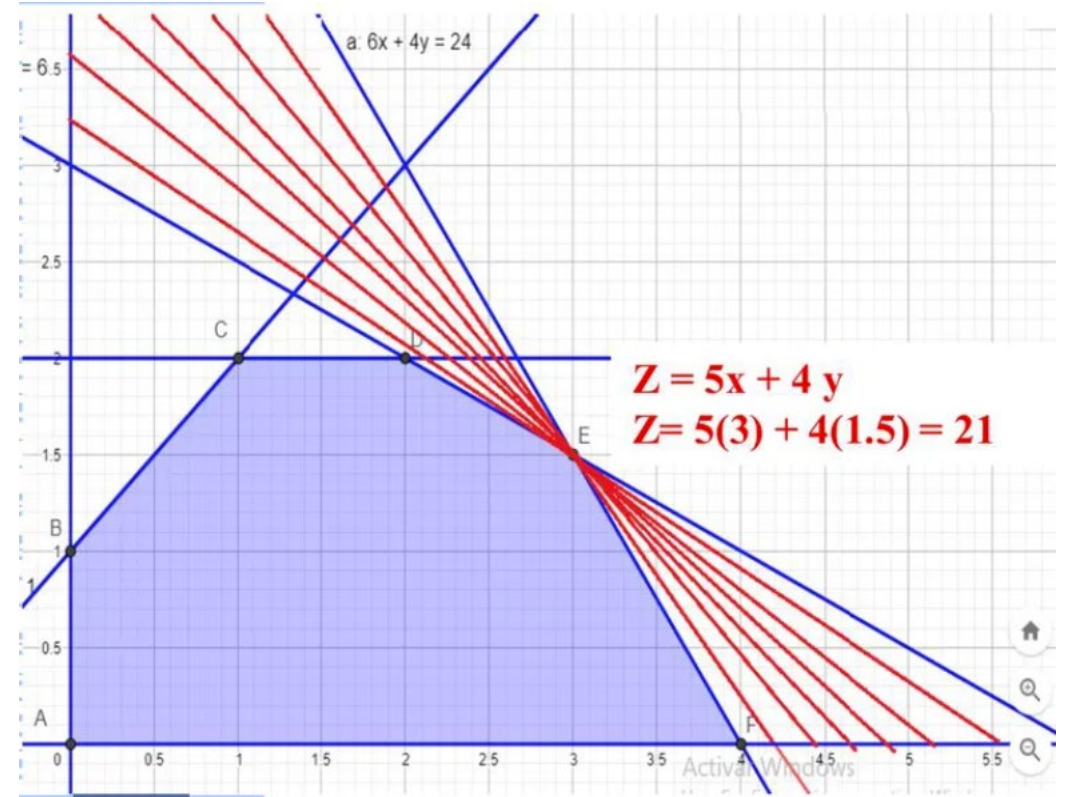


# 5. Análisis de sensibilidad:

- ❑ Margen de variación en los coeficientes de la función objetivo
- ❑ Sensibilidad de los recursos disponibles

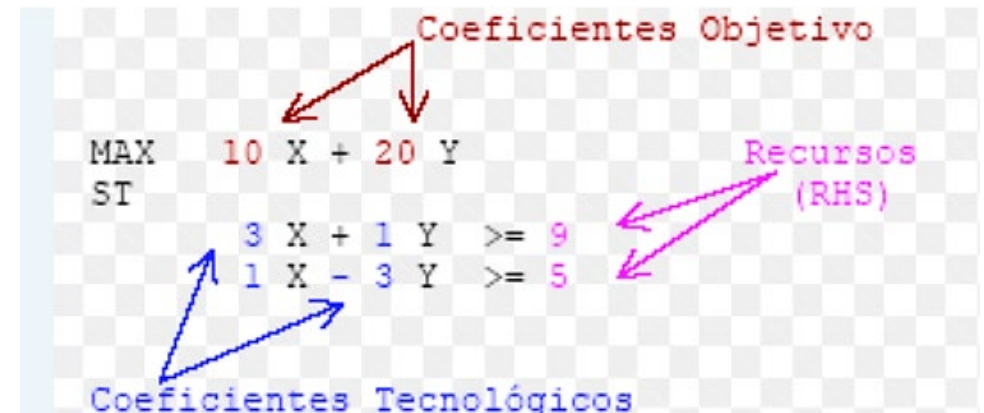
# Análisis de Sensibilidad

- Estudia el efecto que tendrían sobre la solución óptima encaso de que prevalecieran otras condiciones.
  - Variación en los parámetros de un modelo
- Permite evaluar la robustez de la solución y entender el impacto de incertidumbres en los datos del modelo



# Parámetros de Análisis

- ❖ **Coeficientes del objetivo ( $c_i$ ):** Impacto de cambios en los coeficientes de la función objetivo.
- ❖ **Coeficientes de las Restricciones ( $a_{ij}$ ):** Variaciones en los coeficientes de las restricciones.
- ❖ **Términos independientes ( $b_i$ ):** Efecto de modificar los **recursos** disponibles o límites de las restricciones.
- ❖ Para iniciar el análisis de sensibilidad al menos uno de los **parámetros** será modificado.



# Análisis de Sensibilidad – Coeficientes de la Función Objetivo ( $c_{ij}$ )

- Rango de sensibilidad para  $c_1$  es encontrar el intervalo de valores dentro del cual el coeficiente  $c_1$  puede variar sin cambiar la solución básica óptima
- Como Obtener los Limites?

