

Notas de estudio para Examen Privado  
Licenciatura en Física

Diego Sarceño

11 de junio de 2024

# Índice general

<b>I</b>	<b>Termodinámica</b>	<b>10</b>
<b>1.</b>	<b>Conceptos Básicos</b>	<b>12</b>
1.1.	Sistemas Termodinámicos y Cantidades de Estado	13
1.2.	Equilibrio y Temperatura (Ley Cero de la Termodinámica):	13
1.3.	Presión, Ecuación de Estado	14
<b>2.</b>	<b>Primera Ley de la Termodinámica</b>	<b>16</b>
2.1.	Trabajo y Calor	16
2.1.1.	Naturaleza del Calor	17
2.2.	Energía Interna y Primera Ley	17
2.3.	Implicaciones de la Primera Ley	18
2.4.	Capacidad Calorífica	18
2.5.	Procesos Adiabáticos	19
2.5.1.	Trabajo Adiabático	19
<b>3.</b>	<b>Procesos Cíclicos</b>	<b>20</b>
3.1.	Tipos de Procesos	20
3.1.1.	Procesos Reversibles e Irreversibles	20
3.2.	Ciclo de Carnot	20
3.2.1.	Teoremas de Carnot	21
<b>4.</b>	<b>Segunda Ley de la Termodinámica</b>	<b>22</b>
4.1.	Kelvin-Planck	22
4.2.	Claiius	22
4.3.	La que te venden los divulgadores	22
4.4.	Reversibilidad e Irreversibilidad	22
<b>5.</b>	<b>Entropía</b>	<b>23</b>
5.1.	Definición de Entropía	23
5.2.	Cambios Irreversibles	23
5.3.	Regresando a la Primera Ley	24
5.4.	Expansión de Joule (Expansión Libre)	24

<b>6. Termodinámica en Acción</b>	<b>27</b>
6.1. Potenciales Termodinámicos . . . . .	27
6.1.1. Energía Interna . . . . .	27
6.1.2. Entalpía, $H$ . . . . .	27
6.1.3. Función de Helmholtz, $F$ . . . . .	28
6.1.4. Función de Gibbs, $G$ . . . . .	29
6.1.5. Relaciones de Maxwell . . . . .	30
<b>7. Tercera Ley de la Termodinámica</b>	<b>32</b>
7.1. Enunciados de la Tercera Ley . . . . .	32
7.2. Consecuencias de la Tercera Ley . . . . .	32
<b>II Mecánica Estadística</b>	<b>34</b>
<b>8. Entropía y Temperatura</b>	<b>36</b>
8.1. Macroestados y Microestados . . . . .	36
8.2. Ensambls . . . . .	36
8.3. Conteos . . . . .	37
8.3.1. Conteos Básicos . . . . .	37
8.3.2. Fórmula de Stirling . . . . .	39
8.4. Entropía y Función de Partición . . . . .	39
8.4.1. Postulado Básico . . . . .	40
8.4.2. Conteo de Microestados . . . . .	40
8.4.3. Problema Básico de Mecánica Estadística . . . . .	40
8.4.4. Valor Esperado de $E_i$ . . . . .	41
8.4.5. Entropía v2 . . . . .	42
8.4.6. Función de Helmholtz . . . . .	42
8.4.7. Calor Específico . . . . .	43
<b>9. Elementos de la Teoría de los Ensambls</b>	<b>44</b>
9.1. Generalidades de la Teoría de Ensambls . . . . .	44
9.2. Osciladores Armónicos . . . . .	46
<b>10. Gas Ideal</b>	<b>47</b>
10.1. Cálculo de Probabilidades . . . . .	48
10.1.1. Función de Densidad de $p$ . . . . .	48
10.1.2. Energía Cinética . . . . .	49
<b>11. Modelo de Einstein</b>	<b>50</b>
11.1. Calor Específico de un Sólido . . . . .	50
<b>12. Gas Diatómico</b>	<b>51</b>
12.1. Cálculo de la Función de Partición para un Gas Diatómico . . . . .	51
12.1.1. Cálculo de $\mathfrak{z}_R(\beta)$ . . . . .	51
12.1.2. Cálculo de $\mathfrak{z}_V(\beta)$ . . . . .	52

12.1.3. Cálculo para $T$ grande . . . . .	52
12.1.4. Capacidad Calorífica para Gases Nobles . . . . .	53
<b>13.Repaso de Termodinámica</b>	<b>54</b>
13.1. Generalidades . . . . .	54
13.2. Presión . . . . .	55
13.3. Entalpía . . . . .	56
13.4. Función de Gibbs . . . . .	56
13.5. Potencial Químico . . . . .	56
<b>14.Distribuciones de Fermi-Dirac y Bose-Einstein</b>	<b>58</b>
14.1. Degeneración de la Energía . . . . .	58
14.2. Distribución Fermi-Dirac (Caso 3) . . . . .	58
14.3. Distribución de Bose-Einstein (Caso 4) . . . . .	59
<b>15.Gas de Fotones</b>	<b>61</b>
15.1. Radiación de Cuerpo Negro . . . . .	61
15.1.1. Cálculo de la Función de Degeneración $g(E)$ . . . . .	61
15.1.2. Constante de Stefan-Boltzmann . . . . .	62
15.1.3. Densidad de Energía . . . . .	62
15.1.4. Conteo de Fotones . . . . .	63
15.1.5. Función de Partición . . . . .	63
<b>III Mecánica Cuántica</b>	<b>64</b>
<b>16.Notación de Dirac (Repaso Álgebra Lineal)</b>	<b>66</b>
16.1. Espacios de Hilbert y Espacio Dual . . . . .	66
16.1.1. El Espacio Dual . . . . .	66
16.2. Operadores Lineales . . . . .	66
16.3. Los KetBras . . . . .	67
16.3.1. Producto de kronecker . . . . .	67
16.4. Más Sobre Operadores Lineales . . . . .	67
16.4.1. La Transpuesta . . . . .	67
16.4.2. Bases y Bases Duales . . . . .	68
16.5. Componentes de Kets y Bras . . . . .	68
16.6. Espacios de Hilbert . . . . .	69
16.6.1. Producto Interno . . . . .	69
16.6.2. Sucesiones de Cauchy . . . . .	70
16.7. Ejemplos de Espacios de Hilbert . . . . .	70
16.8. Operadores Lineales en Espacios de Hilbert . . . . .	70
16.8.1. Operador Adjunto . . . . .	70
16.8.2. Operador Unitario . . . . .	70
16.8.3. Operadores Hermíticos . . . . .	70
16.8.4. El Conmutador . . . . .	71
16.9. Espacios de Hilbert y Espacio Dual . . . . .	72

16.9.1. Transformación Antilineal . . . . .	72
<b>17.Postulados de Mecánica Cuántica</b>	<b>73</b>
17.1. Experimento de Stern-Gerlach . . . . .	73
17.2. Postulados . . . . .	73
17.2.1. Enunciados . . . . .	73
17.2.2. Propiedades y Operadores . . . . .	75
17.3. Principio de Incertidumbre de Heisenberg . . . . .	76
<b>18.Posición y Momentum</b>	<b>77</b>
18.1. Representación de los Estados . . . . .	77
18.1.1. Interpretación de $\psi(x)$ . . . . .	78
18.2. Traslaciones . . . . .	78
18.2.1. Superposición . . . . .	79
18.2.2. Representación Respecto al Momentum . . . . .	80
18.3. Series de Fourier . . . . .	80
18.3.1. Coeficientes de Fourier . . . . .	80
18.4. Representación en 1 Dimensión. Tamaño Infinito . . . . .	80
18.4.1. Integral de Fourier . . . . .	81
18.4.2. Transformada de Fourier . . . . .	81
18.5. Posición y Momentum 3-D . . . . .	81
18.5.1. Representación Respecto a $\{ \vec{x}\rangle\}$ . . . . .	82
18.6. Momentum Respecto a la Posición en 3-D . . . . .	83
<b>19.Energía y Hamiltoniano</b>	<b>85</b>
19.1. Dinámica Cuántica . . . . .	85
19.1.1. Operador Evolución $U(t, a)$ . . . . .	85
19.2. El Hamiltoniano . . . . .	85
19.2.1. Casos del Hamiltoniano en Física . . . . .	86
19.3. Estados Estacionarios . . . . .	86
19.3.1. Punto de Vista de Heisenberg . . . . .	86
19.3.2. Punto de Vista de Schrodinger . . . . .	87
19.3.3. Ecuación de Movimiento de Heisenberg . . . . .	87
<b>20.Oscilador Armónico Cuántico</b>	<b>88</b>
20.1. Oscilador Armónico . . . . .	88
20.2. Ecuación de Schrodinger . . . . .	88
20.2.1. Ecuación de Schrodinger Independiente del Tiempo . . . . .	88
20.3. Operadores en el Oscilador Cuántico . . . . .	89
20.3.1. Operador Anulador o Aniquilador . . . . .	89
20.3.2. Operador Creador . . . . .	89
20.3.3. Operador Número . . . . .	89
20.3.4. Propiedades de los Operadores . . . . .	89
20.4. Dinámica del Oscilador Armónico Cuántico . . . . .	91
20.4.1. Punto de Vista de Schrodinger . . . . .	91
20.4.2. Solución al Oscilador Armónico Cuántico . . . . .	92

20.4.3. Punto de Vista de Heisenberg . . . . .	92
<b>21.Espín 1/2</b>	<b>93</b>
21.1. Generalidades . . . . .	93
21.1.1. El Operador Identidad . . . . .	93
21.1.2. Cambio de Base . . . . .	94
21.1.3. Matrices de Pauli . . . . .	96
21.2. Espín Total $S^2$ . . . . .	96
21.2.1. Operadores Escaleras $S_+, S_-$ . . . . .	96
21.3. Presección del Espín 1/2 . . . . .	97
21.4. Evolución de un Estado . . . . .	97
21.4.1. Casos Especiales . . . . .	97
21.4.2. Consideraciones sobre el Espín 1/2 . . . . .	98
<b>22.Momentum Angular</b>	<b>99</b>
22.1. Introducción por Medio de los Observables del Spin . . . . .	99
22.2. Introducción Formal . . . . .	100
22.2.1. Rotación Pasiva . . . . .	100
22.2.2. Rotación Activa . . . . .	100
22.3. Operadores . . . . .	101
22.3.1. Definición del Operador $L_z$ . . . . .	101
22.4. Momentum Angular Orbital . . . . .	101
22.4.1. Valores y Vectores Propios . . . . .	102
22.4.2. Armónicos Esféricos . . . . .	102
<b>23.Métodos Aproximados</b>	<b>103</b>
23.1. Teoría de Perturbaciones . . . . .	103
23.1.1. No Degenerada . . . . .	103
23.2. Átomo de Hidrógeno . . . . .	103
<b>24.Problemas en Una Dimensión</b>	<b>106</b>
24.1. Propiedades del Movimiento en Una Dimensión . . . . .	106
24.1.1. Espectro Discreto (Estados Ligados) . . . . .	106
24.1.2. Espectro Continuo (Estados ligados) . . . . .	107
24.1.3. Potenciales Simétricos y Paridad . . . . .	107
24.2. Partícula Libre: Estados Continuos . . . . .	107
24.3. Potencial Escalonado . . . . .	108
24.4. Pozo de Potencial . . . . .	109
24.4.1. Tunelamiento . . . . .	110
24.5. Potencial de Pozo Cuadrado Infinito . . . . .	110
24.5.1. Asimétrico . . . . .	110
24.5.2. Simétrico . . . . .	110
24.6. Potencial de Pozo Cuadrado Finito . . . . .	111
24.6.1. Soluciones de Dispersión ( $E > V_o$ ) . . . . .	111
24.6.2. Soluciones de Estados Ligados ( $E < V_o$ ) . . . . .	111

