Operador de Sturm Liouville

Acabamos de construir la extensión de dimensión finita para los elementos los espacios Euclídeos que tiene forma de un espacio de Hilbert Separable que para la finalidad de este curso lo representamos como L^2. Ahora bien, la extensión para poder trabajar con operadores de igual manera no es inmediata pero escapa a la finalidad de este curso. Se dará únicamente una idea y motivación de la misma para enfocarnos en la solución de problemas físicos.

Espacio Métrico Compacto

Un espacio métrico (X, d) es compacto ssi toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente en X.

A la propiedad de ser compacto se le llama compacidad.
Una condición equivalente desde el punto de vista de la computación es que un espacio se denomina como compacto si existe una función de búsqueda que pase por todos los puntos del espacio en un tiempo finito de ejecución.
Aquí es donde la intuición de nuestros cerebros que no están equipados para lidear con construcciones matemáticas de forma innata tiene algo de problemas, intuitivamente la compacidad es una extensión de la propiedad de ser finito y acotado, anteriormente solo considerábamos la condición de acotación.

Operador Compacto

Un operador aplicado sobre dos espacios métricos $A : (X, d) \to (Y, d')$ es compacto ssi Para toda sucesión acotada $x_n \in X$ la sucesión Ax_n contiene una subsucesión convergente en Y.

Daremos resultados importantes de este tipo de operadores.

Proposición La esfera unitaria no es compacta en dimensión infinita.

Proposición El operador identidad en un espacio de Hilbert no es compacto.

Proposición Un operador lineal $A : X \to Y$ de espacios Euclídeos es compacto si la imagen de la esfera unitaria $Ax_{||x||=1}$ es compacta en Y

Proposición Todo operador lineal en un espacio Eculídeo es Compacto.
Demostración: Ejercicio 5.1, pista utilizar el PI para operadores acotados.

Proposición Todo operador Lineal y Acotado es Compacto.

Espectro de Operadores Hermíticos y Compactos

Recordamos que en guías anteriores definimos varias proposiciones para describir el comportamiento de los autovalores y autovectores de los operadores Acotados y operadores Hermíticos. Ahora enunciaremos resultados importantes que son básicamente la extensión de las mismas condiciones encontradas anteriormente. Formalmente estas son una consecuencia del Teorema de Descomposición Espectral para operadores Simétricos y Compactos, además de propiedades intrínsecas de los operadores compactos. La demostración de estos resultados es similar al caso finito pero deben tomarse los límites de sucesiones de operadores o autovalores/autovectores.

Proposición en un espacio de Hilbert Separable un operador compacto A tiene un autovector máximo con autovalor $\pm||A||$

Proposición en un espacio de Hilbert Separable un operador compacto A tiene un número finito de autovectores ortogonales entre sí que corresponden a autovalores λ tales que $|\lambda| > \delta > 0$.
Esto quiere decir que el espectro de autovalores de este tipo de operadores produce algo de tipo finito, como estudiado anteriormente. O produce una serie de autovalores decrecientes que tienden en valor absoluto al 0.

Porposición si en un espacio de Hilbert Separable existe un vector no nulo $z \in H$ tal que z es ortogonal a todos los autovectores que corresponden a autovalores no nulos de un operador acotado A. Entonces z es un autovector de A con autovalor nulo.

Teorema en un espacio de Hilbert todo elemento $x \in H$ puede ser representado como la suma de dos vectores ortogonales entre sí $x = u + v$ donde u es el límite de la suma del conjunto de autovectores ortogonales con autovalores no nulos de un operador Hermítico y Compacto A y v es el límite de la suma de los autovectores con autovalores nulos.

Teorema en un espacio de Hilbert Separable un operador compacto A tiene un sistema ortonormal completo de autovectores.
Este hecho será fundamental para construir las soluciones de los problemas que deseamos estudiar.

Estudio de Operadores Importantes

Ahora justificamos la construcción de la teoría que hemos desarrollado para estudiar la solución de ecuaciones diferenciales. Pero nos encontramos con el problema que este tipo de operadores son mucho más generales de lo que hemos desarrollado.

