2. Método Simplex

Método Simplex

- Procedimiento general para resolver problemas de PL
- Procedimiento **algebraico**, con **fundamentos geométricos**
- El método analiza solo las soluciones FEV (Soluciones en los vértices)
  - Solución inicial, **"solución básica factible"**, en el origen, VD=0
- Es un algoritmo **iterativo**
  - Se mueve de un **vértice del espacio factible** al siguiente
  - **Restricción**: El problema debe tener **soluciones factibles** en los vértices
- Desarrollado por Geroge Dantzing en 1947

Es un algoritmo iterativo que parte de una solución básica factible y se mueve de un vértice del espacio factible al siguiente, buscando mejorar la solución hasta que se alcanza el óptimo.

Metodología M. Simplex

1. **Formular el problema en su forma estandarizado**:
   - Expresar la FO y las restricciones en forma de **igualdades**, introduciendo variables de s/e si es necesario → **Ecuación frontera de restricción**
   - Asegurarse de que todas las variables de **decisión**, incluyendo las de **holgura**, y **exceso** sean **mayores o iguales a cero** (no negativas)

Variables Básicas

Variables de Holgura Slack, (S)	Variable de Exceso, Excess, (e)
se usa en las restricciones del tipo ≤	Se usa en restricciones del tipo ≥
Representa la cantidad de recurso sobrante o no utilizado	Representa el exceso sobre un límite o valor mínimo

- s: (≤)
- e:.(≥)

Metodología M. Simplex

- 2. **Revisa la Solución Básica Factible Inicial:** El punto de partida del Método Simplex que satisface todas las restricciones del problema

❖ **Solución Básica**

  - Las **Variables** de **Decisión** (**variables no básicas**) se fijan en cero
  - Las **variables restantes** (**variables básicas**) se determinan resolviendo el sistema resultante.

❖ **Solución Básica Factible:** Al resolver el sistema de restricciones, las variables básicas son no negativas y cumplen todas las restricciones del problema.

Si no se cuenta con una SBFI, es IMPOSIBLE iniciar el método Simplex ***DIRECTAMENTE***

Metodología Método Simplex

3. **Construcción de la tabla inicial del Simplex**

- Reescribir la FO igualándola a cero
- Organizar las ecuaciones en una tabla (tabla simplex)

Metodología M. Simplex

3. **Construcción de la tabla inicial del Simplex**

Maximizar $\quad Z = \mathbf{cx},$

sujeta a:

$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \quad$ y $\quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0},$

$$[\mathbf{A}, \mathbf{I}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_s \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

- **x**, **b** y **0** son vectores columna
- **A** es la matriz
- **m**: Numero de restricciones
- **n** = Numero variables de decisión (**no básicas**)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Metodología M. Simplex

- **4. Pivoteo en la Tabla Simplex**

i. **Identificación de la variable entrante**:

Se selecciona la **variable no básica** con el **coeficiente** en la fila de Z

- **más negativo para maximización**
- **más positivo para minimización**

ii. **Identificación de la variable salida**

- **Variable de Salida:** **Menor cociente positivo**

$$[\mathbf{A}, \mathbf{I}]\begin{bmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{X}_s\end{bmatrix} = \boxed{\mathbf{b}}$$

$$\frac{RHS}{Coeficientes\ en\ Variable\ de\ Entrada}$$

Metodología M. Simplex

• 4. Pivoteo en la Tabla Simplex

iii. **Selección del Pivote :** Intersección de Variable de entrada y salida en la tabla Simplex

iv. **Actualización de la tabla (pivoteo)**

Se realizan operaciones básicas en renglones para convertir el **coeficiente pivote en 1** y los demás **elementos de su columna en 0**, obteniendo una nueva tabla Simplex.

