Universidad de San Carlos
Escuela: ECFM
Carrera: Matemática

Álgebra Lineal 1
Cat. José Carlos Bonilla
Primer semestre de 2016

PROBLEMAS RETO

Versión: 2.0

— LEYENDA —

★ Indicador del nivel de dificultad. 1 es un problema reto simple, apropiado para estudiantes que tienen poca o ninguna experiencia con demostraciones. 2 y 3 marcan las dificultades apropiadas para el estudiante promedio. 4 o mayor indica una dificultad más apropiada para estudiantes con experiencia que busquen un desafío significativo (Dicha experiencia puede provenir de una carrera estudiada previamente, o de entrenamiento para competencias de Matemática). También pueden ser intentados por estudiantes con poca experiencia, siempre y cuando estén dispuestos a dedicar un período de tiempo prolongado en la solución, requiriendo un poco de guianza.

🕒 Indicador del tiempo esperado para resolver el problema. A grandes razgos, el número que acompaña a este reloj indica la cantidad aproximada de horas requeridas (de trabajo diligente) para resolver un problema. Aquellos marcados con 1 podrían requerir menos tiempo. Este tiempo incluye la investigación previa de conceptos requeridos en la solución. Naturalmente, problemas de dificultad elevada presuponen que el estudiante ya posee conocimientos previos que serían investigados en problemas de menor dificultad.

¢ Indicador del valor del problema en créditos. La suma de los créditos de los problemas resueltos debe superar un mínimo indicado en las instrucciones para los problemas reto.

PARTE I — CAMPOS, ESPACIOS VECTORIALES Y PRODUCTOS

1 | ★ 2 🕒 2 Fórmula de la distancia. ¢ 14

Sean P y Q puntos y $\mathbf{n}$ un vector en el espacio $\mathbb{R}^3$. Sea P' el punto de intersección de la recta que pasa por P, en el sentido de $\mathbf{n}$, y del plano que pasa por Q perpendicular a $\mathbf{n}$. Definimos la **distancia** de P a ese plano como la distancia que hay entre P y P'. Demostrar que la fórmula general para la distancia está dada por:

$$\frac{|(Q-P)\cdot\mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}$$

Use la fórmula para calcular la distancia entre el punto $(1,1,2)$ y el plano $3x+y-5z=2$.

2 | ★ 1 ◷ 1 Producto escalar de funciones. ¢ 8

Considerar las funciones continuas definidas sobre el intervalo $[-1, 1]$. Defínase el producto escalar de dos de dichas funciones f, g como

$$\int_{-1}^{+1} f(x)g(x)\,dx$$

También denotaremos con $\langle f, g\rangle$ la misma integral. Verificar que se satisfacen las cuatro reglas para un producto escalar; en otras palabras, mostrar que:

PE 1. $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$
PE 2. $\langle f, g + h\rangle = \langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle$
PE 3. $\langle cf, g\rangle = c\langle f, g\rangle$
PE 4. Si $f = 0$, entonces $\langle f, f\rangle = 0$ y si $f \neq 0$, entonces $\langle f, f\rangle > 0$.

3 | ★ 3 ◷ 2 Producto de Fourier. ¢ 18

Considérense las funciones continuas definidas sobre el intervalo $[-\pi, \pi]$. Definir un producto escalar para este intervalo, semejante al del problema anterior. Demostrar que las funciones $\operatorname{sen} nx$ y $\cos mx$ son ortogonales en este producto escalar para cada elección de $m, n \in \mathbb{Z}$.

