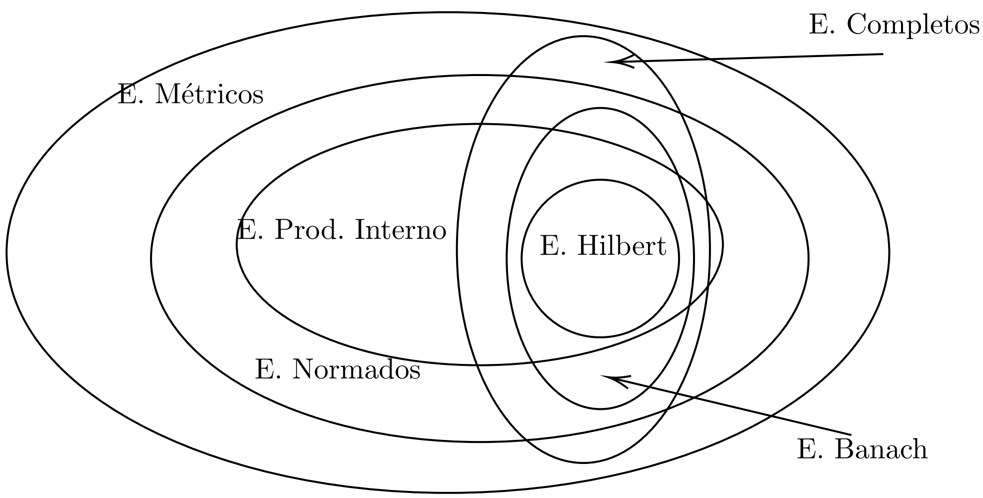
Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Métodos Matemáticos para Física, Semestre 2, 2023
Profesor: Dr. Juan Ponciano
Auxiliar: Diego Sarceño

Guía 1

Introducción

A lo largo del curso de Métodos Matemáticos, iremos trabajando con diferentes espacios estudiando sus características principales e incrementando cada vez en complejidad estructural. A continuación se muestra un pequeño diagrama que muestra los niveles de complejidad de cada uno de los espacios que estudiaremos.



Además, se utilizará lo aprendido en cursos previos, tales como: Álgebra lineal 1 (y 2 en caso de haberla cursado), Electromagnetismo y ecuaciones diferenciales parciales. Con lo que se harán referencias a ello.

Espacios Euclídeos

Para poder definir lo que es un espacio Euclídeo es necesario definir una nueva operación, distinta a las que caracterízan los espacios lineales (vectoriales).

Producto Interno

El producto interno (conocido también como producto escalar) es una función que cumple los siguientes axiomas:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \, : \, V \times V \to \mathbb{F},$$

con $\mathbb{F}$ el campo sobre el cual esta el espacio ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ para este curso) y V el espacio como tal.

Lineal respecto al segundo argumento,

$$\langle z, \alpha x + \beta y \rangle = \alpha \langle z, x \rangle + \beta \langle z, y \rangle,$$

Hermítico esta propiedad es llamada simetría para un espacio real,

$\mathcal{S}$

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*.$$

Semidefinido Positivo

$$\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \text{y} \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ojo, que los primeros dos axiomas implican que el producto interno en un espacio complejo es *sesquilineal*, mientras que en un espacio real es *bilineal*.

Esta forma definida, bajo los tres axiomas mencionados, en un espacio vectorial le da la estructura de un espacio euclídeo.

$\mathcal{S}$

Espacio Euclídeo
Un espacio vectorial/lineal Euclídeo es un espacio finito dimensional equipado con producto interno.

Norma y Métrica

Dada la positividad del producto interno es posible definir una nueva operación llamada norma.

$\mathcal{S}$

Norma
Una norma es una función que toma elementos de un espacio y les asigna un escalar, se define bajo los siguientes axiomas:

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}.$$

Semidefinido Positivo

$$\|x\| \geq 0, \quad \text{y} \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Homogeneidad

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \, \lambda \in \mathbb{F}.$$

Subaditividad (desigualdad triangular)

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Esto da pie a un resultado interesante, La Desigualdad de Cauchy−Schwartz

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2.$$

"Debemos destacar que la ley que define la norma en un espacio lineal normado puede ser muy diversa, en dependencia de la naturaleza de los elementos que forman el espacio." - Marín Antuña.

El siguiente concepto suele ser algo "*Tricky*" al estudiarlo más a profundidad y jugar un poco con las posibilidades que este concepto abre.

