Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas

Métodos Matemáticos de la Física
Hoja de trabajo 9

1. Considere el problema

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + Q(x,t), \qquad 0 \leq x \leq L, \qquad t \geq 0, \tag{1}$$

sujeto a las condiciones

$$U(0,t) = 0, \qquad U(L,t) = 0, \qquad U(x,0) = f(x), \tag{2}$$

donde U representa la función de distribución de temperaturas en una barra unidimensional.

Encuentre una expresión para la solución en términos de un desarrollo de las funciones propias, Φ_n, del problema de autovalores

$$\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} + \lambda\Phi = 0, \qquad \Phi(0) = \Phi(L) = 0. \tag{3}$$

(Ayuda: escriba todas las funciones de x como un desarrollo en $\Phi_n(x)$)

2. Encuentre la solución al problema anterior si $Q(x,t) = t\sin(3\pi x)$ y $f(x) = 3\sin(2\pi x)$ y $L = 1$.

3. Utilizando el resultado del ejercicio 1, construya las funciones de Green del problema asociadas a la inhomogeneïdad de la ecuación de calor y a la inhomogeneïdad de la ecuación para el valor inicial.

4. Utilizando la identidad de Green

$$\int_{\partial\Omega} (\Phi\nabla\Psi - \Psi\nabla\Phi)\cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} (\Phi\nabla^2\Psi - \Psi\nabla^2\Phi) dV, \tag{4}$$

muestre que la solución a la ecuación de Poisson $\nabla^2 U(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})$ es

$$U(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{r},\mathbf{r}') f(\mathbf{r}) dV, \tag{5}$$

si tanto $U(\mathbf{r})$ como $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ sastisfacen condiciones de Dirichlet en la frontera $\partial\Omega$ del volumen Ω.

5. Utilizando el teorema bidimensional de la divergencia del cálculo vectorial, encuentre la función de Green bidimensional para la ecuación de Poisson con simetría radial.