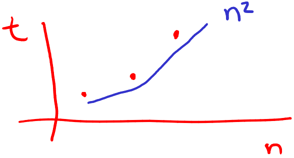


Polinomios de aproximación numérica

Giovanni Ramírez García, PhD

Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de San Carlos de Guatemala

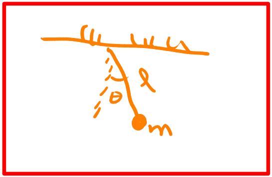
Guatemala, 2 de marzo de 2021

With four parameters I can fit an elephant, and with five I can make him wiggle his trunk. –John von Neumann

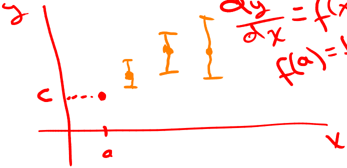
✓ aproximación de oscilaciones pequeñas

$\sin\theta \approx \theta$

$\forall\, \theta \ll 1$



modelo Euler



$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$f(a) = b$$

$$\frac{d\theta}{dt} = f(\theta, t)$$

$$f(\theta, t=0) = c, \quad c: \text{cte}$$

Introducción

Polinomio de aproximación de Lagrange

Polinomios de aproximación de Newton

Polinomios de aproximación de Hermite

Polinomios de aproximación por splines (segmentos)

$O(x)$ ×
$O(x^2)$ ×
$O(x^3)$ ✓ $\left\{ \begin{array}{l} \text{naturales} \\ \text{fijados} \end{array} \right.$

¿Por qué hacer aproximaciones con polinomios?

- Polinomios: de las formas mejor conocidas para mapear $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- Sea f una función definida y continua en $[a, b]$, consideremos el polinomio de orden $n > 0$

$$P_n(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

como una aproximación de f donde $a_0, \ldots, a_n$ son constantes reales

- es decir $f(x) \approx P_n(x)$, con un error dado por el teorema de Weierstraß

$$|f(x) - P_n(x)| < \epsilon, \forall x \in [a, b], \epsilon > 0.$$

$\epsilon > 0$

Polinomio de Taylor

continua continuas

- Supongamos que la función f es continua y tiene n derivadas continuas en $[a, b]$, que existe la $(n+1)$ derivada y que es continua en $[a, b]$ y que $x_0 \in [a, b]$.
- Para cada $x \in [a, b]$, existe un número $\xi(x) \in [x_0, x]$ tal que

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

- donde $P_n(x)$ es el Polinomio de Taylor de orden n alrededor de x_0

0! = 1

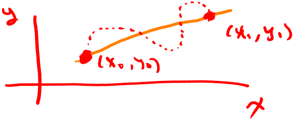
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

- y $R_n(x)$ el error de truncamiento (o *remainder term*) es

¿ $\xi(x)$?

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Polinomio lineal



- Consideremos el problema de determinar un polinomio de orden uno que pasa por los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1).
- Si tomamos $\boxed{f(x_0) = y_0}$ y $\boxed{f(x_1) = y_1}$, podemos definir las funciones

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad \text{y} \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0},$$

Tarea 12/mar

¿Cómo se obtiene a partir del polinomio de Taylor?

- así que

$$P_1(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1),$$

será un único polinomio de grado uno que pasa por los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1).
- En otras palabras, si $x = x_i$, $L_i(x) = 1$, pero $L_j(x) = 0$ con $j \neq i$.

Si $x = x_0$, $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = 0$, $P_1(x) = f(x_0)$ ✓

Si $x = x_1$, $L_0(x) = 0$, $L_1(x) = 1$, $P_1(x) = f(x_1)$

Polinomios de orden superior

- Ahora consideremos los puntos $\{(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$.
- Un polinomio de orden superior también debe cumplir con $L_{n,k}(x) = 0$ si $i \neq k$ y con $L_{n,k}(x_k) = 1$.
- El polinomio de orden n de interpolación de Lagrange es

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \overbrace{f(x_k)}^{\text{datos}} L_{n,k}(x),$$

- con

$$L_{n,k}(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i},$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$

$$L_0(x) = \frac{x - x_0}{x_0 - x_1}$$

Error de aproximación

- Supongamos ahora que los números $\{x_0, \ldots, x_n\}$ son distintos y que están en $[a, b]$. Entonces, para cada $x \in [a, b]$, existe un número $\xi(x)$ tal que

error de aproximación

$$f(x) = \boxed{P_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)},$$

  donde $P_n(x)$ es el polinomio de orden n de interpolación de Lagrange.
- Entonces, el error de aproximación es $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$.

Ejemplo (I)

(2, 1/2)

Usar los *nodos* $x_0 = 2$, $x_1 = 2.75$ y $x_2 = 4$, para encontrar el polinomio de Lagrange de segundo orden para $f(x) = 1/x$. Aproximar $f(3)$. Encontrar el error máximo para $x \in [2, 4]$.

1. Calcular los *coeficientes polinomiales*

$L_{n,k}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}} \dfrac{x - x_i}{x_k - x_i}$

$$L_{2,0}(x) = \frac{(x-2.75)(x-4)}{(2-2.75)(2-4)} = \frac{2}{3}(x-2.75)(x-4),$$

$$L_{2,1}(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(2.75-2)(2.75-4)} = -\frac{16}{15}(x-2)(x-4),$$

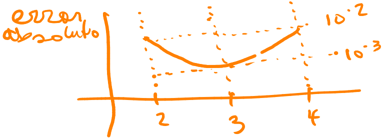
$$L_{2,2}(x) = \frac{(x-2)(x-2.75)}{(4-2)(4-2.7)} = \frac{2}{5}(x-2)(x-2.75).$$

2. Calcular los valores de $f(x_0)$, $f(x_1)$ y $f(x_2)$

$$f(x_0) = f(2) = 1/2,$$

$$f(x_1) = f(2.75) = 4/11, \quad \text{y} \quad f(x_2) = f(4) = 1/4.$$

Ejemplo (II)



3. Calcular el polinomio $P(x)$

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{k=0}^{2} f(x_k)L_{n,k}(x) = f(x_0)L_{2,0}(x) + f(x_1)L_{2,1}(x) + f(x_2)L_{2,2}(x) \\ &= \frac{(x-2.75)(x-4)}{3} - \frac{64(x-2)(x-4)}{165} + \frac{(x-2)(x-2.75)}{10} \end{aligned}$$

$$\boxed{P_2(x) = \frac{1}{22}x^2 - \frac{35}{88}x + \frac{49}{44}.} \checkmark$$

$f(x) = 1/x$

4. Calcular $f(3)$

$$f(3) \approx P(3) = \frac{29}{88} \approx 0.32955, \checkmark$$

con un error $|f(x) - P(x)| \leq 4 \cdot 10^{-3}$.