4 | ★ 2 ◷ 3 Punto más cercano en un subespacio. ¢ 16

Sean $B_1, B_2, \ldots, B_m$ vectores unitarios en $\mathbb{R}^n$, mutuamente perpendiculares; esto es $B_i \cdot B_j = 0$ si $i \neq j$. Sea A un vector en $\mathbb{R}^n$ y sea c_i la componente de A a lo largo de B_i. Sean $x_1, ..., x_m$ números arbitrarios. Demostrar que

$$\|A - (c_1B_1 + ... + c_mB_m)\| \leq \|A - (x_1B_1 + ... + x_mB_m)\|$$

5 | ★ 1 ◷ 2 Producto hermitiano. ¢ 10

Definir la adición de n-uplas de números complejos componente a componente y la multiplicación de una n-upla de números complejos por un escalar como el producto de éste por cada componente de la n-upla. Si $A = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ y $B = (\beta_1, ..., \beta_n)$ son n-uplas de números complejos, definir su producto escalar $\langle A, B\rangle$ como

$$\alpha_1\overline{\beta_1} + \alpha_2\overline{\beta_2} + \ldots + \alpha_n\overline{\beta_n}$$

Donde $\overline{z}$ representa el conjugado complejo. Probar las siguientes reglas:

PH 1. $\langle A, B\rangle = \overline{\langle B, A\rangle}$
PH 2. $\langle A, B + C\rangle = \langle A, B\rangle + \langle A, C\rangle$.
PH 3. Si α es un número complejo, entonces $\langle \alpha A, B\rangle = \alpha\langle A, B\rangle$ y $\langle A, \alpha B\rangle = \overline{\alpha}\langle A, B\rangle$
PH 4. Si $A = 0$, entonces $\langle A, A\rangle = 0$, y en otro caso, $\langle A, A\rangle > 0$.

Dar un ejemplo de dos vectores complejos tales que el producto escalar usual (el de los espacios reales $\mathbb{R}^n$) no cumple PH 4, justificando que el producto en espacios vectoriales complejos sea el definido en este problema.

6 | ★ 3 ◷ 2 **Campos como espacios vectoriales.** **¢ 18**

Sea $\mathbb{K}$ un subcampo de un campo $\mathbb{L}$. Demostrar que $\mathbb{L}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. En particular, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son espacios vectoriales sobre $\mathbb{Q}$. ¿Qué dimensión posee $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$?

7 | ★ 2 ◷ 2 **Campo cuadrático.** **¢ 14**

Sea $\mathbb{K}$ el conjunto de todos los números que se pueden escribir en la forma $a + b\sqrt{2}$, donde a y b son números racionales. Demostrar que $\mathbb{K}$ es un campo.

8 | ★ 1 ◷ 2 **Campo finito.** **¢ 10**

Dar las tablas de la suma y la multiplicación para un campo finito que posea 13 elementos. ¿Cuál es la raíz cuadrada de -1 en dicho campo?

9 | ★ 1 ◷ 2 **Espacio vectorial finito.** **¢ 10**

Dar las tablas de la suma y la multiplicación para un campo finito que posea 7 elementos, según el método visto en clase. A tal campo le llamaremos $\mathbb{Z}_7$. Ahora, considere el espacio vectorial $\mathbb{Z}_7^2$. Enumere todos los elementos de dicho espacio vectorial. Indique cuál vector es el inverso aditivo de cuál vector (puede aparejarlos durante el enumeramiento, para ahorrar tiempo).

PARTE II — ÁLGEBRA MATRICIAL

10 | ★ 1 ◷ 1 **Potencia de una matriz.** **¢ 8**

Encontrar una fórmula en términos de n para la n-ésima potencia de la matriz A. No es necesario demostrar que la fórmula es válida.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

11 | ★ 2 ◷ 2 **Determinante binomio potencia perfecta.** **¢ 14**

Si la matriz posee n filas, demostrar:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & x & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & x \end{vmatrix} = (x+1)^{n-1}$$

12 | ★ 3 ◷ 3 Matriz tri-diagonal. ¢ 20

Si la matriz posee n filas, demuestre que:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = n + 1$$

13 | ★ 2 ◷ 2 Factoriales y determinantes. ¢ 14

Encontrar una expresión en términos de factoriales para el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{vmatrix}$$

14 | ★ 4 ◷ 4 Generalización. ¢ 26

Generalice la expresión calculada en el problema anterior para matrices de tamaño arbitrario, y demuestre que su fórmula es válida.

