

Integración numérica

Giovanni Ramírez García, PhD

Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de San Carlos de Guatemala

Guatemala, 6 de abril de 2021



Introducción

Regla del trapecio

Regla de Simpson

Otros métodos

Solución de Problemas de Valores Iniciales

Método de Euler

Runge-Kutta

Cuadratura numérica (I)

- Método para aproximar una integral definida basado en polinomios de interpolación

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i).$$

- Tomando los nodos $\{x_0, \dots, x_n | x_i \in [a, b]\}$ se tiene el polinomio de Lagrange

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x),$$

- de modo que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) dx + \int_a^b \prod_{i=0}^n (x - x_i) \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} dx.$$

Cuadratura numérica (II)

- El primer término se usa para aproximar

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i),$$

$$\text{si } a_i = \int_a^b L_i(x) dx,$$

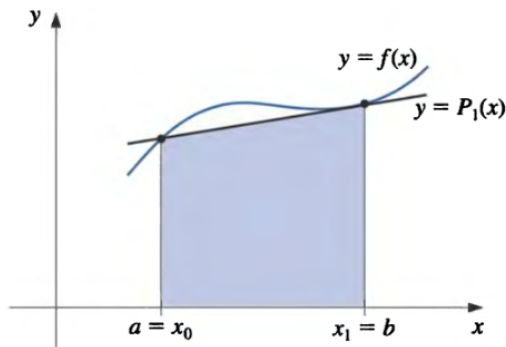
- y el segundo término se usa para obtener el error de aproximación

$$E(f) = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^n (x - x_i) f^{(n+1)}(\xi(x)) dx.$$

Regla del trapecio: definición (I)

- Se usa para aproximar la integral $\int_a^b f(x)dx$ con dos nodos.
- Si se toman $x_0 = a$ y $x_1 = b$, el polinomio de Lagrange de orden uno es

$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1).$$



[Burden, Faires y Burden. *Numerical Analysis*. 10th Ed.]

- Entonces

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) \right] dx.$$

Regla del trapecio: definición (II)

- Al integrar se tiene

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left[\frac{(x - x_1)^2}{2(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2(x_1 - x_0)} f(x_1) \right]_{x_0}^{x_1},$$

- por lo que, si $h \equiv b - a = x_1 - x_0$,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(x_1 - x_0)}{2} [f(x_0) + f(x_1)] = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)],$$

- con el error de aproximación

$$R(x) = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x - x_0)(x - x_1)dx = -\frac{h^3}{12} f''(\xi),$$

porque $(x - x_0)(x - x_1)$ no cambia de signo en $[x_0, x_1]$ de modo que $f''(\xi)$ es una constante en la integral.

- Finalmente, la Regla del Trapecio es

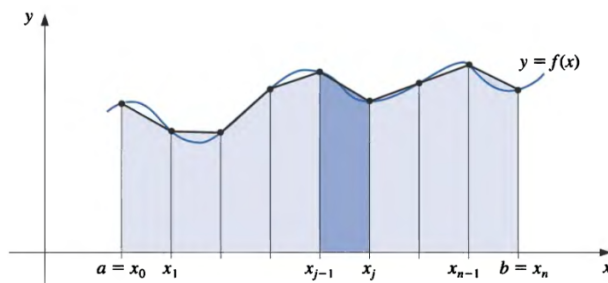
$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi).$$

Método de trapecios compuesto

► Para un número de subintervalos n , par o impar, es

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b) \right] - \frac{b-a}{12} h^2 f''(\mu),$$

donde $h = (b - a)/n$, $x_j = a + jh$ para $j = 0, 1, \dots, n$ y con $\mu \in (a, b)$.



[Burden, Faires y Burden. *Numerical Analysis*. 10th Ed.]