$\mathcal{S}$

Métrica

Una métrica es una función ρ que proporciona una noción de distancia entre dos puntos en un espacio abstracto, se define bajo los siguientes axiomas:

$$\rho \,:\, V \times V \to \mathbb{R}.$$

Simetría

$$\rho(x,y) = \rho(y,x).$$

Identidad de los Indiscernibles

$$\rho(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y.$$

Desigualdad Triangular

$$\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y).$$

Semidefinida Positiva

$$\rho(x,y) \geq 0.$$

Ortogonalidad

Los conceptos de Independencia lineal, base y base ortonormal ya deberían de estar claros. Dado esto, se recordará el método de ortonormalización de Gram-Schmidt. Recordando, la base ortonormal ($\{e_1, \cdots, e_n\}$) cumple con que cada elemento tiene norma 1: $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ y los coeficientes para generar cualquier vector del espacio tienen la siguiente forma $c_i = \langle e_i, x \rangle$ (estos coeficientes se conocen como *Coeficientes de Fourier*), de modo que

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i, \quad \forall x \in V.$$

$\mathcal{S}$

Proceso de Ortonormalización de Gram-Schmidt

Sea $x_1, \ldots, x_n$ un conjunto linealmente independiente. Tomando $e_1 = x_1/\|x_1\|$. Para $i = 2, \ldots, n$, se define e_i como

$$e_i = \frac{x_i - \langle x_i, e_1 \rangle e_1 - \cdots - \langle x_i, e_{i-1} \rangle e_{i-1}}{\|x_i - \langle x_i, e_1 \rangle e_1 - \cdots - \langle x_i, e_{i-1} \rangle e_{i-1}\|}.$$

Entonces $e_1, \ldots, e_n$ es un conjunto ortonormal de vectores tal que

$$\mathrm{span}(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{span}(e_1, \ldots, e_n).$$

Una buena praxis para la comprensión de este procedimiento sería programarlo.

Problemas

Ejercicio 1
Demuestre que la función que toma $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle$ y lo mapea en $|x_1 y_1| + |x_2 y_2|$ no es un producto interno en $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 2
Pruebe que

$$16 \leq (a + b + c + d)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$$

para todo número positivo a, b, c, d.

Ejercicio 3
Demuestre que la función definida como $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ induce una norma.

Ejercicio 4
Suponga V un espacio con producto interno y $u, v \in V$. Demuestre la identidad del paralelogramo

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\Big(\|u\|^2 + \|v\|^2\Big).$$

Dato importante[1] *Todo espacio normado en el que se cumple la identidad del paralelogramo es también un espacio con producto interno.*

Ejercicio 5
Pruebe or refute que existe un producto interno en $\mathbb{R}^2$ tal que la norma asociada está dada por

$$\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\}$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Ejercicio 6
Cosidere las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$[2] en $\mathbb{R}^n$. Pruebe que

$$\|x\| = \frac{1}{3}\|x\|_1 + \frac{2}{3}\|x\|_\infty$$

define una norma en $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 7
Demuestre que la norma suprema[3] en $C([a, b])$ no puede venir de un producto interno.

[1] Problema 1.1.8 Beginning Functional Analysis - Saxe
[2] $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}, \quad x \in \mathbb{R}^n$
[3] $\|f\|_\infty = \sup |f(x)|,\ x \in [a, b]$.

Ejercicio 8
Considere los polinomios de Legendre

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(x^2-1)^n\right], \qquad x \in [-1,1],$$

con el producto interno dado por

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Demuestre que

$$\langle P_n, P_m\rangle = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}.$$

Hint: Los polinomios de Legendre cumplen con la siguiente relación de recurrencia:
$(n+1)P_{n+1} = (2n+1)xP_n - nP_{n-1}$.

Ejercicio 9
Demuestre que el espacio l_p^n de los vectores $x = (x_1, \ldots, x_n)$ con la norma:

$$\|x\| = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |x_n|^p}.$$

Es, en efecto, un espacio normado.

Ejercicio 10
Suponga que n es un entero positivo. Pruebe que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$$

es una lista ortonormal de vectores en $C[-\pi, \pi]$.

Ejercicio 11
¿Qué pasa si el procedimiento de Gram-Schmidt es aplicado a una lista de vectores que no es linealmente independiente?

Ejercicio 12
Demuestre que las siguientes funciones son métricas

a) $\rho(x, y) = \sqrt{|x-y|}$.

b) $\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. (A esta se le conoce como métrica de Manhattan o del taxista)

c) $\bar{\rho}(x, y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$, con $\rho(x, y)$ una métrica.

Reto: Describa el "circulo unitario" centrado en el origen para cada una de estas métricas.