

Métodos Matemáticos de la Física
Hoja de trabajo 8

1. Demuestre que

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{2/\pi x} \sin x, \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{2/\pi x} \cos x \quad (1)$$

y grafique las dos funciones

2. Demuestre que

$$xJ'_\nu(x) = \nu J_\nu(x) - xJ_{\nu+1}(x)$$

y

$$(x^\nu J_\nu(x))' = x^\nu J_{\nu-1}(x)$$

3. Demuestre que

$$\int_0^b (J_\nu(\mu x))^2 x dx = \frac{b^2}{2} (J'_\nu(\mu b))^2 + \frac{\mu^2 b^2 - \nu^2}{2\mu^2} (J_\nu(\mu b))^2 \quad (2)$$

con $\mu > 0$, $b > 0$ y $\nu > 0$.

4. Establezca el siguiente resultado

$$\|J_n(\mu x)\|_x^2 = \frac{b^2}{2} J_{n+1}^2(\mu b) \quad (3)$$

5. Muestre que la función de Bessel de segundo tipo $N_n(x)$ tiene el siguiente comportamiento asintótico cuando $x \rightarrow 0$

$$N_n(x) \sim \begin{cases} \frac{2}{\pi} \log \frac{x}{2}, & n = 0 \\ -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n}, & n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (4)$$

6. Considere una placa metálica semicircular con coeficiente de difusividad térmica K . Suponga que las orillas de la placa se mantienen aisladas y que la temperatura T de la placa está distribuida según $T(r, \theta, t = 0) = r \cos \theta$. Grafique la solución para dos instantes de tiempo distintos usando algunos términos del desarrollo de la solución completa.
7. Resuelva el problema de vibraciones de una membrana circular de radio b cuyo borde se mantiene fijo en el tiempo. Considere que inicialmente la configuración de la membrana es una gaussiana centrada en el centro de la membrana circular. Obtenga las configuraciones para distintos tiempos usando algunos términos del desarrollo de la solución completa.
8. Suponga que U satisface la ecuación de Laplace dentro del hemisferio $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \phi \leq \pi/2$. Si $U(r, \pi/2) = 0$ en $0 \leq r \leq 1$ y $U(1, \phi) = 1$ en $0 \leq \phi \leq \pi/2$, demuestre que dentro del hemisferio

$$U(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{4n+3}{2n+2} \right) \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} r^{2n+1} P_{2n+1}(\cos \phi) \quad (5)$$