

Métodos Matemáticos de la Física
Hoja de trabajo 7

1. Una carga $+q$ se coloca en el origen y cargas $-q$ se colocan a distancias $\pm a$ a lo largo del eje polar. Encuentre el potencial electrostático Φ en un punto (r, θ, ϕ) con $r > a$.
2. Encuentre las soluciones a la ecuación de Legendre

$$\frac{d}{du} \left[(1 - u^2) \frac{dP}{du} \right] + l(l + 1)P = 0$$

utilizando una solución del tipo:

$$P(u) = u^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j u^j.$$

3. Considere una esfera de radio a , centrada en el origen del sistema coordenado. El potencial en su superficie es

$$\Phi(a, \theta, \phi) = V_0 \cos^3(\theta)$$

donde θ es el ángulo polar. Encontrar el potencial para todo $r > a$.

4. Considere el problema de autovalores

a) Demostrar que el problema

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, y(1) = 0$$

es un problema de Sturm-Liouville.

- b) Encontrar los autovalores y autofunciones del problema
- c) Mostrar que las autofunciones son ortogonales en el intervalo $0 \leq x \leq 1$.
- d) Encontrar el conjunto correspondiente de autofunciones normalizadas, y desarrollar la función $f(x) = 1$ como una superposición de estas autofunciones.