 4 \times 5}{1} = \frac{5!}{2!} = \frac{5!}{3-5} = {}^6 P_3$$

$$30 = 5 \times 6 = \frac{5 \times 6}{1} = \frac{6!}{4!} = \frac{6!}{6-6} = {}^6 P_2$$

$${}^n P_n = n! \quad (3)$$

$$\text{فمثلاً: } {}^5 P_5 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120 = 5! = {}^5 P_0$$

$${}^n P_0 = 1 \quad (4)$$

$$\text{فمثلاً: } {}^6 P_6 = 1 \quad , \quad {}^6 P_1 = 6$$

$$(٥) \quad ١ = .١^٧$$

فمثلاً: $٥ = .١^٥$ ، $٦ = .١^٦$

$$(٦) \quad ١ + ٣ - ٥ = \frac{.١^٧}{.١^٣}$$

فمثلاً: $٣ = ١ + ٣ - ٥ = \frac{.١^٥}{.١^٢}$

(٧) إذا كان $.١^٧ = .١^٣$ فإن $٣ = ١$

فمثلاً: إذا كان $.١^٥ = .١^٣$ $\Leftarrow ٣ = ٥$

(٨) إذا كان $.١^٧ = .١^٣$ فإن $٣ = ١$

فمثلاً: إذا كان $.١^٧ = .١^٣$ $\Leftarrow ٣ = ٧$

(٩) لتحويل حاصل ضرب عوامل متتالية إلى تباديل نأخذ أكبر العوامل فيكون هو

٧ وعدد العوامل فيكون هو ٣

فمثلاً: ٢×٣ هو $.١^٣$ أو $.١^٢$

$$٢ \times ٣ \text{ هي نفسها } ١ \times ٢ \times ٣$$

$$.١^٧ = (٢-٧)(١-٧)٧ \text{ ، } .١^٥ = ٣ \times ٤ \times ٥$$

تمارين:

(١) أوجد قيمة ما يأتي:

(أ) ${}_3J^{12}$ (ب) ${}_4J^{3+\nu}$

(ت) ${}_5J^{3-\nu}$ (ث) ${}_{\varepsilon-\nu}J^{3-\nu}$

(الحل: أ) ${}_3J^{12} = 12 \times 11 \times 10 = 1320$

حل آخر طريقة القانون

$$1320 = 10 \times 11 \times 12 = \frac{\cancel{9} \times 10 \times 11 \times 12}{\cancel{9}} = \frac{12}{9} = \frac{12}{3-12} = {}_3J^{12}$$

(ب) ${}_4J^{3+\nu} = (\nu)(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)$

حل آخر طريقة القانون

$$\frac{\cancel{1-\nu} (\nu)(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)}{\cancel{1-\nu}} = \frac{3+\nu}{1-\nu} = \frac{3+\nu}{\varepsilon-3+\nu} =$$

$$(\nu)(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu) =$$

(ت) ${}_5J^{3-\nu} = (\nu-3)(\nu-2)(\nu-1)(\nu)(\nu+1)$

ويمكن حلها بطريقة القانون

(ث) ${}_{\varepsilon-\nu}J^{3-\nu}$ لا يمكن حلها بالطريقة المباشرة

$$\frac{3-\nu}{\varepsilon-\nu} = \frac{3-\nu}{1} = \frac{3-\nu}{\varepsilon+\nu-3-\nu} = \text{تحل بالقانون}$$

(٢) عبر بالصورة \mathcal{L}^v

(أ) $4 \times 3 \times 6 \times 5 \times 7$ (ب) 120

(ت) 210 (ث) $\mathcal{L}^v(2 + \mathcal{L}^3 - \mathcal{L}^2)$

(الحل: أ) $\mathcal{L}^v = 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 =$

(ب) $\mathcal{L}^0 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

(ت) $\mathcal{L}^v = 5 \times 6 \times 7 = 210$

(ث) $\mathcal{L}^v = (1 - \mathcal{L})(2 - \mathcal{L})$ (تحليل مقدار ثلاثي)

$\mathcal{L}^v = (2 - \mathcal{L})(1 - \mathcal{L}) =$

(٣) حل المعادلات التالية:

(أ) $720 = \mathcal{L}^v$

(الحل: $\mathcal{L}^v = 720 \iff \mathcal{L}^v = 6 \iff \mathcal{L}^v = 6 \iff \mathcal{L}^v = 6$

(ب) $\mathcal{L}^v = 3$

(الحل: يمكن استخدام قانون النسبة بين التباديل

$3 = \frac{\mathcal{L}^v}{\mathcal{L}^v} = \frac{\mathcal{L}^v}{\mathcal{L}^v}$ بالقسمة على \mathcal{L}^v

$6 = \mathcal{L}^v \iff 3 = 3 - \mathcal{L}^v \iff 3 = 1 + 4 - \mathcal{L}^v \iff$

(ت) $\mathcal{L}^v = \mathcal{L}^{2-v} = 4$

الحل: نفك التباديل بالطريقة المباشرة

$$\cancel{(3-n)} \cancel{(2-n)} (1-n) n = (4-n) \cancel{(3-n)} \cancel{(2-n)} 1$$

$$(1-n)n = (4-n)1$$

$$0 = 56 + n1 \quad 4-n-2n \Leftarrow n-2n = 56-n1 \quad 4$$

$$0 = (7-n)(8-n) \Leftarrow 0 = 56 + n1 \quad 5-2n \Leftarrow$$

$$8=n \Leftarrow 0 = 8-n \quad \text{إما}$$

$$7=n \Leftarrow 0 = 7-n \quad \text{أو}$$

$$9 = \frac{{}_{12}J^u}{{}_{11}J^u} \quad \text{ث)}$$

$$9 = 1 + 12 - n \Leftarrow \text{الحل:}$$

$$20 = n \Leftarrow 9 = 11 - n$$

$$\frac{3}{5} = \frac{{}_{1-n}J^{1+n2}}{{}_nJ^{1-n2}} \quad \text{ج)}$$

الحل: نفك البسط والمقام بالقانون

$$\frac{3}{5} = \frac{\frac{1+n2}{2+n}}{1-n} \Leftarrow \frac{3}{5} = \frac{\frac{1+n2}{1+n-1+n2}}{n-1-n2}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \times \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{\cancel{1-\sqrt{2}} \times \cancel{1-\sqrt{2}} (\cancel{\sqrt{2}})(1+\sqrt{2})}{\cancel{1-\sqrt{2}} \cancel{1-\sqrt{2}} (\cancel{\sqrt{2}})(1+\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{(2)(1+\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}$$

$$(1+\sqrt{2})(2+\sqrt{2})^3 = (1+\sqrt{2})^2 \times 5$$

$$(2+\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2})^3 = 10+\sqrt{2}0$$

$$6+\sqrt{2}9+\sqrt{2}^2\sqrt{2}^3=10+\sqrt{2}0 \Leftarrow$$

$$0=10-\sqrt{2}0-6+\sqrt{2}9+\sqrt{2}^2\sqrt{2}^3 \Leftarrow$$

$$0=(4-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}^3) \Leftarrow 0=4-\sqrt{2}11-\sqrt{2}^2\sqrt{2}^3$$

$$1-\sqrt{2}^3 \Leftarrow 0=1+\sqrt{2}^3$$

$$4=\sqrt{2} \Leftarrow 0=4-\sqrt{2} \text{ أو مرفوض } \frac{1}{3}-=\sqrt{2} \Leftarrow$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1^{\sqrt{2}-\sqrt{2}}}{5^{\sqrt{2}-\sqrt{2}}} \text{ (ح)}$$

الحل: قلب الطرفين ثم استخدام قاعدة النسبة بين التباديل

$$5=1+5-2-\sqrt{2} \Leftarrow \frac{5}{1} = \frac{5^{\sqrt{2}-\sqrt{2}}}{1^{\sqrt{2}-\sqrt{2}}}$$

$$11 = n \Leftarrow 5 = 6 - n$$

$$504 = {}^9P_3 \quad (\text{خ})$$

$$\text{الحل:} \quad \text{نضرب} \quad 7 \times 8 \times 9$$

$${}^9P_3 = 7 \times 8 \times 9 \quad (\text{لاحظ لوجود 9 نبدأ منها})$$

$${}^9P_3 = {}^9P_3 \Leftarrow 3 = 3$$

$$42 = {}^{n-2}P_2, \quad 11 = n + 2 \quad (\text{د})$$

$$\text{الحل:} \quad {}^{n-2}P_2 = 6 \times 7 = {}^{n-2}P_2 \Leftarrow {}^{n-2}P_2 = {}^{n-2}P_2$$

$$7 = n - 2$$

$$\text{بالجمع} \quad 11 = n + 2$$

$$9 = 2 \Leftarrow 18 = 22$$

بالتعويض

$$7 = n - 9 \Leftarrow 7 = n - 2$$

$$2 = n \Leftarrow 2 - = n - \Leftarrow 9 - 7 = n - \Leftarrow$$

$$42 = {}^{n+2}P_3 \quad (\text{ذ})$$

$$\text{الحل:} \quad (2 + s)(1 + s) = 42 \times s$$

$$6 \times 7 = (1 + s)(2 + s)$$

$$5 = s \Leftarrow 7 = 2 + s$$

$$1320 = {}^nP_3 \quad (\text{ر})$$

$$\text{الحل:} \quad {}^nP_3 = {}^{n-2}P_3 \Leftarrow 12 = n$$

$$(ز) \quad ١٢٠ = {}^{س-ص}ص٤, \quad ٥٠٤ = {}^{س+ص}ص٣$$

$$\text{الحل:} \quad {}^{س+ص}ص٣ = ٧ \times ٨ \times ٩ \Leftarrow {}^{س+ص}ص٣ = ٩!$$

$$\boxed{١} \leftarrow ٩ = ص + س$$

$${}^{س-ص}ص٤ = ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \Leftarrow {}^{س-ص}ص٤ = ٥!$$

$$\boxed{٢} \leftarrow ٥ = ص - س$$

$$\text{بجمع } \boxed{١}, \boxed{٢}$$

$$٩ = ص + س$$

$$١٤ = ص - س \Leftarrow ٥ = ص - س$$

$$\Leftarrow ٧ = س \text{ بالتعويض}$$

$$٥ = ص - س \Leftarrow ٧ = ص - س$$

$$٧ - ٥ = ص -$$

$$\Leftarrow ٢ = ص - ٧ \Leftarrow ٢ = ص$$

$$(س) \quad ١٢ = {}^{س-ص}ص٢, \quad \boxed{٤} = \boxed{ص - س}$$

$$\text{الحل:} \quad {}^{س-ص}ص٢ = ٣ \times ٤ \Leftarrow {}^{س-ص}ص٢ = ٤!$$

$$\boxed{١} \leftarrow ٤ = ص - س$$

$$\boxed{٤} = \boxed{ص - س}$$

$$\frac{١ \times ٢ \times ٣ \times \cancel{٤}}{\cancel{٤}} = \boxed{ص} \Leftarrow \frac{\boxed{٤}}{\boxed{٤}} = \boxed{ص} \Leftarrow \boxed{٤} = \boxed{ص}$$

$$\underline{ص} = 3 \times 2 \times 1 \Leftarrow \underline{ص} = 3 \Leftarrow 3 = \underline{ص}$$

بالتعويض

$$\underline{ص} - \underline{ص} = 4 \Leftarrow \underline{ص} - 3 = 4 \Leftarrow \underline{ص} = 7$$

(٤) كم عدد التطبيقات التي يمكن تكوينها من $\underline{ص}$ إلى $\underline{ص}$ حيث

$\underline{ص} = \{١, ٢, ٣, ٤, ٥\}$ ، $\underline{ص} = \{٢, ٣, ٥\}$ في الحالات التالية:

أ) بدون شرط

ب) إذا كان التطبيقات المطلوبة متباينة

ت) إذا كان التطبيقات المطلوبة غير متباينة

الحل:

أ) عدد التطبيقات من $\underline{ص}$ إلى $\underline{ص}$

$$\underline{ص} = 3 = 3^0 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243 \text{ تطبيق}$$

ب) عدد التطبيقات المتباينة

$$= 3^0 = 3 \times 4 \times 5 = 60 \text{ طريقة}$$

ت) عدد التطبيقات الغير متباينة

$$= \text{عدد التطبيقات كلها} - \text{عدد التطبيقات المتباينة}$$

$$= 243 - 60 = 183 \text{ تطبيق}$$

(٥) إذا كان $\underline{ص} < \underline{ص}$ فما اصغر قيمة لـ $\underline{ص}$

الحل: بالتجريب يوضع $\underline{ص} = ٧$ لان $\underline{ص} \leq \underline{ص}$

$$\underline{ص} = \underline{ص} = ٧$$

$$\underline{ص} = ٨$$

$$(٣) \text{ لا يوجد فك مباشرة للتوافيق وإنما يفك بالقانون } {}^n_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال: أوجد 9_2 ، 9_7

$$\text{الحل: } {}^9_2 = \frac{9 \times 8}{2} = \frac{9 \times 8}{2 \times 1} = \frac{9}{1} = {}^9_1$$

$$36 = 4 \times 9 =$$

$$\frac{9 \times 8}{2} = \frac{9 \times 8}{2 \times 4} = \frac{9}{2 \times 4} = {}^9_4$$

$$36 = 4 \times 9 =$$

لاحظ في المثالين تحقق العلاقة رقم $[2]$

(٤) ${}^n_r = {}^n_{n-r}$ ، ${}^n_1 = 1$ ، ويمكن ذلك باستخدام قانون فك

$$\text{التوافيق فمثلاً: (أ) } {}^5_1 = \frac{5!}{1! \cdot 4!} = {}^5_4$$

$$\text{(ب) } {}^5_4 = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{5}{1} = {}^5_1$$

$$(٥) \text{ إذا كان } {}^n_r = {}^n_{n-r} \text{ فإن } {}^n_r = {}^n_{n-r} \text{ أو } {}^n_r = {}^n_{n-r} + {}^n_{n-r-1}$$

ونستخدم هذه القاعدة في حل المعادلات التي تحوي توافيق

$$\text{فمثلاً: حل المعادلة } {}^n_{r+1} = {}^n_r$$

$$\text{الحل: } 1 = r \leq 1 = r - r_2 \leq r_2 = r + 1$$

أو $1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$ مرفوض

$$\frac{1 + r + \dots + r^{n-1}}{r} = \frac{r^n - 1}{r(r - 1)} \quad (6)$$

فمثلاً: أ) $\frac{3}{5} = \frac{1 + 5 + \dots + 5^{n-1}}{5} = \frac{5^n - 1}{5(5 - 1)}$

ب) إذا كان $2 = \frac{r^n - 1}{r - 1}$ فما قيمة r

الحل: $2 = \frac{r^n - 1}{r - 1} \Leftrightarrow 2(r - 1) = r^n - 1$

$2 = r \Leftrightarrow 2 = r^3 \Leftrightarrow r - 2 = r^3 - 2$

(7) علاقة (الكرخي) وهي $r^{n+1} = r^n + r^{n-1} + \dots + r + 1$

فمثلاً: $r^{11} = r^{10} + r^9 + \dots + r + 1$

(8) قاعدة التقسيم

عدد طرق تقسيم مجموعة تتضمن n عنصر إلى m مجموعات جزئية الأولى n_1

والثانية n_2 والثالثة n_3 والأخيرة n_m فإن

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$$

عدد الطرق $= \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_m!}$

فمثلاً: تقسيم مجموعة حروف كلمة سلسبيل نجد أن $٦ = ٧$

$$٦ = ٧ \text{ عدد حروف س} \quad ، \quad ٦ = ٧ \text{ عدد حروف ل}$$

$$٦ = ٧ \text{ عدد حروف ب} \quad ، \quad ٦ = ٧ \text{ عدد حروف ي}$$

$$\frac{\cancel{٦} \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦}{٢ \times \cancel{٦}} = \frac{\cancel{٦}}{١ \cdot ١ \cdot ٢ \cdot ٢} = \text{عدد الطرق}$$

$$١٨٠ = ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٣ =$$

$$\text{حل آخر} \quad ٦ \times ٦ \times ٦ \times ٦ \times ٦ \times ٦$$

$$\frac{\cancel{٦}}{٢ \cdot ٢} = ١ \times \frac{\cancel{٦}}{\cancel{٦} \cdot ٢} \times \frac{\cancel{٦}}{\cancel{٦} \cdot ٢} =$$

$$١٨٠ = \frac{٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦}{٢} = \frac{\cancel{٦} \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦}{٢ \cdot \cancel{٦}}$$

تمارين:

(١) حل المعادلات التالية:

$$(أ) \quad ٦ \times ١٠ = ٣ \times ١٠$$

$$\text{الحل: إما } ٦ = ٣ \text{ أو } ٦ + ٣ = ١٠ \Rightarrow ٩ = ٣$$

$$(ب) \quad ٦ \times ١٠ = ٣ \times ١٠$$

$$\text{الحل: إما } ٦ = ٣ \text{ أو } ٦ - ٣ = ٣ \Rightarrow ٣ = ٣$$

$$٢٥ = ٥ - ٣ + ٢ \text{ أو } ٥ = ٣ \leftarrow ٥ - = ٣ - \leftarrow$$

$$٦ = ٣ \leftarrow ٣٠ = ٥ \leftarrow ٥ + ٢٥ = ٣٥ \leftarrow$$

$$(ت) \quad ٢٠ = ٢ + ٢٠$$

$$\text{الحل: إما } ٢ = ٣ \leftarrow ٢ = ٣ - ٢ \leftarrow ٢ + ٣ = ٢٢$$

$$\text{أو } ٦ = ٣ \leftarrow ١٨ = ٣ \leftarrow ٢ - ٢٠ = ٣ \leftarrow ٢٠ = ٢ + ٣ + ٢ = ٢٦$$

$$(ث) \quad ١٢٠ = ١٢٠$$

الحل: نحول التوافيق إلى تباديل لوجود مجهولين هما n ، r

$$١٢٠ = ١٢٠ \leftarrow \frac{١٢٠}{١} = ١ \leftarrow \frac{١٢٠}{١} = ١٢٠$$

$$٥ = ٣ \leftarrow ٥ = ٣ \leftarrow$$

(٢) أوجد قيمة n في كل من:

$$(أ) \quad ٤٣٥ = ٢٠$$

الحل: هنا نفاك التوافيق إلى مضروب

$$٤٣٥ = \frac{٢ - ١ (١ - ١) ١}{٢ - ١ \cdot ٢} \leftarrow ٤٣٥ = \frac{١}{٢ - ١ \cdot ٢}$$

$$٣٠ = ١ \leftarrow ٣٠ \times ٢٩ = (١ - ١) ١ \leftarrow ٨٧٠ = (١ - ١) ١$$

$$(ب) \quad {}^5_6 C^{\vee}_{12} = {}^{\vee}_4 C^{\vee}_{12}$$

الحل: لا يوجد علاقة بين التوافيق في الطرفين ولذلك نقوم بفك التوافيق إلى مضروب في الطرفين

$$\frac{12}{\cancel{4-\vee} \cdot \cancel{4}} = \frac{5}{\cancel{6-\vee} \cdot \cancel{6}} \Leftarrow \frac{\cancel{12}}{\cancel{4-\vee} \cdot \cancel{4}} = \frac{\cancel{5}}{\cancel{6-\vee} \cdot \cancel{6}}$$

فك الكبير حتى يصل إلى الصغير في الطرفين

$$\frac{12}{\cancel{6-\vee} (5-\vee) (\cancel{4-\vee}) \cancel{4}} = \frac{\cancel{6}}{\cancel{6-\vee} \cancel{4} \cancel{6} \times \cancel{6}}$$

$$\frac{12}{(5-\vee)(\cancel{4-\vee})} = \frac{1}{6}$$

$$72 = (5-\vee)(\cancel{4-\vee}) \Leftarrow 12 \times 6 = (5-\vee)(\cancel{4-\vee})$$

$$\text{لاحظ الترتيب متتالي في الطرفين} \quad 8 \times 9 = (5-\vee)(\cancel{4-\vee})$$

$$\begin{array}{cc} 9 = 4 - \vee & \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$13 = \vee \Leftarrow 4 + 9 = \vee \Leftarrow \text{الأكبر} = \text{الأكبر}$$

$$(ت) \quad 6 = \frac{{}^{1+\vee}_5 C^{\vee}_{12}}{{}^{1+\vee}_4 C^{\vee}_{12}}$$

