Polinomios de aproximación numérica

Giovanni Ramírez García, PhD

Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de San Carlos de Guatemala

Guatemala, 25 de febrero de 2021

With four parameters I can fit an elephant, and with five I can make him wiggle his trunk. –John von Neumann

¿Por qué hacer aproximaciones con polinomios?

- Polinomios: de las formas mejor conocidas para mapear $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- Sea f una función definida y continua en $[a, b]$, consideremos el polinomio de orden $n > 0$

$$P_n(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

  como una aproximación de f donde $a_0, \ldots, a_n$ son constantes reales
- es decir $f(x) \approx P_n(x)$, con un error dado por el teorema de Weierstraß

$$|f(x) - P_n(x)| < \epsilon, \forall x \in [a, b].$$

Polinomio de Taylor

- Supongamos que la función f tiene n derivadas en $[a, b]$, que existe la $(n+1)$ derivada en $[a, b]$ y que $x_0 \in [a, b]$.
- Para cada $x \in [a, b]$, existe un número $\xi(x) \in [x_0, x]$ tal que

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

- donde $P_n(x)$ es el Polinomio de Taylor de orden n alrededor de x_0

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

- y $R_n(x)$ el error de truncamiento (o *remainder term*) es

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Polinomio lineal

- Consideremos el problema de determinar un polinomio de orden uno que pasa por los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1).
- Si tomamos $f(x_0) = y_0$ y $f(x_1) = y_1$, podemos definir las funciones

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad \text{y} \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0},$$

- así que

$$P_1(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1),$$

  será un único polinomio de grado uno que pasa por los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1).
- En otras palabras, si $x = x_i$, $L_i(x) = 1$, pero $L_j(x) = 0$ con $j \neq i$.

Polinomios de orden superior

- Ahora consideremos los puntos $\{(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$.
- Un polinomio de orden superior también debe cumplir con $L_{n,k}(x) = 0$ si $i \neq k$ y con $L_{n,k}(x_k) = 1$.
- El polinomio de orden n de interpolación de Lagrange es

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_{n,k}(x),$$

- con

$$L_{n,k}(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i},$$

Error de aproximación

- Supongamos ahora que los números $\{x_0, \ldots, x_n\}$ son distintos y que están en $[a, b]$. Entonces, para cada $x \in [a, b]$, existe un número $\xi(x)$ tal que

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i),$$

  donde $P_n(x)$ es el polinomio de orden n de interpolación de Lagrange.
- Entonces, el error de aproximación es $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$.

Ejemplo (I)

Usar los *nodos* $x_0 = 2$, $x_1 = 2.75$ y $x_2 = 4$, para encontrar el polinomio de Lagrange de segundo orden para $f(x) = 1/x$. Aproximar $f(3)$. Encontrar el error máximo para $x \in [2, 4]$.

1. Calcular los *coeficientes polinomiales*

$$L_{2,0}(x) = \frac{(x-2.75)(x-4)}{(2-2.75)(2-4)} = \frac{2}{3}(x-2.75)(x-4),$$
$$L_{2,1}(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(2.75-2)(2.75-4)} = -\frac{16}{15}(x-2)(x-4),$$
$$L_{2,2}(x) = \frac{(x-2)(x-2.75)}{(4-2)(4-2.7)} = \frac{2}{5}(x-2)(x-2.75).$$

2. Calcular los valores de $f(x_0)$, $f(x_1)$ y $f(x_2)$

$$f(x_0) = f(2) = 1/2,$$

$$f(x_1) = f(2.75) = 4/11, \quad \text{y} \quad f(x_2) = f(4) = 1/4.$$

Ejemplo (II)

3. Calcular el polinomio $P(x)$

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{k=0}^{2} f(x_k) L_{n,k}(x) \\ &= \frac{(x-2.75)(x-4)}{3} - \frac{64(x-2)(x-4)}{165} + \frac{(x-2)(x-2.75)}{10} \\ &= \frac{1}{22}x^2 - \frac{35}{88}x + \frac{49}{44}. \end{aligned}$$

4. Calcular $f(3)$

$$f(3) \approx P(3) = \frac{29}{88} \approx 0.32955,$$

con un error $|f(x) - P(x)| \leq 4 \cdot 10^{-3}$.

Ejemplo (III)

5. La fórmula exacta del error para $x \in [2,4]$ es

$$R_n(x) = \frac{f^{(3)}(\xi(x))}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2),$$

para $\xi(x) \in [2,4]$. Pero no conocemos $\xi(x)$.