<b>IV Mecánica Clásica</b>	<b>112</b>
<b>25.Movimiento de una Partícula en una Dimensión</b>	<b>114</b>
25.1. Teoremas de Energía y Momentum . . . . .	114
25.2. Fuerza . . . . .	115
25.2.1. Fuerza Aplicada Dependiente del Tiempo . . . . .	115
25.2.2. Fuerza de Restitución Dependiente de la Velocidad . . . . .	115
25.2.3. Fuerza Conservativa . . . . .	115
25.2.4. Caída Libre . . . . .	117
25.3. Osciladores . . . . .	117
25.3.1. Oscilador Armónico Simple . . . . .	117
25.3.2. Diagramas de Fase . . . . .	117
25.3.3. Oscilaciones Amortiguadas . . . . .	117
25.3.4. Oscilaciones Forzadas . . . . .	118
<b>26.Movimiento de una Partícula en Varias Dimensiones</b>	<b>119</b>
26.1. Primeras y Segundas Derivadas en Diferentes Coordenadas . . . . .	119
26.2. Osciladores Armónicos en Dos Dimensiones . . . . .	119
26.3. Teoremas del Momentum Angular . . . . .	120
26.4. Movimiento en una Fuerza Central . . . . .	120
26.4.1. Fuerza Inversamente Proporcional al Cuadrado de la Distancia . . . . .	121
26.5. Órbitas Elípticas, El Problema de Kepler . . . . .	121
<b>27.Sistemas de Partículas</b>	<b>122</b>
27.1. Leyes de Conservación . . . . .	122
27.1.1. Conservación del Momentum Lineal . . . . .	122
27.1.2. Conservación del Momentum Angular . . . . .	122
27.1.3. Conservación de la Energía . . . . .	122
27.2. Problema de los Dos Cuerpos . . . . .	122
<b>28.Cuerpo Rígido</b>	<b>124</b>
28.1. Ubicación de un Cuerpo Rígido . . . . .	124
28.1.1. Consideraciones Generales . . . . .	124
28.1.2. Momento de Inercia . . . . .	124
28.1.3. Ecuación de Rotación . . . . .	125
28.1.4. Centro de Masa . . . . .	125
<b>29.Gravitación</b>	<b>126</b>
<b>30.Sistema de Coordenadas en Movimiento</b>	<b>127</b>
30.1. Fuerza de Coriolis . . . . .	128
30.1.1. Péndulo de Foucault . . . . .	129
30.2. Problema Restringido de los Tres Cuerpos . . . . .	130
30.2.1. Puntos Máximos y Mínimos . . . . .	130

<b>31.Mecánica del Medio Continuo</b>	<b>131</b>
31.1. Cuerda Vibrante . . . . .	131
31.1.1. Ondas Viajeras . . . . .	132
31.2. Equilibrio de Fluidos . . . . .	132
31.2.1. Fuerzas de Volumen . . . . .	132
31.2.2. Relación entre Presión y Energía Potencial . . . . .	132
31.3. Cinemática de Fluidos . . . . .	132
31.3.1. Dos Tipos de Razones de Cambio . . . . .	133
31.3.2. Fluido Incompresible . . . . .	133
31.3.3. Masa . . . . .	133
31.3.4. Vorticidad . . . . .	134
31.3.5. Ecuacion de Movimiento para un Fluido Ideal . . . . .	134
31.3.6. Ley de Conservación . . . . .	134
31.3.7. Flujo Estacionario . . . . .	134
<b>32.Mecánica Lagrangiana y Hamiltoniana</b>	<b>135</b>
32.1. Introducción . . . . .	135
32.1.1. Mecánica Newtoniana . . . . .	135
32.1.2. Marco de Referencia Inercial . . . . .	135
32.1.3. Momento Angular . . . . .	136
32.1.4. Energía . . . . .	136
32.2. Generalidades . . . . .	137
32.2.1. Principio Variacional y Ecuación de Lagrange . . . . .	137
32.2.2. El Principio de Hamilton (Principio de Mínima Acción) . . . . .	137
32.2.3. Cálculo de Variaciones . . . . .	137
32.2.4. Principio de Hamilton y Ecuación de Lagrange . . . . .	138
32.2.5. Restricción en las Coordenadas Generalizadas . . . . .	139
32.2.6. Teorema de Noether . . . . .	139
32.3. Formalismo de Hamilton . . . . .	140
32.3.1. Ecuación de Hamilton . . . . .	140
32.3.2. Teorema de Liouville . . . . .	141
32.3.3. Brackets de Poisson . . . . .	141
32.3.4. Transformaciones Canónicas . . . . .	141
<b>33.Cuerpo Rígido</b>	<b>142</b>
33.1. Generalidades . . . . .	142
33.1.1. Velocidad Angular . . . . .	142
33.1.2. El Tensor de Inercia . . . . .	142
<b>V Electromagnetismo</b>	<b>144</b>
<b>34.Análisis Vectorial</b>	<b>146</b>
34.1. Operadores Vectoriales . . . . .	146
34.1.1. Gradiente . . . . .	146
34.1.2. Divergencia . . . . .	146



34.1.3. Rotacional . . . . .	147
34.2. Integración Vectorial . . . . .	147
34.2.1. Integrales de Línea . . . . .	147
34.2.2. Integrales de Superficie . . . . .	147
34.2.3. Teoremas Importantes . . . . .	147
<b>35. Electrostática</b>	<b>148</b>
35.1. Ley de Coulomb . . . . .	148
35.2. Campo Eléctrico . . . . .	149
35.3. Potencial Electroestático . . . . .	149
35.4. Ley de Gauss . . . . .	149
35.5. Dipolo Eléctrico . . . . .	150
35.5.1. Momento Dipolar Eléctrico . . . . .	150
35.6. Trabajo y Energía en Electroestática . . . . .	150
35.6.1. Energía de una Distribución de Cargas Puntuales . . . . .	151
<b>36. Problemas Electroestáticos</b>	<b>152</b>
36.1. Ecuación de Laplace . . . . .	152
36.1.1. Ecuación de Laplace en una Dimensión . . . . .	153
36.2. Imágenes Electroestáticas . . . . .	153
36.2.1. Sistemas Conductores y Coeficientes de Potencial . . . . .	154
<b>37. Campo Electroestático en Medios Dieléctricos y su Teoría Microscópica</b>	<b>155</b>
37.1. Polarización . . . . .	155
37.1.1. Campo Fuera de un Medio Dieléctrico . . . . .	156
37.1.2. Campo Eléctrico dentro de un Dieléctrico . . . . .	156
37.1.3. Suceptibilidad Dieléctrica y Constante Dieléctrica . . . . .	157
37.2. Condiciones de Frontera para los Vectores de Campo . . . . .	157
37.3. Teoría Microscópica de los Dieléctricos . . . . .	157
37.3.1. Campo Molecular en un Dieléctrico: $E_m$ . . . . .	157
37.3.2. Moléculas Polares . . . . .	158
37.3.3. Polarización Permanente: Ferroelectricidad . . . . .	159
<b>38. Energía Electroestática</b>	<b>160</b>
38.1. Condensadores . . . . .	160
<b>39. Corriente Eléctrica</b>	<b>162</b>
39.1. Densidad de Corriente . . . . .	162
39.2. Ley de Ohm . . . . .	163
<b>40. El Campo Magnético de Corrientes Estacionarias</b>	<b>164</b>
<b>41. Propiedades Magnéticas de la Materia</b>	<b>165</b>
<b>42. Inducción Electromagnética</b>	<b>166</b>
<b>43. Energía Magnética</b>	<b>167</b>

44. Corrientes que Varían Lentamente	168
45. Ecuaciones de Maxwell	169
46. Propagación de Ondas Monocromáticas	170
<b>VI Reducción de Datos</b>	<b>171</b>
47. Introducción al Cálculo de Probabilidades en Estadística	172
48. Incertezas	173
48.1. Uso y Reporte de Incertezas . . . . .	173
48.2. Propagación de Incertezas . . . . .	173
48.3. Análisis Estadístico de Incertezas Aleatorias . . . . .	173
49. La Distribución Normal	174
50. Rechazo de Datos y la Media Ponderada	175
51. Distribución Binomial y de Poisson	176
52. Prueba Ji Cuadrado y Mínimos Cuadrados	177
<b>VII Materia Condensada</b>	<b>178</b>

Parte I

Termodinámica

*La termodinámica es el estudio de las restricciones a las posibles propiedades de la materia que se derivan de las propiedades de simetría de las leyes fundamentales de la física.*

# Capítulo 1

## Conceptos Básicos

**Propósito:** La termodinámica busca describir sistemas de muchas partículas ( $10^{23}$  típicamente). Gases, líquidos, cristales, estrellas, universo,  $\dots$ , sistemas macroscópicos y en particular, estudiar los procesos de transferencia de energía (trabajo y calor) entre cuerpos macroscópicos<sup>1</sup>.

- Definir cantidades físicas, "variables de estado" que caracterizan un sistema macroscópico:  $V, T, N, U, \dots$
- Relacionar estas cantidades entre sí:
  1. Válidas para cualquier sistema en equilibrio:
    - a) Leyes axiomáticas de la termodinámica, como Ley de la Energía, Ley de la Entropía, etc.
  2. Específicas
    - a) Por ecuaciones de estado como: fenomenológicas, empíricas, experimentales en la mayoría de los casos.

Es importante mencionar que la termodinámica clásica macroscópica no puede explicar por qué una ecuación de estado describe un sistema particular.

---

<sup>1</sup>Más adelante se tratará la parte microscópica con la Mecánica Estadística, poder explicativo y predictivo sobre propiedades macroscópicas de la materia, partiendo de una descripción microscópica.

## 1.1. Sistemas Termodinámicos y Cantidades de Estado

### 1. Sistema Termodinámico:

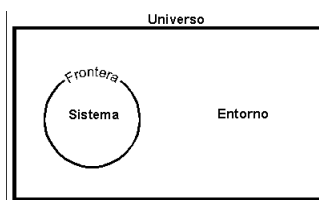


Figura 1.1: Representación gráfica de las partes de un sistema termodinámico.

### 2. Tipos de Sistemas: (depende de la frontera)

- Sistemas aislados: No intercambian energía con el entorno. Los sistemas rígidos no pueden intercambiar trabajo y los adiabáticos no pueden intercambiar calor.
  - Sistemas cerrados: Aquel que intercambia energía y trabajo con su entorno pero la masa permanece constante. Este intercambio de energía puede ser fluctuante aunque la caracterización de estas fluctuaciones no es de interés para la termodinámica.
  - Sistemas abiertos: Aquel que intercambia tanto energía como materia con su entorno.
3. Variables de estado: Cualquier cantidad macroscópica que pueda describir el sistema.  $E, V, N, T, P, S$ , viscosidad  $\mu$ , composición química, etc. **no**  $\{\vec{r}_i, \vec{p}_i\}$ .
- Cantidades de estado extensivas: estas son aditivas (dependen de la cantidad de sustancia/moles o masa). Ejemplo: volumen, energía o entropía.
  - Cantidades de estado intensivas: son independientes de la cantidad de sustancia del sistema, como la densidad, índice de refracción, presión o temperatura.

