ASOCIACIÓN DE ESTUDIANTES DE FÍSICA Y MATEMÁTICA
LC GUATEMALA CITY-IAPS
EXAMEN PRE-ELIMINATORIO PLANCKS MUNICH 2022 •

Febrero 2022 Lic. Fisica

Instrucciones: El examen consiste en varios ejercicio de diferentes campos de la física. Tendrán 6 horas para resolver la mayor cantidad posible. Cada ejercicio tendrá una puntuación de 20pts. Están permitidos libros de textos o fuentes electrónicas para auxiliarse. El propósito del examen es destacar a los mejores concursantes y representar al país en una competencia internacional, por lo que avocamos a su honestidad. Deben mandar las respuestas del examen de manera ordenada y legible en formato pdf al correo: estudiantes.ecfm@gmail.com

1. Mecánica Clásica

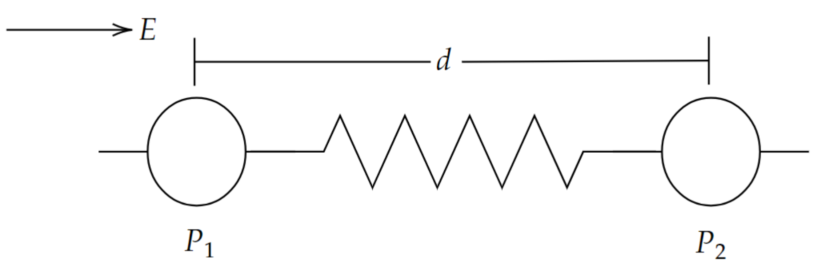
Partícula Libre

Dos partículas unidas por un resorte ideal con constante elástica k, y longitud de equilibrio cero. Cada partícula tiene masa m y carga q. Se aplica un campo eléctrico $\vec{E} = E_0\vec{e}_x$. Para este problema considere la Fuerza de Coulomb entre las partículas, e ignore cualquier interacción magnética, relativista entre otras. Asuma que las partículas no chocan entre ellas.

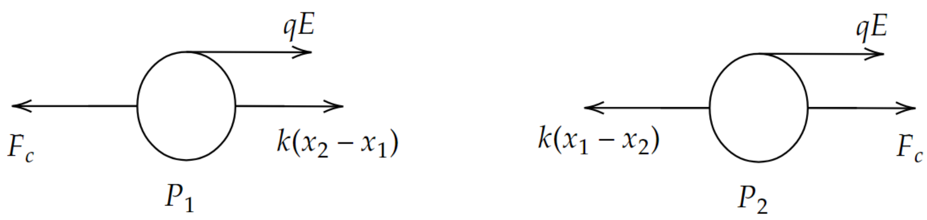
a) Si las partículas se deslizan a través de un alambre recto sin fricción paralelo al *eje x*, y la distancia entre las partículas d es constante. Encuentre el valor de d.

Solución

Consideremos el sistema de la siguiente figura.



Es posible obtener el siguiente análisis



A partir de este análisis, es posible obtener las siguientes ecuaciones de movimiento

$$m\ddot{x}_1 = qE + k(x_2 - x_1) - F_c \tag{1}$$
$$m\ddot{x}_2 = qE + k(x_1 - x_2) + F_c \tag{2}$$

Notese que $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2$ ya que d es constante. Restando (2) de (1) tenemos

$$m\ddot{x}_1 - m\ddot{x}_2 = qE - qE + k(x_2 - x_1) - k(x_1 - x_2) - F_c - F_c$$
$$\cancel{m\ddot{x}_1 - m\ddot{x}_2} = \cancel{qE - qE} + k(x_2 - x_1) - \underbrace{k(x_1 - x_2)}_{-k(x_2 - x_1)} - F_c - F_c$$
$$0 = k(x_2 - x_1) + k(x_2 - x_1) - 2F_c$$
$$0 = 2k(x_2 - x_1) - 2F_c$$

Sustituyendo la fuerza de Coulomb y despejando.

$$2k(x_2 - x_1) = 2\left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(x_2 - x_1)^2}\right)$$
$$(x_2 - x_1)^3 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 k}$$

Tomando la sustitución $(x_2 - x_1) = d$

$$d = \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 k}\right)^{\frac{1}{3}}$$

b) Encuentre la aceleración del centro de masa del inciso anterior.