6. Por lo tanto, vamos a encontrar una cota de error

$$R_n(x) \leq \max_{[2,4]} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \right| \cdot \max_{[2,4]} \left| \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right|.$$

7. Como $f'''(x) = -6x^{-4}$, el primer factor tiene la forma

$$\max_{[2,4]} \left| \frac{f^{(3)}(\xi(x))}{(3)!} \right| = \max_{[2,4]} \left| -\frac{6}{3!x^4} \right| = \frac{1}{16}.$$

Ejemplo (IV)

8. Ahora, si $g(x) = (x-2)(x-2.75)(x-4)$, el segundo factor tiene la forma

$$\max_{[2,4]} \left| \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right| = \max_{[2,4]} |g(x)|.$$

9. Entonces, hay que encontrar los puntos críticos de $g(x)$, es decir aquellos que satisfacen $g'(x) = 0$.
10. Con $g'(x) = (1/2)(3x-7)(2x-7)$, existen dos puntos críticos uno en $x = 7/3$ y el otro en $x = 7/2$.
11. Entonces, con $x = 7/2$

$$\max_{[2,4]} \left| \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right| = \frac{9}{16}.$$

12. Finalmente, $R_n(x) \leq (1/16)(9/16) \leq 4 \cdot 10^{-2}$.

Diferencias divididas (I)

- Si escribimos el polinomio de aproximación como $P_n = a_0 +$

  $a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})$,

  con constantes reales $a_0, \ldots, a_n$.
- Además, si tomamos $P_n(x_0) = f(x_0) = a_0$ y $P_n(x_1) = f(x_1) = f(x_0) + a_1(x_1 - x_0)$, entonces

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

- o en general, tomando la diferencia dividida de orden cero respecto a x_i como $f[x_i] = f(x_i)$, la diferencia dividida de orden uno respecto a x_i y x_{i+1} sería

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i},$$

Diferencias divididas (II)

- la diferencia dividida de orden dos sería

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i},$$

- y la diferencia dividida de orden k sería

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}.$$

- Por lo que, la diferencia dividida de orden n es

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}.$$

Polinomio de diferencias divididas de Newton

- Usando $a_0 = f(x_0) = f[x_0]$, $a_1 = f[x_0, x_1]$ y en general $a_k = f[x_0, \ldots, x_k]$, podemos escribir el polinomio de diferencias divididas de Newton

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, \ldots, x_k](x - x_0) \cdots (x - x_{k-1}),$$

- donde el valor de $f[x_0, \ldots, x_k]$ es independiente del orden de los números $x_0, \ldots, x_k$.

Error de aproximación

- Supongamos que los números $x_0, \ldots, x_n$ son distintos.
- Entonces, existe un número $\xi \in (a, b)$ tal que

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},$$

- si tomamos $g(x) = f(x) - P_n(x)$, una función con $n + 1$ ceros en $[a, b]$, el teorema generalizado de Rolle implica que $\exists \xi \in (a, b)$ tal que

$$g^{(n)}(\xi) = 0.$$

Diferencias divididas *adelantadas* (I)

- Para simplificar, consideremos puntos distribuidos uniformemente tal que $h = x_{i+1} - x_i$, para $i = 0, \ldots, n-1$,
- de modo que $x = x_i + (s - i)h$.
- Entonces, el polinomio de diferencias divididas de Newton es

$$P_n(x) = P_n(x_0 + sh) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} \binom{s}{k} k! h^k f[x_0, \ldots, x_k],$$

Diferencias divididas *adelantadas* (II)

- usando la notación de Aitken, la primera y segunda diferencia dividida son

$$f[x_0, x_1] = \frac{1}{h} \Delta f(x_0),$$
$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{1}{2h^2} \Delta^2 f(x_0),$$

- y en general

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{1}{k! h^k} \Delta^k f(x_0).$$

- De modo que, el polinomio de diferencias divididas adelantadas de Newton es

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k f(x_0).$$

Diferencias divididas *atrasadas* (I)

- También podemos escribir el polinomio de interpolación como

$$\begin{aligned}P_n(x) =& f[x_n] + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n)\\ &+ f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}](x - x_n)(x - x_{n-1}) + \cdots\\ &+ f[x_n, \ldots, x_0](x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_1),\end{aligned}$$

- y usando puntos equiespaciados, $x = x_i + (s + n - i)h$, entonces

$$\begin{aligned}P_n(x) =& P_n(x_n + sh)\\ =& f[x_n] + shf[x_n, x_{n-1}] + s(s + 1)h^2 f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] + \cdots\\ &+ s(s + 1) \cdots (s + n - 1)h^n f[x_n, \ldots, x_0].\end{aligned}$$

Diferencias divididas *atrasadas* (II)

- ahora, usando la notación de Aitken atrasada para las diferencias de orden uno y dos

$$\begin{aligned}f[x_n, x_{n-1}] &= \frac{1}{h}\Delta f(x_n),\\ f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] &= \frac{1}{2h^2}\Delta^2 f(x_n),\end{aligned}$$

- y en general

$$f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}] = \frac{1}{k!h^k}\Delta^k f(x_n).$$

- De modo que

$$P_n(x) = f[x_n] + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \binom{-s}{k} \Delta^k f(x_n).$$

- Nota: en algunos textos usan ∇ para no confundir estas diferencias con las diferencias divididas adelantadas.

Diferencias divididas centradas (I)

- Cuando se quiere aproximar un valor cerca del límite inferior del intervalo de los nodos, es mejor usar el polinomio de diferencias adelantadas.
- Por otro lado, si el valor está cerca del límite superior del intervalo, es mejor usar el polinomio de diferencias atrasadas.
- Sin embargo, cuando el valor que se quiere aproximar está cerca del centro del intervalo es mejor usar el polinomio de diferencias centradas.
- Existen muchas formas de calcular las diferencias divididas, pero vamos a considerar solamente el Método de Stirling.

