Límites de Funciones

Ahora que sabemos como resolver problemas en dimensiones finitas, desarrollaremos las herramientas necesarias para poder trabajar con espacios más generales. Para ello necesitamos desarrollar el concepto de Completitud de un espacio, pero antes es necesario desarrollar la teoría de series, suseciones y límites.

Secuencias o Sucesiones

Sea m un entero, definimos una secuencia o sucesión de elementos $(a_n)_m^\infty$ como una función que va del conjunto de los enteros mayores o iguales a m al conjunto S que contiene los elementos de la secuencia.

$$(a_n)_m^\infty : \mathbf{Z} \to S$$

Lo importante aquí es que siempre que tengamos un conjunto podemos definir alguna secuencia que tome sus elementos.

Ejemplo

La secuencia de números 1

$$\begin{aligned} f : \mathbf{Z}^+ &\to \{1\} \\ (a_n)_1^\infty &= a_1, a_2, a_3, ... \\ &= 1, 1, 1, 1, ... \end{aligned}$$

La secuencia alternante de 1 y -1

$$\begin{aligned} f : \mathbf{Z}^+ &\to \{1, -1\} \\ (a_n)_1^\infty &= a_1, a_2, a_3, ... \\ &= 1, -1, -1, 1, ... \end{aligned}$$

Ahora definimos un tipo específico de secuencia que son las de nuestro interés a estudiar para este curso.

Secuencia de Cauchy

Una secuencia es de Cauchy si cumple la siguiente condición.

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \ \exists \ N(\epsilon) \geq 0 \\ s.t \\ d(a_n, a_m) \leq \epsilon \\ \forall n, m \geq N(\epsilon) \end{aligned}$$

La idea detrás de las secuencias de Cauchy, es que dado un margen de error ϵ, nosotros podemos tomar un punto de corte N. Este depende de épsilon ya que necesitamos saber con qué tanta precisión tenemos que trabajar. Y la idea de ese punto N es que para cualquier par de enteros n, m, mayores o iguales a N. El par de términos asociados de la secuencia a_n, a_m, van a tener una distancia menor al margen de error pedido. Entonces no importa que tanta precisión necesitemos, siempre es posible encontrar un punto en que los términos están arbitrariamente cerca entre sí. Y este punto de corte solo depende de que tan cercanos queremos los puntos, no de alguna otra variable o propiedad específica de la secuencia. Esto será más importante cuando lo veamos aplicado a funciones. (Nota aquí los términos margen de error y punto de corte tienen una finalidad didáctica no científica/matemática).

Ejemplo

Tomemos la sucesión de los recíprocos de los números naturalres.

$$(a_n)_1^\infty = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}$$

Vamos a demostrar que esta sequencia es de Cauchy, esto lo hacemos estudiando como se comporta la distancia entre estos puntos después de algún punto de corte arbitrario.

$$\begin{aligned}
n, m \geq N \implies \frac{1}{n}, \frac{1}{m} &\leq \frac{1}{N} \\
d(a_n, a_m) &= |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| \\
&\leq |\frac{1}{n}| + |\frac{1}{m}| \\
&\leq |\frac{1}{N}| + |\frac{1}{N}| \\
&\leq 2|\frac{1}{N}| \\
\text{Sea: } 2\frac{1}{\epsilon} &\leq |N| \\
2|\frac{1}{N}| &\leq \epsilon \\
\implies d(a_n, a_m) &\leq 2|\frac{1}{N}| \\
&\leq \epsilon
\end{aligned}$$

Hemos demostrado que siempre es posible encontrar un N que depende de épsilon tal que podamos establecer una relación que nos permita asegurar que la distancia entre dos elementos de la secuencia mayores a N sea menor o igual a épsilon.

Proposición una secuencia de Cauchy depende de la definición de distancia/función métrica que se está utilizando.
Demostración: Suponemos que no depende de la definición de la métrica y obtenemos un contraejemplo.
Tomemos la sucesión que toma valores de $\frac{1}{n}$ en los primeros n elementos y 0 en el resto, esto se puede ver como:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, 0, 0, ... \\ a_2 &= \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, ... \\ a_n &= \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}, 0, 0.... \end{aligned}$$

Ahora vamos a intentar demostrar que esta sucesión es de Cauchy sin importar la métrica, de nuevo asumimos que $n \geq m$ sin pérdida de la generalidad. Primero demostraremos que no es de Cauchy para nuestra definición de distancia anterior:

$$\begin{aligned} &\forall n, m \geq N \\ d(a_n, a_m) &= |a_n - a_m| \end{aligned}$$

Ahora tenemos que observar que existen 3 casos distintos para esta resta. En el intervalo $[0, m]$, tenemos una resta de fracciones, en el intervalo $[m+1, n]$ tenemos una fraccion a la que se le resta 0. Y en el último intervalo tenemos 0s. Para separar estos casos utilizamos la desigualdad triangular:

$$\begin{aligned} d(a_n, a_m) \leq |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| + ...+ \\ +|\frac{1}{n} - 0| + |0 - 0| \\ \leq m|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| + (n-m)|\frac{1}{n}| \end{aligned}$$

Ahora como la primera resta siempre es negativa:

$$\begin{aligned} = \frac{m}{n} + 1 + 1 - \frac{m}{n} \\ \leq 2 \end{aligned}$$

Por tanto es imposible hacer arbitrariamente cercana la resta entre las secuencias, por lo tanto no es Cauchy.

