Métodos matemáticos

1er examen parcial
2do semestre 2020

1. El espacio $C(a,b)$ es un espacio normado si se le dota de la aplicación

$$\|f\| = \sup\{|f(t)|\} \text{ con } t \in [a,b] \tag{1}$$

   a) Demostrar que tal aplicación es una norma.

   b) Considere en este espacio una secuencia arbitraria de Cauchy $\{f_n\}$. Decir si este espacio es completo evaluando la convergencia de la secuencia.

2. Sea H el espacio de Hilbert $L_2(-1,1)$. Considere en H las funciones

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad f_2(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \qquad f_3(x) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right). \tag{2}$$

   a) Probar que forman un sistema ortonormal y describir algebraicamente el subespacio E que generan.

   b) Sea $f(x) = x^3$. Calcular la distancia de f a E.

3. Considere, la función definida para $n \geq 1$ como

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n \\ x - \frac{1}{n}, & \text{si } 1/n \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{3}$$

   Evalúe la convergencia puntual de la secuencia $\{f_n(x)\}$ y muestre si converge uniformemente a la misma función.

4. Muestre que la secuencia de funciones de cuadrado sumable definidas para $n \geq 1$:

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n \\ 0, & \text{si } x \notin (0,1/n) \end{cases} \tag{4}$$

   no converge en $L_2(0,1)$.

5. Escribir la generalización del teorema de Pitágoras en un espacio infinito-dimensional y obtener condiciones para su validez.