Diferencias divididas centradas (II)

- Consideremos que se elige x_0 cerca del punto que se quiere aproximar.
- Ahora los nodos cuyo valor sea menor que x_0 son etiquetados usando $x_{-1}, x_{-2}, \ldots$, de modo que $\cdots < x_{-2} < x_{-1} < x_0$.
- Los nodos cuyo valor sea mayor que x_0 son etiquetados usando $x_1, x_2, \ldots$, de modo que $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$.
- Entonces si n es par, la fórmula de Stirling es $P_n(x) = P_{2m}(x)$, donde

$$
\begin{aligned}
P_{2m}(x) =& f[x_0] + sh\left(\frac{f[x_{-1},x_0] + f[x_0,x_1]}{2}\right) + s^2h^2 f[x_{-1},x_0,x_1] + \\
& s(s^2-1)h^3\left(\frac{f[x_{-2},x_{-1},x_0,x_1] + f[x_{-1},x_0,x_1,x_2]}{2}\right) + \cdots + \\
& s^2(s^2-1)(s^2-4)\cdots(s^2-(m-1)^2)h^{2m} f[x_m,\ldots,x_m].
\end{aligned}
$$

Diferencias divididas centradas (III)

- En el caso de que n sea impar, la fórmula de Stirling es $P_n(x) = P_{2m+1}(x)$, donde

$$
\begin{aligned}
P_{2m+1}(x) =& f[x_0] + sh\left(\frac{f[x_{-1},x_0]+f[x_0,x_1]}{2}\right) + s^2h^2 f[x_{-1},x_0,x_1] + \\
& s(s^2-1)h^3\left(\frac{f[x_{-2},x_{-1},x_0,x_1]+f[x_{-1},x_0,x_1,x_2]}{2}\right) + \cdots + \\
& s^2(s^2-1)(s^2-4)\cdots(s^2-(m-1)^2)h^{2m} f[x_m,\ldots,x_m] +
\end{aligned}
$$

$$
s(s^2-1)\cdots(s^2-m^2)h^{2m+1}\left(\frac{f[x_{-m-1},\ldots,x_m]+f[x_{-m},\ldots,x_{m+1}]}{2}\right).
$$

Ejemplo 1 (I)

1. Calcular las diferencias divididas para los nodos $\{x_0,\ldots,x_3\}$ con $f(x)$.

x	$f(x)$	1a. DD	2a DD	3a DD
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0,x_1]$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2]$	
		$f[x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]$	
		$f[x_2,x_3]$		
x_3	$f[x_3]$			

- donde $f[x_0,x_1] = \dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$, $\qquad f[x_1,x_2] = \dfrac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$,

  y $\qquad f[x_2,x_3] = \dfrac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$.

Ejemplo 1 (I)

1. Calcular las diferencias divididas para los nodos $\{x_0, \dots, x_3\}$ con $f(x)$.

x	$f(x)$	1a. DD	2a DD	3a DD
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0, x_1]$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$	
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$	
		$f[x_2, x_3]$		
x_3	$f[x_3]$			

- donde $f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$,

  y $$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}.$$

Ejemplo 1 (I)

1. Calcular las diferencias divididas para los nodos $\{x_0, \dots, x_3\}$ con $f(x)$.

x	$f(x)$	1a. DD	2a DD	3a DD
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0, x_1]$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$	
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$	
		$f[x_2, x_3]$		
x_3	$f[x_3]$			

- donde $f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$.

Ejemplo 1 (II) $P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} s(s-1)\cdots(s-k+1)h^k f[x_0,\ldots,x_k]$

2. Considere que $\{x_i\}$ son equiespaciados, $x_{i+1} = x_i + h$. Calcular el polinomio de diferencias divididas adelantadas $P_3(x_0 + sh)$.

	x	$f(x)$	1a. DD	2a DD	3a DD
	x_0	$\underline{f[x_0]}$			
$\xrightarrow{x}$			$\underline{f[x_0,x_1]}$		
	x_1	$f[x_1]$		$\underline{f[x_0,x_1,x_2]}$	
			$f[x_1,x_2]$		$\underline{f[x_0,x_1,x_2,x_3]}$
	x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]$	
			$f[x_2,x_3]$		
	x_3	$f[x_3]$			

- con $x = x_0 + sh$, $P_3(x) = f[x_0] + shf[x_0,x_1] + s(s-1)h^2 f[x_0,x_1,x_2] +$

$$s(s-1)(s-2)h^3 f[x_0,x_1,x_2,x_3].$$

Ejemplo 1 (III) $P_n(x) = f[x_n] + s\nabla f(x_n) + \cdots + \frac{s(s+1)\cdots(s+n-1)}{n!}\nabla^n f(x_n)$

3. Considere que $\{x_i\}$ son equiespaciados, $x_n = x_i + (n-i)h$. Calcular el polinomio de diferencias divididas atrasadas $P_3(x_n + sh)$.

