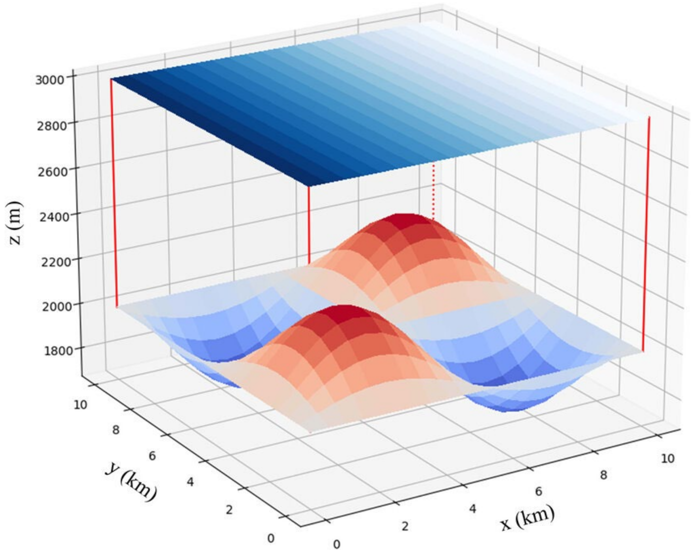
Teoría de la Dualidad

2.4. Problemas Primal y Dual.

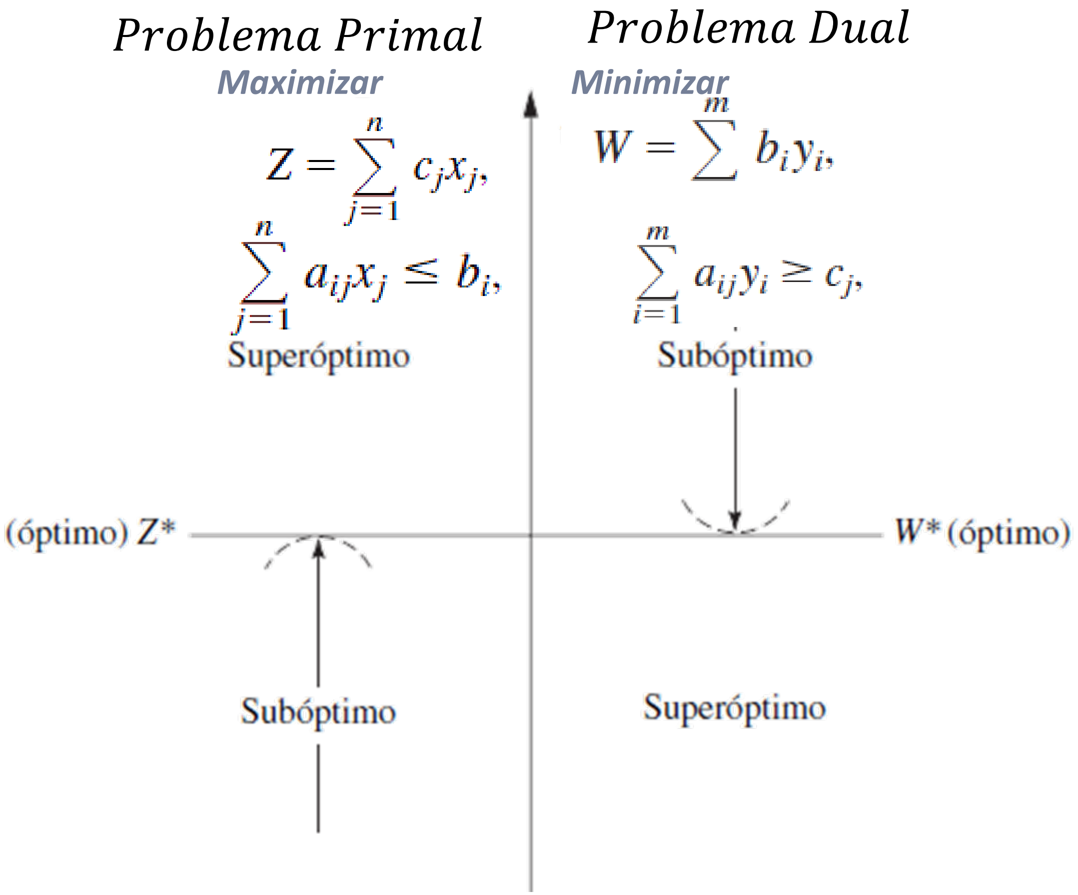
- Problema primal, problema original de optimización lineal
- Problema dual, derivado del primal, con estructura asociada
- Todo problema de programación lineal tiene un problema dual.
- La teoría de dualidad tiene un papel central en el análisis de sensibilidad
- **Dualidad fuerte:** Si hay solución óptima en uno, existe en el otro y sus valores son iguales
- **Aplicaciones**
  - Evaluación económica de recursos.
  - Análisis de sensibilidad.
  - Diseño de algoritmos más eficientes.
  - Interpretación estratégica en negocios e ingeniería.



