Operadores en Espacios Euclídeos

Ahora que ya sabemos como representar vectores en espacios Euclídeos por medio de sistemas ortogonales completos, centraremos nuestra atención en las funciones y operadores lineales en estos espacios.

Funcionales Lineales

Un funcional lineal es una función escalar que respeta las propiedades de homogeneidad y escalabilidad, en un espacio euclídeo puede ser representada de la siguiente manera.

$$f : V \to R$$
$$f(x) = f(\sum \alpha_i e_i)$$
$$= \sum \alpha_i f(e_i)$$

Por tanto las funciones lineales en espacios euclídeos se caracterizan por su acción en los vectores de la ”base” del sistema ortogonal completo, análogo a lo que ocurre con las funciones lineales en álgebra lineal.

Ejemplo

El PI de un vector fijo en un Espacio Euclídeo EE con otro vector arbitrario, es un funcional lineal.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum \alpha_i f(e_i) \\ &= \sum \alpha_i \gamma_i \\ (z, x) &= \sum \alpha_i \beta_j^* (e_i, e_j) \\ &= \sum \alpha_i \beta_i^* \end{aligned}$$

Esto tiene consecuencias bastante importantes que serán estudiadas en el futuro y en aplicaciones en la física como la mecánica cuántica.
Además es importante aclarar que no toda funcional lineal puede representarse como un producto interno, un ejemplo de esto es la famosa delta de Dirac.

Definición un funcional se dice acotado si existe una constante K mayor a 0 tal que $f(x) \leq K||x|| \; \forall x \in V$
El PI de un vector fijo es una funcional acotada como consecuencia de la desigualdad de Cauchy Schwartz $f(x) \leq ||z|| \; ||x|| \leq K||x||$

Ahora comenzaremos a trabajar con un nuevo objeto matemático que es una de las herramientas más útiles en la física, los operadores y en este caso operadores lineales.

Operadores Lineales

Un operador es una función lineal A que mapea un espacio vectorial en otro espacio vectorial.

$$A: \ V \ \rightarrow \ W$$
$$\mathrm{A}(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

En el caso de dimensión finita siempre es posible generar una representación matricial para este tipo de operadores y cumplen las mismas reglas de las operaciones matriciales. Cabe resaltar que un operador es un objeto abstracto y una representación matricial es la forma de describir a ese objeto en una base dada. Así como la idea de una manzana no es lo mismo a la palabra manzana en español, inglés, et, lo mismo es para los operadores.
De momento solo estudiaremos los operadores lineales con dominio y rango en EEs, todos los resultados son válidos solo bajo estas condiciones.

Ejemplo

El operador de proyección es una función que deja invariante a un subespacio y envía al kernel el resto de vectores. Supongamos que tenemos un subespacio de dimensión $m < n$, la operación de proyección es la siguiente:

$$P(x) = \sum \alpha_i P(x)$$
$$= \sum_j^m \sum \alpha_i (e_i, e_j) e_j$$
$$= \sum_i^m e_i (e_i, x)$$

La forma de representación del operador es la presentada en la última línea.

Proposición el complemento ortogonal del operador proyección está dado por $(I-P)(x) = I(x) - P(x)$.
Demostración: vamos a estudiar cuál es la forma de los vectores bajo esta nueva operación.

$$\begin{aligned}(I-P)(x) &= I(x) - P(x)\\ &= \sum^{n}\alpha_i e_i - \sum_{i}^{m} e_i(e_i, x)\\ &= \sum_{m-n}^{n}\alpha_i e_i\end{aligned}$$

Ahora calculamos el PI.

$$\begin{aligned}(P(x), (I-P)(x)) &= \sum (Cte)(e_i, e_j)\ i \neq j\\ &= 0\end{aligned}$$

Nuestros lectores se habrán preguntado si nuestro resultado es general ya que construimos a nuestro operador de proyección tomando de forma ascendente los vectores del sistema ortogonal y no de forma arbitraria. Debido a que estamos en dimensión finita, el resultado se mantiene para una configuración arbitraria pero se debe trabajar más al ordenar los índices en las sumatorias, o trabajar con las permutaciones de las configuraciones.
Ejercicio 2.1, realizar el paso faltante en la demostración anterior.

Proposición todo vector en un EE puede ser representado como la suma entre un vector y su complemento ortogonal.
Demostración: Utilizamos la proposición anterior para construir al elemento $P(z) = x$ y el elemento $(I-P)(z) = y$. De esto $z = x + y$.
Ejercicio 2.2, escribir formalmente la prueba de esta argumentación.

Ahora definiremos una manera de obtener la norma de los operadores.

Norma de un Operador

Para un operador lineal definimos su norma como el supremo al aplicar el operador a vectores unitarios.

$$||Ax|| = sup_{x\in V|||x||=1}||Ax||$$

Definición un operador A es acotado si su norma es finita
Un resultado importante en dimensión finita es que todos los operadores acotados son lineales y tienen un vector máximo, esto no ocurre siempre en dimensión infinita. La demostración de este resultado va más allá del enfoque de este curso.

