Asociación de Guatemalteca de Ciencias Puras
Programa GAUSS
NC Guatemala-IAPS
Examen Pre-eliminatorio PLANCKS Milán 2023

Febrero 2023 Lic. Fisica

Instrucciones: El examen consiste de 5 problemas de diferentes campos de la física. Tendrán 5 horas para resolver la mayor cantidad posible. Cada ejercicio tendrá una puntuación de 20pts. El propósito del examen es destacar a los mejores equipos y representar al país en una competencia internacional, por lo que avocamos a su honestidad.

1. Mecánica Clásica
   Péndulo sujeto a una circunferencia

En la figura 3 se muestra un péndulo de longitud l con una masa puntual m que se mueve en un plano. Obtenga las ecuaciones Hamiltonianas de movimiento para el péndulo plano cuyo radio de suspensión rota uniformemente en la circunferencia de un círculo vertical de radio a.

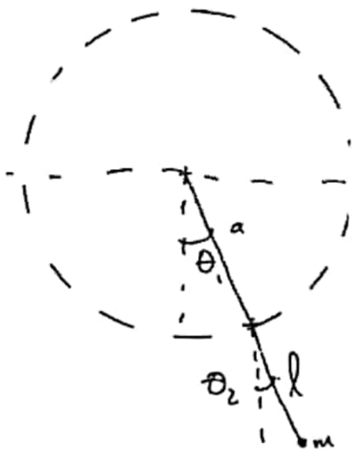


Figura 1

2. Electromagnetismo
   Nanopartícula cilíndrica

Los plasmas constituyen uno de los cuatro estados de la materia. Si nos vamos a las escalas más pequeñas, los electrones de conducción en los metales constituyen un plasma al ser un gas de partículas cargadas que pueden responder de manera colectiva a campos electromagnéticos, en particular, a la radiación a frecuencias ópticas donde las cargas responden principalmente al campo eléctrico incidente.

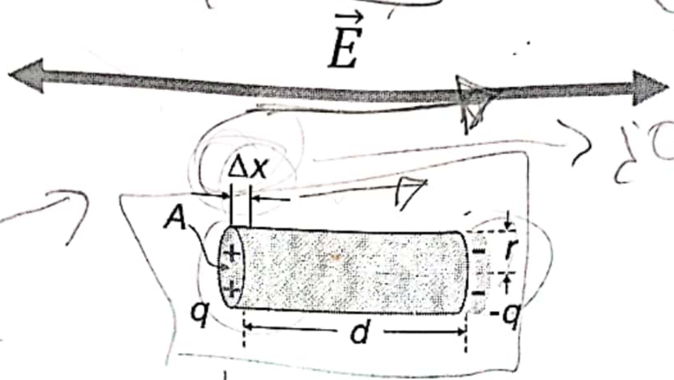
Si diseñamos una nanopartícula metálica apropiadamente, funcionará como una nanoantena para radiación visible, la cual se puede utilizar para mejorar el acoplo de la luz con emisores cuánticos, como nanofuentes de calor (por absorción de la energía) o como biosensores entre otras aplicaciones.

Considere una nanopartícula cilíndrica de oro de $40nm$ de diámetro y $60nm$ de longitud que se ilumina con luz blanca. Ignoren efectos de disipación o retardo, y consideren la condición inicial que muestra la figura en cuanto a la reconfiguración de las cargas cuando éstas interactúan con el campo eléctrico incidente.

a) Presente una expresión simplificada para la **longitud de onda** resonante si consideramos que la luz incidente tiene la polarización indicada en la figura, y comente cómo depende ésta de la razón de aspecto R de la partícula, la cual se define como $R = d/2r$, donde d corresponde a la longitud y r al radio de la cara transversal.

b) ¿A qué longitud de onda exhibirá una resonancia dicha partícula?

¿Cual?



¿Qué?