الحل: لاحظ هنا يمكن تطبيق قانون التناسب بين التوافيق

$$6 = \frac{3-\vee}{5} \Leftarrow 6 = \frac{1+5-1+\vee}{5}$$

$$33 = v \Leftarrow 30 = 3 - v \Leftarrow 6 \times 5 = 3 - v \Leftarrow$$

$$(3) \text{ أثبت أن } {}_{1+r}v^{2+v} = {}_{1-r}v^v + {}_r v^v + {}_{1+r}v^v$$

الحل: نستخدم قاعدة الكرخي

$$({}_{1-r}v^v + {}_r v^v) + ({}_r v^v + {}_{1+r}v^v)$$

$$\text{الايسر} = {}_{1+r}v^{2+v} = {}_r v^{1+v} + {}_{1+r}v^{1+v}$$

$$(4) \text{ أوجد قيمة } r = \frac{{}_r v^{30} + {}_{1+r}v^{30}}{{}_r v^{30} + {}_{1+r}v^{30}} = \frac{3}{5}$$

الحل: نستخدم علاقة الكرخي على البسط والمقام

$$\frac{3}{5} = \frac{{}_{1+r}v^{31}}{{}_r v^{31}} \text{ نقلب الطرفين ثم نستخدم النسبة بين التوافق}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{{}_r v^{31}}{{}_{1+r}v^{31}}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{1+2-r-31}{2+r} \Leftarrow$$

$$r3 - 90 = 10 + r5 \Leftarrow \frac{5}{3} = \frac{r-30}{2+r} \Leftarrow$$

$$10 = r \Leftarrow 80 = r8 \Leftarrow 10 - 90 = r3 + r5 \Leftarrow$$

(٥) إذا كان ${}^3J^{\nu} = 336$ ، ${}^{\nu}C_r : {}^{\nu}C_{1+r} = 4 : 5$ أوجد قيمة ν ، r

الحل: ${}^3J^{\nu} = 336$

$$8 = \nu \Leftarrow {}^3J^8 = {}^3J^{\nu} \Leftarrow 6 \times 7 \times 8 = {}^3J^{\nu}$$

$$\frac{5}{4} = \frac{{}^{\nu}C_{1+r}}{{}^{\nu}C_r} \Leftarrow \frac{5}{4} = \frac{{}^{\nu}C_r}{{}^{\nu}C_{1+r}} \quad \text{قلب الطرفين ثم النسبة بين التوافيق}$$

$$\frac{5}{4} = \frac{1 + 1 - r - \nu}{1 + r} \Leftarrow \frac{5}{4} = \frac{1 + (1 + r) - \nu}{1 + r}$$

$$\frac{5}{4} = \frac{r - \nu}{1 + r} \quad \text{بالتعويض في } \nu$$

$$5 + r5 = r4 - 32 \Leftarrow \frac{5}{4} = \frac{r - 8}{1 + r}$$

$$3 = r \Leftarrow 27 = r9 \Leftarrow 32 - 5 = r5 - r4 -$$

(٦) أوجد قيمة r في كلاً من

$$\binom{\nu}{r} = {}^{\nu}C_r \quad (أ)$$

$$\frac{1}{r} = 1 \Leftarrow \frac{{}^{\nu}C_r}{r} = {}^{\nu}C_r \quad \text{الحل:}$$

$$1 = r \Leftarrow 1 = r \Leftarrow 1 = r$$

$$0 = r \Leftarrow 1 = r \Leftarrow 1 = r \quad \text{أو}$$

$$(ب) \quad r_7 = \binom{r}{2}$$

$$r_7 = \frac{\binom{r}{2}}{2 - r} \cdot 2 \leftarrow r_7 = \binom{r}{2} \quad \text{الحل:}$$

$$r_7 = \frac{\cancel{2-r} (1-r) r}{\cancel{2-r} 2} \leftarrow$$

$$r_1 \quad \varepsilon = r - 2 \quad r_1 \quad \varepsilon = (1-r) r \leftarrow$$

$$15 = r, 0 = r \leftarrow 0 = (15-r) r \leftarrow 0 = r_1 \quad 5 - 2 \quad r \leftarrow$$

(٧) إذا كان $u < v$ ، أثبت أن $v < q$

$$\frac{\binom{u}{2}}{\varepsilon - u} \cdot 4 < \frac{\binom{u}{2}}{5 - u} \cdot 5 \quad \text{الحل:}$$

$$1 < \frac{\varepsilon - u}{4} \times \frac{\cancel{4}}{\cancel{5 - u} \cdot 5}$$

$$1 < \frac{\cancel{5 - u} \varepsilon - u \times \cancel{4}}{\cancel{5 - u} \cancel{4} \cdot 5}$$

$$5 \times 1 < \frac{\varepsilon - u}{5}$$

$$q < u \leftarrow 5 < \varepsilon - u$$

(٨) إذا كان ${}^n C_r = {}^{n-1} C_r + {}^{n-1} C_{r-1}$ فما قيمة n

الحل:
$${}^n C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$$

$${}^n C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$$

$${}^n C_r = {}^{n-1} C_r + {}^{n-1} C_{r-1} \Rightarrow {}^n C_r = {}^{n-1} C_r + {}^{n-1} C_{r-1}$$

(٩) إذا كان ${}^n C_r = {}^{n-1} C_r + {}^{n-1} C_{r-1}$ أوجد قيمة n

الحل: إما $r=1$ $\Rightarrow {}^n C_1 = {}^{n-1} C_1 + {}^{n-1} C_0$ ومنه $n=1$ أو $r=2$ $\Rightarrow {}^n C_2 = {}^{n-1} C_2 + {}^{n-1} C_1$

$${}^n C_2 = {}^{n-1} C_2 + {}^{n-1} C_1 \Rightarrow {}^n C_2 = {}^{n-1} C_2 + {}^{n-1} C_1$$

$${}^n C_2 = {}^{n-1} C_2 + {}^{n-1} C_1 \Rightarrow {}^n C_2 = {}^{n-1} C_2 + {}^{n-1} C_1$$

(١٠) إذا كان لدينا ثمانية نقاط كل ثلاث ليست على استقامة واحدة فاحسب

أ) عدد القطع المستقيمة التي يمكن رسمها بين كل نقطتين.

ب) عدد المتجهات المرسومة بين كل نقطتين من هذه النقاط.

الحل: أ) قطع مستقيمة يعني لا نهتم بالاتجاه لا يوجد ترتيب أي توافيق

$${}^8 C_2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2!6!} = {}^8 C_2 = 28 \text{ قطعة}$$

ب) تمثل نقطة بداية ونهاية القطعة المستقيمة

ب) متجهات يعني نهتم بالاتجاه أي يوجد ترتيب أي تباديل

$${}^8P_2 = \frac{8 \times 7}{2} = 28 \text{ متجه}$$

(١١) ما عدد الترتيب التي يمكن تكوينها إذا اخذنا ٤ حروف من كلمة الثورة

الحل: لو كان قال الترتيب المختلفة لكان تباديل ولكن هو توافيق

$${}^8P_4 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$$

(١٢) مجموعة مكونة من ٤ مهندسين ٣ أطباء ٥ محاسبين بكم طريقة يمكن اختيار ٣ أعضاء عل النحو التالي:

أ) من المهندسين والأطباء. ب) من اثنين محاسبين على الأقل.

ت) من المهندسين أو الأطباء.

$$\text{الحل: أ)} \quad {}^3P_3 + {}^3P_2 + {}^3P_1 = 1 + 3 + 3 = 7$$

$$\text{طريقة} \quad 30 = 12 + 18 = 3 \times 4 + 3 \times \frac{3 \times 4}{2} =$$

$$\text{ب)} \quad {}^5P_3 + {}^3P_2 + {}^3P_1 = 10 + 3 + 3 = 16$$

$$\frac{5!}{3!2!} + 4 \times \frac{5!}{3!2!} + 3 \times \frac{5!}{3!2!} =$$

$$\frac{4 \times 5}{2} + 4 \times \frac{4 \times 5}{2} + 3 \times \frac{4 \times 5}{2} =$$

$$\text{طريقة} \quad 80 = 10 + 40 + 30 =$$

$$(ت) \quad {}^4P_1 \times {}^3P_2 + {}^3P_1 \times {}^2P_3 + {}^2P_2 + {}^1P_3$$

$$\text{طريقة } 35 = 12 + 18 + 1 + 4 = 3 \times 4 + 3 \times \frac{3 \times 4}{2} + 1 + \frac{4}{1 \cdot 3}$$

(١٣) بكم طريقة يمكن اختيار خمسة أسئلة للإجابة عليها من بين ثمانية أسئلة في الحالات التالية:

أ) بدون شرط. ب) إذا كان السؤال الأول اجباري.

ت) إذا كانت الثلاثة الأولى اجبارية.

$$\text{الحل: أ) } {}^8P_5 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 672$$

$$\text{ب) } {}^8P_5 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} \times 1 = 672$$

$$\text{ت) } {}^8P_5 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} \times 1 = 672$$

(١٤) مجموعة مكونة من عشرة طلاب وخمس طالبات بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة تمثيل المدرسة مكونة من سبعة أشخاص في الحالات التالية:

أ) بدون شرط.

ب) من طالبة رئيساً وعضوية ثلاث طلاب وثلاث طالبات.

ت) من ثلاثة طلاب على الأقل.

ث) من ثلاث طالبات على الأكثر.

$$\text{الحل: أ) } {}^{15}P_7 = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{15!}{8! \cdot 7!} = 6435$$

$$\text{طريقة } ٦٤٣٥ = \frac{٣٢٤٣٢٤٠٠}{٥٠٤٠} =$$

لاحظ اختيار لجنة بدون تحديد مناصب توافق واختيار
لجنة محددة المناصب تباديل

$$(ب) \quad {}_١P٠ \times {}_٣P١٠ \times {}_٣P٤ =$$

$$\text{طريقة } ٢٤٠٠ = ٤ \times \frac{٨ \times ٩ \times ١٠}{١ \times ٢ \times ٣} \times ٥ = \frac{٤!}{١!٠٣!} \times \frac{١٠!}{٣!٠٧!} \times ٥ =$$

(ت)

$${}_٧P١٠ + {}_١P٠ \times {}_٦P١٠ + {}_٢P٠ \times {}_٥P١٠ + {}_٣P٠ \times {}_٤P١٠ + {}_٤P٠ \times {}_٣P١٠$$

الحل النهائي عملية مباشرة طويلة نكتفي بشكل الإجابة

$$(ث) \quad {}_٧P١٠ + {}_٦P١٠ \times {}_١P٠ + {}_٥P١٠ \times {}_٢P٠ + {}_٤P١٠ \times {}_٣P٠$$

الحل النهائي عملية مباشرة طويلة نكتفي بشكل الإجابة

(١٥) بكم طريقة يمكن تقسيم ٢٤ طالب إلى ثلاث مجموعات من تسعة طلاب وثمانية طلاب وسبعة طلاب.

الحل: من مسائل التقسيم المعروفة لها طريقتين للحل سوف نوردنا

$$\frac{٢٤!}{٧!٠٨!٠٩!} = \text{الطريقة الأولى}$$

الحل النهائي مباشر وطويل نكتفي بهذا الشكل

$$\text{الطريقة الثانية } {}_٧P٧ \times {}_٨P١٠ \times {}_٩P٢٤$$

$$\frac{24}{7 \cdot 8 \cdot 9} = 1 \times \frac{1}{7 \cdot 8} \times \frac{24}{1 \cdot 9}$$

الحل النهائي نكتفي بهذا الشكل

(١٦) ما عدد طرق اختيار (ترتيب) مجموعة مكونة من عنصرين أو ثلاثة عناصر من بين {أ، ب، ج، د، هـ، و} ؟

الحل: لم يقل طرق أو ترتيب مختلفة .∴ توافيق

$${}_3C^2 + {}_2C^1 =$$

$$\frac{4 \times 3 \times 2}{2 \times 1} + \frac{2 \times 1}{1} = \frac{6}{3 \cdot 2} + \frac{2}{4 \cdot 2} =$$

$${}_3C^2 = 3 = 2 + 1 =$$

(١٧) بكم طريقة يمكن ترتيب حروف كلمة

أ (س م س م) ب (ج ل ج ل)

الحل: أ (الكل = ٤ ، س = ٢ ، ل = ٢)

$${}_4P^2 = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = \frac{4}{2 \cdot 2} =$$

ويمكن حلها بالطريقة الأخرى التي سبق الحل بها

(ب) الكل = ٥ ، ٢ = ج ، ٢ = ل ، ١ = ٢

$${}_1P^0 \times {}_2P^3 \times {}_3P^5 =$$

$$1 \times \frac{3!}{1!0!} \times \frac{5!}{3!0!} =$$

(ويمكن الحل بالطريقة الثانية ومقارنة الحلين) طريقة ٣٠ = ٣ × $\frac{4 \times 5}{2}$

(١٨) بكم طريقة يمكن اختيار عشرة عمال من بين ١٥ متقدم لشغل عمل في مصنع في الحالات التالية:

أ) بدون شرط ب) بشرط قبول احدهم دون اختبار

ت) بشرط استبعاد احدهم

(الحل: أ) $\frac{10!}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 10!} = \frac{10!}{5!0!} = {}_{10}P^0$

= ٣٠٠٣ طريقة

(ب) $\frac{14!}{5!0!} \times 1 = {}_9P^4 \times {}_1P^1$

طريقة ٢٠٠٢٠ = $\frac{9! \times 10 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 9!} =$

$$(ت) \frac{14}{4 \cdot 10} \times 1 = 10^4 \times 10^1$$

$$طريقة 1001 = \frac{11 \times 12 \times 13 \times 14}{1 \times 2 \times 3 \times 4} =$$

(١٩) بكم طريقة يمكن مصافحة ١٠ أشخاص

$$طريقة 40 = \frac{9 \times 10}{2} = \frac{10}{2 \cdot 1} = 10^1$$

تمارين نهائية على مبدأ العد والتباديل والتوافيق

(١) ما هو عدد ارقام الهاتف الخماسية التي يمكن تشكيلها في الحالات التالية:

أ) دون شرط ب) إذا كانت الخانة الأخيرة ٣ أو ٤

الحل: مجموعة الأرقام = {١٠٠٠٠، ١٠٠٠١، ١٠٠١٠، ١٠١٠٠، ١١٠٠٠، ١٠٠١١، ١٠١١٠، ١١٠١٠، ١١٠٠١، ١٠١٠١، ١٠١١١، ١١١٠٠، ١١١٠١، ١١١١٠، ١١١١١}

(٢)

٥	٤	٣	٢	١
١٠	١٠	١٠	١٠	١٠

= ١٠ طرقاً لاحظ أن الخانة الأخيرة تتحمل الصفر وكذلك التكرار مسموح

(لماذا)

ب)

٥	٤	٣	٢	١
٢	١٠	١٠	١٠	١٠

= ٢ × ١٠ طرقاً

$$\binom{٧}{٣} \text{ أوجد قيمة } \binom{١٨}{٥+٣} = \binom{١٨}{٧-٣} \text{ (٢) إذا كان}$$

$$\text{الحل: } \binom{١٨}{٥+٣} = \binom{١٨}{٧-٣}$$

$$\text{إما } ١٢ = ٣ \leq ٥ + ٣ = ٧ - ٣ = ٤ \text{ مرفوض لأنها } < ٧$$

$$\text{أو } ٤ = ٣ \leq ٢ + ١٨ = ٥ \leq ١٨ = ٥ + ٣ + ٧ - ٣ = ١٢$$

$$35 = \frac{\cancel{4} \times 5 \times 6 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times \cancel{4}} = \frac{7}{3 \cdot 2} = \binom{7}{2} \therefore$$

(٣) أثبت علاقة الكرخي

$$\text{العلاقة هي } u_r^{1+n} = u_{r-1}^n + u_r^n$$

$$\text{الحل: الأيمن} \quad \frac{u}{1-r} \cdot \frac{1}{1+r-n} + \frac{u}{r} \cdot \frac{1}{r-n} = u_{1+r}^n + u_r^n$$

$$\frac{u}{1-r} \cdot \frac{1}{r-n} \cdot \frac{1}{1+r-n} + \frac{u}{1-r} \cdot \frac{1}{r \times r-n} =$$

$$\left[\frac{1}{1+r-n} + \frac{1}{r} \right] \frac{u}{r-n} \cdot \frac{1}{1-r} =$$

$$\left[\frac{\cancel{r} + 1 + \cancel{r} - n}{(1+r-n)r} \right] \frac{u}{r-n} \cdot \frac{1}{1-r} =$$

$$\left(\frac{1+n}{(1+r-n)r} \right) \frac{u}{r-n} \cdot \frac{1}{1-r} =$$

$$\frac{u(1+n)}{r-n(1+r-n) \cdot 1-r} =$$

$$\text{الايسر} = u_r^{1+n} = \frac{1+n}{1+r-n} \cdot \frac{u}{r} =$$

$$(4) \text{ إذا كان } u_v^{1-n} = u_{\alpha}^{1-n} \text{ فإن } n = \dots\dots\dots$$

$$\text{الحل: } n = 16$$



(٥) عدد الاعداد الزوجية المكونة من رقمين مختلفين من المجموعة

$$\sim \{٣, ٤, ٤, ٤, ٢\} \text{ تساوي } [٤, ٤, ٨, ٤, ٢] \quad \text{الحل: } ٦ =$$

$$(٦) \text{ إذا كان } ٣ = \underline{٣ - ٧} = ٣٦٠ \text{ فإن } ٧ = \dots\dots\dots$$

$$[٨, ٤, ٥, ١٠, ١٠, ١١] \quad \text{الحل: } ٨ = ٧$$

$$(٧) ٧٢٠ = ٧! \text{ فإن } ٧ = \dots\dots\dots \quad \text{الحل: } ٣ = ٣$$

(٨) عدد المجموعات الجزئية ذات عنصرين من مجموعه ذات ٤ عناصر تساوي

$$\dots\dots\dots \quad \text{الحل: } ١٠ \text{ أو } ١٠$$

$$(٩) \text{ إذا كان } ٥ = \underline{٥ - ٢} = ٢ \text{ فإن } ٢ = \dots\dots\dots \quad \text{الحل: } ٧ = ٧$$

$$(١٠) \text{ إذا كان } ٤! = ٤ \text{ فإن } ٤ = \dots\dots\dots \quad \text{الحل: } ٤ = ٤$$

(١١) عدد طرق فتح حقيبة رقمية ذات ٣ خانات علم رقم احد خاناتها = ١٠٠

صح أم خطأ

الحل: لاحظ الحقيبة من الحالات الخاصة التي خاناتها الأخيرة تتقبل الصفر

∴ الإجابة صحيحة

$$(١٢) ١١! + ١١! = \dots\dots\dots \quad \text{الحل: } ١٢! = ١٢!$$

(١٣) عدد طرق جلوس ٦ اشخاص في سيارة ٣ منهم يجيدون السواقة = ٣٦٠

صح أم خطأ **الحل:** ٣٦٠ = ∴ الإجابة صحيحة

(١٤) من $\sim = \{٣, ٤, ٤, ٦\}$ عدد الاعداد الفردية المكونة من رقمين مختلفين

$$٢ = \text{صح أم خطأ} \quad \text{الحل: } ٢ = \dots\dots\dots \quad \text{الإجابة صحيحة}$$

أ. فؤاد حسن راشد العيسى

(١٥) عدد طرق جلوس ٤ طلاب على ٦ كراسي موضوعة في خط مستقيم = ٢٤

صح أم خطأ **الحل:** ٦! = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ = ٣٦٠ طريقة

٤	٣	٢	١
٣	٤	٥	٦

∴ الإجابة خاطئة

(١٦) عدد طرق اختيار رئيس ونائب من بين ٣ طالبات هو [٦، ٣]

الحل: الاختيار الصح هو ٦

(١٧) عدد طرق جلوس ٣ يمينيين و ٣ سوريين في صف كل جنسية على حده

[٧٢، ٢٤، ٣٦، ٩] **الحل:** الاختيار الصح هو ٧٢

(١٨) عدد طرق جلوس ٣ يمينيين و ٣ سوريين في صف بشرط أن يكون السورين

معاً [٧٢، ٣٦، ٩، ١٤٤] **الحل:** الاختيار الصح = ١٤٤

(١٩) إذا كانت $u^{2-n} + u^{1-n} = u^{1-n}$ فإن $n = \dots\dots\dots$

[٢٠، ١٥، ١٠، ٥] **الحل:** الاختيار الصح هو $n = ١٠$

هامش الحل: $u^{1-n} = u^{1-n} + u^{1-n} \Rightarrow 1-n = 9 \Rightarrow n = 10$

(٢٠) إذا كانت $S = \{١٠، ٢٠، ٣٠، ٤٠، ٥٠\}$ احسب عدد الطرق لتكوين عدد

خماسي في الحالتين: أ) فردي فقط ب) زوجياً ويقبل القسمة على عشرة

الحل: أ)

٥	٤	٣	٢	١
٥	٦	٦	٦	٣



$$\text{عدد } 3240 = 6 \times 6 \times 6 \times 15 =$$

(ب)