15 | ★ 2 ◷ 3 Matriz idempotente. ¢ 16

Sean a, b, c números reales tales que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ y consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

Sea $M = A^2 + I_3$, demostrar que M es idempotente.

16 | ★ 3 ◷ 3 Raíz quinta de la identidad matricial. ¢ 20

Hallar una matriz A de 2×2 con entradas reales, distinta de la identidad, tal que $A^5 = I_2$.

17 | ★ 1 ◷ 2 Raíz cuadrada de la identidad negativa. ¢ 10

Hallar una matriz A de 2×2 con entradas reales, tal que $A^2 = -I_2$.

18 | ★ 1 ◷ 3 Exploración de la no conmutatividad. ¢ 12

Determinar si existen o no matrices A, B de 2×2, tales que $AB - BA = I_2$.

19 | ★ 4 ◷ 1 **Exploración de la no conmutatividad, versión avanzada.** ¢ 20

Determinar si existen o no matrices A, B de $n \times n$, para algún $n \in \mathbb{N}$, tales que $AB - BA = I_n$.

20 | ★ 5 ◷ 5 **Estrategia ganadora.** ¢ 32

Alicia y Bob se toman turnos jugando en una matriz inicialmente vacía de 2008×2008. En su turno, cada jugador escribe el número que desee, en alguna de las casillas que permanezca vacía. Una vez la matriz esté completamente llena, Alicia gana si el determinante es distinto de cero, Bob gana si es cero. Si Alicia juega primero, ¿alguno de los jugadores posee una estrategia ganadora? En caso afirmativo, indicarla, en caso negativo, demostrarlo.

21 | ★ 1 ◷ 3 **Matrices simétricas singulares con entradas enteras.** ¢ 12

Hallar todas las matrices simétricas singulares con entradas enteras comprendidas en el intervalo $[-9, 9]$, es decir, tales que cada uno de sus registros es un número entero mayor que -10 y menor que 10.

22 | ★ 6 ◷ 5 **Submatrices y cotas.** ¢ 36

Considere una matriz M de 1987×1987, con entradas reales. Suponga que cada entrada no excede al número 1, y han sido elegidas de forma que cada submatriz de 2×2 está compuesta de cuatro entradas cuya suma es cero. Demuestre que la suma de las entradas de M no puede exceder a 1987.

PARTE III — BASES, APLICACIONES Y TEORIA ESPECTRAL

23 | ★ 3 ◷ 3 **Bases y Subespacios generados.** ¢ 20

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 3 y consideremos los siguientes vectores de V: $\mathbf{a} = (\alpha, 1, -2)$, $\mathbf{b} = (1, \alpha, 2)$ y $\mathbf{c} = (2\alpha, 1, 0)$.

- ¿Para qué valores de α estos vectores constituyen una base de V?
- ¿Existe algún valor de α para el cual $\dim(\operatorname{span}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}) = 1$?
- ¿Qué valores puede tomar $\dim(\operatorname{span}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\})$?

24 | ★ 2 ◷ 2 **Kernel de la derivada.** ¢ 14

Sea V el espacio vectorial que consta de todas las funciones que poseen derivadas de todos los órdenes, definidas en el dominio $\mathbb{R}$. Para un $n \in \mathbb{Z}^+$, considere la n-ésima derivada como una aplicación lineal $D^n : V \to V$. ¿Cuál es el kernel de D^n? Justifique su respuesta.
Pista: comience encontrando el kernel de las aplicaciones D y D^2.

25 | ★ 3 ◷ 3 **Conservación de la traza.** ¢ 20

Sea A una matriz de 2×2 con entradas reales. Considere una matriz de cambio de base B. Demuestre que la traza de la matriz A se conserva bajo el cambio de coordenadas, esto es: $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B^{-1}AB)$.

26 | ★ 5 ◷ 3 **Traza del cuadrado de una matriz simétrica.** ¢ 28

Sea T una matriz simétrica de $n \times n$, tal que $\operatorname{tr}(T^2) = 0$. Demuestre que T es la matriz nula.