Solución

Sumando (1) a (2) tenemos

$$m\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 = qE + qE + k(x_2 - x_1) + k(x_1 - x_2) - F_c + F_c$$
$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = 2qE + k(x_2 - x_1) + \underbrace{k(x_1 - x_2)}_{-k(x_2 - x_1)} \cancel{-F_c + F_c}$$
$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = 2qE + k(x_2 - x_1) - k(x_2 - x_1)$$
$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = 2qE + \cancel{k(x_2 - x_1) - k(x_2 - x_1)}$$
$$\frac{(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2)}{2} = \frac{qE}{m}$$

Calculando el la aceleración de centro de masa

$$C_m = \frac{x_1 m + x_2 m}{2m}$$
$$C_m = \frac{\cancel{m}(x_1 + x_2)}{2\cancel{m}}$$
$$\ddot{C}_m = \frac{(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2)}{2}$$

Sustituyendo

$$\ddot{C}_m = \frac{qE}{m}$$

c) Suponga que en el inciso a) la distancia $d(t)$ sufre pequeñas oscilaciones alrededor del valor de equilibrio encontrado ¿Cual es la frecuencia?

Solución

Restando (1) de (2)

$$m(\ddot{x_2} - \ddot{x_1}) = qE - qE + k(x_1 - x_2) - k(x_2 - x_1) + F_c + F_c$$
$$m(\ddot{x_2} - \ddot{x_1}) = -2k(x_2 - x_1) + 2F_c \tag{3}$$

Por hipótesis el sistema oscila alrededor de d, por lo tanto $x_2 - x_1 = d + \Delta d$.

$$x_2 - x_1 = d + \Delta d \tag{4}$$
$$\frac{d^2}{dt^2}[x_2 - x_1] = \ddot{x_2} - \ddot{x_1} = \Delta \ddot{d}$$
$$\ddot{x_2} - \ddot{x_1} = \Delta \ddot{d} \tag{5}$$

Sustituyendo (4) y (5) en (3).

$$m(\Delta \ddot{d}) - 2k(d + \Delta d) = \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0(d + \Delta d)^2}$$

Del inciso a) tenemos la siguiente relación $2kd^3 = q^2/2\pi\epsilon_0$, Sustituyendo en la ecuación anterior

$$m(\Delta \ddot{d}) - 2k(d + \Delta d) - 2kd^3(d + \Delta d)^{-2} = 0 \tag{6}$$

Considerando que $\Delta d\acute{} d$, expandimos en series

$$(d + \Delta d)^{-2} = d^{-2}\left(1 + \frac{\Delta d}{d}\right)^{-2}$$
$$(d + \Delta d)^{-2} = d^{-2}\left(1 - 2\frac{\Delta d}{d} + 3\cancel{\left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2} + \dots\right)^{-2}$$

Sustituyendo la expansión en (6).

$$m(\Delta \ddot{d}) + 2k(d + \Delta d) - \frac{2kd^3}{d^2}\left(1 - \frac{2\Delta d}{d}\right) = 0$$
$$m(\Delta \ddot{d}) + 2kd + 2k\Delta d - 2kd + 4k\Delta d = 0$$
$$m(\Delta \ddot{d}) + 6k\Delta d = 0$$

Esta es la ecuación del oscilador armónico, cuya frecuencia es:

$$\omega = \sqrt{\frac{6k}{m}}$$

---

2. Termodinámica

Ley de Stefan-Boltzmann

Considere dos placas paralelas en el vacío. Dichas placas están separadas por una distancia "d" muy pequeña respecto a lo largo de las mismas. Además, estas son opacas a la radiación y tienen una temperatura T_1 y T_2 respectivamente ($T_1 > T_2$).

a) Si las placas tienen una potencia de emisión ε_1 y ε_2, demuestre que la energía neta W, transferida por unidad de área por segundo es:

$$W = (E_1 - E_2)\left(\frac{E_1}{\varepsilon_1} + \frac{E_2}{\varepsilon_2} - 1\right)^{-1}$$

donde E_1 y E_2 es la potencia irradiada de un cuerpo negro a temperatura T_1 y T_2.

b) Considerando que ambas placas se comportan como cuerpo negro, ¿Cuál es el valor de W si $T_1 = 300\ K$ y $T_2 = 4{,}2\ K$?