٥	٤	٣	٢	١
٥	٦	٦	٦	١

$$\text{عدد } 1080 = 6 \times 6 \times 6 \times 5 =$$

(٢١) إ١١ كان ${}^n P_r = 5$ أوجد قيمة n

$$\text{الحل: } {}^n P_r = {}^n P_r \Leftrightarrow 1 = n$$

(٢٢) عدد طرق تقسيم ٤ لعب إلى مجموعتين ٣ لعب ولعبة واحدة تساوي

الحل: ٤ =

$$\text{هامش الحل: } {}^n P_r = {}^n P_r \times {}^n P_r = 4$$

(٢٣) عدد طرق اختيار ٣ كتب واقل من بين ٤ كتب هو

الحل: ٢٦ =

$$\text{هامش الحل: } {}^n P_r = {}^n P_r + {}^n P_r + {}^n P_r + {}^n P_r = 26$$

ثانياً: مفكوك ذات الحدين

الدرس الأول: مبرهنة ذات الحدين

ويسمى مفكوك نيوتن: ويستخدم لفك المقادير الثنائية ذات الأس الكبير وبصورة عامه

$$\text{أولاً: } (s + v)^n = \binom{n}{0} v^n + \binom{n}{1} s v^{n-1} + \binom{n}{2} s^2 v^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} s^{n-1} v + \binom{n}{n} s^n$$

ومن هذه الصيغة نستطيع التوصل إلى:

(١) إذا كان قوة المقدار n فإن عدد حدود المفكوك $n+1$

(٢) معاملات الحدود هي $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$

(٣) مجموع معاملات الحدود $= 2^n$

(٤) مجموع أسس s, v في كل حد تساوي n

(٥) قوى s تنازليه وقوى v تصاعديه ويمكن التأكد من ذلك من خلال المثال العددي

أوجد مفكوك $(s + v)^4$

$$(s + v)^4 = \binom{4}{0} v^4 + \binom{4}{1} s v^3 + \binom{4}{2} s^2 v^2 + \binom{4}{3} s^3 v + \binom{4}{4} s^4$$

$$= v^4 + 4 s v^3 + 6 s^2 v^2 + 4 s^3 v + s^4$$

من المفكوك السابق:

$$(١) \text{ عدد حدود المفكوك } 5 = 4 + 1$$

$$(٢) \text{ مجموع معاملات الحدود } = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$$

أي 2^4 (حقق ذلك)

(٣) مجموع أسس $s, v = 4 = 4$ (حقق ذلك)

أ. فؤاد حسن راشد العبيسي

الوحدة الثانية: مبدأ العد والتباديل والتوافيق ومبرهنة ذات الحدين

ثانياً: ${}^v(s-v) = {}^v(s) \cdot {}^v v - {}^{1-v}(s) \cdot {}^v v$

$$^{\xi}(\text{ص})^{\xi-\eta}(\text{س})_{\xi}\text{ق}^{\eta} + {}^3\text{ص}^{3-\eta}(\text{س})_{\eta}\text{ق}^{\eta} - {}^2\text{ص}^{2-\eta}\text{س}_{\eta}\text{ق}^{\eta} + \dots + {}^{\eta}(\text{ص})^{\cdot}(\text{س})_{\eta}\text{ق}^{\eta} + \dots +$$

ومن هذه الصيغة نستطيع التوصل إلى:

(١) إذا كان قوة المقدار n فإن عدد حدود المفكوك $n + 1$

(٢) معاملات الحدود هي $u^1 - u^0, u^2 - u^1, u^3 - u^2, \dots$

٣) مجموع معاملات الحدود =

(٤) مجموع اسي س، ص في كل حد تساوي ٧

(۵) قوی س تنازلیة وقوی ص تصاعدیة

أوجد مفكوك (س - ص) ^٤

$${}^1(\text{ص})^3(\text{س})_1\text{و}^4 - {}^1(\text{ص})^4(\text{س})_1\text{و}^4 = {}^4(\text{ص} - \text{س})$$

$${}^{\xi}(\text{ص}) \cdot {}^{\zeta}(\text{س}) \cdot \mathcal{U}^{\xi} + {}^{\zeta}(\text{ص}) \cdot {}^{\eta}(\text{س}) \cdot \mathcal{U}^{\xi} - {}^{\eta}(\text{ص}) \cdot {}^{\eta}(\text{س}) \cdot \mathcal{U}^{\xi} +$$

من المفكوك السابق:

(١) عدد حدود المفكوك $o = 1 + \xi = 1 + \nu =$

(٢) مجموع معاملات الحدود

(۳) مجموع اسی س، ص، و = ن = ع

مثال: أوجد مفكوك ذات الحدين في كل من:

$$(١) (١ - س)^٣$$

$$\text{الحل: } ٣ ق_٠ (س)^٣ (١)^٠ - ٣ ق_١ (س)^٢ (١)^١ + ٣ ق_٢ (س)^١ (١)^٢ - ١ ق_٣ (س)^٠ (١)^٣$$

$$- ٣ ق_٢ (س)^١ (١)^٢ + ٣ ق_١ (س)^٢ (١)^١ - ١ ق_٠ (س)^٣ (١)^٠$$

$$= ١ \times ٣ \times س^٣ \times ١ - ١ \times ٣ \times س^٢ \times ١ + ١ \times ٣ \times س^١ \times ١ - ١ \times ١ \times س^٠ \times ١$$

$$= ٣س - ٣س + ٣س - ١ = ٣س - ١$$

$$(٢) (١ + س + س^٢)^٣$$

الحل: أولاً نحول المقدار إلى ثنائي بالتحليل

$$(١ + س + س^٢)^٣ = (١ + س)^٦$$

$$= ٦ ق_٠ (س)^٠ (١)^٦ + ٦ ق_١ (س)^١ (١)^٥ + ١٥ ق_٢ (س)^٢ (١)^٤ + ٢٠ ق_٣ (س)^٣ (١)^٣ + ١٥ ق_٤ (س)^٤ (١)^٢ + ٦ ق_٥ (س)^٥ (١)^١ + ١ ق_٦ (س)^٦ (١)^٠$$

$$= ١ \times ١ + ٦ \times س + ١٥ \times س^٢ + ٢٠ \times س^٣ + ١٥ \times س^٤ + ٦ \times س^٥ + ١ \times س^٦$$

$$= ١ + ٦س + ١٥س^٢ + ٢٠س^٣ + ١٥س^٤ + ٦س^٥ + س^٦$$

$$= ١ + ٦س + ١٥س^٢ + ٢٠س^٣ + ١٥س^٤ + ٦س^٥ + س^٦$$

$${}^3s \left(1 + \frac{1}{s}\right)$$

$$\text{الحل:} = s \left[{}^1(1) \left(\frac{1}{s}\right) {}^2s + {}^1(1) \left(\frac{1}{s}\right) {}^3s + {}^0(1) \left(\frac{1}{s}\right) {}^3s \right]$$

$$\left[{}^3(1) \left(\frac{1}{s}\right) {}^3s + \right.$$

$$\left. s \left[1 \times {}^0s \times 1 + 1 \times {}^1s \times 3 + 1 \times {}^2s \times 3 + 1 \times {}^3s \times 1 \right] = \right.$$

$$= {}^3s + {}^2s + {}^1s + {}^0s =$$

$${}^3(1, 5) \quad (4)$$

الحل: نحول إلى حدين

$${}^3(0, 5+1) = {}^3(0, 5) {}^3(1) {}^3s + {}^3(0, 5) {}^2(1) {}^3s +$$

$$+ {}^2(0, 5) {}^1(1) {}^3s + {}^1(0, 5) {}^0(1) {}^3s +$$

$$\frac{1}{8} \times 1 \times 1 + \frac{1}{4} \times 1 \times 3 + \frac{1}{2} \times 1 \times 3 + 1 \times 1 \times 1 =$$

$$\frac{27}{8} = \frac{1+6+12+8}{8} = \frac{1}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + 1 =$$

تمارين:

(١) إذا كان في مفكوك $(s + v)^n$ مجموع المعاملات 2_3 فإن ${}^2_3 = \dots\dots\dots$

الحل: هامش الحل

$${}^{\circ}2 = {}^{\circ}2 = {}^{\circ}2 \text{ وهذا تحقق عندما}$$

$$\text{معامل س} = \text{معامل ص} \Leftarrow {}^11 = {}^11 \text{ لان معامل ص} = 1$$

$$(2) \text{ إذا كان مجموع أسّي } {}^11, \text{ ب في مفكوك } (1 + \text{ب})^{1+{}^{\circ}2} = {}^11 \text{ فما قيمة } {}^{\circ}2$$

$$\text{الحل: مجموع الأسين} = {}^{\circ}2 = 1 + {}^{\circ}2 \Leftarrow {}^11 = 1 + {}^{\circ}2$$

$$8 = {}^{\circ}2 \Leftarrow 16 = {}^{\circ}2 \Leftarrow 1 - 17 = {}^{\circ}2$$

$$(3) \text{ إذا كان عدد حدود مفكوك } (س - 2)^{1+{}^{\circ}2} \text{ هو } {}^16 \text{ فما قيمة } {}^{\circ}2$$

$$\text{الحل: عدد الحدود} = 1 + {}^{\circ}2$$

$$1 + (1 + {}^{\circ}2) = 16 \Leftarrow$$

$$7 = {}^{\circ}2 \Leftarrow 14 = {}^{\circ}2 \Leftarrow 2 + {}^{\circ}2 = 16 \Leftarrow$$

$$(4) \text{ ما عدد الحدود في مفكوك } (س^2 - 2س + 9)^{\circ}2$$

$$\text{الحل:} \Leftarrow (س^2 - 2س + 9)^{\circ}2 \Leftarrow (س - 3)^{10}$$

$$\Leftarrow {}^10 = {}^{\circ}2 \Leftarrow {}^10 = 1 + {}^10 = 1 + {}^{\circ}2 \therefore \text{عدد الحدود} = 1 + {}^{\circ}2 = 1 + {}^10 = {}^11$$

$$(5) \text{ إذا كان مجموع المعاملات في مفكوك } (س + ص)^{\circ}2 = {}^{\circ}2 \text{ فما قيمة } {}^{\circ}2$$

$$\text{الحل: مجموع المعاملات} = {}^{\circ}2 = {}^{\circ}2 \Leftarrow {}^{\circ}2 = {}^{\circ}2 \Leftarrow {}^{\circ}2 = {}^{\circ}2 \Leftarrow {}^{\circ}2 = {}^{\circ}2 \Leftarrow {}^{\circ}2 = {}^{\circ}2$$

$$(6) \text{ إذا كان مجموع المعاملات في مفكوك } (س + ص)^{16} = {}^16 \text{ أوجد قيمة } {}^16$$

$$\text{الحل: مجموع المعاملات} = {}^{\circ}2$$

$${}^{16}2 = {}^16 \Leftarrow {}^{16}2 = {}^16$$

$$1 = {}^16 \Leftarrow {}^16 = {}^16$$

الحد الخالي من س (المستقل عن س):

لإيجاد ذلك نضع $س = ٠$ $ع = ١+ر$

فمثلاً: في المثال السابق $(س - ٢)٠$ لإيجاد الحد الخالي من س

نضع $س = ٠$ $٠ = ٢٠ (س) (٢ -) ٢ \Leftarrow س = ٠ س = ٠ \Leftarrow ٠ = ٢ - ٠ = ٠$

$٠ = ٢ - ٠ = ٠ \Leftarrow ٠ = ٢ - ٠ = ٠$ أي الحد الخالي من س هو $ع = ١+٠$

ملاحظة:

- متى نقول أن المفكوك ليس له حد يحوي س أس عدد أو حد خالي من س
- إذا طلع ناتج $ر$ في كل قيمة سالبة أو كسر أي عدد غير طبيعي

تمارين:

(١) أوجد $ع$ في مفكوك $(٢ - س)٦$

الحل: $ع = ١+٤$ $٦ = ٤ (٢ - س)٢$

$$٦ = \frac{٥ \times ٦}{٢} \times ٤ \times س٢ \times ١٦ = ١٦ \times ٦٠ = ٩٦٠ س٢$$

(٢) أوجد معامل $ع$ في مفكوك $(١ - \frac{١}{س})٧$

الحل: $ع = ١+٥$ $٧ = ٥ (\frac{١}{س})٢ (١ -)٥$

$$٧ = \frac{٦ \times ٧}{٢} = \frac{٤٢}{٢} = ٢١$$

$$س^{-٤} = ١٢ \times (٢ س)^{-١٢} \left(\frac{٣-}{٢ س} \right)^{-٣}$$

بمقارنة س في الطرفين

$$س^{-٤} = س^{-١٢} \times س^{-٣}$$

$$-٤ = -١٢ - ٣ \Rightarrow -٤ = -١٥ \Rightarrow ١١ = ٤$$

أي الحد الذي يحوي س^{-٤} هو $١١ \times ٤ = ٤٤$.

$$٤ = ١٢ \times (٢ س)^٨ \left(\frac{٣-}{٢ س} \right)^٤$$

الدرس الثالث: الحدود الوسطى

(١) إذا كانت قوة المفكوك n زوجية فإن $1 + n$ فردية وبالتالي يوجد حد أوسط

واحد رتبته $\frac{n}{2}$

(٢) إذا كانت قوة المفكوك n فردية فإن $1 + n$ زوجية وبالتالي يوجد حدين

أوسطين رتبتهم $\frac{n+1}{2}$ ، $\frac{n+1}{2} + 1$

فمثلاً: في مفكوك $(1 - x)^9$ نلاحظ أن n فردي أي $1 + n$ زوجي ومنه يوجد

حدين أوسطين رتبتهم $\frac{1+9}{2} = 5$ ، الحد الذي يليه $\frac{1+9}{2} + 1 = 6$ أي الحدين الأوسطين

$$\frac{9}{2} = 4 \quad \frac{9}{2} = 5 \quad \frac{9}{2} = 4 \quad \frac{9}{2} = 5$$

أما في مفكوك $(1 - x)^8$ نجد أن n زوجية يعني أن $1 + n$ فردي ومنه يوجد

حد أوسط واحد هو $\frac{n}{2} = 4$

أي الحد الأوسط $\frac{n}{2} = 4$

تمارين:

(١) أوجد الحد الأسط في مفكوك $(٢س - ١)^٦$

الحل: n عدد زوجي أي $n + ١$ فردي

للمفكوك حد أوسط رتبته $ع = \frac{n}{٢} = \frac{٦}{٢} = ٣$

$$ع = {}^٦C_٣ (٢س)^٣ (-١)^{٦-٣} = {}^٦C_٣ (٢س)^٣ (-١)^٣$$

(٢) أوجد الحدين الأوسطين في مفكوك $\left(س + \frac{١}{س}\right)^٧$

الحل: رتبتي الحدين $\frac{n}{٢} = \frac{٧}{٢}$ والحد الذي يليه

أي $ع = \frac{٧}{٢}$ والحد الأوسط الذي يليه $ع + ١$

$$ع = {}^٧C_{\frac{٧}{٢}} \left(\frac{١}{س}\right)^{\frac{٧}{٢}} (س)^{\frac{٧}{٢}} = {}^٧C_{\frac{٧}{٢}} \frac{١ \times ٣ \times ٥ \times ٧}{٢ \times ٤ \times ٦ \times ٨} = {}^٧C_{\frac{٧}{٢}} \frac{١٠٥}{١٢٨}$$

$$ع + ١ = {}^٧C_{\frac{٧}{٢} + ١} \left(\frac{١}{س}\right)^{\frac{٧}{٢} + ١} (س)^{\frac{٧}{٢} + ١} = {}^٧C_{\frac{٩}{٢}} \frac{١ \times ٣ \times ٥ \times ٧}{٢ \times ٤ \times ٦ \times ٨} = {}^٧C_{\frac{٩}{٢}} \frac{١٠٥}{١٢٨}$$

الدرس الرابع: النسبة بين حدود المفكوك

قاعدة:
$$\frac{ع}{ع} = \frac{ع^{١+ر-ن}}{ع^ر} \left(\frac{ص}{س} \right)$$

قاعدة:
$$\frac{ع}{ع} \text{ معامل } \frac{ع^{١+ر-ن}}{ع^ر} = \frac{ع}{ع} \text{ معامل } \frac{ص}{س}$$

فمثلاً:
$$ع \div ع = ع \text{ في مفكوك } (س - ٢)^٩$$

هو
$$\frac{ع}{ع} = \frac{ع^{١+٤-٩}}{ع^٤} = \frac{ع^{٣-}}{ع^س}$$

، معامل
$$\left(ع \div ع \right) \text{ في نفس المفكوك}$$

هو معامل
$$\frac{ع}{ع} = \frac{ع^{١+٤-٩}}{ع^٤} = \frac{ع^{٣-}}{ع^س}$$

تمارين:

(١) إذا كان
$$\frac{ع}{ع} = \frac{ع^{٣}}{ع^{١٠}} = \frac{ع^{١٤}}{ع^{١٥}} = ع \text{ في } (س + ٣)^ن \text{ فما قيمة } ن$$

الحل:
$$\frac{ع}{ع} = \frac{ع^{١٤}}{ع^{١٥}} \Leftarrow ع = \frac{ع^{١٤}}{ع^{١٥}}, \quad \frac{ع}{ع} = \frac{ع^{١٠}}{ع^٩} \Leftarrow \frac{ع}{ع} = \frac{ع^٣}{ع^٢}$$

ومما سبق
$$\frac{ع}{ع} \left(\frac{ع}{ع} \right) \frac{ع^{١+٩-ن}}{ع^٩} = \frac{ع}{ع} \left(\frac{ع}{ع} \right) \frac{ع^{١+٩-ن}}{ع^٩} = \frac{ع}{ع}$$

$$\frac{ع}{ع} \left(\frac{ع}{ع} \right) \frac{ع^{١+٩-ن}}{ع^٩} = \frac{ع}{ع}$$

بقسمة ١ على ٢ $\frac{14}{13-n} \times \frac{8-n}{9} = \frac{4}{1} \times \frac{2}{3}$

$$\frac{(8-n)14}{(13-n)3} = 8 \Leftrightarrow \frac{(8-n)14}{(13-n)9} = \frac{8}{3}$$

$$112 - n14 = 312 - n24 \Leftrightarrow (8-n)14 = (13-n)24$$

$$20 = n \Leftrightarrow 200 = n10$$

(٢) في مفكوك $(s+1)^n$ إذا كان معامل الحدين السادس والخامس متساويان

أوجد قيمة n

الحل: $1 = \left(\frac{1}{1}\right)^{1+5-n} \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{1} \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{1}$

$$9 = n \Leftrightarrow 5 = 4 - n \Leftrightarrow 1 = \frac{4-n}{5}$$

(٣) في مفكوك $(s^2 + s10 + 25)^n$ إذا كان الحد الأوسط يحوي s^3 فما

قيمة n

الحل: ${}^{n2}(5+s) = {}^n(2(5+s)) = {}^n(s^2 + s10 + 25)$

رتبة الحد الأوسط $n = r \Leftrightarrow {}^{n2}1 = {}^{n2}1 = {}^{n2}1 = {}^{n2}1$

$$s^3 = {}^{n2}1 \cdot (s)^{n-2} \cdot (5)^{n-2}$$

بمقارنة s في الطرفين

$$3 = n \Leftrightarrow {}^n s = {}^3 s$$

(٤) إذا كان الحد الخالي من s في مفكوك $(s+2)^n$ يساوي ٢٥٦ فما قيمة n

الحل: $s = 0 \Rightarrow \binom{n}{0} (s+2)^0 = 1 \Rightarrow \binom{n}{0} = 1 \Rightarrow 1 = 1$

، الحد هو $\binom{n}{1} (s+2)^1 = 2n = 256 \Rightarrow n = 128$

$8 = n \Rightarrow 8 = 2 \times 1 \times 1 \Rightarrow$

(٥) في مفكوك $(s+1)^n$ $1 + 2s + 2s^2 + \dots$ أوجد قيمة

n ، s

الحل: $1 = \binom{n}{0} (s+1)^0 = 1 \Rightarrow \binom{n}{0} = 1 \Rightarrow 1 = 1$

$2s = \binom{n}{1} (s+1)^1 = n(s+1) \Rightarrow 2s = n(s+1)$

$1 \leftarrow \frac{2s}{n} = 1 \Rightarrow 2s = n$

$2s^2 = \binom{n}{2} (s+1)^2 = \frac{n(n-1)}{2} (s+1)^2 \Rightarrow 2s^2 = \frac{n(n-1)}{2} (s+1)^2$

$\boxed{2} \leftarrow \frac{2s^2}{s^2} = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow \boxed{2} \leftarrow \frac{n(n-1)}{2}$ بالتعويض عن 1 في $\boxed{2}$

$2s^2 = \frac{2s \times 2s}{s \times s} \times \frac{(1-n)n}{2} \Rightarrow 2s^2 = \left(\frac{2s}{s}\right) \times \frac{(1-n)n}{2}$

