Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Métodos Matemáticos para Física, Semestre 2, 2023
Profesor: Dr. Juan Ponciano
Auxiliar: Diego Sarceño

Guía 4

Introducción

Luego de estudiar las características, definiciones, teoremas, etc. de los espacios de Banach y Hilbert, es momento de introducir los operadores en dichos espacios, sistemas ortonormales completos con características interesantes. En concreto, se iniciará este estudio por medio de las series de fourier.

Compacidad

Antes de estudiar las series de fourier, es bueno y necesario hacer un pequeño estudio sobre los espacios compactos y el concepto de compacidad.

$\mathcal{S}$ **Espacio Métrico Compacto**
Un espacio métrico (X, ρ) es compacto si y solo si toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente en X.

Desde el punto de vista de la computación, es equivalente pensar en la compacidad como si existe una función de búsqueda que pase por todos los puntos del espacio en un tiempo finito.

$\mathcal{S}$ **Operador Compacto**
Un espacio métrico (X, ρ) es compacto si y solo si toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente en X.

Operador de Sturm-Liouville

Si bien, no entraremos al estudio de los operadores de Sturm-Liouville dado que no tenemos toda la teoría que conlleva ello; sin embargo, del operador se deriva algo importante para el tema de estudio de esta guía.

$\mathcal{S}$ **Operador de Sturm-Liouville**
Un operador de Sturm-Liouville definido sobre un espacio de funciones con una segunda derivada continua, $y''(t) \in \mathcal{C}_2(a, b)$, donde $-\infty < a < b < \infty$, opera de la forma

$$Ly(t) = \big(p(t)y'(t)\big)' + q(t)y(t) = x(t),$$

con $x(t) \in \mathcal{C}_2(a, b)$ si las funciones reales $p(t)$, $p'(t)$ y $q(t)$ son continuas en $[a, b]$.

Es claro que este operador es lineal (aditivo y homogeneo); más adelante se verán ciertas condiciones para que dicho operador sea tanto homogeneo como compacto. Si el operador cumple estas condiciones se le conoce como el **problema de Sturm-Liouville Regular (PSLR).** A continuación, se mostrarán proposiciones importantes.

$\mathcal{S}$

Integral de Fredlhom

Sea el operador integral de Fredlhom dado por

$$y(t) = Ax(t) = \int K(x,t)x(s)\,\mathrm{d}s\,,$$

donde $K(s,t)$ es una función continua llamada el núcleo del operador integral y cumple la condición

$$K = \iint |K(x,t)|^2 < \infty.$$

Esto es nos permite obtener la siguiente desigualdad si evaluamos la norma de un operador en L^2.

$$\|Lx\|^2 = \|y\|^2 \leq K.$$

$\mathcal{S}$

Proposiciones Útiles

- Todo PSLR tiene un SOC[a] asociado a un operador integral de Fredlhom y toda función y que satisfaga las condiciones de contorno puede ser desarrollada en una expansión de fourier por ese SOC. De forma explícita tenemos la construción

$$y(t) = Ax(t) = \sum \lambda_k \langle e_k, x\rangle e_k(t).$$

- Los polinomios $\sin nx$, $\cos nx$ son densos en L^2.
- Los polinomios $\sin nx$, $\cos nx$ forman un SOC en L^2.

[a]Sistema Ortonormal Completo.

PAGINA 6,7,8 gmet5

Problemas

Ejercicio 1
Demuestre que la solución de un PSLR es única.

Bibliografía

[1] Falomir, H. (2015). *Curso de métodos de la física matemática.* Series: Libros de Cátedra.

[2] Saxe, K. (2002). *Beginning functional analysis (p. 7).* New York: Springer.

[3] Reed, M. (2012). *Methods of modern mathematical physics: Functional analysis.* Elsevier.

[4] Axler, S. (2015). *Linear algebra done right.* springer publication.

[5] Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2000). *Introduction to real analysis.* John Wiley & Sons, Inc..

[6] Arfken, G. B., & Weber, H. J. (2013). Mathematical methods for physicists.