## 1.2. Equilibrio y Temperatura (Ley Cero de la Termodinámica):

1. Estado de un sistema: Se define por un conjunto particular de valores de sus variables termodinámicas.
- Como cada variable describe el sistema como un todo, en general son constantes en el espacio.
  - Las variables pueden variar (lentamente en el tiempo).
2. Estado de equilibrio: cada variable tiene un único valor y este valor no cambia en el tiempo.
3. Procesos cuasi-estáticos y no cuasi-estáticos: un proceso  $\equiv$  un cambio de estado. (normalmente un proceso cuasi-estático se toma como un proceso reversible, aquí haremos una distinción). Un proceso no cuasi-estático puede ser una expansión muy rápida de un gas. Mientras que un proceso cuasi-estático puede ser reversible o irreversible como la expansión muy lenta de un gas con un pistón ( $\delta V$  es muy pequeña).

**Temperatura y Ley Cero:** La temperatura es una cantidad "desconocida" para la mecánica y electrodinámica, es una cantidad de estado especial para la termodinámica. Esta se define clásicamente mediante un proceso ( **DS: no hay definición matemática...aún, se verá en la parte de mecánica estadística**).

La Ley Cero es una definición de la temperatura: Variable intensiva que es igual en dos sistemas en contacto, en equilibrio sin importar la forma y ubicación de este contacto.

Otra definición de la Ley Cero: Cuando el contacto térmico entre A y B produce que B se caliente y A se enfríe, sin importar donde está este contacto, entonces no hay proceso que pueda calentar A y enfriar B que no induce un trabajo".

ESTADO DE EQUILIBRIO"  $\neq$  ESTADO ESTACIONARIO", estar en equilibrio implica ser estado estacionario, pero no al contrario.

### 1.3. Presión, Ecuación de Estado

1. Presión: En términos mecánicos es lo que ya se conoce  $F/A$  y en términos microscópicos es la suma de las fuerzas que realizan todas las partículas del sistema sobre  $A$ .
2. Ecuación de Estado: Relación entre variables independientes y la temperatura:

$$F(X, Y, T) = 0$$

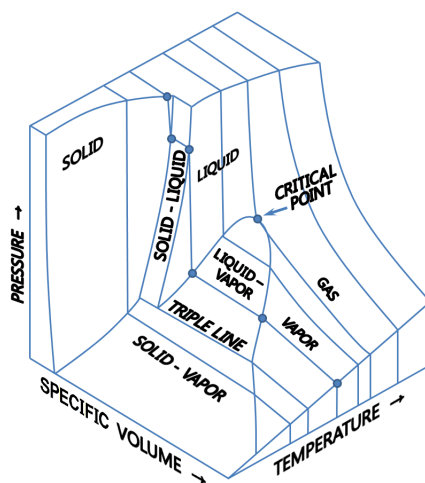


Figura 1.2: Diagrama PVT.

Por ejemplo: Ecuación del gas ideal  $pV = nRT$ , la ecuación de gas real (expansión del Virial)  $pV = Nk_B T + B(T)p + C(T)p^2 + \dots$ , donde  $B(T), C(T), \dots$  son los coeficientes del Virial o la de Van der Waals.

3. Diferenciales Exactos<sup>2</sup> (e Inexactos): Suponemos una ecuación de estado  $z = f(x, y)$ . Diferenciación  $df(\vec{r}) = \vec{\nabla} f(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ .  $df$  es un diferencial total si su integral no depende del contorno y solo de los extremos. Y este es exacto si  $f$  es totalmente diferenciable, es decir, se pueden intercambiar las derivadas cruzadas ( DS: Básicamente, el teorema de Clairaut). La implicación que esta tiene en termodinámica son las transformaciones reversibles (que pasan por estados de equilibrio), en estas la ecuación de estado el valor de las variables de estado es independiente del proceso que sigue para llegar a otro estado y esto es válido para cualquier variable de estado.

---

<sup>2</sup>Un diferencial es exacto ssi  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x$ .



## Capítulo 2

# Primera Ley de la Termodinámica

### 2.1. Trabajo y Calor

La energía total de un sistema puede variar si recibe (cede) trabajo o calor.

1. Trabajo: Sistema sujeto a fuerzas externas. El sistema recibe energía durante una compresión. Con esta idea se tiene la convención general ( **DS: Bastante lógico**)  $\delta W > 0$  si el sistema recibe trabajo y  $\delta W < 0$  si el sistema realiza trabajo.

Caso particular<sup>1</sup> procesos cuasi-estáticos,  $d\vec{l}$  es infinitesimal, es decir muy lento, entonces la aceleración del pistón es despreciable  $\vec{F}_e + \vec{F}_i = 0$ , donde  $F_i$  es la fuerza ejercida por el sistema (fuerza interna) entonces  $\delta W = -\vec{F}_i \cdot d\vec{l}$ . Como el proceso es cuasi-estático, el sistema está en equilibrio  $\leftarrow \exists$  presión en el sistema  $\vec{F}_i = PA\hat{z}$ . Reemplazando en la definición de trabajo  $\delta W = -P dV$  ( $P$  cantidad intensiva,  $dV$  cantidad extensiva). **⚠** Durante el trabajo infinitesimal la presión es aproximadamente constante en el intervalo  $[V, V + dV]$ , pero si  $\Delta V$  es grande, entonces

$$\Delta W = - \int_{V_1}^{V_2} P(V) dV .$$

2. Calor: Es una forma particular de energía distinta al trabajo, por ejemplo en el calentamiento por entrega de calor no hay un trabajo visible.

**Experimento de Joule:** Este fue crucial para demostrar la equivalencia entre trabajo mecánico y calor, sentando las bases de la primera Ley de la Termodinámica.

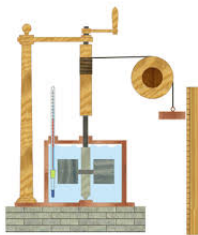


Figura 2.1: Este consiste en un contenedor de agua aislado térmicamente, un sistema de paletas y un peso y una cuerda los cuales pasan por una polea.

---

<sup>1</sup>Para más ejemplos ver p9 de [Notas Boyer](#)

El procedimiento es:

- a) Elevación del peso: El peso se levanta a una cierta altura almacenando energía potencial gravitacional.
- b) Al liberar el peso, este desciende, la cuerda hace girar el eje el cual, a su vez, hace girar las paletas.
- c) Las paletas agitan el agua, creando fricción y generando calor.

Joule encontró que el aumento de la temperatura del agua estaba directamente relacionado con la cantidad de trabajo mecánico realizado. Específicamente, pudo determinar la equivalencia entre unidades de trabajo (joules) y unidades de calor (calorías). La relación que encontró es aproximadamente 4.184 joules por caloría.

Joule demostró que el calor podía generarse mediante trabajo mecánico y viceversa, consolidando el concepto moderno de energía.

Además podemos concluir que  $\delta Q$  y  $\delta W$  no son cantidades de estado, dependen del proceso, del camino ( $Q$  y  $W$  no son diferenciales exactos).

### 2.1.1. Naturaleza del Calor

Énergá distribuída de manera desordenada entre partículas. Ès mucho más fácil convertir trabajo en calor que al revés.

Convención: Misma que para el trabajo:  $\delta Q = \delta Q_{\text{entorno} \leftarrow \text{sistema}}$

- $\delta Q > 0$  para un sistema que recibe calor del entorno.
- $\delta Q < 0$  para un sistema que cede calor al entorno.

## 2.2. Energía Interna y Primera Ley

1. Energía interna: (definición microscópica)  $U$  esta es la energía total del sistema, en el sentido mecánico-newtoniano, con  $N$  partículas

$$U = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N V(\vec{r}_i, \vec{r}_j) + \sum_{i=1}^N \vec{F}_e^i \cdot \vec{r}_i.$$

Donde se tiene la energía cinética, la potencial y las fuerzas externas. En general es imposible calcular esta energía y tampoco es el propósito de este curso. **DS: como siempre, a esperar a mecánica estadística**

(definición macroscópica): Es equivalente a la definición de microscópica si  $N \rightarrow \infty$ . Cantidad de estado que varía cuando el sistema recibe trabajo o calor y que tiene dimensión de energía.

2. Primera Ley de la Termodinámica: Conservación de la energía  $U$  (**DS: Es básicamente una conservación de la energía, como se ve en física 1, pero con esteroides**)

$$dU = \delta Q + \delta W.$$

Formas estándares de la primera ley:

- Sistemas aislados:  $dU = 0$
- Sistemas cerrados:  $dU = \delta Q - P dV$
- Sistemas abiertos:  $dU = \delta Q - P dV + \mu dN$ <sup>2</sup>.

## 2.3. Implicaciones de la Primera Ley

1. La energía interna es una variable de estado y un diferencial exacto:

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_{V,N} dT + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_{T,N} dV + \left( \frac{\partial U}{\partial N} \right)_{V,T} dN.$$

Y  $f(V, T, N)$  se conoce como la ecuación de estado.

2. Procesos Cíclicos: Son procesos de particular interés. En estos procesos  $U_f = U_o$  o, en otras palabras

$$\oint dU = 0,$$

esto implica  $\Delta W + \Delta Q = 0$   $\Delta W = -\Delta Q \neq 0$ , en esto se tienen dos casos importantes

- Caso  $\Delta W < 0$ : motor, fuente de calor en el entorno, pero necesitamos  $\Delta Q > 0$ .
- Caso  $\Delta Q < 0$ : refrigerador, trabajo sobre el sistema, pero se necesita  $\Delta W > 0$ .

## 2.4. Capacidad Calorífica

Se define como  $\delta Q = c dT$ , un incremento o decremento de temperatura, donde la constante  $c$  es la capacidad calorífica. Recordemos que  $dU = \delta Q - P dV$  para un sistema cerrado sin fuerzas externas.

$$C_V = \left( \frac{\delta Q}{\delta T} \right)_V, \quad \text{Volumen constante,}$$

$$C_P = \left( \frac{\delta Q}{\delta T} \right)_P, \quad \text{presión constante,}$$

y como consecuencia de la primera ley:  $V = \text{cte}$  entonces  $dU = \delta Q$  por ende  $C_V = \left( \frac{dU}{dT} \right)_V$ .  $C_V$  y  $C_P$  son cantidades extensivas, en algunos libros  $C_v = \frac{1}{N} \left( \frac{dU}{dT} \right)_V$  capacidad por partícula o por mol (en este caso sería una cantidad intensiva).

