Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Métodos Matemáticos para Física, Semestre 2, 2023
Profesor: Dr. Juan Ponciano
Auxiliar: Diego Sarceño

Guía 9

Función de Green

Luego de estudiar los operadores diferenciales lineales, ahora nos enfocaremos en métodos basados en operadores integrales, en concreto, los llamados**funciones de Green**. Estas funciones nos "desbloquean" la solución a problemas que contengan un término no homogeneo (término fuente), relacionandolo con un operador integral que contenga esta fuente.

Delta de Dirac:

Esta es una herramienta bastante utilizada en electrostática, pero la idea física detrás de ella la pueden leer en "Motivation and Overview". La idea física se puede ver como una bola de billar estática en el tiempo $t = 0$, luego es golpeada por otra bola impartiendo un momento p, el intercambio de momentum no es instantaneo, pero para efectos prácticos la energía se transfiere instantáneamente. La fuerza sería $p \cdot \delta(t)$. A esta se le conoce como la función Delta de Dirac

$$\delta(x) \simeq \begin{cases} \infty, & x = 0; \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

Esta función cumple con algunas propiedades utiles:

- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1.$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}t = f(\tau).$

Teniendo esto en mente, es momento de introducir la ecuación de Laplace.

Función de Green:

Para un operador diferencial no homogeneo se tiene a la función de Green como una forma de solución del sistema. Es decir que si L es un operador diferencial lineal, entonces

- La función de Green G es la solución a la ecuación $LG = \delta$, con δ como la delta de Dirac.
- la solución al problema de valores iniciales $Ly = f$ es la convolución de $G * f$.

Visto un poco más formal y basandonos en la construcción de la función de Green, se puede decir que: La función de Green de la ecuación $L_n y = f$[a] es la función numérica $G(t,\tau)$, definida en el cuadrado Q[b] y que tiene las siguientes propiedades:

- La función $G(t,\tau)$ y sus derivadas respecto a t hasta el orden $n-2$ son continuas respecto

$\mathcal{S}$

a τ en $[a, b]$.

- Las derivads respecto a t de orden $n-1$ y n son continuas con respecto a τ en el conjunto $[a, \tau) \cup (\tau, b]$.
- las derivadas respecto a t de orden $n-1$ en $t = \tau$, tiene un salto igual a la unidad

$$\frac{\partial^{n-1} G(\tau+0, \tau)}{\partial t^{n-1}} - \frac{\partial^{n-1} G(\tau-0, \tau)}{\partial t^{n-1}} = 1.$$

- Para $t \neq \tau$ la función $G(t, \tau)$, como función de t satisface la ecuación homogenea $L_n y = 0$.

[a] $L_n y = y^{(n)} + a_1(t) y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t) y$.
[b] Denotemos $Q := \{(t, \tau) : t \in [a, b], \quad \tau \in [a, b]\}$.

Teniendo estas pequeñas definiciones es posible ver y estudiar las funciones de green en problemas de 1 dimensión y sus soluciones (ver Arfken, Capítulo 10.1, p452). Pansando a problemas en más dimensiones, se agregan un par de propiedades a las funciones de Green.

$\mathcal{S}$

Otras Propiedades de la Función de Green:

Cuando L y sus condiciones de frontera definen el problema de vectores propios $L\psi = \lambda\psi$ con las funciones propias $\varphi_n(\mathbf{r})$ y sus correspondientes valores propios λ_n, entonces

- $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ es simétrico,
- $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ tienen la expansion de funciones propias

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_n \frac{\varphi_n^*(\mathbf{r}_2) \varphi_n^*(\mathbf{r}_1)}{\lambda_n}.$$

La forma que tendrán estas funciones de Green se pueden encontrar analíticamente, pero ya no estamos para estos trotes, así que les adjunto las funciones de Green para los diferentes operadores: Tabla de Funciones y también se puede revisar la tabla 10.1, de Arfken. Además, para tener una buena idea de lo que son las funciones de green al menos un de manera superficial (para entenderlo mejor), ver el siguiente video. El ejemplo visto en clase fue extraído de la página de Brilliant.

Y, como último añadido, se tienen algunas identidades de Green.

$\mathcal{S}$

Primera Identidad de Green:

Esta identidad se deriva del Teorema de la Divergencia aplicado a un campo vectorial $\mathbf{F} = \psi \boldsymbol{\nabla} \varphi$, entonces

$$\int_U \psi \nabla^2 \varphi \, \mathrm{d}V = \oint_{\partial U} \psi (\boldsymbol{\nabla} \varphi \cdot n) \, \mathrm{d}S - \int_U (\boldsymbol{\nabla} \varphi \cdot \boldsymbol{\nabla} \psi) \, \mathrm{d}V \, .$$

$\mathcal{S}$

Segunda Identidad de Green:

Se tiene:

$$\int_U \left(\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi \right) \mathrm{d}V = \int_{\partial U} (\psi \boldsymbol{\nabla} \varphi - \varphi \boldsymbol{\nabla} \psi) \cdot n \, \mathrm{d}S \, .$$

Problemas

Ejercicio 1
Construya la función de Green para

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(k^2x^2-1)y=0.$$

Sujeta a las condiciones de frontera $y(0)=y(1)=0$.

Ejercicio 2
Encuentre la función de Green para la ecuación

$$-\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\frac{y}{4}=f(x),$$

sujeta a las condiciones de frontera $y(0)=y(\pi)=0$.

Ejercicio 3
Visto el video video, resuelva el ejercicio propuesto.

1. Explique $F(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$.
2. La interpretación de $\delta(t-\tau)$.
3. Reinterprete $F(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$.
4. Que interpretación tiene $G(t,\tau)$?
5. Interprete $x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\tau)G(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau$.

Bibliografía

[1] Arfken, G. B., & Weber, H. J. (2013). *Mathematical methods for physicists.*

[2] Chow, T. L. (2000). *Mathematical Methods for Physicists: A concise introduction.* Cambridge University Press.

[3] Antuña, J. (2014). *Métodos Matemáticos de la Física.* Editorial Universitaria La Habana Cuba.