Proposición El operador diferencial D no es compacto en R^n.
Demostración: Intuitivamente sabemos que las derivadas varias expreciones conocidas no están acotadas, vamos a utilizar el hecho que ser no acotado implica ser no compacto.
Supongamos que D es compacto, tomemos el caso particular de Dx^2, esto implica que $2x$ está acotado en $R^n \Rightarrow\Leftarrow$.

Esto son malas noticias ya que no es posible utilizar ninguna de las herramientas que hemos desarrollado (y resolver los casos generales es extremadamente complicado). Pero mediante un par de restricciones podremos plantear la solución de este tipo de problemas, para ello definiremos un nuevo operador que produzca la ecuación diferencial ordinaria y lineal de 2do grado más general posible y manipularemos el problema para encontrar sus soluciones restringidas.

Definición Sea el operador de Sturm Liouville dado por

$$Ly = \frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy}{dx}) + q(x)y$$

La solución de esta ecuación diferencial utilizando la teoría de operadores está dada por:

$$\begin{aligned} Ly = \frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy}{dx}) + q(x)y \\ = -\lambda w(x)y \end{aligned}$$

Donde $\lambda,\ w(x)$ son los autovalores y autofunciones del sistema.

Nota: de momento no hemos trabajado con autofunciones, más adelante haremos las aclaraciones necesarias.

Proposición El operador de Sturm Liouville no es autoadjunto en L^2.
Demostración: Computamos manualmente la expresión para verificar la hipótesis. Recordemos que ser autoadjunto significa que $(Lf, g) = (f, Lg)$. .

$$
\begin{aligned}
.(Lf, g) &= \int (\frac{d}{dx}(p(x)\frac{df}{dx}) + q(x)f)^* g(x)dx \\
&= \int \frac{d}{dx}(p(x)\frac{df^*}{dx})g(x) + q(x)f^* g(x)dx \\
&\text{Integramos por partes la primera expresión:} \\
&= g(x)p(x)\frac{df^*}{dx}\Big| + \int -\frac{dg}{dx}\frac{df^*}{dx}p(x) + q(x)f^* g(x)dx \\
&\text{Integramos por partes la segunda expresión:} \\
&= g(x)p(x)\frac{df^*}{dx}\Big| - p(x)\frac{dg}{dx}\frac{df^*}{dx}\Big| \\
&+ \int \frac{d}{dx}(\frac{dg}{dx}p(x))f^* + q(x)f^* g(x)dx \\
&= g(x)p(x)\frac{df^*}{dx}\Big| - p(x)\frac{dg}{dx}\frac{df^*}{dx}\Big| + (f, Lg)
\end{aligned}
$$

Notemos que L sería convenientemente autoadjunto si los primeros términos se anularan al momento de la integración. Para que esto suceda de forma general vamos a imponer las siguientes condiciones:

$$
\begin{aligned}
\alpha_{11}f(a) + \alpha_{12}f'(a) &= 0 \\
\alpha_{21}g(a) + \alpha_{22}g'(a) &= 0 \\
\beta_{11}f(b) + \beta_{21}f'(b) &= 0 \\
\beta_{21}g(a) + \beta_{22}g'(a) &= 0 \\
\alpha_{i1}^2 + \alpha_{i2}^2 &> 0 \\
\beta_{i1}^2 + \beta_{i2}^2 &> 0
\end{aligned}
$$

Bajo estas condiciones nuestro operador L es autoadjunto.

Proposición El operador L es lineal
Demostración: Ejercicio 5.2.

Además de la restricción de ”condiciones de frontera” que fue impuesta para obligar al operador L a ser autoadjunto, vamos a imponer estas condiciones adicionales para evitar complicaciones en el futuro; $p(x), w(x) > 0$.
A una ecuación diferencial que presente estas condiciones se le conoce como **Problema de Sturm Liouville Regular PSLR**.
Bajo estas condiciones L es un operador Hermítico y Compacto, ahora seguiremos estudiando la forma de las soluciones de este tipo de problemas.

