#2 SEPARACIÓN DE TRES O MÁS VARIABLES

 diagramación: José Carlos Bonilla

1 INTRODUCCIÓN

La separación de variables, también llamada Método de Fourier, es una de las técnicas de resolución de ecuaciones diferenciales parciales más generales. Ésta nos permite resolver virtualmente todas las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, y varios otros tipos de ecuaciones. En este material de apoyo exploraremos su aplicación a EDPs con tres o más variables independientes y una variable dependiente; se asume que el estudiante ya sabe aplicar el método para dos variables independientes.

2 PROBLEMA

Hallar una solución en serie para la EDP:

$$4u_{xx} - 9u_{yy} + 5u_t = 0; \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Aunque no se ofrecen condiciones iniciales o de frontera, **se espera que las soluciones producto tiendan a cero conforme t tiende a infinito**, lo cual es un requisito típico para los casos en que t represente el tiempo en un problema de aplicación a la Física. Vale la pena recordar que esta condición favorece el buen planteo de los problemas, específicamente en la estabilidad de los mismos, razón por la cual también es matemáticamente deseable, aún si no se contemplan aplicaciones.

3 APLICACIÓN DEL MÉTODO

Primero proponemos soluciones producto con la forma

$$u(x, y, t) = X(x)\, Y(y)\, T(t),$$

que sustituida en la EDP sin escribir las dependencias de las funciones conduce a

$$4X''YT - 9XY''T + 5XYT' = 0.$$

Dividiendo entre $u = XYT$ ambos miembros de la ecuación, resulta

$$4\frac{X''}{X} - 9\frac{Y''}{Y} + 5\frac{T'}{T} = 0,$$

ecuación en la que cada término depende de una única variable. Manteniendo fijo el valor de y, t, al variar el valor de x en su dominio, vemos que el primer término debe forzosamente ser constante. Razonamientos análogos nos llevan a concluir que cada término univariado es constante, así que se deduce el siguiente sistema de ecuaciones ordinarias:

$$\begin{cases} 4\dfrac{X''}{X} = \alpha, \qquad -9\dfrac{Y''}{Y} = \beta, \qquad 5\dfrac{T'}{T} = \gamma, \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

Las constantes α, β, γ son llamadas *constantes de separación*. Las ecuaciones se pueden reescribir en una forma que está casi lista para proponer sus soluciones individuales:

$$\begin{cases} X'' - \frac{\alpha}{4}X = 0, \qquad Y'' + \frac{\beta}{9}Y = 0, \qquad T' = \frac{\gamma}{5}T, \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

El signo de las constantes es crucial para determinar la forma de las soluciones de X, Y. Eso no pasa con T, para la cual las soluciones particulares siempre son exponenciales, por ejemplo: $T(t) = e^{\gamma t/5}$. Nos interesa que la tasa $\gamma/5$ sea negativa, pero, debido a que $\gamma = -\alpha - \beta$, y se tienen exactamente dos grados de libertad entre las tres constantes, es necesario exigir $\alpha, \beta \geq 0$ para asegurar que toda posible elección de las constantes α, β resulten en una tasa negativa para la parte temporal de la solución. Así, quedan determinados los signos de α, β, γ como $+, +, -$, elección que asegura que la solución producto tiende a cero conforme t tiende a infinito, provisto que x, y se mantengan fijas. Con esto, las soluciones particulares independientes de cada EDO son:

$$X_1(x) = e^{\sqrt{\alpha}x/2},\ X_2(x) = e^{-\sqrt{\alpha}x/2}; \qquad Y_1(y) = e^{\sqrt{\beta}iy/3},\ Y_2(y) = e^{-\sqrt{\beta}iy/3}; \qquad T(t) = e^{-(\alpha+\beta)t/5}$$

Empleando la identidad de Euler, es posible hallar dos soluciones particulares independientes reales para Y:

$$Y_1(y) = \cos(\sqrt{\beta}y/3) + i\sin(\sqrt{\beta}y/3), \quad Y_2(y) = \cos(\sqrt{\beta}y/3) - i\sin(\sqrt{\beta}y/3)$$

