Soluciones de PSLR

Ahora que ya sabemos como resolver las EDOs de segundo orden vamos a resolver casos particulares y extender nuestro método para ciertos casos de EDPs

Serie de Fourier

Una función perteneciente al espacio L^2 se dice que es una serie o desarrollo de Fourier si está representada mediante combinaciones lineales del SOC, usualmente se utiliza el de funciones trigonométricas.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_n cos(nx) + b_n sin(nx)$$

En la guía anterior habíamos encontrado la fórmula para esta expansión pero ahora la escribimos de forma estandarizada.

Solución de Ecuaciones Diferenciales Famosas

Ecuación de Laplace $\nabla^2\phi = 0$ y **Ecuación de Poisson** $\nabla^2\phi = f$:
Estas ecuaciones describen un sistema estático que puede ser descrito con funciones armónicas, como los campos estudiados en electroestática.
Como fue visto en el curso de ecuaciones diferenciales parciales es posible utilizar el método de separación de variables para obtener la solución homogénea de este tipo de sistemas. La solución de estas ecuaciones depende del sistema de coordenadas utilizado, debido a las simetrías usuales a considerar es conveniente encontrar la solución de estos sistemas en coordenadas esféricas. Antes de ello haremos un recordatorio rápido sobre el método de separación de variables.

Supongamos que tenemos una EDP homogénea que admita una solución de tipo $f = \Pi g_i(x_i)$, o sea que pueda ser escrita como la multiplicación de distintas funciones de las variables independientes del sistema, esto significa que podemos tomar nuestro polinomio diferencial y despejar alguna variable independiente para obtener una EDO que es igual a una expresión constante en esa variable. Esto puede verse como:

$$\sum D^n_{x_i} g_i(x_i) = \sum_{x_j \neq x_i} D^n g_j(x_j) = C_{x_i}$$

C_{xi}: Constante arbitraria respecto a x_i

En el caso de la ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas tenemos.

$$f = X(x)Y(y)Z(z)$$
$$\nabla^2 f = 0$$
$$X''YZ + XY''Z + XYZ'' = 0$$
$$\frac{X''}{X} = -(\frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z}) = -C_x^2$$
$$\frac{Z''}{Z} = -C_z^2$$
$$C_y^2 = C_x^2 + C_z^2$$

Ejercicio 6.1: Encontrar las soluciones explícitas de este sistema en términos de las constantes definidas. Guía, las soluciones son senos o cosenos hiperbólicos.

Ahora realizaremos el mismo análisis para el caso de coordenadas esféricas.
Ejercicio 6.2: Tomando de base el método de separación de variables encontrar que las soluciones de esta ecuación respetan las siguientes ecuaciones.

$$V = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$$
$$\frac{\partial}{\partial\phi}(\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}) = 0$$
$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + m^2\Phi = 0$$
$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr}) = k$$
$$\frac{1}{\Theta}\frac{1}{sin(\theta)}\frac{d}{d\theta}(sin(\theta)\frac{d\Theta}{d\theta}) - \frac{m^2}{sin^2(\theta)} = -k$$

La solución de Φ y R es inmediata, pero para poder resolver Θ realizamos escala en nuestra parte radial transformando la ecuación de esta manera $R(r) = r^l$. Ahora analizamos esta expresión.

$$\frac{d}{dr}(r^2\frac{dr^l}{dr}) - mr^l = 0$$
$$(l(l+1) - m)r^l = 0$$

De esta manera podemos reemplazar el valor de la constante en la ecuación de Θ obteniendo la forma de una ecuación diferencial conocida.

$$\frac{1}{sin(\theta)}\frac{d}{d\theta}(sin(\theta)\frac{d\Theta}{d\theta}) + (l(l+1) - \frac{k^2}{sin^2(\theta)})\Theta = 0$$

Esta es la versión transformada al círculo unitario con $x = cos(\theta)$ de la **Ecuación de Legendre**.