Correspondencia Primal y Dual.

Correspondencia

Elemento del Primal	Dual
Maximización	Minimización
Nro Variables de decisión (xj)	Numero de restricciones (Restricción j-ésima)
Restricción i-ésima	Variable dual yi
Coeficientes de la función objetivo	Términos del lado derecho
≤	≥



Maximizar $\quad Z = 3x_1 + 5x_2,$

sujeta a

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad\quad\; &\leq 4 \\
2x_2 &\leq 12 \\
3x_1 + 2x_2 &\leq 18
\end{aligned}
$$

y $\quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$

Minimizar $\quad W = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3,$

sujeta a

$$
\begin{aligned}
y_1 \quad\quad + 3y_3 &\geq 3 \\
2y_2 + 2y_3 &\geq 5
\end{aligned}
$$

y

$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0.$

Problema primal
en forma de matriz

Maximizar $\quad Z = [3, 5]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$

sujeta a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Problema dual
en forma de matriz

Minimizar $\quad W = [y_1, y_2, y_3]\begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$

sujeta a

$$[y_1, y_2, y_3]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \geq [3, 5]$$

y

$$[y_1, y_2, y_3] \geq [0, 0, 0].$$

VD: X1, X2

TABLA 6.15 Una form primal-dual del ejemplo de terapia de radiación

FO: -Z

Restricciones (3) : C, E R

Problema primal		*Problema dual*	
Maximizar $-Z = -0.4x_1 - 0.5x_2$,		Minimizar $W = 2.7y_1 + 6y_2 + 6y_3'$,	
sujeta a		sujeta a	
(C)	$0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7$	$y_1 \geq 0$	(C)
(E)	$0.5x_1 + 0.5x_2 = 6$	y_2 no restringida en signo	(E)
(R)	$0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 6$	$y_3' \leq 0$	(R)
y		y	
(C)	$x_1 \geq 0$	$0.3y_1 + 0.5y_2 + 0.6y_3' \geq -0.4$	(C)
(C)	$x_2 \geq 0$	$0.1y_1 + 0.5y_2 + 0.4y_3' \geq -0.5$	(C)

Matriz de coeficientes

0,3	0,1
0,5	0,5
0,6	0,4

M. Variables

X1	X2

M. Term Ind.

2,7
6
6

0,3	0,5	0,6
0,1	0,5	0,4

Ejercicio: Problema Primal

$$Maximizar\ Z = 3x_1 + 5x_2$$
$$s.a.:$$
$$x_1 \leq 4$$
$$2x_2 \leq 12$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

1. **Formular el problema en su formato**
2. **estandarizado:**

Z=3x_1+5x_2+0s_1+0s_2+0s_3

$$x_1 + S_1 = 4$$
$$2x_2 + S_2 = 12$$
$$3x_1 + 2x_2 + S_3 = 18$$

2. **Revisar la Solución Básica Factible Inicial**

- x_1 = 0
- $x_2 = 0$

- $s_1 = 4$
- $s_2 = 12$
- $s_3 = 18$

- Z=0

3. **Primera Tabla Simplex**

Z−3x_1−5x_2−0s_1−0s_2−0s_3 $= 0$

			VD		VB			
VB	**R**	**Z**	**X1**	**X2**	**S1**	**S2**	**S3**	**RHS**
	R0	1	-3	-5	0	0	0	0
s1	R1	0	1	0	**1**	0	0	4
s2	R2	0	0	2	0	**1**	0	12
s3	R2	0	3	2	0	0	**1**	18