	x	$f(x)$	1a. DD	2a DD	3a DD
	x_0	$f[x_0]$			
			$f[x_0,x_1]$		
	x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2]$	
			$f[x_1,x_2]$		$\underline{f[x_0,x_1,x_2,x_3]}$
	x_2	$f[x_2]$		$\underline{f[x_1,x_2,x_3]}$	
$\xrightarrow{x}$			$\underline{f[x_2,x_3]}$		
	x_3	$\underline{f[x_3]}$			

- con $x = x_3 + sh$, $P_3(x) = f[x_3] + shf[x_3,x_2] + s(s+1)h^2 f[x_3,x_2,x_1] +$

$$s(s+1)(s+2)h^3 f[x_3,x_2,x_1,x_0].$$

Ejemplo 2 (I)

1. Obtenga el polinomio de diferencias divididas $P_4(1.1)$

		First divided differences	Second divided differences	Third divided differences	Fourth divided differences
1.0	0.7651977				
		−0.4837057			
1.3	0.6200860		−0.1087339		
		−0.5489460		0.0658784	
1.6	0.4554022		−0.0494433		0.0018251
		−0.5786120		0.0680685	
1.9	0.2818186		0.0118183		
		−0.5715210			
2.2	0.1103623				

- Para $P_4(1.1)$ se tiene $h = 0.3$ y $s = 1/3$.
- Entonces el polinomio de diferencias divididas adelantadas es

$$
\begin{aligned}
P_4(1.1) =& 0.7651977 + \frac{1}{3}(0.3)(-0.4837057) + \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)(0.3)^2(-0.1087339)+ \\
& \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)(0.3)^3(0.0658784)+ \\
& \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{8}{3}\right)(0.3)^4(0.0018251) = 0.7196460.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2 (II)

2. Obtenga el polinomio de diferencias divididas $P_4(2.0)$

		First divided differences	Second divided differences	Third divided differences	Fourth divided differences
1.0	0.7651977				
		−0.4837057			
1.3	0.6200860		−0.1087339		
		−0.5489460		0.0658784	
1.6	0.4554022		−0.0494433		0.0018251
		−0.5786120		0.0680685	
1.9	0.2818186		0.0118183		
		−0.5715210			
2.2	0.1103623				

- Para $P_4(2.0)$ se tiene $h = 0.3$ y $s = -2/3$.
- Entonces el polinomio de diferencias divididas atrasadas es

$$
\begin{aligned}
P_4(1.1) =& 0.1103623 - \frac{2}{3}(0.3)(-0.5715210) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)(0.3)^2(0.0118183)- \\
& \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)(0.3)^3(0.0.0680685)- \\
& \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{7}{3}\right)(0.3)^4(0.0018251) = 0.2238754.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3

1. Obtenga el polinomio de diferencias divididas centradas para $n = 4$, $m = 2$

x	$f(x)$	First divided differences	Second divided differences	Third divided differences	Fourth divided differences
x_{-2}	$f[x_{-2}]$				
		$f[x_{-2}, x_{-1}]$			
x_{-1}	$f[x_{-1}]$		$f[x_{-2}, x_{-1}, x_0]$		
		$\underline{f[x_{-1}, x_0]}$		$\underline{f[x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1]}$	
x_0	$\underline{f[x_0]}$		$\underline{f[x_{-1}, x_0, x_1]}$		$\underline{f[x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2]}$
		$\underline{f[x_0, x_1]}$		$\underline{f[x_{-1}, x_0, x_1, x_2]}$	
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$			
x_2	$f[x_2]$				

$$
\begin{aligned}
P_{2m} =& f[x_0] + sh\left(\frac{f[x_{-1}, x_0] + f[x_0, x_1]}{2}\right) + s^2h^2 f[x_{-1}, x_0, x_1] + \\
& s(s^2-1)h^3\left(\frac{f[x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1] + f[x_{-1}, x_0, x_1, x_2]}{2}\right) + \\
& s(s^2-1)(s^2-4)h^4 f[x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2].
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4

1. Obtenga el polinomio de diferencias divididas $P_4(1.5)$

x	$f(x)$	First divided differences	Second divided differences	Third divided differences	Fourth divided differences
1.0	0.7651977				
		−0.4837057			
1.3	0.6200860		−0.1087339		
		$\underline{-0.5489460}$		$\underline{0.0658784}$	
1.6	$\underline{0.4554022}$		$\underline{-0.0494433}$		$\underline{0.0018251}$
		$\underline{-0.5786120}$		$\underline{0.0680685}$	
1.9	0.2818186		0.0118183		
		−0.5715210			
2.2	0.1103623				

- Para $x = 1.5$, se tiene $h = 0.3$ y $s = -1/3$ y el polinomio de diferencias divididas centradas es

$$
\begin{aligned}
P_4(1.1) =& 0.4554022 + \left(-\frac{1}{3}\right)(0.3)\left(\frac{(-0.5489460) + (-0.5786120)}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 (0.3)^2(-0.0494433) + \\
& \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 1\right)(0.3)^3\left(\frac{0.0658784 + 0.0680685}{2}\right) + \\
& \left(-\frac{1}{3}\right)^2\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 1\right)\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 2^2\right)(0.3)^4(0.0018251) \\
=& 0.5118200.
\end{aligned}
$$

