Espacios de Hilbert

Ahora que ya conocemos todas las propiedades de los espacios Euclídeos y tenemos una noción de como funcionan los límites en este tipo de contextos, vamos a definir un nuevo tipo de espacio.

Espacio de Banach

Un espacio de Banach es un espacio completo equipado con una norma específica

Recordemos que completo significa que todas las sucesiones de Cauchy son convergentes. Los espacios finito dimensionales son completos y ahora veremos algunos ejemplos de espacios infiintos que cumplen esa propiedad.

Ejemplos de espacios de Banach: Recordemos de las guías anteriores que todo producto interno produce una norma, pero no toda norma puede escribirse como un producto interno.

- Espacios l^p, definiremos a este tipo de espacios vectoriales con una estructura similar a R^n o C^n. Y la norma de estos de la siguiente manera:

$$||x||_p = (\sum |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \quad 1 < p < \infty$$

- Espacio l^∞, este es el límite de aplicar la norma anterior y el resultado nos da la siguiente norma.

$$||x||_\infty = Sup_i |x_i|$$

- Espacio $C_{(a,b)}$, estas son las funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ que mapean a los números reales con la norma del supremo.

$$f : C_{(a,b)} \to R$$
$$||f|| = \sum Sup|f^i(x)|_{[a,b]}$$

Para demostrar que efectivamente estos espacios son de Banach primero tenemos que demostrar que las normas descritas cumlpen todas las condiciones de una norma. Y tenemos que demostrar que el límite de todas las sucesiones de Cauchy se encuentra dentro del espacio. Las pruebas de completitud escapan los contenidos que serán cubiertos por la asignatura, pero se realiza la prueba de los espacios l^p con objetivos didáctivos.

El espacio l^p es completo.
Demostración: Debemos demostrar que el límite de las sucesiones de Cauchy se encuentran dentro del espacio, para ello exploremos que significa pertenecer al espacio. En este caso necesitamos que la norma de un vector sea finita (al ser finita nos aseguramos que es un número real y pertenece al espacio).

$$||x||_p = (\sum^k |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq M$$

Ahora empleando los términos $m, n \geq N$ de una secuencia de Cauchy y tomando una propiedad que no será demostrada (que los números reales son completos). Nos permite establecer la siguiente desigualdad.

$$|x^n - x^m|^p \leq \sum^k |x^n - x^m|^p \leq \sum^\infty |x^n - x^m|^p \leq \epsilon^p$$

Aquí es donde empleamos sutilmente el teorema de Bolzano Weierstrass y la completitud de R con lo que nos es posible tomar una de las 2 sucesiones anteriores como un miembro del espacio. Reescribimos la expreción que nos será útil de arriba.

$$\sum^k |x^n - x|^p \leq \sum^\infty |x^n - x|^p \leq \epsilon^p$$

Ahora utilizamos de forma astuta la desigualdad triangular y obtenemos la cota buscada:

$$\sum^k |x|^p \leq \sum^k |x - x^m|^p + \sum^k |x^m|$$
$$\leq \sum^\infty |x - x^m|^p + \sum^\infty |x^m|^p \leq \epsilon^p + K$$

La idea general para las demostraciones de completitud sigue los pasos de ese estilo, se puede aumentar o reducir un poco la rigurosidad dependiendo del contexto.
Es importante aclarar de forma explícita que en este momento existen varios contenidos que necesitan un nivel de rigurosidad más allá a los temas que serán cubiertos en esta asignatura, por tanto de ahora en adelante enunciaremos ciertos resultados importantes pero no todos serán demostrados.

Espacio de Hilbert

Un espacio de Hilbert es un espacio completo equipado con un producto interno específico

Nosotros trabajaremos con un tipo específico de espacios de Hilbert llamados espacios de Lebesgue, estos espacios tienen su producto interno definido de la siguiente manera:

$$(f, g) = \int_{\Omega} f^* g d\mu$$

Donde esta integral es una generalización de la integral de Riemman, pero para la finalidad de nuestro curso no existen diferencias.

