Notas de estudio para Examen Privado
Licenciatura en Física

Diego Sarceño

16 de junio de 2024

Índice general

Parte I

Reducción de Datos

"La estadística es la gramática de la ciencia." - karl Pearson.

Capítulo 1

Incertezas

1.1. Uso y Reporte de Incertezas

$$\boxed{\text{valor medido de } x = x_{\text{mejor}} \pm \delta x.} \tag{1.1}$$

Donde δx siempre es positivo.

Regla para Escribir incertezas

Las incertezas debe, casi siempre, estar aproximadas a la cifra significativa.

Regla para Escribir Respuestas

La última cifra significativa en cualquier resultado debe tener el mismo orden de magnitud (en la misma posición decimal) que la incerteza.

Definición 1.1.1. *La discrepancia esta definida como la diferencia entre 2 valores medidos de la misma cantidad.*

Definición 1.1.2.

$$\textit{incerteza fraccionaria o relativa } = \frac{\delta x}{|x_{mejor}|}.$$

1.2. Propagación de Incertezas

1.2.1. La Regla de Raíz Cuadrada para un Experimento de Conteos

Definición 1.2.1. *Si observamos la ocurrencias de un evento que pasa aleatoriamente peor con un promedio definido, si se tienen ν ocurrencias en un tiempo T, nuestra estimación para el promedio es*

$$(\textit{promedio de número de eventos en el tiempo } T) = \nu \pm \sqrt{\nu}. \tag{1.2}$$

1.2.2. Reglas de Propagación de Error

La sreglas de propagación de error se refiere a uan situación en la cual encontramos varias cantidades $x, \ldots, w$ con incertezas $\delta x, \ldots, \delta w$ y cuando usamos estos valores para calcular q.

Sumas y Restas: $q = x + \cdots + z - (u + \cdots + w)$, entonces

$$\delta q = \sqrt{\delta x^2 + \cdots + \delta z^2 + \delta u^2 + \cdots + \delta w^2}. \tag{1.3}$$

Productos y Cocientes: Si $q = \frac{x \cdots z}{u \cdots w}$,

$$\frac{\delta q}{|q|} = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\delta z}{z}\right)^2 + \left(\frac{\delta u}{u}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\delta w}{w}\right)^2}. \tag{1.4}$$

Incerteza de una Potencia: Si n es un numero exacto $q = x^n$

$$\frac{\delta q}{|q|} = |n| \frac{\delta x}{|x|}. \tag{1.5}$$

Incerteza de una función de una Variable: Si $q = q(x)$ es una función de x

$$\delta x = \left|\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}\right| \delta x. \tag{1.6}$$

o en caso de que q sea muy complicada

$$\delta q = |q(x_{best} + \delta x) - q(x_{best})|. \tag{1.7}$$

Fórmula General de la Propagación de Error: Si $q = q(x, \ldots, z)$ es una función de $x, \ldots, z$, entonces

$$\delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\delta x\right)^2 + \cdots + \frac{\partial q}{\partial z}\delta z)^2}. \tag{1.8}$$

1.3. Análisis Estadístico de Incertezas Aleatorias

1.3.1. Promedio o Media

La Media: El mejor valor estimado para x, es la media (en este caso: aritmética)

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i. \tag{1.9}$$

Desviación Estandar: El promedio de las incertezas de las mediciones individuales

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum (x_i - \bar{x})^2}. \tag{1.10}$$

Anteriormente el denominador se tomaba como N. Además, podemos identificar a σ_x como la incerteza de cualquier medición de x, $\delta x = \sigma_x$, y podemos decir con un 68 % de confianza que cualquier mediciónd e x caerá dentro de σ_x.

Desviación Estandar de la Media: La incerteza de nuestro mejor valor (la media) es:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}. \tag{1.11}$$

Si hay errores sistemáticos apreciables, entonces $\sigma_{\bar{x}}$ da la *componente aleatoria* de la incerteza en nuestra mejor estimación de x

$$\delta x_{ran} = \sigma_{\bar{x}}. \tag{1.12}$$

Si existe una forma para estimar la componente sistematica δx_{sys}, una rasonable (más no rigurosamente justificada) expresión para la incerteza total es la suma de los cuadrados entre ambas incertezas

$$\delta x_{tot} = \sqrt{\delta x_{ran}^2 + \delta x_{sys}^2}. \tag{1.13}$$

Capítulo 2

La Distribución Normal

2.1. Distribución Límite

Si $f(x)$ es la distribución límite de una variable continua x, entonces

$$f(x)\,\mathrm{d}x = \text{ probabilidad que cualesquiera de las mediciones caerá enre } x \text{ y } x+\mathrm{d}x\,.$$

y

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \text{ probabilidad de que cualesquiera de las mediciones caiga entre } a \text{ y } b.$$

La condición de normalización es

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1, \tag{2.1}$$

mientras que la media o valor esperado es

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{2.2}$$

2.2. Distribución Normal (o de Gauss)

Si las mediciones de x estan sujetos a muchos pero pequeños errores aleatorios pero no sistemáticos, su distribución límite sera la *distribución normal*:

$$G_{X,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-X)^2/2\sigma^2}, \tag{2.3}$$

donde X es el valor real d x, centro de la distribución y el valor medio después muchas mediciones. Y, σ es el parámetro de ancho de la distribución y la desviación estándar luego de muchas mediciones.