Maximizar

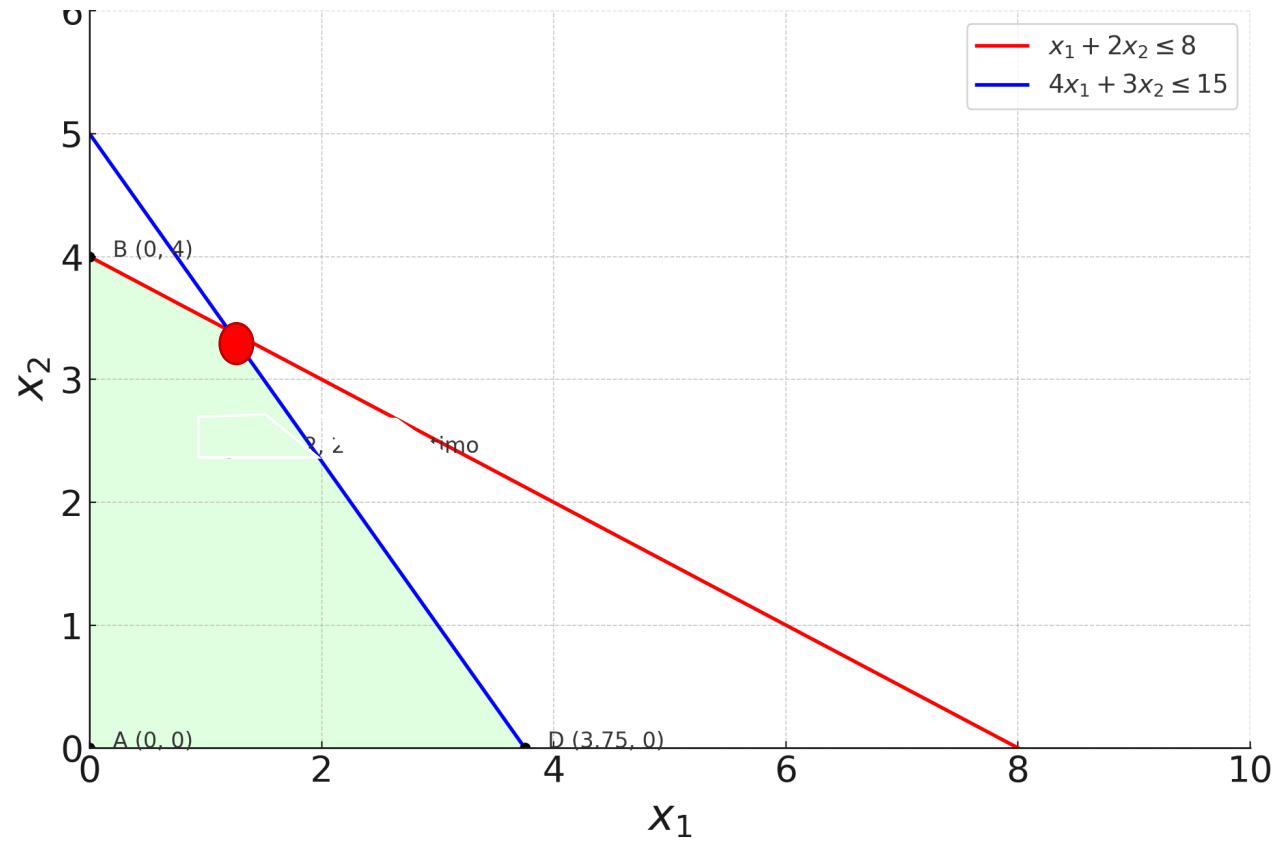
$$Z = 3x_1 + 5x_2$$

s.a.

●  $x_1 + 2x_2 \leq 8$

●  $4x_1 + 3x_2 \leq 15$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Punto	x1	x2	Z
A (0 0)	0	0	0
B (0 4)	0	4	20
C (1.2 , 3.4 )	1.2	17/5	20.6
D (3.75 0)	3 3/4	0	11.25

# Ejercicio empleando MS

$$\text{Maximizar } Z = 3x_1 + 5x_2$$

s. a.:

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 15$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