Solución

Inciso a)

Sea f_1 y f_2 la potencia de emisión total. Considerando que es la radiación térmica más la reflección de las dos placas, tenemos la siguientes expresiones:

$$f_1 = \varepsilon_1 + \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{E_1}\right) f_2 \qquad\qquad f_2 = \varepsilon_2 + \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{E_2}\right) f_1$$

al sustituir f_2 en f_1 tenemos:

$$f_1 = \varepsilon_1 + \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{E_1}\right)\left(\varepsilon_2 + \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{E_2}\right) f_1\right)$$

$$f_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + f_1 - \frac{\varepsilon_2}{E_2} f_1 - \frac{\varepsilon_1}{E_1}\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1}{E_1} f_1 + \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{E_1E_2} f_1$$

$$\left(\frac{\varepsilon_2}{E_2} + \frac{\varepsilon_1}{E_1} - \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{E_1E_2}\right) f_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{E_1}$$

$$(\varepsilon_2E_1 + \varepsilon_1E_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2)\, f_1 = \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{E_1}\right) E_1E_2$$

$$\left(\frac{E_1}{\varepsilon_1} + \frac{E_2}{\varepsilon_2} - 1\right) f_1 = \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{E_1}\right)\frac{E_1E_2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}$$

$$\therefore \quad f_1 = \left(\frac{E_1E_2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - E_2\right)\left(\frac{E_1}{\varepsilon_1} + \frac{E_2}{\varepsilon_2} - 1\right)^{-1}$$

De forma similar, se resuelve sustituyendo en f_1 en f_2, por lo que tenemos que:

$$f_2 = \left(\frac{E_1E_2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - E_1\right)\left(\frac{E_1}{\varepsilon_1} + \frac{E_2}{\varepsilon_2} - 1\right)^{-1}$$

Por lo que se obtiene que:

$$\boxed{\mathrm{W{=}f_1} - f_2 = (E_1 - E_2)\left(\frac{E_1}{\varepsilon_1} + \frac{E_2}{\varepsilon_2} - 1\right)^{-1}}$$

Inciso b)

Para un cuerpo negro, por la ley de Stefan-Boltzmann tenemos que $E_a = \sigma T_a^4$ por lo que W es:

$$W = E_1 - E_2 = \sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right) = (5{,}67 * 10^{-8})(300^4 - 4{,}2^4)$$

$$\boxed{\mathrm{W{=}459.27\ W/m^2}}$$

3. Mecánica Cuántica

Partícula en un campo magnético

Un electrón se encuentra en reposo en un campo magnético oscilante

$$\boldsymbol{B} = B_0 \cos{(\omega t)}\hat{\boldsymbol{k}}$$

donde B_0 y ω son constantes.

a) Construya la matriz Hamiltoniana para este sistema.

b) El electrón comienza (en $t = 0$) con spin hacia arriba respecto al eje x; es decir:

$$\chi(0) = \chi_+^{(x)} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Determine $\chi(t)$ en cualquier instante de tiempo después.

c) Encuentre la probabilidad de obtener $-\hbar/2$, si se mide S_x.

d) ¿Cuál es el campo (B_0) mínimo requerido para lograr una vuelta completa en S_x?

Solución:

a) El Hamiltoniano para una partícula cargada y con spin es:

$$H = -\gamma \boldsymbol{B}.\boldsymbol{S},$$

donde γ es la relación giromagnética.
De este modo, ya que solo se tiene componente en dirección $\hat{k}$

$$H = -\gamma B_z S_z = -\gamma B_0 \cos{(\omega t)} S_z = -\frac{\gamma B_0 \hbar \cos{(\omega t)}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Respuesta inciso a)

$$H = -\frac{\gamma B_0 \hbar \cos{(\omega t)}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) En cualquier instante t, $\chi(t)$ tendrá la siguiente forma

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Utilizando la ecuación de Schrödinger,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\chi = \hat{H}\chi \qquad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = -\frac{\gamma B_0 \hbar \cos{(\omega t)}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = -\frac{\gamma B_0 \hbar \cos{(\omega t)}}{2}\begin{pmatrix} a(t) \\ -b(t) \end{pmatrix}.$$

