Métodos matemáticos

1er examen parcial
2do semestre 2021

Instrucciones: El examen finaliza a las 10:00 am. Luego de finalizado dispone de 15 minutos para escanearlo subirlo a la plataforma de Uvirtual. Los exámenes entregados después de las 10:15 am no serán calificados.

1. El espacio $C(a,b)$ es un espacio normado si se le dota de la aplicación

$$\|f\| = \sup\{|f(t)|\} \text{ con } t \in [a,b] \tag{1}$$

   a) Demostrar que tal aplicación es una norma.

   b) Considere en este espacio una secuencia arbitraria de Cauchy $\{f_n\}$. Decir si este espacio es completo evaluando la convergencia de la secuencia.

2. Sea H el espacio de Hilbert $L_2(-1,1)$. Considere en H las funciones

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad f_2(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \qquad f_3(x) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right). \tag{2}$$

   a) Probar que forman un sistema ortonormal y describir algebraicamente el subespacio E que generan.

   b) Sea $f(x) = x^3$. Calcular la distancia de f a E.

3. Explique qué es un espacio unitario y qué es un espacio completo. Demuestre que una secuencia ortonormal $\{x_n\}$ en un espacio unitario E es completa sí y solo sí

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, x_n)|^2 \tag{3}$$

4. Demuestre la continuidad continuidad del producto escalar mostrando que si $S_1 = \{f_n | f_n \in C(a,b)\}$ converge a f y $S_2 = \{g_n | g_n \in C(a,b)\}$ converge a g, con $f, g \in C(a,b)$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} (f_n, g_n) \longrightarrow (f,g) \tag{4}$$