Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas

Métodos Matemáticos de la Física
Hoja de trabajo 3

1. Demostrar que para elementos cualesquiera de un espacio euclídeo (unitario), se satisface

$$\|z-x\|^2+\|z-y\|^2=\frac{1}{2}\|x-y\|^2+2\|z-\frac{x+y}{2}\|^2 \tag{1}$$

2. Sea E un espacio dotado de producto escalar. Demostrar la continuidad del producto escalar. (Ayuda: para este ejercicio es suficiente con mostrar que si $x_n \to x$ y $y_n \to y$ en E, donde $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son dos secuencias en E, entonces $(x_n, y_n) \to (x, y)$ en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

3. Determinar los coeficientes a_i y b_i de la combinación lineal

$$a_0+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x, \tag{2}$$

que proporcionan la mejor aproximación en $L_2([-\pi,\pi])$ de la función $f(x)=|x|$.

4. Determinar los coeficientes de la combinación lineal $c_1+c_2\sin\pi x+c_3\sin 2\pi x$ que proporcionan la mejor aproximación en $L_2([0,2])$ de la función $f(x)=x$.

5. Utilice el desarrollo de Fourier en el intervalo $[-\pi,\pi]$ de $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ en el sistema ortonormal de funciones trigonométricas para demostrar las siguientes identidades

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6} \tag{3}$$

6. Sea $\{x_1,\cdots,x_n\}$ un conjunto finito ortonormal en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Demuestre que para cada $x\in\mathcal{H}$, el vector

$$x-\sum_{k=1}^{n}(x_k,x)x_k \tag{4}$$

es ortogonal para cada x_k para cada $k=1,\cdots,n$.

7. Demuestre que una secuencia ortonormal $\{x_n\}$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es completa si y solo si $(x_n,x)=0$ para todo $n\in\mathbb{N}$ implica que $x=0$.

8. Demuestre que una secuencia ortonormal $\{x_n\}$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es completa si y solo si $\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(x_n,x)|^2$.

9. Si $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u$, demuestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n,x)=(u,x) \tag{5}$$

10. Demuestre el siguiente teorema: Suponga que $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una secuencia de complejos tales que $\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2$ converge. Suponga además que E es un espacio euclídeo completo con un sistema ortonromal completo $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Entonces, hay un elemento $x\in E$ cuyos coeficientes de fourier con respecto de $\{e_k\}$ son los complejos α_k y,

$$\|x\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k\|^2 \tag{6}$$