Minimización

M. Simplex

- ❖ Método de la Gran M
- ❖ Método de Dos Fases

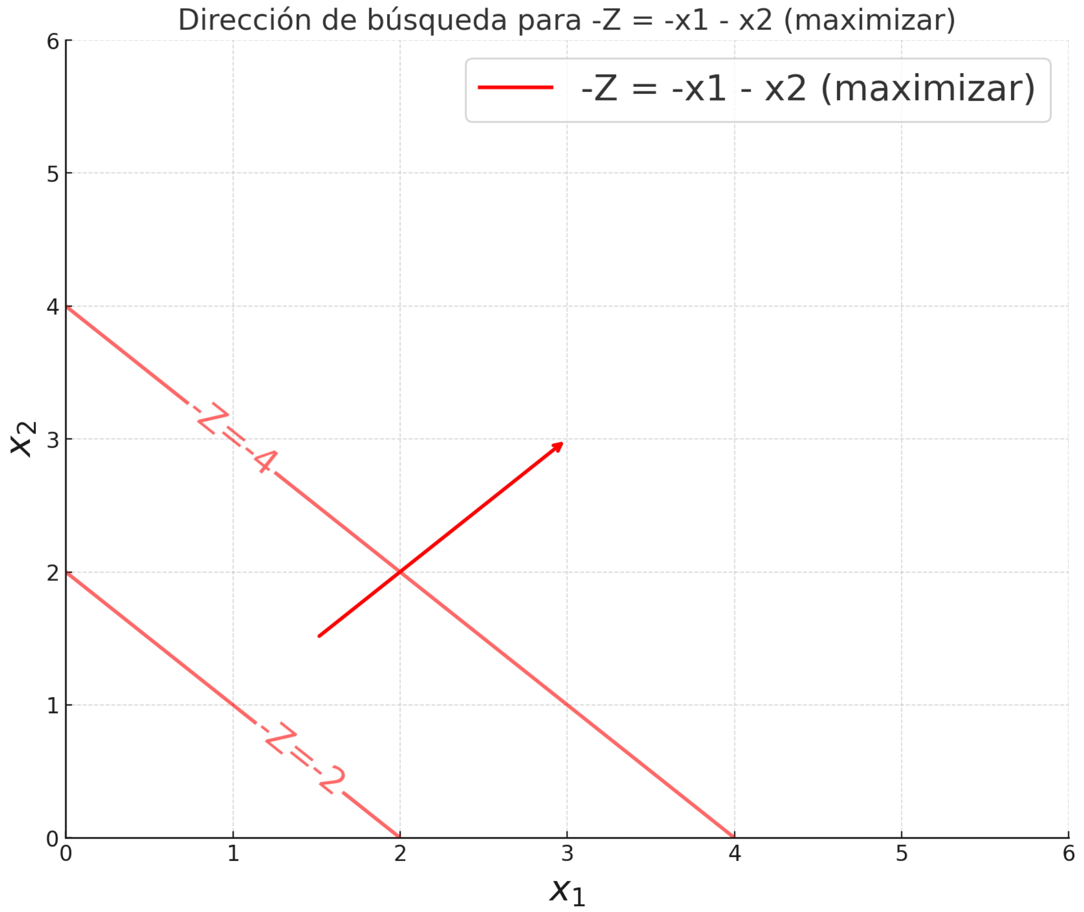
Minimización

Equivalentes

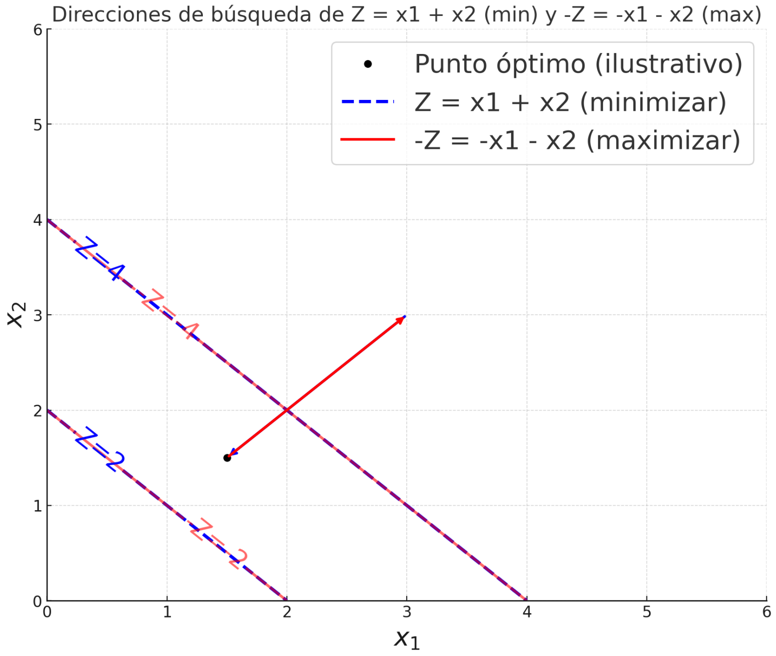
$$\color{blue}{Min}\ Z = X_1 + X_2 \quad \Longleftrightarrow \quad Max\ \color{red}{-}Z = \color{red}{-}X_1 \color{red}{-} X_2$$