¿Cuántos decimales tomo en cuenta P?

$|p - p^*| \leq 5 \cdot 10^{-t}$ → error para un punto

Ejemplo (III)

$R_n(x) = h(x)\ g(x)$

$\max(g(x))\ \max(h(x))$

5. La fórmula exacta del error para $x \in [2, 4]$ es

$$R_n(x) = \underbrace{\frac{f^{(3)}(\xi(x))}{3!}}\ \underbrace{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)},$$

para $\xi(x) \in [2, 4]$. Pero no conocemos $\xi(x)$.

6. Por lo tanto, vamos a encontrar una cota de error

$$R_n(x) \leq \max_{[2,4]} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \right| \cdot \max_{[2,4]} \left| \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right|.$$

7. Como $f'''(x) = -6x^{-4}$, el primer factor tiene la forma

$$\max_{[2,4]} \left| \frac{f^{(3)}(\xi(x))}{(3)!} \right| = \max_{[2,4]} \left| -\frac{6}{3!x^4} \right| = \frac{1}{16}.$$

$\frac{d}{dx}\left[-\frac{6}{3!\,x^4}\right] = 0$

- máximos
- mínimos

análisis de valores críticos

Ejemplo (IV)

8. Ahora, si $g(x) = (x-2)(x-2.75)(x-4)$, el segundo factor tiene la forma
$$\max_{[2,4]} \left| \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right| = \max_{[2,4]} |g(x)| \, .$$
9. Entonces, hay que encontrar los puntos críticos de $g(x)$, es decir aquellos que satisfacen $g'(x) = 0$.
10. Con $g'(x) = (1/2)(3x-7)(2x-7)$, existen dos puntos críticos uno en $x = 7/3$ y el otro en $x = 7/2$.
11. Entonces, con $x = 7/2$
$$\max_{[2,4]} \left| \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right| = \frac{9}{16}.$$
12. Finalmente, $R_n(x) \leq (1/16)(9/16) \leq 4 \cdot 10^{-2}$.

Cota máxima de error en todo [2, 4]

Taylor

EDP ✓

✓ EDO

Introducción

Polinomio de aproximación de Lagrange

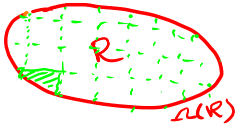
Polinomios de aproximación de Newton

Polinomios de aproximación de Hermite

Polinomios de aproximación por splines

diferencias divididas
diferencias de Newton
diferencias centradas
adelantadas
atrasadas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla u \Big|_{\Omega(R)}$$



Diferencias divididas (I)

Taylor → Lagrange

$y = mx + b$

$y - y_0 = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}(x - x_1)$

- Si escribimos el polinomio de aproximación como $P_n = a_0 +$

$$a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}),$$

con constantes reales $a_0, \ldots, a_n$.

- Además, si tomamos $P_n(x_0) = f(x_0) = a_0$ y $P_n(x_1) = f(x_1) = f(x_0) + a_1(x_1 - x_0)$, entonces

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

diferencia dividida en $[x_0, x_1]$

- o en general, tomando la diferencia dividida de orden cero respecto a x_i como $f[x_i] = f(x_i)$, la diferencia dividida de orden uno respecto a x_i y x_{i+1} sería

dif. orden cero; dato

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}, \quad = \frac{f(x_{i+1}) - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$

dato

Diferencias divididas (II)

- la diferencia dividida de orden dos sería

$$f[\underbrace{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i},$$

- y la diferencia dividida de orden k sería

diferencia de orden k-1

$$f[\overbrace{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}}^{k+1}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}.$$

- Por lo que, la diferencia dividida de orden n es

$$f[\underbrace{x_0, \dots, x_n}_{n+1}] = \frac{\overset{n-1}{f[x_1, \dots, x_n]} - \overset{n-1}{f[x_0, \dots, x_{n-1}]}}{x_n - x_0}.$$

Polinomio de diferencias divididas de Newton

dif. orden cero dif. orden uno dif. orden k

- Usando $a_0 = \overbrace{f(x_0) = f[x_0]}^{\text{dif. orden cero}}$, $a_1 = \overbrace{f[x_0, x_1]}^{\text{dif. orden uno}}$ y en general $a_k = \overbrace{}^{\text{dif. orden k}}$ $f[x_0, \ldots, x_k]$, podemos escribir el polinomio de diferencias divididas de Newton

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, \ldots, x_k](x - x_0) \cdots (x - x_{k-1}),$$

- donde el valor de $f[x_0, \ldots, x_k]$ es independiente del orden de los números $x_0, \ldots, x_k$.

Tarea $\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))\}$

(a) $P_n(x)$ $x_0 < x_1$

(b) $P_n(x)$ $x_0 > x_1$

n

0: $f[x_0] = f(x_0)$: pendiente de una recta horizontal

1: $f[x_1, x_0] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$: pendiente de una recta $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$

Error de aproximación

$$f(x) = P_n(x) + \boxed{R_n(x)}$$

- Supongamos que los números $x_0, \ldots, x_n$ son distintos y $x_i \in [a, b] \forall i \in [0, n]$.
- Entonces, existe un número $\cancel{\xi \in (a, b}$) tal que

dif. div. orden n

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},$$

- si tomamos $g(x) = f(x) - P_n(x)$, una función con $n+1$ ceros en $[a, b]$, el teorema generalizado ~~de Rolle~~ implica que $\cancel{\exists \xi \in (a, b}$) tal que

$$g^{(n)}(\xi) = 0.$$

error acotado

Diferencias divididas *adelantadas* (I)

