

# Métodos matemáticos para la física

2do semestre 2021

1era retrasada

**Indicaciones:** Deje indicado en detalle todo el procedimiento para llegar a los resultados.

Horario de examen: 8:00 -10:00

Hora límite para subir el examen a la plataforma de Uvirtual: 10:10. No se aceptarán exámenes entregados después de la hora límite.

1. Considere el operador diferencial

$$L = \left( \frac{d}{dx} \right)^2 + 2 \left( \frac{d}{dx} \right) + k(x) \quad (1)$$

donde  $k(x)$  es una función a valores en los reales. Considere el dominio  $x \in [0, 1]$  con condiciones de frontera de Neumann.

- a) Encuentre una función  $\rho(x)$  para la que  $L$  es autoadjunto en la norma  $\|y\|_\rho^2 = \int_0^1 y^2 \rho \, dx$ .
  - b) Muestre que  $L$  debe tener un autovalor positivo si  $a(x)$  no es idénticamente nula y  $\int_0^1 a(x) dx \geq 0$ .
2. Sea  $A$  un operador lineal. Mostrar que el subespacio nulo de  $A^\dagger$  coincide con el complemento ortogonal de la imagen de  $A$  ( $Rank \, A$ ).
  3. Sea  $F$  el conjunto de todas las secuencias  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  tales que existe una cota  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n > N$ ,  $x_n = 0$ . Considere la norma de una secuencia de este conjunto definida por

$$\|\{x_n\}\| = \sup(|x_n| : n \in \mathbb{N}) \quad (2)$$

Construyendo explícitamente una secuencia de Cauchy en tal conjunto, muestre si  $F$  es espacio de Banach.

4. Sea  $p_1(x), p_2(x)$  y  $p_3(x)$  tres polinomios ortogonales formados a partir del conjunto  $\{1, x, x^2\}$ , donde  $-1 \leq x \leq 1$ . Determine los coeficientes constantes del polinomio de segundo grado  $c_1 p_1(x) + c_2 p_2(x) + c_3 p_3(x)$  que dan la mejor aproximación en  $L_2(-1, 1)$  a la función  $e^x$ , mostrando claramente que la solución obtenida es la mejor aproximación.