Ejercicio 6.3: Comprobar que para el caso $k = 0$ la ecuación diferencial anteriormente descrita puede escribirse como.

$$\frac{d}{dx}((1-x^2)\frac{dy}{dx}) + l(l+1)y = 0$$

Ejercicio opcional: Resolver por lo menos una vez en la vida esta ecuación utilizando series de potencias.

La solución de esta ecuación da lugar a los **Polinomios de Legendre**, los cuales son muy importantes en la física debido a que forman un SOC en $L^2[-1,1]$.
Ejercicio 6.4: Demostrar la ortonormalidad de los polinomios de Legendre.

Estos también son conocidos como armónicos esféricos ya que aparecen en cualquier problema de simetría angular en coordenadas polares como las ecuaciones de Poisson/Laplace y los problemas de momento angular como el átomo de hidrógeno.

Ahora regresamos a la solución de la ecuación de Laplace dando la forma explícita de la función encontrada.

$$V(r,\theta,\phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$$
$$= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}(A_{lm}r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}})P_l^m cos(\theta)e^{im\phi}$$

Donde P_l^m es el polinomio de Legendre correspondiente a esos valores específicos.
Ejercicio 6.5: Realizar la multiplicación explícita de las soluciones anteriores para encontrar la función solución V.

Finalmente para dar la solución de la ecuación de Poisson debemos expresar una restricción f dada en términos de nuestra función solución. Entonces:

$$f = \sum c_n e_n$$
$$c_n = \frac{(V_n, f)}{(V_n, V_k)}$$

Ejemplo de la Solución de una ecuación de Poisson
Este no sería un curso de física sin simplificaciones o apelar a las simetrías de un sistema. De la solución general obtenida anteriormente despreciaremos la componente azimutal y utilizaremos una versión reducida a menos que sea pedido explícitamente.

Resolveremos el caso de un potencial eléctrico en el interior de una esfera de radio R que está expuesta a un potencial externo discontinuo. Para ello empleamos la ecuación maestra de este tipo de problemas y analizamos las condiciones de frontera.

$$V(r,\theta) = \sum (A_l r^l + B_l r^{1-l}) P_l(cos(\theta))$$
$$V_{ext} = V_0 \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$
$$V_{ext} = -V_0 \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$$
$$V_{ext} = V(R,\theta) = f(\theta)|_{r=R}$$
$$V(r,\theta) < \infty$$

Con estas consideraciones podemos observar que las constantes B_l deben ser nulas para cumplir la condición de acotación. Ahora solo queda encontrar la forma de las constantes de la restricción presentada.

$$c_n = \frac{(P_n, V_{ext})}{(P_n, P_m)}$$

Donde podemos despreciar la parte radial ya que nuestra función particular solo depende de θ. De esto tenemos que el cálculo explícito es:

$$(V(R,\theta), P_n) = (V_{ext}, P_n)$$
$$\int_0^\pi \sum A_l R^l P_l P_m sin(\theta) d\theta = \sum A_l R^l \int P_l P_m sin(\theta) d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} V_0 P_n(cos(\theta)) sin(\theta) d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} V_0 P_n(cos(\theta)) sin(\theta) d\theta$$

Ejerccio 6.6: Probar las siguientes relaciones.

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) dx = \int_0^\pi P_n(cos(\theta)) sin(\theta) d\theta$$
$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2\delta_n^m}{2n+1}$$
$$\int P_n(x) = \frac{P_{n+1} - P_{n-1}}{2n+1}$$

Utilizando esas relaciones tenemos:

$$A_l R^l \frac{2}{2l+1} = V_0 \int_0^1 P_l(x) - V_0 \int_{-1}^0 P_l(x)$$

El orden de integración parece alterado por el signo negativo que aparece al realizar el cambio de variables.
Ejercicio 6.7: Demostrar que los Polinomios de Legendre son pares para índice par e impares para índice impar y demostrar que $P_n(1) = 1\ \forall n$.

