

Métodos matemáticos de la física

2do examen parcial

2do semestre 2023

Instrucciones: El examen inicia a las 7:00 am y finaliza a las 10:00 am. Luego de finalizado dispone de 15 minutos para escanearlo subirlo a la plataforma de Uvirtual. Los exámenes entregados después de las 10:15 am no serán calificados.

1. Use el método de separación de variables para resolver el siguiente problema de valores en la frontera para la ecuación de calor

$$\begin{aligned}u_t &= ku_{xx}, & 0 < x < 3, \quad t > 0, \\u(0, t) &= u_x(3, t) = 0, & t > 0, \\u(x, 0) &= \sin \frac{\pi}{2}x - \sin \frac{5\pi}{6}x,\end{aligned}\tag{1}$$

2. Demuestre que para cada operador acotado y autoadjunto \mathbf{A} en un espacio de Hilbert, al menos uno de los valores $\|\mathbf{A}\|$ o $-\|\mathbf{A}\|$ es autovalor de \mathbf{A} .
3. Considere el operador lineal $A : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ tal que

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}\tag{2}$$

- a) Considere los siguientes casos: dote al espacio \mathbb{C}^2 con las normas $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$, respectivamente. En cada caso encuentre la norma del operador A .
- b) Calcule en cada caso la norma del operador A dado por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\tag{3}$$

4. Resuelva el problema de valores en la frontera

$$\begin{aligned}(xy')' + \frac{y}{x} &= \frac{1}{x}, & x \in [1, e], \\y(1) &= y(e) = 0,\end{aligned}\tag{4}$$

a partir del problema de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned}(xy')' + \frac{y}{x} &= -\lambda \rho y, & x \in [1, e], \\y(1) &= y(e) = 0\end{aligned}\tag{5}$$