



GUÍA 8

Ecuación de Laplace

Primero recordaremos lo que representan los diferentes operadores diferenciales:

Operadores Diferenciales:

Gradiente ∇ : Es el vector que mide la dirección de "crecimiento" del campo escalar.

Cuadro 1: Forma del gradiente en diferentes sistemas de coordenadas.

Coordenadas Cartesianas	$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$
Coordenadas Cilíndricas	$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{\varphi} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$
Coordenadas Esféricas	$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{\varphi}$

Divergencia $\nabla \cdot$: Mide la diferencia entre el flujo entrante y saliente de un campo vectorial sobre una superficie.

Cuadro 2: Forma de la divergencia en diferentes sistemas de coordenadas.

Coordenadas Cartesianas	$\nabla \cdot \phi = \frac{\partial\phi_x}{\partial x} + \frac{\partial\phi_y}{\partial y} + \frac{\partial\phi_z}{\partial z}$
Coordenadas Cilíndricas	$\nabla \cdot \phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho\phi_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial\phi_z}{\partial z}$
Coordenadas Esféricas	$\nabla \cdot \phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\phi_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\phi_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi_\varphi}{\partial\varphi}$

Rotacional $\nabla \times$: Muestra la tendencia de un campo a inducir rotación alrededor de un punto.

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{\mathbf{q}}_1 & h_2 \hat{\mathbf{q}}_2 & h_3 \hat{\mathbf{q}}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix},$$

donde $h_i(q_1, q_2, q_3) = \|\vec{e}_i\| = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right\|$ es llamado, **factor de escala** (para coordenadas ortogonales).

Laplaciano ∇^2 : Existen dos tipos de laplacianos, nosotros nos concentraremos en el laplaciano aplicado a un campo escalar. Esta es una medida del grado en que difiera el campo en un determinado punto en el espacio del valor promedio del campo alrededor de ese punto (vecindad). Maxwell propuso llamar al laplaciano del campo, **la concentración**.

S

Cuadro 3: Forma del Laplaciano (escalar) en diferentes sistemas de coordenadas.

Coordenadas Cartesianas	$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$
Coordenadas Cilíndricas	$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$
Coordenadas Esféricas	$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$

Teniendo esto en mente, es momento de introducir la ecuación de Laplace.

Ecuación de Laplace:

Es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden de tipo elíptica, es una simplificación de la ecuación de Poisson, así como de la ecuación de Helmholtz.

S

$$\nabla^2 u = 0.$$

Resolviendo esta ecuación en coordenadas esféricas (que es la solución que nos servirá en la parte de aplicaciones en electrostática), por medio de separación de variables, llegamos a

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l,m} \left(A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)} \right) P_l^m(\cos \theta) (A'_{lm} \sin m\varphi + B'_{lm} \cos m\varphi).$$

Una aplicación ya estudiada por nosotros es la vista en el curso de electromagnetismo. En la cual se estudia una esfera conductora sumergida en un campo eléctrico constante (o variable) estas aplicaciones se dejarán como problemas.

Polinomios de Hermite

Al igual que los polinomios de Legendre, los polinomios de Hermite son soluciones (eigenfunciones) de un operador de Sturm-Liouville, además son generados por una función generatriz.

Ecuación de Hermite:

Dada la ecuación de **Hermite**

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0.$$

S

Y su "**Fórmula de Rodríguez**" nace de la función generatriz

$$g(x, t) = e^{-t^2 + 2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!},$$

utilizando series de potencias

S

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Estos polinomios aparecen en el oscilador armónico cuántico, movimiento Browniano, análisis de señales, etc.

Funciones de Bessel (1er Tipo)

Las funciones de Bessel de 1er orden tienen aplicaciones en ramas como la óptica, electromagnetismo, física de partículas, cuántica, calor y oscilaciones, su capacidad para describir problemas con simetría cilíndrica las hacen útiles en estos contextos. Estas surgen de la ecuación conocida como la ecuación de Bessel¹.

