Métodos matemáticos de la física

2do examen parcial - 2do semestre 2020

Indicaciones: horario de examen 9:00-10:45 hrs. Hora límite para subir el examen a la plataforma de Uvirtual: 11:10 hrs

1. Utilice el desarrollo de Fourier en el intervalo $[-\pi, \pi]$ de $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ en el sistema ortonormal de funciones trigonométricas para encontrar el límite de

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \tag{1}$$

2. Considere un operador de Sturm-Liouville L y la ecuación diferencial no homogénea

$$Ly(x) = f(x) \tag{2}$$

con y sujeta a condiciones de contorno de Dirichlet. Demuestre que es posible obtener la solución de esta ecuación diferencial a usando la solución del problema de autovalores $L\phi_n = -\lambda\phi_n$, donde ϕ_n y λ_n son, respectivamente, las autofunciones y autovalores del operador L.

3. Demuestre que para cada operador acotado y autoadjunto $\mathbf{A}$ en un espacio de Hilbert, al menos uno de los valores $\|A\|$ o $-\|A\|$ es autovalor de $\mathbf{A}$.

4. Considere una cuerda fija en sus extremos $x = 0$ e $x = L$. Si se estira la cuerda en dirección vertical, esta vibrará de acuerdo con la ecuación de onda unidimensional

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \qquad 0 \leq x \leq L,\ t \geq 0 \tag{3}$$

donde $u(x,t)$ es el desplazamiento vertical de la cuerda en el punto x y el instante t. Encuentre la solución a la ecuación de onda sujeta a las condiciones iniciales $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = 0$.