Prod Int y Espacios Euclídeos

Durante este curso vamos a trabajar con un tipo específico de espacios llamados espacios euclídeos. De momento vamos a enfocarnos en estudiar estos objetos como espacios vectoriales sobre los campos R y C
Para poder definir un espacio euclídeo primero debemos definir los conceptos de métrica, norma y producto interno:

Métrica

Una función métrica o métrica es una función d, que nos una noción de distancia entre 2 puntos en un espacio abstracto, vamos a definirla de forma que respete los siguientes axiomas:

$$d : V \times V \to R$$

$d(x, y) \ = \ d(y, x)$	simetría
$d(x, y) \ = \ 0 \ \Leftrightarrow \ x \ = \ y$	identidad de los indiscernibles
$d(x, y) \ \leq \ d(x, z) + d(z, y)$	desigualdad triangular
$d(x, y) \geq 0$	semidefinida positiva

Las métricas nos dan la noción más abstracta (con la que trabajaremos) de distancia que puede haber entre dos objetos, en nuestra definición no tenemos alguna forma de "escalar" multiplicando los valores como tratamos usualmente la separación en una recta numérica. Por ejemplo:

1. La distancia entre 2 estados de un cubo rubik.
2. La distancia entre 2 posiciones en el ajedrez.
3. La distancia entre 2 personas que antes tenían una sensación de cercanía pero ahora por mas cerca que se encuentren ya nada es igual.

Debido a la arbitrariedad de nuestras definiciones, mientras respetemos los axiomas anteriormente vistos nos es posible definir métricas para cualquier situación a nuestra conveniencia.

Ahora nos interesa realizar un análisis menos abstracto de los objetos en un espacio arbitrario, vamos a definir formalmente el concepto de Magnitud de un elemento para poder realizar comparaciones como las de una recta numérica con distintos elementos en el espacio. Para ello tenemos que definir una nueva función a la cual le llamaremos norma.

Norma

Una norma es una función que toma elementos de un espacio y les asigna un escalar, vamos a definir a las normas mediante los siguientes axiomas:

$$p: \ V \ \rightarrow \ R$$

$$\begin{array}{ll} p(x+y) \ \leq \ p(x) \ + \ p(y) & \text{subaditividad} \\ p(\alpha x) \ = \ |\alpha| p(x), \ \forall \alpha \in R & \text{homogeneidad} \\ p(x) \ \geq 0 & \text{semidefinida positiva} \\ p(x) \ = \ 0 \ \Leftrightarrow \ x \ = \ 0 & \end{array}$$

Intuitivamente en física la norma es la Magnitud de un vector, como la fuerza aplicada a un cuerpo. Esta analogía semi formal nos ayuda a tener una idea de la implicación que tiene la definición de norma que no tiene la definición de métrica, con la norma podemos realizar comparaciones en una escala numérica para poder hacer un análisis de sumas de fuerzas en una dirección por ejemplo. Pero debemos tener cuidado porque la norma es una función abstracta y este tipo de interpretaciones tienen limitaciones en distintas áreas de la física y matemáticas.

Además es importante agregar que dependiendo si un texto está orientado a la física o a la matemática la norma puede ser representada de la forma anterior o por medio de barras dobles $||x||$. En este texto utilizaremos las notaciones de forma intercambiable.

Ejemplo

La norma que utilizamos para estudiar la mecánica de Newton cumple todas los axiomas que definimos anteriormente. Sea:

$$\begin{aligned} p(x) &= \sqrt{x^2} \\ &\text{Subaditividad:} \\ p(x+y) &= \sqrt{(x+y)^2} \\ &= |x+y| \leq |x| + |y| \\ &= \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} \end{aligned}$$

El resto de propiedades son dejadas como el ejercicio 1.1

Cabe mencionar que para realizar una prueba completamente formal de esto necesitaríamos demostrar ciertas propiedades como; $\sqrt{x^2} = |x|, x^2 \geq 0, etc.$ Por la naturaleza del curso ciertos detalles serán dejados en el aire pero se intentará indicar algún momento en el cual se obvie el formalismo debido al enfoque de la asignatura.

Proposición Toda norma induce una métrica mediante $d(x,y) = p(x-y)$
Demostración: Necesitamos probar que la norma definida anteriormente respeta todos los axiomas de una métrica:

simetría

$$\begin{aligned} p(x-y) &= p(-(y-x)) \\ &= |-1|p(y-x) \end{aligned}$$

desigualdad triangular

$$\begin{aligned} p(x-y) &= p(x-y+0) \\ &= p(x-y+z-x) \\ &= p((x-z)+(z-y)) \\ &\leq p(x-z)+p(z-y) \end{aligned}$$

El resto de propiedades son el ejercicio 1.2.
Ejercicio 1.3, demostrar de forma explícita que la norma empleada en la mecánica de Newton para un sistema de N dimensiones es una métrica. (Consejo: Utilizar la fórmula de la distancia entre 2 puntos en un plano cartesiano y tomar en cuenta las componentes).