Ahora vamos a encontrar una función métrica que cumpla lo que buscamos. Para ello definiremos de la siguiente manera:

$$d(a_n, a_m) = Sup|a_n - a_m|$$

$$\forall n, m \geq N$$
$$d(a_n, a_m) = Sup|a_n - a_m| \leq \epsilon$$

Estudiemos los 3 casos de las restas de la secuencia, tenemos una resta en los primeros m términos, luego la otra secuencia se convierte en 0s y al final las 2 secuencias son 0s.

$$\begin{aligned} Sup|a_n - a_m| &= Sup\{|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|, |\frac{1}{n} - 0|, |0 - 0|\} \\ &= |\frac{1}{n}| \end{aligned}$$

Y por la resolución del primer ejemplo tenemos inmediatamente que esta sucesión es de Cauchy. El procedimiento realizado en las demostraciones anteriores es el estándar que se realiza para este tipo de problemas.
Ejercicio 3.1, demostrar que la segunda función métrica utilizada en el ejempo anterior es efectivamente una métrica.
Ejercicio 3.2, realizar el último paso para demostrar formalmente que la secuencia anterior cumple lo deseado.

Corolario existen espacios métricos que tienen secuencias de Cauchy que no son secuencias de Cauchy en otros.

Límites de sucesiones de Reales

Definimos que el límite de una sucesión existe bajo la condición de que para todo término de la sucesión mayor o igual a un punto de corte, la distancia entre el término y el límite L es menor a épsilon.

$$\forall n \geq N \ \exists \epsilon \ s.t \ d(a_n, L) \leq \epsilon$$

Ejercicio 3.4, demostrar que el límite de la secuencia infinita de 1s es 1.
Ejercicio 3.3, demostrar que el límite de la secuencia $\frac{1}{n}$ es 0.

Proposición el límite de una secuencia es único.
Demostración: Supongamos que existe otro Límite llamado L' que cumpla la definición anterior, por tanto utilizando la desigualdad triangular.

$$\begin{aligned} d(L, L') &\leq d(L, a_n) + d(a_n, L') \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

Proposición toda secuencia que converge es de Cauchy.
Demostración: Utilizamos la desigualdad triangular.

$$d(a_n, a_m) \leq d(a_n, L) + d(L, a_m) \leq \epsilon$$

Sabemos que existe un N y N', para los cuales la primer y segunda distancia son convergentes. Ahora sin pérdida de la generalidad podemos tomar como nuevo punto de corte el mayor de estos valores $N'' = max(N, N')$. Con lo que podemos asegurarnos que esas distancias puedan hacerse arbitrariamente pequeñas.

Ahora que ya sabemos que todas las sucesiones que tienen un límite son de Cauchy, nos interesa encontrar si todas las sucesiones de Cauchy convergen a algún límite que se encuentre dentro del espacio. Esto no es cierto, pero existen algunos espacios en los que se cumple esa condición, centraremos nuestra atención en este tipo de espacios en el resto del curso.

Completitud

Un espacio métrico es completo si todas las sucesiones convergentes son de Cauchy. O sea los límites de las sucesiones de Cauchy siempre se encuentran dentro de este espacio.

Una sucesión es convergente $\iff$ Una sucesión es Cauchy

Una forma simple de visualizar por qué los límites no siempre pueden encontrarse en el espacio es con el ejemplo anterior de la sucesión $\frac{1}{n}$. Esta secuencia toma solo valores en el intervalo $(0, 1]$, pero el límite de la misma se encuentra fuera del intervalo, centraremos nuestro interés para el resto del curso los espacios que sean Completos.

Proposición un espacio Euclídeo es completo.
Demostración: Supongamos que tenemos una secuencia que es Cauchy, como el espacio es

Propiedades importantes de Operadores y Funciones:

Continuidad de Funciones

Una función es continua si para toda secuencia con límite L que toma elementos de un espacio X. Tenemos que el límite de la sucesión de funciones de la secuencia, es equivalente a la función aplicada al límite.

$$lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(lim_{n\to\infty} a_n) = f(L)$$

Existen varias definiciones equivalentes de continuidad (y tipos de continuidad, pero esto no es relevante para nuestro interés). La que se utiliza usualmente en los cursos de análisis es la siguiente. Una función es continua si tenemos que para todo margen de error en nuestro output ϵ, podemos encontrar un margen de error en nuestro input δ. Tal que todas las mediciones se encuentren dentro de ambos.

