Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Mecánica Clásica
Auxiliar: Diego Sarceño
7 de noviembre de 2022

Solución HT 4

Ejercicio 1
La ecuación de movimiento

$$m\dot{v} = -mkv,$$

integrando

$$v(t) = v_o e^{-kt}, \qquad x(t) = \frac{v_o}{k}\left(1 - e^{-kt}\right).$$

Graficando para la velocidad initial $v_o = 10m/s$

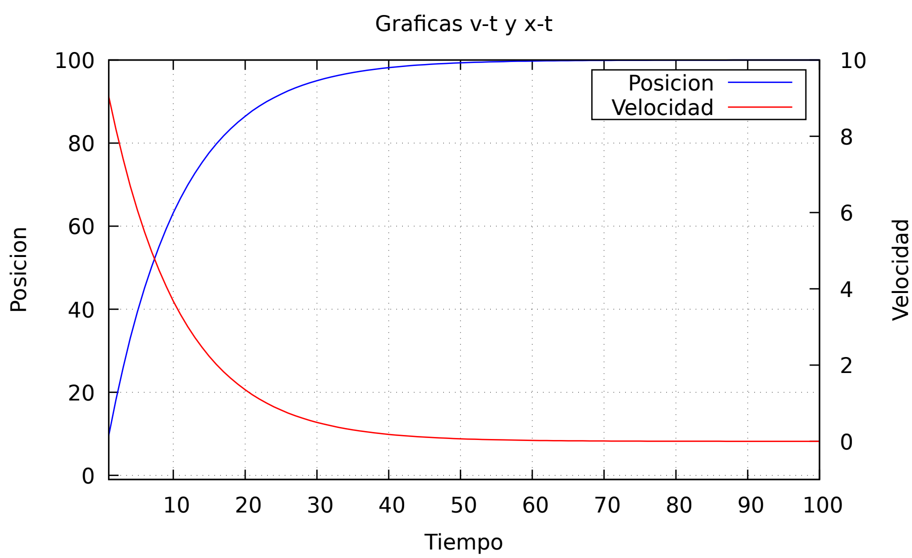

Figura 1: Grafica Velocidad−Tiempo y Posición−Tiempo.

Ejercicio 2
Tomando las ecuaciones para cada eje

$$x(t) = v_o t\cos\alpha, \qquad y(t) = v_o t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2,$$

Las coordenadas del punto en la trayectoria cruzada por la línea son $(d\cos\beta, d\sin\beta)$. Entonces,

$\mathcal{S}$

calculamos el tiempo para ese punto, dividiendo ambas ecuaciones

$$\frac{d\sin\beta}{d\cos\beta} = \frac{v_o t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2}{v_o t\cos\alpha},$$

Despejando

$$\boxed{t = \frac{2_v o}{g}(\sin\alpha - \cos\alpha\tan\beta).}$$

$\mathcal{S}$

Ejercicio 3
Sin resistencia del aire, se tienen que el tiempo para llegar a su altura máxima esta dado por:

$$\boxed{t = \frac{v_o}{g}.}$$

Con resistencia del aire, la ecuación que lo modela es

$$m\ddot{y} = -mg - bv,$$

separando variables e integrando se tiene

$$\ln\left|\frac{v + \frac{mg}{b}}{v_o + \frac{mg}{b}}\right| = -\frac{b}{m}t$$

como el punto final de la trayectoria es la altura máxima, la velocidad es cero

$$t = \frac{m}{b}\ln\left|1 + \frac{v_o b}{mg}\right|.$$

Expandiendo el logaritmo en series de taylor

$$t = \frac{m}{b}\left(\frac{v_o b}{mg}\right)\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{v_o b}{mg}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{v_o b}{mg}\right)^2 - \cdots\right]$$

para un entorno sin resistencia del aire $b \approx 0$

$$t = \frac{v_o}{g}.$$

$\mathcal{S}$

Ejercicio 4
Las ecuaciones para el proyectil son

$$\begin{cases} x(t) = v_o t\cos\alpha \\ y(t) = v_o t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2. \end{cases}$$

Despejando el tiempo de $x(t)$ y reemplazandolo en $y(t)$; además, tomando $x = D\cos\beta$ y $y = D\sin\beta$

$$D\left[\frac{gD\cos^2\beta}{2v_o^2\cos^2\alpha} - \cos\beta\tan\alpha + \sin\beta\right] = 0,$$

$\mathcal{S}$

luego de un poco de algebra

$$\boxed{D = \frac{2v_o^2 \cos\alpha \sin\alpha - \beta}{g\cos^2\beta}.}$$

Derivando respecto a α

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{2v_o^2}{g\cos^2\beta}[-\sin\alpha\sin\alpha - \beta + \cos\alpha\cos\alpha - \beta]\cos 2\alpha - \beta = 0,$$

entonces

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}.}$$

El rango máximo es

$$\boxed{D_{max} = \frac{v_o^2}{g(1+\sin\beta)}.}$$