**Gas Ideal** se tienen dos casos, para un gas monoatómico y diatómico

$$\text{Monoatómico} \quad U = \frac{3}{2} N k_B T,$$

$$\text{Diatómico} \quad U = \frac{5}{2} N k_B T.$$

---

<sup>2</sup>En transformaciones cuasi-estáticas

Para todo material en equilibrio se tiene la siguiente relación entre  $C_V$  y  $C_P$ . Para ello se considerará  $N = cte$  (sistema cerrado), como variables se tienen  $P, V, T$ ; sin embargo,  $f(P, V, T) = 0$  es la ecuación de estado de equilibrio. Por ello se toman dos variables independientes  $U = U(P, V) = U(P, T) = U(V, T)$ . Además se tienen dos maneras de escribir el diferencial de energía interna: la primera ley y el diferencial total. Con esto:

$$\delta Q - p dV = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV$$

$$\delta Q = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left[ p + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \right] dV$$

dividiendo entre  $dT$  se tiene

$$C_P = \underbrace{\left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V}_{C_V} + \left[ p + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \right] \left( \frac{\delta Q}{\delta T} \right)_P$$

$$\boxed{C_P - C_V = \left[ p + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \right] \left( \frac{\delta Q}{\delta T} \right)_P}$$

Esta siempre es positiva. Para un gas ideal  $\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = 0$ ,  $p = \frac{Nk_B T}{V}$ ,  $\left( \frac{\delta Q}{\delta T} \right)_P = \frac{V}{T}$ .

$$\boxed{C_P - C_V = Nk_B}$$

## 2.5. Procesos Adiabáticos

Es aquel proceso reversible en un sistema térmicamente aislado, por lo que no existe un intercambio de calor entre él y el entorno  $\delta Q = 0$ . Por lo que  $dU = -p dV$ , y en un gas ideal  $dU = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT = C_V dT$ . Lo que implica que

$$\frac{dT}{T} = \frac{C_P - C_V}{C_V} \frac{dV}{V}.$$

Donde  $\frac{C_P}{C_V} = \gamma$ , número adimensional. Integrando **DS: Y haciendo calculito del kinder, como diría Damián** se tienen las siguientes equivalencias

$$\boxed{TV^{\gamma-1} = PV^\gamma = T^\gamma P^{1-\gamma} = cte.}$$

### 2.5.1. Trabajo Adiabático

Teniendo  $\delta W = -p dV$ , las equivalencias anteriores y nuevamente calculito del kinder y se llegamos a lo siguiente

$$\boxed{\Delta W = \frac{1}{\gamma - 1} [P_1 V_1 - P_o V_o] = \frac{Nk_B}{\gamma - 1} [T_1 - T_o] = C_v [T_1 - T_o].}$$

Es claro que se puede llegar a este resultado directamente desde la primera ley.

## Capítulo 3

# Procesos Cíclicos

### 3.1. Tipos de Procesos

El primer tipo es aquel que tiene una variable de estado constante: isotérmicos, isocóricos, isobáricos y adiabáticos **DS: el nombre es bastante claro con lo que implica cada proceso.**

#### 3.1.1. Procesos Reversibles e Irreversibles

Un proceso se dice reversible cuando estados sucesivos del mismo procesos difieren infinitesimalmente de estados de equilibrio. Dado esto, existen procesos reversibles termodinámicamente, los cuales cumplen con dos condiciones: ser cuasi-estático y un proceso no disipativo.

### 3.2. Ciclo de Carnot

El **ciclo de Carnot** se produce en un equipo o máquina cuando trabaja absorbiendo una cantidad de calor  $Q_1$  de una fuente de mayor temperatura y cediendo una cantidad de calor  $Q_2$  a la de menor temperatura produciendo un trabajo sobre el exterior.

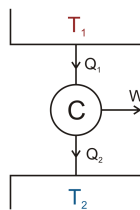


Figura 3.1: Esquema de una máquina de Carnot.

El rendimiento del ciclo está definido por

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Y, como se verá más adelante, es el mayor producido por cualquier máquina que funcione cíclicamente entre las mismas fuentes de temperatura.

Como todos los procesos que tienen lugar en el ciclo ideal son reversibles, el ciclo puede invertirse y la máquina absorbería calor de la fuente fría y cedería calor a la fuente caliente, teniendo que suministrar trabajo a la máquina. Si el objetivo de esta máquina es extraer calor de la fuente fría (para mantenerla fría) se denomina máquina frigorífica, y si es ceder calor a la fuente caliente, bomba de calor.

El ciclo de Carnot<sup>1</sup> consta de cuatro etapas: dos procesos isotermos y dos adiabáticos, como se muestra en el siguiente diagrama P-V

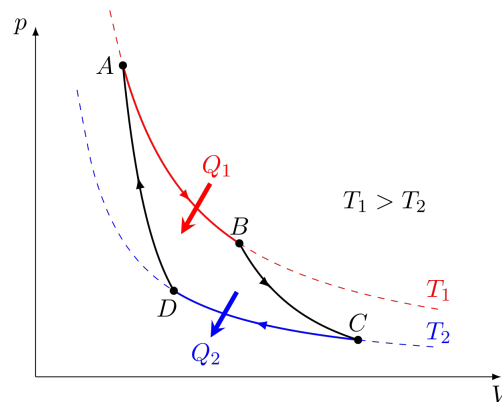


Figura 3.2: Ciclo de Carnot en el diagrama de Clapeyron.

- AB: Expansión isoterma;
- BC: Expansión adiabática;
- CD: Compresión isoterma;
- DA: Compresión adiabática.

### 3.2.1. Teoremas de Carnot

1. No puede existir una máquina térmica que funcionando entre dos fuentes térmicas dadas tenga mayor rendimiento que una de Carnot que funcione entre esas mismas fuentes térmicas.
2. Dos máquinas reversibles operando entre las mismas fuentes térmicas tienen el mismo rendimiento.

<sup>1</sup>Ver [wikipееееdiaaa](#) para la explicación detallada de cada paso.

## Capítulo 4

# Segunda Ley de la Termodinámica

### 4.1. Kelvin-Planck

Es imposible construir un motor que opere en ciclos y extraiga calor de una fuente que convierta el calor extraído exclusivamente en trabajo.

### 4.2. Claiius

Es imposible construir un frigorífico que, operando en un ciclo, transfiera completamente el calor de una fuente de menor temperatura a una fuente de temperatura mayor.

DS: Raras tus formulaciones pue.

### 4.3. La que te venden los divulgadores

*La cantidad de entropía del universo tiende a incrementarse en el tiempo.* Este principio establece la irreversibilidad de los procesos físicos, especialmente durante el intercambio de calor.

### 4.4. Reversibilidad e Irreversibilidad

Un proceso reversible es un proceso que realiza de tal forma que el sistema y su entorno pueden regresar a sus estados iniciales sin producir ningún cambio en el resto del universo. ( DS: Si, es otra forma de redactar la reversibilidad.)

## Capítulo 5

# Entropía

La entropía es posiblemente el más importante e insuficientemente conocido concepto en fisiología. Es una magnitud física que permite determinar la parte de la energía que no puede utilizarse para producir trabajo y está ligada con el grado de desorden de un sistema.

### 5.1. Definición de Entropía

Ya se introdujo la integral  $\oint dQ/T = 0$ . Esto implica que la integral

$$\int_A^B \frac{dQ}{T}$$

es independiente del camino; por ende, se define entropía como el diferencial exacto

$$\boxed{dS = \frac{dQ}{T}},$$

tal que

$$S(B) - S(A) = \int_A^B \frac{dQ}{T},$$

y  $S$  es una función de estado. Para un proceso adiabático se tiene que  $dQ = 0$ . Por eso un proceso adiabático no presenta cambios en la entropía (los procesos adiabáticos también son llamados isoentrópicos).

### 5.2. Cambios Irreversibles

Ya se tiene la definición de entropía en términos de cambios reversibles. Dado que  $S$  es una función de estado

$$\oint \frac{dQ_{rev}}{T} = 0.$$

Entonces

$$dS = \frac{dQ_{rev}}{T} \geq \frac{dQ}{T}.$$



Consideremos un sistema térmicamente aislado  $\dot{d}Q = 0$ ; por lo tanto  $\dot{d}S \geq 0$ .

La entropía solo puede mantenerse igual (cambios reversibles) o aumentar (cambios irreversibles). Tomando al universo como un sistema térmicamente aislado.

### 5.3. Regresando a la Primera Ley

Ahora podremos mostrar una forma más elegante y útil de la 1ra ley

$$dU = \dot{d}Q + \dot{d}W,$$

pero  $\dot{d}Q = T dS$  y  $\dot{d}W = -p dV$ .

$$dU = T dS - p dV$$

en esto se asume un proceso reversible. Pero para uno irreversible se tiene que  $\dot{d}Q \leq T dS$  y  $\dot{d}W \geq -p dV$ . Lo que se nivela y siempre se llega a lo visto para procesos reversibles.

$S, V$  son extensivas y  $T, p$  son intensivas<sup>1</sup>

$$dU = \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V}_T dS + \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S}_{-p} dV.$$

DS: Ahora toca profanar la matemática.

$$\frac{p}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U.$$

### Resumen

- $dU = \dot{d}Q + \dot{d}W$  siempre es cierto
- $\dot{d}Q = T dS$  reversibles
- $\dot{d}W = -p dV$  reversibles
- $\dot{d}W \geq -p dV$  y  $\dot{d}Q \leq T dS$  irreversibles.

### 5.4. Expansión de Joule (Expansión Libre)

Es un proceso irreversible en el cual un gas se expande en un recipiente vacío y aislado. Los gases experimentan un cambio de temperatura durante la expansión libre.

---

<sup>1</sup>Esto funciona por el teorema recíproco y por el teorema de reciprocidad:  $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$ .

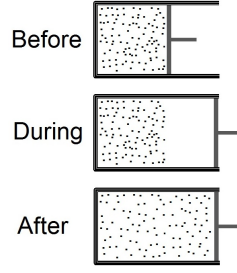
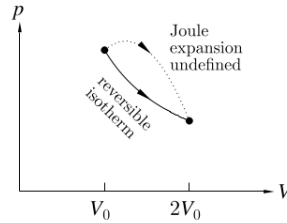


Figura 5.1: También se puede lograr moviendo el pistón hacia fuera más rápido que los átomos del gas.

Durante la expansión libre, ningún trabajo es realizado por el gas. El gas pasa a través de los estados que no están en equilibrio termodinámico antes de llegar a su estado final, lo que implica que no se pueden definir parámetros termodinámicos como valores del gas en su conjunto.

Una expansión libre se consigue típicamente mediante la apertura de una llave de paso que permite que el gas se expanda en un vacío. Aunque sería difícil de lograr en la realidad, es instructivo imaginar una expansión libre causada por un pistón en movimiento más rápido que prácticamente cualquier átomo. Ningún trabajo se hace porque no hay presión sobre el pistón. Sin energía térmica que sale o entra en el pistón. Sin embargo, hay un cambio de entropía.

$$\Delta S = \int_i^f dS = \int_{V_o}^{2V_o} \frac{p dV}{T} = \int_{V_o}^{2V_o} \frac{R dV}{V} = R \ln 2.$$



Luego de que suceda la expansión de Joule, solo se puede poner el gas a la izquierda comprimiéndolo. El método que involucra la menor cantidad de trabajo es una compresión isotérmica, cuyo trabajo para 1 mol de gas es

$$\Delta W = - \int_{2V_o}^{V_o} p dV = - \int_{2V_o}^{V_o} \frac{RT}{V} dV = RT \ln 2 = T \Delta S_{gas}.$$

El incremento de entropía en una expansión de Joule es  $\Delta W/T$ .

## Paradoja?

- En la expansión de Joule, el sistema es aislado térmicamente, por lo que no hay flujo/intercambio de calor:  $\Delta Q = 0$ .

- No hay trabajo realizado:  $\Delta W = 0$ .
- Por ello  $\Delta U = 0$  (para un gas ideal,  $\Delta T = 0$ ).
- Pero si  $\Delta Q = 0$ , esto implica que  $\Delta S = \Delta Q/T = 0$ ?

El razonamiento anterior es correcto hasta la última parte: la respuesta a la última pregunta es **NO!**  
 La ecuación  $dQ = T dS$  es cierto solamente para procesos reversibles. En general  $dQ \leq T dS$ , y se tiene  $\Delta Q = 0$  y  $\Delta S = R \ln 2$ , entonces se tiene que  $\Delta Q \leq T dS$ .