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ s.t \\ d(f(x), f(x_0)) \leq \epsilon \ \forall \ x \in X \\ s.t \ d(x, x_0) \leq \delta \end{aligned}$$

Algo importante de entender es que nosotros podemos cambiar los valores de los inputs de forma arbitraria porque son números que conocemos, pero los outputs son un tipo de objeto diferente. Así que la manera usual de demostrar este tipo de problemas es encontrando una función $\delta(\epsilon)$, que nos asegure que si nos dan algun valor específico de epsilon, siempre podamos encontrar el delta deseado. (De nuevo se recuerda a nuestros lectores que estas explicaciones están orientadas a la física y se sacrifica un poco el rigor por la didáctica).

Definición decimos que una función f converge en un punto $x_0 \in V$ ssi cuando restringimos la función a los valores de la vecindad V, la distancia entre cada valuación de la función y el punto inicial es menor a epsilon. Formalmente esto lo definimos como. $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \ s.t \ d(f(x_0), f(x)) \leq \epsilon \ \ s.t \ d(x, x_0) \leq \delta$.

Proposición El Producto Interno es una función continua.
Demostración: Utilizamos la desigualdad triangular, la desigualdad de Cauchy Schwartz, la definición de continuidad y las propiedades del PI.

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} |(x_n, y_n) - (x, y)| \\ &= \lim_{n\to\infty} |(x_n, y_n - y) + (x_n - x, y)| \\ &\leq ||x_n|| \; ||y_n - y|| + ||y|| \; ||x_n - x|| \end{aligned}$$

Sabemos que la serie de las x_n converge, entonces podemos decir que:

$$\begin{aligned} ||x_n|| &\leq M \ \forall n \\ \leq ||x_n|| \; ||y_n - y|| + ||y|| \; ||x_n - x|| \\ &\leq M\frac{\epsilon}{2M} + \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Proposición una función en un espacio métrico que es inducido por una norma que es continua alrededor de 0 es continua.
Demostración: Sumamos 0 de forma inteligente y utilizamos la definición de función continua y métrica.

$$\begin{aligned} &d(f(x_n), f(x_m)) \\ &\leq |f((x_n - y_k) - (x_m - y_k)| \\ &\leq |f(x_n - x_m + y_k) - f(y_k)| \end{aligned}$$

Ejercicio 3.5, completar la demostración anterior.

Proposición una función lineal en un espacio métrico unducido por la norma es continua ssi es acotada.
Demostración: comenzamos suponiendo que la función es continua.
$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(0)| &= |f(x - 0)| \\ &= |f(x)| \leq \epsilon| \end{aligned}$$

Donde podemos utilizar la desigualdad gracias a la proposición de la continuidad en 0 de este tipo de funciones. Ahora escalando la función de forma astuta tenemos:

$$\begin{aligned} |f(\frac{\delta}{||x||}x)| &= \frac{\delta}{||x||}|f(x)| \\ \text{Sea: } \epsilon &= \frac{K}{\delta} \\ |f(x)| \leq \epsilon &\leq K||x|| \end{aligned}$$

Ahora supongamos que la función es acotada, utilizemos la propiedad de linealidad y evaluemos el límite de una sequencia convergente.
$\Longleftarrow$

$$
\begin{aligned}
|f(z)| &\leq K||z|| \\
\text{Sea: } z &= x - x_n \\
|f(x - x_n)| = |f(x) - f(x_n)| &\leq K||x - x_n|| \\
lim||f(x) - f(x_n)| &\leq K||x - x_n|| \leq \epsilon
\end{aligned}
$$

Como la función es continua alrededor del 0 es continua en todas partes.

Corolario: en un espacio Euclídeo una función/funcional lineal es continua y acotada.
Demostración: Ejercicio 3.6, Recordar en la guía 1 que toda funcional la podemos representar como el PI de un vector fijo y utilizar los resultados anteriores.

Ahora que ya sabemos como definir la continuidad en funciones lo extendemos para operadores.

Continuidad de Operadores

Un operador lineal entre espacios métricos es continuo si es continuo en algún punto.

$$
\begin{aligned}
A &: V \to W \\
x, x' &\in V \\
\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta &> 0 \; s.t \\
d_W(Ax, Ax') &\leq \epsilon \; s.t \\
d_V(x, x') &\leq \delta
\end{aligned}
$$

Corolario un operador linea y acotado A en un espacio Euclídeo es continuo.
Demostración: Ejercicio 3.7, utilizar la propiedad de linealidad y recordar que el rango y el dominio de este operador son Espacios Euclídeos.

Hasta ahora hemos trabajado con Operadores Compactos en dimensión finita (ya que nos permiten definir el PI de la forma vista en las guías anteriores).
Pero en dimensión infinita ser acotado no es suficiente, para ello hemos desarrollado las herramientas necesarias para poder definir un nuevo tipo de operador y trabajar en la extensión de espacios Euclídeos en dimensión infinita. Ese tipo de espacios son llamados espacios de Hilbert y los operadores son llamados operadores Compactos. Estos serán la mayoría de nuestros objetos de estudio para este curso.