1. Formular el problema en su formato estandarizado:
- 2.

$$Z = 3x_1 + 5x_2 + 0s_1 + 0s_2$$

$$x_1 + 2x_2 + s_1 = 8$$

$$4x_1 + 3x_2 + s_2 = 15$$

## 2. Revisar la Solución Básica Factible Inicial

- $x_1 = 0$
- $x_2 = 0$
- $s_1 = 8$
- $s_2 = 15$
- $Z = 0$

## 3. Primera Tabla Simplex

$$Z - 3x_1 - 5x_2 - 0s_1 - 0s_2 = 0$$

			VD		VB		
VB	R	Z	X1	X2	S1	S2	RHS
	R0	1	-3	-5	0	0	0
s1	R1	0	1	2	1	0	8
s2	R2	0	4	3	0	1	15

## 4. Iteraciones

- Ve: X2
- Vs: CM → s1

$$\text{CM: } 8/2 = 4 ; 15/3 = 5$$

### 3. Tabla Simplex Original

VB	R		VD		VB		RHS
		Z	X1	X2	S1	S2	
	R0	1	-3	-5	0	0	0
x2	R1	0	1	2	1	0	8
s2	R2	0	4	3	0	1	15

- $R0 = RP \cdot 5 + R0$
- $RP = R1/2$
- $R2 = RP \cdot (-3) + R2$

$$Z = 3x_1 + 5x_2 + 0s_1 + 0s_2$$

$$x_1 + 2x_2 + s_1 = 8$$

$$4x_1 + 3x_2 + s_2 = 15$$

#### 4.1 Primera Iteración

VB	R		VD		VB		RHS
		Z	X1	X2	S1	S2	
	R0	1	-1/2	0	5/2	0	20
x2	R1	0	1/2	1	1/2	0	4
s2	R2	0	5/2	0	-3/2	1	3

- X1: 0
- X2: 4
- Z: 20

- s1: 0
- s2: 3

### 4. Iteraciones

- Ve: X1
- Vs: CM  $\rightarrow$  s2

$$CM: 4/2=2 ; 6/5=1.2$$

### 3. Tabla Primera Iteracion

VB	R		VD		VB		
		Z	X1	X2	S1	S2	RHS
	R0	1	-1/2	0	5/2	0	20
x2	R1	0	1/2	1	1/2	0	4
x1	R2	0	5/2	0	-3/2	1	3

- $R0 = RP * (1/2) + R0$
- $R1 = RP * (-1/2) + R1$
- $RP = R2 * (2/5)$

$$Z = 3x_1 + 5x_2 + 0s_1 + 0s_2$$

$$x_1 + 2x_2 + s_1 = 8$$

$$4x_1 + 3x_2 + s_2 = 15$$

### 4.1 Segunda Iteración

VB	R		VD		VB		
		Z	X1	X2	S1	S2	RHS
	R0	1	0	0	11/5	1/5	20.6
x2	R1	0	0	1	4/5	-1/5	17/5
x1	R2	0	1	0	-3/5	2/5	6/5

- X1: 1.2
- X2: 3.4
- Z: 20.6
- s1: 0
- s2: 0



# Análisis de sensibilidad al coeficiente C1

Maximizar  $Z = 3x_1 + 5x_2$

s. a.:

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 15$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

VB	R	Z	VD		VB		RHS
			X1	X2	S1	S2	
	R0	1	0	0	11/5	1/5	20.6
x2	R1	0	0	1	4/5	-1/5	17/5
x1	R2	0	1	0	-3/5	2/5	6/5

Variables  
básicas:  
x1, x2

Variables NO  
básicas: S1,  
S2

- X1: 1.2
- X2: 3.4
- Z: 20.6
- s1: 0
- s2: 0

$$(Z_j - c_j)_{\text{nuevo}} = (Z_j - c_j)_{\text{actual}} + (c_1^{\text{nuevo}} - c_1^{\text{actual}}) \cdot a$$

$$(Z_{s1} - c_{s1})_{\text{nuevo}} = (Z_{s1} - c_{s1})_{\text{actual}} + (c_1^{\text{nuevo}} - c_1^{\text{actual}})a$$

- $a$  es el **coeficiente** de la variable x1 en VNB

# Análisis de sensibilidad al coeficiente C1

Maximizar  $Z = 3x_1 + 5x_2$

s. a.:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

VB	R	Z	VD		VB		RHS
			X1	X2	S1	S2	
	R0	1	0	0	11/5	1/5	20.6
x2	R1	0	0	1	4/5	-1/5	17/5
x1	R2	0	1	0	-3/5	2/5	6/5

- X1: 1.2
- X2: 3.4
- Z: 20.6
- s1: 0
- s2: 0

## Evaluación sobre la variable no básica s1

$$(Z_{s1} - c_{s1})_{nuevo} = (Z_{s1} - c_{s1})_{actual} + (c_1^{nuevo} - c_1^{actual})a \leq 0 \text{ (en Maximización)}$$

$$(Z_{s1} - c_{s1})_{actual} = 11/5 \quad c_1^{actual} = 3 \quad a = -3/5$$

$$(Z_{s1} - c_{s1})_{nuevo} = 11/5 + (c_1^{nuevo} - 3) \left( -\frac{3}{5} \right) \leq 0$$

# Análisis de sensibilidad al coeficiente C1

Maximizar  $Z = 3x_1 + 5x_2$

s. a.:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

VB	R	Z	VD		VB		RHS
			X1	X2	S1	S2	
	R0	1	0	0	11/5	1/5	20.6
x2	R1	0	0	1	4/5	-1/5	17/5
x1	R2	0	1	0	-3/5	2/5	6/5

- X1: 1.2
- X2: 3.4
- Z: 20.6
- s1: 0
- s2: 0

$$(Z_{s1} - c_{s1})_{nuevo} = (Z_{s1} - c_{s1})_{actual} + (c_1^{nuevo} - c_1^{actual})a \leq 0 \text{ (en Maximizacion)}$$

$$(Z_{s1} - c_{s1})_{nuevo} = 11/5 + (c_1^{nuevo} - 3) \left(-\frac{3}{5}\right) \leq 0$$

$$\begin{aligned} (c_1^{nuevo} - 3) \left(-\frac{3}{5}\right) &\leq -11/5 \\ -\frac{3}{5}c_1^{nuevo} &\leq -\frac{11}{5} - \frac{9}{5} \end{aligned}$$

$$c_1^{nuevo} \geq \frac{20}{5} * \frac{5}{3}$$

$$c_1^{nuevo} \geq \frac{20}{3} \approx 6.67$$

# Análisis de sensibilidad al coeficiente C1

## Evaluación sobre la variable no básica $s_2$

Maximizar  $Z = 3x_1 + 5x_2$

s. a.:

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 15$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