## Capítulo 6

# Termodinámica en Acción

### 6.1. Potenciales Termodinámicos

La energía interna es muy útil, es una función de estado la cual se mantiene cambiando de la misma forma con forme el sistema pase de un estado de equilibrio a otro; sin embargo, a pesar de ser útil, no es única ( **DS: que triste**). Se pueden crear otras funciones de estado dependientes de  $p, V, T$  y  $S$  en alguna combinación que de como resultado unidades de energía; obviamente, muchas de estas combinaciones no representarán ningún sistema físico, pero algunas si tales como:  $H = U + pV$ ,  $F = U - TS$  y  $G = U + pV - TS$ , estas son ecuaciones constitutivas asociadas a un tipo de sistema termodinámico y el calificativo de potencial se debe a que en cierto sentido describe la cantidad de energía potencial disponible en el sistema termodinámico sujeta a ciertas restricciones.

#### 6.1.1. Energía Interna

Directamente, para procesos isocóricos

$$dU = T dS ,$$

y por procesos isocóricos reversibles

$$dU = dQ_{rev} = C_V dT ,$$

por ende

$$\Delta U = \int_{T_1}^{T_2} C_V dT .$$

Esto solo es válido para sistemas a volumen constantes, esto se extenderá a sistemas a volumen constante pero para ello se utilizará lo que veremos a continuación.

#### 6.1.2. Entalpía, $H$

La entalpía se define como: el flujo de energía térmica en los procesos químicos efectuados a presión constante cuando el único trabajo es de presión-volumen

$$H = U + PV.$$

Esta definición junto con la primera ley, implica que

$$dH = T dS + V dp .$$

Las variables naturales de  $H$  son la entropía y la presión. Por lo que podemos dar una forma para un proceso isobárico

$$dH = T dS ,$$

y para un proceso reversible

$$dH = dQ_{rev} = C_p dT ,$$

de modo que

$$\Delta H = \int_{T_1}^{T_2} C_p dT .$$

Esto muestra la importancia de  $H$  para procesos isobáricos reversibles la entalpía representa el calor absorbido por el sistema. También podemos concluir que si  $S$  y  $p$  son constantes, se tiene  $dH = 0$ . Y de la segunda ecuación mostrada se concluye que

$$T = \left( \frac{\partial H}{\partial S} \right)_p ,$$

y

$$V = \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)_S .$$

### 6.1.3. Función de Helmholtz, $F$

También llamada **energía de Helmholtz**, **energía libre de Helmholtz** o **función trabajo**. Es una magnitud extensiva, función de estado y potencial termodinámico, de un sistema termodinámico que mide el trabajo obtenible en un sistema cerrado, en condiciones de temperatura constante. No depende del proceso sufrido, sino del estado final e inicial del sistema. Se usa para ver qué procesos son espontáneos en condiciones de temperatura y volumen constantes. Si el volumen no se mantiene constante, parte del trabajo se efectúa en el entorno.

$$F = U - TS .$$

Mismo procedimiento que la subsección anterior, se tiene que

$$dF = -S dT - p dV .$$

Las variables naturales de  $F$  son el volumen y la temperatura, por lo que para un proceso isotérmico se puede escribir

$$dF = -p dV ,$$

por ende

$$\Delta F = \int_{V_1}^{V_2} p dV .$$

$F$  también representa la cantidad máxima de trabajo que puede llegarse a tener de un sistema a temperatura constante. Dado lo anterior, se tienen las siguientes representaciones

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V,$$

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T.$$

Si  $T$  y  $V$  son constantes, entonces  $dF = 0$ .

#### 6.1.4. Función de Gibbs, $G$

La energía de Gibbs o **función de Gibbs** (entalpía libre) es un potencial termodinámico que se puede usar para calcular el máximo de trabajo reversible que puede realizarse mediante un sistema termodinámico a una temperatura y presión constantes (isotérmica, isobárica). La energía libre de Gibbs es la cantidad máxima de trabajo de no expansión que se puede extraer de un sistema cerrado termodinámicamente (uno que puede intercambiar calor y trabajo con su entorno, pero no materia). Este máximo solo se puede alcanzar en un proceso completamente reversible. Cuando un sistema se transforma reversiblemente de un estado inicial a un estado final, la disminución de la energía libre de Gibbs equivale al trabajo realizado por el sistema en su entorno, menos el trabajo de las fuerzas de presión.

$$G = H - TS.$$

De esto, se tiene

$$dG = -S dT + V dp,$$

Las variables naturales de  $G$  son la temperatura y la presión (las mejores variables para manipular en un laboratorio). En particular, si  $T$  y  $p$  son constantes  $dG = 0$ , lo que implica que  $G$  se conserva en cualquier proceso isotérmico e isobárico. Además se tienen las siguientes expresiones para la entropía y el volumen

$$S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p,$$

y

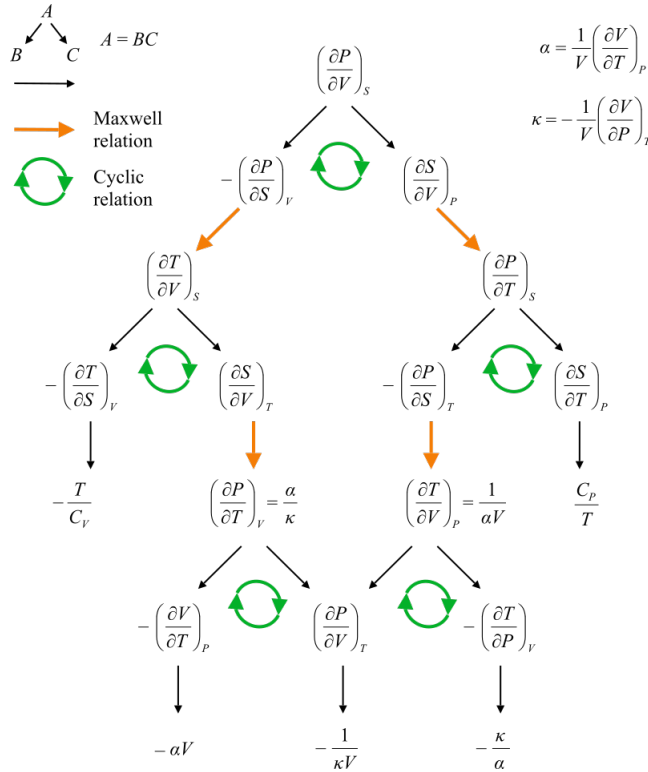
$$V = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T.$$

## Resumen:

Función de Estado		Diferencial	Variables Naturales	Na-	Primeras Derivadas
Energía Interna	$U$	$dU = T dS - p dV$	$U = U(S, V)$		$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V$ $p = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S$
Entalpía	$H = U + pV$	$dH = T dS + V dp$	$H = H(S, p)$		$T = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_p$ $V = -\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S$
Función de Helmholtz	$F = U - TS$	$dF = -S dT - p dV$	$F = F(T, V)$		$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$ $p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$
Función de Gibbs	$G = H - TS$	$dG = -S dT + V dp$	$G = G(T, p)$		$S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p$ $V = -\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T$

### 6.1.5. Relaciones de Maxwell

Las relaciones de Maxwell<sup>1</sup> son un conjunto de ecuaciones termodinámicas derivadas del Teorema de Clairaut<sup>2</sup> y de las definiciones de los potenciales termodinámicos.



Con esto se tienen las relaciones de Maxwell

<sup>1</sup>Para más ejemplos ver Blundell p.173.

<sup>2</sup>enlace a la explicacion

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S &= -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V, \\
\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S &= \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p, \\
\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T &= \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V, \\
\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T &= -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p.
\end{aligned}$$

Buscando algo más general, es claro que las relaciones de Maxwell son de la forma

$$\left(\frac{\partial *}{\partial \dagger}\right)_\star = \pm \left(\frac{\partial \dagger}{\partial \star}\right)_\ddagger,$$

donde los simbolos similares implican **variables conjugadas**, es decir, aquellas cuyo producto da como resultado unidades de energía. Como  $T$  y  $S$ , y  $p$  y  $V$ . Además, que aquellas que tengan el signo negativo son las que tienen a  $T$  y  $V$  del mismo lado de la ecuación.

Una forma alternativa de encontrar las relaciones de Maxwell es por medio del Jacobiano. Considerando un proceso cíclico descrito en los dos planos,  $T - S$  y  $p - V$ . La energía interna es una función de estado y por ende no cambia en un ciclo, de modo que

$$\oint T \, dS = \oint p \, dV,$$

$$\iint dp \, dV = \iint dT \, dS,$$

de modo que el trabajo hecho (área bajo el ciclo en el plano  $p - V$ ) es igual al calor absorbido (área encerrada por el ciclo en el plano  $T - S$ ). También podemos escribir

$$\iint dp \, dV \frac{\partial(T, S)}{\partial(p, V)} = \iint dT \, dS,$$

donde el nuevo término es el Jacobiano de la transformación del plano  $p - V$  al plano  $T - S$ , lo que implica que

$$\boxed{\frac{\partial(T, S)}{\partial(p, V)} = 1.}$$

Esta ecuación es suficiente para generar las cuatro relaciones de Maxwell por medio de

$$\frac{\partial(T, S)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(p, V)}{\partial(x, y)},$$

donde  $(x, y)$  es tomado como  $(T, p)$ ,  $(T, V)$ ,  $(p, S)$ ,  $(S, V)$ .



## Capítulo 7

# Tercera Ley de la Termodinámica

La tercera ley nos da información adicional ya que provee el valor de la entropía a una temperatura en particular, llamada cero absoluto.

### 7.1. Enunciados de la Tercera Ley

El tercer principio fue desarrollado por el químico Walter Nernst. Postula que la entropía de un sistema en el cero absoluto es una constante definida.

- **Enunciado de Nernst:** Cerca del cero absoluto, todas las reacciones de un sistema en equilibrio interno se dan sin cambios en la entropía.
  - Al llegar al cero absoluto cualquier proceso de un sistema físico se detiene.
  - Al llegar al cero absoluto la entropía alcanza un valor mínimo y acelerado.
- **Enunciado de Plancks:** La entropía de todos los sistemas en equilibrio interno es la misma en el cero absoluto, y debería ser tomada como cero.
- **Enunciado de Simon:** La contribución a la entropía de un sistema por cada aspecto del sistema que está en equilibrio termodinámico interno tiende a cero como  $T \rightarrow 0$ .

Si la entropía de cada elemento en algún estado cristalino (perfecto) se tomase como cero en el cero absoluto de temperatura, cada sustancia tiene una entropía finita y positiva, pero en el cero absoluto de temperatura la entropía puede llegar a ser cero y eso lo convierte en el caso de una sustancia cristalina perfecta.

### 7.2. Consecuencias de la Tercera Ley

Teniendo todos los enunciados de la tercera ley, se tienen algunas de las siguientes consecuencias:

1. *Las capacidades caloríficas tienden a cero cuando  $T \rightarrow 0$ :* Es trivial teniendo  $C = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)$ .

2. *La expansión térmica se detiene:* Como  $S \rightarrow 0$  cuando  $T \rightarrow 0$ , se tiene

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T \rightarrow 0$$

cuando  $T \rightarrow 0$ , pero por la relación de Maxwell implica que

$$\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \rightarrow 0$$

por lo que la expansividad isobárica.

3. *Ningún gas se mantiene como ideal cuando  $T \rightarrow 0$ :* Solo hace falta ver las capacidades caloríficas cuando la temperatura tiende a cero.
4. *La Ley de Curie se rompe:* DS: No considero que valga la pena explicar esto, si les es útil revisar Blundell p.197-198.