Separando por componentes,

$$i\dot{a} = -\frac{\gamma B_0 \cos{(\omega t)}}{2} a \qquad i\dot{b} = \frac{\gamma B_0 \cos{(\omega t)}}{2} b.$$

Integrando

$$\int_{a_0}^{a} \frac{da'}{a'} = \frac{i\gamma B_0}{2}\int_{t=0}^{t} \cos{(\omega t')}dt' \qquad \int_{b_0}^{b} \frac{db'}{b'} = -\frac{i\gamma B_0}{2}\int_{t=0}^{t} \cos{(\omega t')}dt'$$

. Pero en $t = 0$

$$\chi(0) = \chi_+^{(x)} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

, entonces al resolver la integral se tiene lo siguiente

$$\ln{(a')}\Big|_{1/\sqrt{2}}^{a} = \frac{i\gamma B_0}{2\omega} \operatorname{sen}{(\omega t')}\Big|_0^t \qquad \ln{(b')}\Big|_{1/\sqrt{2}}^{b} = -\frac{i\gamma B_0}{2\omega} \operatorname{sen}{(\omega t')}\Big|_0^t$$

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{i\gamma B_0}{2\omega} \text{sen}\,(\omega t)} \qquad b(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i\gamma B_0}{2\omega} \text{sen}\,(\omega t)}$$

Por lo tanto,

Respuesta inciso b)

$$\chi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{\frac{i\gamma B_0}{2\omega} \text{sen}\,(\omega t)} \\ e^{-\frac{i\gamma B_0}{2\omega} \text{sen}\,(\omega t)} \end{pmatrix}.$$

c) Considerar a S_x

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyos autovectores y autovalores son

$$\chi_+^{(x)} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{con eigenvalor } \frac{\hbar}{2}, \qquad \chi_-^{(x)} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{con eigenvalor } -\frac{\hbar}{2}.$$

Si se reescribe a $\chi(t)$ como combinación lineal de los autovectores de S_x se tiene

$$\chi(t) = \cos\left[\frac{\gamma B_0}{2\omega} \text{sen}\,(\omega t)\right] \chi_+^{(x)} + i\,\text{sen}\left[\frac{\gamma B_0}{2\omega} \text{sen}\,(\omega t)\right] \chi_-^{(x)},$$

luego, para encontrar la probabilidad de obtener $-\frac{\hbar}{2}$ al medir S_x se toma el módulo al cuadrado del coeficiente que acompaña a $\chi_-^{(x)}$

$$P(-\hbar/2) = \text{sen}^2\left[\frac{\gamma B_0}{2\omega} \text{sen}\,(\omega t)\right].$$

Respuesta inciso c)

P(-$\hbar$/2) $= \text{sen}^2\left[\frac{\gamma B_0}{2\omega} \text{sen}\,(\omega t)\right]$.

d) Ya que inicialmente se encuentra en el estado

$$\chi_+^{(x)} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

se busca que la probabilidad de que el electrón se encuentre ahora en el estado

$$\chi_-^{(x)} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

sea 1.

Entonces, del resultado del inciso anterior, para que $P(-\hbar/2)$ sea igual 1; el argumento de $\text{sen}^2\left[\frac{\gamma B_0}{2\omega} \text{sen}\,(\omega t)\right]$ debe ser igual a $\pi/2$

$$\frac{\gamma B_0}{2\omega} \text{sen}\,(\omega t) = \frac{\pi}{2} \qquad B_0 = \frac{\omega \pi}{\gamma\,\text{sen}\,(\omega t)}.$$

