Soluciones de PSLR generales

Ahora resolveremos PSLR de ecuaciones diferenciales famosas que presentan funciones de peso no triviales. Recordemos que estas funciones aparecen como resultado de imponer que el operador L sea autoadjunto, entonces se realiza un proceso de factor integrante para transformar la ecuación a un PSLR y realizar este procedimiento altera la estructura del PI del espacio.l.

Solución de Ecuaciones Diferenciales Famosas

Ecuación de Bessel $x^2\frac{d^2y}{dy^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2) = 0$ Así como en la guía pasada vismoq que los Polinomios de Legendre aparecen como la solución de la ecuación diferencial para la parte angular de la solución de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas. La solución de la ecuación diferencial de Bessel son los Polinomios de Bessel que aparecen como la solución de la parte radial de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas.
Así como los polinomios de Legendre son llamados armónicos esféricos, los polinomios de Bessel son llamados Armónicos Cilíndricos.

Ejercicio 7.1: Reescribir la ecuación diferencial en su forma de PSLR. Guía dividir por x la expresión y encontrar que $w(x) = x$.

Ejercicio 7.2: Resolver la ecuación de Bessel utilizando el método de Frobenius.

Ejercicio 7.3: Utilizar separación de variables para llegar a estas expresiones utilizando estas condiciones de frontera en un cilindro de radio a y altura h; $V(r,\theta,0) = 0, V(a,\theta,z) = 0, V(r,\theta,h) = f(r,\theta), V(r,\theta,z) = V(r,2\pi n\theta,z)$:

$$\begin{aligned}
V(r,\theta,z) &= R(r)\Theta(\theta)Z(z)\\
Z'' - k^2Z &= 0\\
\Theta'' + m^2\Theta &= 0\\
\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + (k^2 - \frac{m^2}{r^2})R &= 0\\
R(r) &= J_m(kr)
\end{aligned}$$

Donde J_m es el Polinomio de Bessel de primer tipo. Ahora realizamos un cambio de variables a nuestra conveniencia, sea j_{mn} la enésima raíz del polinomio J_m, vamos a indexar nuestra constante k en términos de estas raíces y el radio del cilindro. Sea $k_{mn} = \frac{j_{mn}}{a}$, de esto la solución de la **Ecuación de Lapace** en coordenadas cilíndricas es:

$$V(r,\theta,z) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} sinh(j_{mn}\frac{z}{a})J_{mn}(j_{mn}\frac{r}{a})(A_{mn}cos(m\theta) + B_{mn}sin(m\theta))$$

Nota: La ecuación de Bessel y Laplace tienen soluciones más generales que se han obviado por las restricciones utilizadas.

Ejemplo de la Solución de una ecuación de Laplace
Encontraremos el potencial eléctrico adentro de un cilindro tomando como condiciones de frontera las utilizadas anteriormente, agregando como restricción que el potencial en la tapa superior es $V(r,\theta,h) = V_0$. De nuevo apelaremos a la simetría de este tipo de problemas para obviar a menos sea necesario el término angular. De esto nuestra solución propuesta sería

$$V(r,\theta,z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n sinh(j_n \frac{z}{a}) J_n(j_n \frac{r}{a})$$

Ahora solo debemos encontrar el valor de las constantes:

$$C_n = \frac{sinh(j_n \frac{h}{a})}{sinh(j_n \frac{h}{a})^2} \frac{\int_0^a V_0 z J_n(j_n \frac{z}{a})}{\int_0^a z J_n J_m dz}$$

Para poder evaluar estas integrales tenemos que demostrar ciertas propiedades.

Ejercicio 7.4: Demostrar que este tipo de Polinomios de Bessel son ortogonales.

Ejercicio 7.5: Encontrar la constante de normalización de este tipo de Polinomios de Bessel.

Ejercicio 7.6: Calcular el valor de las constantes $C_n s$.

Ecuación de Hermite $\frac{d^2y}{dy^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \lambda y = 0$:
Esta ecuación aparece en varios tipos de sistemas como el movimiento Browniano, el oscilador armónico cuántico, análisis de señales, etc.

Ejercicio 7.7: Utilizar series de potencias para encontrar que la solución de esta ecuación puede representarse como:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^2}{dx^n} e^{-x^2}$$

Ejercicio 7.8: Demostrar la ortogonalidad de los H_ns utilizando la función de peso $w(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$.

Estos son conocidos como los Polinomios de Hermite y forman un SOC.

Ecuación de Laguerre $x\frac{d^2y}{dy^2} + (1-x)\frac{dy}{dx} + ny = 0$:
Esta ecuación aparece al momento de resolver el problema del átomo de hidrógeno en la mecánica cuántica. Específicamente aparece como la solución de la parte radial del sistema de separación de variables en coordenadas esféricas.