Metodología **Método Simplex**

- 5. Iteración del Método Simplex
- Se repite el paso 4
  - **En maximización**: Se **continúa iterando** mientras haya coeficientes negativos en la fila de coeficientes de Z de la tabla simplex
  - **En minimización**: Se **continúa iterando** mientras haya **coeficientes positivos** en la fila de coeficientes de Z de la tabla simplex
- Cuando ya no hay que realizar iteraciones se ha encontrado la solución, se valida el cumplimiento de las restricciones y se obtiene el valor de Z

Ejercicio- Método Simplex

Una empresa fabrica sillas y mesas. La producción está limitada por los siguientes factores:

- **Espacio disponible**: Cada silla usa 1 unidad de espacio, y el máximo es 4 unidades.
- **Tiempo de trabajo**: Cada mesa requiere 2 horas, y el máximo disponible es 12 horas.
- **Material disponible**: Cada silla usa 3 unidades de material, cada mesa usa 2 unidades, y el total disponible es 18 unidades.

La empresa quiere maximizar sus ganancias. Cada silla genera Bs 30 y cada mesa genera Bs 50 de ganancia.

- Construye el modelo matemático, presente la solución del método grafico y resuelve paso a paso hasta completar el método simplex

Modelo Matemático

$$\boldsymbol{Max\ Z = 30X_S + 50X_M}$$

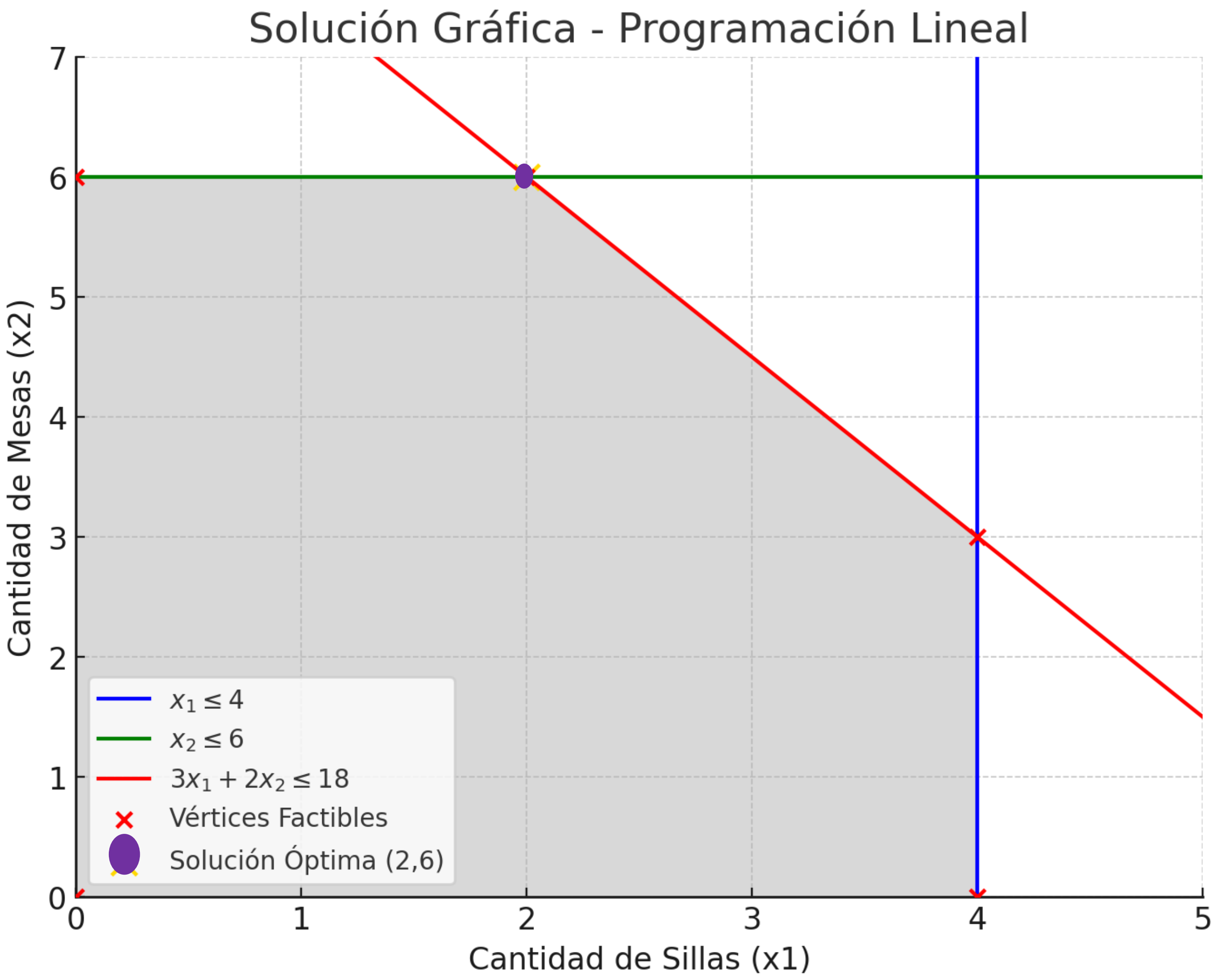
S.a. :