VB	R	Z	VD		VB		RHS
			X1	X2	S1	S2	
	R0	1	0	0	11/5	1/5	20.6
x2	R1	0	0	1	4/5	-1/5	17/5
x1	R2	0	1	0	-3/5	2/5	6/5

$$(Z_{s2} - c_{s2})_{nuevo} = (Z_{s2} - c_{s2})_{actual} + (c_1^{nuevo} - c_1^{actual})a \leq 0 \text{ (en Maximización)}$$

$$(Z_{s1} - c_{s1})_{actual} = 1/5$$

$$c_1^{actual} = 3$$

$$a = 2/5$$

$$(Z_{s2} - c_{s2})_{nuevo} = 1/5 + (c_1^{nuevo} - 3) \left( \frac{2}{5} \right) \leq 0$$

# Evaluación sobre la variable no básica $s_2$

Maximizar  $Z = 3x_1 + 5x_2$

s. a.:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

VB	R	Z	VD		VB		RHS
			X1	X2	S1	S2	
	R0	1	0	0	11/5	1/5	20.6
x2	R1	0	0	1	4/5	-1/5	17/5
x1	R2	0	1	0	-3/5	2/5	6/5

- X1: 1.2
- X2: 3.4
- Z: 20.6
- s1: 0
- s2: 0

$$(Z_{s2} - c_{s2})_{nuevo} = (Z_{s2} - c_{s2})_{actual} + (c_1^{nuevo} - c_1^{actual})a \leq 0 \text{ (en Maximización)}$$

$$(Z_{s1} - c_{s1})_{nuevo} = 1/5 + (c_1^{nuevo} - 3) \left( \frac{2}{5} \right) \leq 0$$

$$(c_1^{nuevo} - 3) \left( \frac{2}{5} \right) \leq -1/5$$

$$\frac{2}{5} c_1^{nuevo} \leq -\frac{1}{5} + \frac{6}{5}$$

$$c_1^{nuevo} \leq 1 * \frac{5}{2}$$

$$c_1^{nuevo} \leq \frac{5}{2} \approx 2.5$$

# Análisis de sensibilidad al coeficiente C1



$$\text{Maximizar } Z = 3x_1 + 5x_2$$

s. a.:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

VB	R	Z	VD		VB		RHS
			X1	X2	S1	S2	
	R0	1	0	0	11/5	1/5	20.6
x2	R1	0	0	1	4/5	-1/5	17/5
x1	R2	0	1	0	-3/5	2/5	6/5

- X1: 1.2
- X2: 3.4
- Z: 20.6
- s1: 0
- s2: 0

$$c_1^{\text{nuevo}} \geq \frac{20}{3} \approx 6.67$$

$$c_1^{\text{nuevo}} \leq \frac{5}{2} \approx 2.5$$

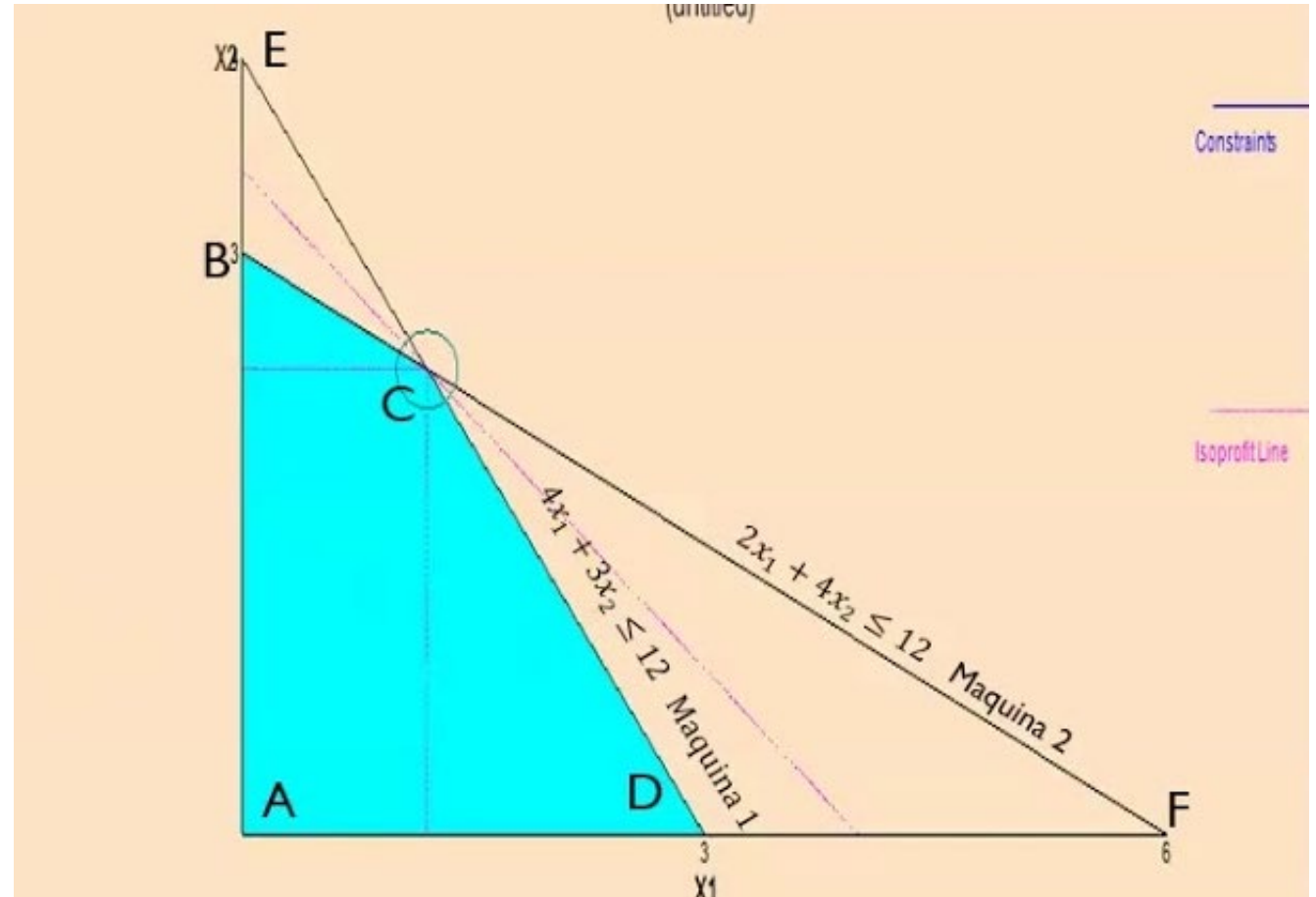
- Para que s1 no entre a la base:
- Para que s2 no entre a la base:
- La solución básica actual :  $x_1=6/5$ ,  $x_2=17/5$   $Z = 20.6$  , solo es válida si  $c_1=3$
- **No hay ningún rango de sensibilidad permitido**, porque las dos **condiciones** son **incompatibles**.
- La solución actual es **muy sensible a cambios en c1**.