$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$

h h

- Para simplificar, consideremos puntos distribuidos uniformemente tal que $h = x_{i+1} - x_i$, para $i = 0, \ldots, n-1$,
- de modo que $x = x_i + (s - i)h$. s:
- Entonces, el polinomio de diferencias divididas de Newton es

$$P_n(x) = P_n(x_0 + sh) = \underbrace{f[x_0]}_{\text{orden cero}} + \sum_{k=1}^{n} \binom{s}{k} k! h^k \underbrace{f[x_0, \ldots, x_k]}_{\text{orden } k},$$

$\frac{x - x_0}{h} = s$

x_0 x x_1 x_2

h h

Diferencias divididas *adelantadas* (II)

- usando la notación de Aitken, la primera y segunda diferencia dividida son

$$f[x_0, x_1] = \frac{1}{h}\Delta f(x_0), \qquad : \text{orden uno}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{1}{2h^2}\Delta^2 f(x_0), \qquad : \text{orden dos}$$

- y en general

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{1}{k!h^k}\Delta^k f(x_0). \qquad : \text{orden } k$$

- De modo que, el polinomio de diferencias divididas adelantadas de Newton es

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k f(x_0).$$

Diferencias divididas *atrasadas* (I)

atrasadas: $a_n + a_{n-1}(x-x_n) + a_{n-2}(x-x_n)(x-x_{n-1})\cdots$

adelantadas: $a_0 + a_1(x-x_1)$

- También podemos escribir el polinomio de interpolación como

$$\left.\begin{aligned} P_n(x) = & f[x_n] + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n) \\ & + f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}](x - x_n)(x - x_{n-1}) + \cdots \\ & + f[x_n, \ldots, x_0](x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_1), \end{aligned}\right\}$$

- y usando puntos equiespaciados, $x = x_i + (s + n - i)h$, entonces

$$\begin{aligned} P_n(x) = & P_n(x_n + sh) \\ = & f[x_n] + \overbrace{shf[x_n, x_{n-1}]}^{\text{orden 1}} + \overbrace{s(s+1)h^2 f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}]}^{\text{orden 2}} + \cdots \\ & + \underbrace{s(s+1)\cdots(s+n-1)h^n f[x_n, \ldots, x_0]}_{\text{orden n}}. \end{aligned}$$

Diferencias divididas *atrasadas* (II)

- ahora, usando la notación de Aitken atrasada para las diferencias de orden uno y dos

$$f[x_n, x_{n-1}] = \frac{1}{h}\Delta f(x_n), \quad \therefore \text{ orden } 1$$

$$f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] = \frac{1}{2h^2}\Delta^2 f(x_n), \quad \therefore \text{ orden } 2$$

- y en general

$$f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}] = \frac{1}{k!h^k}\Delta^k f(x_n). \quad : \text{ orden } k$$

- De modo que

$$P_n(x) = \underbrace{f[x_n]}_{\text{orden } 0} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{-s}{k} \underbrace{\Delta^k f(x_n)}_{\text{orden } k}.$$

$$\boxed{\cancel{\nabla f(x_n)}}$$

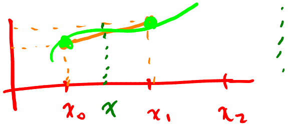
$$\nabla^2 f(x_n)$$

- Nota: en algunos textos usan ∇ para no confundir estas diferencias con las diferencias divididas adelantadas.

Diferencias divididas centradas (I)

atrasada $\dfrac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}$

adelantada $\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$



- Cuando se quiere aproximar un valor cerca del límite inferior del intervalo de los nodos, es mejor usar el polinomio de diferencias adelantadas. P_n : $f[x_0]$
- Por otro lado, si el valor está cerca del límite superior del intervalo, es mejor usar el polinomio de diferencias atrasadas. P_n : $f[x_n]$
- Sin embargo, cuando el valor que se quiere aproximar está cerca del centro del intervalo es mejor usar el polinomio de diferencias centradas.
- Existen muchas formas de calcular las diferencias divididas, pero vamos a considerar solamente el Método de Stirling.

\+ referencias

✓ Atkinson y Han

✓ Cohen

Diferencias divididas centradas (II)

$\cdots \quad x_{-2} \quad x_{-1} \quad x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad \cdots$

- Consideremos que se elige x_0 cerca del punto que se quiere aproximar.
- Ahora los nodos cuyo valor sea menor que x_0 son etiquetados usando $x_{-1}, x_{-2}, \ldots$, de modo que $\cdots < x_{-2} < x_{-1} < x_0$.
- Los nodos cuyo valor sea mayor que x_0 son etiquetados usando $x_1, x_2, \ldots$, de modo que $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$.
- Entonces si n es par, la fórmula de Stirling es $P_n(x) = P_{2m}(x)$, donde

$$
\begin{aligned}
P_{2m}(x) = {} & \overbrace{f[x_0]}^{\text{orden cero}} + sh\left(\overbrace{\frac{f[x_{-1},x_0]+f[x_0,x_1]}{2}}^{\text{promedio de D.D orden 1}}\right) + s^2h^2\overbrace{f[x_{-1},x_0,x_1]}^{\text{orden dos}} + \\
& s(s^2-1)h^3\left(\overbrace{\frac{f[x_{-2},x_{-1},x_0,x_1]+f[x_{-1},x_0,x_1,x_2]}{2}}^{\text{Promedio orden 3}}\right) + \cdots + \\
& s^2(s^2-1)(s^2-4)\cdots(s^2-(m-1)^2)h^{2m}f[x_m,\ldots,x_m].
\end{aligned}
$$

Diferencias divididas centradas (III)

- En el caso de que n sea impar, la fórmula de Stirling es $P_n(x) = P_{2m+1}(x)$, donde

$$
\begin{aligned}
P_{2m+1}(x) = \overbrace{f[x_0]}^{\text{orden 0}} &+ sh\left(\overbrace{\frac{f[x_{-1},x_0]+f[x_0,x_1]}{2}}^{\text{orden 1}}\right) + s^2h^2\overbrace{f[x_{-1},x_0,x_1]}^{\text{orden 2}}+\\
&s(s^2-1)h^3\left(\overbrace{\frac{f[x_{-2},x_{-1},x_0,x_1]+f[x_{-1},x_0,x_1,x_2]}{2}}^{\text{orden 3}}\right)+\cdots+\\
&s^2(s^2-1)(s^2-4)\cdots(s^2-(m-1)^2)h^{2m}f[x_m,\ldots,x_m]+\\
&\underbrace{s(s^2-1)\cdots(s^2-m^2)h^{2m+1}\left(\frac{f[x_{-m-1},\ldots,x_m]+f[x_{-m},\ldots,x_{m+1}]}{2}\right)}_{\text{promedio}}.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1 (I)

$\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots$

1. Calcular las diferencias divididas para los nodos $\{x_0, \ldots, x_3\}$ con $f(x)$.

$f[x_i] = f(x_i)$

orden 0

x	$f(x)$	1a. DD	2a DD	3a DD
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0, x_1]$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$	
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$	
		$f[x_2, x_3]$		
x_3	$f[x_3]$			

- donde $f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$, $f[x_1, x_2] = \dfrac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$,

  y $f[x_2, x_3] = \dfrac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$.