Figura 2

3. Mecánica Cuántica

Entropía de entrelazamiento de dos fermiones

Considere un sistema de dos fermiones, ambos con spin-$\frac{1}{2}$ y cada uno puede ocupar cualquiera de los dos sitios etiquetados como $i = 1, 2$. La dinámica viene descrita por el Hamiltoniano de Hubbard,

$$H = -t \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \left(c^{\dagger}_{1\sigma} c_{2\sigma} + c^{\dagger}_{2\sigma} c_{1\sigma} \right) + U \sum_{i} n_{i\uparrow} n_{i\downarrow}. \tag{1}$$

Aquí σ etiqueta los dos valores posibles de spin que tienen nuestros fermiones. Donde c y $c^{\dagger}$ son los operadores de aniquilación y creación fermiónicos. Los mismos siguen el álgebra,

$$\left\{ c_{i\sigma}, c^{\dagger}_{j\sigma'} \right\} = \delta_{i,j}\delta_{\sigma,\sigma'}, \tag{2}$$

y por último $n_{i\sigma} \equiv c^{\dagger}_{i\sigma} c_{i\sigma}$ es el operador de número que nos dice la cantidad de spins en el sitio-i con spin-σ. El primer término del Hamiltoniano permite que los fermiones brinquen de un sitio a otro, el segundo juega el rol de un potencial que penaliza ($U > 0$) que dos fermiones estén en el mismo sitio.

(a) Escriba una regla de selección que nos permita restringir los estados $|\psi\rangle$ al sector donde únicamente tenemos 2 partículas.

(b) Determine una base válida de estados para nuestro sistema de 2 fermiones y 2 sitios.

(c) El Hamiltoniano que estamos considerando tiene varias simetrías, una de ellas es la conservación de spin total σ_T. Por simplicidad limitemos ahora nuestra base al sector donde el spin total es 0.

Reescriba la base del inciso (b) pero con esta consideración y determine entonces la nueva base $\{|\phi_a\rangle\}$ de estados de dos fermiones con spin total 0.

(d) Encuentre los elementos de matriz del Hamiltoniano en esta base $h_{ab} = \langle\phi_a|H|\phi_b\rangle$.

(e) Encuentre el autovalor y autovector de la matriz encontrada en el inciso anterior asociados a el autovalor más bajo. Además reescriba el estados base de la forma:

$$|\Psi\rangle = \sum_a \alpha_a |\phi_a\rangle. \tag{3}$$

(f) Antes de haber impuesto la restricción sobre el número de partículas y spin total el espacio de Hilbert se podía factorizar de forma: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, donde $\mathcal{H}_i$ es el espacio local generado por la base $\left\{|0\rangle, c^\dagger_{i\downarrow}|0\rangle\, c^\dagger_{i\uparrow}|0\rangle, c^\dagger_{i\uparrow}c^\dagger_{i\downarrow}|0\rangle\right\}$. Utilizando esto, determine la matriz de densidad reducida para el primer sitio

$$\rho_1 = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_2}\left(|\Psi\rangle\langle\Psi|\right). \tag{4}$$

(g) Determine los autovalores λ_α de ρ_1 y calcule la entropía de von Neumann,

$$S_1 = -\sum_\alpha \lambda_\alpha \log\left(\lambda_\alpha\right). \tag{5}$$

Qué sucede en el límite $U/t \to \infty$?

Sugerencias

- Para A, B matrices del mismo tamaño (2×2 en este problema), el polinomio característico se puede simplificar de la siguiente forma:

$$\det\left[\begin{pmatrix} A & B \\ B & 0_{2\times 2}\end{pmatrix} - \lambda 1_{4\times 4}\right] = \det\left(-(A - \lambda 1_{2\times 2})(\lambda 1_{2\times 2}) - B^2\right)$$