Método de trapecios compuesto: algoritmo

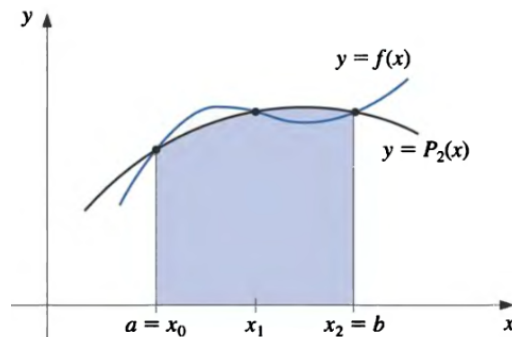
Entrada: La función que se quiere integrar $f(x)$ se toma del módulo funciones; el intervalo $[a, b]$ y un número entero n que se leen del archivo de configuraciones. **Salida:** El valor aproximado de la integral $S = \int_a^b f(x)dx$ con un error de aproximación $(b - a)/12h^2f''(\mu)$ donde $h = (b - a)/n$ y $\mu \in (a, b)$. **Requiere:** el módulo donde se define la función $f(x)$.

1. Inicio.
2. Leer a , b y n .
3. Definir $h = (b - a)/n$.
4. Definir $S = f(a) + f(b)$.
5. Hacer para $i = 1, \dots, n - 1$:
 - 5.1 Definir $x = a + ih$
 - 5.2 $S = S + 2f(x)$.
6. $S = hS/2$.
7. Escribir S .
8. Fin.

Regla de Simpson: definición (I)

- Se usa para aproximar la integral $\int_a^b f(x)dx$ con más nodos.
- Considere tres nodos $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = b$; donde $h \equiv (b - a)/2$, el polinomio de Lagrange de orden dos es

$$P_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2),$$



[Burden, Faires y Burden. *Numerical Analysis*. 10th Ed.]

Dr. Giovanni Ramírez

Integración numérica

9 / 38

Regla de Simpson: definición (II)

- entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx + \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{6} f^{(3)}(\xi(x))dx,$$

de modo que el error de aproximación $E(x) \sim O(h^4)$.

- Sin embargo, tomando una expansión de $f(x)$ con un polinomio de Taylor de orden 3 alrededor de x_1

$$f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) + \frac{f''(x_1)}{2}(x - x_1)^2 + \frac{f'''(x_1)}{6}(x - x_1)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{24}(x - x_1)^4,$$

Regla de Simpson: definición (III)

- se puede integrar

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \left[f(x_1)(x - x_1) + \frac{f'(x_1)}{2}(x - x_1)^2 + \frac{f''(x_1)}{6}(x - x_1)^3 + \frac{f'''(x_1)}{24}(x - x_1)^4 \right]_{x_0}^{x_2} + \frac{1}{24} \int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi(x))(x - x_1)^4 dx.$$

- Ahora con $h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0$ se tiene

$$\begin{aligned} (x_2 - x_1)^2 - (x_0 - x_1)^2 &= 0, & (x_2 - x_1)^4 - (x_0 - x_1)^4 &= 0, \\ (x_2 - x_1)^3 - (x_0 - x_1)^3 &= 2h^3, & (x_2 - x_1)^5 - (x_0 - x_1)^5 &= 2h^5. \end{aligned}$$

- Además, $(x - x_1)^4 > 0$ para cualquier $x \in [x_0, x_2]$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{24} \int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi(x))(x - x_1)^4 dx &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)^4 dx \\ &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{120} (x - x_1)^5 \Big|_{x_0}^{x_2}, \end{aligned}$$

Regla de Simpson: definición (IV)

- así que

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3}f''(x_1) + \frac{f^{(4)}(\xi)}{60}h^5.$$

- Ahora, usando la fórmula para el punto medio de la segunda derivada

$$f''(x) = \frac{1}{h^2} [f(x - h) - 2f(x) + f(x + h)] - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi),$$

para $x - h < \xi < x + h$.

- Finalmente, podemos escribir la integral como

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx &= 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3} \left\{ \frac{1}{h^2} [f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)] \right. \\ &\quad \left. - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi_2) \right\} + \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{60}h^5, \end{aligned}$$

Regla de Simpson: definición (V)

- donde al reordenar, se puede reemplazar ξ_1 y ξ_2 por un valor común $\xi \in (x_0, x_2)$. Si se desea, la existencia de este valor común se puede mostrar derivando la regla de Simpson usando

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + k f^{(4)}(\xi),$$

se puede encontrar a_0 , a_1 y a_2 porque la Regla de Simpson es exacta para $f(x) = x^n$ con $n = 1, 2, 3$. Entonces se encuentra k usando $f(x) = x^4$.