$1 = \frac{(1-n)(1-n)}{n} \Rightarrow 2s^2 = \frac{(2s)(1-n)(1-n)}{n}$

$6 = n \Rightarrow 12 = n \Rightarrow 12 = n \Rightarrow 12 = n$

بالتعويض في $\boxed{1} \Rightarrow \frac{2s}{n} = 1 \Rightarrow 2s = n$

(٦) إذا كان $٧٢٩ = ١ + ٦س + \frac{٥ \times ٦}{١ \times ٢}س + + ٢س$ أوجد قيمة $س$

الحل: $٧٢٩ = ٦(س + ١)$

$$٢ = س \Leftarrow ١ - ٣ = س \Leftarrow ٣ = س + ١ \Leftarrow ٦٣ = ٦(س + ١)$$

(٧) إذا كان $٣١ = ١ + ٢س + ٣س + + ٢س + ١$ أوجد قيمة $س$

الحل: بإضافة ١ للطرفين

$$١ + ٣١ = ١ + ٢س + ٣س + + ٢س + ١$$

$$٥ = س \Leftarrow ٢ = ٢س \Leftarrow ٣٢ = ٢(١ + س)$$

(٨) إذا كان الحد الأوسط في مفكوك $\left(\sqrt{س} + \frac{٢}{س} \right)^٢$ هو الحد التاسع أوجد:

أ) قيمة $س$ ب) الحد الذي يحوي $س^{\frac{١}{٢}}$

الحل: الحد الأوسط رتبته $ع = ١ + \frac{٢}{٢} = ٩$

$$١٦ = س \Leftarrow ٨ = \frac{٢}{س} \Leftarrow ٩ = ١ + \frac{٢}{س} \Leftarrow$$

$$١٦ = س \quad (١)$$

$$ب) س^{\frac{١}{٢}} = ٩ = \frac{٢}{س} \left(\sqrt{س} \right)^{٢-١٦} = \frac{٢}{س} \left(\sqrt{س} \right)^{-١٤}$$

بمقارنة $س$ في الطرفين $س^{\frac{١}{٢}} = س^{\frac{١}{٢}} \Leftarrow س^{\frac{١}{٢}} \times س^{١٦} = س^{\frac{١}{٢}} \times س^{١٦}$

$$\frac{٣}{٢} + ١٦ = \frac{١}{٢} \Leftarrow \frac{١}{٢} + ١٦ = \frac{١}{٢} \Leftarrow$$

أ. فؤاد حسن راشد العبيسي



$$\frac{33}{2} = 16 + \frac{1}{2} = 17 \Rightarrow \frac{33}{2} = 17$$

$$11 = 11 \quad \text{الحد الذي يحوي } \frac{1}{2} \text{ هو } 11 \quad 12 = 12$$

$$(9) \text{ في مفكوك } \left(\frac{4}{s} - \frac{3}{2} \right)^{11} \text{ أوجد قيمة } s \text{ التي تجعل مجموع الحدين}$$

الأوسطين مساوياً الصفر

الحل: رتبة الحدين الأوسطين $\frac{11}{2}$ والذي يليه

$$\text{أي } 11 = \frac{11}{2} = \frac{11}{2} \text{ والثاني } 7$$

$$0 = 7 + 7 \Rightarrow 0 = 14$$

$$1 - = 7 - = 7 \text{ بالقسمة على } 7 \Rightarrow 1 - = \frac{7}{7}$$

$$1 - = \left(\frac{4}{s} - \frac{3}{2} \right)^{11} \Rightarrow 1 - = \left(\frac{4}{s} - \frac{3}{2} \right)^{11}$$

$$1 - = \frac{11}{s} \Rightarrow 11 = s \Rightarrow 11 = s$$

$$(10) \text{ في مفكوك } \left(\frac{1}{s} + s \right)^{11} \text{ إذا كان مجموع معاملي الحدين الرابع والخامس}$$

$$11 = 11 \text{ أوجد ما يلي:}$$

أ) قيمة v (ب) قيمة s التي تجعل هذين الحدين متساويين

الحل: أ) معامل x^v + معامل $x^v = 70 \Leftrightarrow 10 = 10 + 0 \Leftrightarrow 70 = 10 + 0$

ومن الكرخي $70 = 10 + 0 \Leftrightarrow 70 = \frac{10!}{v!(70-v)!} \Leftrightarrow 70 \times 24 = 10! \Leftrightarrow 70 = \frac{10!}{24}$

$7 = v \Leftrightarrow 5 \times 6 \times 7 \times 8 = (2-v)(1-v)(v)(1+v) \Leftrightarrow$

(ب) $1 = \frac{v}{7} \Leftrightarrow 7 = v$

$1 \pm = s \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{s} \Leftrightarrow 1 = \left(\frac{1}{s} \right) \frac{1+4-7}{4}$

(١١) في مفكوك $(s+1)^v$ إذا كانت النسبة بين معاملات ثلاثة حدود متتالية هي

١، ٣، ٥ أوجد:

أ) قيمة v (ب) رتبة الحدود

الحل: نفرض الحدود x^r ، x^{1+r} ، x^{2+r}

معامل $\frac{x^{2+r}}{x^{1+r}} = \frac{5}{3}$ ، معامل $\frac{x^{1+r}}{x^r} = \frac{3}{1} \Leftrightarrow \frac{5}{3} = \left(\frac{1}{1} \right) \frac{1+(1+r)-v}{1+r}$

$\boxed{1} \leftarrow \frac{5}{3} = \frac{r-v}{1+r} \Leftrightarrow \frac{5}{3} = \frac{1+1-r-v}{1+r}$

$\boxed{2} \leftarrow 3 = \frac{1+r-v}{r} \Leftrightarrow \frac{3}{1} = \left(\frac{1}{1} \right) \frac{1+r-v}{r}$

من [١] $\nu - r = \frac{(1+r)5}{3}$ بالتعويض في [٢]

$$3 = \frac{3+5+r5}{r3} \Leftarrow 3 = \frac{1+\frac{(1+r)5}{3}}{r}$$

$$2=r \Leftarrow 8=r4 \Leftarrow 8=r5-r9 \Leftarrow r9=8+r5$$

بالتعويض عن r في [٢]

$$7=\nu \Leftarrow 6=1-\nu \Leftarrow 3=\frac{1-\nu}{2} \Leftarrow 3=\frac{1+2-\nu}{2}$$

الحدود $ع_2, ع_3, ع_4$

(١٢) أوجد معامل $س^3$ في مفكوك $\left(\frac{1}{2}س - 2ص\right)^7$

الحل: $س^3ص^3 = ع_{1+3} \Leftarrow س^3ص^3 = ع_{7-4} \Leftarrow \left(\frac{1}{2}س\right)^4 (-2ص)^3 = ع_{7-4}$

$$س^3ص^3 = ع_{7-4} \Leftarrow س^3ص^3 = ع_{7-4}$$

$$3=ر \Leftarrow 7-4=ر-$$

$$3=ر \Leftarrow 3=ر$$

\therefore الحد الذي يحوي $س^3ص^3$ هو $ع_{1+3} = ع_4$

$$ع_4 = \left(\frac{1}{2}س\right)^4 (-2ص)^3$$

(١٣) في مفكوك $(١ + س)^٦$ إذا كان الحد الأخير ٧٢٩ فما قيمة ١

الحل: $٧٢٩ = ٣^٦ \Leftarrow$ المفكوك $(س + ٣)^٦$ ومنه $٣ = ١$

(١٤) أكمل: مجموع المعاملات في مفكوك $(س^٢ - س + ١)^٣ = \dots\dots\dots$

الحل: $(س - ١)^٦ \Leftarrow$ مجموع المعاملات $= ٠$ لأن الإشارة سالبة

(١٥) أثبت أن الحد الأوسط في مفكوك $(س^٤ + \frac{١}{س^٩} + \frac{٤}{٣})^٤$ هو الحد الخالي من

س

الحل: $(س^٤ + \frac{١}{س^٩} + \frac{٤}{٣})^٤ = \left(\left(\frac{٤}{٣} \times س^٩ + ١ + س^٣٦ \right) \frac{١}{س^٩} \right)^٤$

$$= \left((١ + س^١٢ + س^٣٦) \frac{١}{س^٩} \right)^٤ =$$

$$= \left(\frac{١}{س^٩} \right)^٤ (١ + س^١٢)^٤ = \left(\frac{١}{س^٩} \right)^٤ (١ + س^٦)^٢ =$$

$$\text{رتبة الحد الأوسط } ع = \frac{١٢}{٢} = ٦ = \frac{١٢}{٢} = ٦$$

والحد الخالي من س

$$س^٠ = س^{-٤} (س^٨)^٢ (١)^٢ =$$

$$\Leftarrow ٠ = -٤ + ٨ + ٠ = ٤ = ٤$$

$$ع = \frac{١٢}{٢} = ٦ \therefore \text{الحد الأوسط} = \text{الحد الخالي} = ع$$

الوحدة الثالثة: الاحتمالات

أ. فؤاد حسن راشد العبيسي

قوانين سابقة قد تحتاجها في هذه الوحدة

- (١) فضاء العينة \mathcal{E} مجموعة التجارب المختلفة لتجربة عشوائية
- (٢) الحادثة \mathcal{A} مجموعة جزئية من فضاء العينة
- (٣) الحادثة البسيطة \mathcal{A} حادثة تحتوي على عنصر واحد من \mathcal{E}
- (٤) الحادثة المركبة \mathcal{A} حادثة تحتوي أكثر من عنصر من \mathcal{E}
- (٥) الحادثة الأكيدة \mathcal{E} تحتوي جميع عناصر \mathcal{E}
- (٦) الحادثة المستحيلة \emptyset لا تحتوي على أي عنصر من \mathcal{E} احتمال حدوث الحوادث السابقة

$$(٧) \mathcal{E} = \mathcal{A} \text{ أي احتمال الحادثة الأكيدة } = ١$$

$$(٨) \emptyset = \mathcal{A} \text{ أي احتمال الحادثة المستحيلة } = ٠$$

$$(٩) \text{ متممة الحادثة } \mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}$$

$$(١٠) \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{A} \mathcal{B} \text{ وقوع الحادثتين معاً}$$

$$(١١) \mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \text{ وقوع احداً من الحادثتين على الأقل}$$

$$(١٢) \overline{\mathcal{A} \mathcal{B}} = \text{ عدم وقوع الحادثتين معاً}$$

$$(١٣) \overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} = \text{ عدم وقوع أي من الحادثتين}$$

$$(١٤) \mathcal{A} - \mathcal{B} = \text{ وقوع الحادثة } \mathcal{A} \text{ وعدم وقوع الحادثة } \mathcal{B} \text{ وهي نفسها } \overline{\mathcal{B} \mathcal{A}}$$

$$(١٥) \mathcal{B} - \mathcal{A} = \text{ وقوع الحادثة } \mathcal{B} \text{ وعدم وقوع الحادثة } \mathcal{A} \text{ وهي نفسها } \overline{\mathcal{A} \mathcal{B}}$$

$$\overline{\overline{\mathcal{A}}}$$

$$(١٦) \text{ إذا كان } \mathcal{A} \mathcal{B} = \emptyset \text{ فإن } \mathcal{A}, \mathcal{B} \text{ متنافيتان أو منفصلتان}$$

(١٧) إذا كان A ، B متنافيين فإن $A \cap B = \emptyset$.

(١٨) إذا كان $A \supset B$ فإن $A \cap B = B$.

(١٩) إذا كان $B \supset A$ فإن $A \cap B = A$.

(٢٠) فضاء العينة لكل من:

أ) القاء قطعة نقود مرة واحدة

ب) القاء قطعة نقود مرتين متتاليتين

ت) القاء قطعتين نقود متماثلتان

ث) القاء حجر نرد مرتين

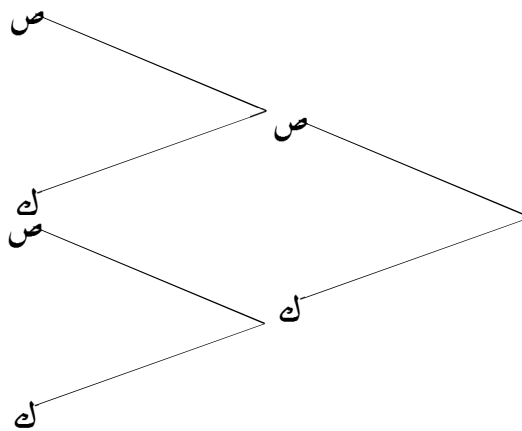
ج) اسرة لها ثلاثة أولاد

الحل:



ب) $E = \{(ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ك)، (ك، ص)\}$

وبالشجرة:



(ت) $\{ (ص، ص)، (ص، ل)، (ل، ل) \} = \mathcal{E}$

أو $\{ (ص، ص)، (ل، ص)، (ل، ل) \} = \mathcal{E}$

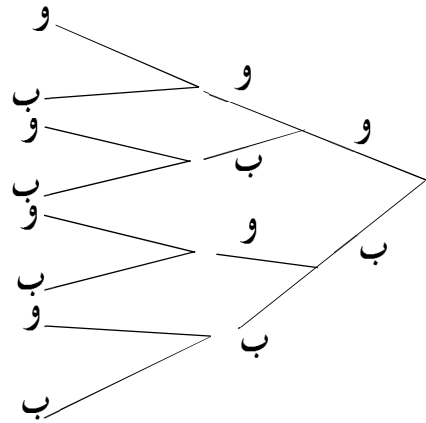
لاحظ حذف أحد الزوجين (ل، ص) أو (ص، ل)

(ث)

$$\begin{aligned} & \{ (١، ١)، (٢، ١)، (٣، ١)، (٤، ١)، (٥، ١)، (٦، ١) \} = \mathcal{E} \\ & \{ (١، ٢)، (٢، ٢)، (٣، ٢)، (٤، ٢)، (٥، ٢)، (٦، ٢) \} \\ & \{ (١، ٣)، (٢، ٣)، (٣، ٣)، (٤، ٣)، (٥، ٣)، (٦، ٣) \} \\ & \{ (١، ٤)، (٢، ٤)، (٣، ٤)، (٤، ٤)، (٥، ٤)، (٦، ٤) \} \\ & \{ (١، ٥)، (٢، ٥)، (٣، ٥)، (٤، ٥)، (٥، ٥)، (٦، ٥) \} \\ & \{ (١، ٦)، (٢، ٦)، (٣، ٦)، (٤، ٦)، (٥، ٦)، (٦، ٦) \} \end{aligned}$$

وقد سبق تمثيلها بالشجرة في مبدأ العد.

(ج)



ويمكن تمثيلها بالأزواج المرتبة

(٢١) احتمال الوحدة لبعض الحوادث العشوائية:

- احتمال الوحدة لرمي قطعة نقود مرة واحدة $= \frac{1}{2}$

أ. فؤاد حسن راشد العبيسي



- احتمال الوحدة لرمي حجر نرد مرة واحدة $= \frac{1}{6}$

- احتمال الوحدة لولادة طفل $= \frac{1}{2}$

وهناك احتمالات للوحدة تحدد برقم معين فمثلاً يقال احتمال إصابة الهدف ٠,٦ أو

٠,٧ أو

- وأحياناً تحدد باحتمال نجاح ع واحتمال رسوب ف

فمثلاً: إذا كان حاع $= \frac{1}{2}$ فإن حاف $= \frac{1}{2}$

إذا كان حاع $= \frac{2}{5}$ فإن حاف $= \frac{3}{5}$

لاحظ أن حاع + حاف = ١ دائماً ، حاع = ١

الدرس الأول: بعض المبرهنات الأساسية في الاحتمالات

$$(١) \text{ ح} = \emptyset$$

البرهان: نفرض $\text{ح} = \emptyset \cup \text{ح}$ حدثتان متنافيتان

$$\text{ح} = (\emptyset \cup \text{ح}) \Leftrightarrow \text{ح} = \emptyset + \text{ح}$$

$$\Leftrightarrow \text{ح} = \emptyset + \text{ح} \quad \text{ومنه } \text{ح} = \emptyset$$

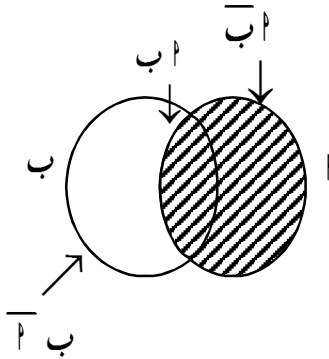
$$(٢) \text{ ح} = \overline{\text{ح}} - ١$$

البرهان: $\text{ح} = \overline{\text{ح}} \cup \text{ح} \Leftrightarrow \text{ح} = (\overline{\text{ح}} \cup \text{ح})$ ولكن $\text{ح} = ١$

$$\text{ح} = \overline{\text{ح}} + \text{ح} \Leftrightarrow ١ = \overline{\text{ح}} + \text{ح} \Leftrightarrow \overline{\text{ح}} = ١ - \text{ح}$$

$$(٣) \text{ ح} \cap \overline{\text{ح}} = \overline{\text{ح}} - \text{ح}$$

البرهان: $\text{ح} \cap \overline{\text{ح}} = \overline{\text{ح}} \cup \text{ح} - \text{ح}$ من الشكل



$$\text{ح} = (\text{ح} \cap \overline{\text{ح}}) \cup (\text{ح} \cap \text{ح})$$

$$\text{ح} = \text{ح} \cap \overline{\text{ح}} + \text{ح} \cap \text{ح} \quad (\text{حوادث متنافية})$$

$$\text{ح} \cap \overline{\text{ح}} = \overline{\text{ح}} - \text{ح}$$

$$(٤) \text{ ح} \cap \overline{\text{ح}} = \overline{\text{ح}} - \text{ح}$$

البرهان: من الشكل السابق

$$\text{ح} = (\text{ح} \cap \overline{\text{ح}}) \cup (\text{ح} \cap \text{ح})$$

$$\text{ح} = \text{ح} \cap \overline{\text{ح}} + \text{ح} \cap \text{ح} \Leftrightarrow \overline{\text{ح}} - \text{ح} + \text{ح} = \text{ح}$$



(٥) إذا كان $A \supset B$ فإن $A \cap B = A$

البرهان: $A \supset B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cap B = A$

لاحظ أن $A \cap B$ هو $A \cap B$

(٦) إذا كان A, B متنافيتان فإن $A \cap B = \emptyset$

البرهان: A, B متنافيتان $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

(٧) لأي حادثة احتمالية $1 \leq A \leq 1$

البرهان: $0 \leq A \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq A \leq 1$

$0 \leq A \leq 1$

(٨) $A \cap B = \overline{A \cup B}$

البرهان: $A \cap B = \overline{A \cup B}$ دي مورجان

(٩) $A \cup B = A + B - A \cap B$

البرهان: من الشكل السابق $A \cup B = A + B - A \cap B$

$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$ حوادث متنافية

$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$

تھارین:

(١) إذا كان $\frac{1}{2}$ حاب $\frac{3}{8}$ حاب ، $\frac{1}{4}$ حاب

أوجد: أ) حامل ب) حامل ب) حامل ت) حامل

الحل: أ) حامل ب = حام + حاب - حاب

$$\frac{0}{1} = \frac{2-3+4}{1} = \frac{1}{4} - \frac{3}{1} + \frac{1}{2} =$$

(ب) $\text{حام} \cup \bar{\text{ب}} = \text{حام} + \bar{\text{حاب}} - \text{حامب}$

$$\frac{\gamma}{\lambda} = \frac{2+3-1}{1} = \frac{1}{2} + \frac{3}{1} - 1 = 1 + 1 - 1 = 1$$

(ت) $\frac{3}{8} = \frac{5}{8} - 1 = \text{حام} \cup \text{ب} - 1 = \overline{\text{ح}} \overline{\text{ا}} \overline{\text{ب}} = 1$

(٢) إذا كان $ح ا = س$ ، $ح ا ب = \frac{1}{4}$ ، $ح ا ل ا ب = \frac{1}{3}$ أوجد قيمة $س$

عندما: (أ) $\bar{A}B = \emptyset$ (ب) $\bar{A}B \neq \emptyset$

الحل: أ) حام ل ب = حام + حاب - حام ب

(لأن $\emptyset = \text{أب}$) ، $-\frac{1}{4} + \text{س} = \frac{1}{3}$

$$\frac{1}{12} = \frac{3-4}{12} = \text{س} \Leftarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \text{س}$$

(ب) حال ا ب = حا + حاب - حاب

$$\frac{1}{3} = \text{س} + \frac{1}{4} - \text{حاب} \quad (\text{لأن ب} \supset \text{پ})$$

(ج) إذا كان $٢ \text{ ح} = ٢٤١ \supset \text{ب فإن ح} = \text{الحل: } \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

هامش الحل: $٢ \text{ ح} = ١ \Leftarrow \frac{1}{2} = ٢ \text{ ح} \Leftarrow \text{ح} = \pm \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$\Leftarrow \text{ح} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ (لماذا رفض الحل السالب)



