Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Métodos Matemáticos para Física, Semestre 2, 2023
Profesor: Dr. Juan Ponciano
Auxiliar: Diego Sarceño

Ejemplo

Investigue que es un espacio unitario y demuestre que una sucesión ortonormal $\{x_n\}$ en un espacio unitario E es completa sí y solo sí

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2.$$

Solución:
Se tiene $\{x_n\}$ una sucesión ortonormal. Tomando $x \in E$.

($\Rightarrow$) Sea $\{x_n\}$ compelta. Entonces, podemos escribir

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n\rangle x_n.$$

Encontrando la norma

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n\rangle x_n\right\|^2, \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \|\langle x, x_n\rangle x_n\|^2, \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 \underbrace{\|x_n\|^2}_{=1}, \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2.
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Ahora, sea $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2$.

Se define $s_n = \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k\rangle x_k$ y sabiendo que $\|x - s_n\|^2 + \|s_n\|^2 = \|x\|^2$ (Saxe, K., 2002, p. 83). Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|x - s_n\|^2 &= \lim_{n\to\infty} \left(\|x\|^2 - \|s_n\|^2\right), \\
&= \|x\|^2 - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k\rangle|^2, \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Lo que nos permite escribir $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n$, lo que demuestra que, $\{x_n\}$, es completa.

Bibliografía

[1] Saxe, K. (2002). *Beginning functional analysis (p. 7)*. New York: Springer.