Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas

Métodos Matemáticos de la Física
Hoja de trabajo 4

1. Demostrar que si $\mathbf{A}$ es un operador lineal acotado sobre un espacio euclídeo $\mathbf{E}$, y x un vector no nulo en E, entonces

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|. \tag{1}$$

   Luego, demostrar que esta desigualdad es válida para todo $x \in \mathbf{E}$.

2. Demostrar que la norma de un operador acotado puede escribirse como

$$\|\mathbf{A}\| = sup_{(\text{x, y unitarios})}|(y, Ax)| \tag{2}$$

3. Demostrar que si $\mathbf{A}$ es un operador acotado, entonces la norma del operador adjunto es igual a la norma de $\mathbf{A}$.

Demostrar las siguientes proposiciones:

1. Sea $\mathbf{A}$ un operador simétrico y $\mathbf{e}$ un vector unitario. Entonces $\|\mathbf{Ae}\|^2 \leq \|\mathbf{A^2e}\|$. La igualdad sólo vale si $\mathbf{e}$ es un autovector de $\mathbf{A}^2$ con autovalor $\lambda = \|\mathbf{Ae}\|^2$.
2. Si $\mathbf{u}$ es un vector unitario máximo de un operdor simétrico acotado $\mathbf{A}$, entoces $\mathbf{u}$ es un autovector de $\mathbf{A}^2$ correspondiente al autovalor $\lambda = \|\mathbf{A}\|^2$.
3. Si el operador simétrico acotado $\mathbf{A}$ tiene un vector máximo $\mathbf{u}$, entonces $\mathbf{A}$ también tiene un autovecotr con autovalor $\|\mathbf{A}\|$ o $-\|\mathbf{A}\|$.