Buscas la **menor** Z posible

Buscas la **mayor** (-Z) posible



- Mismo punto Optimo
- Diferente orientación del objetivo



Método de la Gran M

- **M** es un número muy grande (conceptualmente **→∞**).
- **Agregamos variables artificiales** para "**rellenar**" las **restricciones**, obtener una "**solución básica factible inicial** y poder usar el método simplex
  - Las **variables artificiales** forman la **base inicial factible** en el método símplex
  - cuando hay restricciones **≥** o **=** agregamos variables artificiales
  - Restricciones **=** requieren directamente **variable artificial** **(a_i)**
  - Penalizamos a FO con M.
    - En **min**: $Z' = Z + M\sum ai$)
    - En **max**: $Z' = Z - M\sum ai$)
    - **Z':** FO penalizada
  - **Limpiar el renglón 0** para que las variables artificiales quedan con coeficiente cero en esta, antes de iniciar las iteraciones.

Ejemplo- Minimización

- Minimizar Z=2x_1+3x_2

S.a:

  - (1) x_1+3x_2≥9
  - (2) 2x_1+x_2 ≥ 8
  - x_1,x_2≥0

Método de la Gran M

- (≤) → + s
- (≥) → - e

1. **Formular el problema en su formato estandarizado:**

Minimizar Z=$2x_1$+$3x_2$

S.a:

- (1) $x_1+3x_2 \geq 9$
- (2) $2x_1+x_2 \geq 8$
- $x_1,x_2 \geq 0$

Función objetivo con penalización:

$$Z=2x_1+3x_2 + \mathbf{0e_1} + \mathbf{0e_2} + \boldsymbol{Ma_1} + \boldsymbol{Ma_2}$$

$$x_1+3x_2 - \boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{a_1} \quad = 9$$

$$2x_1+ x_2 - \boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{a_2} \quad = 8$$

- Variables No básicas x_1,x_2
- Variables de exceso e_1,e_2
- Variables artificiales a_1,a_2 (Var. Básicas)
- M es un número grande (ej. M=10^6)

2. **Revisar la Solución Básica Factible Inicial**

- **x1=0**
- **x2=0**
- e1=0
- e2=0
- a1=9
- a2=8
- **Z**=M·9+M·8=**17M**

Se resuelve el sistema para las variables básicas

Método de la Gran M

Función objetivo con penalización:

$$\text{Min. } Z' = 2x_1 + 3x_2 + 0e_1 + 0e_2 + Ma_1 + Ma_2$$

$$x_1 + 3x_2 - e_1 + a_1 = 9$$
$$2x_1 + x_2 - e_2 + a_2 = 8$$

3. **Renglón cero (Z'):**

$$Z_j = \sum (C_B \cdot a_{ij}) - C_j$$

- C_B: **coeficiente de la variable básica** en la FO penalizada (**M** para a_1 y a_2)
- a_{ij}: **coeficientes en la tabla simplex**
- Cj: **coeficiente original** de la variable no básica en la FO penalizada

Minimizar $Z = 2x_1 + 3x_2$

Maximizar $-Z = -2x_1 - 3x_2$

$$\text{Max. } -Z = -2x_1 - 3x_2 - 0e_1 - 0e_2 - Ma_1 - Ma_2$$

Equivalencia en Maximización

$$-Z + 2x_1 + 3x_2 + 0e_1 + 0e_2 + Ma_1 + Ma_2 = 0$$

Renglón Cero Nuevo → **(R0 Nuevo)=(R0 original)-M×(R1)-M×(R2).**

	Z	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	RHS	
	-1	2	3	0	0	M	M	0	
-M[	0	1	3	-1	0	1	0	9	]
-M[	0	2	1	0	-1	0	1	8	]
	-1	**2-3M**	**3-4M**	**M**	**M**	**0**	**0**	**-17M**	

