Asociación de estudiantes de Física y Matemática
LC Guatemala City-IAPS
Examen Pre-eliminatorio PLANCKS PORTO 2021 •

Febrero 2021 Lic. Fisica

Instrucciones: El examen consiste en varios ejercicio de diferentes campos de la física. Tendrán 6 horas para resolver la mayor cantidad posible. Cada ejercicio tendrá una puntuación de 20pts. Están permitidos libros de textos o fuentes electrónicas para auxiliarse. El propósito del examen es destacar a los mejores concursantes y representar al país en una competencia internacional, por lo que avocamos a su honestidad. Deben mandar las respuestas del examen de manera ordenada y legible en formato pdf al correo: estudiantes.ecfm@gmail.com

1. Mecánica Clásica

Partícula Libre

Considere una partícula libre en un plano. Con coordenadas cartesianas, es fácil usar $F = ma$ para demostrar que la partícula se mueve en una linea recta. El objetivo de este problema es demostrar este resultado de una forma incómoda, usando coordenadas polares, su fuerza radial $F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$ y su fuerza tangencial $F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$.

a) Demuestre que $\cos\theta = r_0/r$ para una partícula libre, donde r_0 es el radio del acercamiento más cercano al origen, y θ está medido con respecto a su radio.

2. Mecánica Cuántica

Tema del problema

Un electrón se mueve libremente dentro de una caja de potencial infinito unidimensional con paredes en $x = 0$ y $x = a$. Si el electrón se encuentra inicialmente en el estado fundamental $(n = 1)$ y si repentinamente se cuadruplica el tamaño de la caja (es decir el lado derecho de la caja se mueve instantáneamente a $x = 4a$. Calcule la probabilidad de encontrar el electrón en:

a) El estado fundamental de la nueva caja

b) El primer estado excitado de la nueva caja.

3. Mecánica Estadística

El color del sol en un mundo bidimensional

Comparado con las aproximadamente mil millones de estrellas del universo, el Sol pasa desapercibido. Sin embargo, para la Tierra y otros planetas de alrededor, el Sol es un poderoso centro de atención: su luz da vida, calor y mantiene unido el sistema solar.
Consideremos ahora una geometría diferente,

a) ¿Cuál sería el color del Sol si nuestro mundo fuera bidimensional? Suponga que la temperatura de la superficie del Sol no cambiaría.

b) ¿Que tipo de distribución siguen los fotones?, de la densidad espectral de tal distribución.

Hint: Para este problema considere un gas de fotones en una cavidad cuadrada de lado L.

---

4. Relatividad Especial
Un Positrón en un Campo Eléctrico

Un positrón de masa m, carga e y velocidad inicial (i.e. en el momento $t = 0$) $\vec{u_0} = u_0\vec{e_y}$ es introducido en un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = E_0\vec{e_x}$, i.e. en ángulos rectos con las líneas de campo eléctrico. Estudiaremos el movimiento contra-intituivo a velocidades relativistas y la trayectoria curva de un positrón acelerado. Algunas fórmulas útiles pueden ser encontradas más adelante.

a) Muestre que el factor de Lorentz relativista del positrón acelerado está dado por

$$\gamma(t) = \sqrt{1 + \frac{(eE_o t)^2 + {p_o}^2}{m^2c^2}}$$

donde $p_0 = mu_0/\sqrt{1 - {u_0}^2/c^2}$ es el momentum inicial del positrón y c es la velocidad de la luz.

b) Derive las expresiones para las velocidades del positrón $u_x(t)$ y $u_y(t)$ como funciones del tiempo en la dirección x y dirección y respectivamente.

c) Haga una sola gráfica donde ambas $u_x(t)/u_0$ y $u_y(t)/u_0$ se muestren como funciones del tiempo. Exprese el tiempo sobre el eje horizontal en unidades de $E_0 t/\sqrt{{p_0}^2 + m^2c^2}$

d) Discuta y explique el comportamiento inicial y el asintótico de $u_x(t)$ y, en particular $u_y(t)$, ya que este muestra un sorprendente comportamiento no-Newtoniano: la partícula está aparentemente desacelerando en una dirección en donde no hay fuerza.