4. **Iteraciones**

- Ve: X2
- Vs: CM ➔ s2

CM: 4/0= ind ; **12/2=6** ; 18/2=9

3. Tabla Simplex Original

			VD		VB			
VB	**R**	**Z**	**X1**	**X2**	**S1**	**S2**	**S3**	**RHS**
	R0	1	-3	-5	0	0	0	0
s1	R1	0	1	0	**1**	0	0	4
s2	R2	0	0	2	0	**1**	0	12
s3	R3	0	3	2	0	0	**1**	18

- R0=RP***5**+R0
- R1=****
- **RP=R2/2**
- R3=RP***(-2)**+R3

Z=3x_1+5x_2+0s_1+0s_2+0s_3

$$x_1 + S_1 = 4$$
$$2x_2 + S_2 = 12$$
$$3x_1 + 2x_2 + S_3 = 18$$

4.1 Primera Iteración

			VD		VB			
VB	**R**	**Z**	**X1**	**X2**	**S1**	**S2**	**S3**	**RHS**
	R0	1	-3	0	0	5/2	0	30
s1	R1	0	1	0	**1**	0	0	4
x2	R2	0	0	1	0	**1/2**	0	6
s3	R2	0	3	0	0	-1	**1**	6

- X1: 0
- X2: 6
- Z:30

- s1: 4
- s2: 0
- s3:6

4.1 Primera Iteración

VB	R	Z	X1	X2	S1	S2	S3	RHS
			VD		VB			
	R0	1	-3	0	0	5/2	0	30
s1	R1	0	1	0	1	0	0	4
x2	R2	0	0	1	0	**1/2**	0	6
s3	R2	0	3	0	0	-1	**1**	6

- X1: 0
- X2: 6
- Z:30

- s1: 4
- s2: 0
- s3:6

$Z=3x_1+5x_2+0s_1+0s_2+0s_3$

$$x_1 + S_1 = 4$$
$$2x_2 + S_2 = 12$$
$$3x_1 + 2x_2 + S_3 = 18$$

- Ve: **x1**
- Vs: CM ➔ s3

CM: 4/1= 4 ; 6/0=! ; **6/3=2**

4.1 Segunda Iteración

VB	R	Z	X1	X2	S1	S2	S3	RHS
			VD		VB			
	R0	1	0	0	0	3/2	1	36
s1	R1	0	0	0	1	1/3	-1/3	2
x2	R2	0	0	1	0	1/2	0	6
x1	R2	0	1	0	0	-1/3	1/3	2

R0=RP*3+R0
R1=RP*(-1)+R1
****
RP=RP/3

- X1: 2 s1: 2
- X2: 6 s2: 0
- **Z:36** s3:0

Problema Dual

Problema primal

$$Maximizar\ Z = \mathbf{3}x_1 + \mathbf{5}x_2$$
$s.a.:$

(1) $x_1 \leq 4$

(2) $2x_2 \leq 12$

(3) $3x_1 + 2x_2 \leq 18$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Problema Dual

$$Minimizar\ W = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$$

$s.a.:$

(1) $y_1 + 0y_2 + 3y_3 \geq \mathbf{3}$

(2) $0y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq \mathbf{5}$

$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$

Matriz de coeficientes A

x1	x2
1	0
0	2
3	2

M. Term Ind.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{4} \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

M. VNB.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x1} \\ x2 \end{bmatrix}$$

M. Coef FO

$$\begin{bmatrix} \mathbf{3} \\ 5 \end{bmatrix}$$

Matriz de coeficientes A^T

1	**0**	**3**
0	2	2

$$Maximizar \quad -W = -4y_1 - 12y_2 - 18y_3 + Ma1 + Ma2$$

Solución del Dual

$$s.a.:$$

$$\textbf{(1)} \quad y_1 + 0y_2 + 3y_3 - e_1 + a_1 = 3$$

$$\textbf{(2)} \quad 0y_1 + 2y_2 + 2y_3 - e_2 + a_2 = 5$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$$

$$, e_1, e_2, a_1, a_3 \geq 0$$

Renglón 0: -1-2M, 4-M, 12-2M, 18-5M, M, M, 0, 0, -8M

Tabla Simplex Original

VB	R		VD					VB		
		W	y1	y2	y3	e1	e2	a1	a2	RHS
	R0	1-2M	4-M	12-2M	18-5M	M	M	0	0	-8M
a1	R1	0	1	0	3	-1	0	1	0	3
a2	R2	0	0	2	2	0	-1	0	1	5