La probabilidad de una única medición de caer entre t desviaciones estándar de X es

$$P(x \leq |t\sigma|) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{t} e^{-z^2/2}\,\mathrm{d}z\,. \tag{2.4}$$

Esta integral es normalmente llamada la función de error. Su valor como una función de t es mostrado en tablas. En partícular, para $t = 1$ la probabilidad es de $68\,\%$.

Un valor aceptado de x sera aquel que caiga a cierta cantidad de desviaciones estandar del centro de la distribución, es decir, con cierto porcentaje mayor a un umbral previamente designado.

Capítulo 3

Rechazo de Datos y la Media Ponderada

3.1. Criterio de Chauvenet

Si se realizan N mediciones $x_1, \ldots, x_N$ de una única cantidad x, y si una de estas mediciones (x_{sus}) es sospechosamente diferente de las otras, el criterio de Chauvenet da una prueba para decidir si se acepta o no este dato sospechoso. Teniendo la desviación estándar y le media de las mediciones, encontraremos el número de desviaciones estándar por las cuales x_{sus} difiere $\bar{x}$,

$$t_{sus} = \frac{|x_{sus} - \bar{x}|}{\sigma_x} \tag{3.1}$$

Luego encontramos la probabilidad (asumiendo que los valores están normalmente distribuidos alrededor de $\bar{x}$ con ancho σ_x) de encontar este resultado tan desviado como x_{sus}, y el número de mediciones esperadas para desviarse esta cantidad es $n = N \times P(\text{fuera } t_{sus}\sigma)$. Si $n < \frac{1}{2}$, entonces de acuerdo al criterio de Chauvenet puedes rechazar el valor de x_{sus}. Dado que existen muchas objeciones al criterio de Chauvenet (especialmente cuando N no es muy grande), esto solo debería ser utilizado como último recurso. Además, esto se pierde DS: se va al carajo si dos o más valores son sospechosos.

3.2. Media Ponderada

Si $x_1, \ldots, x_N$ son mediciones de una cantidad x, con incertezas conocidas $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$, entonces el valor mejor estimado al valor real de x es la media ponderada

$$x_{wav} = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}, \tag{3.2}$$

donde als sumas son sobre todas las mediciones y los pesos son los reciprocos cuadrados de las incertezas correspondientes

$$w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}. \tag{3.3}$$

La incerteza de x_{wav} es

$$\sigma_{wav} = \frac{1}{\sqrt{\sum w_i}}. \tag{3.4}$$

Capítulo 4

Distribución Binomial y de Poisson

4.1. La Distribución Binomial

Conseideraremos un experimento con varios posibles resultados y designamos los resultado (o resultados) particular en el que estamos interesados como un "éxito". Si la probabilidad de éxito en cualquier ensayo es p, entonces la probabilidad de ν éxitos en n ensayos viene dada por la distribución binomial:

$$P(\nu \text{ éxitos en } n \text{ intentos}) = \binom{n}{\nu} p^{\nu}(1-p)^{n-\nu}, \tag{4.1}$$

Si repetimos el conjunto completo de n ensayos muchas veces, esperamos que el número medio de éxitos es

$$\bar{\nu} = np \tag{4.2}$$

y su desviación estándar es

$$\sigma_{\nu} = \sqrt{np(1-p)}. \tag{4.3}$$

4.1.1. Aproximación Gaussiana a la Distribución Binomial

Cuando n es grande, la distribución binomial $B_{n,p}(\nu)$ esta bien aproximada por la función de Gauss con la misma media y desviación estándar, esto es

$$B_{n,p}(\nu) \approx G_{X,\sigma}(\nu). \tag{4.4}$$

4.2. Distribución de Poisson

La distribución de Poisson describe experimentos en los cuales se cuentan eventos que ocurren aleatoriamente pero a una tasa promedio definida. SI se cuentan durante un intervalo T, la probabilidad de observar ν eventos es dada por la función de Poisson

$$P_{\mu}(\nu) = e^{-\mu}\frac{\mu^{\nu}}{\nu!}, \tag{4.5}$$

donde el parámetro μ es el numero promedio esperado de eventos en el tiempo T: $\bar{\nu} = \mu$. Su desviación estándar es $\sigma_{\nu} = \sqrt{\mu}$.