# Análisis Post-óptimo

Precios Sombra

# Precio Sombra

- El precio sombra mide cuánto se **incrementaría** el beneficio (o se reduciría el costo) si se aumenta la **disponibilidad** de un recurso **escaso** en una unidad.
- **Cambio** en el valor óptimo de la función objetivo por unidad **adicional** de **recurso** disponible





# Utilidad

- Decisiones en la asignación de recursos
- Evaluación de la eficiencia de los Recursos
- Miden el valor marginal de los recursos (  $y_i^*$  )
- Análisis de sensibilidad

# Ejemplo

- Una empresa produce dos Productos galletas y queques ( P1 , P2). Las ganancias que generan estos productos por unidad son: primer producto Bs. 30, mientras que el segundo genera una ganancia de Bs. 20.
- Los datos de recursos disponibles y los requerimientos por producto son los siguientes:

Recurso	Producto 1	Producto 2	Cantidad Disponible
Ganancia por unidad (Bs)	30	20	50
Horas de Trabajo (Hrs)	2	4	120
Material ( Kg)	3	1	90

# Construcción del modelo

$$\text{Max } Z = 30 \text{ P1} + 20 \text{ P2}$$

Sujeto a:

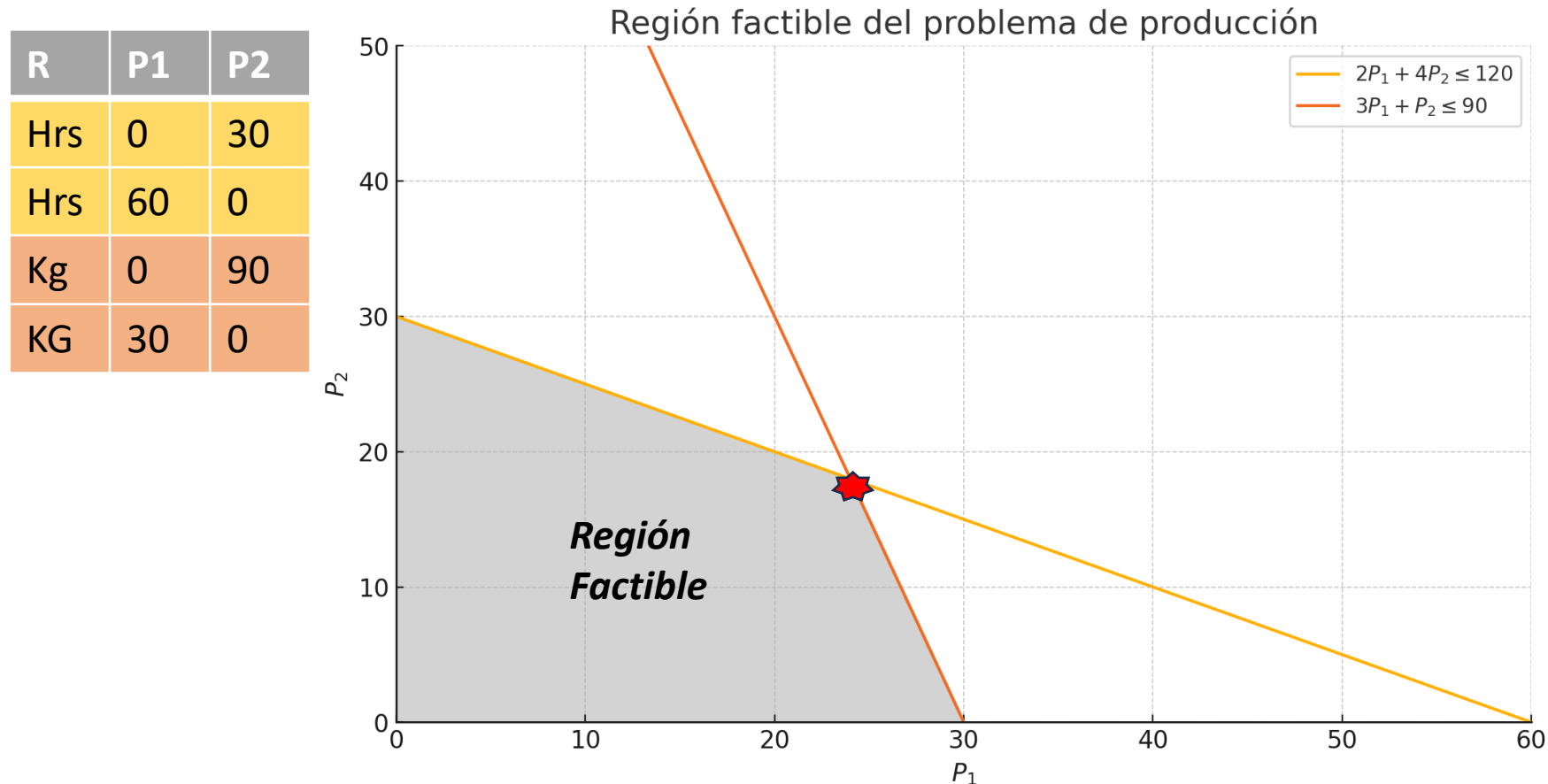
- Horas de trabajo:  $2 \text{ P1} + 4 \text{ P2} \leq 120$
- Material:  $3 \text{ P1} + 1 \text{ P2} \leq 90$
- No negatividad:  $\text{P1}, \text{P2} \geq 0$