Parte II

Mecánica Estadística

*Ludwig Boltzmann, quien dedicó gran parte de su vida a estudiar Mecánica Estadística, murió en 1906, por su propia mano. Paul Ehrenfest, el cual continuó con su trabajo, murió de manera similar en 1933. Ahora nos toca a nosotros...*

*El plan de la Mecánica Estadística es establecer una conexión entre el nivel microscópico descrito por la mecánica y esos mismos sistemas considerados pero a nivel macroscópico.*

## Capítulo 8

# Entropía y Temperatura

### 8.1. Macroestados y Microestados

Un **microestado** es la especificación detallada de una configuración microscópica de un sistema termodinámico. En otras palabras, un microestado es un punto del espacio fásico de dicho sistema. Mientras que un **macroestado** se refiere a una caracterización de un sistema termodinámico mediante los valores de un número finito de  $n$  variables de estado, de las cuales al menos una debe ser extensiva. Un macroestado viene dado por una distribución de probabilidad sobre un conjunto dado de microestados; en función del conjunto de microestados considerando, la distribución toma una u otra forma. Un sistema en equilibrio permanece en un macroestado (macroestado de equilibrio) mientras visita los diferentes microestados accesibles a lo largo de sus fluctuaciones.

### 8.2. Ensambls

Un ensamble estadístico (colectividad estadística) se define como un conjunto hipotético de sistemas termodinámicos de características similares que nos permiten realizar un análisis estadístico de dicho conjunto, en otras palabras, un conjunto de microestados. Existen varios tipos de ensambles:

**Ensamble Microcanónico:** Un ensamble de sistemas termodinámicos que no intercambian energía ni materia con el entorno.

**Ensamble Canónico:** Un ensamble de sistemas que intercambian energía pero no materia con el entorno.

**Ensamble Macrocanónico:** Un ensamble de sistemas que intercambian materia y energía con el ambiente.

La forma de función de partición para cada tipo de ensamble es:

**Microcanónico:**  $\Omega(U, V, N) = e^{\beta TS}$ , sistema cerrado y aislado (energía constante y entropía máxima).

**Canónico:**  $Z(T, V, N) = e^{-\beta A}$ , sistema cerrado con energía variable y temperatura fijada.

**Macrocanónico:**  $\Xi(T, V, \mu) = e^{\beta p V}$ <sup>1</sup>, sistema abierto.

---

<sup>1</sup>Donde  $\mu$  es el potencial químico.

## 8.3. Conteos

Técnicas básicas de conteo y sus fórmulas. Estas serán importantes para la deducción de las estadísticas o distribuciones de Boltzmann, Fermi-Dirac y Bose-Einstein.

### 8.3.1. Conteos Básicos

**Cardinalidad:** Sea  $A$  un conjunto finito, la cardinalidad de  $A$  ( $|A|$ ) es el número de elementos de  $A$ .

**Conjuntos Distintos:** Dos conjuntos  $A$  y  $B$  son distintos ssi  $A \cap B = \emptyset$ .

**Regla de la Suma:** Sean  $A$  y  $B$  conjuntos distintos  $|A \cup B| = |A| + |B|$ , esto es válido para  $n$  conjuntos distintos.

**Producto Cartesiano:** Sea  $A$  y  $B$  dos conjuntos cualesquiera, el producto cartesiano  $A \times B$  se define de la siguiente forma

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Igual que la anterior, esto es válido para  $n$  conjuntos cualesquiera.

**Regla de la Multiplicación:**  $|A_1 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdots |A_n|$ .

Casos de conteo básico

**Disposiciones:** Sea  $A$  un conjunto con  $n$  elementos. Una disposición de rango  $k$  del conjunto  $A$  es una elección (escogencia) de  $k$  elementos de  $A$  donde:

1. Si se puede repetir
2. Si importa el orden

$D_n^k$  = Conjunto de disposiciones de  $k$  elemento del conjunto  $A$ .

$$\boxed{|D_n^k| = n^k.}$$

**Permutaciones:** Sea  $A$  un conjunto con  $n$  elementos. Una permutación de rango  $k \leq n$  es una elección de  $k$  elementos de  $A$  donde:

1. No se puede repetir
2. Si importa el orden

$P_n^k$  = Conjunto de permutaciones.  $P_n^k = |P_n^k|$  = Número de permutaciones.

$$\boxed{P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.}$$

**Ordenaciones:** Una ordenación es un caso especial de permutaciones, donde se eligen los  $n$  elementos del conjunto  $A$ . Osea que una ordenación es una permutación donde  $k = n$ .

$$\boxed{\text{Número de Ordenaciones} = n!}.$$

**Permutaciones con Repetición (Boltzmann):** Sea  $A$  un conjunto con  $n$  elementos y vamos a escoger  $k$  elementos donde sí importa el orden y el elemento  $a_i$  se repite  $k_i$  veces. A este tipo de escogencia se le llama permutación con repetición.

$$\boxed{\text{Número de Permutaciones con Repetición} = \frac{k!}{k_1! \cdots k_n!}}.$$

Debido a que  $a_i$  lo escogemos  $k_i$  veces y si diferenciamos cada elección de  $a_i$  formaríamos un conjunto con  $k$  elementos y estos  $k$  elementos se pueden ordenar de  $k!$  formas, pero luego no lo diferenciamos y tendríamos  $k_i$  ordenaciones iguales y por lo tanto dividimos por  $k_i!$  para todo  $i$  para contar las ordenaciones diferentes.

El ensamble microcanónico es el conjunto de todos los microestados que tienen la distribución permitida de máxima entropía.

**Coficiente Binomial:**

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

**Propiedad 1:** Simetría

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

**Propiedad 2:** Triángulo de Pascal

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

**Binomio de Newton:**

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

**Teorema:**

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

**Combinaciones (Fermi-Dirac):** Sea  $A$  un conjunto con  $n$  elementos. Una combinación de  $k$  elementos en  $n$  elementos es una elección de  $k$  elementos del conjunto  $A$  donde

1. No se puede repetir
2. No importa el orden

$\mathcal{C}_k^n = \{\text{Combinaciones de } k \text{ elementos en } n \text{ elementos.}\}$  Priemro elijamos  $k$  elementos en forma ordenada, como si fueran permutaciones y luego dividimos entre todas las ordenaciones de los  $k$  elementos.

$$\boxed{C_k^n = \binom{n}{k}}.$$

**Distribución (Bose-Einstein):** Sea  $A$  un conjunto de  $n$  elementos. Una distribución es una elección de  $k$  elementos de  $A$  donde:

1. Si se puede repetir
2. No importa el orden

$\mathcal{D}_k^n =$  Distribuciones de  $k$  en  $n$ .

$$\text{Número de Distribuciones} = \binom{n-1+k}{k} = \binom{n-1+k}{n-1}.$$

### 8.3.2. Fórmula de Stirling

La fórmula de Stirling es una aproximación de la función factorial de un número natural  $n$ , que es especialmente útil para grandes valores de  $n$ .

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

esta aproximación puede representarse también de forma logarítmica

$$\ln n! \approx n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln 2\pi n.$$

La precisión de esta fórmula mejora a medida que  $n$  aumenta.

## 8.4. Entropía y Función de Partición

En nuestro problema básico de Mecánica Estadística tenemos  $n$  partículas distinguibles entre sí y tenemos  $k$  estados y en cada estado pueden haber cualquier número de partículas. Además cada estado se identifica con su nivel de energía. Diferentes estados pueden tener el mismo nivel de energía. Lo anterior lo decimos, formalmente, que la energía puede estar degenerada. En general, la energía no nos sirve de índice; la energía sirve de índice solamente cuando no hay degeneración. Siempre es requerido conocer la función de degeneración.

En este problema tenemos 2 restricciones, el número de partículas es  $n$  y la energía total es  $E$ . Lo único que se respeta son esas dos restricciones. Las partículas solamente obedecen las restricciones, todo lo demás es completamente aleatorio. Cuando una distribución respeta las restricciones decimos que es una distribución admisible o posible; cuando una distribución no respeta las restricciones decimos que es una distribución imposible o inadmisibile. En este momento una distribución es función que le asigna  $n_i$  partículas al estado  $E_i$ ; osea que la función va sobre los índices.



Osea que, una distribución se puede escribir de a siguiente forma

$$(n_1, \dots, n_k)$$

y está sujeta a las siguientes restricciones

$$\sum_{i=1}^k n_i = n \quad \sum_{i=1}^k n_i E_i = E.$$

También tenemos que, por ahora, las partículas son distinguibles por lo tanto definimos como microestado a una función que asigna a cada partícula un estado. Los microestados que dan una distribución admisible se llaman microestados admisibles o posibles. Los microestados que dan una distribución inadmisibles o imposible se llaman microestados inadmisibles o imposible. *Microestados diferentes pueden dar la misma distribución.*

#### 8.4.1. Postulado Básico

Todos los microestados admisibles tienen la misma probabilidad de salir.

Microestados inadmisibles tienen probabilidad cero de salir, son imposibles.

Como consecuencia de los postulados, la distribución más probable es la distribución que tenga más microestados admisibles. Por lo tanto, tenemos que contar microestados de cada distribución admisible y luego escoger la que tenga más microestados admisibles.

#### 8.4.2. Conteo de Microestados

El número de microestados admisibles de la distribución admisible  $(n_1, \dots, n_k)$  con  $n = n_1 + \dots + n_k$  es:

$$\Omega(n_1, \dots, n_k) = \text{Número de microestados de la distribución.}$$

$$\Omega(n_1, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}.$$

**QUEREMOS MAXIMIZAR  $\Omega$ !**

#### 8.4.3. Problema Básico de Mecánica Estadística

Maximizar

$$\Omega(n_1, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}$$

sujeeto a

$$\sum_{i=1}^k n_i = n \quad \sum_{i=1}^k n_i E_i = E.$$

Para facilitar la solución se utiliza la fórmula de Stirling. Con esto llegamos a que  $p_i = \frac{n_i}{n}$  cuya interpretación es probabilidad. De lo anterior tenemos que

$$\sum_{i=0}^k p_i = 1.$$

**Teoría de probabilidades**, es el estudio de las variables aleatorias y sus propiedades. **Estadística**; es el estudio y desarrollo de teorías y técnicas para medir, establecer, calcular o estimar, variables aleatorias. Continuando con el procedimiento de maximizar, se tiene que

$$S = -k_B \sum_{i=0}^k p_i \log p_i.$$

Ahora tenemos la siguiente equivalencia de dos problemas

Maximizar

$$\Omega(n_1, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^k n_i = n \quad \sum_{i=1}^k n_i E_i = E.$$

$\Leftrightarrow$

Maximizar

$$S = -k_B \sum_{i=0}^k p_i \log p_i$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^k p_i = 1 \quad \sum_{i=1}^k p_i E_i = E.$$

Maximizando la segunda equivalencia se llega a que

$$\ddagger = e^{1+\alpha} \quad \alpha + 1 = \log \ddagger$$

entonces

$$\ddagger(\beta) = \sum_{i=1}^k e^{-\beta E_i}, \quad \beta = \frac{1}{k_B T}.$$

#### 8.4.4. Valor Esperado de $E_i$

Ahora calculamos el valor esperado de la variable aleatoria  $E_i$ .

$$\langle E_i \rangle = \sum_{i=0}^k p_i E_i.$$

La forma de calcular o estimar una variable aleatoria es muestreandola.