Utilizando esas propiedades podemos reescribimos la expresión como:

$$\begin{aligned}
A_{2k+1} &= 0\ \forall k \\
A_{2k} R^{2k} \frac{2}{2(2k)+1} &= 2V_0 \int_0^1 P_{2k} dx \\
&= 2V_0 \frac{P_{2k+1} - P_{2k-1}}{2(2k)+1}\Big|_0^1 \\
&= 2V_0 \frac{P_{2k-1}(0) - P_{2k+1}(0)}{2(2k)+1} \\
A_{2k} &= \frac{V_0}{R^{2k}} (P_{2k-1}(0) - P_{2k+1}(0)) \\
V = \sum \frac{V_0}{R^{2k}} (P_{2k-1}(0) - P_{2k+1}(0)) r^{2k} P_{2k}(cos(\theta))
\end{aligned}$$

Ejercicio 6.7: Encontrar el potencial de este problema afuera de la esfera.

Ahora Resolvamos el caso de un potencial variable, tomemos el mismo sistema fijo que ahora es sometido a un potencial $V = cos^2\theta$.
Para resolver este problema realizamos exactamente el mismo procedimiento para encontras las constantes del sistema. El truco es reescribir la función dada como una combinación lineal de polinomios de Legendre

$$\begin{aligned}
cos^2(\theta) &= \frac{2}{3} P_2 + \frac{1}{3} P_0 \\
A_n &= 0\ \forall n \neq 0, 2 \\
\sum A_l R^l \frac{2\delta_n^l}{2(l)+1} &= \int_{-1}^1 P_l(\frac{2}{3} P_2 + \frac{1}{3} P_0) dx \\
\implies A_0 R^0 \frac{2}{1} &= \int P_l \frac{1}{3} P_0 \\
\implies A_2 R^2 \frac{2}{5} &= \int P_l \frac{2}{3} P_2
\end{aligned}$$

Ejercicio 6.8: Encontrar el potencial final de este problema dentro y fuera de la esfera.

Ecuación de Calor $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \nabla^2 u$:
Ejercicio 6.8: Demostrar que utilizando el método de separación de variables para 1D, con condiciones de frontera de Dirchlet $X(0) = X(L) = 0$ las soluciones de la ecuación de calor pueden escribirse como:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$
$$u(x,t) = \sum a_n sin(\frac{n\pi x}{L})e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}t}$$

Ejemplo

Resolvamos el caso particular donde $L = 3$ y tenemos la restricción
$u(x,0) = f(x) = -sin(\frac{5\pi}{6}x)$
Para ello tenemos que encontrar el valor de las constantes utilizando el PI.

$$b_n = \frac{sin(\frac{\pi}{6}x))sin(\frac{n\pi x}{3})}{\int_0^3 sin^2(\frac{n\pi x}{3})}$$

Utilizando la ortogonalidad del seno que rearreglamos astutamente sabemos que las únicas constantes distintas de 0 son las que tienen términos semejantes.

$$b_n = 0 \; n \neq 1$$
$$b_1 = 1$$
$$u(x,t) = sin(\frac{\pi x}{3})e^{\frac{-\pi^2}{9}t}$$

Ejercicio 6.9: Resolver el mismo problema con la restricción de
$f(x) = sin(\frac{\pi}{2}x) - sin(\frac{5\pi}{6}x)$.

Ejercicio 6.10 (dificil): Resolver el problema con la misma restricción y la siguiente condición de frontera $u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}u(3,t) = 0$.

Ecuación de Onda $c^2\nabla^2\Psi = \frac{d^2\Psi}{dt^2}$:
Ejercicio 6.11: Demostrar que utilizando el método de separación de variables para 1D, con condiciones de frontera de Dirchlet $X(0) = X(L) = 0$. Las soluciones de la ecuación de onda pueden escribirse como:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$
$$u(x,t) = \sum (A_n cos(\frac{n\pi ct}{L}) + B_n sin(\frac{n\pi ct}{L})sin(\frac{n\pi x}{L})$$