Para encontrar el B_0 mínimo, hay que notar que esto se logra cuando $\text{sen}\,(\omega t) = 1$, por lo tanto

$$B_{0\_min} = \frac{\omega \pi}{\gamma}$$

Respuesta inciso d)

$$B_{0\_min} = \frac{\omega\pi}{\gamma}.$$

---

4. Mecánica Estadística

Cristales

Considere un cristal de N átomos (que no interactúan entre si) donde N está en el orden de $N \to 10^{23}$. Estos átomos tienen los números cuánticos $s = \frac{1}{2}$ y $m_s = \pm\frac{1}{2}$. El momento magnético de la i-ésima partícula es

$$\mu_i = g\mu_B s_i$$

donde g es el factor de Landé y $\mu_B = e\hbar/2mc$ es el magnetón de Bohr.
Considere además que el cristal está en equilibrio a la temperatura T y está colocado dentro de un campo magnético externo $\vec{H} = H\hat{z}$

a) Demuestre que la función de partición es:

$$z = (2cosh(\alpha))^N \qquad \alpha = \frac{g\mu_B H}{2\kappa T}$$

b) Encuentre una expresión para la entropía S y evalúe el caso límites cuando $\alpha \ll 1$

Considere el caso de desmagnetización adiabática con el cual, el campo magnético se incrementa desde 0 hasta H_0 mientras la muestra se mantiene a temperatura A. Posteriormente, la muestra se aisla térmicamente y el campo magnético se reduce hasta H_1, donde $H_1 < H_0$.

c) ¿Cuál es la temperatura final del cristal?

d) Encuentre las expresiones para la magnetización M y la suceptibilidad χ que están definidas como:

$$M = \langle \sum_{i=1}^{N} (\mu_i)_z \rangle \qquad \chi = M/H$$

Solución - Modelo de Curie-Weiss

Inciso a)
Considerando que la particula tiene spin $1/2$ y al estar dentro de un campo magnético en la dirección z, solo hay dos posibles eigenestados para que la partícula exista. Además, al no interactuar con las demás partículas, tenemos que la energía está dada como:

$$\vec{E} = -\vec{\mu}\cdot\vec{H} = -g\mu_B\vec{J}\cdot\vec{H} = -g\mu_B JH\hat{z} = -g\mu_B\left(\pm\frac{1}{2}\right)H$$

$$\therefore E = \pm\frac{1}{2}g\mu_B H$$

entonces, la función de partición para una sola partícula es:

$$z = e^{\alpha} + e^{-\alpha} \qquad \text{donde} \qquad \alpha = \frac{g\mu_B H}{2\kappa T}$$

considerando que $cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, entonces podemos reescribir la función de partición total como:.

$$\boxed{\text{Z}=(2cosh(\alpha))^N}$$

Inciso b)
La energía libre de Helmholtz está dada como $F = -\kappa T \cdot ln(Z)$.
La entropía en términos de F está dada como:

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_H$$

por lo que, sustituyendo en ambas ecuaciones tenemos:

$$F = -\kappa T \cdot ln((2cosh(\alpha))^N) = -\kappa TN \cdot ln(2cosh(\alpha))$$

$$\Rightarrow S = \kappa N \left(\frac{\partial}{\partial T}(T \cdot ln(2cosh(\alpha)))\right)_H = \kappa N \left(ln(2cosh(\alpha)) + T \cdot \frac{-\alpha\ tanh(\alpha)}{T}\right)$$

$$\boxed{\therefore\ S = \kappa N\left(ln(2cosh(\alpha)) - \alpha\ tanh(\alpha)\right)}$$

En el límite cuando $\alpha \ll 1$ tenemos que:

$$\lim_{\alpha \ll 1} ln(cosh(\alpha)) \to 0 \qquad \lim_{\alpha \ll 1} tanh(\alpha) \to 0$$

$$\boxed{\therefore S = kn \cdot ln(2)}$$

Inciso c) Durante la desmagnetización adiabática, la entropía del sistema se mantiene constante $S_0 = S_1$, por lo que es fácil notar que:

$$\alpha_1 = \alpha_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\cancel{g\mu_B}H_1}{\cancel{2\kappa}T_1} = \frac{\cancel{g\mu_B}H_0}{\cancel{2\kappa}T_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{H_1}{T_1} = \frac{H_0}{T_0}$$

$$\boxed{\therefore T_1 = \frac{H_1 T_0}{H_0}}$$

Inciso d) Para la magnetización tenemos la expresión:

$$M = -\frac{\partial F}{\partial H} = \kappa T \left(\frac{\partial}{\partial H} ln(z)\right)_T$$