Un caso especial de este tipo de espacios es L^2, para fines de este curso supondremos que este el espacio de Hilbert sobre el cual está formulada la mecánica cuántica. El PI y la norma inducida de este espacio esta dado por:

$$\langle \psi | \psi \rangle = \int ||\psi||^2 < \infty$$

Así como habíamos estudiado que en los espacios Euclídeos era posible representar a cada vector como una combinación lineal de un sistema ortonormal completo y expresar cada funcional lineal como el producto interno de un vector fijo. Vamos a realizar un poco más de trabajo para poder establecer las mismas relaciones en dimensión infinita. Pero para ello tenemos que definir que significa o si existe un sistema ortonormal completo en este tipo de espacios.

Sistemas ortonormales Completos SOC en espacios de Hilbert

Recordemos que en álgebra lineal para espacios de dimensiones finitas utilizabamos una base para generar cada elemento en el espacio, la extensión al infinito de este proceso se realiza mediante sistemas ortogonales/ortonormales completos. Pero este procedimiento no es imediato y escapa ligeramente al enfoque de este curso, por ello enunciamos únicamente la condición para la existencia de un SOC en un espacio de Hilbert y luego demostraremos que efectivamente es posible representar cada elemento del espacio como una combinación del mismo. De ahora en adelante trabajaremos únicamente en espacios de Hilbert separables como L^2

Proposición un espacio de Hilbert posee un sistema ortonormal completo si es Separable
Demostración: Esta puede encontrarse aquí, pero para ello es necesario entender los conceptos de; infinito contable, clausura de un espacio y subespacio denso.

Proposición Cada elemento en un espacio de Hilbert separable puede representarse como la combinación de un SOC.
Demostración: Supongamos que no es posible representar un elemento del espacio como una combinación lineal de un SOC, ahora estudiaremos como se comportan los coeficientes que sí representan otro elemento del espacio.

$$x' \neq \sum a_i' e_i'$$
$$x = \sum^{\infty} a_i e_i$$

Pero observamos que el elemento x es el límite de la serie de sumas parciales de estos términos.

$$lim_{n\to\infty} ||x - S_n|| \leq \epsilon$$

Como estamos en un espacio completo significa que podemos construir una secuencia de Cauchy que converga al punto deseado. Para hacer la construcción explícita tomemos al complemento ortogonal de las sumas parciales.

$$R_n = x - S_n$$
$$(R_n, S_n) = (x - S_n, S_n) = 0$$

Ejercicio 4.1, calcular explícitamente el PI.
De esto despejamos x, y aplicamos el PI para obtener la siguiente relación.

$$||x||^2 = (x, x)$$
$$= (s_n + R_n, s_n + R_n)$$
$$= ||S_n||^2 + ||R_n||^2 + 0$$
$$\implies ||x||^2 \geq ||S_n||^2$$
$$\geq ||\sum^{\infty} a_i||^2 = \sum^{\infty} |a_i|^2$$

Esta desigualdad es conocida como la Desigualdad de Bessel, la generalización del teorema de pitágoras y es la generalización de nuestra idea de representar cada elemento de un EE como la suma de 2 vectores ortogonales entre sí.

Ejercicio 4.2, argumentar por qué es posible realizar los 4 pasos mostrados de la desigualdad. Consejo recordar que significa formar un SOC.

Ahora regresemos a las sequencias de sumas parciales y apliquemos la relación encontrada.

$$
\begin{aligned}
&||S_{n+m} - S_n||^2 \\
= &|| \sum_{n+1}^{m} a_i e_i || \leq \sum_{n+1}^{|} a_i|^2 \\
&\leq ||x||^2 \leq \epsilon^2
\end{aligned}
$$

Por tanto las secuencias de sumas parciales son sucesiones de Cauchy, pero esto quiere decir que el elemento original x' no puede representarse como un límite de alguna de estas secuencias. Pero esto es una contradicción ya que nuestro espacio es completo $\Rightarrow\Leftarrow$.
Para terminar solo nos aseguramos que sea posible representar algún vector con nuestro SOC ya que esto nos asegura que podemos representarlos a todos, consideremos el siguiente PI.

$$
\begin{aligned}
(e_1, \sum a_i e_i) &= \sum a_i \delta_i^1 \\
&= (a_1, 0, 0, ...)
\end{aligned}
$$