Desigualdad de CS para operadores acotados La norma de un operador lineal acotado obedece la siguiente desigualdad $||A|| \leq ||Ax||\ ||x||$
Demostración: usaremos el hecho que un vector dividido su magnitud es un vector unitario y la propiedad de escalabilidad de la norma.

$$\begin{aligned} y = \frac{x}{||x||} \quad ||y|| = 1 \\ ||A\frac{x}{||x||}|| = \frac{||Ax||}{||x||} \\ \leq \sup ||Ax'|| = ||A|| \\ ||Ax|| \leq ||A||\ ||x|| \end{aligned}$$

Corolario el resultado anterior nos permite establecer otra forma de calcular las normas de operadores acotados. $||Ax|| = sup_{||x||,||y||=1}|(y, Ax)|$.

Ejercicio 2.3, demostrar la desigualdad triangular para operadores.
Ejercicio 2.4, demostrar la desigualdad $||AB|| \leq ||A||\ ||B||$
Ejercicio opcional, demostrar que los operadores acotados forman un subespacio vectorial normado.

Ahora estudiaremos un tipo especial de operador acotado, tomando la definición anterior de la norma mediante un PI nos preguntamos si existe alguna manera de cambiar el orden de aplicación del operador para obtener el mismo resultado.

Operador Adjunto

Para un operador acotado A definimos al operador adjunto A† como el operador que satisface la siguiente relación.

$$\begin{aligned} (y, A^\dagger x) = (Ay, x) \\ = (x, Ay)^* \ \forall x, y \in V \end{aligned}$$

Proposición la norma del operador adjunto es equivalente a la norma del operador A.
Demostración: Utilizamos la definición de norma para operadores acotados.

$$\begin{aligned} ||A^\dagger|| = |(y, A^\dagger x)| \\ = |(y, Ax)^*| = ||A|| \end{aligned}$$

Definición un operador simétrico que cumple la relación $(y, Ax) = (Ay, x)$.

Proposición en un EE si tenemos una representación matricial explícita del

operador A, A_{ij}. El operador adjunto es la matriz adjunta de A^*_{ij}.
Demostración: el proceso es directo, utilizamos la definición de operador adjunto aplicado a un sistema ortonormal completo arbitrario.

$$\begin{aligned} A^\dagger_{ij} &= (e_i, A^\dagger e_j) = (Ae_i, e_j) \\ &= (e_j, Ae_i)^* = A^*_{ji} \end{aligned}$$

Definición un operador que es idéntico a su adjunto es conocido como un operador autoadjunto.

Proposición un operador simétrico acotado en un EE es idéntico a su adjunto. Estos operadores autoadjuntos son conocidos también como operadores Hermíticos o Hermitianos.
Demostración: Ejercicio 2.5, seguir los pasos empleados en la demostración anterior para demostrar el enunciado.

Autovalores, autovectores y espectros de Operadores Lineales

Definición un subespacio bajo la acción de un operador es llamado invariante si su imagen y preimagen son equivalentes. $A : V \to V \implies \forall x \in V \; Ax \in V$

Proposición Los autovectores de un operador forman individualmente un subespacio invariante de 1D.
Demostración: Utilizamos la definición de autovector.

$$\begin{aligned} A\vec{v}_i &= \lambda_i \vec{v}_i \\ \lambda U &= U \; \forall U \subseteq V \end{aligned}$$

Ejercicio 2.6: Encontrar los subespacios invariantes del operador proyección.

Teorema los autovectores de un operador lineal que corresponden a autovalores distintos son linealmente independientes.
Demostración: Supongamos por contradicción que existe un autovector que es linealmente dependiente, por tanto existe una combinación lineal no trivial, o sea que alguno de los coeficientes es distinto de 0.

$$\sum \alpha_i x_i = 0$$

Apliquemos el operador (A-$\lambda_m I$), donde λ_m es el autovalor asociado al vector que es LD. Evaluando esta operación tenemos.

$$A \sum \alpha_i x_i - \lambda_m \sum \alpha_i x_i = (A - \lambda_m I)0 = 0$$

Expandiendo el lado izquierdo recordando que los vectores son parte de un subespacio invariante tenemos.

$$\begin{aligned}(\lambda_1 - \lambda_m)\alpha_1 x_1 + ... + (\lambda_m - \lambda_m)\alpha_m x_m = 0 \\ = \sum^{m-1} \beta_i x_i = 0\end{aligned}$$

Lo que requiere que todos los coeficientes sean 0 ya que nuestros vectores son LI, pero si todos los coeficientes son 0 significa que en nuestra suma original tenemos 0 multiplicado por un escalar, lo que nos permite escribirla como:

$$\begin{aligned}\sum^{m} \alpha_i x_i = 0 + .. + \alpha_m x_m = 0 \\ \alpha_i = 0 \Rightarrow\!\Leftarrow\end{aligned}$$

Teorema Los autovectores de un operador lineal A con autovalor repetido forman parte del mismo subespacio invariante.
Demostración: Utilizamos la definición de autovector.

$$\begin{aligned}Ax_1 = \lambda x_1,\ ....,\ Ax_n = \lambda x_n \\ A(\sum \alpha_i x_i) = \lambda(\sum \alpha_i x_i)\end{aligned}$$

Ejercicio 2.7: Demostrar por contradicción que sucede si los autovectores son LI.

