Demostremos ahora que el desarrollo

$$S = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

converge uniformemente. Posteriormente demostraremos que el conjunto trigonométrico es completo con respecto a funciones a valores reales definidas en $x \in [-\pi, \pi]$.

Consideremos dos sumas parciales S_N, S_M donde

$$S_N = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos kx + b_n \sin kx)$$

Calculemos la diferencia $|S_N - S_M|^2$

$$|S_N - S_M|^2 =$$

$$\left| \sum_{k=M+1}^{N} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right|^2$$

$$= \left| \sum_{k=M+1}^{N} \left(k a_k \frac{\cos kx}{k} + k b_k \frac{\sin kx}{k} \right) \right|^2$$

Podemos pensar que esta expresión es el producto escalar entre 2 vectores en $\mathbb{R}^{N-M}$ cuyas componentes son respectivamente

$$w = (k a_k, k b_k), \quad k = M+1, \dots N$$

$$= ((M+1) a_{M+1}, \dots N a_N, (M+1) b_{M+1} + \dots, N b_N)$$

$$z = \left(\frac{\cos kx}{k}, \frac{\sin kx}{k} \right), \quad k = M+1, \dots N$$

$$= \left(\frac{\cos (M+1)x}{M+1}, \dots, \frac{\cos Nx}{N}, \frac{\sin (M+1)x}{M+1}, \dots, \frac{\sin Nx}{N} \right)$$

de tal forma que, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $\mathbb{R}^{N-M}$

$$\left| \sum_{k=M+1}^{N} \left(k a_k \frac{\cos kx}{k} + k b_k \frac{\sin kx}{k} \right) \right|^2$$

$$\leq \|w\|^2 \|z\|^2$$

donde

$$\|w\|^2 = \sum_{k=M+1}^{N} (k^2 a_k^2 + k^2 b_k^2)$$

$$\|z\|^2 = \sum_{k=M+1}^{N} \frac{1}{k^2}$$

Vamos a acotar ahora el producto $\|w\|^2 \|z\|^2$.

El desarrollo de Fourier de $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin$$

con $\alpha_k = k b_k$, $\beta_k = -k a_k$

$$\alpha_0 = 0$$

de tal forma que las componentes de $f'(x)$ en el sistema ortogonal trigonométrico

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \right)$$

son $(0, \sqrt{\pi}\, \alpha_k, \sqrt{\pi}\, \beta_k)$ y su desarr. Fourier es

$$f'(x) = \sqrt{\pi} \sum_{1} \left(\alpha_k \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + \beta_k \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \right)$$

De acuerdo con la desigualdad de Bessel

$$\pi \sum_n \left(\alpha_n^2 + \beta_n^2 \right) \leq \| f'(x) \|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx$$

de modo que

$$\sum_n (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx$$

Podemos usar esta relación para acotar $|S_N - S_M|^2$.

$$\| S_N - S_M |^2 \leq \|w\|^2 \|g\|^2$$
$$\leq \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 \right) \left(\sum_{M+1}^{N} \frac{1}{K^2} \right)$$

La serie $\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K^2}$ converge.

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Dado que $f'(x)$ es de cuadrado integrable entonces

$$|S_N - S_M|^2 < \infty$$

y $\lim |S_N - S_M|^2 \leq 0$

Esto es, la diferencia ~~de~~ distancia de dos sumas parciales tiende a cero en el límite $N, M \to \infty$.
Por el criterio de Cauchy en $\mathbb{R}$ convergen hacia un límite.

Demostramos ahora la convergencia de $f(x)$

Escribimos la suma parcial

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} (a_m \cos mx + b_m \sin m$$

usaremos

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$$

de modo que

$$S_m(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{m=1}^{n} a_m \cos mx + b_m \sin m$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt \, f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n} \left[\cos mx \cos m \right. \right.$$

$$\left. \left. + \sin mx \sin mt \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt \, f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n} \cos [m(t-x)] \right\}$$

sea $s = t - x$

definimos

$$\cancel{K_n(s) =} \frac{e^{i(n+1)s} - e^{-ins}}{2(e^{is} - 1)}$$

$$K_n(s) = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n} \cos ms$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n} \frac{e^{ims} + e^{-ims}}{2}$$

$$= \sum_{m=-n}^{n} \frac{e^{ims}}{2}$$

el k

Realizando la sumatoria se obtiene

$$K_n(s) = \frac{e^{i(n+1)s} - e^{-ins}}{2(e^{is}-1)}$$

$$= \frac{e^{i(n+1/2)s} - e^{-i(n-1/2)s}}{2(e^{is/2} - e^{-is/2})}$$

$$= \frac{\sin[(n+1/2)s]}{2\sin[\frac{1}{2}s]}$$

de modo que

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin[(n+1/2)s]}{2\sin[\frac{s}{2}]}\,dt$$

$$s = t - x$$

Podemos escribir entonces que

$$S_n(x) - f(x) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt\; \frac{f(t)-f(x)}{\sin[\frac{1}{2}(x-t)]}\sin[(n+\tfrac{1}{2})(x-t)]$$

tomemos el límite $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} (S_n(x) - f(x)) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt\; \frac{f(t)-f(x)}{\sin[\frac{1}{2}(x-t)]}\sin[(n+\tfrac{1}{2})(x-t)]$$

Aquí traemos a colación el lema de Riemann - Lebesgue:

Si g es continua en $[a,b]$, salvo en un número finito de puntos en los que permanece acotada, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g(x)\sin(nx+\alpha)\,dx = 0$$

Con este resultado es inmediato demostrar la convergencia de S_n para $x \in [-\pi,\pi]$

En este caso, la función

$$g(t) = \frac{f(t) - f(x)}{\sin[\frac{1}{2}(x-t)]}$$

es continua si $x \neq t$

y si f es derivable entonces $g(t)$ es continua para todo $t \in [-\pi,\pi]$:

$$\lim_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{2\sin[\frac{1}{2}(t-x)]} = f'(x)$$

De manera que la integral $S_n(x) - f(x)$ se anula para $n\to\infty$

y podemos decir que

$$\lim_{n\to\infty} \|f(x) - S_n(x)\|_2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2\,dx$$

$$= 0$$

esto es

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x) \quad \forall x \in [-\pi,\pi]$$