Bajo nuestro nivel de rigurosidad esto es suficiente para mostrar de forma explícita que podemos recuperar los elementos individuales de nuestro SOC realizando productos internos de forma astuta.
Además nos permite expresar los elementos del espacio mediante el PI, los elementos a_i son llamados coeficientes de Fourier generalizados.

$$
\begin{aligned}
x &= \sum a_i e_i \\
x &= \sum (e_i, x) e_i
\end{aligned}
$$

Notemos que de esta manera obtuvimos la extensión para dimensión infinita de como construir vectores de nuestros espacios de Hilbert y que cumplen las mismas propiedades que habían sido definidas anteriormente.

Proposición en un espacio de Hilbert separable se obtiene el caso de la igualdad en la desigualdad de Bessel cuando tomamos un SOC.
Demostración: utilizamos la continuidad del PI.

$$
||x||^2 = (x, x) = lim_{n,n' \to \infty} (S_n, S_{n'}) = \sum |a_i|^2
$$

Esta relación es llamada la Identidad de Parseval. Ejercicio 4.3, demostrar formalmente la identidad de Parseval

Proposición Todo espacio de Hilbert separable es isomorfo a L^2
Demostración: realizamos una demostración semiformal únicamente enunciando la identidad de Parseval y nuestros resultados que cualquier elemento puede ser representado como la combinación lineal de un SOC.

$$\forall x \in H$$
$$||x|| = \sum |a_i|^2 < \infty$$

Funciones y Operadores en Espacios de Hilbert

Ahora que ya podemos representar a los elementos del espacio deseamos alguna manera de representar a las funciones dentro del mismo. Para ello vamos a extender el resultado de que cada función en un EE puede verse como el PI de un vector fijo.

Teorema de Representación de Riesz

En un espacio de Hilbert equipado con PI es posible representar a cada elemento del dual (funcional lineal) como el PI de un vector fijo único cuya norma es equivalente a la del funcional asociado.

$$\forall \phi \in H^*$$
$$\forall x \in H$$
$$\phi(x) = (x, z)$$
$$||\phi(x)|| = ||z||$$

Existen un par de propiedades extras y sutilezas de este teorema que no serán mencionadas.

Demostración: Debemos probar varias propiedades, el orden que tomaremos será primero la existencia del vector, luego la unicidad del mismo y finalmente la condición de la norma.

- Existencia: utilizamos el hecho que podemos expresar a un elemento del espacio de Hilbert como la suma del Kernel de ϕ y su complemento ortogonal, y la continuidad del funcional que será demostrada más adelante. Para ello tomemos 2 elementos que pertenezcan a estos subespacios y un vector arbitrario.

$$k \in \ker \phi, \ p \in \ker \phi^{\perp}$$
$$h \in H$$
$$\phi[(\phi(h))p - (\phi(p))h]$$
$$= \phi(h)\phi(p) - \phi(p)\phi(h) = 0$$

Notamos que ese elemento pertenece al kernel de ϕ , estudiemos que sucede al realizar el PI con su complemento ortogonal.

$$\begin{aligned} &(p, (\phi(h))p - (\phi(p))h) \\ &= (p, k) = 0 \\ \implies &\phi(h)(p, p) = \phi(p)(p, h) \\ \implies &\phi(h) = \frac{(\phi(p))(p, h)}{(p, p)} \\ &= (z, h) \\ \text{con:} \quad &z = \frac{\overline{\phi(p)}}{||p||^2} \end{aligned}$$

Ejercicio opcional, demostrar que un espacio de Hilbert puede escribirse como la suma directa de un subespacio cerrado y su complemento ortogonal. (Esto es la generalización del hecho que podemos escribir un elemnto del espacio como la suma de un vector y su complemento ortogonal).

- Unicidad: Supongamos que existe otro vector z' que también es una representación de riesz, entonces evaluando la norma de la diferencia tenemos.

$$\begin{aligned} ||z - z'|| &= (z - z', x) \\ &= \phi(x) - \phi(x) = 0 \end{aligned}$$

- Propiedad de la norma: Utilizamos la definición de norma de un operador y la desigualdad de Cauchy Schwartz. Vamos a demostrar que las 2 normas deben ser menores o iguales entre sí, por tanto deben ser equivalentes.

$$\begin{aligned} ||\phi(x)||| &\leq ||z||\ ||x|| \\ (z, z) = ||z||^2 = \phi(z) &\leq ||z||\ ||\phi|| \end{aligned}$$

Esta relación también nos muestra que este funcional es acotado y por tanto continuo.