Polinomios osculantes

- Son una generalización de los polinomios de Taylor y de Lagrange.
- Suponga un conjunto de $n+1$ números distintos $\{x_0, \ldots, x_n, |x_i \in [a,b]\}$ y otro $\{m_0, \ldots, m_n | m_i > 0\}$ con $m = \text{máx}\{m_i\}_1^n$.
- Sea f una función continua y con m derivadas en $[a,b]$.
- El polinomio osculante que aproxima a f es el polinomio de menor grado que tiene los mismos valores que f y todas sus derivadas de orden menor o igual que m_i en x_i.
- Entonces, el orden del polinomio es $M = \sum_{i=0}^{n} m_i + n$ y cumple con
$$\frac{d^k P(x_i)}{dx^k} = \frac{d^k f(x_i)}{dx^k},$$
para $i = 0, 1, \ldots, n$ y $k = 0, 1, \ldots, m$,
- para $n = 0$, se obtiene el polinomio de Taylor de orden m_0, para $m_i = 0$ se obtiene el polinomio de Lagrange.

Polinomios de Hermite

- Para $m_i = 1$ se obtienen los polinomios de Hermite.
- Sea f una función continua y con una derivada en $[a,b]$, $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$ son distintos, el único polinomio de menor grado que coincide con f y con f' en $x_0, \ldots, x_n$ es
$$f(x) \approx H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) H_{n,j}(x) + \sum_{j=0}^{n} f'(x_j) \hat{H}_{n,j}(x),$$
- donde
$$\begin{aligned} H_{n,j}(x) =& [1 - 2(x - x_j) L'_{n,j}(x_j)] L^2_{n,j}(x), \\ \hat{H}_{n,j}(x) =& (x - x_j) L^2_{n,j}(x), \end{aligned}$$
y $L_{n,j}(x)$ son los j-ésimos coeficientes de Lagrange de grado n.

Error de aproximación

- Sea f una función continua y con $2n+2$ derivadas en $[a,b]$, entonces

$$f(x) = H_{2n+1}(x) + \frac{(x-x_0)^2 \cdots (x-x_n)^2}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi(x)),$$

para algún valor $\xi(x) \in (a,b)$.

Usando los polinomios de Newton

- Los polinomios de Hermite también se pueden obtener usando el polinomio de Newton

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0,\ldots,x_k](x-x_0)\cdots(x-x_{k-1}).$$

- Se usa la conexión que existe entre la diferencia dividida de orden n y la n-ésima derivada de f.
- Hay que definir una nueva secuencia de nodos $z_0,\ldots,z_{2n+1}$, con $z_{2i} = z_{2i+1} = x_i$.
- Como $z_{2i} = z_{2i+1} = x_i$, no se puede definir $f[z_{2i}, z_{2i+1}]$ de la forma tradicional, se usa $f[z_{2i}, z_{2i+1}] = f'(z_{2i}) = f'(x_i)$.
- Entonces, se puede definir el polinomio de Hermite con

$$H_{2n+1}(x) = f[z_0] + \sum_{k=1}^{2n+1} f[z_0,\ldots,z_k](x-z_0)(x-z_1)\cdots(x-z_{k-1}).$$

Ejemplo 1 (I)

Use el polinomio de Hermite para aproximar $f(1.5)$ usando polinomios de Lagrange, tomando los datos

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	1.3	0.6200860	-0.5220232
1	1.6	0.4554022	-0.5698959
2	1.9	0.2818186	-0.5811571

- Primero hay que calcular los polinomios de Lagrange $L_{n,k}(x)$

$$
\begin{aligned}
L_{2,0}(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{50}{9}x^2 - \frac{175}{9}x + \frac{152}{9}, \\
L_{2,1}(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = -\frac{100}{9}x^2 + \frac{320}{9}x - \frac{247}{9}, \\
L_{2,2}(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{50}{9}x^2 - \frac{145}{9}x + \frac{104}{9},
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1 (II)

- y luego se calculan las derivadas $L'_{n,k}(x)$

$$
\begin{aligned}
L'_{2,0} &= \frac{100}{9}x - \frac{175}{9}, \\
L'_{2,1} &= -\frac{200}{9}x + \frac{320}{9}, \\
L'_{2,2} &= \frac{100}{9}x - \frac{145}{9}.
\end{aligned}
$$

