



GUÍA 5

Introducción

Luego de un tiempo estudiando secuencias, convergencia, completitud y espacios de Banach y Hilbert. Volvemos a los espacios euclídeos, en concreto, al estudio de aplicaciones/transformaciones/mapas lineales entre dichos espacios.

Series de Fourier Generalizadas

El análisis de las series de Fourier esta directamente ligado con el trato de operadores lineales y sus valores, vectores y funciones propias. Temas que se tratarán con énfasis más adelante. Sin embargo, es necesario tratar la parte de sus condiciones de frontera.

Condiciones de Frontera Comunes^a:

Para una función X definida en un intervalo $[a, b]$.

Dirichlet: $X(a) = X(b) = 0$.

S

Neumann: $X'(a) = X'(b) = 0$.

Periódicas : $X(a) = X(b)$ y $X'(a) = X'(b)$.

^aPuede revisar el desarrollo de la solución al sistema $A(X) = \lambda X$ con $A = -\frac{d^2}{dx^2}$ con las condiciones de frontera mostradas en el siguiente [video](#) a partir del minuto 23 : 28.

Con esto, se pueden definir las series de Fourier Generalizadas.

Series de Fourier Generalizadas

Dado un sistema de condiciones de frontera, suponga que hay una sucesión $X_n(x)$ de eigenfunciones (funciones propias) y una sucesión λ_n de eigenvalores (valores propios) a su respectivo X_n , entonces definimos la serie de Fourier Generalizada de φ como:

S

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x),$$

donde $A_n = \frac{\langle \varphi, X_n \rangle}{\|X_n\|^2}$. Con esto y las condiciones de frontera mostradas anteriormente, se generan 3 tipos de series de Fourier, la serie en senos, en cosenos y la completa.

Transformaciones Lineales

Ya que se estudiaron propiedades en espacios euclídeos, es momento de estudiar lo que modifica los vectores en dicho espacio y hacia otros. Para esto se mostrarán una serie de definiciones y teoremas importantes. Primero la más importante y básica de todas:

Mapas lineales o Transformaciones lineales

Un mapa lineal de V a W es una función $T : V \rightarrow W$ con las siguientes propiedades: (para todo $u, v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{F}$)

S

Aditividad: $T(u + v) = Tu + Tv$.

Homogeneidad: $T(\alpha v) = \alpha Tv$.

De forma general, un mapa lineal es una función que satisface lo siguiente: $T(\alpha u + \beta v) = \alpha Tu + \beta Tv$.

Formas y Operadores Lineales

S

Una función escalar definida sobre un espacio euclídeo \mathbf{E} , $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{F}$, es llamada forma o funcional lineal si satisface las condiciones de linealidad. Mientras que un operador lineal es una función $A : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$, que también satisface las condiciones de linealidad.

Algunos ejemplos de operadores lineales son:

Operador Nulo: $Ox = \mathbf{0}, \forall x \in \mathbf{E}$.

Operador Identidad: $Ix = x, \forall x \in \mathbf{E}$.

Operador de Proyección: $Px = \sum_{i=1}^n e_i \langle e_i, x \rangle$ para un sistema ortonormal completo $\{e_1, \dots, e_n\}$ en $\mathbf{E}_n \subset \mathbf{E}$.

Operadores Idempotentes: un operador que cumpla con $P(Px) = Px, \forall x \in \mathbf{E}$, se llama idempotente.

Operador de Fredholm: Ver [guía 4](#).

Estudiando un poco los mapas lineales, es fácil darse cuenta que el conjunto de mapas lineales es un espacio vectorial, denotado como $\mathcal{L}(V, W)$. Esto también aplica para formas y operadores lineales.

Representación de Transformaciones Lineales

La forma más utilizada para representar mapas lineales en espacios de dimensión finita es la forma matricial. Esta se define como

S

Matriz

Sean m y n enteros positivos. Una *matriz de $m \times n$* A es un arreglo rectangular de elementos de

\mathbb{F} con m filas y n columnas:

\mathcal{S}

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}.$$

Muy bonita definición, pero no nos dice nada acerca de como construir una matriz ya conociendo el operador asociado. Para se tiene el siguiente procedimiento:

Matriz de un Mapa Lineal

Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $\{e_1^V, \dots, e_n^V\}$ un sistema ortonormal completo de V y e_1^W, \dots, e_m^W un sistema ortonormal completo de W . La matriz de T respecto a estas bases es la matriz $m \times n$ $\mathcal{M}(T)$ cuyas entradas A_{jk} son definidos como

\mathcal{S}

$$Te_k^V = A_{1k}e_1^W + \cdots + A_{mk}e_m^W = \sum_{j=1}^m A_{jk}e_j^W.$$

En otras palabras, la k -ésima columna de $\mathcal{M}(T)$ consiste en los escalares necesarios para escribir a Te_k^V como una combinación lineal de (e_1^W, \dots, e_m^W) .

Características de los Operadores

Para diferentes operadores se cumplen ciertas condiciones o características importantes.

Norma de un Operador

Dado un operador lineal sobre un espacio euclídeo, $A : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$, se define su norma, $\|A\|$, como el supremo de la funcional $\|Ax\|$ tomada sobre el conjunto de vectores unitarios de ese espacio,

\mathcal{S}

$$\|A\| := \sup_{x \in \mathbf{E} \mid \|x\|=1} \|Ax\|.$$

Si $\|A\| < \infty$, el operador se dice **acotado**. Y todo vector unitario x_o para el cual esa cota es alcanzada se dice **vector máximo** de A .

Y, como es de esperarse, el operador identidad tiene norma 1 y el operador nulo, tiene norma cero.