Solución del Dual

Tabla Simplex Original

VB	R	W	y1	y2	y3	e1	e2	a1	a2	RHS
			VD					VB		
	R0	1-2M	4-M	12-2M	18-5M	M	M	0	0	-8M
a1	R1	0	1	0	3	-1	0	1	0	3
a2	R2	0	0	2	2	0	-1	0	1	5

- R0=RP*(5M-18)+R0
- RP=R1/3
- R2=RP*(-2)+R2

Primera Iteración

VB	R	W	y1	y2	y3	e1	e2	a1	a2	RHS
			VD					VB		
	R0	1-2M	2/3M-2	12-2M	0	-2/3M+6	M	5/3M-6	0	-3M-18
y3	R1	0	1/3	0	1	-1/3	0	1/3	0	1
a2	R2	0	-2/3	2	0	2/3	-1	-2/3	1	3

$W = 18$

- Y1: 0
- Y2: 0
- Y3:1
- e1: 0
- e2: 0
- a1:0
- a2:3

Solución del Dual

Primera Iteración

VB	R	W	y1	y2	y3	e1	e2	a1	a2	RHS
			VD					VB		
VB	R	W	y1	y2	y3	e1	e2	a1	a2	RHS
	R0	1-2M	2/3M-2	12-2M	0	-2/3M+6	M	5/3M-6	0	-3M-18
y3	R1	0	1/3	0	1	-1/3	0	1/3	0	1
y2	R2	0	-2/3	2	0	2/3	-1	-2/3	1	3

- R0=RP*(2M-12)+R0
- R1=****
- **RP=R2/2**

VB	R	W	y1	y2	y3	e1	e2	a1	a2	RHS
			VD					VB		
VB	R	W	y1	y2	y3	e1	e2	a1	a2	RHS
	R0	1-2M	2	0	0	2	12	M-2	M-6	-36
y3	R1	0	1/3	0	1	-1/3	0	1/3	0	1
y2	R2	0	-1/3	1	0	1/3	-1/2	-1/3	1/2	3/2

$$-W = -36$$

- Y1: 0
- Y2: 3/2
- **Y3:1**

- e1: 0
- e2: 0
- a1:0
- **a2:0**

e1=2/3M-4-2/3M+6=2

Problema Dual

Problema primal

$$Maximizar\ Z = \mathbf{3}x_1 + \mathbf{5}x_2$$
$s.a.:$

(1) $x_1 \leq 4$

(2) $2x_2 \leq 12$

(3) $3x_1 + 2x_2 \leq 18$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

- **X1: 2**
- **X2: 6**

- s1: 2
- s2: 0
- s3:0

$$\boldsymbol{Z = 36}$$

Factibilidad Primal

Problema Dual

$$Minimizar\ W = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$$
$s.a.:$

(1) $y_1 + 0y_2 + 3y_3 \geq \mathbf{3}$

(2) $0y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq \mathbf{5}$

$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$

- Y1: 0
- Y2: 3/2
- **Y3:1**

- e1: 0
- e2: 0
- a1:0
- **a2:0**

$$\boldsymbol{W = 36}$$

Factibilidad Dual

Propiedades de la Dualidad

1. Factibilidad Primal y Dual
   - Revisar si las soluciones cumplen las restricciones
2. Optimalidad Complementaria

$$\mathbf{cx^* = y^*b.}$$

C*x= 36 = y*b

3. Igualdad de Valores Objetivo $\boldsymbol{Z = 36}$ $\boldsymbol{W = 36}$

Desafios

- De los problemas del ultimo desafío encuentre el Dual en cada caso
- Investigue que significa la Dualidad débil y que significa la dualidad fuerte