Métodos matemáticos de la física

1er examen parcial
2do semestre 2023

Instrucciones: dispone de tres horas para resolver el examen. Hora de inicio: 7:00 am. Deberá subir un pdf de la soluciíon del parcial a la plataforma de UVirtual. Hora límite para subir el examen resuelto: 10:05 am.

1. Demuestre el siguiente teorema: Suponga que $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una secuencia de complejos tales que $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$ converge. Suponga además que E es un espacio euclídeo completo con un sistema ortonromal completo $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Entonces, hay un elemento $x \in E$ cuyos coeficientes de fourier con respecto de $\{e_k\}$ son los complejos α_k y,
$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \tag{1}$$

2. Considere, la función definida para $n \geq 1$ como
$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n \\ x - \frac{1}{n}, & \text{si } 1/n \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{2}$$
Considere la norma suprema y muestre si la secuencia $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en norma a la función $g(x) = x$.

3. Muestre que el espacio $l_1 := \{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$ es un espacio completo.

4. Para una función periódica $f(x)$ de período $2L$ se define el desarrollo en series de Fourier como
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right) \tag{3}$$
Encuentre los coeficientes a_n y b_n que proveen la mejor aproximación de la serie a la función $f(x)$ y escriba la identidad de Parseval correspondiente esta serie de Fourier.