# Sol. Met. Grafico

Horas de trabajo:  $2P_1 + 4P_2 \leq 120$

Material:  $3P_1 + 1P_2 \leq 90$

No negatividad:  $P_1, P_2 \geq 0$



Max  $Z = 30P_1 + 20P_2$

R	P1	P2	Z
Hrs	0	30	600
Hrs	30	0	900
Kg	24	18	1080

# Análisis de Precio Sombra

# Análisis del precio Sombra

## Paso 1: Resolución del Sistema con Ajuste de Horas de Trabajo

- Se incrementan las horas de trabajo a **121**, y se resuelve el sistema de ecuaciones
- Restricción con la hora extra
  - $2 P1 + 4 P2 = 121$
  - $3 P1 + 1 P2 = 90$

Despejamos las variables con estos valores y con los valores de P1 y P2 se calcula la ganancia óptima ajustada.

### Modelo Original

- $\text{Max } Z = 30 \text{ P1} + 20 \text{ P2}$

Sujeto a:

- Horas de trabajo:  $2 \text{ P1} + 4 \text{ P2} \leq 120$
- Material:  $3 \text{ P1} + 1 \text{ P2} \leq 90$
- No negatividad:  $\text{P1}, \text{P2} \geq 0$

- $R1 : 2 P1 + 4 P2 = 121$

- $R2 : 3 P1 + 1 P2 = 90$

- $R1 : 2 P1 + 4 P2 = 121$

- $R2 * 4 : 12 P1 + 4 P2 = 360$

- $R2 - R1: 10P1 + 0 = 239$

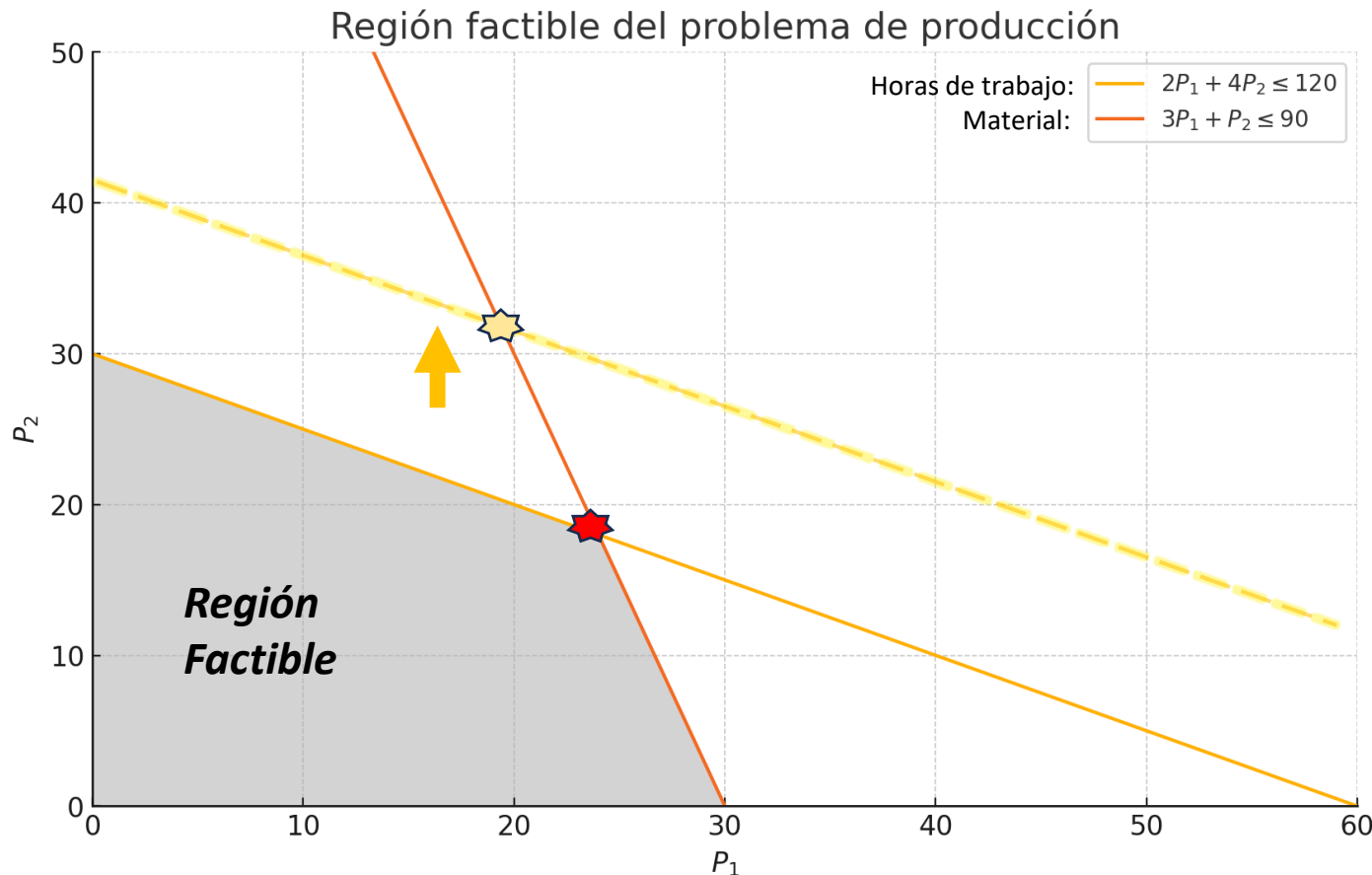
