Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas

Métodos Matemáticos de la Física
Hoja de trabajo 1

I. ESPACIOS EUCLÍDEOS, NORMA, SECUENCIAS DE CAUCHY Y CONVERGENTES

1. Decir si las siguientes reglas son definiciones de producto escalar

   a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1b_1 - a_1b_2 - a_2b_1 + ka_2b_2$, con $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ vectores en $\mathbb{R}^2$ con componentes (a_1, a_2) y (b_1, b_2), respectivamente.

   b) $(A, B) = \mathrm{Tr}(A^tB)$ con $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, matrices reales de $n \times n$.

2. Mostrar la desigualdad triangular

$$|\|x\| - \|y\|| \leq ||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \tag{1}$$

3. Considere el conjunto de funciones $\chi_n(x) = \sin nx$ con $n = 1, 2, \cdots$, definidas en el intervalo $0 \leq x \leq \pi$. Proponer una regla que satisfaga los axiomas de producto escalar y calcular el producto escalar entre dos funciones del conjunto.

4. Mostrar que si los vectores no nulos $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ son ortogonales entre sí, entonces son linealmente independientes.

5. Mostrar que, en un espacio euclídeo, el producto escalar de cualquier vector con el vector nulo es siempre cero.

6. Considere la secuencia de funciones linealmente independientes $\{x_0(t) = 1, x_1(t) = t, \cdots, x_k(t) = t^k, \cdots\} \in C_2(-1, 1)$. Construya a partir de esta secuencia un conjunto ortonormal de polinomios $\{P_k(t)\}$ de grado $k \in \mathbb{N}$.

7. Para todos x, y, u, $v \in E$, demostrar

$$|\rho(x, y) - \rho(x, u)| \leq \rho(u, y)$$
$$|\rho(x, y) - \rho(u, v)| \leq \rho(x, u) + \rho(y, v)$$

   donde $\rho(x, y)$ indica la distancia entre x e y.

8. Demuestre que la función definida en el espacio $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ como

$$\rho(n, m) = \begin{cases} 0, & n = m \\ 1 + \frac{1}{n+m}, & n \neq m \end{cases} \tag{2}$$

   define una distancia en $\mathbb{N}$.

9. Suponga el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ definido sobre el campo de los reales. Demuestre que para $x \in \mathbb{R}^n$, la regla

$$\|x\| = |x_1| + |x_2| + |x_3| + \cdots + |x_n| \tag{3}$$

   donde $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, define una norma.

10. Considere el espacio $C(a, b)$ de funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ a valores en los complejos. Muestre que la regla

$$\| \cdot \| : C(a, b) \to \mathbb{R}$$
$$f(x) \mapsto \max_{x\in[a,b]}|f(x)| \tag{4}$$

    satisface las propiedades de norma.