- Finalmente se obtiene la Regla de Simpson con tres nodos

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi).$$

Regla de Simpson: definición (V)

- Si se usan cuatro nodos se obtiene el Método de Simpson *tres octavos* que usa un polinomio $P_3(x)$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] - \frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi),$$

con $x_0 < \xi < x_3$. El error sigue teniendo $O(h^5)$.

- Si se usan cinco nodos se obtiene una mejor aproximación

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = & \frac{2h}{45} [7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)] \\ & - \frac{8h^7}{945} f^{(6)}(\xi), \end{aligned}$$

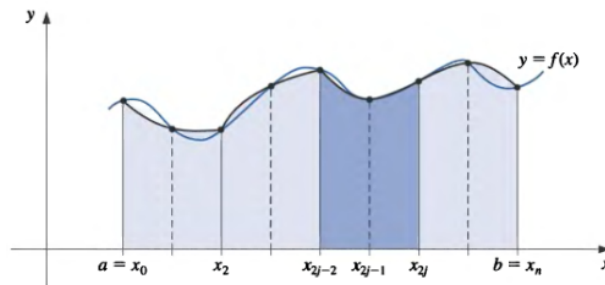
con $x_0 < \xi < x_4$. Hay que notar que ahora el error si disminuye con $O(h^7)$.

Método de Simpson compuesto

► Para un número par de subintervalos n se tiene

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} \left[f(a) + 2 \sum_{j=1}^{n/2-1} f(x_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(b) \right] - \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\mu),$$

donde $h = (b-a)/n$, $x_j = a + jh$ para $j = 0, 1, \dots, n$ y con $\mu \in (a, b)$.



[Burden, Faires y Burden. *Numerical Analysis*. 10th Ed.]

Dr. Giovanni Ramírez

Integración numérica

15 / 38

Método de Simpson compuesto: algoritmo

Entrada: La función que se quiere integrar $f(x)$ se toma del módulo funciones; el intervalo $[a, b]$ y un número par n que se leen del archivo de configuraciones. **Salida:** El valor aproximado de la integral $S = \int_a^b f(x)dx$ con un error de aproximación $(b-a)/180h^4 f^{(4)}(\mu)$ donde $h = (b-a)/n$ y $\mu \in (a, b)$. **Requiere:** el módulo donde se define la función $f(x)$.

1. Inicio.
2. Leer a , b y n .
3. Definir $h = (b-a)/n$.
4. Definir $S_0 = f(a) + f(b)$.
5. Definir $S_1 = 0$, $S_2 = 0$.
6. Hacer para $i = 1, \dots, n-1$:
 - 6.1 Definir $x = a + ih$
 - 6.2 Si i es par, $S_2 = S_2 + f(x)$. Si no, $S_1 = S_1 + f(x)$.
7. Definir $S = h(S_0 + 2S_2 + 4S_1)/3$.
8. Escribir S .
9. Fin.

Otros métodos: Método de Romberg (I)

- Una forma alternativa de la regla trapezoidal compuesta que está dada por

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b) \right] + K_1 h^2 + K_2 h^4 + K_3 h^6 + \dots$$

donde las constantes K_i sólo dependen de $f^{(2i-1)}$ y $f^{(2i-1)}(b)$.