En maximización se acostumbra "penalizar" (restar) las filas donde aparecen las artificiales

$\textbf{Min. } Z' = 2x_1 + 3x_2 + 0e_1 + 0e_2 + Ma_1 + Ma_2$

Método de la Gran M

$$x_1 + 3x_2 - e_1 + a_1 = 9$$
$$2x_1 + x_2 - e_2 + a_2 = 8$$

4. Primera tabla símplex

VB		Z	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	RHS
***	R0	-1	2-3M	3-4M	M	M	0	0	-17M
a1	R1	0	1	3	-1	0	1	0	9
a2	R2	0	2	1	0	-1	0	1	8

- a1=9
- a2=8

Iteraciones

- **Buscamos** en el **R0** el **más negativo** (recordar que estamos “maximizando”)
- **Ve: X2**
- **Vs:** Cociente mínimo: a1→9/3=**3**; a2→ 8/1=8 → SALE **a1**

Tabla Simplex Inicial

VB		Z	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	RHS
***	R0	-1	2-3M	3-4M	M	M	0	0	-17M
a1	R1	0	1	3	-1	0	1	0	9
a2	R2	0	2	1	0	-1	0	1	8

*para la selección de la **variable** que **entra** a la base, se basan únicamente en los coeficientes de que están asociados a las variables (cols de x1,x2,e1,e2,a1,a2), no en el término independiente (RHS).*

Iteración 1

VB		Z	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	RHS
***	R0	-1	1-5/3M	**0**	1-1/3M	M	4/3M-1	0	-9-5M
X2	R1	0	1/3	**1**	-1/3	0	1/3	0	3
a2	R2	0	5/3	**0**	1/3	-1	-1/3	1	5

OBSR
R0= (4M-3)RP+R0
RP=RP/3
R2=R2-RP

- La fila 0 refleja la nueva expresión de Z
- x2=3
- Siguen existiendo variables negativas en el renglón cero (x1,e1)
- Aún queda la variable artificial a2 en la base, idealmente buscamos dejar las artificiales en 0

Iteración SEGUNDA

- **Ve: X1**
- **Vs:** Cociente mínimo: x2→3*3=**9**; **a2**→ 5*3/5=**3** → sale **a2**

Iteración 1

VB		Z	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	RHS
***	R0	-1	**1-5/3M**	0	1-1/3M	M	4/3M-1	0	-9-5M
X2	R1	0	**1/3**	1	-1/3	0	1/3	0	3
a2 ↖ X1	R2	0	**5/3**	0	1/3	-1	-1/3	1	5

- Ve: X1
- Vs: a2

Iteración 2

VB		Z	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	RHS
***	R0	-1	0	0	4/5	3/5	M-4/5	M-3/5	-12
X2	R1	0	0	1	-2/5	1/5	2/5	-1/5	2
X1	R2	0	1	0	1/5	-3/5	-1/5	3/5	3

OBSR
R0= (**5/3M-1**)RP+R0
R1=RP*(**-1/3**)+R1
RP=RP***3/5**

- La fila 0 no muestra mas M negativas
- La fila 0 refleja la nueva expresión de **Z =12**
- X1=3
- X2=2
- e1,e2,a1,a2=0
- La ser las artificiales =0, entonces **M(a1+a2)=0**, denota que la **penalización** logro **expulsar** las **artificiales**

Ejemplo 2

- $(\leq) \rightarrow +s$
- $(\geq) \rightarrow -e$

Maximizar $Z=3x_1+2x_2$

S.a:

- (1) $x_1 + x_2 \leq 10$
- (2) $2x_1+3x_2 \geq 15$
- (3) $x_1 = 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

1. **Formular el problema en su formato estandarizado:**

Función objetivo con penalización:

$$Z' = 3x_1 + 2x_2 + 0\boldsymbol{S_1} + \boldsymbol{0e_2} - \boldsymbol{Ma_2} - \boldsymbol{Ma_3}$$

$$x_1 + x_2 + \boldsymbol{S_1} = 10$$

$$2x_1 + 3x_2 - \boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{a_2} = 15$$

$$x_1 + \boldsymbol{a_3} = 4$$

$$x_1, x_2, S_1, e_1, a_1, a_2 \geq 0$$

$$\boxed{Z' - 3x_1 - 2x_2 + \boldsymbol{Ma_2} + \boldsymbol{Ma_3} = \mathbf{0}}$$

2. **Revisar la Solución Básica Factible Inicial**

- **x1=0**
- **x2=0**
- **S1=10**
- e2=0
- a2=15
- a3=4
- **Z**=M·**15**+M·**4**=**19M**