- $P1 = 23.9$

- $P2: (121 - 2 * 23.9) / 4$

- $P2 = 18.3$

□ Nuevo punto de intersección:  
P1=23.9 y P2=18.3

# Paso 1: Resolución del Sistema con Ajuste de Horas de Trabajo



## Modelo Ajustado

$$\text{Max } Z = 30 \text{ P1} + 20 \text{ P2}$$

Sujeto a:

- Horas de trabajo:  $2 \text{ P1} + 4 \text{ P2} \leq 121$
- Material:  $3 \text{ P1} + 1 \text{ P2} \leq 90$
- No negatividad:  $\text{P1}, \text{P2} \geq 0$

+1)

- ❑ Nuevo punto de intersección:  
 $P1=23.9$  y  $P2=18.3$
- ❑ Nueva ganancia máxima:  
 $Z=1083$
- ❑ Diferencia de ganancia :  
 $Z_{\text{org}} = 1080$   
 $\Delta Z = 3$

*Cada hora adicional de trabajo incrementa la ganancia óptima en Bs. 3*



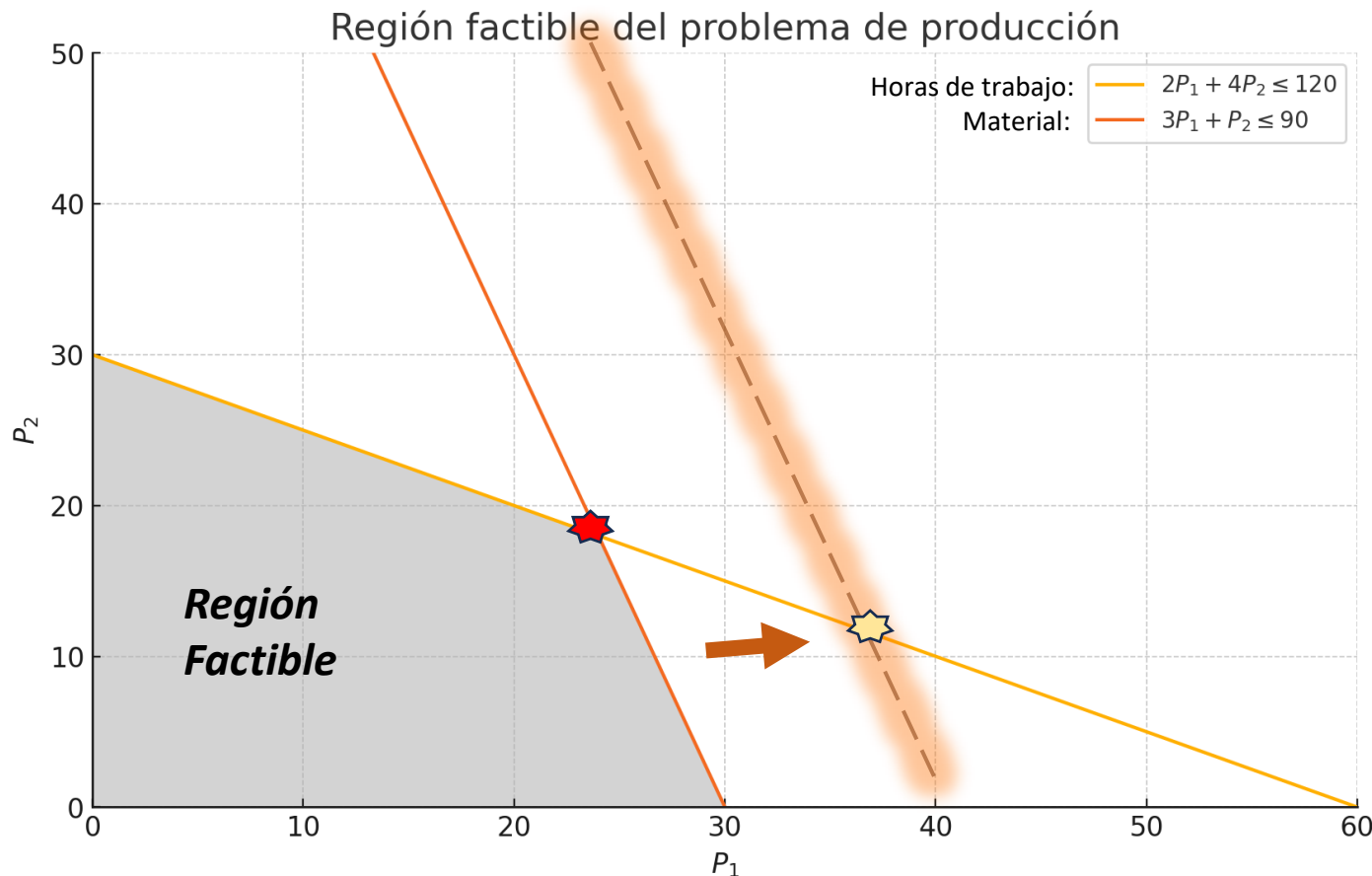
# Análisis del precio Sombra

## Paso 2: Resolución del Sistema con Ajuste de **Material**

- Se incrementa el material a **90**, y se resuelve el sistema de ecuaciones
- Restricción con el material extra
  - $2 P1 + 4 P2 = 120$
  - $3 P1 + 1 P2 = 91$

Calculamos la nueva intersección y con los nuevos valores calculamos la FO nueva.