4.2.1. Aproximación Gaussiana a la Distribución de Poisson

Cuando μ es grande, la distribución de Poisson se aproxima bien a una función Gaussiana con la misma media y desviación estandar:

$$P_{\mu}(\nu) \approx G_{X,\sigma}(\nu). \tag{4.6}$$

Capítulo 5

Prueba Ji Cuadrado y Mínimos Cuadrados

5.1. Mínimos Cuadrados

Se considerarán N pares de mediciones $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$ de dos variables. El problema recae en encontrar los mejores valores de los parámetros de la curva que una gráfica y vs x se espera que ajuste.

5.1.1. Una Línea Recta; Ponderaciones Iguales

Si y se espera que caiga en una línea recta $y = A + Bx$, si las medidas de y tienen todas la misma incerteza, las mejores aproximaciones para las constantes son

$$A = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{\Delta} \tag{5.1}$$

y

$$B = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{\Delta}, \tag{5.2}$$

donde Δ es

$$\Delta = N \sum x^2 - \left(\sum x\right)^2. \tag{5.3}$$

Basados en las observaciones, la mejor estimación para las incertezas son

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^{N} (y_i - A - Bx_i)^2}, \tag{5.4}$$

$$\sigma_A = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x^2}{\Delta}}, \tag{5.5}$$

$$\sigma_B = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}}. \tag{5.6}$$

5.1.2. Línea Recta por el Origen; Ponderaciones Iguales

Si y se espera que caiga en una línea recta que atraviese el origen $y = Bx$, si las mediciones de y todas tienen la misma incerteza, la mejor estimación para las constantes es

$$B = \frac{\sum xy}{\sum x^2}. \tag{5.7}$$

Basados en las observaciones, las incertezas son

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum (y_i - Bx_i)^2}, \tag{5.8}$$

$$\sigma_B = \frac{\sigma_y}{\sqrt{\sum x^2}}. \tag{5.9}$$

5.1.3. Ajuste Ponderado para una Línea Recta

Si y se espera que sea una línea recta, y los valores medidos de y tienen diferentes y conocidas incertezas σ_i, introducimos las ponderaciones $w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$, las mejores estimaciones de las constantes son

$$A = \frac{\sum wx^2 \sum wy - \sum wx \sum wxy}{\Delta}, \tag{5.10}$$

$$B = \frac{\sum w \sum wxy - \sum wx \sum wy}{\Delta}, \tag{5.11}$$

$$\Delta = \sum w \sum wx^2 - (wx)^2. \tag{5.12}$$

Cuyas incertezas son

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\sum wx^2}{\Delta}}, \tag{5.13}$$

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{\sum w}{\Delta}}. \tag{5.14}$$

5.1.4. Otras Curvas

Si y se supone como un polinomio $y = A + Bx + \cdots + Hx^n$, entonces existe un método análogo, pero las ecuaciones son bastante engorrosas. También curvas de la forma $y = Af(x) + \cdots + Hk(x)$, donde las funciones son conocidas, existe un método análogo también. Otra forma es linearizar el problema; por ejemplo, para una función exponencial, su ”linearización” es $z = \ln y = \ln A + Bx$.

Bibliografía

[1] Stephen J Blundell and Katherine M Blundell. *Concepts in thermal physics*. Oup Oxford, 2010.

[2] Profesor Denis Boyer. Statistical physics, 2021.

[3] Enrico Fermi. *Thermodynamics*. Courier Corporation, 2012.

[4] David J Griffiths. *Introduction to electrodynamics*. Cambridge University Press, 2023.

[5] Jerry B Marion. *Classical dynamics of particles and systems*. Academic Press, 2013.

[6] EJ Moulton. H. goldstein, classical mechanics. 1952.

[7] John R Reitz et al. *Fundamentos de la teoría electromagnética*. Biblioteca Hernán Malo González, 1996.

[8] Profesor PhD. Rodrigo Sacahui. Electromagnetismo 1, 2021.

[9] Jun John Sakurai and Jim Napolitano. *Modern quantum mechanics*. Cambridge University Press, 2020.

[10] Profesor Ing. Rodolfo Samayoa. Mecánica cuántica, 2022.

[11] Profesor Ing. Rodolfo Samayoa. Mecánica estadística, 2022.

[12] John Robert Taylor and John R Taylor. *Classical mechanics*, volume 1. Springer, 2005.

[13] Profesor David Tong. Classical mechanics, 2004-05.

[14] Profesor David Tong. Dynamics and relativity, 2013.

[15] Profesor David Tong. Statistical physics, 2013.

[16] Profesor David Tong. Electromagnetism, 2015.

[17] Nouredine Zettili. Quantum mechanics: concepts and applications. 2009.