Ejercicio 7.9: Utilizar series de potencias para encontrar que la solución de esta ecuación puede representarse como:

$$L_n(x) = \sum_{0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k$$

Ejercicio 7.10: Demostrar la ortogonalidad de los L_ns utilizando la función de peso $w(x) = e^{-x}$.

Estos son conocidos como los Polinomios de Laguerre y forman un SOC.

Ejemplo de la Solución de una ecuación de Hermite
Vamos a resolver el oscilador armónico cuántico 1D independiente del tiempo, no daremos los detalles físicos o la justificación de la ecuación resultante. Pero debemos resolver el caso de la ecuación de schrodinger con un potencial $V = \frac{1}{2}mw^2x^2$.

$$\frac{-h^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = E\psi$$
$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}mw^2x^2\psi = E\psi$$
$$\psi = \sum_0^\infty A_n x^n$$

Ejercicio 7.11: Reescribir la ecuación del oscilador armónico cuántico en su forma de PSLR. Recordar que es necesario encontrar un factor integrante $e^{\frac{-x^2}{2}}$.

Ejercicio 7.12: Demostrar que la solución de esta ecuación da lugar a los siguientes niveles de energía y la siguiente función de onda asociada:

$$E_n = \hbar w(2n + \frac{1}{2})$$
$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}(\frac{mw}{\pi\hbar})^{\frac{1}{4}} e^{\frac{-mwx^2}{2\hbar}} H_n(\sqrt{\frac{mw}{\hbar}}x)$$

Ahora resolveremos el caso particular donde tenemos un potencial agregado de $V' = -qEx$. Como ya conocemos la solución del potencial inicial estudiaremos el comportamiento del sistema bajo estas condiciones.

$$V = \frac{1}{2}mw^2x^2 - qEx$$
$$= \frac{1}{2}((x - qE)^2 - (qE)^2)$$

Notemos que estamos agregando una constante a nuestro potencial realizando una transformación de tipo $u = x - qE$, estamos dejando invariante a nuestro sistema comparado con el original (Realizamos una tralsación horizontaln).

Esto quiere decir que al ya conocer la solución original $\psi(x)$, nuestro nuevo sistema tiene una función solución trasladada $\psi(u)$. Ahora para encontrar las constantes del sistema debemos realizar el PI.

$$C_n = \frac{\int \psi_n(x)\psi_m(x - qE)e^{\frac{-x^2}{2}}}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n\psi_m e^{\frac{-x^2}{2}}}$$

En este caso estas constantes tienen la interpretación de ser la amplitud de probablilidad de un sistema físico que se encontraba bajo $V = \frac{1}{2}mw^2x^2$ en ψ_n que fue expuesto al potencial V' y ahora se midió como $\psi_n(x - qE)$.

Ejercicio 7.: Encontrar el valor de C_0 y C_1.

Ejemplo de la Solución de una ecuación de Laguerre
Vamos a resolver la parte radial del átomo de hidrógeno, no daremos los detalles físicos que llevan a este sistema o la justificación de la ecuación resultante. Pero debemos resolver el caso de la ecuación de schrodinger con un potencial de tipo $V = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ en coordenadas esféricas.

$$\frac{-h^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = E\psi$$

estudiamos la parte radial:

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr}) + \frac{2\mu}{\hbar^2}(Er^2 + ke^2r) = l(l+1)$$

Donde μ es la masa reducida y el resto de constantes agregadas aparecen como resultado del sistema de variables separables.

Ejercicio 7.: Obtener la ecuación anterior resolviendo el sistema de variables separables de la ecuación de Schrodinger con el potencial dado en coordenadas esféricas, pueden utilizar como guía el ejemplo de Legendre.

Ejercicio 7.: Reescribir la expresión encontrada como una ecuación de Laguerre.

Ejercicio 7.: Reescribir la ecuación encontrada como un PSLR, recordar que se debe utilizar un factor integrante.

Ejercicio 7.: Encontrar que la solución de la parte radial de átomo de hidrógeno puede escribirse como:

$$R_{nl} = A_{nl}r^l e^{\frac{-rme^2}{\hbar^2}}$$

Resolviendo el resto del sistema de variables separables es posible encontrar los niveles de energía para el átomo de hidrógeno. En la física a este tipo de problemas se les suele decir análisis espectrales ya que se están encontrando los autovalores de un PSLR.

Nota: En estas últimas guías se exige más con los ejercicios ya que se espera que un estudiante que curse esta materia tenga un conocimiento vago de la construcción de los espacio de Hilbert pero que pueda resolver PSLR con condiciones de fronteras no homogéneas de manera natural en distintas aplicaciones. Como lo harán próximamente en sus cursos de mecánica cuántica.