Ejemplo 1 (I)

1. Calcular las diferencias divididas para los nodos $\{x_0, \ldots, x_3\}$ con $f(x)$.

x	$f(x)$	1a. DD	2a DD	3a DD
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0, x_1]$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$	
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$	
		$f[x_2, x_3]$		
x_3	$f[x_3]$			

- donde $f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$,

  y $$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}.$$

Ejemplo 1 (I)

1. Calcular las diferencias divididas para los nodos $\{x_0, \ldots, x_3\}$ con $f(x)$.

x	$f(x)$	1a. DD	2a DD	3a DD
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0, x_1]$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$	
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$	
		$f[x_2, x_3]$		
x_3	$f[x_3]$			

- donde $f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$.

Ejemplo 1 (II) $P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} s(s-1)\cdots(s-k+1)h^k f[x_0,\ldots,x_k]$

2. Considere que $\{x_i\}$ son equiespaciados, $x_{i+1} = x_i + h$. Calcular el polinomio de diferencias divididas adelantadas $P_3(x_0 + sh)$.

$x = x_0 + sh$

x	$f(x)$	1a. DD	2a DD	3a DD
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0, x_1]$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$	
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$	
		$f[x_2, x_3]$		
x_3	$f[x_3]$			

$s>0$

- con $x = x_0 + sh$, $P_3(x) = f[x_0] + shf[x_0, x_1] + s(s-1)h^2 f[x_0, x_1, x_2] +$

  $s(s-1)(s-2)h^3 f[x_0, x_1, x_2, x_3]$.

Ejemplo 1 (III)

$$P_n(x) = f[x_n] + s\nabla f(x_n) + \cdots + \frac{s(s+1)\cdots(s+n-1)}{n!}\nabla^n f(x_n)$$

3. Considere que $\{x_i\}$ son equiespaciados, $x_n = x_i + (n-i)h$.
Calcular el polinomio de diferencias divididas atrasadas $P_3(x_n + sh)$.

x	$f(x)$	1a. DD	2a DD	3a DD
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0, x_1]$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$	
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$	
		$f[x_2, x_3]$		
x_3	$f[x_3]$			

$\xrightarrow{x}$

$s<0$

- con $x = x_3 + sh$, $P_3(x) = f[x_3] + shf[x_3, x_2] + s(s+1)h^2 f[x_3, x_2, x_1] +$

$$s(s+1)(s+2)h^3 f[x_3, x_2, x_1, x_0].$$

Ejemplo 2 (I)

1. Obtenga el polinomio de diferencias divididas $P_4(1.1)$

$x = x_0 + sh$
$x = 1.1$
$x_0 = 1.0$
$h = 0.3$

x	orden cero	First divided differences	Second divided differences	Third divided differences	Fourth divided differences
1.0	0.7651977				
		−0.4837057			
1.3	0.6200860		−0.1087339		
		−0.5489460		0.0658784	
1.6	0.4554022		−0.0494433		0.0018251
		−0.5786120		0.0680685	
1.9	0.2818186		0.0118183		
		−0.5715210			
2.2	0.1103623				

- Para $P_4(1.1)$ se tiene $h = 0.3$ y $s = 1/3$. ✓
- Entonces el polinomio de diferencias divididas adelantadas es

$$P_4(1.1) = 0.7651977 + \overset{s}{\frac{1}{3}}\overset{h}{(0.3)}\overset{f[x_0,x_1]}{(-0.4837057)} + \overset{s}{\frac{1}{3}}\overset{s-1}{\left(-\frac{2}{3}\right)}\overset{h^2}{(0.3)^2}\overset{\text{orden 2}}{(-0.1087339)} +$$

$$\overset{s}{\frac{1}{3}}\overset{s-1}{\left(-\frac{2}{3}\right)}\overset{s-2}{\left(-\frac{5}{3}\right)}\overset{h^3}{(0.3)^3}\overset{\text{orden 3}}{(0.0658784)} +$$

$$\underset{s}{\frac{1}{3}}\underset{s-1}{\left(-\frac{2}{3}\right)}\underset{s-2}{\left(-\frac{5}{3}\right)}\underset{s-3}{\left(-\frac{8}{3}\right)}\underset{h^4}{(0.3)^4}\underset{\text{orden 4}}{(0.0018251)} = 0.7196460.$$

Ejemplo 2 (II)

$x = 2.0$

2. Obtenga el polinomio de diferencias divididas $P_4(2.0)$

x	$f(x)$	First divided differences	Second divided differences	Third divided differences	Fourth divided differences
1.0	0.7651977				
		−0.4837057			
1.3	0.6200860		−0.1087339		
		−0.5489460		0.0658784	
1.6	0.4554022		−0.0494433		0.0018251
		−0.5786120		0.0680685	
1.9	0.2818186		0.0118183		
		−0.5715210			
2.2	0.1103623				