Ecuación de Bessel:

$$x^2 J_\nu'' + x J_\nu' + (x^2 - \nu^2) J_\nu = 0.$$

$$(xy')' - \frac{\nu^2}{x} y + \lambda xy = 0.$$

Función generatriz:

$$g(x, t) = e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n,$$

al igual que las funciones vistas anteriormente; utilizando series de potencias, en concreto el método de Frobenius

S

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(n+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s},$$

$$J_{-n}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(s+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s} = (-1)^n J_n(x).$$

Utilizando la función Gamma^a

$$J_\nu(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s! \Gamma(\nu + s + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s}.$$

^a $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$

Propiedades de las Funciones de Bessel:

S

- a) Las funciones de Bessel son pares si ν es par e impar si ν es impar.
- b) Las funciones de Bessel están definidas y son continuas para todo $x \in \mathbb{R}$.
- c) Las funciones de Bessel tienen infinitas raíces reales.

¹Se recomienda ver la resolución de dicha ecuación en el libro de Chow, p321-324.

d) Se cumple

- $\frac{d}{dx}[x^{-\nu} J_{\nu}(x)] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$ para $\nu = 0, 1, 2, \dots$
- $\frac{d}{dx}[x^{\nu} J_{\nu}(x)] = x^{\nu} J_{\nu-1}(x)$ para $\nu = 0, 1, 2, \dots$

e) Igualdad asintótica

$$J_{\nu} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

y sean μ_1 y μ_2 dos raíces consecutivas cualesquiera de la función de Bessel, entonces $|\mu_1 - \mu_2| \approx \pi$.

f) Las funciones $J_{\nu}(\mu_1 x), J_{\nu}(\mu_2 x), \dots$ son un sistema completo y cualquier función $f \in L^2(0, b)$ puede escribirse como una serie de Bessel-Fourier.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_{\nu}(\mu_k x),$$

$$\text{donde } c_k = \frac{\langle J_{\nu}(\mu_k x), f(x) \rangle_x}{\|J_{\nu}(\mu_k x)\|_x}.$$

Funciones de Bessel (2do Tipo)

Dadas las características de las funciones de Bessel de 1er tipo y la ecuación diferencial de la cuál salen, es necesario obtener una segunda solución independiente. A esta segunda solución se le conoce como **funciones de Bessel de 2do tipo**, funciones de Neumann o de Weber y están denotadas por $Y_{\nu}(x)$ o $N_{\nu}(x)$.

Funciones de Bessel de 2do Tipo:

$$Y_{\nu}(x) = \frac{\cos(\nu\pi) J_{\nu}(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)},$$

para $\nu \notin \mathbb{Z}$.

Problemas

Ejercicio 1

Encuentre el potencial en todas las regiones de un capacitor esférico (radio R_o), con la siguiente condición de frontera.

$$\phi(R_o, \theta) = \begin{cases} V & 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ -V & \pi/2 < \theta \leq \pi. \end{cases}$$

Ejercicio 2

Demuestre que los polinomios de Hermite son ortogonales y encuentre su norma utilizando la función peso $w(x) = e^{-x^2/2}$.

Ejercicio 3

Demuestre las relaciones de recurrencia para las funciones de Hermite:

- $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x)$.
- $H'_{n+1}(x) = 2(n+1)H_n(x) = 2H_n(x) + 2xH'_n(x) - H''_n(x)$.

Ejercicio 4

Demuestre las relaciones de recurrencia para las funciones de Bessel de 1er orden:

- $J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x)$.
- $J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x)$.

Ejercicio 5

Realice lo solicitado en el problema 2, pero para las funciones de Bessel. Utilice esta integral para iniciar:

$$\int_0^1 x J_\nu(\lambda x) J_\nu(\mu x) dx.$$

Bibliografía

- [1] Arfken, G. B., & Weber, H. J. (2013). *Mathematical methods for physicists*.
- [2] Chow, T. L. (2000). *Mathematical Methods for Physicists: A concise introduction*. Cambridge University Press.