Paréntesis: La función Gamma

La función $\Gamma(x)$ está definida para todo $x>0$ por la integral impropia

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$$

La integral converge para todos los valores $x>0$. Esta representa una función continua en $x \in]0,\infty[$.

Veamos algunas relaciones características de $\Gamma(x)$

Escribimos

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x}\, dx$$

Integrando por partes:

$$\Gamma(x+1) = -e^{-t} t^x \Big|_0^\infty + x\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

$$= x\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

De modo que, usando la definición:

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \qquad x>0$$

(1)

En el caso en que $x = n \in \mathbb{N}_+$ usando la relación anterior:

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$$

$$= n(n-1)\,\Gamma(n-1)$$

$$\vdots$$

$$= n!\,\Gamma(1)$$

con $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1$

De modo que

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Para n entero

$$n \xmapsto{\Gamma(n)} (n-1)!$$

Para $x \in]0,\infty[$, $\Gamma(x)$ es una extensión del mapeo factorial.

Usamos la relación (1) para extender Γ de $]0,\infty[$ en $\mathbb{R}$

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

$$= \frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(x+3)}{x(x+1)(x+2)}$$

$$\vdots$$

$$= \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\dots(x+n-1)} \qquad n \in \mathbb{N}$$

Vemos que esta última expresión permite extender Γ de $]0,\infty[$ a $\mathbb{R}$, con excepción de los enteros: $0, -1, -2, \dots$

Ejercicios:

1) Probar que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

2) Probar que $\Gamma(n+1/2) = \dfrac{(2n)!\,\sqrt{\pi}}{n!\,2^{2n}}$

$$n \in \mathbb{N}_0$$

$(\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\})$