$X = X_n + s h$
$x = 2$
$x_n = 2.2$
$h = 0.3$

- Para $P_4(2.0)$ se tiene $h = 0.3$ y $s = -2/3$.
- Entonces el polinomio de diferencias divididas atrasadas es

orden 0 — s — h — orden 1 — s — $s+1$ — h^2 — orden 2

$$P_4(1.1) = 0.1103623 - \frac{2}{3}(0.3)(-0.5715210) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)(0.3)^2(0.0118183) -$$

s — $s+1$ — $s+2$ — h^3 — orden 3

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)(0.3)^3(0.0.0680685) -$$

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{7}{3}\right)(0.3)^4(0.0018251) = 0.2238754.$$

s — $s+1$ — $s+2$ — $s+3$ — h^4 — orden 4

Ejemplo 3

$x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2$

1. Obtenga el polinomio de diferencias divididas centradas para $n = 4,\ m = 2$

adelantadas

centradas

atrasadas

x	$f(x)$	First divided differences	Second divided differences	Third divided differences	Fourth divided differences
x_{-2}	$f[x_{-2}]$				
		$f[x_{-2}, x_{-1}]$			
x_{-1}	$f[x_{-1}]$		$f[x_{-2}, x_{-1}, x_0]$		
		$f[x_{-1}, x_0]$		$f[x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1]$	
x_0	$f[x_0]$		$f[x_{-1}, x_0, x_1]$		$f[x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2]$
		$f[x_0, x_1]$		$f[x_{-1}, x_0, x_1, x_2]$	
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$			
x_2	$f[x_2]$				

Stirling

orden 0 orden 1 orden 2

orden 3

$$P_{2m} = f[x_0] + sh\left(\frac{f[x_{-1}, x_0] + f[x_0, x_1]}{2}\right) + s^2h^2 f[x_{-1}, x_0, x_1] +$$

$$s(s^2 - 1)h^3\left(\frac{f[x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1] + f[x_{-1}, x_0, x_1, x_2]}{2}\right) +$$

$$s(s^2 - 1)(s^2 - 4)h^4 f\underbrace{[x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2]}_{\text{orden 4}}.$$

Ejemplo 4

1. Obtenga el polinomio de diferencias divididas $P_4(1.5)$

1.5

x	$f(x)$	First divided differences	Second divided differences	Third divided differences	Fourth divided differences
1.0	0.7651977				
		−0.4837057			
1.3	0.6200860		−0.1087339		
		−0.5489460		0.0658784	
1.6	0.4554022		−0.0494433		0.0018251
		−0.5786120		0.0680685	
1.9	0.2818186		0.0118183		
		−0.5715210			
2.2	0.1103623				

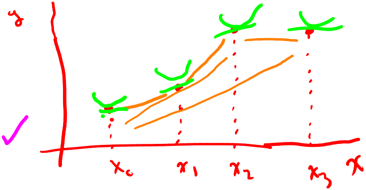
- Para $x = 1.5$, se tiene $h = 0.3$ y $s = -1/3$ y el polinomio de diferencias divididas centradas es

$$
\begin{aligned}
P_4(1.1) =& \overset{\text{orden 0}}{0.4554022} + \overset{s}{\left(-\frac{1}{3}\right)} \overset{h}{(0.3)} \overset{\text{orden 1}}{\left(\frac{(-0.5489460)+(-0.5786120)}{2}\right)} + \overset{s^2}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} \overset{h^2}{(0.3)^2} \overset{\text{orden 2}}{(-0.0494433)} + \\
& \overset{s}{\left(-\frac{1}{3}\right)} \overset{s^2-1}{\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 1\right)} \overset{h^3}{(0.3)^3} \left(\frac{0.0658784 + 0.0680685}{\underset{\text{orden 3}}{2}}\right) + \\
& \overset{s^2}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} \overset{s^2-1}{\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 1\right)} \overset{s^2-2^2}{\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 2^2\right)} \overset{h^4}{(0.3)^4} \overset{\text{orden 4}}{(0.0018251)} \\
=& 0.5118200.
\end{aligned}
$$

$r, \dot{r}$

$f(x_i) = y_i$ ✓

$f(x) \approx P_3(x)$ ✓



Introducción

Polinomio de aproximación de Lagrange

$P_3(x)$: aproximaciones de la pendiente de una recta.

Polinomios de aproximación de Newton

$P_3(x)$: promedios de aproximaciones

Polinomios de aproximación de Hermite

$f'(x) \approx P_3'(x)$

Polinomios de aproximación por splines

$f''(x) \approx P_3''(x)$

$\vdots$

Polinomios osculantes

ósculo = beso

- Son una generalización de los polinomios de Taylor y de Lagrange.
- Suponga un conjunto de $n+1$ números distintos $\{x_0, \ldots, x_n, |x_i \in [a,b]\}$ y otro $\{m_0, \ldots, m_n | m_i > 0\}$ con $m = \text{máx}\{m_i\}_1^n$.
- Sea f una función continua y con m derivadas en $[a,b]$.
- El polinomio osculante que aproxima a f es el polinomio de menor grado que tiene los mismos valores que f y todas sus derivadas de orden menor o igual que m_i en x_i.
- Entonces, el orden del polinomio es $M = \sum_{i=0}^{n} m_i + n$ y cumple con

$$\frac{d^k P(x_i)}{dx^k} = \frac{d^k f(x_i)}{dx^k},$$

para $i = 0, 1, \ldots, n$ y $k = 0, 1, \ldots, m$,

- para $n = 0$, se obtiene el polinomio de Taylor de orden m_0, para $m_i = 0$ se obtiene el polinomio de Lagrange.

Polinomios de Hermite

datos $\{(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$

datos $\{(x_0, f'(x_0)), \ldots, (x_n, f'(x_n))\}$

- Para $m_i = 1$ se obtienen los polinomios de Hermite.
- Sea f una función continua y con una derivada en $[a, b]$, $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$ son distintos, el único polinomio de menor grado que coincide con f y con f' en $x_0, \ldots, x_n$ es

$H'_{n,j}(x)$

$$f(x) \approx H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) H_{n,j}(x) + \sum_{j=0}^{n} f'(x_j) \hat{H}_{n,j}(x),$$

- donde

$$\begin{aligned} H_{n,j}(x) =& [1 - 2(x - x_j) L'_{n,j}(x_j)] L^2_{n,j}(x), \\ \hat{H}_{n,j}(x) =& (x - x_j) L^2_{n,j}(x), \end{aligned}$$

y $L_{n,j}(x)$ son los j-ésimos coeficientes de Lagrange de grado n.