- El método de Romberg usa los resultados de la regla trapezoidal compuesta para $n = 1, 2, 4, 8, 16, \dots$ asignándoles el nombre $R_{1,1}, R_{2,1}, R_{3,1}, \dots$ respectivamente.
- Ahora se pueden extrapolar, mediante aproximaciones de orden $O(h^4)$, los valores de $R_{2,2}, R_{3,2}, R_{4,2}, \dots$ usando

$$R_{k,2} = R_{k,1} + \frac{1}{3}(R_{k,1} - R_{k-1,1}), \forall k = 2, 3, \dots$$

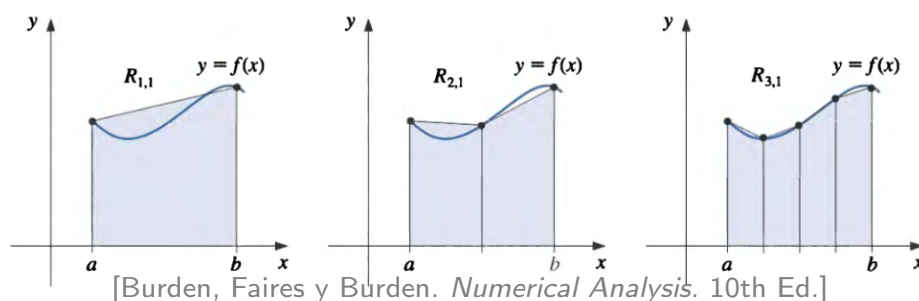
Otros métodos: Método de Romberg (II)

- Mediante aproximaciones de orden $O(h^6)$ se pueden calcular $R_{3,3}, R_{4,3}, R_{5,3}$ usando

$$R_{k,3} = R_{k,2} + \frac{1}{15}(R_{k,2} - R_{k-1,2}), \forall k = 3, 4, \dots$$

- En general, después de tener las $R_{k,j-1}$ aproximaciones, se pueden determinar las aproximaciones de orden $O(h^{2j})$ usando

$$R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{1}{4^{j-1} - 1}(R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}), \forall k = j, j+1, \dots$$



Otros métodos

- ▶ Cuadraturas adaptativas: usan un paso h que se adapta según la variación de la función $f(x)$. A mayor variación de $f(x)$, menor h .
- ▶ Cuadraturas gaussianas: los nodos no se eligen equiespaciados sino que se eligen de modo que minimicen el error esperado en la aproximación

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i),$$

donde c_i con coeficientes arbitrarios.

- ▶ Métodos para integrales múltiples: son extensiones de los métodos descritos previamente adaptados para integrales múltiples. Por ejemplo,

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Introducción

- ▶ Las ecuaciones diferenciales de muchos modelos físicos de los problemas de valores iniciales resultan demasiado complejas para ser resueltas analíticamente.
- ▶ Los métodos numéricos usados no producen una aproximación continua de la solución.
- ▶ Las aproximaciones se obtienen para ciertos puntos y se puede usar algún método de interpolación para encontrar la solución en puntos intermedios.

Definiciones (I)

- Una función $f(t, y)$ satisface la condición de Lipschitz en la variable y en un conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ si existe una constante $L > 0$ tal que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,$$

siempre que $(t, y_1); (t, y_2) \in D$. La constante L se conoce como constante de Lipschitz para f .

- Un conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ es convexo si $(t_1, x_1); (t_2, x_2) \in D$ y $((1 - \lambda)t_1 + \lambda t_2, (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \in D$ para $\lambda \in [0, 1]$.
- Suponga que $f(t, y)$ está definida en un conjunto convexo $D \subset \mathbb{R}^2$, si una constante $L > 0$ existe con

$$\left| \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \right| \leq L,$$

para todos los puntos $(t, y) \in D$. Entonces f satisface la condición de Lipschitz en y con una constante de Lipschitz L .

Definiciones (II)

- Suponga que $D = \{(t, y) | a \leq t \leq b \wedge -\infty < y < \infty\}$ y que $f(t, y)$ es continua en D . Si f satisface la condición de Lipschitz en D en la variable y , entonces el problema de valor inicial

$$y'(t) = f(t, y), a \leq t \leq b, y(a) = \alpha,$$

con α constante, tiene una solución única $y(t)$ para $a \leq t \leq b$.