Uno de los grandes problemas en la física de aceleración de partículas es cómo lidiar con las repulsiones de Coulomb entre partículas en un haz. Para obtener un número suficiente de eventos en colisionadores, por ejemplo, cientos de millones de partículas cargadas necesitan ser empaquetadas en un gupo compacto. Para el planificado ILC, el sucesor del LHC, los positrones colisionarán con electrones a una energía cinética de $0{,}5 TeV$. Ahora estudiaremos como repulsiones de Coulomb mutuas entre dos positrones viajando lado a lado en un haz lleva a la dispersión.

Consideremos el problema en el sistema inercial, en donde el electrón 1 está inicialmente $(t = 0)$ en la posición $x_1(t = 0) = x_0$ y el electrón 2 en la posición $x_2(t = 0) = -x_0$. Ambos están inicialmente en reposo: $\dot{x}_1(t = 0) = \dot{x}_2(t = 0) = 0$. Asumimos que las velocidades que los electrones alcanzan en el sistema del centro de masa son mucho más pequeñas que la velocidad de la luz c, así que un desarrollo no-relativista está permitido.

e) Muestre que el tiempo t que le toma al electrón inicialmente en la posición x_0 para alcanzar la posición x está dado por

$$\frac{t}{t_o} = \sqrt{\left(\frac{x}{x_0} - 1\right)\frac{x}{x_0}} + \log\left(\sqrt{\frac{x}{x_0} - 1} + \sqrt{\frac{x}{x_0}}\right)$$

con $t_0 = \sqrt{8\pi\epsilon_0 m {x_0}^3/e^2}$. Hint: use conversiones de la energía potencial a energía cinética

Fórmulas

Ecuacion relativista de movimiento: $\vec{F} = \vec{p} = \gamma m\vec{u}$, con $\vec{F}$ la fuerza aplicada y $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2} = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ el factor relativista de Lorentz. La energía total de la partícula está dada por $E = \gamma mc^2 = mc^2 + E_{kin}$, con mc^2 la energía en reposo de la partícula y $E_{kin} = (\gamma - 1)mc^2$ la enegía cinética adquirida por su aceleración.

---

5. Física de Partículas

Dispersión del Potencial de Yukawa

Las partículas subatómicas son estudiadas a través de procesos de dispersión. Aquí veremos uno de esos procesos de dispersión, que obtiene su nombre por el potencial de Yukawa, que ha sido utilizado como una descripción eficiente del intercambio de partículas masivas como los piones. Las secciones eficaces totales y diferenciables son observables calculables de gran importancia, que caracterizan la probabilidad de dispersión.

El potencial de Yukawa es

$$V(r) = V_0 \frac{e^{-\mu r}}{\mu r}$$

donde V_0 es un factor de normalización que mide la interacción fuerte y μ es la masa de la partícula portadora de la fuerza. Debido a la exponencial, el potencial de Yukawa tiene un rango finito de tamaño típico $R \simeq 1/\mu$. Restringiendo el enfoque a la dispersión elástica de una onda plana, una forma para encontrar la sección eficaz de este potencial es utilizando la aproximación de Born. En la aproximación de Born se asume que la onda incidente no es afectada substancialmente por el potencial. En términos del vector de onda del plano incidente $\mathbf{k}$ y el vector de onda del plano emergente $\mathbf{k}'$, la amplitud de Born de primer orden está dada por

$$f^{(1)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = -\frac{1}{4\pi}\frac{2m}{\hbar^2}\int d^3\mathbf{x}' e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}'} V(\mathbf{x}')$$

que corresponde físicamente a una única dispersión en el punto $\mathbf{x}'$. Este simple proceso sostiene la mayor contribución a la amplitud de dispersión, lo que significa que para una buena aproximación $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \simeq f^{(1)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$. Como dicta la mecánica cuántica, la probabilidad de dispersión está dada por el cuadrado del módulo de la amplitud

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')|^2$$

a) Demuestre que en este caso la sección eficaz diferencial está dada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \simeq \left(\frac{2mV_0}{\mu\hbar^2}\right)^2 \frac{1}{(2k^2(1-\cos\theta) + \mu^2)^2}$$

donde θ denota el ángulo entre los vectores $\mathbf{k}$ y $\mathbf{k}'$.

b) Una sección eficaz diferencial de parecido clásico está dada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \simeq \left(\frac{mZZ'e^2}{|p|^2}\right)^2 \frac{1}{(1-\cos\theta)^2}$$

Encuentre el potencial correspondiente.