# Paso 2: Resolución del Sistema con Ajuste de Material (de 90 a 91)



## Modelo Ajustado

$$\text{Max } Z = 30 \text{ P1} + 20 \text{ P2}$$

Sujeto a:

- Horas de trabajo:  $2 \text{ P1} + 4 \text{ P2} \leq 120$
- Material:  $3 \text{ P1} + 1 \text{ P2} \leq 91$
- No negatividad:  $\text{P1}, \text{P2} \geq 0$

- ❑ Nuevo punto de intersección:  
 $P1=24.4$  y  $P2=17.8$
- ❑ Nueva ganancia máxima:  
 $Z=1088$
- ❑ Diferencia de ganancia :  
 $Z_{\text{opt}} = 1080$   
 $\Delta Z = 8$

Cada Kg de material adicional incrementa la ganancia óptima en Bs. 8

# Análisis Final

- Convendría **aumentar** primero el **material**, ya que por cada unidad adicional se genera **8 unidades de ganancia**, en contraposición del incremento de hora de trabajo que genera unidades de ganancia.
- Si es posible aumentar horas de trabajo o material, estas unidades adicionales agregan valor hasta un punto específico, después del cual ya no se justifica el incremento.

# Análisis de Sensibilidad

# Análisis de Sensibilidad

- Es explorar los cambios en los **coeficientes de la función objetivo** y en las **disponibilidades de los recursos** y como estos cambios afectan la solución óptima y la ganancia.

# Análisis de Sensibilidad

- **Función Objetivo: Maximizar  $Z = 30 P1 + 20 P2$**
- **Restricciones:**
  - ✓ Horas de trabajo:  $2 P1 + 4 P2 \leq 120$
  - ✓ Material:  $3 P1 + 1 P2 \leq 90$
  - ✓ No negatividad:  $P1, P2 \geq 0$

Solución óptima inicial, que maximiza la ganancia:

- ✓  $(P1, P2) = (24, 18)$
- ✓  $Z = 1080$  (ganancia)

# Paso 1: Coeficientes de la FO

## Cambios en los Coeficientes de la Función Objetivo

$$\text{Maximizar } Z = 30 \text{ P1} + 20 \text{ P2}$$

- Analizar el impacto de 30 y 20 es analizar el impacto en la ganancia por unidad producida.
- Evaluaremos como altera la ganancia si cambiamos estos coeficientes

# Paso 1: Coeficientes de la FO

## Cambios en los Coeficientes de la Función Objetivo

$$\text{Maximizar } Z = 30 \text{ P1} + 20 \text{ P2}$$

$$\longrightarrow \text{P2} = \frac{\text{Pendientes}}{-30/20 \text{ P1}}$$

$$\checkmark \text{ Horas de trabajo: } 2 \text{ P1} + 4 \text{ P2} \leq 120$$

$$\longrightarrow \text{P2} = 30 - \frac{1}{2} \text{ P1}$$

$$\checkmark \text{ Material: } 3 \text{ P1} + 1 \text{ P2} \leq 90$$

$$\longrightarrow \text{P2} = 90 - 3 \text{ P1}$$

$$\checkmark \text{ No negatividad: } \text{P1}, \text{P2} \geq 0$$

Esta comparación asegurará que el punto óptimo no se desplace fuera de la región factible al ajustar los coeficientes de P1 y P2.

Para que el punto óptimo siga siendo (24,18) la relación entre los coeficientes de la FO debe estar en el rango de 0,5 a 3. Esto implica que:

- Cuando C1=30, entonces C2 puede variar entre 10 y 60.
- Cuando C2=20 entonces C1 puede variar entre 10 y 60.

$$-3 \leq -\frac{30}{20} \leq -\frac{1}{2}$$

$$0,5 \leq \frac{30}{20} \leq 3$$

$$0,5 \leq \frac{C1}{C2} \leq 3$$



## Paso 2: Análisis de las Restricciones

- Se aplica el análisis de los **precios sombra** (calculados anteriormente) para ver el grado de impacto en la ganancia óptima por cada unidad adicional de recursos.

Horas de trabajo:  $2 \text{ P1} + 4 \text{ P2} \leq (120 + 1)$

Material :  $3 \text{ P1} + 1 \text{ P2} \leq (90 + 1)$

- Cada Kg de material adicional incrementa la ganancia óptima en Bs. 8
- Cada hora adicional de trabajo incrementa la ganancia óptima en Bs. 3

# Análisis Final

## **1. Coeficientes de la Función Objetivo:**

La ganancia por unidad de P1 y P2 puede variar dentro de 10 y 60 sin cambiar el plan de producción óptimo.

Esto ayuda en la toma de decisiones de precios de productos.

## **2. Disponibilidad de Recursos:**

Los precios sombra indican el valor de recursos adicionales.

# Preguntas