De nuevo vamos a definir una nueva operación para darnos una noción adicional al momento de comparar objetos en el espacio. Esta vez la información que obtendremos es acerca de la geometría de estos, de nuestro ejemplo anterior podemos encontrar la magnitud de un elemento del espacio. Ahora deseamos una manera de poder encontrar la dirección de 2 elementos respecto a punto de referencia arbitrario.

Producto Interno

El producto interno o producto escalar es una función que cumple los siguientes axiomas:

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : \; V \times V \; \to \mathbf{F}$$

$$\begin{array}{lll}
\langle x, y \rangle \; = \; \overline{\langle y, x \rangle} & & \text{simetría de conjugación} \\
\langle \alpha x + \beta y, z \rangle \; = \; \alpha \langle x, z \rangle \; + \; \beta \langle y, z \rangle & & \text{sesquilinealidad} \\
\langle x, \beta y + \alpha z \rangle \; = \; \overline{\alpha} \langle x, z \rangle \; + \; \overline{\beta} \langle y, z \rangle & & \\
\langle x, x \rangle \geq \; 0 & & \text{semidefinida positiva} \\
\langle x, x \rangle \Leftrightarrow \; x \; = \; 0 & &
\end{array}$$

Hacemos énfasis de nuevo que el producto interno es una operación abstracta que respeta las propiedades antes dichas, nos es posible darle una interpretación física en distintos casos pero estas son nada más analogías que nos permiten entender como funciona este objeto en casos específicos.
Además es importante agregar que dependiendo si un texto está orientado a la física o a la matemática el producto interno puede ser representado por los brackets de arriba o por paréntesis (,). En este texto utilizaremos estas dos notaciones como intercambiables.

Ejemplo

El producto punto es un producto interno:

$$\begin{aligned}
x \cdot y &= y \cdot x \\
(\alpha x + \beta y) \cdot z &= \alpha x \cdot z + \beta y \cdot z \\
x \cdot x &= \sum x_i^2 \geq 0
\end{aligned}$$

De forma ingenua podemos entender la importancia de estudiar productos internos en ciertos espacios abstractos ya que nos permite realizar análisis parecidos a los diagramas de fuerzas que permiten resolver problemas bajo la mecánica de Newton.

Proposición Todo producto interno induce una norma mediante
$p(x) = \sqrt{\langle x, x\rangle}$
Demostración: Necesitamos probar que el producto interno definido anteriormente cumple todos los axiomas de norma:
Subaditividad

$$\begin{aligned} p(x+y) &= \sqrt{\langle x+y, x+y\rangle} \\ &= \sqrt{\langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle} \\ &= \sqrt{\langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} + \langle y, y\rangle} \\ &= \sqrt{(x+y)^2} \leq |x| + |y| \end{aligned}$$

El resto de propiedades son el Ejercicio 1.4
Notemos que todas los productos internos son a su vez normas que son a su vez métricas, pero esto no sucede en la otra dirección. Ejercicio 1.5, buscar ejemplos de métricas que no son normas y normas que no son productos internos.

Definición un espacio métrico es un conjunto junto con una métrica aplicada a sus elementos.

Definición un espacio normado es un conjunto junto con una norma aplicada a sus elementos.

Definición un espacio con producto interno es un conjunto junto con un producto interno a sus elementos.
Notemos que espacios distintos pueden ser formados por conjuntos distintos o por funciones distintas aplicadas al mismo conjunto.

Ahora centramos nuestra atención a un tipo específico de espacios con producto interno llamados espacios Euclídeos. Nuestro enfoque en este curso es empezar con estas ideas básicas de la física clásica y álgebra lineal, con las que podemos construir una teoría más rica que nos permita resolver una gama más grande de problemas. Entre estos se encuentran los casos en donde tenemos un sistema con dimensiones infinitas, como en mecánica cuántica, soluciones de ecuaciones diferenciales por medio de series, análisis de convergencias, autovalores, etc.

Definición Un espacio vectorial Euclídeo es un espacio finito dimensional equipado con un producto interno.

Cabe mencionar que existe una definición técnica de un espacio Euclídeo abstracto pero esta se escapa al enfoque del curso, pero es importante hacer la aclaración que de ahora en adelante cuando decimos espacio E nos estamos refiriendo de forma implícita a un espacio vectorial.

Ejemplos de Espacios Euclídeos

1. C^n equipado con el producto punto.

$$\langle , \rangle : C^n \times C^n \rightarrow R$$
$$\langle x, y \rangle = \sum^n x_i^\star y_i$$

2. El espacio de las funciones reales continuas $C(a, b)$ en un intervalo cerrado equipado con la integral de funciones.

$$\langle , \rangle : C(a, b) \times C(a, b) \rightarrow R$$
$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_a^b x^*(t) y(t)$$

Propiedades importantes del PI en espacios Euclídeos:

Desigualdad de Cauchy Schwartz:
Vamos a utilizar las propiedades de homogeneidad, del producto interno y de la norma para obtener expresiones de las versiones escaladas de nuestros vectores originales.

