Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas

Métodos Matemáticos de la Física
Hoja de trabajo 6

PROBLEMA 1

1. Use la definición de la función generatriz de polinomios de Legendre,

$$\psi(x,\xi) = \frac{1}{\sqrt{1-2x\xi+\xi^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \xi^2, \tag{1}$$

para mostrar que se satisface la ecuación

$$(1-2x\xi+\xi^2)\frac{\partial\psi}{\partial\xi} - (x-\xi)\psi = 0. \tag{2}$$

2. A partir de esta ecuación, y usando las representaciones en serie de ψ y $\partial\psi/\partial\xi$, muestre que para todo $n \geq 1$ se cumple que

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)P_n(x) + P_{n-1}(x) = 0. \tag{3}$$

PROBLEMA 2

1. Muestre que se satisface

$$\xi\frac{\partial\psi}{\partial\xi} - (x-\xi)\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

2. Utilice la representación en serie de ψ para demostrar que se satisface la fórmula de recurrencia

$$nP_n(x) - xP_n'(x) + P_{n-1}'(x) = 0 \tag{5}$$

PROBLEMA 3

A partir de la identidad

$$\xi\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi\psi) \equiv \xi\left(\xi\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \psi\right) \tag{6}$$

demostrar que se satisface

$$nP_{n-1}(x) - P_n'(x) + xP_{n-1}'(x) = 0. \tag{7}$$

PROBLEMA 4

Utilice las fórmulas de recurrencia, para demostrar que los polinomios de Legendre satisfacen la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)P_n'(x)] + n(n+1)P_n(x) = 0, \qquad \text{con } n \in \mathbb{N} \tag{8}$$