Para la distribución de Boltzmann, podemos calcular el valor esperado de la siguiente forma, usando la función de partición.

$$\mathfrak{z} = \sum_{i=0}^k e^{-\beta E_i},$$

derivando respecto a  $\beta$  se tiene que

$$\frac{1}{\mathfrak{z}} \frac{d\mathfrak{z}}{d\beta} = -\varepsilon.$$

A continuación vamos a ver que  $\log \mathfrak{z}$  juega un papel importante en Mecánica Estadística. Derivando  $\log \mathfrak{z}$  tenemos lo siguiente usando la regla de la cadena.

$$\frac{d \log \mathfrak{z}}{d\beta} = -\varepsilon.$$

#### 8.4.5. Entropía v2

La entropía como se mostró anteriormente es como una densidad de entropía. Ahora, operando llegamos a que

$$S = k_B(\beta\varepsilon + \log \mathfrak{z}).$$

y ojo que  $S$  no depende de  $\beta$  (esto se puede probar diferenciando la expresión anterior llegamos a que  $\frac{\partial S}{\partial \beta} = 0$ ). De esto tenemos que

$dS = \frac{d\varepsilon}{T} \quad \frac{dS}{d\varepsilon} = k_B\beta.$
---

#### 8.4.6. Función de Helmholtz

$$F = -\frac{\log \mathfrak{z}}{\beta}$$

Tomando la definición de entropía y reemplazando  $\frac{1}{T} = k_B\beta$ . Entonces, se tiene

$$F = \varepsilon - TS.$$

Y queda claro también que  $\varepsilon$  no depende solamente de  $T$  sino que también de la entropía. Notamos lo siguiente  $dF = d\varepsilon - T dS - S dT$  por ende

$$dF = -S dT$$

Lo que implica que la función de Helmholtz depende solamente de la temperatura y no de la energía<sup>2</sup> ni entropía.

---

<sup>2</sup> $\varepsilon$ : Energía Media

### 8.4.7. Calor Específico

#### Varianza

Es conocida la definición de  $VAR = \langle E_i^2 \rangle - \varepsilon^2$ . Esto se relaciona con la función de partición de la siguiente forma

$$\frac{1}{\mathfrak{z}} \frac{d^2 \mathfrak{z}}{d\beta^2} = \langle E_i^2 \rangle,$$

Por ende

$$\boxed{\frac{d^2 \log \mathfrak{z}}{d\beta^2} = VAR(E_i).}$$

Utilizando la regla de la cadena y la definición de energía media

$$c_v = \frac{d\varepsilon}{dT},$$

**Calor específico a volumen constante.** Por la misma regla de la cadena, se tiene que

$$VAR(E_i) = c_v k_B T^2.$$

## Capítulo 9

# Elementos de la Teoría de los Ensambls

### 9.1. Generalidades de la Teoría de Ensambls

- Un microestado de un sistema clásico, en un tiempo  $t$ , está definido por las posiciones y momenta de todas las partículas que constituyen al sistema.
- Las coordenadas  $(q_i, p_i)$  representan un punto en un espacio de  $6N$  dimensiones conocido como espacio de fases.
- Función de densidad  $\rho(q, p; t)$ : para describir mejor los ensambles de microestados en los que puede encontrar un sistema. Esta función es tal que el número de puntos representativos dentro del elemento de volumen  $d^{3N}q d^{3N}p$  alrededor del punto  $(q, p)$  del espacio de fases está dado por el producto  $\rho(q, p; t) d^{3N}q d^{3N}p$ .
- El promedio del ensamble  $\langle f \rangle$  de una cantidad física  $f(q, p)$  está dado por

$$\langle f \rangle = \frac{\int f(q, p) \rho(q, p; t) d^{3N}q d^{3N}p}{\int \rho(q, p; t) d^{3N}q d^{3N}p}.$$

- **Teorema de Liouville:** Consideremos una región de volumen arbitrario  $\omega$ , cuya superficie la vamos a denotar por  $\sigma$ . Entonces, la tasa a la que el número de puntos representativos en este elemento de volumen aumenta con el tiempo es

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\omega} \rho d\omega.$$

Por otro lado, el flujo hacia afuera de  $\omega$  está dado por

$$\int_{\sigma} \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma.$$

Por el teorema de la divergencia<sup>1</sup>

$$\int_{\omega} \nabla \cdot \rho \mathbf{v} d\omega.$$

---

<sup>1</sup>  $\iint_{\partial U} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_U \nabla \cdot \mathbf{F} dV$ , donde  $S = \partial U$ .

En vista que no hay fuentes ni sumideros

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho d\omega = - \int_{\omega} \nabla \cdot \rho \mathbf{v} d\omega,$$

por lo que

$$\int_{\omega} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \right) d\omega = 0.$$

Por lo cual se tiene que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0,$$

y esta ecuación es conocida como la ecuación de la continuidad. Trabajando más esta ecuación

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=0}^{3N} \left( \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \rho \sum_{i=0}^{3N} \left( \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) = 0.$$

Recordando las ecuaciones de Hamilton:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H(q_i, p_i)}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= - \frac{\partial H(q_i, p_i)}{\partial q_i}. \end{aligned}$$

Usando las ecuaciones de Hamilton notamos que el tercer término de la ecuación de continuidad se hace cero, por consiguiente llegamos al resultado conocido como el **teorema de Liouville**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \{\rho, H\} = 0,$$

donde  $\{\rho, H\}$  es el bracket de Poisson. La consecuencia física de este teorema es que las trayectorias en el espacio de fases se mueven de la misma manera que un fluido incompresible.

- **Ensamble Canónico:**  $E = \text{cte.}$
- **Ensamble microcanónico:** El macroestado del ensamble microcanónico de un sistema está definido por el número de moléculas  $N$ , el volumen  $V$  y la energía  $E$ . El ensamble microcanónico es una colección de sistemas para los cuales la función de densidad  $\rho$  está dada por

$$\rho(q, p) = \text{cte.} \quad \text{si} \quad \left( E - \frac{1}{2}\Delta \right) \leq H(q, p) \leq \left( E + \frac{1}{2}\Delta \right).$$

- El resultado fundamental es llegar a la energía libre de Helmholtz.
- El formalismo del ensamble microcanónico y canónico son equivalentes.
- **Teorema de Equipartición:** Cada término armónico en el Hamiltoniano transformando de un sistema contribuye  $\frac{1}{2}kT$  a la energía interna del sistema. Dicho de otro modo, cada grado de libertad aporta la misma cantidad al valor esperado de la energía del sistema total. No obstante, el teorema de equipartición es válido para valores de temperatura muy altos, osea cuando los grados de libertad relevantes del sistema pueden ser excitados libremente.

■

$$-\left\langle \sum_i q_i \dot{p}_i \right\rangle = 3NkT,$$

donde

$$\mathcal{V} = -3NkT,$$

es llamado el virial del sistema. Cuando se considera a un gas ideal esto se reduce a la relación clásica:

$$\mathcal{V} = -2K,$$

con  $K$  la energía cinética del sistema.

## 9.2. Osciladores Armónicos

Asumiendo osciladores armónicos en una dimensión el hamiltoniano  $H$  del sistema es

$$H(q_i, p_i) = \sum_i \frac{1}{2} m \omega^2 q_i^2 + \frac{1}{2m} p_i^2.$$

Al calcular la función de partición  $\mathfrak{z}$  de un oscilador armónico

$$\mathfrak{z} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\beta \left( \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 + \frac{1}{2m} p^2 \right) \right\} \frac{dq dp}{h},$$

$$\frac{1}{h} \left( \frac{2\pi}{\beta m \omega^2} \right)^{1/2} \left( \frac{2\pi m}{\beta} \right)^{1/2} = \frac{1}{\beta \hbar \omega} = \frac{kT}{\hbar \omega}.$$

De manera que entonces la función de partición del sistema completo es

$$\mathfrak{z} \left( \frac{kT}{\hbar \omega} \right)^N.$$

La energía libre de Helmholtz está dada por

$$A = -kT \ln \mathfrak{z} = -NkT \ln \mathfrak{z}.$$

De manera que las otras variables termodinámicas son

$$S = \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_{N,V}$$

$$= Nk \left[ \ln \frac{kT}{\hbar \omega} + 1 \right]$$

y

$$U = \frac{\partial \ln \mathfrak{z}}{\partial \beta} = NkT.$$

## Capítulo 10

# Gas Ideal

El gas ideal es el primer ejemplo para ilustrar la teoría que hemos desarrollado. En este ejemplo consideramos  $N$  moles de átomos de un gas ideal, como el helio, en un volumen cúbico  $V$  que tiene de lato  $L$ , osea que  $V = L^3$ . El cubo está aislado y esta a una presión y temperatura fija.

En primera instancia vamos a conceptualizar en forma clásica. Las partículas son iguales, tienen masa  $m$  pero son distinguibles. ¿Qué usamos de índice para indicar los estados?

$$i = (x, y, z, p_x, p_y, p_z) = (\vec{r}, \vec{p})$$

¿Cuánto vale  $E_i$ ? Vamos a ignorar la energía potencial gravitacional y otras energías potenciales; entonces  $E_i$  es energía cinética

$$E(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{p^2}{2m}.$$

Ahora calculamos la función de partición (la cual es adimensional)

$$\mathfrak{z}(\beta) = \frac{1}{h^3} \int_0^L \int_0^L \int_0^L \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\beta p^2}{2m}} dx dy dz dp_x dp_y dp_z.$$

Realizamos la integral y se tiene que

$$\mathfrak{z}(\beta) = \frac{L^3}{h^3} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\beta p_x^2}{2m}} dp_x \right)^3.$$

Utilizando las propiedades de la función Gamma<sup>1</sup>

$$\mathfrak{z}(\beta) = \frac{L^3}{h^3} \left( \frac{2m\pi}{\beta} \right)^{3/2}.$$

aplicando el logaritmo y derivando respecto a  $\beta$  se tiene

$$\varepsilon = \frac{3}{2} k_B T.$$

Para el caso cuántico cambia la  $h$  por  $\hbar$ .

---

<sup>1</sup>  $\int_0^{\infty} t^n e^{-at^k} dt = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{k}\right)}{ka^{\frac{n+1}{k}}}.$



## Concentración Cuántica

$n_Q$  = Concentración cuántica

$$n_Q = \frac{\mathfrak{z}(\beta)}{V}.$$

Dado que la función de partición es adimensional; por lo tanto, las dimensionales de  $n_Q$  son  $[1/m^3]$ . Y para el gas ideal nos queda de la siguiente forma

$$n_Q = \frac{1}{\hbar^3} \left( \frac{mk_B T}{2\pi} \right)^3$$

## Longitud de Onda Térmica

$\lambda_Q$  = Longitud de onda térmica.

$$\lambda_Q = n_Q^{-1/3}$$

Para el gas ideal nos queda

$$\lambda_Q = \hbar \sqrt{\frac{2\pi}{mk_B T}}.$$

## 10.1. Cálculo de Probabilidades

Recordemos que las probadilidades vienen dadas por

$$p_i = \frac{e^{-\beta E_i}}{\mathfrak{z}}$$

en este caso  $i = (p_x, p_y, p_z) = \vec{p}$  que nos sirve para identificar los estados. Cambiaremos  $i$  por  $\vec{p}$  y de  $p_i$  a  $f(\vec{p})$ .  $f(\vec{p})$  es la función densidad de probabilidad sustituyendo  $\mathfrak{z}(\beta)$

$$f(\vec{p}) = \frac{\hbar^3}{V} \left( \frac{2\pi\beta}{m} \right)^{3/2} e^{-\beta \frac{p^2}{2m}}.$$

### 10.1.1. Función de Densidad de $p$

Utilizando la función densidad de probabilidad e integrando para las tres coordenadas de  $p$  (en esféricas). Con lo que llegamos a

$$g(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{\beta}{m} \right)^{3/2} p^2 e^{-\frac{\beta p^2}{2m}}.$$

$g(p)$  = función de densidad de probabilidad de variable  $p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$ .

