

Métodos matemáticos de la física

2do examen parcial

2do semestre 2021

Instrucciones: El examen inicia a las 8:00 am y finaliza a las 10:30 am. Luego de finalizado dispone de 15 minutos para escanearlo subirlo a la plataforma de Uvirtual. Los exámenes entregados después de las 10:45 am no serán calificados.

1. Use el método de separación de variables para resolver el siguiente problema de valores en la frontera para la ecuación de calor

$$\begin{aligned}u_t &= k u_{xx}, & 0 < x < 3, \quad t > 0, \\u(0, t) &= u_x(3, t) = 0, & t > 0, \\u(x, 0) &= \sin \frac{\pi}{2} x - \sin \frac{5\pi}{6} x,\end{aligned}\tag{1}$$

2. Considere $f(x)$, una función continua en el intervalo $[-\pi, \pi]$, tal que $f(-\pi) = f(\pi)$ y $f'(x) \in L_2(-\pi, \pi)$. Demuestre la convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}\tag{2}$$

donde a_n y b_n son los coeficientes de Fourier de $f(x)$ en el sistema ortonormal $\{\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\}$, con $n \in \mathbb{N}$.

3. Considere el operador lineal $A : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ tal que

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}\tag{3}$$

- a) Considere los siguientes casos: dote al espacio \mathbb{C}^2 con las normas $\|\cdot\|_{\infty}$, $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$, respectivamente. En cada caso encuentre la norma del operador A .

- b) Calcule en cada caso la norma del operador A dado por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}\tag{4}$$

4. Suponga que $\Phi(r, \theta)$ satisface la ecuación de Laplace dentro del hemisferio definido por $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Encuentre $\Phi(r, \theta)$ si

$$\left. \frac{d\Phi}{d\theta} \right|_{\theta=\pi/2} = 0, \quad \text{en } 0 \leq r \leq R\tag{5}$$

$$\Phi(R, \theta) = \sin(\theta), \quad \text{en } 0 \leq \theta \leq R\tag{6}$$