- El problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), a \leq t \leq b, y(a) = \alpha,$$

está bien definido si

- (a) existe una solución única $y(t)$; y

Definiciones (III)

- (b) existen unas constantes $\epsilon_0 > 0$ y $k > 0$ tal que para cualquier ϵ , con $\epsilon_0 > \epsilon > 0$ cuando $\delta(t)$ es continua con $|\delta(t)| < \epsilon$ para toda $t \in [a, b]$ y cuando $|\delta_0| < \epsilon$, se tiene

$$\frac{dz}{dt} = f(t, z) + \delta(t), a \leq t \leq b, z(a) = \alpha + \delta_0,$$

tiene una solución única $z(t)$ que satisface

$$|z(t) - y(t)| < k\epsilon, \forall t \in [a, b],$$

que es *el problema perturbado* asociado al problema original, esto se usa para cuantificar un error introducido en la definición de la ecuación diferencial o en la condición inicial.

- Suponga que $D = \{(t, y) | a \leq t \leq b \wedge -\infty < y < \infty\}$, si f es continua y satisface la condición de Lipschitz en y en D , entonces

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha,$$

es un problema de valor inicial bien definido.

Método de Euler (I)

- Técnica elemental que no se usa mucho en la práctica, pero su derivación es sencilla y se usa para ilustrar otras técnicas más avanzadas.
- Se usa para obtener aproximaciones a problemas de valor inicial bien definidos

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha.$$

- No proporciona una aproximación continua de la solución $y(t)$, sino aproximaciones a y en varios puntos llamados *puntos de malla o de red* en $[a, b]$.
- Se debe usar algún método de aproximación para conocer el comportamiento de $y(t)$ cerca de estos puntos de malla o de red.

Método de Euler (II)

- Consideremos los puntos de malla distribuidos uniformemente en $[a, b]$

$$t_i = a + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N,$$

donde $h = (b - a)/N = t_{i+1} - t_i$.

- Suponiendo que $y(t)$ tiene dos derivadas continuas en $[a, b]$, se usa una expansión de Taylor de modo que

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + y'(t_i)(t_{i+1} - t_i) + \frac{y''(\xi_i)}{2}(t_{i+1} - t_i)^2,$$

para un valor $\xi_i \in (t_i, t_{i+1})$.

- Ahora, usando la definición de h

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i),$$

Método de Euler (III)

- Como $y(t)$ es una solución del problema, entonces

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2}f''(\xi_i).$$

- Finalmente, si $\omega_i \approx y(t_i)$, para $i = 1, 2, \dots, N$, se tiene $\omega_0 = \alpha$ y

$$\omega_{i+1} = \omega_i + hf(t_i, \omega_i),$$

que es la *ecuación en diferencias* asociada al método de Euler.

- Ahora, supongamos que f es continua y satisface la condición de Lipschitz con L en $D = \{(t, y) | a \leq t \leq b, \wedge -\infty < y < \infty\}$ y que existe M tal que $|y''(t)| \leq M, \forall t \in [a, b]$ donde $y(t)$ es una solución al problema de valor inicial, entonces

$$|y(t_i) - \omega_i| \leq \frac{hM}{2L} \left[e^{L(t_i-a)} - 1 \right],$$

donde $\{\omega_i\}$ se generan con el método de Euler.

