Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas

Métodos Matemáticos de la Física
Hoja de trabajo 5

1. Dado $L = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x)$, muestre que

$$uLv - vLu = \left[p(x)(uv' - vu')\right]'. \tag{1}$$

Esta identidad se conoce como la identidad de Lagrange. La integral de esta identidad es

$$\int_a^b (uLv - vLu)\ dx = [p(x)(uv' - vu')]|_a^b, \tag{2}$$

que se conoce como la fórmula de Green

2. Determine los autovalores y autofunciones de $u'' + u = 0$ en $[0, L]$ sujeto a las condiciones de frontera $u(0) = 0$, $hu(L) + u'(L) = 0$, con $h \leq 0$.

3. Encuentre los autovalores y autofunciones en $x \in [0, 1]$ del problema

$$u'' + 2u' + \lambda u = 0 \tag{3}$$

sujeto a las condiciones de contorno $u(0) = u(1) = 0$

4. Dertermine los autovalores y autofunciones de la ecuación $x^2u'' - xu' + \lambda u = 0$ en $[1, e]$, bajo las condiciones $u(1) = u(e) = 0$. Escriba la forma de la relación de ortogonalidad entre las autofunciones.

5. Determine el desarrollo en series de Fourier (cásica) de $f(x) = x^2$ en $[-\pi, \pi]$. Use el resultado para evaluar

   a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$,

   b $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$.

6. Use el método de separación de variables para resolver el siguiente problema de valores en la frontera para la ecuación de calor

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx}, \qquad 0 < x < 3, \quad t > 0, \\ u(0,t) &= u_x(3,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= \sin\frac{\pi}{2}x - \sin\frac{5\pi}{6}x, \end{aligned} \tag{4}$$

7. Determine las vibraciones de una cuerda cuyo movimiento está descrito por

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2u_{xx}, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(0,t) &= u(L,t) = 0, \qquad t > 0, \\ u(x,0) &= f(x), \qquad u_t(x,0) = g(x), \qquad 0 < x < L. \end{aligned} \tag{5}$$

8. Encuentre la solución $\Phi(r, \theta)$ de la ecuación de Laplace, dentro de una esfera de radio R, si

$$\Phi(r, \theta) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \theta\pi/2 \\ 0, & \pi/2 \leq \theta \leq 0 \end{cases} \tag{6}$$