27 | ★ 2 ◷ 1 **Conservación del paralelismo.** ¢ 12

Si $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una aplicación lineal, interprétela como una transformación geométrica entre dos planos. Demuestre que si dos rectas en el plano dominio son paralelas, entonces sus imágenes también son paralelas, aunque podrían coincidir.

28 | ★ 3 ◷ 3 **Potencia exagerada de una matriz.** ¢ 20

Calcule A^{2016} si A es la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Pista: ¿Cuál es el título de la Parte III? (la sección en la que se encuentra este problema)

29 | ★ 5 ◷ 2 **Puntos fijos en rotaciones de hiperespacios.** ¢ 26

Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Considere una hiperesfera en n dimensiones. ¿Para qué valores de n se cumple que cualquier rotación de la hiperesfera deja forzosamente puntos fijos?

30 | ★ 2 ◷ 1 **Kernel de un funcional.** ¢ 12

Hallar un funcional lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que su kernel sea el plano $3x + 2y - z = 0$.

31 | ★ 2 ◷ 3 **Números de Fibonacci.** ¢ 16

Demuestre que los números de Fibonacci F_n cumplen la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad \text{para } n \in \mathbb{Z}^+$$

¿Cuáles son los valores propios de la matriz que aparece en el miembro izquierdo (sin el exponente), y qué relación tienen con la sucesión de Fibonacci? ¿Cómo se puede demostrar la identidad de Cassini empleando la ecuación matricial anterior?

Aclaración: este problema requiere investigar conceptos, como la sucesión de Fibonacci y la identidad de Cassini, para trabajarlo.

32 | ★ 4 ◷ 2 Intersección de aniquiladores. ¢ 22

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita. Para cada subespacio W, se define su aniquilador W^0, de la siguiente manera: $W^0 = \{f : V \to \mathbb{R} \mid f(w) = 0\ \forall w \in W\}$. Sean W_1, W_2 subespacios de V. Demuestre que:

$$W_1^0 \cap W_2^0 = (W_1 + W_2)^0$$

33 | ★ 2 ◷ 4 Aplicaciones inversas. ¢ 18

En los siguientes ejercicios, $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una aplicación lineal. Demuestre cada oración, o refútela con un contraejemplo.

- Si $Lv = 5v$ para cada $v \in \mathbb{R}^2$, entonces $L^{-1}v = \frac{1}{5}v$, para cada $v \in \mathbb{R}^2$.
- Si $Lv = \mathrm{O}$ para algún vector $v \in \mathbb{R}^2$, entonces L no es invertible. (O es el vector nulo)
- La identidad es la única aplicación lineal que es su propia inversa.
- Si $L^2 = \mathbf{O}$, entonces L no es invertible. (**O** es la aplicación nula)
- Si $L^2 = L$, entonces L es invertible.

34 | ★ 2 ◷ 2 Ortantes y espacio ortogonal. ¢ 14

Considere un vector v tal que todas sus coordenadas (en la base canónica) son no nulas. Demostrar que el espacio ortogonal al vector v contiene vectores de todos los ortantes, excepto el ortante en el que se encuentra v y en el que se encuentra $-v$.

Nota: un ortante es la generalización de cuadrante y octante a $\mathbb{R}^n$.

35 | ★ 1 ◷ 2 Invarianza del polinomio característico. ¢ 10

Demuestre que el polinomio característico de un operador lineal $\mathcal{L} : V \to V$ no depende de la elección de la base de V (V es un espacio vectorial finito-dimensional).

Pista: considere una matriz de cambio de base.

36 | ★ 1 ◷ 1 Cambios de Base. ¢ 8

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita. Suponga que B_1, B_2, B_3, B_4 son bases diferentes de V. Si las matrices P, Q, R causan cambios de bases de B_1 a B_2, B_1 a B_3, y B_2 a B_4, respectivamente, elaborar una tabla que muestre las 16 posibles matrices de cambio de base para cada elección de un par de bases de entre las 4 mencionadas.

Problemas: **36**. Créditos: **598**. Promedio/problema: **¢16.6**. Rango: **¢8 — ¢36**.