Definición: una función biyectiva entre dos espacios vectoriales que preserva la métrica se conoce como isometría.

$$\begin{aligned} f : V &\to W \\ d_v(x, y) &= d_w(f(x), f(y)) \end{aligned}$$

Proposición: un espacio de Hilbert H es isométrico a su dual H*.
Demostración: Ejercicio 4.4, Utilizar el Teorema de la Rep de Riesz para demostrar formalmente que construimos una biyección que preserva la norma entre H y H* y por tanto es una isometría.

Ahora que hemos encontrado estas propiedades caracterísitcas de lso espacios de Hilbert ya podemos desarrollar las herramientas que nos permitirán resolver los problemas que estudiaremos en este curso.

Estudio del PI en los espacios L^2

En un espacio de L^2 donde sus vectores tienen representaciones abstractas tomaremos un SOC dado por los vectores base "canónicos" de la posición, análogos a la construcción de un plano cartesiano en dimensiones finitas. En este espacio tomemos un elemento abstracto y le daremos una representación bajo nuestra base específica. Esto lo podemos encontrar expandiendo la expresión con los coeficientes de Fourier utilizando el PI de este espacio:

$$\psi_{vector} = \sum(x_i, \psi)x_i$$
$$\psi_{vector} = \sum(x_i', \psi)x_i$$
$$\psi_{vector} = \sum(\int x'^{*}\psi \; dx')x_i$$

La primera expresión es la expansión usual en coeficientes de Fourier. Utilizamos la ayuda de otro SOC dado por los x's, para ayudarnos a encontrar la representación explícita en el sistema x. Este es un procedimiento similar a como resolvíamos problemas en cálculo de varias variables cambiando el orden de integración para obtener expresiones que pudiesen ser integradas.
Ahora utilizaremos algunas propiedades matemáticas que no son inmediatas para cambiar el orden de la sumatoria con la integral y tomaremos el límite al continuo (para utilizar una integral en vez de la suma):

$$\begin{aligned}\psi_{vector} &= \int x'^{*}\psi \; \sum x_i \; dx' \\ &= \int x'^{*}\psi \; dx' \int x dx \\ &= \int\int x'^{*}\psi \; x dx' dx \\ &= \int x^{*}\psi \; x dx\end{aligned}$$

Recordamos que el PI entre estos vectores de los SOC respetan las condiciones de ortonormalidad. La generalización en dimensión infinita de este proceso se escribe de la siguiente manera:

$$(x', x) = \int a^{*}a \; \delta(x' - x) = a^{*}a$$

Donde esa "función" que aparece dentro de la integral es conocida como la Delta de Dirac.

El estándar de la comunidad física para escribir estos proceso es llamado notación de Dirac y es representado de la siguiente manera:

$$|\Psi\rangle = \int \langle x|\psi\rangle |x\rangle \, dx$$

El procedimiento por el cual utilizamos x', x para encontrar la representación de nuestro vector ψ tiene utilidad en distintos procesos. Esta operación es llamada resolución de la identidad

$$\int \int |x'\rangle \langle x| \, dx' dx$$
$$\int |x\rangle \langle x| \, dx = I$$

Usualmente es escrita únicamente de la segunda manera y esta suele ser empelada como una forma de multiplicar por 1 astutamente.

Para este curso no nos interesará entender con detalle los usos de la notación de Dirac, únicamente nos interesa encontrar una forma de representar PI en este tipo de espacios de Hilbert y ya tenemos una fórmula explícita para una SOC fijo.

$$(\psi, \phi) = \int \psi^* \phi dx$$

Ejercicio opcional, utilizar las fórmulas anteriores para dar una representación de ψ, ϕ en términos de una expansión en x y encontrar que todas estas se cancelan para únicamente dejar su elemento diferencial.