Definición Sea el operador Integral de Fredlhom dado por:

$$y(t) = Ax(t) = \int K(x,t)x(s)ds$$

Donde $K(s,t)$ es una función continua llamada el núcleo del operador integral y cumple la condición.

$$K = \iint |K(x,t)|^2 < \infty$$

Esto es nos permite obtener la siguiente desigualdad si evaluamos la norma de un operador en L^2.

$$||Lx||^2 = ||y||^2 \leq K$$

Proposición El operador Integral de Fredlhom es compacto.

Este tipo de operadores dan lugar a operaciones como las transformaciones de Laplace, Fourier y son la representación en forma de ecuación integral de los problemas regulares de Sturm Liouville.

Proposción La solución para un PSLR es única.
Demostración: Sea $Ly = x, \; Lz = x$, como el operador L es lineal eso implica que $Ly - Lz = L(y - z) = 0$, por lo tanto $y = z$.

Proposición: Para todo PSLR existe una representación única del núcelo Hermítico $K(s,t)$ de un operador integral de Fredhlom que satisface la ecuación $Ly = x$.
Demostración: Se realiza un cálculo tedioso y explícito de variación de parámetros y se obtiene la función de Green del problema bajo las condiciones de contorno.

Esto quiere decir que este operador integral es el inverso de L

$$\begin{aligned} y = Fx = \int K(s,t)x(s) \\ Ly = x \\ = LFx = x \end{aligned}$$

Debe mencionarse lo importante que es este proceso ya que estamos transformando un problema de ecuaciones diferenciales en un problema de autovalores de operadores. Esta transformación nos permite obtener soluciones de problemas que en los cursos de ecuaciones diferenciales ordinarias no eran posibles.

Teorema Todo PSLR tiene un SOC asociado a un operador integral de Fredlhom y toda función y que satisfaga las condiciones de contorno puede ser desarrollada en una expansión de fourier por ese SOC.
De forma explícita tenemos la construcción

$$y(t) = Ax(t) = \sum \lambda_k (e_k, x) e_k(t)$$

Esto nos asegura que aunque L no sea un operador compacto es posible forzar a otro operador compacto a otorgarle su SOC para construir una solución en una expansión de Fourier. En este caso los $e_k s$ fungen el rol de autofunciones de L que fueron heredadas de F. Antes de comenzar a resolver problemas de este estilo necesitamos un resultado adicional.

Proposición Los polinomios $sin(nx), cos(nx)$ son densos en L^2.

Proposición Los polinomios $sin(nx), cos(nx)$ forman un SOC en L^2
Demostración: Ejercicio 5.3, demostrar que los polinomios son ortonormales. De no ser ortonormales encontrar la consatnte de normalización.

Ejemplos de PSLR

Daremos las consideraciones usuales que se deben hacer para resolver un PSLR. Primero necesitamos una ecuación diferencial con condiciones de frontera. Sea:

$$\begin{aligned} xy'' + y' + 2y + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(L) = 0 \end{aligned}$$

Aquí es posible tomar 2 rutas diferentes, la primera se puede utilizar para problemas más sencillos o cuando se tiene experiencia del sistema, reconocemos que el sistema homogéneo puede ser resuelto por un SOC específico y en base a ello construir las soluciones inmediamente sustituyendo los $e_k s$ por $trig(kx)$, $x^n exp(kx)$, etc. Esto es bastante parecido al procedimiento realizado en EDO. Ahora bien nuestro nuevo método nos permite también la solución de la parte homogénea de este tipo de ecuaciones en series de Fourier. Antes de empezar con la solución es una buena práctica verificar que esta ecuación sea efectivamente un PSLR. Para ello reescribimos la ecuación de esta manera:

$$\begin{aligned} Ly &= -\lambda y \\ Ly &= x * y'' + 1 * y' + 2y \\ \implies p(x) &= x \\ q(x) &= 2 \\ w(x) &= 1 \end{aligned}$$