Figure 5.2

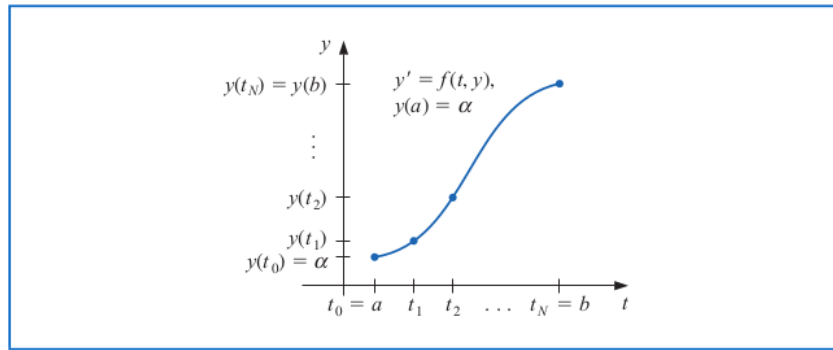


Figure 5.3

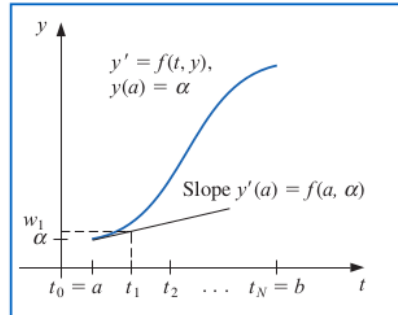
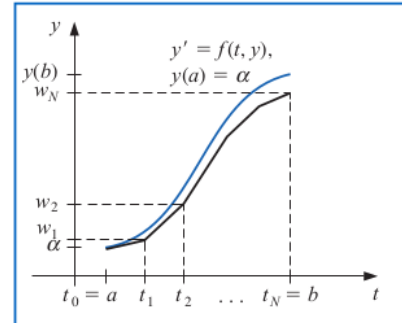


Figure 5.4



[Burden y Faires, Numerical Analysis, Brooks/Cole, 9ed.]

Método de Euler: algoritmo

Resuelve el problema $y' = f(t, y)$, para $a \leq t \leq b$ y con un valor inicial $y(a) = \alpha$.

Entrada: La función $f(t, y)$ se toma del módulo funciones; el intervalo $[a, b]$, el valor inicial α y un número de pasos n se leen del archivo de configuraciones. **Salida:** El valor aproximado $w \equiv y(t_i)$ donde $t_i = a + ih$, $\forall i \in [0, n + 1]$, con un error de aproximación $O(h)$ y que también depende exponencialmente de $t_i - a$.

Requiere: el módulo donde se define la función $f(t, y)$.

1. Inicio.
2. Leer a , b , α y n .
3. Definir $h = (b - a)/n$.
4. Definir $t = a$.
5. Definir $w = \alpha$.
6. Imprimir t, w .
7. Hacer para $i = 1, \dots, n$:
 - 7.1 Definir $w = w + hf(t, w)$.
 - 7.2 Definir $t = a + ih$.
 - 7.3 Imprimir t, w .
8. Fin.

Método de Euler: ejemplo (I)

Use el método de Euler para encontrar la solución de

$$y' = y - t^2 + 1, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 0.5.$$

para $n = 10$ y compare con el resultado exacto

$$y(t) = (t + 1)^2 - 0.5e^t.$$

Solución: con $n = 10$, se tiene $h = 0.2$, $t_i = 0.2i$ y $w_0 = 0.5$.

Ahora

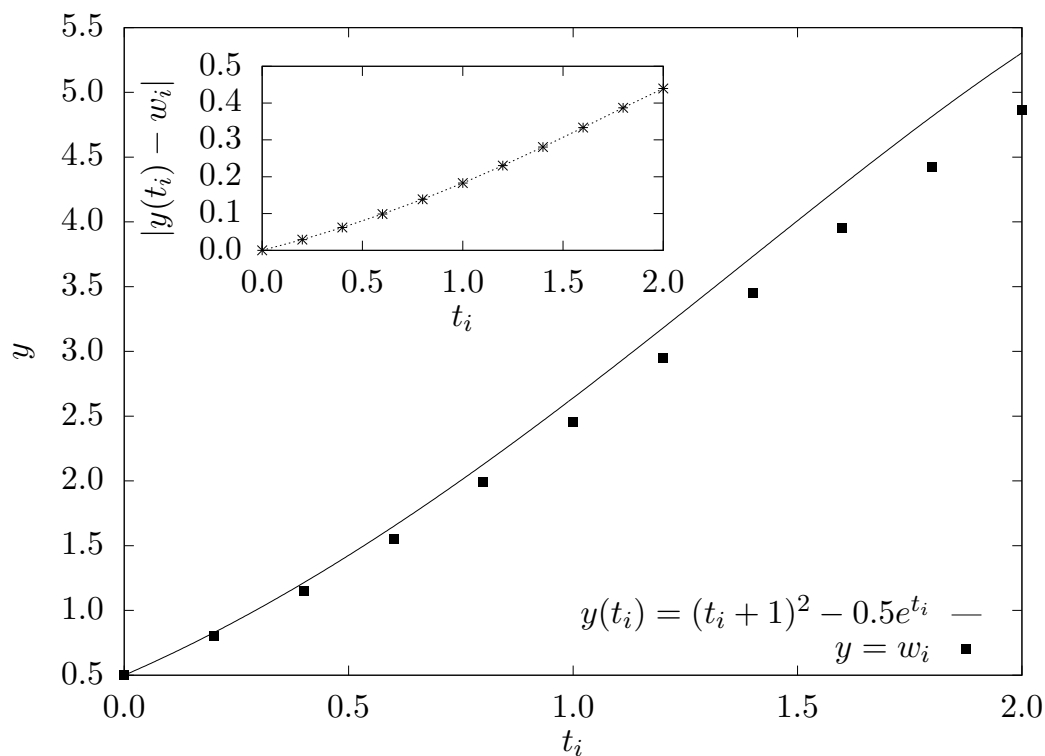
$$w_{i+1} = w_i + h(w_i - t_i^2 + 1) = 1.2w_i - 0.008i^2 + 0.2,$$