- Si no logra determinar los coeficientes α_a del autovector, para poder continuar con el problema puede utlizar estas propiedades:

$$|\alpha_1|^2 = |\alpha_2|^2 = \frac{x}{2+2x}, \; |\alpha_3|^2 = |\alpha_4|^2 = \frac{1}{2+2x}, \tag{6}$$

$$x \equiv \frac{4t}{U + \sqrt{U^2 + (4t)^2}} \tag{7}$$

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_2}\left(|i\rangle_1\langle j|_1 \otimes |\ell\rangle_2\langle m|_2\right) \equiv \sum_n \langle n|_2\left(|i\rangle_1\langle j|_1 \otimes |\ell\rangle_2\langle m|_2\right)|n\rangle_2 \tag{8}$$

---

4. Dinámica

Salto con liana

Un atleta en un bungee está atado a una cuerda elástica de longitud L. El otro extremo de la cuerda está sujeta a un puente encima de un río. El atleta de masa m cae desde el borde del puente, desde el reposo. Al caer no toca el agua. La cuerda tiene una constante k de fuerza por unidad de distancia.

Asumiendo que la masa de la cuerda es despreciable (en comparación con la masa del atleta), y que la cuerda obedece la Ley de Hooke, obtenga:

a) La distancia y que cae el atleta antes de alcanzar el reposo por primera vez.

b) La velocidad máxima que alcanza el atleta durante su caída.

c) El tiempo durante la caída antes de llegar al reposo por primera vez.

5. Cuerpo Rígido

Fricción de Impacto

La figura muestra una esfera sólida y homogénea de radio R y masa m. Antes de caer al suelo, su centro de masa está en reposo, pero la esfera gira con velocidad angular ω_0 respecto a un eje horizontal a través de su eje. El punto más bajo de la esfera está a una altura h del suelo. La pelota cae por gravedad y rebota a una nueva altura αh. Despreciando la resistencia del aire y la deformación de la esfera, y considerando el coeficiente de fricción μ_k entre la esfera y el suelo, el momento de inercia de la esfera respecto a su eje de rotación es

$$I = \frac{2mR^2}{5} \tag{9}$$

Considere la siguiente situación: la esfera se desliza durante el tiempo de impacto.

a) Encuentre el valor mínimo de ω_0 para que se presente ésta situación.

b) Calcule $tan\theta$, para el ángulo θ como se muestra en la figura.

c) Calcule la distancia horizontal que recorre la esfera entre el primer y el segundo impacto.

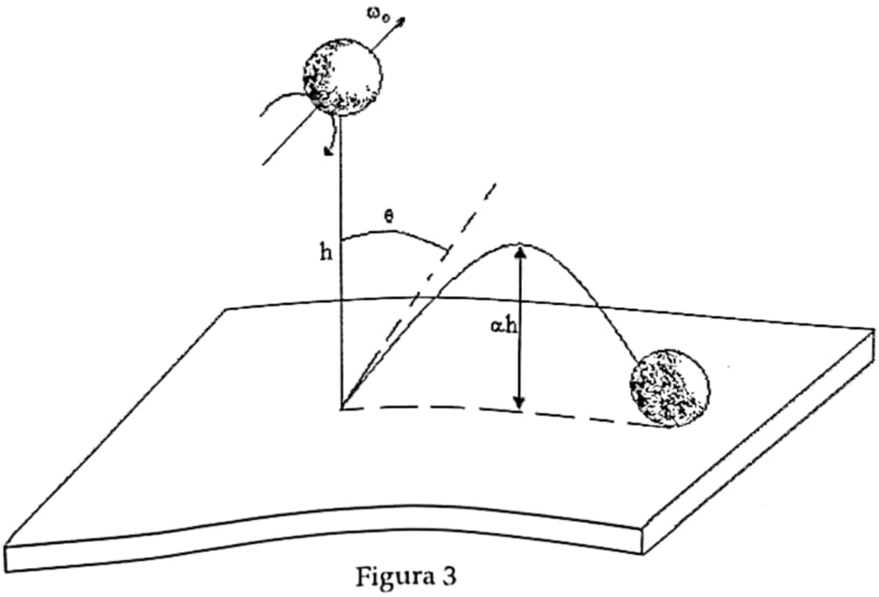


Figura 3