Método de la Gran M

Función objetivo con penalización:

$$Z' - 3x_1 - 2x_2 + Ma_2 + Ma_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 + S_1 = 10$$
$$2x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 = 15$$
$$x_1 + a_3 = 4$$

3. **Renglón cero (Z'):**

$$Z_j = \sum (C_B \cdot a_{ij}) - C_j$$

(R0 Nuevo)=(R0 original)-M×(R2)-M×(R3)

	Z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	RHS	
	1	-3	-2	0	0	M	M	0	
-M[	0	2	3	0	-1	1	0	15	]
-M[	0	1	0	0	0	0	1	4	]
	1	**-3-3M**	**-2-3M**	**0**	**M**	**0**	**0**	**-19M**	

En maximización se acostumbra "penalizar" (restar) las filas donde aparecen las artificiales

Verificamos que las columnas a2 y a3 se hacen 0, reflejando que son variables básicas con valor de 0 en la fila del objetivo.

Método de la Gran M

Función objetivo con penalización:

$$Z' - 3x_1 - 2x_2 + \boldsymbol{Ma_2} + \boldsymbol{Ma_3} = \mathbf{0}$$

$$x_1 + x_2 + \boldsymbol{S_1} = 10$$
$$2x_1 + 3x_2 - \boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{a_2} = 15$$
$$x_1 + \boldsymbol{a_3} = 4$$

4. Primera tabla símplex

VB		Z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	RHS
***	R0	1	-3-3M	-2-3M	0	M	0	0	-19M
S1	R1	0	1	1	1	0	0	0	10
a2	R2	0	2	3	0	-1	1	0	15
a3	R3	0	1	0	0	0	0	1	4

SBFI
- S1=10
- a2=15
- a3=4

Iteraciones

- **Buscamos** en el **R0** el **más negativo** (recordar que estamos "maximizando")
- **Ve: X1**
- **Vs:** Cociente mínimo: s1:10/1=**10**; a2: 15/2=**7**; a3: 4/1=**4** → SALE **a3**

Método de la Gran M

5. Primera Iteración

Tabla Simplex Inicial

VB		Z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	RHS
***	R0	1	-3-3M	-2-3M	0	M	0	0	-19M
S1	R1	0	1	1	1	0	0	0	10
a2	R2	0	2	3	0	-1	1	0	15
a3 ↖ X1	R3	0	1	0	0	0	0	1	4

OBSR
R0= (3M+3)RP+R0
R1=-RP+R1
R2=RP*(-2)+R2
RP=RP

Tabla Simplex PRIMERA ITERACIÓN

VB		Z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	RHS
***	R0	1	0	-2-3M	0	M	0	3M+3	-7M+12
S1	R1	0	0	1	1	0	0	-1	6
a2	R2	0	0	3	0	-1	1	-2	7
X1	R3	0	1	0	0	0	0	1	4

- **Ve: X2** (MAS NEGATIVO)
- **Vs:** Cociente mínimo: s1:6/1=**6**; a2: 7/3=**2**; X1: 4/0=**IND** → SALE **a2**

Método de la Gran M

5. **Segunda Iteración**

Tabla Simplex PRIMERA ITERACIÓN

	VB		Z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	RHS
	***	R0	1	0	-2-3M	0	M	0	3M+3	-7M+12
	S1	R1	0	0	1	1	0	0	-1	6
a2↖	X2	R2	0	0	3	0	-1	1	-2	7
a3↖	X1	R3	0	1	0	0	0	0	1	4

OBSR
R0= (3M+2)RP+R0
R1=-RP+R1
RP=RP/3
****

Tabla Simplex SEGUNDA ITERACIÓN

VB		Z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	RHS
***	R0	1	0	0	0	-2/3	M+2/3	M+5/3	50/3
S1	R1	0	0	0	1	1/3	-1/3	-1/3	11/3
X2	R2	**0**	**0**	**1**	**0**	**-1/3**	**1/3**	**-2/3**	**7/3**
X1	R3	0	1	0	0	0	0	1	4

	VB		Z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	RHS
	***	R0	1	0	0	0	-2/3	M+2/3	M+5/3	50/3
s1↖	**e2**	R1	0	0	0	1	**1/3**	-1/3	-1/3	11/3
a2↖	**X2**	R2	0	0	1	0	-1/3	1/3	-2/3	7/3
a3↖	**X1**	R3	0	1	0	0	0	0	1	4