Error de aproximación

- Sea f una función continua y con $2n+2$ derivadas en $[a,b]$, entonces

$$f(x) = \underline{H_{2n+1}(x)} + \underline{\frac{(x-x_0)^2\cdots(x-x_n)^2}{(2n+2)!}f^{(2n+2)}(\xi(x))},$$

para algún valor $\xi(x) \in (a,b)$.

errores más pequeños $\because$ Conocemos más información sobre la función

$(x_i, f(x_i))$

$(x_i, f'(x_i))$

Usando los polinomios de Newton

$\{x_0, \dots, x_n\}$
$x_i \neq x_j \ \forall\ i = j$

- Los polinomios de Hermite también se pueden obtener usando el polinomio de Newton

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, \dots, x_k](x - x_0) \cdots (x - x_{k-1}).$$

- Se usa la conexión que existe entre la diferencia dividida de orden n y la n-ésima derivada de f.

$\{z_0, z_1, \dots, z_{2n+1}\}$

- Hay que definir una nueva secuencia de nodos $z_0, \dots, z_{2n+1}$, con $z_{2i} = z_{2i+1} = x_i$. ✓
- Como $z_{2i} = z_{2i+1} = x_i$, no se puede definir $f[z_{2i}, z_{2i+1}]$ de la forma tradicional, se usa $f[z_{2i}, z_{2i+1}] = f'(z_{2i}) = f'(x_i)$.
- Entonces, se puede definir el polinomio de Hermite con

$$H_{2n+1}(x) = f[z_0] + \sum_{k=1}^{2n+1} f[z_0, \dots, z_k](x - z_0)(x - z_1) \cdots (x - z_{k-1}).$$

Ejemplo 1 (I)

Use el polinomio de Hermite para aproximar $f(1.5)$ usando polinomios de Lagrange, tomando los datos

	k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
13/10	0	1.3	0.6200860	-0.5220232
16/10	1	1.6	0.4554022	-0.5698959
19/10	2	1.9	0.2818186	-0.5811571

- Primero hay que calcular los polinomios de Lagrange $L_{n,k}(x)$

$$L_{2,0}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{50}{9}x^2 - \frac{175}{9}x + \frac{152}{9}, \quad ✓$$

$$L_{2,1}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = -\frac{100}{9}x^2 + \frac{320}{9}x - \frac{247}{9}, \quad ✓$$

$$L_{2,2}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{50}{9}x^2 - \frac{145}{9}x + \frac{104}{9}, \quad ✓$$

Ejemplo 1 (II)

- y luego se calculan las derivadas $L'_{n,k}(x)$

$$
\begin{aligned}
L'_{2,0} &= \frac{100}{9}x - \frac{175}{9}, \\
L'_{2,1} &= -\frac{200}{9}x + \frac{320}{9}, \\
L'_{2,2} &= \frac{100}{9}x - \frac{145}{9}.
\end{aligned}
$$

- Con esto, se calculan los polinomios de Lagrange de orden n con $\underline{H_{n,j}(x)} = [1 - 2(x - x_j)\underline{L'_{n,j}(x_j)}]\underline{L^2_{n,j}(x)}$

$$
\begin{aligned}
H_{2,0}(x) &= \left[1 - 2(x - x_0)L'_{2,0}(x_0)\right] L^2_{2,0}(x) \\
&= (10x - 12)\left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{175}{9}x + \frac{152}{9}\right)^2,
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1 (III)

$$
\begin{aligned}
H_{2,1}(x) &= [1 - 2(x - x_1)L'_{2,1}(x_1)]L^2_{2,1}(x) \\
&= \left(-\frac{100}{9}x^2 + \frac{320}{9}x - \frac{247}{9}\right)^2, \\
H_{2,2}(x) &= [1 - 2(x - x_2)L'_{2,2}(x_2)]L^2_{2,2}(x) \\
&= 10(2 - x)\left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{145}{9}x + \frac{104}{9}\right)^2.
\end{aligned}
$$

- Y también $\hat{H}_{n,j}(x) = (x - x_j)L^2_{n,j}(x)$

$$
\begin{aligned}
\hat{H}_{2,0}(x) &= (x - x_0)L^2_{2,0}(x) \\
&= (x - 1.3)\left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{175}{9}x + \frac{152}{9}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1 (IV)

$$\hat{H}_{2,1}(x) = (x - x_1)L_{2,1}^2(x)$$
$$= (x - 1.6)\left(-\frac{100}{9}x^2 + \frac{320}{9}x - \frac{247}{9}\right)^2,$$
$$\hat{H}_{2,2}(x) = (x - x_2)L_{2,2}^2(x)$$
$$= (x - 1.9)\left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{145}{9}x + \frac{104}{9}\right)^2.$$

- Finalmente, $H_5(x) = f(x_0)H_{2,0}(x) + f(x_1)H_{2,1}(x) + f(x_2)H_{2,2}(x) + f'(x_0)\hat{H}_{2,0}(x) + f'(x_1)\hat{H}_{2,1}(x) + f'(x_2)\hat{H}_{2,2}(x)$,

$$H_5(1.5) = 0.5118277.$$

Ejemplo 2 (I)

Dados los nodos $\{x_0, x_1, x_2\}$, obtenga el polinomio de Hermite usando los polinomios de diferencias divididas.

- Los valores de z_i y las diferencias divididas se toman de la siguiente relación $z_{2i} = z_{2i+1} = x_i$, para cada i

z	$f(z)$	First divided differences	Second divided differences
$z_0 = x_0$	$f[z_0] = f(x_0)$		
		$f[z_0, z_1] = f'(x_0)$	
$z_1 = x_0$	$f[z_1] = f(x_0)$		$f[z_0, z_1, z_2] = \dfrac{f[z_1, z_2] - f[z_0, z_1]}{z_2 - z_0}$
		$f[z_1, z_2] = \dfrac{f[z_2] - f[z_1]}{z_2 - z_1}$	
$z_2 = x_1$	$f[z_2] = f(x_1)$		$f[z_1, z_2, z_3] = \dfrac{f[z_2, z_3] - f[z_1, z_2]}{z_3 - z_1}$
		$f[z_2, z_3] = f'(x_1)$	
$z_3 = x_1$	$f[z_3] = f(x_1)$		$f[z_2, z_3, z_4] = \dfrac{f[z_3, z_4] - f[z_2, z_3]}{z_4 - z_2}$
		$f[z_3, z_4] = \dfrac{f[z_4] - f[z_3]}{z_4 - z_3}$	
$z_4 = x_2$	$f[z_4] = f(x_2)$		$f[z_3, z_4, z_5] = \dfrac{f[z_4, z_5] - f[z_3, z_4]}{z_5 - z_3}$
		$f[z_4, z_5] = f'(x_2)$	
$z_5 = x_2$	$f[z_5] = f(x_2)$		