- Con esto, se calculan los polinomios de Lagrange de orden n con $H_{n,j}(x) = [1 - 2(x - x_j)L'_{n,j}(x_j)]L^2_{n,j}(x)$

$$
\begin{aligned}
H_{2,0}(x) &= \left[1 - 2(x - x_0)L'_{2,0}(x_0)\right] L^2_{2,0}(x) \\
&= (10x - 12)\left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{175}{9}x + \frac{152}{9}\right)^2,
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1 (III)

$$
\begin{aligned}
H_{2,1}(x) &= [1 - 2(x - x_1)L'_{2,1}(x_1)]L^2_{2,1}(x) \\
&= \left(-\frac{100}{9}x^2 + \frac{320}{9}x - \frac{247}{9}\right)^2, \\
H_{2,2}(x) &= [1 - 2(x - x_2)L'_{2,2}(x_2)]L^2_{2,2}(x) \\
&= 10(2 - x)\left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{145}{9}x + \frac{104}{9}\right)^2.
\end{aligned}
$$

- Y también $\hat{H}_{n,j}(x) = (x - x_j)L^2_{n,j}(x)$

$$
\begin{aligned}
\hat{H}_{2,0}(x) &= (x - x_0)L^2_{2,0}(x) \\
&= (x - 1.3)\left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{175}{9}x + \frac{152}{9}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1 (IV)

$$
\begin{aligned}
\hat{H}_{2,1}(x) &= (x - x_1)L^2_{2,1}(x) \\
&= (x - 1.6)\left(-\frac{100}{9}x^2 + \frac{320}{9}x - \frac{247}{9}\right)^2, \\
\hat{H}_{2,2}(x) &= (x - x_2)L^2_{2,2}(x) \\
&= (x - 1.9)\left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{145}{9}x + \frac{104}{9}\right)^2.
\end{aligned}
$$

- Finalmente, $H_5(x) = f(x_0)H_{2,0}(x) + f(x_1)H_{2,1}(x) + f(x_2)H_{2,2}(x) + f'(x_0)\hat{H}_{2,0}(x) + f'(x_1)\hat{H}_{2,1}(x) + f'(x_2)\hat{H}_{2,2}(x)$,

$$H_5(1.5) = 0.5118277.$$

Ejemplo 2 (I)

Dados los nodos $\{x_0, x_1, x_2\}$, obtenga el polinomio de Hermite usando los polinomios de diferencias divididas.

- Los valores de z_i y las diferencias divididas se toman de la siguiente relación $z_{2i} = z_{2i+1} = x_i$, para cada i

z	$f(z)$	First divided differences	Second divided differences
$z_0 = x_0$	$f[z_0] = f(x_0)$		
		$f[z_0, z_1] = f'(x_0)$	
$z_1 = x_0$	$f[z_1] = f(x_0)$		$f[z_0, z_1, z_2] = \dfrac{f[z_1, z_2] - f[z_0, z_1]}{z_2 - z_0}$
		$f[z_1, z_2] = \dfrac{f[z_2] - f[z_1]}{z_2 - z_1}$	
$z_2 = x_1$	$f[z_2] = f(x_1)$		$f[z_1, z_2, z_3] = \dfrac{f[z_2, z_3] - f[z_1, z_2]}{z_3 - z_1}$
		$f[z_2, z_3] = f'(x_1)$	
$z_3 = x_1$	$f[z_3] = f(x_1)$		$f[z_2, z_3, z_4] = \dfrac{f[z_3, z_4] - f[z_2, z_3]}{z_4 - z_2}$
		$f[z_3, z_4] = \dfrac{f[z_4] - f[z_3]}{z_4 - z_3}$	
$z_4 = x_2$	$f[z_4] = f(x_2)$		$f[z_3, z_4, z_5] = \dfrac{f[z_4, z_5] - f[z_3, z_4]}{z_5 - z_3}$
		$f[z_4, z_5] = f'(x_2)$	
$z_5 = x_2$	$f[z_5] = f(x_2)$		

Ejemplo 2 (II)

- Los valores de las diferencias divididas se calculan de la misma forma y finalmente se construye el polinomio H_{2n+1}.
- El polinomio de orden $2n+1$ es

$$H_{2n+1}(x) = f[z_0] + \sum_{k=1}^{2n+1} f[z_0, \ldots, z_k](x - z_0)(x - z_1)\cdots(x - z_{k-1}).$$

Ejemplo 3 (I)

Use el polinomio de Hermite para aproximar $f(1.5)$ usando polinomios de diferencias divididas, tomando los datos

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	1.3	0.6200860	-0.5220232
1	1.6	0.4554022	-0.5698959
2	1.9	0.2818186	-0.5811571

- Primero hay que construir la tabla

1.3	0.6200860					
		−0.5220232				
1.3	0.6200860		−0.0897427			
		−0.5489460		0.0663657		
1.6	0.4554022		−0.0698330		0.0026663	
		−0.5698959		0.0679655		−0.0027738
1.6	0.4554022		−0.0290537		0.0010020	
		−0.5786120		0.0685667		
1.9	0.2818186		−0.0084837			
		−0.5811571				
1.9	0.2818186					

Ejemplo 3 (II)

