Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Métodos Matemáticos para Física, Semestre 2, 2023
Profesor: Dr. Juan Ponciano
Auxiliar: Diego Sarceño

Guía 9

Función de Green

Luego de estudiar los operadores diferenciales lineales, ahora nos enfocaremos en métodos basados en operadores integrales, en concreto, los llamados**funciones de Green**. Estas funciones nos "desbloquean" la solución a problemas que contengan un término no homogeneo (término fuente), relacionandolo con un operador integral que contenga esta fuente.

VIDEO
TABLA DE FUNCIONES
FUNCIONES DE GREEN EN LA FÍSICA
identidades

$\mathcal{S}$

Delta de Dirac:

Esta es una herramienta bastante utilizada en electrostática, pero la idea física detrás de ella la pueden leer en "Motivation and Overview". La idea física se puede ver como una bola de billar estática en el tiempo $t = 0$, luego es golpeada por otra bola impartiendo un momento p, el intercambio de momentum no es instantaneo, pero para efectos prácticos la energía se transfiere instantáneamente. La fuerza sería $p \cdot \delta(t)$. A esta se le conoce como la función Delta de Dirac

$$\delta(x) \simeq \begin{cases} \infty, & x = 0; \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

Esta función cumple con algunas propiedades utiles:

- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1$.
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}t = f(\tau)$.

Teniendo esto en mente, es momento de introducir la ecuación de Laplace.

$\mathcal{S}$

Función de Green:

Para un operador diferencial no homogeneo se tiene a la función de Green como una forma de solución del sistema. Es decir que si L es un operador diferencial lineal, entonces

- La función de Green G es la solución a la ecuación $LG = \delta$, con δ como la delta de Dirac.
- la solución al problema de valores iniciales $Ly = f$ es la convolución de $G * f$.

Problemas

Ejercicio 1
Encuentre el potencial en todas las regiones de un capacitor esférico (radio R_o), con la siguiente condición de frontera.

$$\phi(R_o,\theta) = \begin{cases} V & 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ -V & \pi/2 < \theta \leq \pi. \end{cases}$$

Ejercicio 2
Demuestre que los polinomios de Hermite son ortogonales y encuentre su norma utilizando la función peso $w(x) = e^{-x^2/2}$.

Ejercicio 3
Demuestre las relaciones de recurrencia para las funciones de Hermite:

- $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x)$.
- $H'_{n+1}(x) = 2(n+1)H_n(x) = 2H_n(x) + 2xH'_n(x) - H''_n(x)$.

Ejercicio 4
Demuestre las relaciones de recurrencia para las funciones de Bessel de 1er orden:

- $J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x)$.
- $J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x)$.

Ejercicio 5
Realize lo solicitado en el problema 2, pero para las funciones de Bessel. Utilice esta integral para iniciar:

$$\int_0^1 x J_\nu(\lambda x) J_\nu(\mu x) \, \mathrm{d}x \, .$$

Bibliografía

[1] Arfken, G. B., & Weber, H. J. (2013). *Mathematical methods for physicists.*

[2] Chow, T. L. (2000). *Mathematical Methods for Physicists: A concise introduction.* Cambridge University Press.