Ahora sabemos que existe una solución en series de potencias (ya que los polinomios forman un SOC), de esta ecuación, para hallar la solución se hace un proceso parecido al realizado en EDO 2.

$$y = \sum a_n x^n,\ y' = \sum a_n n x^{n-1}$$

La solución de este tipo de ecuaciones es bastante trabajosa pero directa.
Ejercicio 5.4: resolver la siguiente ecuación diferencial por medio de series de potencias $xy'' + y' + 5y = sin(5x)$

Ahora que ya sabemos como resolver un sistema homogéneo expandimos nuestro método para resolver problemas que no podían hacerse con anterioridad. Esto va a ser resolver las soluciones particulares de ecuaciones diferenciales de segundo grado, que en cursos anteriores están bastante limitadas.
Supongamos que tenemos una ecuación diferencial que pueda ser escrita como un PSLR, ahora supongamos que esta ecuación diferencial tiene una restricción que puede ser resuelta para obtener la solución particular del sistema de forma.

$$\sum a_n D^n(y) = f(x)$$

Pero ya sabemos que la solución de la parte homogénea puede ser escrita como un desarrollo de fourier del SOC asociado al operador de Fredlhom del sistema donde nuestro vector puede ser escrito como $y = \sum (e_k, x)e_k = \sum c_n e_n$. Y de la misma manera $f(x)$ puede ser escrita como $\sum c'_n e_n$.
A nosotros nos interesa encontrar las constantes c'_n para resolver la ecuación, recordamos el truco realizado en las guías anteriores que utiliza la ortogonalidad del sistema para encontrar las constantes mediante el PI

$$c_n = (e_n, f) = \frac{(y_n, f)}{(y_n, y_m)} = \frac{\int f y_n^*}{\int y_n^* y_m}$$

En este caso estamos dividiendo por (y_n, y_m) para tomar el caso más general donde el sistema es ortogonal. Si se trabaja con un sistema ortonormal esta integral es 1 y se puede omitir.

De forma que la solución puede expresarse como la suma de la parte homogénea y particular del vector solución en un desarrollo de Fourier con las autofunciones utilizadas, hacemos un listado de las ecuaciones importantes en el orden que son consideradas para una solución estándar.

$$\begin{aligned} Ly &= -\lambda y \\ y &= \sum a_n e_n \\ \sum a_n D^n(y) &= f(x) \\ f(x) &= \sum b_n e_n \\ b_n = (y_n, f) &= \int y_n f dx \\ \text{Solución: } y_{sol} &= y_h + y_p \\ &= \sum a_n e_n + b_n e_n \end{aligned}$$

Este método se utiliza para resolver problemas como una esfera cargada en un campo eléctrico, ondas, calor y varios problemas en mecánica cuántica.
Además acabamos de definir la teoría que nos permite resolver EDOs mediante las transformadas de Fourier y Laplace que son fundamentales para el análisis y procesamiento de señales.

PSLR con una función de Peso no trivial

Anteriormente habíamos omitido algún caso donde la función $w(x)$ fuese distinta de una constante. Este tipo de funciones aparecen como una necesidad de realizar un proceso de factor integrante para poder transformar a nuestra EDO en un PSLR. Debido a ciertas sutilezas al realizar esta operación estamos cambiando el PI de nuestro espacio, esto no produce ningún problema ya que L^2 admite este tipo de funciones como válidas en su definición de PI.
Ya que esta teoría escapa nuestro interés daremos un ejemplo con fines didácticos, más adelante resolveremos un problema de mayor relevancia que está sujeto a estas consideraciones. Sea:

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + \lambda y &= 0 \\ Ly = -\frac{d}{dx}(e^{-2x}y') &= -\lambda e^{-2x} \\ \implies (y, f) &= \int_0^{\pi} e^{-2x} y^* f dx \end{aligned}$$

Ejericio 5.5: demostrar que el FI es e^{-2x}.
Ejercicio 5.6: resolver este PSLR con condiciones de Dirchlet $y|_0^{\pi} = 0$ y agregar la restricción para la solución particular de $f(x) = e^{-x}$.