- El polinomio de Hermite es

$$
\begin{aligned}
H_5(x) = {} & f[z_0] + f[z_0, z_1](x - z_0) + f[z_0, z_1, z_2](x - z_0)(x - z_1) \\
& + f[z_0, z_1, z_2, z_3](x - z_0)(x - z_1)(x - z_2) \\
& + f[z_0, z_1, z_2, z_3, z_4](x - z_0)(x - z_1)(x - z_2)(x - z_3) \\
& + f[z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5](x - z_0)(x - z_1)(x - z_2)(x - z_3)(x - z_4).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_5(1.5) = {} & 0.6200860 + (-0.5220232)(0.2) + (-0.0897427)(0.2)^2 \\
& + 0.0663657(0.2)^2(-0.1) + 0.0026663(0.2)^2(-0.1)^2 \\
& + (-0.0027738)(0.2)^2(-0.1)^2(-0.4) \\
= {} & 0.5118277.
\end{aligned}
$$

Splines o polinomios trazadores

- En algunos casos, los polinomios de orden $n \gg 1$ pueden oscilar erráticamente.
- Una pequeña fluctuación en un subconjunto del intervalo puede inducir fluctuaciones grandes en el intervalo completo.
- Para resolver este problema se pueden usar polinomios de orden menor en subintervalos del intervalo:
  - La forma más sencilla es usar polinomios lineales, aunque estos no son diferenciables en los extremos del subintervalo.
  - También se pueden hacer polinomios cuadráticos en $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, etc., esto permitiría obtener polinomios derivables en $[x_0, x_n]$.
  - La opción más común es usar un polinomio cúbico, aunque no se asume que las derivadas del polinomio coincidan con las de la función.

Splines lineales o polinomios trazadores lineales

- Para un número n de puntos $(x_n, f(x_n))$, se construyen $n-1$ funciones de la forma

$$S_i(x) = ax + b,$$

con cada par de puntos.

- Con esto se debe construir un polinomio de la forma

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x), & x \in [x_0, x_1) \\ S_1(x), & x \in [x_1, x_2) \\ \vdots & \\ S_{n-2}(x), & x \in [x_{n-2}, x_{n-1}) \\ S_{n-1}(x), & x \in [x_{n-1}, x_n) \end{cases}$$

Splines cuadráticos o polinomios trazadores cuadráticos

- Para un número n de puntos $(x_n, f(x_n))$, se construyen $n-1$ funciones de la forma

$$S_i(x) = ax^2 + bx + c.$$

- Esta construcción tiene la ventaja de que $S(x)$ es continua porque
  - $S_i(x)$ debe ser continua.
  - La derivada en un punto siempre debe coincidir para ambos lados de la función.
- Por el número de parámetros que se usan, se necesita el valor de la derivada en algún punto del intervalo para resolver el sistema de ecuaciones.

Splines cúbicos o polinomios trazadores cúbicos (I)

- Se usa $S_i(x)$ con la forma de un polinomio cúbico, es decir

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3.$$

  con cuatro constantes a_j, b_j, c_j y d_j.
- Esto permite que $S(x)$ sea continuamente diferenciable en el intervalo hasta la segunda derivada.
- Sin embargo, no se debe asumir que las derivadas de $S(x)$ coinciden con las de la función $f(x)$.
- Hay que tomar en cuenta las condiciones de frontera: se pueden hacer polinomios *naturales* (o libres, o free) o polinomios *sujetos* (o clamped).

Splines cúbicos o polinomios trazadores cúbicos (II)

- Dada una función f definida en $[a, b]$ y un conjunto de puntos $\{x_0, \ldots, x_n\}$, el polinomio debe cumplir con estas condiciones
  (a) $S(x)$ es un polinomio cúbico, igual a $S_j(x)$ en el intervalo $[x_j, x_{j+1}]$ para $j = 0, 1, \ldots, n-1$.
  (b) $S_j(x_j) = f(x_j)$, y $S_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1})$.
  (c) $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$.
  (d) $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$.
  (e) $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$.
  (f) Los splines naturales cumplen con $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$, mientras que los splines sujetos cumplen con $S'(x_0) = f'(x_0)$ y con $S'(x_n) = f'(x_n)$.

Construcción de un spline cúbico (I)

- Un spline cúbico para n subintervalos requiere $4n$ constantes.
- Supongamos que tomamos

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3,$$

  para $j = 0, 1, \ldots, n-1$.
- Como $S_j(x_j) = a_j = f(x_j)$, entonces por la condición (c), $a_{j+1} = S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$

$$a_{j+1} = a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 + d_j(x_{j+1} - x_j)^3,$$

  para $j = 0, 1, \ldots, n-2$.
- Si $h_j \equiv x_{j+1} - x_j$, se tiene

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3,$$

  para $j = 0, 1, \ldots, n-2$

Construcción de un spline cúbico (II)

- Ahora, con $b_n = S'(x_n)$ se tiene

$$S_j'(x) = b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2,$$

que implica que $S_j'(x_j) = b_j$ para $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

- Al aplicar la condición (d), $S_{j+1}'(x_{j+1}) = S_j'(x_{j+1})$, se tiene

$$b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2,$$

para $j = 0, 1, \ldots, n-2$.

- Ahora, con $c_n = S''(x_n)/2$ y aplicando la condición (e), $S_{j+1}''(x_{j+1}) = S_j''(x_{j+1})$ tenemos

$$c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j,$$

para $j = 0, 1, \ldots, n-2$.