الدرس الثاني: بناء النموذج الاحتمالي

النموذج الاحتمالي يشمل فضاء العينة واحتمال وقوع الحادثة طبقاً للقانون

$$\text{حam} = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{فضاء العينة}}$$

مثال: إذا كان $E = \{١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦\}$ أحسب:

أ) احتمال ظهور عدد زوجي

ب) احتمال ظهور عدد اولي

ت) احتمال ظهور عدد اكبر من ٦

ج) احتمال ظهور عدد طبيعي

$$\text{الحل: أ) احتمال ظهور عدد زوجي} = \frac{\text{عدد الاعداد الزوجية}}{E} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$$

$$\text{ب) احتمال ظهور عدد اولي} = \frac{\text{عدد الاعداد الأولية}}{E} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$$

$$\text{ت) احتمال ظهور عدد اكبر من ٦} = \frac{\text{عدد الاعداد الاكبر من ٦}}{E} = \frac{٠}{٦} = ٠$$

$$\frac{٠}{٦} = \text{(مستحيلة)}$$

$$\text{ج) احتمال ظهور عدد طبيعي} = \frac{\text{عدد الاعداد الطبيعية}}{E} = \frac{٦}{٦} = ١$$

$$\frac{٦}{٦} = ١ \text{ (حادثة اكدية)}$$

تمارين:

(١) اختيار عشوائياً س من $\{س : ٢ \leq س \leq ٢\}$ ، $س \in ص$ ، فإذا كان

أ. فؤاد حسن راشد العيسى

أ : حادثة الحصول على عدد زوجي

ب : حادثة الحصول على عدد أولي فردي

ج : حادثة الحصول على عدد أولي زوجي

أوجد: أ) فضاء العينة ب) $P(A)$ ج) $P(B)$ د) $P(C)$

هـ) $P(A \cup B)$ ز) $P(A \cap B)$ ح) $P(A \cup C)$

الحل: أ) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ ب) $P(A) = \frac{6}{12}$

ج) $P(B) = \frac{5}{12}$ د) $P(C) = \frac{1}{12}$

هـ) $P(A \cup B) = \frac{10}{12}$ ز) $P(A \cap B) = \frac{2}{12}$ ح) $P(A \cup C) = \frac{7}{12}$

ط) $P(B \cup C) = \frac{6}{12}$ ي) $P(B \cap C) = \frac{1}{12}$ ك) $P(A \cap C) = \frac{1}{12}$

ل) $P(A \cup B \cup C) = \frac{11}{12}$ م) $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{12}$

(٢) قاعة بها ٨٠ طالب من بينهم ٦٠ طالب يدرسون الإنجليزية ٤٠ طالب

يدرسون الفرنسية ٣٠ طالب يدرسون اللغتين معاً

أ : حادثة اختيار طالب يدرس الإنجليزية

ب : حادثة اختيار طالب يدرس الفرنسية

أوجد: أ) $P(A)$ ب) $P(B)$ ج) $P(A \cup B)$ د) $P(A \cap B)$

هـ) $P(A \cup \bar{B})$ ز) $P(\bar{A} \cap B)$ ح) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

الحل: أ) $P(A) = \frac{60}{80}$ ب) $P(B) = \frac{30}{80}$ ج) $P(A \cup B) = \frac{70}{80}$

$$\frac{7}{8} = \frac{70}{80} = \frac{30}{80} - \frac{40}{80} + \frac{60}{80} =$$

$$\frac{1}{8} = \frac{10}{80} = \frac{30}{80} - \frac{40}{80} = \text{ب) } \overline{\text{حأ}} = \text{حأ} - \text{حأب}$$

$$\frac{3}{8} = \frac{30}{80} = \frac{30}{80} - \frac{60}{80} = \text{ت) } \overline{\text{حأب}} = \text{حأ} - \text{حأب}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{7-8}{8} = \frac{7}{8} - 1 = \text{ث) } \overline{\text{حأ}} = \overline{\text{حأ} \cup \text{ب}} = 1 - \text{حأ} \cup \text{ب}$$

$$\frac{5}{8} = \frac{50}{80} = \frac{30-80}{80} = \frac{30}{80} - 1 = \text{ج) } \overline{\text{حأب}} = 1 - \text{حأب}$$

(٣) إذا كان $\{أ، ب، ج\}$ فضاء احتمالي وكان $\text{حأ} = ٣، ٠، ٢، ٠، ٢$

أوجد حأج

الحل: $\text{حأ} + \text{حأب} + \text{حأج} = \text{حأع}$

$$١ = \text{حأج} + ٠، ٢ + ٠، ٣ \Leftarrow ١ = \text{حأج} + ٠، ٥$$

$$\Leftarrow \text{حأج} = ٠، ٥ - ١ \Leftarrow \text{حأج} = ٠، ٥$$

(٤) القى مكعب نرد مرة واحدة احسب احتمال

أ) العدد نفسه في المكعبين ب) مجموع أكبر من ٩

ت) العدد ٣ من المكعب الأول ث) عدم ظهور عددين متساويين في المكعبين

$$\text{ب) } \frac{1}{9} = \frac{4}{36}$$

$$\text{الحل: أ) } \frac{1}{6} = \frac{6}{36}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{30}{36} = \frac{6-30}{36} = \frac{6}{36} - 1 \quad \text{(ث)} \quad \frac{1}{6} = \frac{6}{36} \quad \text{(ت)}$$

(٥) صندوق به كرات متجانسة مختلفة الألوان ٥ كرات سوداء ٣٠ كرات بيضاء

٤ كرات حمراء احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة:

(أ) حمراء أو سوداء (ب) حمراء أو بيضاء

(ت) حمراء أو بيضاء أو سوداء (ث) ليست سوداء

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12} = \frac{5}{12} + \frac{4}{12} = \text{حاس} + \text{ع} = \text{حاس} \cup \text{ع} \quad \text{(أ) الحل:}$$

$$\frac{7}{12} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \text{حاب} + \text{ع} = \text{ح} \cup \text{ب} \quad \text{(ب)}$$

$$1 = \frac{12}{12} = \frac{5}{12} + \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \text{حاس} \cup \text{ب} \cup \text{ع} \quad \text{(ت)}$$

$$\frac{7}{12} = \frac{5}{12} - 1 = \text{حاس} - 1 = \overline{\text{حاس}} \quad \text{(ث)}$$

(٦) القيت قطعة نقود ثلاث مرات متتالية ولوحظ الوجه الظاهر عليها عند استقرارها

على الأرض

أولاً: احسب الفضاء الاحتمالي

ثانياً: احسب احتمال ظهور:

(أ) صورة واحدة على الأقل (ب) صورتين على الأقل

(ت) كتابة واحدة على الأقل (ث) صورتين على الأكثر

(ج) ظهور صورتين فقط (ح) صورتين متتاليتين

الحل: أولاً:

$$\text{ع} = \{ \text{ص ص ص} , \text{ص ص ل} , \text{ص ل ص} , \text{ل ص ص} , \text{ل ل ص} , \text{ل ل ل} \}$$



$$\text{العدد} = 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

ثانياً: أ) صورة واحدة على الأقل

بالعد المباشر من ٤ نجد أن الاحتمال المطلوب صورته أو صورتين أو ثلاث صور

$$\frac{7}{8} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} =$$

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \text{ب) صورتين على الأقل أي صورتين أو ثلاث صور}$$

ت) كتابة واحدة على الأقل

$$\frac{7}{8} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \text{أي ظهور كتابه أو كتابتين أو ثلاث كتابات}$$

ث) صورتين على الأكثر

$$\frac{7}{8} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \text{أي صورتين أو صور أو عدم ظهور الصورة}$$

$$\frac{1}{8} = \text{ج) عدم ظهور الصورة أي ظهور الكتابة}$$

$$\frac{3}{8} = \text{ح) ظهور صورتين فقط}$$

$$\frac{3}{8} = \text{خ) ظهور صورتين متتاليتين}$$

(٧) سحبت عشوائياً بطاقة من ١٠٠ بطاقة مرقمة من ١ إلى ١٠٠ ما احتمال أن

يكون العدد على البطاقة المسحوبة:

أ) يقبل القسمة على ١٠ ب) يقبل القسمة على ١٧

ت) يقبل القسمة على ١٥ ث) يقبل القسمة على ١٧٠

(ح) يقبل القسمة على ١٠ أو ١٥

(الـ: أ) $\frac{1}{10} = \frac{10}{100}$ (ب) $\frac{1}{20} = \frac{5}{100}$ (ت) $\frac{3}{50} = \frac{6}{100}$

(ث) يقبل القسمة على ١٠ + يقبل القسمة على ١٧ - يقبل القسمة على ١٧٠

معاً $\frac{3}{20} = \frac{15}{100} = \frac{10}{100} + \frac{5}{100}$

(ج) يقبل القسمة على ١٠ أو ١٥

أي يقبل القسمة على ١٠ + يقبل القسمة على ١٥ - يقبل القسمة على ١٥٠ معاً

$\frac{13}{100} = \frac{3}{100} - \frac{6}{100} + \frac{10}{100} =$

(٨) اسرة لها أربعة أطفال تم تسجيلهم من الأكبر إلى الأصغر حسب النوع

أولاً: اكتب فضاء العينة

ثانياً: عبر عن الحوادث التالية واحسب احتمالها:

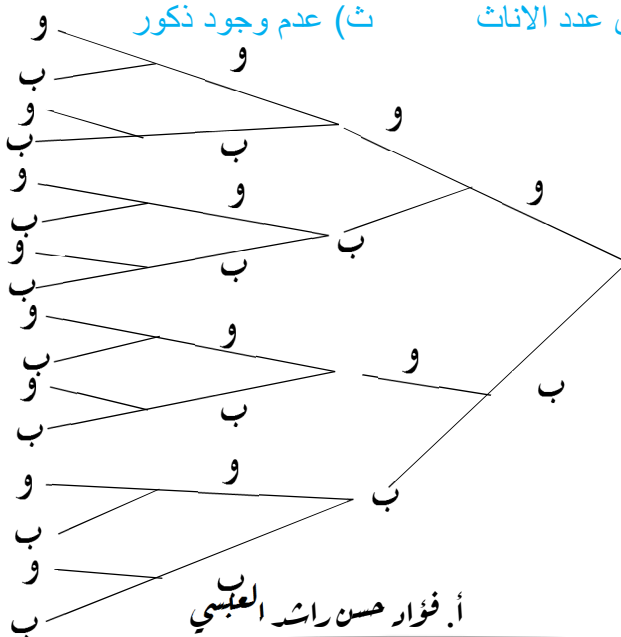
(ب) لدى الاسرة ولد واحد فقط

(أ) لدى الاسرة بنتان فقط

(ت) عدد الذكور أكبر من عدد الاناث

(ج) وجود ولدين متتالين

(الـ: أولاً:



أ. فؤاد حسن راشد العيسى

الدرس الثالث: الاحتمال الشرطي

إذا كان س ، ص حادثتين وكان حدوث س يتأثر بحدوث أو عدم حدوث ص فإن

$$\frac{\text{احتمال في هذه الحالة شرطي ويرمز له بالرمز } S|V}{\text{حاص}} = \frac{\text{حاص}}{\text{حاص}}$$

فمثلاً: إذا كان احتمال حصول طالب على ٩٠% في الثانوية فإن احتمال دخوله

$$\frac{\text{احتمال دخول الجامعة علماً بأنه حصل على ٩٠ \%}}{\text{احتمال حصوله على ٩٠ \%}} = \text{الجامعة}$$

مثال: إذا كان حاص = $\frac{3}{4}$ ، حاص ص = $\frac{1}{2}$ فما حاص | س

الحل: حاص | س = $\frac{\text{حاص ص}}{\text{حاص}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

الحوادث المستقلة:

نقول عن حادثتين ١، ٢ ب انهما مستقلتين إذا كان حدوث احدهما لا يتأثر بحدوث أو عدم حدوث الآخر

وبصيغة القانون إذا كان حاب = حاب ١ × حاب ٢ فإن ١، ٢ ب مستقلتين

ومن أمثلة الحوادث المستقلة:

(١) تصويب شخصين على هدف واحد.

(٢) سباق شخصين ذهاب واياب.

واحياناً يحدد في المسألة الاحتمالية أن الحوادث مستقلة

مثال: أي الحوادث التالية مستقلة:

(أ) حاس = $\frac{1}{4}$ ، حاص = $\frac{2}{4}$ ، حاس ص = $\frac{1}{8}$

(ب) حاس = 1 ، حاص = 0 ، حاس ص = 0

(ت) حاس = $\frac{1}{3}$ ، حاص = $\frac{2}{3}$ ، حاس ص = $\frac{1}{6}$

الحل: (أ) حاس ص = $\frac{1}{8}$ ، حاس × حاص = $\frac{2}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{16}$

∴ $\frac{1}{8} = \frac{2}{16}$ حاس ص = حاس × حاص أي الحادثتين مستقلتين

(ب) حاس ص = 0 ، حاس × حاص = $0 \times 1 = 0$

∴ حاس ص = حاس × حاص أي الحادثتين مستقلتين

(ت) حاس ص = $\frac{1}{6}$ ، حاس × حاص = $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

حاس ص ≠ حاس × حاص أي الحادثتين غير مستقلتين

تمارين:

(١) إذا كان أ، ب حادثتين مستقلتين وكان حا = $\frac{1}{2}$ ، حا ∪ ب = $\frac{2}{3}$ أوجد:

(أ) حا ب (ب) حا ∩ ب (ت) حا ∩ ب

الحل: (أ) حا ∪ ب = حا + حا ب - حا ∩ ب

⇐ $P(A|B) = P(A) + P(B) - P(A \times B)$ **حوادث مستقلة**

بالتعويض $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - P(A \times B)$

⇐ $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - P(A \times B)$ ⇐ $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - P(A \times B)$

$\frac{1}{6} = \frac{1}{2} - P(A \times B)$ ⇐ $\frac{1}{6} = \frac{1}{2} - P(A \times B)$ ⇐ $\frac{3-4}{6} = \frac{1}{6} - P(A \times B)$

(ب) $P(A|B) = \frac{P(A \times B)}{P(B)}$ **حوادث مستقلة**

$\frac{1}{2} = P(A|B)$

(ت) $P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \times \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A \times B)}{P(B)}$ **حوادث مستقلة**

$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} - 1 = \frac{1}{3} - P(A \times B)$

(٢) إذا كان $P(B) = \frac{1}{4}$ ، $P(A) = \frac{1}{3}$ **فهل** $P(B|A)$ **ب** **حادثتين مستقلتين**

الحل: شرط الاستقلال $P(A|B) = P(A) \times P(B)$

$P(A|B) = P(A) \times P(B)$ **لان** $P(B) = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ ، $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{12}$ ، $P(A|B) \neq P(A) \times P(B)$

$P(A|B) \neq P(A) \times P(B)$ **الحادثتين غير مستقلتين**



(٣) برهن أن $\overline{A|B} = 1 - A|B$

الحل: الأيمن $\overline{A|B} = \frac{\overline{A|B}}{1} = \frac{1 - A|B}{1} = 1 - \frac{A|B}{1} = 1 - A|B$

$1 - \frac{A|B}{1} = 1 - A|B = \overline{A|B}$ اليسر

(٤) إذا كان A, B حادثتين مستقلتين أثبت أن:

(أ) $\overline{A}, \overline{B}$ مستقلتين (ب) \overline{A}, B مستقلتين

(ت) $\overline{A}, \overline{B}$ مستقلتين

الحل: (أ) $\overline{A|B} = 1 - A|B$

$\overline{A|B} = 1 - A|B = 1 - \frac{A|B}{1} = 1 - \frac{A|B}{1} = 1 - A|B$

∴ $\overline{A|B} = 1 - A|B$ الحادثتين مستقلتين

(ب) $\overline{A|B} = 1 - A|B = 1 - \frac{A|B}{1} = 1 - A|B$ لان A, B مستقلتين

$\overline{A|B} = 1 - A|B = 1 - \frac{A|B}{1} = 1 - A|B$

∴ $\overline{A|B} = 1 - A|B$ أي الحادثتين مستقلتين

(ت) $\overline{A|B} = 1 - A|B$

$\overline{A|B} = 1 - A|B = 1 - \frac{A|B}{1} = 1 - A|B$

$\overline{A|B} = 1 - A|B = 1 - \frac{A|B}{1} = 1 - A|B$

$$= \text{ح}^2 - \text{ح} \times \text{ح} = \text{ح}^2 - (\text{ح} - \text{ح}) = \text{ح}^2 - \text{ح}^2 = 0$$

(٥) احتمال أن يصيب هشام الهدف = $\frac{1}{4}$ واحتمال أن يصيب محمد الهدف = $\frac{2}{5}$ ما

الحل: احتمال إصابة الهدف من هشام = ٥٠%

احتمال إصابة الهدف = $P(H \cup E) = P(H) + P(E) - P(H \cap E)$

$$\frac{11}{20} = \frac{2-1+0}{20} = \frac{2}{0} \times \frac{1}{2} - \frac{2}{0} + \frac{1}{2} =$$

$$\frac{1}{10} = \frac{2}{20} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \text{حاجه}$$
$$= \text{حاه} \bar{\text{ع}} + \bar{\text{حاه}} \text{ع} = \text{حاه} - \text{حاه} + \text{حاه} \text{ع} - \text{حاه} \text{ع}$$

$$\frac{9}{21} = \frac{2-1+2-0}{21} = \frac{2}{21} - \frac{1}{0} + \frac{2}{21} - \frac{1}{2} =$$

(٦) تسابق ثلاثة طلاب في الجري هم ١، ب، ج فإذا كان احتمال فوز ١ = $\frac{1}{2}$ ،

وا احتمال فوز ب = $\frac{1}{3}$ ، واحتمال فوز ج = $\frac{1}{6}$ ، فإذا تسابق الطلاب في

الجري مرتين معاً: أوجد أ) فضاء العينة

ب) احتمال فوز الطالب ج في السباق الأول وفوز الطالب ١ في السباق الثاني

الحل: أ) فضاء العينة = $\mathcal{E} = \{(١، ١)، (١، ب)، (١، ج)، (ب، ١)، (ب، ب)، (ب، ج)، (ج، ١)، (ج، ب)، (ج، ج)\}$

(ب، ب)، (ب، ج)، (ب، ج)، (ج، ب)، (ج، ج)، (ج، ج)، (ج، ج)، (ج، ج)

ب) أي حاج ١ = حاج ١ × حاج ١ لان الحوادث مستقلة من خلال المسألة

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} =$$

(٧) صندوقان متجانسان يحتوي الأول على ٩ بطاقات مرقمة من ١ إلى ٩ ويحتوي

الثاني على ٥ بطاقات مرقمة من ١ إلى ٥ اختر صندوقاً عشوائياً وإذا كان رقم

البطاقة المسحوبة زوجياً فما احتمال أن تكون من الصندوق الأول .