así que se obtienen estos resultados

t_i	w_i	$ y(t_i) - w_i $
0.0	0.5000000	0.0000000
0.2	0.8000000	0.0292986
0.4	1.1520000	0.0620877
0.6	1.5504000	0.0985406
0.8	1.9884800	0.1387495
1.0	2.4581760	0.1826831

t_i	w_i	$ y(t_i) - w_i $
1.2	2.9498112	0.2301303
1.4	3.4517734	0.2806266
1.6	3.9501281	0.3333557
1.8	4.4281538	0.3870225
2.0	4.8657845	0.4396874

Método de Euler: ejemplo (II)



Métodos de orden superior (I)

- ▶ Otros métodos obtenidos usando polinomios de Taylor de orden superior tendrán cotas de error más pequeñas que el método de Euler, pero hay que calcular y evaluar derivadas de $f(t, y)$.
- ▶ Para deducir otros métodos hay que usar el teorema de Taylor para dos variables: suponga que $f(t, y)$ y todas sus derivadas de orden menor que o igual a $n + 1$ son continuas en el conjunto $D = \{(t, y) | a \leq t \leq b \wedge c \leq y \leq d\}$ y que $(t_0, y_0) \in D$, para cada punto $(t, y) \in D$ existen dos números $\xi \in (t_0, t)$ y $\mu \in (y_0, y)$ tal que

$$f(t, y) = P_n(t, y) + R_n(t, y).$$

Métodos de orden superior (II)

- ▶ El polinomio de Taylor de dos variables de orden n es

$$\begin{aligned} P_n(t, y) = & f(t_0, y_0) + \left[(t - t_0) \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) \right] \\ & \left[\frac{(t - t_0)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_0, y_0) + (t - t_0)(y - y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0, y_0) \right. \\ & \left. + \frac{(y - y_0)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0, y_0) \right] + \dots \\ & + \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (t - t_0)^{n-j} (y - y_0)^j \frac{\partial^n f}{\partial t^{n-j} \partial y^j}(t_0, y_0), \end{aligned}$$

- ▶ y el término de error es

$$R_n(t, y) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (t - t_0)^{n+1-j} (y - y_0)^j \frac{\partial^{n+1} f(\xi, \mu)}{\partial t^{n+1-j} \partial y^j}.$$

Métodos de orden superior (III)

- De esta forma se pueden construir otros métodos que se conocen como *métodos de Taylor* de orden n , por ejemplo con $\omega_0 = \alpha$ y $\omega_{i+1} = \omega_i + hT^{(n)}$, donde

$$T^{(n)}(t_i, \omega_i) = f(t_i, \omega_i) + \frac{h}{2}f'(t_i, \omega_i) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{n!}f^{(n-1)}(t_i, \omega_i).$$

- El método de Euler se obtiene con la expansión de Taylor de orden uno, $T^{(1)}$.
- El método de Runge-Kutta de orden dos se obtiene al determinar los valores para a_1 , α_1 y β_1 que hacen que $a_1 f(t + \alpha_1, y + \beta_1)$ se aproxime a

$$T^{(2)}(t, y) = f(t, y) + \frac{h}{2}f'(t, y),$$

con un error menor que $O(h^2)$.