Como las combinaciones lineales de soluciones también son soluciones, proponemos usar las siguientes combinaciones:

$$\frac{X_1 + X_2}{2},\ \frac{X_1 - X_2}{2}; \qquad \frac{Y_1 + Y_2}{2},\ \frac{Y_1 - Y_2}{2i}; \qquad T$$

Con esto, las nuevas bases de los espacios vectoriales solución son reales:

$$X(x) = \cosh(\sqrt{\alpha}x/2),\ \sinh(\sqrt{\alpha}x/2); \quad Y(y) = \cos(\sqrt{\beta}y/3),\ \sin(\sqrt{\beta}y/3); \quad T(t) = e^{-(\alpha+\beta)t/5}$$

Ahora, haciendo uso de las identidades de suma de argumentos:

$$\begin{cases} \cos(\theta + \phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi \\ \cosh(p + q) = \cosh p\cosh q + \sinh p\sinh q \end{cases}$$

sustituyendo $p = \sqrt{\alpha}x/2, \theta = \sqrt{\beta}y/3$, permitiendo que ϕ, q sean desfases a los que rebautizaremos como δ, ε, para enfatizarlo, podemos fusionar cada pareja de soluciones para X, Y en una sola solución con desfase (la cual preserva el mismo grado de generalidad que las combinaciones lineales de las parejas):

$$X(x) = \cosh(\sqrt{\alpha}x/2 + \delta), \qquad Y(y) = \cos(\sqrt{\beta}y/3 + \varepsilon), \qquad T(t) = e^{-(\alpha+\beta)t/5}$$

Así, finalmente podemos armar una solución producto:

$$u(x, y, t) = e^{-(\alpha+\beta)t/5} \cosh(\sqrt{\alpha}x/2 + \delta) \cos(\sqrt{\beta}y/3 + \varepsilon)$$

Las constantes $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon$ se pueden indizar con dos índices n, m conectados a las constantes de separación independientes α, β, aunque la manera específica de hacerlo es dictaminada por las condiciones de frontera. Pero aún con nuestro conocimiento limitado actual, es prudente que el índice tome un conjunto infinito discreto de valores tal que las constantes de separación incluyan al cero y crezcan sin cota (requisitos del teorema de Stone-Weierstrass), así que, en ausencia de otras condiciones físicas o matemáticas que se deban cumplir, y notando que ambas constantes de separación aparecen en raíces cuadradas, es conveniente tomar $\alpha = n^2, \beta = m^2, \delta = \delta_n \varepsilon = \varepsilon_m$. Con lo que las soluciones producto quedan indizadas así:

$$u_{n,m}(x, y, t) = e^{-(n^2+m^2)t/5} \cosh(nx/2 + \delta_n) \cos(my/3 + \varepsilon_m)$$

Y con esto estamos listos para hacer armar la solución en serie a partir de las infinitas soluciones producto, acompañando a cada una de ellas con un coeficiente de Fourier apropiado $a_{n,m}$.

Solución en serie

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_{n,m}\, e^{-(n^2+m^2)t/5} \cosh(nx/2 + \delta_n) \cos(my/3 + \varepsilon_m)$$

Aunque no es necesario colectar como lo hicimos los pares de soluciones independientes en soluciones solitarias con desfase, es muy conveniente para escribir las soluciones en serie empleando un único conjunto de constantes. Esto puede hacerse también con las series de Fourier clásicas con las que nos hemos encontrado hasta ahora, aunque para ellas quizá la forma más práctica de trabajarlas es en forma exponencial compleja. Esta es la razón por la cual Mathematica produce las soluciones en notación exponencial.

Si hubiera condiciones iniciales, nuestra solución en serie estaría lista para recibir dichas condiciones, produciendo los valores de los coeficientes de Fourier apropiados. Note también que la presencia de condiciones de frontera puede afectar la manera en la que tomamos decisiones sobre los signos de las constantes de separación, y la forma en la que las indizamos.