الحل: احتمال أن تكن من الصندوق الأول = حاص ١

احتمال أن تكون من الصندوق الثاني = حاص ٢ ، حتمال أن تكون زوجياً = حاز

$$\frac{\text{حاص ١}}{\text{حاص ١} + \text{حاص ٢}} = \frac{\text{حاص ١}}{\text{حاز}} = \text{حاص ١} = \text{المطلوب}$$

$$\frac{10}{19} = \frac{40}{38} \times \frac{4}{9} = \frac{9}{18+20} = \frac{9}{2+4} = \frac{9}{40}$$

(٨) يصوب صيادين بندقيتهما نحو الهدف ويريد أن يطلق كل منهما طلقة واحدة نحو الهدف فإذا كان احتمال إصابة كل منهما للهدف لا يؤثر على احتمال إصابة الآخر وكان احتمال إصابة الهدف من قبل الصياد الأول ٠,٩ واحتمال إصابة الهدف من

الصياد الثاني ٠,٨ أوجد احتمال إصابة الهدف

أ) من كليهما معاً ب) من أحدهما على الأقل ت) من أحدهما فقط

الحل: نفرض إصابة الهدف من الأول حاص_١

نفرض إصابة الهدف من الثاني حاص_٢

٢) حاص_١ حاص_٢ = حاص_١ × حاص_٢ = ٠,٩ × ٠,٨ = ٠,٧٢ حوادث مستقلة

ب) حاص_١ + حاص_٢ - حاص_١ حاص_٢

= ٠,٩٨ = ٠,٧٢ - ٠,٨ + ٠,٩

ت) حاص_١ حاص_٢ + حاص_١ حاص_٢ = حاص_١ - حاص_١ حاص_٢ + حاص_٢ - حاص_١ حاص_٢

= ٠,٢٦ = ٠,٧٢ - ٠,٨ + ٠,٧٢ - ٠,٩



الدرس الرابع: متتالية التكرار

نستخدم متتالية التكرار في التجارب المستقلة التي يكون فيها ناتج كل تجربة إما نجاحاً أو فشلاً

إذا كان s متغير عشوائي فإن $حاس = ١ = ٢ = ٣ = \dots = s$ (ع) s (ف) $s-١$

حيث $ع$ احتمال النجاح ، $ف$ احتمال الفشل حيث $ع + ف = ١$ واحتمال فشل الكل

$ف = ١ - ع$ ، احتمال نجاح واحدة على الأقل $= ١ - ف$ ، حاس احتمال نجاح عدد

محدود ١ عدد ثابت ، ٢ عدد المحاولات

ومن هذه التجارب:

(١) سحب كره من وعاء ٢ مرة مع الارجاع يحدد النجاح

(٢) رمي قطعة نقود ٢ مرة وظهور الصورة وهذا النجاح $\frac{١}{٢} =$ والفشل $\frac{١}{٢} =$

(٣) تصويب على هدف ٢ مرة يحدد النجاح

(٤) اسره لها عدد أطفال ٢ طفل وهنا النجاح $\frac{١}{٢} =$ والفشل $\frac{١}{٢} =$

(٥) رمي حجر نرد ٢ مرة وهنا النجاح $\frac{١}{٦} =$ والفشل $\frac{٥}{٦} =$

فمثلاً: رمي حجر نرد عشر مرات احتمال ظهور الرقم ٦ ثلاث مرات

$$حاس = ٣ = ٣ \cdot \left(\frac{١}{٦}\right)^3 \left(\frac{٥}{٦}\right)^7$$

ومثلاً: اسره لها ٦ أطفال احتمال أن يكون خمسه منهم ذكور

$$\text{حاس} = 5 = {}^6P_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^1$$

لكن إذا كان السؤال: اسرة لها ٦ أطفال احتمال أن يكون الخامس ولد هنا لا يحلها متتالية التكرار لان النجاح لم يحدد بوضوح بل كان السؤال عن موقع وهو الولادة الخامسة ومثل هذه المسائل يجب أن تحل بفضاء العينة أو الشجرة بشرط أن تكون صغيرة ٢ أو ٣ أو ٤ بالكثير

تمارين:

(١) القيت قطعة نقود ٦ مرات ولو حظ الوجه الظاهر عليها عند استقرارها على الأرض أوجد احتمال الحوادث:

- أ) ظهور الصورة ثلاث مرات. ب) ظهور الصورة مرتين.
ت) عدم ظهور الصورة. ث) ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل.
ج) ظهور الصورة ثلاث مرات على الأكثر. ح) ظهور الكتابة مرتين.

الحل: جميع الفقرات السابقة تسأل عن عدد ولذلك يمكن استخدام متتالية التكرار مع

$$\text{اعتبار ظهور الصور هو النجاح } ع = \frac{1}{2} , \text{ ف } ١ - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{أ) حاس} = 3 = {}^6P_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{5}{16}$$

$$\text{ب) حاس} = 2 = {}^6P_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6 \times 5}{1 \times 2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{16} = \frac{15}{64}$$

$$\text{ت) عم ظهور الصورة} = \text{ف} = {}^6P_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{64}$$

$$\frac{63}{64} = \frac{1}{64} - 1 = 1 - 1 = 0 \text{ ف } 1 = 1 - 1 = 0 \text{ ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل}$$

(ج) أي ظهور الصورة ثلاث مرات أو ظهور الصورة مرتين أو ظهور الصورة مرة واحدة أو عدم ظهور الصورة

$$(\text{حاس} = 0) + (\text{حاس} = 1) + (\text{حاس} = 2) + (\text{حاس} = 3) =$$

$$1 \left(\frac{1}{2} \right)^0 \left(\frac{1}{2} \right)^0 + 1 \left(\frac{1}{2} \right)^1 \left(\frac{1}{2} \right)^0 + 1 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right)^0 + 1 \left(\frac{1}{2} \right)^3 \left(\frac{1}{2} \right)^0 =$$

(ح) ظهور الكتابة مرتين = ظهور الصورة اربع مرات لأننا اعتبرنا النجاح ظهور الصورة

$$\frac{15}{64} = \left(\frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{16} \right) \frac{5 \times 6}{2} = 1 \left(\frac{1}{2} \right)^4 \left(\frac{1}{2} \right)^4 = 1 \text{ حاس} = 4 = 4$$

(2) ليكن لدينا أن يكسب الفريق 1 أي مباراة $\frac{2}{3}$ فإذا لعب الفريق 2 اربع مباريات

أوجد احتمال أن يكسب الفريق:

أ) مباراتين بالضبط

ب) مباراة واحدة على الأقل

ت) أكثر من نصف المباريات

ث) ألا يكسب الفريق أي مباراة

$$\text{الحل: } 1 = 1, 2 = \frac{2}{3}, \therefore \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$1 \text{ حاس} = 2 = 2 \left(\frac{1}{3} \right)^2 \left(\frac{2}{3} \right)^2 = 2$$

$$\frac{8}{27} = \frac{4 \times 2}{9 \times 3} = \left(\frac{1}{9} \right) \left(\frac{4}{9} \right) \frac{3 \times 4}{2} =$$

$$(ب) \quad 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12}$$

$$(ت) \quad \text{أي حاس} = 3 + \text{حاس} = 4$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{16}{81} + \frac{32}{81} = \frac{48}{81} = \frac{16}{27}$$

$$\frac{48}{81} = \frac{16}{27} = \frac{1}{3} \times \frac{16}{27} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{8}{27} \times 4 = \frac{1}{3}$$

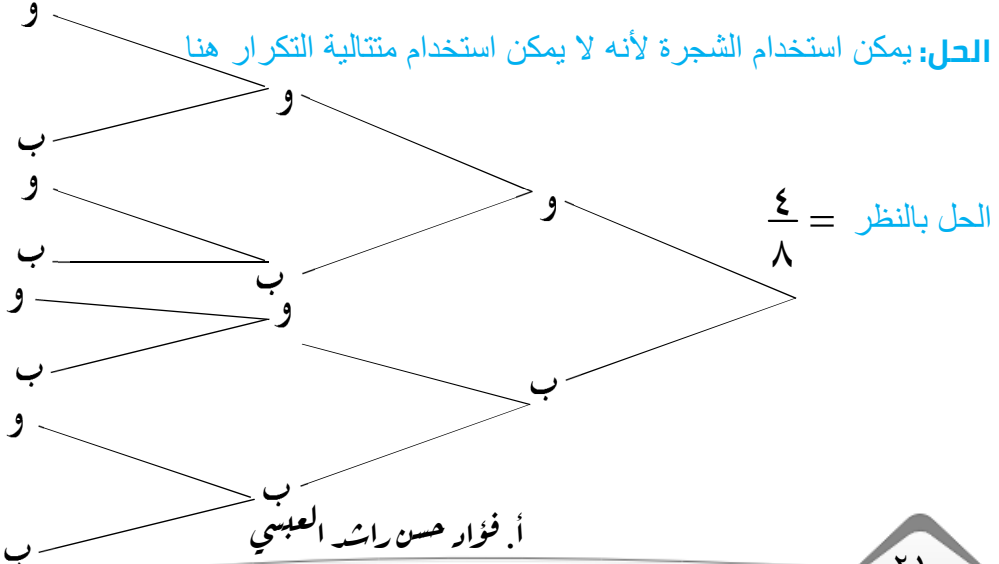
$$(ث) \quad \text{فشل الكل} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12}$$

تمارين متنوعة:

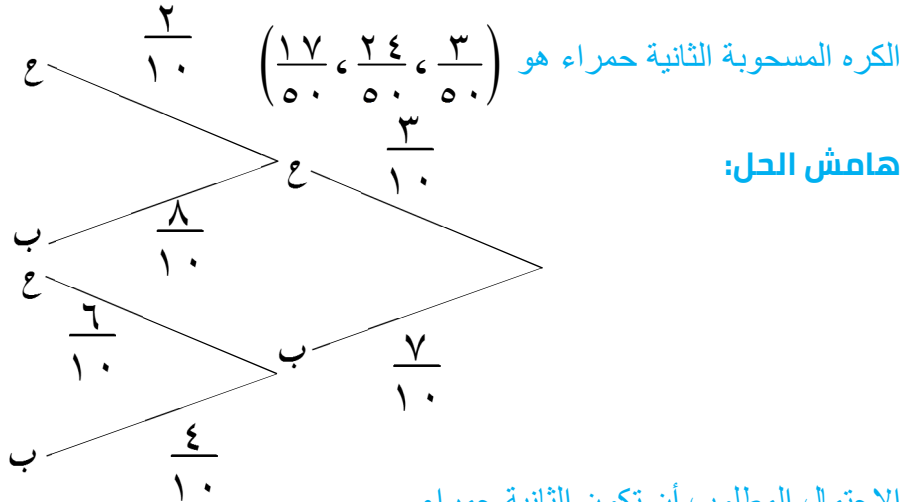
(١) عند رمي حجر نرد مرتين يكون احتمال الحصول على وجهين متشابهين يساوي

$$\frac{1}{6} = \frac{6}{36} \quad \text{الحل:}$$

(٢) إذا كان احتمال انجاب ولد يساوي احتمال انجاب بنت وتم اختيار اسرة عشوائياً ووجد أن لديها ثلاثة أطفال فما احتمال أن يكون الطفل الأكبر للأسرة المختارة ولد



(٣) صندوق يحتوي على ٣ كرات حمراء ٧٤ كرات بيضاء سحب عشوائياً كره من الصندوق واضيف اليه كره من اللون المخالف للكره المسحوبة وخلطت مع بقية الكرات الموجودة في الصندوق ثم سحب منه كره عشوائياً عندئذ احتمال أن تكون



الاحتمال المطلوب أن تكون الثانية حمراء

$$\frac{17}{50} = \frac{34}{100} = \frac{28}{100} + \frac{6}{100} = \frac{4}{10} \times \frac{7}{10} + \frac{2}{10} \times \frac{3}{10} =$$

\therefore الحل المناسب $\frac{17}{50}$

(٤) إذا كان $A|B = 1$ فإن $A \cap B = B$ **الحل:** B

(٥) في تجربة القاء قطعة نقود غير متزنة إذا كان احتمال ظهور الصورة ضعف احتمال ظهور الكتابة إذا تم رميها خمس مرات متتالية احسب احتمال ظهور الكتابة ٣ مرات

الحل: نعتبر النجاح ظهور الكتابة نفرض ظهور الكتابة = ص

ظهور الصورة + ظهور الكتابة = ١

$$\frac{1}{3} = \text{ص} \Leftarrow 1 = \text{ص} \Leftarrow 1 = \text{ص} + \text{ص} + \text{ص}$$

$$\frac{2}{3} = \text{ظهور الكتابة} \quad \frac{1}{3} = \text{هو ع، ف}$$

$$\frac{20}{243} = \frac{4}{9} \times \frac{1}{27} \times \frac{5}{27} = {}^2\left(\frac{2}{3}\right) {}^3\left(\frac{1}{3}\right) {}^3\text{و} = 3 = \text{حاس} \Leftarrow$$

(٦) القى حجر نرد ٤ مرات واعتبر النجاح هو الحصول على رقمين ٦، ٣ في الرمية الواحدة فما احتمال الآتي:

أ) الحصول على الرقمين ٦، ٣ مرتين بالضبط

ب) عدم الحصول على رقمين ٦، ٣

$$\text{الحل: النجاح} = \frac{2}{3} = \frac{1}{3}, \text{ الفشل} = \frac{2}{3}, \text{ و} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{8}{27} = \frac{4}{9} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = {}^2\left(\frac{2}{3}\right) {}^2\left(\frac{1}{3}\right) {}^3\text{و} = 2 = \text{حاس} \quad \text{أ)}$$

$$\frac{16}{81} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \text{ف} = \text{أي فشل} \quad \text{ب)}$$

(٧) في إحدى المدارس تم اختيار لجنة ثلاثية عشوائياً من بين ٣ معلمين ٤، ٤

طلاب فما احتمال أن تكون اللجنة

أ) من المعلمين فقط ب) تشتمل على طالب واحد

$$\frac{1}{30} = \frac{1 \times 1}{5 \times 6 \times 7} = \frac{{}^3\text{و} \times {}^2\text{و} \times {}^1\text{و}}{{}^3\text{و}} = 1 = \text{حاس} \quad \text{أ) الحل:}$$

$$\frac{12}{35} = \frac{2 \times 3}{5 \times 6 \times 7} \times \frac{3 \times 4}{1} = \frac{\frac{3 \times 4}{1}}{5 \times 6 \times 7} = \frac{{}_2P^3 \times {}_1P^4}{{}_3P^7} = \text{جاء (ب)}$$

(٨) إذا كان احتمال سحب كره حمراء من بين ١٠ كرات حمراء وسوداء $\frac{1}{2}$ فما

عدد الكرات السوداء

$$\frac{1}{2} = \frac{10 - س}{10} \Leftarrow \frac{1}{2} = \frac{{}_{10}P^{10-س}}{{}_{10}P^1} \quad \text{الحل:}$$

$$10 = س - 20$$

$$20 - س = 10 \Leftarrow س = 5$$

الوحدة الرابعة: القطوع المخروطية

أ. فؤاد حسن راشد العبيسي



قوانين سابقة قد تحتاجها في هذه الوحدة

قوانين سابقة:

(١) المسافة بين نقطتين

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \text{المسافة بين } (x_1, y_1) \text{ و } (x_2, y_2)$$

(٢) المسافة بين نقطة (س، ص) ومستقيم $اس + بص + ج = ٠$

$$= \frac{|اس + بص + ج|}{\sqrt{ا^2 + ب^2}}$$

الدرس الأول: القطوع المخروطية

القطوع المخروطية: وهي تقاطع مستوى مع مخروط

تقسيم القطوع بحسب قطع المستوى للمخروط:

(١) إذا قطع المستوى المخروط وكان عمودياً على محور المخروط فإن القطع (دائرة)

(٢) إذا قطع المستوى المخروط وكان موازياً لمحور المخروط فإن القطع (زائد)

(٣) إذا قطع المستوى المخروط وكان مائل على محور المخروط فإن القطع (ناقص)

(٤) إذا قطع المستوى المخروط وكان موازي راسم المخروط فإن القطع (مكافئ)

تقسيم القطوع المخروطية بحسب التخالف المركزي:

(١) إذا كان التخالف المركزي $e = 1$ ، فإن القطع المخروطي دائرة

(٢) إذا كان التخالف المركزي $e = 1$ فإن القطع المخروطي مكافئ

(٣) إذا كان التخالف المركزي $e > 1$ فإن القطع المخروطي ناقص

(٤) إذا كان التخالف المركزي $e < 1$ فإن القطع زائد

علماً بأن التخالف المركزي $e = \frac{c}{a}$ وسوف يأتي شرحه في كل قطع.

تمارين:

أكمل الفراغات التالية:

أ) إذا قطع المستوى المخروط وكان عمودياً على المحور فإن القطع

الحل: دائرة

ب) القطع الذي تخالفه المركزي صفر هو قطع **الحل:** دائرة

ت) القطع الذي تخالفه المركزي $\frac{1}{2}$ هو **الحل:** ناقص

ث) القطع الذي تخالفه المركزي $\frac{5}{2}$ هو **الحل:** زائد

ج) القطع المخروطي هو

الحل: هو تقاطع مستوى مع مخروط.

ح) إذا قطع المستوى المخروط وكان مائل على الراسم فإن القطع

الحل: ناقص

الدرس الثاني: القطع المكافئ

وهو مجموعة من النقاط في مستوى واحد بعدها عن نقطة ثابتة يساوي بعدها عن مستقيم ثابت

حالات القطع المكافئ:

المعادلة	محور التماثل	البؤرة	الدليل	فتحة القطع
$ص^2 = ٤س$	على $س$	$(٠, ١)$	$س = ١ -$	جهة $س$ $+$
$ص^2 = ٤س -$	على $س$	$(٠, ١ -)$	$س = ١$	جهة $س$ $-$
$س^2 = ٤ص$	على $ص$	$(١, ٠)$	$ص = ١ -$	جهة $ص$ $+$
$س^2 = ٤ص -$	على $ص$	$(١ - , ٠)$	$ص = ١$	جهة $ص$ $-$

مثلاً: إذا كانت المعادلة $س^2 = ٨ص$ فإن المعادلة متماثلة حول المحور $ص$

والبؤرة $(٠, ٢)$ والدليل $ص = ٢ -$

وإذا كانت المعادلة $ص^2 = ٦س$ فإن المعادلة متماثلة حول المحور $س$ والبؤرة

$(٠, ٤)$ والدليل $س = ٤ -$

أما التخالف المركزي فإنه $=$ صفر في كل الحالات في القطع المكافئ

وإذا كان الدليل $٥ =$ والبؤرة $(٠, ٥ -)$ فإن المعادلة $ص^2 = ٤س$

$ص^2 = ٢٠ -$

ولتحديد العلاقة بين نقطه والقطع:

(١) إذا كان بعد النقطة عن البؤرة $=$ بعدها عن الدليل فإن النقطة تقع على القطع

(٢) إذا كان بعد النقطة عن البؤرة $<$ بعدها عن الدليل فإن النقطة خارج القطع

(٣) إذا كان بعد النقطة عن البؤرة $>$ بعدها عن الدليل فإن النقطة خارج القطع

إما إذا كانت المعادلة معلومة فإن النقطة تقع عليها إذا كانت تحقق المعادلة وإذا كان

أ. فؤاد حسن راشد العيسى



الناتج بعد تصفير المعادلة $>$ صفر فإن النقطة داخل القطع وإذا كان الناتج $<$ صفر بعد تصفير المعادلة فإن النقطة خارج القطع

تمارين:

(١) أوجد معادلة القطع في الحالات التالية:

أ) الرأس $(٠,٤٠)$ والبؤرة $(٦,٤٠)$

الحل: القطع متمائل حول ص من صيغة البؤرة

$$\text{المعادلة س}^2 = ٦ \times ٤ \text{ ص} \Leftarrow \text{س}^2 = ٢٤ \text{ ص}$$

لاحظ إشارة المعادلة تتبع إشارة البؤرة وعكس إشارة الدليل

ب) الرأس $(٠,٤٠)$ ومعادلة الدليل $\text{ص} = ٢$

الحل: من الدليل القطع متمائل حول ص

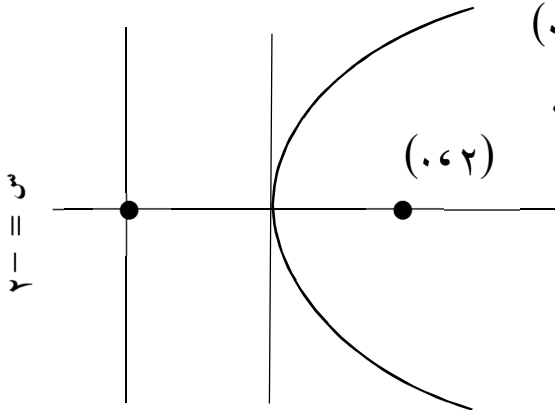
$$\text{المعادلة س}^2 = ٤ \times ٢ - \text{ص} \Leftarrow \text{س}^2 = ٨ - \text{ص}$$

(٢) أوجد إحداثي البؤرة والدليل ثم ارسم القطع:

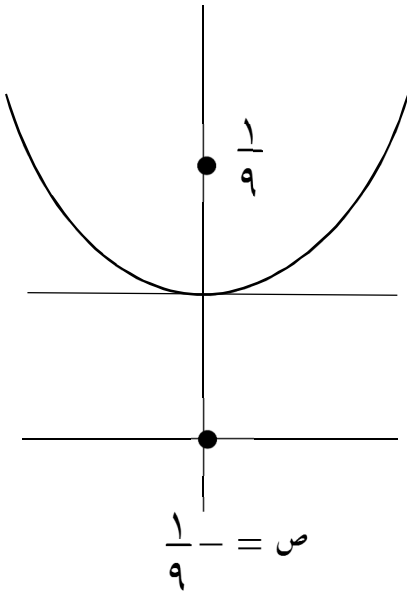
أ) $\text{ص}^2 = ٨ \text{ س}$

الحل: $\text{ص}^2 = ٢ \times ٤ \text{ س}$ البؤرة $(٠,٤٢)$

لأنها متمائلة حول ص الدليل $\text{س} = ٢ -$



أ. فؤاد حسن راشد العليسي



(ب) $\frac{4}{9}ص = س^2$

الحل: $\frac{4}{9}ص = س^2$

$س^2 = \frac{4}{9}ص$ متماثل حول ص

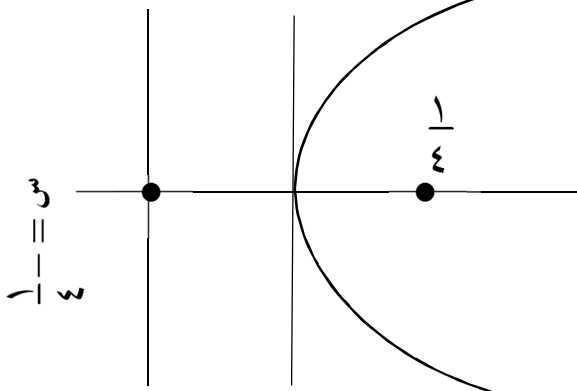
البؤرة $(\frac{1}{9}, 0)$ والدليل $ص = \frac{1}{9}$