$$M = \frac{Ng\mu_B}{2} tanh\left(\frac{g\mu_B H}{2\kappa T}\right)$$

$$\boxed{\text{M}=\langle \sum_{i=1}^N (\mu_i)_z \rangle = \frac{Ng\mu_B}{2} tanh(\alpha)}$$

$$\boxed{\chi = \frac{Ng\mu_B}{2H} tanh\left(\alpha\right)}$$

5. Electromagnetismo

Suponga que $\phi = 0$ y que $\mathbf{A} = A_0 \operatorname{sen} kx - wt\hat{y}$ con A_0, w,k constantes. Encuentre el campo eléctrico y el campo magnético, y verifique que satisfacen las ecuaciones de Maxwell en el vació. ¿Que condiciones deben imponerse para w y k?

Considerando el campo magnético:

$$B = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} i & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & A_0 \operatorname{sen} kx - wt & 0 \end{vmatrix} \tag{7}$$

$$= \hat{i}[0] - \hat{j} + \hat{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(A_0 \operatorname{sen} kx - wt)\right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}(A_0 \operatorname{sen} kx - wt\right)\hat{k}$$

$$B = \nabla \times A = (A_0 k \cos kx - wt)\hat{k}$$

Y para E:

$$E = -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t} = -A_0 \cos kx - wt(-w)\hat{j}$$

$$E = wA_0 \cos kx - wt\hat{j}$$

$$\boxed{\mathrm{E} = \mathrm{wA}_0 \cos kx - wt\hat{j}}$$

Debemos probar que estos campos con las condiciones dadas satisfacen las ecuaciones de Maxwell en el vació:

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \tag{8}$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \tag{9}$$

$$\nabla \cdot D = \rho \tag{10}$$

$$\nabla \cdot B = 0 \tag{11}$$

Para (1), la ley de Ampere-Maxwell se cumple que en el vació $J = 0$.

$$\nabla \times H = \cancel{J} + \frac{\partial D}{\partial t}$$

Que puede escribirse como:

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla \times B = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\nabla \times B = \begin{vmatrix} i & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_0 k \cos kx - wt \end{vmatrix} = A_0 k^2 \operatorname{sen} kx - wt\hat{j} \tag{12}$$

Entonces:

$$\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = w^2 A_0 \operatorname{sen} kx - wt$$

$$\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times B$$

$$\mu_0 \epsilon_0 A_0 k^2 \operatorname{sen} kx - wt = w^2 A_0 \operatorname{sen} kx - wt$$

$$\mu_0 \epsilon_0 k^2 = w^2$$

Para que se cumpla la ecuación,

$$w = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} k$$

De donde, $w = \frac{k}{c}$, $k = wc$.

Para (2) la ley de Faraday:

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \tag{13}$$

$$B = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} i & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & A_0 \operatorname{sen} kx - wt & 0 \end{vmatrix} \tag{14}$$

$$= \hat{i}[0] - \hat{j} + \hat{k} \left(\frac{\partial}{\partial x} (A_0 \cos kx - wt) \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} (-w A_0 \operatorname{sen} kx - wt \right) \hat{k}$$

Y por tanto,

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$-kw A_0 \operatorname{sen} kx - wt = -A_0 k \operatorname{sen} kx - wtw$$

Por lo que llegamos a una igualdad.
Para (3) la ley de Gauss:

$$\nabla \cdot = \rho$$

$$\nabla \cdot \epsilon . E = 0$$

$$\epsilon_0 \nabla . E = 0$$

$$\epsilon_0 \nabla . E = 0$$

$$\frac{\partial E_i}{\partial x} + \frac{\partial E_j}{\partial y} + \frac{\partial E_k}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (w A_0 \cancel{\cos kx - wt \hat{j}}) = 0$$

$$0 = 0$$

Por lo que llegamos a una igualdad. Y finalmente para (4), Ley de Gauss para el magnetismo:

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial x} + \frac{\partial B_j}{\partial y} + \frac{\partial B_k}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(A_0 k \cos kx - wt) = 0$$

Vemos que:

$$0 = 0$$

Por lo tanto, se cumplen las ecuaciones de Maxwell en el vació. Y las condiciones que debe cumplir w y k son:

$$w = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} k$$

con $w = \frac{k}{c}$ y $k = wc$.