- Este método también se conoce como *método de punto medio* y permite definir otro que se conoce como *método de Euler modificado*.

Métodos de orden superior (IV)

- El método de Euler modificado se obtiene con $\omega_0 = \alpha$ y

$$\omega_{i+1} = \omega_i + \frac{h}{2} [f(t_i, \omega_i) + f(t_{i+1}, \omega_i + hf(t_i, \omega_i))], i = 0, 1, \dots, N-1,$$

- con la expansión de Taylor de orden 3, el término $T^{(3)}(t, y)$ se puede aproximar usando $f(t + \alpha_1, y + \delta_1 f(t + \alpha_2, y + \delta_2 f(t, y)))$ con un error de orden $O(h^3)$;
- así que con $\omega_0 = \alpha$ y

$$\omega_{i+1} = \omega_i + \frac{h}{4} \left(f(t_i, \omega_i) + 3f\left(t_i + \frac{2h}{3}, \omega_i + \frac{2h}{3}f\left(t_i + \frac{h}{3}, \omega_i + \frac{h}{3}f(t_i, \omega_i)\right)\right) \right),$$

para $i = 0, 1, \dots, N - 1$, este método también se conoce como *método de Heun*.

Método de Runge-Kutta (I)

- El método de Runge-Kutta más usado es el de orden cuatro donde se toma $\omega_0 = \alpha$ y los coeficientes

$$\begin{aligned}k_1 &= hf(t_i, \omega_i), \\k_2 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, \omega_i + \frac{k_1}{2}\right), \\k_3 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, \omega_i + \frac{k_2}{2}\right), \\k_4 &= hf(t_{i+1}, \omega_i + k_3),\end{aligned}$$

para obtener $\omega_{i+1} = \omega_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$, para $i = 0, 1, \dots, N-1$ y un error del orden $O(h^4)$.

Método de Runge-Kutta (II)

- También se usa el *método de Runge-Kutta-Fehlberg* o método de Runge-Kutta con error de truncamiento local con un polinomio de orden cinco

$$\tilde{\omega}_{i+1} = \omega_i + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{5}k_5 + \frac{2}{55}k_6,$$

- que aproxima el error local para un polinomio de orden cuatro

$$\omega_{i+1} = \omega_i + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5.$$

- De modo que se debe *adaptar* el nuevo paso a un tamaño qh donde

$$q \leq \left(\frac{\epsilon h}{|\tilde{\omega}_{i+1} - \omega_{i+1}|} \right)^{1/n},$$

y ϵ es el límite deseado.

Método de Runge-Kutta (III)

► Los coeficientes son

$$k_1 = hf(t_i, \omega_i),$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{4}, \omega_i + \frac{k_1}{4}\right),$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{3h}{8}, \omega_i + \frac{3k_1}{32} + \frac{9k_2}{32}\right),$$

$$k_4 = hf\left(t_i + \frac{12h}{13}, \omega_i + \frac{1932k_1}{2197} + \frac{7200k_2}{2197} + \frac{7296k_3}{2197}\right),$$

$$k_5 = hf\left(t_i + h, \omega_i + \frac{439k_1}{216} - 8k_2 + \frac{3680k_3}{513} - \frac{845k_4}{4104}\right),$$

$$k_6 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, \omega_i - \frac{8k_1}{27} + 2k_2 - \frac{3544k_3}{2565} + \frac{1859k_4}{4104} - \frac{11k_5}{40}\right).$$

¡Muchas gracias!

Contacto:

Giovanni Ramírez García, PhD

ramirez@ecfm.usac.edu.gt

<http://ecfm.usac.edu.gt/ramirez>