(ت) $س = ص^2$

الحل: $ص = س^2$

$ص = س^2$ متماثل حول س

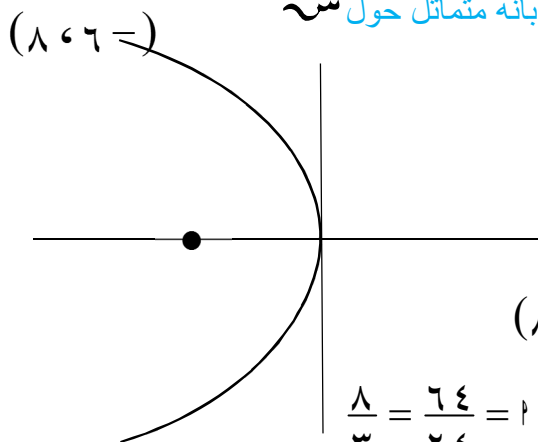
البؤرة $(0, \frac{1}{4})$ والدليل $س = \frac{1}{4}$



(٣) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومحوره هو المحور السيني

ويمر بالنقطة $(-٨, ٦)$

الحل: نبدأ بالرسم حتى يتضح فتحه القطع علماً بأنه متماثل حول $y=٠$



∴ المعادلة $x = ٢٤ - y^2$

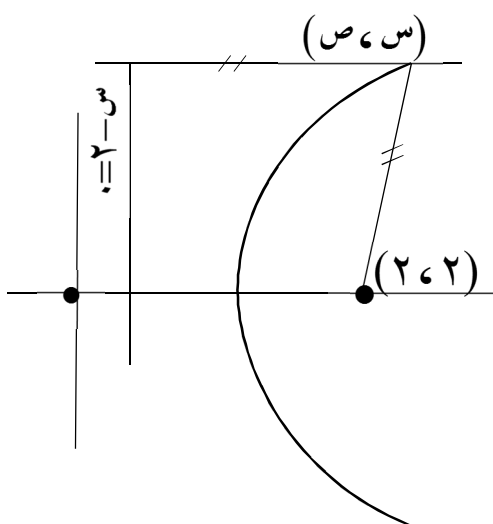
بالتعويض عن النقطة $(-٨, ٦)$ $(x, y) = (-٨, ٦)$

$$\frac{٨}{٣} = \frac{٦٤}{٢٤} = ١ \Leftarrow ١٢٤ = ٦٤ \Leftarrow ٦ - x \times ١ \times ٤ - = ٦٤$$

$$\text{المعادلة } x = ٢٤ - y^2 \Leftarrow x = \frac{٨}{٣} \times ٤ - = ٢ \Leftarrow x = \frac{٣٢ -}{٣}$$

(٤) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي فيه الدليل $s = ٨$ وبؤرتيه $(٢, ٢)$

الحل: الوضع غير قياسي وهنا نستعين بالرسم



أ. فؤاد حسن راشد العليسي

$$|٨ - س| = \sqrt{(٢ - ص)^2 + (٢ - س)^2}$$

$$\text{بالتربيع } (٨ - س)^2 = (٢ - ص)^2 + (٢ - س)^2$$

$$٦٤ + س١٦ - ٢س = (٢ - ص)^2 + ٤ + س٤ - ٢س$$

$$٤ - س٤ + \cancel{س١٦} - ٦٤ + س١٦ - \cancel{س٢} = (٢ - ص)^2$$

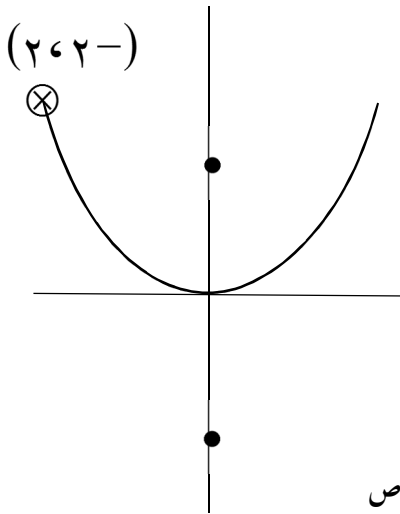
$$٦٠ + س١٢ = (٢ - ص)^2$$

وهذه هي معادلة قطع مكافئ

(٥) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي محوره محور الصادات ويمر بالنقطة

(٢، ٢) ورأسه (٠، ٠)

الحل: متمائل حول ص نستعين بالرسم لمعرفة فتحة القطع



$$\text{المعادلة } س٢ = ٤١ص$$

بالتعويض

$$\frac{1}{٢} = ١ \Leftarrow ٢ \times ١ \times ٤ = ٤$$

$$\text{المعادلة } س٢ = ٤ \times \frac{1}{٢}ص$$

$$س٢ = ٢ص$$

(٦) أوجد البعد بين البؤرة والدليل للقطع $س٢ = ٦ص$

الحل: البعد بين البؤرة والدليل ٢

$$\therefore \text{نوجد } ١ س٢ = \frac{٦ \times ٤}{٤}ص \Leftarrow س٢ = \frac{٣}{٢} \times ٤ص$$

$$\frac{3}{2} = 1 \Leftarrow \frac{3}{2} = 2 \times \frac{3}{2} = 3 = \text{البعد بين البؤرة والدليل} \quad 3$$

(٧) أوجد البعد بين الرأس والبؤرة للقطع ص $2 - 6 = 1$ س

الحل: البعد بين الرأس والبؤرة $1 = \Leftarrow$ ص $2 - 4 \times 4 = 2$ س

$$4 = 1 \quad \therefore \text{البعد بين الرأس والبؤرة} = 4$$

(٨) أثبت أن النقطة $(2, 4)$ تقع داخل القطع المكافئ ص $2 = 12$ س

الحل: البؤرة $(3, 0)$ والدليل $3 - =$ س

$$\text{بعد النقطة عن البؤرة} = \sqrt{(2-3)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$\text{بعد النقطة عن الدليل} = \frac{|3 + 2 \times 0 + 2 \times 1|}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{5}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

\therefore بعد النقطة عن البؤرة $>$ بعد النقطة عن الدليل أي النقطة داخل القطع

(٩) هل النقطة $(1, 2)$ تقع على القطع ص $8 = 2$ س

الحل: نعم / ص $8 - 2 = 6$

بالتعويض $8 - 8 = 0$

الدرس الثالث: القطع الناقص

القطع الناقص مجموعة من النقاط في مستوى واحد مجموع بعدها عن نقطتين ثابتتين

هو قيمة ثابتة (طول) ثابت هو ٢٢

حالات القطع الناقص:

المعادلة	$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$	$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$
المحور الأكبر	٢٢	٢٢
المحور الأصغر	٢٢	٢٢
البؤرتين	$(0, \pm b)$	$(\pm a, 0)$
الرأسين	$(0, \pm a)$	$(\pm b, 0)$
التخالف المركزي	وهو أقل من الواحد $\frac{c}{a}$	وهو أقل من الواحد $\frac{c}{a}$
معادلة الدليلين	$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 1$	$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 1$
قاعدة	$b^2 = a^2 - c^2$	$b^2 = a^2 - c^2$
البعد البؤري	٢٢	٢٢
البعد بين الرأسين	٢٢	٢٢
العلاقة بين ج، ب، ا	$a > b$	$a > b$

فمثلاً: إذا كانت $1 = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25}$ فإن المعادلة متماثلة حول المحور الصادي

وتكتب على صورة $1 = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25}$ وعندها $a = 5$ $b = 3$

ومنه $b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow 9 = 25 - c^2$

$c^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4$

وبذلك التحالف المركزي $1 > \frac{4}{5} = \frac{2}{1}$

ومعادلة الدليل $\frac{25}{4} \pm = \frac{21}{2} \pm = ص$

والبورتين $(0, 4 \pm) = (0, 2 \pm)$

والرأسين $(0, 5 \pm) = (0, 1 \pm)$

(لاحظ أن $2 > 1$ في هذا القطع)

وإذا كان البورتين $(0, 2 \pm)$ والرأسين $(0, 4 \pm)$

فيمكن استنتاج المعادلة

بوضع $2 = 21$ $4 = 16$

ومنه $2 = 21 - 2 = 19$ $2 = 16 - 4 = 12$

وبذلك فإن المعادلة $1 = \frac{2}{12} + \frac{2}{16}$

تمارين:

(١) أوجد معادلة القطع الناقص ثم أوجد معادلة الدليلين:

أ) الرأسان $(0, 5 \pm)$ والبورتان $(0, 4 \pm)$

الحل: $21 = 25$ من الرأسين

$21 = 16$ من البورتين

$2 = 21 - 2 = 19$ $2 = 16 - 25 = -9$

المعادلة متماثلة حول $ص$ من كل الرأس والبورة وهي $1 = \frac{2}{9} + \frac{2}{25}$

أ. فؤاد حسن راشد العيسى

ب) البورتان $(٠, \pm ٤)$ والتخالف المركزي $\frac{٤}{٥}$

الحل: المعادلة متماثلة حول ص $١٦ = ٢ج$ $\frac{٤}{٥} = \frac{ج}{٢٥}$

$$\frac{٤}{٥} = \frac{ج}{٢٥} \Rightarrow ٤ \times ٥ = ١٦ \Rightarrow ٢٥ = ٢ج$$

$$٩ = ٢ب \Rightarrow ١٦ - ٢٥ = ٢ب \Rightarrow ٢ج - ٢ب = ٩$$

$$\frac{٢ص}{٢٥} + \frac{٢س}{٩} = ١ \text{ المعادلة هي}$$

ت) المحور الأكبر ١٠ وحدات وينطبق على $س$ والمحور الأصغر ٨ وحدات ومركزة نقطة الأصل

$$\text{الحل: } ١٠ = ٢٢ \Rightarrow ٥ = ٢ \Rightarrow ٢٥ = ٢٢$$

$$٨ = ٢ب \Rightarrow ٤ = ب \Rightarrow ١٦ = ٢ب$$

$$\frac{٢ص}{٢٥} + \frac{٢س}{١٦} = ١ \text{ المعادلة متماثلة حول } س \text{ وهي}$$

ث) محور القطع هو محور الاحداثيات والقطع يمر بالنقطتين $(٤, ٣)$ ، $(-١, ٤)$ ومحوره الأكبر على $س$

$$\text{الحل: المعادلة على صورة } \frac{٢س}{٢٢} + \frac{٢ص}{٢ب} = ١$$

$$\text{بالتعويض عن النقطة الأولى } ١ = \frac{١٦}{٢ب} + \frac{٩}{٢ص}$$

$$\text{بالتعويض عن النقطة الثانية } ١ = \frac{١}{٢ب} + \frac{١٦}{٢ص}$$



$$\frac{ب^2}{١٦-ب^2} = ٢١ \Leftrightarrow \frac{١٦-ب^2}{ب^2} = \frac{١}{٢١} \Leftrightarrow \frac{١٦}{ب^2} - ١ = \frac{١}{٢١}$$

$$١ = \frac{٩}{ب^2} + \frac{١٦}{٢١} \text{ بالتعويض في}$$

$$١ = \frac{٩+٢٥٦-ب^2}{ب^2} \Leftrightarrow ١ = \frac{٩}{ب^2} + \frac{(١٦-ب^2)١٦}{ب^2}$$

$$١ = \frac{٢٤٧-ب^2}{ب^2}$$

$$\frac{٢٤٧}{١٥} = ب^2 \Leftrightarrow ٢٤٧ = ب^2 ١٥ \Leftrightarrow ب^2 = ٢٤٧-ب^2$$

$$\frac{٢٤٧}{\frac{١٥}{٧}} = ب^2 \Leftrightarrow \frac{٢٤٧}{١٦-\frac{٢٤٧}{١٥}} = ب^2 \Leftrightarrow \frac{ب^2}{١٦-ب^2} = ب^2$$

$$\frac{٢٤٧}{٧} = ب^2 \Leftrightarrow \frac{١٥}{٧} \times \frac{٢٤٧}{١٥} = ب^2$$

$$١ = \frac{١٥ص}{٢٤٧} + \frac{٧س}{٢٤٧} \text{ المعادلة}$$

(ج) البورتان (٠،٣±) والقطع يمر بالنقطة (٢،٠)

الحل: ج = ٩ متمائل حول س

$$١ = \frac{ص}{ب^2} + \frac{س}{٢١} \text{ المعادلة}$$

$$٤ = ب^2 \Leftrightarrow ١ = \frac{٤}{ب^2} + \frac{٠}{٢١}$$

$$١٣ = ٩ + ٤ = ٢١ \Leftarrow ٩ - ٢١ = ٤ \Leftarrow ٢١ - ٢١ = ٠$$

$$١ = \frac{٢١}{٤} + \frac{٢١}{١٣} \text{ المعادلة}$$

(٢) أوجد الرأسين والبؤرتين والتخالف المركزي ومعادلتى الدليل للقطع

$$١ = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}$$

$$\text{الحل: } ١ = \frac{٢١}{١} + \frac{٢١}{٢}$$

$$\text{متماثل حول } ٢ = ٢١, ١ = ٢١$$

$$٢١ - ٢١ = ٠$$

$$١ = ٢١ \Leftarrow ١ - ٢١ = ٢٠ \Leftarrow ٢٠ - ١ = ٢١ \Leftarrow ٢١ - ٢٠ = ١$$

$$\frac{١}{٢١} = \text{الرأسين } (٢١ \pm ٠) \text{ البؤرتين } (١ \pm ٠) \text{ التخالف المركزي } = \frac{١}{٢١}$$

$$\frac{٢}{١} \pm ٠ = \text{الدليلين}$$

$$(٣) \text{ أوجد ما يأتي: أ) طول المحور الأصغر في القطع } ١ = \frac{٢١}{١٦} + \frac{٢١}{٢٥}$$

$$\text{الحل: المحور الأصغر } ٢ = ٢١, ١٦ = ٢١ \Leftarrow ٤ \pm ٠ = ٢١$$

$$\text{المحور الأصغر } ٨ = ٤ \times ٢ =$$

$$(ب) \text{ البعد البؤري إذا كان محوري القطع الناقص } (٦, ١٠)$$

$$\text{الحل: البعد البؤري } ٢١ = ١٠, ١٠ = ٢١ \Leftarrow ٥ = ٢١ \Leftarrow ٢٥ = ٢١$$

$$٩ = ٢١ \Leftarrow ٣ = ٢١ \Leftarrow ٦ = ٢١$$



$$١٦ = ٢ج \Leftarrow ١٦ - ٢ج = ٩ \Leftarrow ٢ج - ٢٥ = ٩ \Leftarrow ٢ج - ٢١ = ٩$$

البعد البؤري $٨ = ٤ \times ٢ =$

(ت) هـ في $١ = \frac{٢ص}{٢هـ} + \frac{٢س}{١٦}$ إذا كان احدى البؤرتين (٣، ٠)

الحل: $١٦ = ٢١$ ، $٩ = ٢ج$

$$٧ = ٢ب \Leftarrow ٩ - ١٦ = ٢ب \Leftarrow ٢ج - ٢١ = ٢ب$$

$$\Leftarrow ٧ = ٢ب = ٢هـ$$

(ث) التخالف المركزي للقطع $١ = ٢ص + ٢س$

الحل: معامل $٢س =$ معامل $٢ص$ والاشارة +

∴ المعادلة دائرة

ومنه التخالف المركزي $٠ =$

(ج) قيمة ٢ التي تجعل $١ = \frac{٢ص٩}{٢٢} + ٢س$ دائرة

الحل: لكي تكون المعادلة دائرة يجب أن يكون $٩ = ٢٢$ أي $٣ \pm = ٢$

(ح) ل التي تجعل $٠ =$ للمعادلة $١ = \frac{٢ص}{٢ل} + \frac{٢س}{٢٥}$

الحل: التخالف $٠ =$ أي دائرة

أي $٢٥ = ٢ل$ ، $٥ \pm = ل$

(٤) بين نوع القطع المخروطي الذي احداثي راسيه $(٠,٥)$ وبؤرتاه $(٠,٤\pm)$

الحل: $٢٥ = ٢١$ ، $١٦ = ٢٦$

$١ > ٢$ \therefore القطع ناقص

(٥) أوجد معادلة المنحنى الذي ترسمه النقطة $٧(س, ص)$ التي تتحرك بحيث

مجموع بعديها عن النقطتين $(٠,٣)$ ، $(٠,٢)$ يساوي ٦ وحدات

الحل: من تعريف القطع الناقص

$$٦ = \sqrt{٢(٠-ص) + ٢(٢-س)} + \sqrt{٢(٠-ص) + ٢(٣-س)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{٢(٢-س) + ٢ص} - ٦ = \sqrt{٢(٣-س) + ٢ص} \quad \text{بالتربيع}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{٢(٣-س) + ٢ص} = \sqrt{٢(٢-س) + ٢ص} + ٦ \quad | ٢-٣٦ = \sqrt{٢(٢-س) + ٢ص} + \sqrt{٢(٣-س) + ٢ص}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{٢(٢-س) + ٢ص} = \sqrt{٢(٣-س) + ٢ص} - ٦ \quad | ٢-٣٦ = \sqrt{٢(٢-س) + ٢ص} - ٩ + س٦ - \sqrt{٢(٣-س) + ٢ص}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{٢(٢-س) + ٢ص} = \sqrt{٢(٣-س) + ٢ص} - ٩ + س٦ - ٤ + س٤ - \sqrt{٢(٣-س) + ٢ص}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{٢(٢-س) + ٢ص} = ٣١ - س٢ - \sqrt{٢(٣-س) + ٢ص}$$

$$\text{بالتربيع} \quad ٤س٤ + ١٢س + ٩٦١ = ٤٤(٢-س + ص) \quad | ٤٤ = ٩٦١ + س١٢س + ٤س٤ + ٢(٢-س)$$

$$\Leftrightarrow ٤س٤ + ١٢س + ٩٦١ = ٤٤(٢-س + ص) \quad | ٤٤ = ٩٦١ + س١٢س + ٤س٤ + ٢(٢-س)$$

$$\Leftrightarrow ٤س٤ + ١٢س + ٩٦١ = ٤٤(٢-س + ص) \quad | ٤٤ = ٩٦١ + س١٢س + ٤س٤ + ٢(٢-س)$$

$$\Leftrightarrow ٠ = ٤٤س١ - ٣٨٥ + س٧٠٠ + ٤س٤ - ٤٤س١$$

$$\Leftrightarrow ٠ = ٣٨٥ - س٧٠٠ + ٤س٤ - ٤٤س١$$

إشارة $س٢$ ، $ص٢$ موجبة ومعاملها ليس متساوي \therefore المعادلة معادلة قطع ناقص

الدرس الرابع: القطع الزائد

مجموعة من النقاط في مستوى واحد الفرق بين بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي بعد

ثابت ٢٢

حالات القطع الزائد:

$1 = \frac{ص^2}{ب^2} - \frac{س^2}{ب^2}$	$1 = \frac{ص^2}{ب^2} - \frac{س^2}{ب^2}$	المعادلة
على ص ١٢	على س ١٢	المحور القاطع
على س ٢ب	على ص ٢ب	المحور المرافق
$(٠, \pm ج)$	$(٠, \pm ج)$	البؤرتين
$(١ \pm, ٠)$	$(٠, ١ \pm)$	الرأسين
وهو أكبر من الواحد $\frac{ج}{ب}$	وهو أكبر من الواحد $\frac{ج}{ب}$	التخالف المركزي
$ص \pm = \frac{ب^2}{ج}$	$س \pm = \frac{ب^2}{ج}$	معادلة الدليلين
$ص \pm = \frac{ب}{س}$	$ص \pm = \frac{ب}{س}$	معادلة المقاربيين
$ب^2 - ج^2 = ب^2$	$ب^2 - ج^2 = ب^2$	قاعدة
$٢ج$	$٢ج$	البعد البؤري
٢٢	٢٢	البعد بين الرأسين
$ج < ب$	$ج < ب$	العلاقة بين ج، ب

فمثلاً: إذا كان $1 = \frac{ص^2}{١٣} - \frac{س^2}{٧}$ فإن $٢٢ = ٧$ ، $ب^2 = ١٣$ لاحظ لا توجد