OBSR
R0= (2/3)RP+R0
RP=RP***3**
R2=RP***(**1/3**)**+R2
****

VB		Z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	RHS
***	R0	1	0	0	2	0	M	M+1	24
e2	R1	0	0	0	3	**1**	-1	-1	11
X2	R2	0	0	1	1	0	0	-1	6
X1	R3	0	1	0	0	0	0	1	4

x1=4,x2=6,Zmax=24

Ejemplo 2

- $(\leq) \rightarrow + s$
- $(\geq) \rightarrow - e$

1. **Formular el problema en su formato estandarizado:**

Maximizar $Z = 3x_1 + 2x_2$

S.a:

- (1) $x_1 + x_2 \leq 10$
- (2) $2x_1 + 3x_2 \geq 15$
- (3) $x_1 = 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

$$Z' = 3x_1 + 2x_2 + 0S_1 + 0e_2 - Ma_2 - Ma_3$$

$$x_1 + x_2 + S_1 = 10$$

$$2x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 = 15$$

$$x_1 + a_3 = 4$$

$$x_1, x_2, S_1, e_1, a_1, a_2 \geq 0$$

6. **Revisar la Solución Optimizada**

- x1=**4**
- x2=**6**
- Zmax=24

$(1)\ \mathbf{4} + \mathbf{6} = 10$

$(2)\ 2 * \mathbf{4} + 3 * \mathbf{6} = 26 > 15$

$(3)\ \mathbf{4} = 4$

Existe un excedente de 11 unidades, tal como se ve en la table simplex

DESAFIOS

Desafío 1

Maximizar Z=3x_1+2x_2

S.a:

- (1) $x_1 + x_2 \leq 10$
- (2) $-2x_1 - 3x_2 \leq -15$
- (3) $x_1 = 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

Desafío 2

$$Minimizar\ Z = 4x_1 + 5x_2$$

S.a:

$$3x_1 + x_2 \leq 27$$
$$x_1 + x_2 = 12$$
$$6x_1 + 4x_2 \leq 60$$

Desafío 3

$$\text{Minimizar} \quad W = x_1 + 3x_2,$$

sujeto a:

$$\begin{aligned}
&(1)\ x_1 + 2x_2 &&\geq 8,\\
&(2)\ 3x_1 + x_2 &&\leq 7,\\
&(3)\ x_1 - x_2 &&= 2,\\
&\quad\ x_1,\ x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Desafío 4

$$\text{Minimizar} \quad W = x_1 + 3x_2,$$

sujeto a:

$$\begin{aligned}
&(1)\; x_1 + 2x_2 \geq 8,\\
&(2)\; 3x_1 + x_2 \leq 7,\\
&(3)\; x_1 - x_2 = 2,\\
&\quad x_1,\ x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

- **Si al finalizar la tabla simple, en el R0 se ve una variable no básica** con **coeficiente 0**, significa que esa variable puede entrar sin cambiar el valor de la FO, mostrando hay un **óptimo alternativo**.

Desafío 5

1. *Construya el modelo matemático del siguiente enunciado, identifique la función objetivo, las variables de decisión, identifique las restricciones* **(20 puntos)**

   Ana es una estudiante de ingeniería con dos proyectos importantes por completar: uno en Programación y otro en Simulación de Sistemas. El objetivo de Ana es maximizar el rendimiento académico que obtendrá al completar ambos proyectos. El rendimiento que obtiene es proporcional al tiempo que dedica a cada proyecto, con las siguientes características:

   - *Cada hora dedicada al proyecto de Programación le genera* ***5 puntos*** *de rendimiento.*
   - *Cada hora dedicada al proyecto de Simulación de Sistemas le genera* ***7 puntos*** *de rendimiento.*

   Sin embargo, Ana tiene las siguientes limitaciones:

   - *Solo puede dedicar* ***12 horas*** *en total a los dos proyectos esta semana.*
   - *Debe dedicar al menos* ***4 horas*** *al proyecto de Programación para completarlo satisfactoriamente.*
   - *Debe dedicar al menos* ***3 horas*** *al proyecto de Simulación de Sistemas para cumplir con los requerimientos mínimos.*

2. Resuelva el modelo matemático empleando el método simplex **(50 puntos)**
3. Resuelva el modelo matemático empleando el método grafico **(30 puntos)**

Desafío 6

Maximizar

$$Z = 4x_1 \ + \ 5x_2 \ + \ 3x_3$$

Sujeto a las restricciones

1. $x_1 + x_2 + x_3 \ \leq \ 10$
2. $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \ = \ 15$
3. $x_1 + 4x_2 + 2x_3 \ \geq \ 12$