Proposiciones y Lemas Importantes

- En un espacio euclídeo de dimensión finita, todo operador lineal resulta acotado y tiene un vector máximo.
- Si A es un operador lineal acotado sobre un espacio euclídeo \mathbf{E} , entonces

\mathcal{S}

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|.$$

- De forma equivalente, la norma de un operador acotado A también puede definirse como

$$\|A\| = \sup_{x, y \text{ unitarios}} \langle y, Ax \rangle.$$

S

- Sean A y B operadores lineales acotados sobre un espacio euclídeo \mathbf{E} , su suma también es un operador acotado $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$. Asimismo, la norma de los operadores cumple las propiedades de norma. En concreto, los operadores acotados sobre un espacio euclídeo forman un espacio de Banach.
- También se cumple $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Visto lo anterior, es claro que dos operadores acotados que tienen los mismo elementos de matriz son iguales. Si

$$\langle x, Ay \rangle = \langle x, By \rangle, \quad \forall x, y \in \mathbf{E},$$

entonces, $A - B = \mathbf{O}$ por ende $A = B$. Ahora bien,

Operador Adjunto

Dado un operador lineal acotado, se define su operador adjunto como aquel operador que satisface

$$\langle y, A^\dagger x \rangle = \langle Ay, x \rangle = \langle x, Ay \rangle^*, \quad \forall x, y \in \mathbf{E}.$$

S

Teniendo una base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$, la matriz asociada al operador adjunto, A' , tiene por elementos a

$$(A')_{ij} = \langle e_i, A^\dagger e_j \rangle = \langle Ae_i, e_j \rangle = \langle e_j, Ae_i \rangle^* = (A)_{ij}^* = (A^\dagger)_{ij}.$$

A la matriz asociada al operador adjunto es llamada **matriz adjunta** (transpuesta conjugada), y es de la forma $A' = A^\dagger = (A^t)^*$.

Operador Simétrico y Autoadjunto

A un operador acotado A definido sobre un espacio euclídeo \mathbf{E} se dice simétrico si

S

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \quad \forall x, y \in \mathbf{E}.$$

Dadas esas condiciones, un operador simétrico coincide con su adjunto, a esto se le denomina **autoadjunto** o **hermítico**, $A = A^\dagger$.

Teorema Espectral

Para iniciar con esta sección es necesario introducir algunas definiciones y teoremas.

Espectro

S

El espectro de un operador A , $\sigma(A)$, es el conjunto de todos los números complejos λ tales que $A - \lambda I$ no es invertible.

En concreto, el espectro de un operador se relaciona directamente con la ecuación de la ecuación

$$Au = \lambda u,$$

donde $U \neq 0$ y $\lambda \in \mathbb{F}$ (normalmente se consideran los complejos puesto que son algebraicamente cerrados, para ser un poco más generales, tomaremos un cuerpo \mathbb{F}). Las soluciones de dicha ecuación pueden relacionarse con las propiedades del **operador resolvente** dado como

$$R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}.$$

Los valores complejos para los cuales el operador R_λ está bien definido y es acotado se dice que pertenecen al conjunto resolvente. Los valores λ para los cuales no está bien definido, i.e. "presenta problemas", constituyen el espectro del operador y están denominados como valores propios¹.

Tomando a Axler como primera fuente, se define un teorema espectral para dos posibles campos \mathbb{R} y \mathbb{C} . Por lo que, se tiene

Teorema Espectral Complejo

Tomando $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ y T un operador. Entonces, lo siguiente es equivalente:

a) T es normal^a.

S

b) E tiene una base ortonormal de vectores propios de T .

c) T tiene una matriz diagonal respecto a alguna base ortonormal de V .

^aUn operador normal es aquel que conmuta con su adjunto ($TT^\dagger = T^\dagger T$) y $\|Tv\| = \|T^\dagger v\|$.

Teorema Espectral Real

Tomando $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ y T un operador. Entonces, lo siguiente es equivalente:

a) T es autoadjunto.

S

b) E tiene una base ortonormal de vectores propios de T .

c) T tiene una matriz diagonal respecto a alguna base ortonormal de V .

¹Revisar el inciso (3) de la bibliografía para mayor información.

Problemas

Ejercicio 1

Suponga que T es un operador. Pruebe que λ es un valor propio de T si y solo si $\bar{\lambda}$ es un valor propio de T^\dagger .

Ejercicio 2

Demuestre que los valores propios de un operador lineal simétrico A son reales.

Ejercicio 3

Demuestre que los vectores propios de un operador lineal simétrico A correspondientes a valores propios diferentes son ortogonales entre sí.

Ejercicio 4

Probar que para cualquier matriz cuadrada A , la matriz $A + A^t$ es simétrica.

Ejercicio 5

Dad la siguiente matriz:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Encontrar A^2 , A^3 y una fórmula para A^n y demuéstrelo.

Ejercicio 6

Demuestre que los números de Fibonacci F_n cumplen la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

¿Cuáles son los valores propios de la matriz que aparece en el miembro izquierdo (sin el exponente), y qué relación tiene con la sucesión de Fibonacci? ¿Cómo se puede demostrar la identidad de Cassini² empleando la ecuación matricial anterior?

²Investigue.

Bibliografía

- [1] Falomir, H. (2015). *Curso de métodos de la física matemática*. Series: Libros de Cátedra.
- [2] Arfken, G. B., & Weber, H. J. (2013). *Mathematical methods for physicists*.
- [3] Chubay, R. (2017). *Propiedades Espectrales de Operadores no Acotados en el Espacio $L^2(\mathbb{R})$* . [Tesis de Licenciatura]. Universidad de San Carlos de Guatemala.
- [4] Axler, S. (2015). *Linear algebra done right*. springer publication.