علاقة بين ب، ج في القطع الزائد بينما في الناقص كنا نرى أن $ب < ج$ ومنه

$ب^2 - ج^2 = ب^2$ لاحظ الفرق بين هذه المعادلة والمعادلة في القطع الناقص

ومنه $١٣ = ٧ - ٢ج = ٧ + ١٣ = ٢ج \Leftarrow ٢٠ = ٢ج$ وكما في القطع

الناقص نجد أن القطع متماثل حول $٢٠ = ٢ج$ ، التخالف $\frac{٢٠}{٢٠} = ١$ وهو اكبر من

الواحد

البؤرتين $(٠, ٢٠ \pm)$ والرأسين $(٠, ٢٠ \pm)$ ، ومعادلة الدليلين

$٢٠ = ٢ج$ وفي القطع الزائد يوجد المقاربات

وفي هذه الحالة هي $٢٠ = ٢ج$ أي $٢٠ = ٢ج$

مثلاً: إذا كان $٢٠ = ٢ج$ ، $٢٠ = ٢ج$ ، القطع متماثل حول ٢٠

فإن المعادلة هي $١ = \frac{٢٠}{٢٠} - \frac{٢٠}{٢٠}$ وهذا النوع من القطوع يسمى القطع الزائد

المتساوي الساقين

تمارين:

(١) أوجد إحداثي الرأسين والبؤرتين ومعادلة المقاربين والدليلين للقطع الزائد:

$$١ = \frac{٢٠}{٩} - \frac{٢٠}{٩}$$

الحل: $٩ = ٢٠$ ، $١ = ٢٠$ ، $٢٠ = ٢ج$ ، $٢٠ = ٢ج$

$$١٠ = ٢ج \Leftarrow ٩ - ٢ج = ١$$

ومما سبق القطع متماثل حول المحور ٢٠ والرأسين $(٠, ٢٠ \pm)$ ، والبؤرتين

$(\pm, \sqrt{10}, 0)$ ، ومعادلة المقاربين $\sim \pm = \frac{1}{3}س$ ، والدليلين

$$\pm = \frac{9}{\sqrt{10}}$$

(ب) $9س^2 - 9ص^2 = 4$

الحل: $1 = \frac{ص^2}{\frac{4}{9}} - \frac{س^2}{\frac{4}{9}} \Leftarrow 4 = \frac{ص^2}{1} - \frac{س^2}{1}$

$$\frac{4}{9} = 2ب ، \frac{4}{9} = 2ب \therefore 2ب = 2ج - 2ب$$

$$\frac{8}{9} = 2ج \Leftarrow \frac{4}{9} - 2ج = \frac{4}{9}$$

ومما سبق القطع متماثل حول المحور \sim الرأسين $(\pm, \frac{2}{3}, 0)$ ، والبؤرتين

$(\pm, \frac{2}{3}, \sqrt{10})$ ، ومعادلة المقاربين $\sim \pm = \frac{9}{3}س = \pm = 3س$ أي

$$\pm = 3س \text{ والدليلين } \pm = \frac{4}{\frac{9}{3}} = \frac{4}{3} \times \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$$

(2) أوجد معادلة القطع الزائد في الحالات التالية:

(أ) البؤرتان $(0, \pm 6)$ والرأسين $(\pm 4, 0)$

الحل: القطع متماثل حول \sim

$$ج^2 = 36 ، ١٦ = ٢١ ، ٢١ - ٢ج = ٢ب ∴ ،$$

$$٢٠ = ٢ب \Leftarrow ١٦ - ٣٦ = ٢ب \Leftarrow$$

$$المعادلة \quad ١ = \frac{٢س}{٢٠} - \frac{٢ص}{١٦}$$

(ب) الرأسان $(٠, ٦ \pm)$ والتخالف المركزي $\frac{٤}{٣}$

$$الحل: \quad ٣٦ = ٢١ ، \quad \frac{٤}{٣} = \frac{ج}{١}$$

$$٦٤ = ٢ج \Leftarrow ٨ = ج \Leftarrow \frac{٢٤}{٣} = ج \Leftarrow \frac{٤}{٣} = \frac{ج}{٦} \Leftarrow$$

$$٢٨ = ٢ب \Leftarrow ٣٦ - ٦٤ = ٢ب \Leftarrow ٢١ - ٢ج = ٢ب ∴ ،$$

القطع متمائل حول ص

$$المعادلة هي \quad ١ = \frac{٢س}{٢٨} - \frac{٢ص}{٣٦}$$

(ت) البؤرتان $(٠, ٨ \pm)$ وطول المحور المرافق ٦ وحدات متمائل حول س

$$الحل: \quad ٦٤ = ٢ج ، ٦ = ٢ب \Leftarrow ٣ = ب \Leftarrow ٩ = ٢ب \Leftarrow$$

$$٢١ - ٦٤ = ٩ \Leftarrow ٢١ - ٢ج = ٩ \Leftarrow$$

$$٥٥ = ٢١ \Leftarrow ٥٥ - ٢١ = ٦٤ - ٩ = ٢١ \Leftarrow$$

$$المعادلة هي \quad ١ = \frac{٢ص}{٩} - \frac{٢س}{٥٥}$$



ث) الرأسان $(٤, ٠)$ ويمر بالنقطة $(٥, ٢-)$

الحل: متمائل حول ص $١٦ = ٢٢$ ،

$$١ = \frac{٢٢}{٢} - \frac{٢٢}{٢} \text{ بالتعويض عن النقطة في المعادلة}$$

$$\frac{٢٥}{١٦} - ١ = \frac{٤-}{٢} \Leftrightarrow ١ = \frac{٤-}{٢} - \frac{٢٥}{١٦}$$

$$\frac{٦٤}{٩} = ٢ \Leftrightarrow ٦٤ = ٢ \Leftrightarrow \frac{٩-}{١٦} = \frac{٤-}{٢}$$

$$\therefore \text{المعادلة هي } ١ = \frac{٢٢}{١٦} - \frac{٢٢}{١٦}$$

(٣) أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرته على محور السينات ومركزه نقطة الأصل

وتخالفه المركزي ٥ ويمر بالنقطة $(٢, ٣)$

الحل: متمائل حول ص

$$\text{المعادلة } ١ = \frac{٢٢}{٢} - \frac{٢٢}{٢} = \frac{٢٢}{٢} - \frac{٢٢}{٢} = ٥$$

$$٢٢ = ٢ \Leftrightarrow ٤ = \frac{٢٢}{٢} \Leftrightarrow ٥ = ١ + \frac{٢٢}{٢} \Leftrightarrow ٥ = \frac{٢٢ + ٢٢}{٢}$$

$$١ = \frac{٤}{٢٢} - \frac{٩}{٢} \Leftrightarrow ١ = \frac{٤}{٢} - \frac{٩}{٢}$$

$$٨ = ٢ \Leftrightarrow ١ = \frac{٨}{٢} \Leftrightarrow ١ = \frac{١}{٢} - \frac{٩}{٢}$$

$$\text{ومنه } ٢ = ٤ \times ٨ = ٣٢ \Leftrightarrow ٣٢ = ٢ \text{ المعادلة هي } ١ = \frac{٢٢}{٣٢} - \frac{٢٢}{٨}$$

أ. فؤاد حسن راشد العليسي

(٤) أوجد معادلة القطع الزائد الذي دليله $\sqrt{3} = \pm 4$ ، مستقيماه المقاربين

$$\sqrt{3} = \pm 4$$

الحل: من الدليل القطع متمائل حول $\sqrt{3}$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 1 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{3} \quad , \quad 4 = \frac{2}{3}$$

$$2 = 2 \Leftrightarrow 2 - 2 = 2 \Leftrightarrow 2 - 2 = 2 \Leftrightarrow 2 - 2 = 2$$

$$2 = 2 \Leftrightarrow 2 - 2 = 2 \Leftrightarrow (2 - 2) = 2 \Leftrightarrow 2 = 2$$

$$\frac{1}{3} = 2 \quad \text{بالتعويض}$$

$$0 = \left(4 - \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow 0 = 4 - \frac{1}{3} \Leftrightarrow 4 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 4 = \frac{1}{3}$$

$$0 = \text{مرفوض}$$

$$64 = 2 \Leftrightarrow 8 = 2 \Leftrightarrow 4 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 0 = 4 - \frac{1}{3}$$

$$1 = \frac{2}{32} - \frac{2}{32} \quad \text{المعادلة هي} \quad 32 = 2 \quad , \quad 32 = 2 \Leftrightarrow 4 = \frac{2}{8}$$

(٥) أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرته $(\pm 9, 0)$ ودليله $\sqrt{3} = \pm 4$ ثم أوجد

معادلة مقاربه

الحل: القطع متمائل حول $\sqrt{3}$ ، $81 = 2$

$$36 = 2 \Leftrightarrow 4 = \frac{2}{9} \Leftrightarrow 4 = \frac{2}{9}$$

$$45 = 36 - 81 = 2 \Leftrightarrow 2 - 2 = 2 \Leftrightarrow 2 - 2 = 2$$



المعادلة هي $1 = \frac{ص^2}{٤٥} - \frac{س^2}{٣٦}$ ومعادلة مقاربته $ص = \pm \frac{ب}{م} س$

أي $ص = \pm \frac{٣}{٦} س = \pm \frac{٥}{٢} س$

(٦) أوجد التخالف المركزي للقطع $1 = \frac{ص^2}{٢} - \frac{س^2}{٥}$ وماذا يسمى هذا القطع الزائد

الحل: $٢ = ٢م = ٢ب$ ، $٥ = ٢هـ = ٢ج$ ، $٢م - ٢ج = ٢$

$$٢ = ٢هـ - ٢ج = ٢م \Rightarrow ٢هـ = ٢ج + ٢ = ٤ \Rightarrow ٢هـ = ٤ \Rightarrow ٢ج = ٢ \Rightarrow ٢م = ٢$$

القطع الزائد هذا يسمى قطع زائد متساوي الساقين

(٧) أوجد التخالف المركزي للقطع المخروطي الذي طول محوره القاطع ٨ وحدات

واحدائي كلاً من نهايتي المحور المرفق (٣ ± ٠)

الحل: $٨ = ٢٢ = ٢٢ \Rightarrow ٤ = ٢ \Rightarrow ١٦ = ٢٢$

$$٩ = ٢ب \Rightarrow ٣ = ب$$

$$٢٥ = ٢ج \Rightarrow ١٦ - ٢ج = ٩ \Rightarrow ٢٢ - ٢ج = ٩ \Rightarrow ٢ج = ١٣ \Rightarrow ٢ج = ١٣$$

$$\frac{٥}{٤} = \frac{ج}{م} = \text{التخالف المركزي}$$

(٨) أوجد معادلة المنحنى الذي ترسمه النقطة $هـ(٣، ٤)$ التي تتحرك بحيث

الفرق بين بعديها عن نقطتين $(٠، ٢)$ ، $(٠، ١٠)$ يساوي ١

$$\text{الحل: } ١ = \sqrt{(٠-ص)^2 + (٢-س)^2} - \sqrt{(٠-ص)^2 + (١٠-س)^2}$$

$$١ = \sqrt{ص^2 + (٢-س)^2} - \sqrt{ص^2 + (١٠-س)^2} \Rightarrow$$

أ. فؤاد حسن راشد العليسي

$$\sqrt{2} + 1 = \sqrt{(2-s)^2 + 2} \quad \Leftarrow$$

بالتربيع

$$\sqrt{2} + 1 = \sqrt{(2-s)^2 + 2} \quad \Leftarrow$$

$$\sqrt{2} + 1 = \sqrt{(2-s)^2 + 2} \quad \Leftarrow$$

$$\sqrt{2} + 1 = \sqrt{(2-s)^2 + 2} \quad \Leftarrow$$

$$\sqrt{2} + 1 = \sqrt{(2-s)^2 + 2} \quad \Leftarrow$$

بالتربيع

$$\sqrt{2} + 1 = \sqrt{(2-s)^2 + 2} \quad \Leftarrow$$

$$\sqrt{2} + 1 = \sqrt{(2-s)^2 + 2} \quad \Leftarrow$$

$$\sqrt{2} + 1 = \sqrt{(2-s)^2 + 2} \quad \Leftarrow$$

الإشارة سالبة ، معامل s \neq معامل $\sqrt{2}$

∴ المعادلة معادلة قطع زائد



تمارين متنوعة عن القطوع

(١) قطع ناقص مركزه (٠،٠) وبعده البؤري يساوي طول محوره الأصغر ،

ودليلاه $\mathcal{M} = \pm 8$ أوجد معادلة القطع وتخالفه المركزي

الحل: بعده البؤري = طول محوره الأصغر

$$2b^2 = 2a^2 \Leftrightarrow b = a \Leftrightarrow b^2 = a^2$$

$$b^2 = a^2 \Leftrightarrow b^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow b^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow b^2 = a^2$$

$$\therefore \mathcal{M} = \pm 8 \Leftrightarrow 8 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$0 = a^2 - 8b^2 \Leftrightarrow 8 = \frac{a^2}{b^2}$$

$2b^2 = (4 - b^2)$ إما $2b^2 = 0$ وهذا مرفوض

$$4 - b^2 = 0 \Leftrightarrow b^2 = 4 \Leftrightarrow b = \pm 2$$

$$16 = 2b^2 \Leftrightarrow b^2 = 8 \Leftrightarrow b = \pm 2\sqrt{2}$$

$$المعادلة متماثلة حول \mathcal{M} $\Leftrightarrow 1 = \frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{32}$$$

$$\frac{1}{16} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

(٢) قطعان ناقصان لهما نفس المركز (٠،٠) ومحوري كلاً منهما الاحداثيين

ومعادلة الأول $1 = \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100}$ فإذا كان الثاني يمر ببؤرتي الأول وتتقاطع معه

في نهايتي محوره الأصغر أوجد معادلة القطع الثاني



٦٤ = ٢ب ، ١٠٠ = ٢پ

$$٣٦ = ٢ \text{ ج} \Leftarrow ٣٦ - = ٢ \text{ ج} - \Leftarrow ٢ \text{ ج} - ١ \cdot ١ = ٦٤$$

القطع الثاني يمر من بؤرة الأول عند ٦ ويمر من نهاية محوره الأصغر عند ٨

$$\gamma \varepsilon = \gamma \lambda = \gamma \rho \Leftarrow \gamma < \lambda ::$$

$$٣٦ = ٢٦ = ٢٠$$

$$1 = \frac{ص}{٦٤} + \frac{س}{٣٦}$$

(٣) قطع ناقص رأساه $(\pm ٠,٦)$ وبعد احد دليليه عن البؤرة القريبة منه يساوي ٥

أوجد: أ) معادلة القطع ب) تخالفه المركزي

الحل: بعد الدليل عن البؤرة القريبة = ٥

البعد بين الدليل ونقطة الأصل = ٥+ج

$$\frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cdot 0 = \frac{y}{x} \Leftarrow \frac{y}{x} + 0 = \frac{y}{x}$$

$$n = 36 - 20 + 2j \Leftarrow 2j + 20 = 36$$

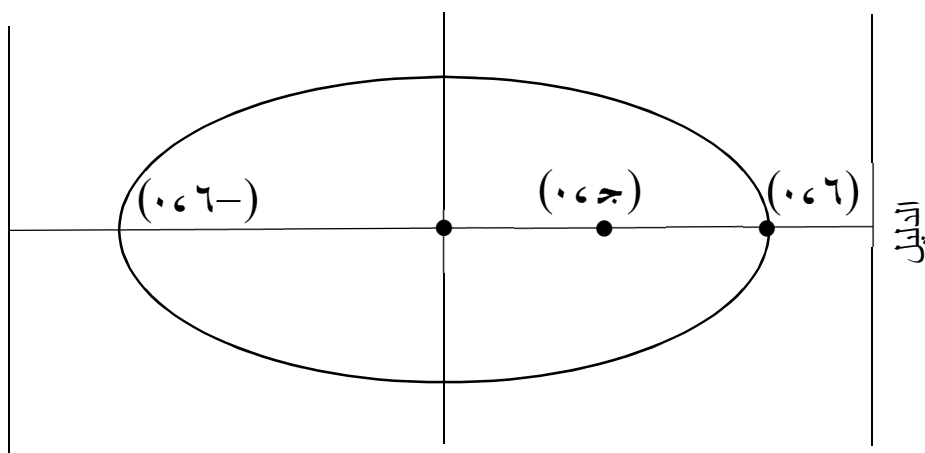
أ. فؤاد حسن راشد العبسي

$$(9+j)(4-j) = 0 \Rightarrow j = -9 \text{ مرفوض لأن } j < 1$$

$$j = 4 \Rightarrow j^2 = 16$$

$$b^2 = 1 - j^2 = 1 - 16 = -15 \Rightarrow b^2 = -15$$

أ) معادلة القطع $1 = \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{36}$ (ب) التخالف المركزي $\frac{a}{b} = \frac{c}{a} = \frac{e}{1}$



(٤) قطع ناقص بؤرتاه نقطة تقاطع الدائرة $s^2 + v^2 = 36$ مع محور السينات وطول محوره الأكبر ضعف طول محوره الأصغر أوجد معادلته

الحل: بؤرتاه نقطة تقاطع محور السينات مع الدائرة أي عند النقطة $(\pm 6, 0)$ وهي

$$\text{هنا أيضاً تمثل البؤرة } j^2 = 36$$

$$12 = 2 \times 2 \Rightarrow b^2 = 12 \Rightarrow b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$12 = b^2 \Rightarrow 36 - c^2 = 12 \Rightarrow c^2 = 24 \Rightarrow c = 2\sqrt{6}$$

$$12 = b^2 \Rightarrow 12 \times 4 = 48 = c^2 \Rightarrow c = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$\text{المعادلة هي } 1 = \frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{12}$$

المحتويات

الوحدة الأولى: الأعداد المركبة.....	٣
الدرس الأول: الجزء التخيلي للعدد المركب ت.....	٦
الدرس الثاني: العدد المركب بالصورة الجبرية.....	٨
الدرس الثالث: مرافق العدد المركب بالصورة $س + ت ص$	١١
الدرس الرابع: العمليات الحسابية للعدد المركب الجبري.....	١٢
الدرس الخامس: خواص العمليات الحسابية وخواص العدد المركب.....	٢٤
الدرس السادس: تساوي عددين مركبين (حل المعادلات).....	٣٢
الدرس السابع: إيجاد الجذر التربيعي لعدد مركب جبري.....	٣٩
الدرس الثامن: حل المعادلات في مجموعة الأعداد المركبة (م).....	٤٧
الدرس التاسع: إيجاد معادلة الدرجة الثانية إذا علم جذريها.....	٥٩
الدرس العاشر: (أولاً) تحويل العدد المركب من الصورة الجبرية إلى المثلثية.....	٦٤
(ثانياً) تحويل العدد المركب من الصورة المثلثية إلى الجبرية.....	٧٠
الدرس الحادي عشر: العمليات الحسابية للعدد المركب [ر، هـ].....	٧٦
الدرس الثاني عشر: خواص العدد المركب بالصورة [ر، هـ].....	٨٣
الدرس الثالث عشر: القوى والجذور بالصورة [ر، هـ] (قاعدة دي موافر).....	٨٨
الدرس الرابع عشر: حل المعادلات بالصورة [ر، هـ].....	٩٦
(تمارين متنوعة على الوحدة الأولى).....	١٠٢
الوحدة الثانية: مبدأ العد والتباديل والتوافيق ومبرهنة ذات الحدين.....	١١٠
أولاً: مبدأ العد والتباديل والتوافيق.....	١١٢
الدرس الأول: مبدأ العد.....	١١٢
الدرس الثاني: مسائل مبدأ العد.....	١١٩
الدرس الثالث: التباديل.....	١٣٤
تمارين نهائية على مبدأ العد والتباديل والتوافيق.....	١٥٩
ثانياً: مفكوك ذات الحدين.....	١٦٤
الدرس الأول: مبرهنة ذات الحدين.....	١٦٤
الدرس الثاني: الحد العام والحد الذي يحوي ^{عدد} س والحد الخالي من س :.....	١٦٩
الدرس الثالث: الحدود الوسطى.....	١٧٣

١٧٥	الدرس الرابع: النسبة بين حدود المفكوك
١٨٣	الوحدة الثالثة: الاحتمالات
١٨٨	الدرس الأول: بعض المبرهنات الأساسية في الاحتمالات
١٩٣	الدرس الثاني: بناء النموذج الاحتمالي
٢٠٠	الدرس الثالث: الاحتمال الشرطي
٢٠٧	الدرس الرابع: متتالية التكرار
٢١٤	الوحدة الرابعة: القطوع المخروطية
٢١٦	الدرس الأول: القطوع المخروطية
٢١٨	الدرس الثاني: القطع المكافئ
٢٢٤	الدرس الثالث: القطع الناقص
٢٣١	الدرس الرابع: القطع الزائد
٢٣٩	تمارين متنوعة عن القطوع

اسم الطالب:

المدرسة:

العام الدراسي:



مرسى لخدمات الطباعة والإعلان

Tel: 774955495-770904771

www.facebook.com/marsaservice