- R1: $X_S \leq 4$
- R2: $2X_M \leq 12$
- R3: $3X_S + 2X_M \leq 18$
- R4: $X_S \geq 0,\ X_M \geq 0$

- Espacio disponible
- Tiempo de trabajo
- Material disponible
- No negatividad

Solución M. Grafico

Vértice	xS	xM	Z
(0,0)	0	0	0
(4,0)	4	0	120
(0,6)	0	6	300
(4,3)	4	3	270
(2,6)	2	6	360



Solución Método Simplex

1. Formular el problema en su **formato estandarizado**:

- S: (≤)
- E:.(≥)

MODELO CANÓNICO

Forma original del modelo

$$Max\ Z = 30X_S + 50X_M$$

S.a. :

- R1: $X_S \leq 4$
- R2: $2X_M \leq 12$
- R3: $3X_S + 2X_M \leq 18$
- R4: $X_S \geq 0,\ X_M \geq 0$

MODELO ESTANDARIZADO

Forma aumentada del modelo

$$Max\ Z = 30X_S + 50X_M + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

S.a. :

R1: $X_S + S1 = 4$

R2: $2X_M + S2 = 12$

R3: $3X_S + 2X_M + S3 = 18$

R4: $X_j \geq 0,\ S_j \geq 0$

Solución Método Simplex

2. Revisar la Solución Básica Factible Inicial

$$\boldsymbol{Max\ Z = 30X_S + 50X_M}$$

S.a. :

R1: $X_S \qquad + \boldsymbol{S1} \qquad = 4$

R2: $2X_M \qquad + \boldsymbol{S2} \qquad = 12$

R3: $3X_S + 2X_M \qquad + \boldsymbol{S3} = 18$

R4: $X_j \geq 0,\ S_j \geq 0$

Solución Básica Factible Inicial

$X_S = 0 \ , \boldsymbol{S1} = 4$

$X_M = 0 \ , \boldsymbol{S2} = 12$

$X_S = 0 \ y \ X_M = 0 \ , \boldsymbol{S3} = 18$

$\boldsymbol{Z = 0}$

Metodología Método Simplex

$$Max\ Z = 30X_S + 50X_M$$

S.a. :

- R1: $X_S \leq 4$
- R2: $X_M \leq 12$
- R3: $3X_S + 2X_M \leq 18$
- R4: $X_S \geq 0,\ X_M \geq 0$

3. Construcción de la tabla inicial del Simplex

$$\boldsymbol{Z - 30X_S - 50X_M} = 0$$

R1: $X_S + \boldsymbol{S1} = 4$

R2: $2X_M + \boldsymbol{S2} = 12$

R3: $3X_S + 2X_M + \boldsymbol{S3} = 18$

	Var. Decisión			Var. Básica			Sol.
	Z	**X_S**	**X_M**	**S1**	**S2**	**S3**	**RHS**
FO	1	**-30**	**-50**	0	0	0	**0**
R1	0	**1**	**0**	**1**	0	0	**4**
R2	0	**0**	**2**	0	**1**	0	**12**
R3	0	**3**	**2**	0	0	**1**	**18**

