Definiciones básicas

Giovanni Ramírez García, PhD

Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de San Carlos de Guatemala

Guatemala, 23 de febrero de 2021

1. Límite

Una función f definida en un conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tiene el límite L en x_0, que se escribe

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

si dado cualquier número real $\epsilon > 0$, existe otro número real $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon, \text{ si } x \in X, \text{ y } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

2. Función continua

Una función f definida en el dominio $[a, b]$ es continua en un punto $x_1 \in [a, b]$ si

$$\exists \lim_{x \to x_1^+} f(x) \in \mathbb{R},$$

$$\exists \lim_{x \to x_1^-} f(x) \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{x \to x_1^+} f(x) = \lim_{x \to x_1^-} f(x),$$

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = \lim_{x \to x_1^+} f(x) = \lim_{x \to x_1^-} f(x),$$

$$\exists f(x_1),$$

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1).$$

3. Convergencia

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una secuencia infinita de números reales. Esta secuencia tiene el límite x, o converge a x, si para cada $\epsilon > 0$, existe un número positivo $N(\epsilon)$ tal que $|x_n - x| < \epsilon$, siempre que $n > N(\epsilon)$, entonces

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x,$$

significa que la secuencia $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x.

4. Convergencia y continuidad

Si f es una función definida en el conjunto $X \subset \mathbb{R}$ y $x_0 \in X$ entonces es equivalente decir

(a) que f es continua en x_0, y

(b) que si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x_0, entonces

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

5. Diferenciabilidad

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a x_0. La función f es diferenciable en x_0 si existe

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

El número $f'(x_0)$ se llama la derivada de f en x_0. Una función que tiene una derivada en cada número de un conjunto X, se dice que es derivable en X.

6. Diferenciabilidad y continuidad

Si la función f es diferenciable en x_0, entonces f es continua en x_0.

7. Teorema de Rolle

Suponga una función f que es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = 0.$$

El teorema de Rolle se puede usar para probar el teorema del valor medio.

8. Teorema del valor medio

Si f es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

9. Teorema del valor extremo

Sea f una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), entonces existen los números $c_1, c_2 \in [a, b]$ que satisfacen

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2) \quad \forall x \in [a, b].$$

Además, los números c_1 y c_2, o coinciden con los extremos del intervalo $[a, b]$, o donde $f'(x) = 0$.

10. Teorema de Rolle generalizado

Sea f una función continua en $[a, b]$ y n veces derivable en (a, b). Si $f(x) = 0$ en los $(n+1)$ números distintos

$$a \leq x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq b,$$

entonces, un número $c \in (x_0, x_n)$, y por lo tanto $c \in (a, b)$, existe y satisface

$$f^{(n)}(c) = 0.$$

11. Teorema del valor intermedio

Sea f una función continua en $[a, b]$ y sea K un número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un número $c \in (a, b)$ para el cual

$$f(c) = K.$$

12. Integral de Riemann

La integral de Riemann de una función f en el intervalo $[a, b]$ es el límite

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{max\{\Delta x_i\}\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i,$$

- donde $x_0, x_1, \ldots, x_n$ satisfacen $a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq n$.
- $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, para $i = 1, 2, \ldots, n$.
- z_i se elige arbitrariamente en $[x_{i-1}, x_i]$.
- Si la función f es continua en $[a, b]$, entonces también es integrable en $[a, b]$.
- Si la función f es integrable, podemos elegir puntos x_i equidistantes en $[a, b]$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ y $z_i = x_i$ de modo que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

con $x_i = a + i(b-a)/n$

13. Teorema del valor medio ponderado

Sea f una función continua en $[a, b]$ y suponga que la integral de Riemann de la función g existe en $[a, b]$ y que $g(x)$ no cambia de signo en $[a, b]$. Entonces, existe un número $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

En el caso de que $g(x) \equiv 1$, se obtiene el valor promedio de la función f en $[a, b]$

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

14. Teorema de Taylor (I)

Suponga que la función f es continua en $[a, b]$ y que tiene $(n + 1)$ derivadas $f^{(n+1)}$ que también son continuas en $[a, b]$. Para cada $x \in [a, b]$, existe un número $\xi(x)$ entre $x_0 \in [a, b]$ y x con

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

donde$P_n(x)$ es el Polinomio de Taylor de orden n para f en el punto x_0

$$\begin{aligned} P_n(x) =& f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \\ & \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ =& \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \end{aligned}$$

14. Teorema de Taylor (II)

y $R_n(x)$ se conoce como el resto o el error de truncamiento

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

- Hay que tener en cuenta que el error depende de $\xi(x)$ pero el Teorema de Taylor no especifica cómo calcularlo.
- El análisis numérico de $R_n(x)$ sirve para determinar una cota de error máximo.
- En el límite $n \to \infty$, se obtiene la Serie de Taylor.
- En el caso de $x_0 = 0$, el polinomio de de Taylor se convierte en el polinomio de Maclaurin.

15. Error, error absoluto y error relativo

Sea p^* una aproximación a p, entonces el error de la aproximación es $p - p^*$. El error absoluto es

$$|p - p^*|,$$

y el error relativo es

$$\frac{|p - p^*|}{|p|},$$

siempre que $p \neq 0$.

16. Cifras significativas

El número p^* aproxima a p con t cifras significativas si t es el mayor entero no negativo para el cual se cumple

$$\frac{|p - p^*|}{|p|} \leq 5 \cdot 10^{-t}.$$

- Esta es una definición común en el área del análisis numérico, aunque difiere de la idea de *cifras significativas* que se usa en química o en física.

17. Crecimiento del error

Suponga que E_0 es un error introducido en una etapa del cálculo y que E_n representa la magnitud del error después de n etapas subsecuentes. Entonces los casos límite son

1. el crecimiento lineal, $E_n \approx CnE_0$, donde C es una constante independiente de n; y
2. el crecimiento exponencial, $E_n \approx C^n E_0$, para $C > 1$.

El crecimiento exponencial del error evidencia un algoritmo inestable.

18. Tasa de convergencia

Suponga que la secuencia $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a cero y que la secuencia $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un número α. Entonces, si existe una constante $k > 0$ que satisface

$$|\alpha_n - \alpha| \leq k|\beta_n|, \text{ para } n \gg 1,$$

entonces se dice que $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a α con una tasa, u orden de convergencia $O(\beta_n)$ y se representa con $\alpha_n = \alpha + O(\beta)$.

19. Tasa de convergencia, caso general

Suponga que
$$\lim_{h\to 0} G(h) = 0,$$
y que
$$\lim_{h\to 0} F(h) = L.$$
Entonces, si existe una constante $k > 0$ tal que
$$|F(h) - L| \leq k|G(h)|, \text{ para } h \ll 1,$$
decimos que $F(L)$ tiende a L con una tasa $F(h) = L + O(G(h))$.

¡Muchas gracias!

Contacto:
Giovanni Ramírez García, PhD
ramirez@ecfm.usac.edu.gt
http://ecfm.usac.edu.gt/ramirez