Ejemplo 2 (II)

- Los valores de las diferencias divididas se calculan de la misma forma y finalmente se construye el polinomio H_{2n+1}.
- El polinomio de orden $2n+1$ es

$$H_{2n+1}(x) = f[z_0] + \sum_{k=1}^{2n+1} f[z_0, \ldots, z_k](x - z_0)(x - z_1) \cdots (x - z_{k-1}).$$

Ejemplo 3 (I)

Use el polinomio de Hermite para aproximar $f(1.5)$ usando polinomios de diferencias divididas, tomando los datos

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	1.3	0.6200860	-0.5220232
1	1.6	0.4554022	-0.5698959
2	1.9	0.2818186	-0.5811571

- Primero hay que construir la tabla

1.3	0.6200860					
		−0.5220232				
1.3	0.6200860		−0.0897427			
		−0.5489460		0.0663657		
1.6	0.4554022		−0.0698330		0.0026663	
		−0.5698959		0.0679655		−0.0027738
1.6	0.4554022		−0.0290537		0.0010020	
		−0.5786120		0.0685667		
1.9	0.2818186		−0.0084837			
		−0.5811571				
1.9	0.2818186					

Ejemplo 3 (II)

- El polinomio de Hermite es

$$\begin{aligned} H_5(x) &= f[z_0] + f[z_0, z_1](x - z_0) + f[z_0, z_1, z_2](x - z_0)(x - z_1) \\ &\quad + f[z_0, z_1, z_2, z_3](x - z_0)(x - z_1)(x - z_2) \\ &\quad + f[z_0, z_1, z_2, z_3, z_4](x - z_0)(x - z_1)(x - z_2)(x - z_3) \\ &\quad + f[z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5](x - z_0)(x - z_1)(x - z_2)(x - z_3)(x - z_4). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_5(1.5) &= 0.6200860 + (-0.5220232)(0.2) + (-0.0897427)(0.2)^2 \\ &\quad + 0.0663657(0.2)^2(-0.1) + 0.0026663(0.2)^2(-0.1)^2 \\ &\quad + (-0.0027738)(0.2)^2(-0.1)^2(-0.4) \\ &= \underline{0.5118277}. \end{aligned}$$

Introducción

Polinomio de aproximación de Lagrange

Polinomios de aproximación de Newton

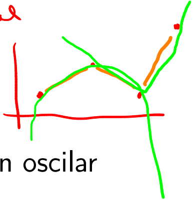
Polinomios de aproximación de Hermite

Polinomios de aproximación por splines o trazadores

por segmentos

Splines o polinomios trazadores

crecimiento exponencial error



- En algunos casos, los polinomios de orden $n \gg 1$ pueden oscilar erráticamente.
- Una pequeña fluctuación en un subconjunto del intervalo puede inducir fluctuaciones grandes en el intervalo completo.
- Para resolver este problema se pueden usar polinomios de orden menor en subintervalos del intervalo:
  - La forma más sencilla es usar polinomios lineales, aunque estos no son diferenciables en los extremos del subintervalo.
  - También se pueden hacer polinomios cuadráticos en $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, etc., esto permitiría obtener polinomios derivables en $[x_0, x_n]$.
  - La opción más común es usar un polinomio cúbico, aunque no se asume que las derivadas del polinomio coincidan con las de la función.

Splines lineales o polinomios trazadores lineales

- Para un número n de puntos $(x_n, f(x_n))$, se construyen $n-1$ funciones de la forma

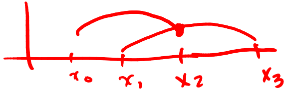
$$S_i(x) = ax + b,$$

con cada par de puntos.

- Con esto se debe construir un polinomio de la forma

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x), & x \in [x_0, x_1) \\ S_1(x), & x \in [x_1, x_2) \\ \vdots & \\ S_{n-2}(x), & x \in [x_{n-2}, x_{n-1}) \\ S_{n-1}(x), & x \in [x_{n-1}, x_n) \end{cases}$$

Splines cuadráticos o polinomios trazadores cuadráticos



- Para un número n de puntos $(x_n, f(x_n))$, se construyen $n-1$ funciones de la forma

$$S_i(x) = ax^2 + bx + c.$$

- Esta construcción tiene la ventaja de que $S(x)$ es continua porque

$S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_i)$

  - $S_i(x)$ debe ser continua.
  - La derivada en un punto siempre debe coincidir para ambos lados de la función.
- Por el número de parámetros que se usan, se necesita el valor de la derivada en algún punto del intervalo para resolver el sistema de ecuaciones.

Splines cúbicos o polinomios trazadores cúbicos (I)

- Se usa $S_i(x)$ con la forma de un polinomio cúbico, es decir

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3.$$

con cuatro constantes a_j, b_j, c_j y d_j.

- Esto permite que $S(x)$ sea continuamente diferenciable en el intervalo hasta la segunda derivada.
- Sin embargo, no se debe asumir que las derivadas de $S(x)$ coinciden con las de la función $f(x)$.
- Hay que tomar en cuenta las condiciones de frontera: se pueden hacer polinomios *naturales* (o libres, o free) o polinomios *sujetos* (o clamped).

Splines cúbicos o polinomios trazadores cúbicos (II)

$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$

- Dada una función f definida en $[a, b]$ y un conjunto de puntos $\{x_0, \ldots, x_n\}$, el polinomio debe cumplir con estas condiciones
  (a) $S(x)$ es un polinomio cúbico, igual a $S_j(x)$ en el intervalo $[x_j, x_{j+1}]$ para $j = 0, 1, \ldots, n-1$.
  (b) $S_j(x_j) = f(x_j)$, y $S_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1})$.
  (c) $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$.
  (d) $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$.
  (e) $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$.
  (f) Los splines naturales cumplen con $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$, mientras que los splines sujetos cumplen con $S'(x_0) = f'(x_0)$ y con $S'(x_n) = f'(x_n)$.

