



Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Métodos Matemáticos para Física, Semestre 2, 2023
Profesor: Dr. Juan Ponciano
Auxiliar: Diego Sarceño



GUÍA 9

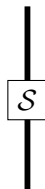
Función de Green

Luego de estudiar los operadores diferenciales lineales, ahora nos enfocaremos en métodos basados en operadores integrales, en concreto, los llamados **funciones de Green**. Estas funciones nos "desbloquean" la solución a problemas que contengan un término no homogéneo (término fuente), relacionándolo con un operador integral que contenga esta fuente.



Operadores Diferenciales:

Teniendo esto en mente, es momento de introducir la ecuación de Laplace.



Ecuación de Laplace:

Es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden de tipo elíptica, es una simplificación de la ecuación de Poisson, así como de la ecuación de Helmholtz.

$$\nabla^2 u = 0.$$

Problemas

Ejercicio 1

Encuentre el potencial en todas las regiones de un capacitor esférico (radio R_o), con la siguiente condición de frontera.

$$\phi(R_o, \theta) = \begin{cases} V & 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ -V & \pi/2 < \theta \leq \pi. \end{cases}$$

Ejercicio 2

Demuestre que los polinomios de Hermite son ortogonales y encuentre su norma utilizando la función peso $w(x) = e^{-x^2/2}$.

Ejercicio 3

Demuestre las relaciones de recurrencia para las funciones de Hermite:

- $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x)$.
- $H'_{n+1}(x) = 2(n+1)H_n(x) = 2H_n(x) + 2xH'_n(x) - H''_n(x)$.

Ejercicio 4

Demuestre las relaciones de recurrencia para las funciones de Bessel de 1er orden:

- $J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x)$.
- $J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x)$.

Ejercicio 5

Realice lo solicitado en el problema 2, pero para las funciones de Bessel. Utilice esta integral para iniciar:

$$\int_0^1 x J_\nu(\lambda x) J_\nu(\mu x) dx.$$

Bibliografía

- [1] Arfken, G. B., & Weber, H. J. (2013). *Mathematical methods for physicists*.
- [2] Chow, T. L. (2000). *Mathematical Methods for Physicists: A concise introduction*. Cambridge University Press.