Métodos matemáticos de la física

1er examen parcial
2do semestre 2023

**Instrucciones: dispone de tres horas para resolver el examen. Hora de inicio: 7:00 am. Deberá subir un pdf de la soluciíon del parcial a la plataforma de UVirtual. Hora límite para subir el examen resuelto: 10:05 am.**

1. Demuestre el siguiente teorema: Suponga que $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una secuencia de complejos tales que $\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2$ converge. Suponga además que $E$ es un espacio euclídeo completo con un sistema ortonromal completo $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Entonces, hay un elemento $x \in E$ cuyos coeficientes de fourier con respecto de $\{e_k\}$ son los complejos $\alpha_k$ y,

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2 \tag{1}$$

2. Considere, la función definida para $n \geq 1$ como

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n \\ x - \frac{1}{n}, & \text{si } 1/n \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{2}$$

Considere la norma suprema y muestre si la secuencia $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en norma a la función $g(x) = x$.

3. Muestre que el espacio $l_1 := \{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty}|x_n| < \infty\}$ es un espacio completo.

4. Para una función periódica $f(x)$ de período $2L$ se define el desarrollo en series de Fourier como

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{L}x + b_n \sin\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{3}$$

Encuentre los coeficientes $a_n$ y $b_n$ que proveen la mejor aproximación de la serie a la función $f(x)$ y escriba la identidad de Parseval correspondiente esta serie de Fourier.

Métodos matemáticos de la física

2do examen parcial

2do semestre 2023

**Instrucciones**: El examen inicia a las 7:00 am y finaliza a las 10:00 am. Luego de finalizado dispone de 15 minutos para escanearlo subirlo a la plataforma de Uvirtual. Los exámenes entregados después de las 10:15 am no serán calificados.

1. Use el método de separación de variables para resolver el siguiente problema de valores en la frontera para la ecuación de calor

$$\begin{aligned} u_t &= k u_{xx}, \qquad 0 < x < 3, \quad t > 0, \\ u(0,t) &= u_x(3,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= \sin\frac{\pi}{2}x - \sin\frac{5\pi}{6}x, \end{aligned} \tag{1}$$

2. Demuestre que para cada operador acotado y autoadjunto $\mathbf{A}$ en un espacio de Hilbert, al menos uno de los valores $\|\mathbf{A}\|$ o $-\|\mathbf{A}\|$ es autovalor de $\mathbf{A}$.

3. Considere el operador lineal $A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ tal que

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C} \tag{2}$$

   a) Considere los siguientes casos: dote al espacio $\mathbb{C}^2$ con las normas $\|.\|_\infty$, $\|.\|_1$ y $\|.\|_2$, respectivamente. En cada caso encuentre la norma del operador $A$.

   b) Calcule en cada caso la norma del operador $A$ dado por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

4. Resuelva el problema de valores en la frontera

$$\begin{aligned} (xy')' + \frac{y}{x} &= \frac{1}{x}, \qquad x \in [1, e], \\ y(1) = y(e) &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

   a partir del problema de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned} (xy')' + \frac{y}{x} &= -\lambda \rho y, \qquad x \in [1, e], \\ y(1) = y(e) &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Métodos matemáticos de la física

3er examen parcial

2do semestre 2023

**Instrucciones**: El examen inicia a las 6:45 am y finaliza a las 8:15 am. Luego de finalizado dispone de 10 minutos para escanearlo y subirlo a la plataforma de Uvirtual. Los exámenes entregados después de las 10:25 am no serán calificados.

1. Considere una placa metálica circular con coeficiente de difusividad térmica $K$. Suponga que las orillas de la placa se mantienen aisladas y que la temperatura $T$ de la placa está distribuida según $T(r, \theta, t = 0) = r \cos\theta$. Encuentre la expresión de la temperatura $T(r, \theta, t)$ para $t > 0$.

2. Use el métodos de funciones de Green para resolver el problema de la cuerda vibrante de longitud $L$, con los extremos fijos, velocidad incial nula y configuración inicial dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq L/2 \\ L - x, & L/2 \leq x \leq L \end{cases} \tag{1}$$

Métodos matemáticos de la física

Examen final

2do semestre 2023

**Instrucciones**: El examen inicia a las 10:00 am y finaliza a las 12:00 hrs. Luego de finalizado dispone de 15 minutos para escanearlo y subirlo a la plataforma de Uvirtual. Los exámenes entregados después de las 12:15 pm no serán calificados.

1. Sea $\{x_n\}$ una secuencia de Cauchy en un espacio métrico $(X, \rho)$. Supongamos que la secuencia $\{y_n\} \subset X$ satisface $\rho(x_n, y_n) < |a_n|$ donde $\{a_n\}$ es una secuencia en $\mathbb{R}$ convergente a cero. Demuestre que $\{y_n\}$ es una secuencia de Cauchy.

2. Encuentre la solución $\Phi(r, \theta)$ de la ecuación de Laplace, dentro de una esfera de radio $R$, si

$$\Phi(r,\theta) = \begin{cases} 1, & 0 \le \theta \le \pi/2 \\ 0, & \pi/2 \le \theta \le 0 \end{cases} \tag{1}$$

3. Encuentre la función de Green correspondiente a la ecuación de Laplace bidimensional $\nabla^2 U(r, \theta) = 0$ aplicada a un disco de radio $R$ con la restricción en la frontera del disco $U(R, \theta) = f(\theta)$. Las coordenadas $r$ y $\theta$ están definidas en los siguientes intervalos: $0 \le r \le R$, $-\pi \le \theta \le \pi$. Compare la solución en $r = 0$ con la solución en la frontera del disco.