Métodos matemáticos de la física

Examen final - 2do semestre 2020

Indicaciones: horario de examen 7:00-10:15 hrs. Hora límite para subir el examen a la plataforma de Uvirtual: 10:15 hrs. Deje indicado en detalle todo el procedimiento para llegar a los resultados.

1. Suponga que el potencial Φ satisface la ecuación de Laplace dentro del hemisferio $0 \leq r < R$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, con (r, θ) las coordenadas esféricas usuales. Determine una expresión general del potencial dentro del hemisferio sujeto a las condiciones de contorno

$$\Phi_\theta(r, \pi/2) = 0, \text{ en } 0 \leq r < R, \qquad \Phi(R, \theta) = \cos\theta, \text{ en } 0 \leq \theta \leq \pi/2. \tag{1}$$

   Calcule los primeros tres términos no nulos del potencial.

2. Considere $f(x)$, una función continua en el intervalo $[-\pi, \pi]$, tal que $f(-\pi) = f(\pi)$ y $f'(x) \in L_2(-\pi, \pi)$. Demuestre la convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2} \tag{2}$$

   donde a_n y b_n son los coeficientes de Fourier de $f(x)$ en el sistema ortonormal $\{\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\}$, con $n \in \mathbb{N}$.

3. La ecuación de calor que describe la temperatura U de un disco se escribe en coordenadas polares (r, θ) como

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial \theta}\right) \tag{3}$$

   Suponga que la temperatura $U = U(r, t)$ no depende de θ y que $0 \leq r < 1$. Si el borde del disco se mantiene a temperatura cero para todo $t > 0$, y si la temperatura inicial es $U(r, 0) = f(r)$, encuentre la expresión de la temperatura en el disco para todo $r \in [0, 1)$, y $t > 0$.

4. Para $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_\infty$ se define la norma

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{2^n} \tag{4}$$

   Estudie si l_∞ con dicha norma es un espacio de Banach.