Construcción de un spline cúbico (III)

- Resolviendo para d_j en la ecuación anterior, se tiene

$$\begin{aligned} a_{j+1} &= a_j + b_j h_j + \frac{h_j^2}{3}(2c_j + c_{j+1}), \\ b_{j+1} &= b_j + h_j(c_j + c_{j+1}), \end{aligned}$$

para $j = 0, 1, \ldots, n-2$.

- La relación final, despejando b_j de la penúltima ecuación y sustituyéndola en la última ecuación genera el sistema de ecuaciones donde solamente se desconocen los c_j

$$\begin{aligned} h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)c_j + h_j c_{j+1} &= \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) \\ &\quad - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}), \end{aligned}$$

para $j = 0, 1, 2, \ldots, n-2$.

Construcción un spline cúbico (III)

- Del sistema de ecuaciones anterior se encuentran los valores de c_j.
- Conociendo los valores de c_j se pueden determinar los valores de b_j y de d_j.
- Conociendo los valores de c_j y b_j se pueden determinar los valores de a_j
- De modo que, cuando se han encontrado los $4n$ parámetros, ya es posible definir $S_j(x)$ en cada subintervalo y esto determina el valor del polinomio $S(x)$ para todo el intervalo.

Ejemplo 1 (I)

Construya un spline cúbico natural que pase por los puntos $(1, 2)$, $(2, 3)$ y $(3, 5)$.

- El spline cúbico es

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x), & x \in [1, 2) \\ S_1(x), & x \in [2, 3) \end{cases}$$

- donde

$$S_0(x) = a_0 + b_0(x-1) + c_0(x-1)^2 + d_0(x-1)^3,$$
$$S_1(x) = a_1 + b_1(x-2) + c_1(x-2)^2 + d_1(x-2)^3.$$

- Es decir, ocho constantes que hay que determinar.

Ejemplo 1 (II)

- Cuatro condiciones aparecen porque los splines deben coincidir con los nodos, entonces

$$
\begin{aligned}
a_0 &= f(1), & f(2) &= a_0 + b_0 + c_0 + d_0,\\
a_1 &= f(2), & f(3) &= a_1 + b_1 + c_1 + d_1.
\end{aligned}
$$

- Otras dos condiciones se obtienen porque $S_0'(2) = S_1'(2)$ y $S_0''(2) = S_1''(2)$, entonces

$$
\begin{aligned}
b_1 &= b_0 + 2c_0 + 3d_0,\\
c_1 &= c_0 + 3d_0.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1 (III)

- Las últimas dos condiciones se obtienen porque el spline es natural, $S_0''(1) = 0$ y $S_0''(3) = 0$, entonces

$$
c_0 = 0, \qquad c_1 + 3d_1 = 0.
$$

- Así que

$$
S(x) = \begin{cases} 2 + \frac{3}{4}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^3, & x \in [1,2)\\ 3 + \frac{3}{2}(x-2) + \frac{3}{4}(x-2)^2 - \frac{1}{4}(x-2)^3, & x \in [2,3) \end{cases}
$$

Ejemplo 2 (I)

Construya un spline cúbico sujeto que pase por los puntos $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,5)$ y que cumple con $S'(1) = 2$ y $S'(3) = 1$.

- El spline cúbico es

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x), & x \in [1,2) \\ S_1(x), & x \in [2,3) \end{cases}$$

- donde

$$S_0(x) = a_0 + b_0(x-1) + c_0(x-1)^2 + d_0(x-1)^3,$$
$$S_1(x) = a_1 + b_1(x-2) + c_1(x-2)^2 + d_1(x-2)^3.$$

- Es decir, ocho constantes que hay que determinar.

Ejemplo 2 (II)

- Cuatro condiciones aparecen porque los splines deben coincidir con los nodos, entonces

$$a_0 = f(1), \qquad f(2) = a_0 + b_0 + c_0 + d_0,$$
$$a_1 = f(2), \qquad f(3) = a_1 + b_1 + c_1 + d_1.$$

- Otras dos condiciones se obtienen porque $S_0'(2) = S_1'(2)$ y $S_0''(2) = S_1''(2)$, entonces

$$b_1 = b_0 + 2c_0 + 3d_0,$$
$$c_1 = c_0 + 3d_0.$$

Ejemplo 2 (III)

- Las últimas dos condiciones se obtienen porque el spline es sujeto, $S_0''(1) = 2$ y $S_0''(3) = 1$, entonces

$$b_0 = 2, \qquad\qquad b_1 + 2c_1 + 3d_1 = 1$$

- Así que

$$S(x) = \begin{cases} 2 + 2(x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{3}{2}(x-1)^3, & x \in [1,2) \\ 3 + \frac{3}{2}(x-2) + 2(x-2)^2 - \frac{3}{2}(x-2)^3, & x \in [2,3) \end{cases}$$

¡Muchas gracias!

Contacto:
Giovanni Ramírez García, PhD
ramirez@ecfm.usac.edu.gt
http://ecfm.usac.edu.gt/ramirez