Construcción de un spline cúbico (I)

- Un spline cúbico para n subintervalos requiere $4n$ constantes.
- Supongamos que tomamos

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3,$$

para $j = 0, 1, \ldots, n - 1$.

- Como $S_j(x_j) = a_j = f(x_j)$, entonces por la condición (c), $a_{j+1} = S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$

$$a_{j+1} = a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 + d_j(x_{j+1} - x_j)^3,$$

para $j = 0, 1, \ldots, n - 2$.

- Si $h_j \equiv x_{j+1} - x_j$, se tiene

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3,$$

para $j = 0, 1, \ldots, n - 2$

Construcción de un spline cúbico (II)

- Ahora, con $b_n = S'(x_n)$ se tiene que

$$S_j'(x) = b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2,$$

que implica que $S_j'(x_j) = b_j$ para $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

- Al aplicar la condición (d), $S_{j+1}'(x_{j+1}) = S_j'(x_{j+1})$, se tiene

$$b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2,$$

para $j = 0, 1, \ldots, n-2$.

- Ahora, con $c_n = S''(x_n)/2$ y aplicando la condición (e), $S_{j+1}''(x_{j+1}) = S_j''(x_{j+1})$ tenemos

$$c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j,$$

para $j = 0, 1, \ldots, n-2$.

Construcción de un spline cúbico (III)

$3n-3$

- Resolviendo para d_j en la ecuación anterior, se tiene

$$
\begin{aligned}
a_{j+1} &= a_j + b_j h_j + \frac{h_j^2}{3}(2c_j + c_{j+1}), \\
b_{j+1} &= b_j + h_j(c_j + c_{j+1}),
\end{aligned}
$$

para $j = 0, 1, \ldots, n-2$.

- La relación final, despejando b_j de la penúltima ecuación y sustituyéndola en la última ecuación genera el sistema de ecuaciones donde solamente se desconocen los c_j

$$
\begin{aligned}
h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)c_j + h_j c_{j+1} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) \\
- \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}),
\end{aligned}
$$

para $j = 0, 1, 2, \ldots, n-2$.

Construcción un spline cúbico (III)

- Del sistema de ecuaciones anterior se encuentran los valores de c_j.
- Conociendo los valores de c_j se pueden determinar los valores de b_j y de d_j.
- Conociendo los valores de c_j y b_j se pueden determinar los valores de a_j
- De modo que, cuando se han encontrado los $4n$ parámetros, ya es posible definir $S_j(x)$ en cada subintervalo y esto determina el valor del polinomio $S(x)$ para todo el intervalo.

Ejemplo 1 (I)

Construya un spline cúbico natural que pase por los puntos $(1, 2)$, $(2, 3)$ y $(3, 5)$.

- El spline cúbico es

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x), & x \in [1, 2) \\ S_1(x), & x \in [2, 3) \end{cases}$$

- donde

$$S_0(x) = a_0 + b_0(x-1) + c_0(x-1)^2 + d_0(x-1)^3,$$
$$S_1(x) = a_1 + b_1(x-2) + c_1(x-2)^2 + d_1(x-2)^3.$$

- Es decir, ocho constantes que hay que determinar.

Ejemplo 1 (II)

- Cuatro condiciones aparecen porque los splines deben coincidir con los nodos, entonces

$$a_0 = f(1), \qquad f(2) = a_0 + b_0 + c_0 + d_0,$$
$$a_1 = f(2), \qquad f(3) = a_1 + b_1 + c_1 + d_1.$$

- Otras dos condiciones se obtienen porque $S_0'(2) = S_1'(2)$ y $S_0''(2) = S_1''(2)$, entonces

$$b_1 = b_0 + 2c_0 + 3d_0,$$
$$c_1 = c_0 + 3d_0.$$

Ejemplo 1 (III)

- Las últimas dos condiciones se obtienen porque el spline es natural, $S_0''(1) = 0$ y $S_0''(3) = 0$, entonces

$$c_0 = 0, \qquad\qquad c_1 + 3d_1 = 0.$$

- Así que

$$S(x) = \begin{cases} 2 + \frac{3}{4}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^3, & x \in [1,2) \\ 3 + \frac{3}{2}(x-2) + \frac{3}{4}(x-2)^2 - \frac{1}{4}(x-2)^3, & x \in [2,3) \end{cases}$$

Ejemplo 2 (I)

Construya un spline cúbico sujeto que pase por los puntos $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,5)$ y que cumple con $S'(1) = 2$ y $S'(3) = 1$.

- El spline cúbico es

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x), & x \in [1,2) \\ S_1(x), & x \in [2,3) \end{cases}$$

- donde

$$S_0(x) = a_0 + b_0(x-1) + c_0(x-1)^2 + d_0(x-1)^3,$$
$$S_1(x) = a_1 + b_1(x-2) + c_1(x-2)^2 + d_1(x-2)^3.$$

- Es decir, ocho constantes que hay que determinar.

Ejemplo 2 (II)

- Cuatro condiciones aparecen porque los splines deben coincidir con los nodos, entonces

$$
\begin{aligned}
a_0 &= f(1), & f(2) &= a_0 + b_0 + c_0 + d_0, \\
a_1 &= f(2), & f(3) &= a_1 + b_1 + c_1 + d_1.
\end{aligned}
$$

- Otras dos condiciones se obtienen porque $S_0'(2) = S_1'(2)$ y $S_0''(2) = S_1''(2)$, entonces

$$
\begin{aligned}
b_1 &= b_0 + 2c_0 + 3d_0, \\
c_1 &= c_0 + 3d_0.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2 (III)

- Las últimas dos condiciones se obtienen porque el spline es sujeto, $S_0''(1) = 2$ y $S_0''(3) = 1$, entonces

$$b_0 = 2, \qquad b_1 + 2c_1 + 3d_1 = 1$$

- Así que

$$S(x) = \begin{cases} 2 + 2(x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{3}{2}(x-1)^3, & x \in [1,2) \\ 3 + \frac{3}{2}(x-2) + 2(x-2)^2 - \frac{3}{2}(x-2)^3, & x \in [2,3) \end{cases}$$

¡Muchas gracias!

Contacto:
Giovanni Ramírez García, PhD
ramirez@ecfm.usac.edu.gt
http://ecfm.usac.edu.gt/ramirez