Matriz de Coeficientes

Metodología M. Simplex

- **4. Pivoteo en la Tabla Simplex**

	Var. Decisión			Var. Básica			Sol.	**Menor**
	Z	**X_S**	**X_M**	**S1**	**S2**	**S3**	**RHS**	**Cociente**
FO	1	**-30**	**-50**	0	0	0	0	
R1	0	**1**	**0**	**1**	0	0	4	4/0=∞
R2	0	**0**	**2**	0	**1**	0	12	12/2= **6**
R3	0	**3**	**2**	0	0	**1**	18	18/2 = 9

i. **Variable entrante: X_M**
ii. **Variable salida : S2**
iii. **Selección del Pivote : 2**

Metodología M. Simplex

4. Pivoteo en la Tabla Simplex

iv. Se realizan **operaciones básicas** en renglones para convertir el **pivote en 1** y los demás **elementos de su columna en 0**, obteniendo una nueva tabla Simplex

	Var. Decisión			Var. Básica			Sol.
	Z	**X_S**	**X_M**	**S1**	**S2**	**S3**	**RHS**
FO	1	**-30**	**-50**	0	0	0	0
R1	0	**1**	**0**	**1**	0	0	4
R2	0	**0**	**2**	0	**1**	0	12
R3	0	**3**	**2**	0	0	**1**	18

OB		**Z**	**Xs**	**Xm**	**S1**	**S2**	**S3**	**RHS**
RP*50+RFO	FO	1	-30	0	0	25	0	300
***	R1	0	1	0	1	0	0	4
RP/2	R2	0	0	1	0	1/2	0	6
RP*-2+R3	R3	0	3	0	0	-1	1	6

Metodología M. Simplex

5. Iteraciones en la Tabla Simplex

- Al existir negativos en la FO, continuamos iterando
- Selección de nuevo Pivote
  - Ve: Xs
  - VS: S3
- Operaciones Básicas sobre renglones para dejar pivote en uno y demás elementos de columna en 0

Tabla simplex original

	Z	Xs	Xm	S1	S2	S3	RHS	Men. Coc.
FO	1	-30	0	0	25	0	300	
R1	0	1	0	1	0	0	4	4
R2	0	0	**1**	0	1/2	0	6	#¡DIV/0!
R3	0	3	0	0	-1	1	6	2

Tabla simplex Actualizada

OB		Z	Xs	Xm	S1	S2	S3	RHS
	FO	1	0	0	0	15	10	360
RP*-1+R1	R1	0	0	0	1	1/3	- 1/3	2
****	R2	0	0	1	0	1/2	0	6
R3/3	R3	0	1	0	0	- 1/3	1/3	2

Seleccion de pivotes:
Columna pivote: coeficiente con mas negativo
Renglon pivot: regla del menor cociente

Metodología M. Simplex

5. Iteraciones en la Tabla Simplex

	Z	Xs	Xm	S1	S2	S3	RHS
FO	1	0	0	0	15	10	360
R1	0	0	0	1	1/3	- 1/3	2
R2	0	0	1	0	1/2	0	6
R3	0	**1**	0	0	- 1/3	1/3	2

$X_S = 2$

$X_M = 6$

$Z = 360$

Metodología M. Simplex

5. Iteraciones en la Tabla Simplex

$$\boldsymbol{Max\ Z = 30 * 2 + 50 * 6} = 360$$

S.a. :

- R1: $2 \leq 4$
- R2: $2 * 6 \leq 12$
- R3: $3 * 2 + 2 * 6 \leq 18$
- R4: $X_S \geq 0,\ X_M \geq 0$

$X_S = 2$

$X_M = 6$

Z $= 360$

❖ La empresa debe fabricar 2 sillas y 6 mesas para obtener una ganancia máxima de Bs 360.