$$\begin{aligned}(x, y) &= |1|(x, y) \\ &= |e^{i\theta}|(x, y)\end{aligned}$$

Ahora tomaremos la norma inducida por el producto interno al cuadrado y escribiremos la expresión anterior en términos de esta.

$$p(x - y)^2 = |(e^{i\theta}x - y, e^{i\theta}x - y)|^2$$

Ahora escalamos de nuevo nuestra operación para poder obtener lo deseado.

$$\begin{aligned}p(\alpha x - y)^2 &= |\alpha^2||(e^{i\theta}x - y, e^{i\theta}x - y)|^2 \\ = \alpha^2(x, x) - e^{-i\theta}\alpha(y, x) - e^{i\theta}\alpha(x, y) &+ (y, y) \geq 0 \\ &= \alpha^2||x||^2 - 2\alpha|(x, y)| + ||y||^2 \geq 0\end{aligned}$$

Ahora aplicando la fórmula cuadrática obtenemos lo deseado.

$$|(x, y)| \leq ||x|| \; ||y||$$

Ejercicio 1.5, completar los pasos de la demostración. (Consejo: analizar el polinomio para determinar que las raíces no pueden ser reales positivas o negativas y luego estudiar la raíz cuadrada de la fórmula cuadrática para cumplir la condición deseada).
Una consecuencia importante de este resultado es que nos permite medir el coseno del ángulo entre ellos como se hace en los primeros cursos de física.

Sistemas ortogonales:
Las propiedades del producto interno PI nos permiten escribir el resultado de la aplicación de esta operación en términos de una base del espacio.

$$(x, y) = \alpha^* \beta(e_1, e_2)$$
$$(z_1, z_2) = \sum \alpha_i^* \beta_j (e_i, e_j)$$

Ejercicio 1.6, demostrar que el producto interno a pares de un conjunto de vectores linealmente independientes es 0.
Con estos resultados nos resulta útil emplear el concepto de ortogonalidad.

Definición un par de vectores x, y son ortogonales entre sí $x \perp y$ si su PI interno es 0.
El concepto de ortogonalidad es menos general que la independencia lineal, ya que todos los vectores son ortogonales con $\vec{0}$.

Teorema de Pitágoras Sean 2 vectores ortogonales entre sí, la norma al cuadrado de la suma de los vectores respeta la siguiente relación.

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$$

Demostración: usaremos el resultado del ejercicio 1.6:

$$\begin{aligned}(x + y, x + y) &= (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y)\\ &= ||x||^2 + 0 + 0 + ||y||^2\end{aligned}$$

Desigualdad Triangular las normas de 2 vectores x,y en un Espacio Euclídeo respetan la siguiente relación

$$||x|| - ||y|| \leq ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$

Demostración: elevamos al cuadrado las expresiones con la definición del producto punto y usamos la desigualdad Cauchy Schwartz.

$$\begin{aligned}(x + y, x + y) &= (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y)\\ &= ||x||^2 + (x, y) + \overline{(x, y)} + ||y||^2\\ &= ||x||^2 + 2Re(x, y) + ||y||^2\\ &\text{Por CS}\\ &|Re(x, y)| \leq |(x, y)|\\ \implies (x + y, x + y) &= ||x + y||^2\\ &\leq ||x||^2 + 2||x||\ ||y|| + ||y||^2\\ &\leq (||x|| + ||y||)^2\\ \implies ||x + y|| &\leq ||x|| + ||y||\end{aligned}$$

Ejercicio 1.7, demostrar la parte izquierda de la desigualdad.
Ejercicio 1.8, demostrar que la combinación lineal de vectores linealmente independientes es ortogonal a un vector linealmente independiente a la combinación.

De los resultados anteriores y los contenidos vistos en el curso de álgebra lineal sabemos que es posible escribir a un vector arbitrario de un espacio vectorial como la combinación lineal de una base. De la misma manera con lo que hemos desarrollado es inmediato que es posible realizar el mismo procedimiento para un espacio Euclídeo. (Aquí es importante aclarar que esto es solo mientras todo sea en dimensión finita, para el caso de nuestro interés que son espacios infinitos debemos desarrollar un poco más la teoría).

Definición un conjunto de vectores ortogonales entre sí que generan todo el espacio es llamado un sistema ortogonal completo.

Definición un conjunto de vectores ortonormales entre sí que generan todo el espacio es llamado un sistema ortonormal completo.
Es preferible trabajar con sistemas ortonormales para que los productos internos entre ellos sean 1s o 0s.

Definición el complemento ortogonal de un vector es el conjunto de vectores que son ortogonales a este.
Por ejemplo el complemento ortognal de (x,0) es {(0,0),(0,y)}

Definición los escalares que aparecen en la combinación lineal de componentes de la base son llamados los coeficientes de Fourier.

$$
\begin{aligned}
x &= \sum \alpha_i e_i \\
(e_j, x) &= \sum \sum \alpha_i (e_j, e_i) \\
&= \sum \alpha_i \delta_i^j \\
&= \alpha_j
\end{aligned}
$$

Expansión del coeficiente de Fourier j bajo la representación de la base e_i.
Aquí asumimos que los componentes están normalizados.