Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Métodos Matemáticos para Física, Semestre 2, 2023
Profesor: Dr. Juan Ponciano
Auxiliar: Diego Sarceño

Guía 6

Introducción

Ya teniendo las propiedades y definiciones que engloban a los operadores, nos enfocaremos en operadores diferenciales y sus relacionados. Esto abrirá las puertas a problemas y teorías interesantes.

Operador Diferencial

Operador Diferencial:

Sea D un operador y f una función en L_2, se dice D es un operador diferencial si:

$$D : L_2 \to L_2,$$

$$f(x) \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x).$$

En concreto nosotros trabajaremos con operadores diferenciales de segundo orden (ecuaciones diferenciales de segundo orden) los cuales son problemas de frontera. Entonces, sea L un operador lineal de orden p

$$L = a_p(x)\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}x^p} + a_{p-1}(x)\frac{\mathrm{d}^{p-1}}{\mathrm{d}x^{p-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + a_o(x).$$

Para un L de segundo orden y $a_2(x) \neq 0$. Ahora, definimos $B_1(y) = b_1$ y $B_2(y) = b_2$ como

$$\begin{cases} B_1(y) = \alpha_{11}y(a) + \alpha_{12}y'(a) + \beta_{11}y(b) + \beta_{12}y'(b) = b_1 \\ B_2(y) = \alpha_{21}y(a) + \alpha_{22}y'(a) + \beta_{21}y(b) + \beta_{22}y'(b) = b_2. \end{cases}$$

De lo cual surgen las siguientes condiciones

- **Condiciones de Robbin**

$$\alpha_{11}y(a) + \alpha_{12}y'(a) = b_1,$$

$$\beta_{21}y(b) + \beta_{22}y'(b) = b_2.$$

- **Condiciones Periódicas**

$$y(a) = y(b) \qquad \text{Dirichlet,}$$

$$y'(a) = y'(b) \qquad \text{Neumann.}$$

$\mathcal{S}$

Dominio de un Operador:

Dado L un operador diferencial en $L_2(a,b)$, se define su dominio, $D(L)$, como el conjunto de todas las fuciones para las cuales la derivada de mayor orden de L es de cuadrado integrable y satisface las condiciones $B_1(y) = B_2(y) = 0$.

Operador Sturm-Liouville

Tomando el operador L de la sección anterior, se calcula su operador adjunto, el cual es

$$L^{\dagger} = a_2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + (2a_2' - a_1') \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + (a_2'' - a_1' + a_o). \tag{1}$$

Y L es hermítico (autoadjunto) si $L = L^{\dagger}$ y $D(L) = D(L^{\dagger})$. En caso de que solo se satisfaga que $L = L^{\dagger}$, entonces el operador es formalmente autoadjunto. Estas demostraciones se dejan como ejercicio al lector.

$\mathcal{S}$

Operador de Sturm-Liouville:

Un operador de Sturm-Liouville definido sobre un espacio de funciones con una segunda derivada continua, donde $-\infty < a < b < \infty$, está definido de la siguiente forma

$$L := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right] + q(t), \tag{2}$$

si $p(a) \neq 0 \neq p(b)$, este operador resulta simétrico, además de satisfacer las condiciones de frontera homogéneas

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \qquad \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0,$$

con $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \neq \gamma^2 + \delta^2$.

$\mathcal{S}$

Operador No Singular:

Tomando las características mostradas en la definición anterior se dice que un operador es **no singular** si la ecuación

$$Ly(t) = \mathbf{0}(t)$$

no tiene en $D(L)$ soluciones no triviales.

$\mathcal{S}$

Teorema 6.1.:

Todo operador de Sturm-Liouville no singular tiene u conjunto ortonormal completo de autofunciones $e_k(t) \in D(L)$. Además, toda función dos veces diferenciable que satisfaga las condiciones de contorno que especifican el dominio del operador, $y(t) \in D(L)$, tiene un desarrollo de Fourier respecto de los autovectores $e_k(t)$ que converge abosluta y uniformemente.

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_n e_k(t), \qquad c_n := \frac{\langle e_k(t), y(t)\rangle}{\langle e_k(t), e_k(t)\rangle}.$$

Problema de Sturm-Liouville

El estudio del problema de Sturm-Liouville parte del operador definido anteriormente, entonces

Problema de Sturm-Liouville Regular

$\mathcal{S}$

Dado el operador (2), se define la ecuación de Sturm-Liouville cómo

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + q(x)y = \lambda w(x)y,$$

donde las funciones $p(x)$ y $w(x)$ son positivas y $q(x)$ es real. La función $w(x)$ se conoce como una función de densidad o función de peso. El valor de λ no se especifica; en concreto, el encontrar los valores λ para los que exista una solución no trivial de la ecuación que satisfaga las condiciones de frotnera se denomina **problema de Sturm-Liouville**.

Es claro que los valores de λ representan los valores propios del problema S-L y las soluciones son las funciones propias.

Entre los problemas de Sturm-Liouville están la ecuación de Bessel, Legendre, Hermite, Laguerre, entre otras. Varias de estas las estudiaremos en este curso.

Problemas

Ejercicio 1
Tomando un operador diferencial L de segundo orden y $u \in D(L)$ y $v \in D(L^\dagger)$. Demuestre la forma adjunta del operador L mostrada en (1). Al término extra resultante de la integración se le conoce como *concominante bilineal de u y v* y es de la forma

$$J(u,v) = a_2(vu' - uv') + (a_1 - a_2')v.$$

También, encuentre la forma que debe tener el operador L para ser autoadjunto (hermítico) y encuentre la forma de su concominante.

Ejercicio 2
Considere una cuerda fija en los puntos $x = 0$ y $x = L$. Resuelva el siguiente S-L

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2} + k^2\psi(x) = 0.$$

Además, determine las funciones $p(x), q(x)$ y $w(x)$ así como el valor λ en esta ecuación.

Bibliografía

[1] Falomir, H. (2015). *Curso de métodos de la física matemática.* Series: Libros de Cátedra.

[2] Arfken, G. B., & Weber, H. J. (2013). Mathematical methods for physicists.