

Métodos matemáticos de la física

Examen final

2do semestre 2023

**Instrucciones:** El examen inicia a las 10:00 am y finaliza a las 12:00 hrs. Luego de finalizado dispone de 15 minutos para escanearlo y subirlo a la plataforma de Uvirtual. Los exámenes entregados después de las 12:15 pm no serán calificados.

1. Sea  $\{x_n\}$  una secuencia de Cauchy en un espacio métrico  $(X, \rho)$ . Supongamos que la secuencia  $\{y_n\} \subset X$  satisface  $\rho(x_n, y_n) < |a_n|$  donde  $\{a_n\}$  es una secuencia en  $\mathbb{R}$  convergente a cero. Demuestre que  $\{y_n\}$  es una secuencia de Cauchy.
2. Encuentre la solución  $\Phi(r, \theta)$  de la ecuación de Laplace, dentro de una esfera de radio  $R$ , si

$$\Phi(r, \theta) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0, & \pi/2 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad (1)$$

3. Encuentre la función de Green correspondiente a la ecuación de Laplace bidimensional  $\nabla^2 U(r, \theta) = 0$  aplicada a un disco de radio  $R$  con la restricción en la frontera del disco  $U(R, \theta) = f(\theta)$ . Las coordenadas  $r$  y  $\theta$  están definidas en los siguientes intervalos:  $0 \leq r \leq R$ ,  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ . Compare la solución en  $r = 0$  con la solución en la frontera del disco.