Definición al espacio generado por un autovalor con su conjunto de autovectores correspondientes se le conoce como espacio característico.

Propiedades de Autovalores, Autovectores y Espectros de Operadores Simétricos o Hermíticos

En la física estos operadores son indispensables ya que forman la base* de las acciones posibles en la mecánica cuántica llamados observables.
(Los observables son un subconjunto de los operadores Hermíticos y en la actualidad ya está demostrado que no es necesaria esta condición como en el caso del oscilador anarmónico, pero en sus cursos de licenciatura trabajarán con un axioma de que sí es necesaria esta condición).

Teorema los autovalores de los operadores hermíticos son Reales.
Demostración: Utilizamos la definición de norma para operadores lineales acotados.

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x \\ (Ax, x) &= (x, Ax) \\ \lambda^*(x, x) &= \lambda(x, x) \\ \lambda^* &= \lambda \end{aligned}$$

Esto nos da una idea de por qué se pide en la mecánica cuántica operadores hermíticos, ya que la acción de estos en un objeto físico son números reales.
Nota, esta demostración es lo suficientemente formal pero se optó por tomar la ruta didáctica en vez de la usual, se aconseja buscar otra variante.

Teorema Los autovectores que corresponden a autovalores diferentes en un operador Hermítico son ortogonales entre sí.
Demostración: De nuevo utilizamos la definición de la norma inducida por el PI para operadores lineales acotados.

$$\begin{aligned} Ax = \lambda x,\ Ay &= \beta y \\ (Ay, x) &= (y, Ax) \\ (Ay, x) - (y, Ax) &= 0 \\ = (\beta^* y, x) - (y, \lambda x) &= 0 \\ = \beta(y, x) - \lambda(y, x)& \\ = (\beta - \lambda)(y, x)& \\ \implies (y, x) &= 0 \end{aligned}$$

Teorema El complemento ortogonal de un subespacio invariante ante un operador Hermítico A también es un subespacio invariante.
Demostración: Esto es la generalización del teorema anterior. Tomemos un elemento del espacio E formado por la suma entre un vector y su componente ortogonal $z = x + y$. Sin pérdida de la generalidad fijamos x como todos los vectores que pertenecen al primer espacio. Por tanto:

$$\begin{aligned} \forall z \in E,\ z &= x + y \\ \forall x \in V \subset E,\ (x, y) &= 0 \end{aligned}$$

Ahora tomemos el hecho que x es un subsepacio invariante:

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x \\ (Ay, x) &= (y, Ax) \\ &= \lambda(y, x) = 0 \end{aligned}$$

De nuevo estas demostraciones fueron hechas tomando la ruta didáctica para que sea le sea posible al lector realizar los siguientes ejercicios.

Ejercicio 2.7, utilizar el hecho que $||Ax||^2 = (Ax, Ax)_{||x||=1}$ para un operador hermítico y demostrar la desigualdad de Cauchy Schwartz $||Ax||^2 \leq ||A^2x||$
Ejercicio 2.8, Demostrar que un vector máximo aplicado a un operador hermítico, es un autovector del operador al cuadrado y tiene como autovalor asociado $||A||^2$.
Guía, utilizar el caso de la igualdad de CS; $A^2x = ||Ax||^2 x = \lambda x$.
Y de nuevo la desigualdad de CS para $||Ax||_{||x||=1} = ||A||\ ||x|| = ||A||$ y completar los pasos intermedios.

Proposición Si un operador hermítico tiene vector máximo entonces tiene un autovector con autovalor asociado igual a $\pm||A||$.
Demostración: Utilizamos la expresión obtenida en el ejercicio 2.8 y la factorizamos.

$$\begin{aligned} A^2x &= ||A||^2 x \\ A^2x - ||A||^2 x &= 0 \\ (Ax - ||A||x)(Ax + ||Ax||) &= 0 \\ Ax &= \pm||A||x = \pm\lambda x \end{aligned}$$

Estos resultados son bastante importantes porque nos muestran formas de calcular normas de operadores y autovalores.
Teorema Todo operador hermítico en un espacio Euclídeo tiene n autovectores ortogonales entre sí.
Demostración: La demostración formal de este teorema escapa a la visión del curso pero puede ser vista aquí.
Un resultado importante de este teorema es que los operadores Hermíticos en dimensiones finitas son diagonalizables.
Ahora que entendemos el comportamiento de los operadores Hermíticos en dimensión finita vamos a realizar un salto al infinito y más allá.