**Moda:**  $p = \sqrt{\frac{2m}{\beta}}$ .

**Valor Esperado:**  $\langle p \rangle = \frac{2m^2}{\beta^2} = 2k_B^2 m^2 T^2$ .

### 10.1.2. Energía Cinética

En este caso, del gas ideal, la energía cinética de la partícula es toda su energía o Hamiltoniano. Ya sabemos que  $K = p^2/2m$

$$g(p) \, dp = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{\beta}{m} \right)^{3/2} p^2 e^{-\frac{\beta p^2}{2m}} \, dp,$$

reemplazando todo por la energía cinética, se tiene  $h(K)$  = densidad de probabilidad de Energía Cinética

$$h(K) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \beta^{3/2} \sqrt{K} e^{-\beta K}.$$

**Moda:**  $K = \frac{\beta}{2}$ .

**Valor Esperado:**  $\langle K \rangle = \langle E \rangle = \varepsilon = \frac{3}{2\beta} = \frac{3}{2} k_B T = -\frac{d \log \mathfrak{z}}{d\beta}$ .

# Capítulo 11

## Modelo de Einstein

En un sólido, la energía puede estar almacenada en vibraciones de los átomos (ordenados en forma de **lattice**). De igual forma que los fotones son ondas electromagnéticas cuantizadas **DS: revisar esta palabra que ando bien pendejo y no recuerdo como se dice xd**, los **fonones** son ondas reticulares cuantifiadas (quantized lattice waves) que describen las excitaciones elementales de vibraciones de la lattice. En lugar de concentrarnos en la vibración de cada átomo, nos concentraremos en los modos normales del sistema. Cada uno de los modos normales es un oscilador armónico simple y contiene un número entero de cuantos de energía. Estos cuantos de energía pueden ser considerados partículas discretas, llamadas **fonones**. Para estas descripciones se tiene dos modelos: el de Einstein y el de Debye.

### 11.1. Calor Específico de un Sólido

En un sólido, las oscilaciones de un átomo son pequeñas y siguen las reglas de la Mecánica Cuántica  $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ . (**DS: Hasta después se verá bien la mecánica cuántica.**)

Calculando el calor específico, utilizando la función de partición

$$\mathfrak{z}(\beta) = \sum_{n_x=0}^{\infty} \sum_{n_y=0}^{\infty} \sum_{n_z=0}^{\infty} e^{-\beta(E_{n_x} + E_{n_y} + E_{n_z})}$$

debido a que  $n_x, n_y, n_z$  son índices mudos tenemos que

$$\mathfrak{z}(\beta) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\hbar\omega(n+1/2)} \right)^3$$

operando igual que el ejemplo tenemos que

$$\mathfrak{z}(\beta) = \left( \frac{e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \right)^3.$$

Calculando el logaritmo, su derivada, desarrollando un poco y tomando temperaturas altas se concluye que  $c_v = 3k_B$ .

## Capítulo 12

# Gas Diatómico

Luego de trabajar con gases ideales monoatómicos y sólidos, se trabajará con el gas diatómico, encontrando el calor específico y la capacidad calorífica. Recordando que para el gas ideal la función de partición

$$\mathfrak{z}(\beta) = \frac{V}{h^3} \left( \frac{m}{2\beta\pi} \right)^{3/2},$$
$$\log \mathfrak{z} = \log V - 3 \log h + \frac{3}{2} \log \frac{m}{2\pi} - \frac{3}{2} \log \beta.$$

con esto, para un gas ideal el calor específico es  $c_v = \frac{3}{2}k_B$  y la capacidad calorífica molar es  $C_v = N_A c_v$ .

### 12.1. Cálculo de la Función de Partición para un Gas Diatómico

La molécula diatómica tiene tres tipos de energía

1. Energía cinética de traslación
2. Energía cinética de rotación
3. Energía cinética de vibración

El índice elegido será:  $i = (n_x, n_y, n_z, l, m, n)$ ; por lo que la función de partición queda de la siguiente forma

$$\mathfrak{z}(\beta) = \mathfrak{z}_T \mathfrak{z}_R \mathfrak{z}_V,$$

la que incluye las funciones por traslación, rotación y vibración. La única conocida es la función de partición para la traslación **DS: Misma que el gas ideal.**

#### 12.1.1. Cálculo de $\mathfrak{z}_R(\beta)$

El índice es  $(l, m)$

$$\mathfrak{z}_R(\beta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l e^{-\beta E_{l,m}},$$

pero  $L^2 |l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1)$  ( **DS: Esto es de cuántica, se entenderá bien en la siguiente parte.**) La energía cinética de rotación  $\frac{1}{2}I\omega$  pero  $L = I\omega$  por lo tanto  $E_R = \frac{L^2}{2I}$

$$E_{l,m} = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1)$$

o sea que

$$\mathfrak{z}_R(\beta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \exp\left\{-\frac{\beta\hbar^2}{2I} l(l+1)\right\}.$$

tenemos  $2l+1$   $m$ 's, entonces

$$\mathfrak{z}_R = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \exp\left\{-\frac{\beta\hbar^2}{2I} l(l+1)\right\},$$

integrando (se tiene el diferencial completo) se tiene

$$\mathfrak{z}_R = \frac{2Ik_B T}{\hbar^2},$$

$$\frac{d^2 \log \mathfrak{z}_R}{d\beta^2} = \frac{1}{\beta^2} = k_B^2 T^2.$$

### 12.1.2. Cálculo de $\mathfrak{z}_V(\beta)$

En este caso no hay degeneración

$$\mathfrak{z}_V(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n},$$

pero  $E_n = \hbar\omega(n+1/2)$ . Reemplazando y simplificando

$$\mathfrak{z}_V(\beta) = \frac{e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} = \frac{1}{\sinh \frac{\beta\hbar\omega}{2}},$$

simplificando para  $T \rightarrow \infty$

$$\mathfrak{z}_V(\beta) \approx \frac{1}{\hbar\omega\beta},$$

$$\frac{d \log \mathfrak{z}_V}{d\beta} = -\frac{1}{\beta}.$$

### 12.1.3. Cálculo para $T$ grande

Se tiene

$$\frac{d \log \mathfrak{z}}{d\beta} = -\frac{3}{2\beta} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} = -\frac{7}{2\beta},$$

$$\frac{d^2 \log \mathfrak{z}}{d\beta^2} = \frac{7}{2\beta^2} = \frac{7k_B^2 T^2}{2}.$$

Por ende  $c_v = \frac{7k_B}{2}$ . La capacidad calorífica molar es  $C_V = N_A c_v$ .

#### 12.1.4. Capacidad Calorífica para Gases Nobles

Para gases nobles como el helio, solamente se toman en cuenta la traslación y rotación.

$$\mathfrak{z}(\beta) = \mathfrak{z}_T \mathfrak{z}_R$$

entonces  $c_v = \frac{5}{2}k_B$ .

## Capítulo 13

# Repaso de Termodinámica

### 13.1. Generalidades

Se repasarán conceptos termodinámicos a partir de la función de partición. La función de partición utilizada hasta ahora ha sido  $\mathfrak{z}$  la cual depende de  $\beta$  y ahora también consideraremos que depende del volumen. Ahora el volumen también será variable. Si por medio de un baño térmico logramos mantener la temperatura constante y a flujo de energía cambia el volumen o la presión.

Recordemos que para definir la entropía  $S$  la dividimos por el número de partículas  $n$ . Para tener entropía total, tenemos la siguiente variable

$$S_B = nS \quad \text{y} \quad E = n\varepsilon.$$

Recordemos que

$$S = k_B(\beta\varepsilon + \log \mathfrak{z}) \quad \Rightarrow \quad S_B = k_B(\beta E + \log \mathfrak{z}^n),$$

y definimos otra variable, que es la función de partición  $\mathcal{Z} = \mathfrak{z}^n$ , por ende

$$\boxed{S_B = (\beta E + \log \mathcal{Z})}$$

Factorizando

$$S_B = k_B \beta \left( E + \frac{\log \mathcal{Z}}{\beta} \right),$$

y definimos la Energía Libre de Helmholtz de la siguiente forma

$$\boxed{A = -\frac{\log \mathcal{Z}}{\beta}}.$$

y observemos que  $A = -n\frac{\log \mathfrak{z}}{\beta}$  pero  $F = -\frac{\log \mathfrak{z}}{\beta}$  donde  $F$  es la función de Helmholtz que es un promedio de energía libre. Por lo tanto

$$\boxed{A = nF}$$

Reemplazando en la entropía

$$\boxed{E = TS_B + A.}$$

Observemos lo siguiente

$$S_B = k_B(\beta E + \log \mathcal{Z})$$

ahora consideramos que  $\mathcal{Z}(\beta, V)$ , encontrando el diferencial

$$dS_B = k_B \left( \beta dE + \left( \frac{\partial \log \mathcal{Z}}{\partial V} \right) dV \right)$$

La entropía  $S_B$  no depende de  $\beta$ , por otro lado

$$dS_B = \left( \frac{\partial S_B}{\partial E} \right)_V dE + \left( \frac{\partial S_B}{\partial V} \right)_E dV$$

por lo tanto

$$\boxed{T dS_B dE - \left( \frac{\partial A}{\partial V} \right)_V dV.}$$

## 13.2. Presión

Por definición clásica de presión  $F dx = P(\text{area}) dx = dW = -dE$ . Para definir la presión, tenemos que la entropía es constante.

$$P = - \left( \frac{dE}{dV} \right)_{S_B} = - \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_{S_B}$$

$$P = - \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_{S_B}.$$

Utilizando la energía libre de Helmholtz tenemos que

$$P = - \left( \frac{\partial A}{\partial V} \right)_T,$$

entonces

$$dE = T dS_B - P dV.$$

De la expresión anterior tenemos que la energía total  $E$  depende de la entropía total  $E$  y del volumen  $V$ .  $E$  es independiente de la temperatura  $T$ . También podemos decir que la entropía total  $S_B$  depende de la energía total  $E$  y del volumen  $V$  pero no depende de la temperatura  $T$ .

Ahora trabajamos con la energía libre de Helmholtz y simplificando su diferencial, se tiene

$$dA = -p dV - S_b dT,$$

$$dA = \left( \frac{\partial A}{\partial V} \right)_T dV + \left( \frac{\partial A}{\partial T} \right)_V dT.$$

por lo tanto

$$\left( \frac{\partial A}{\partial V} \right)_T = -P, \quad \left( \frac{\partial A}{\partial T} \right)_V = -S_B.$$



### 13.3. Entalpía

Introducimos el concepto de entalpía

$$H = E + PV$$

Encontrando su diferencial, esta depende de la entropía y la presión

$$dH = T dS_B + V dP,$$

$$dH = \left( \frac{\partial H}{\partial S_B} \right)_P dS_B + \left( \frac{\partial H}{\partial P} \right)_{S_B} dP.$$

entonces

$$\left( \frac{\partial H}{\partial S_B} \right)_P = T, \quad \left( \frac{\partial H}{\partial P} \right)_{S_B} = V.$$

### 13.4. Función de Gibbs

La función de Gibbs tiene las siguientes formas equivalentes de escribirse

$$G = E + PV + TS_B,$$

$$G = H - TS_B,$$

$$G = A + PV.$$

Encontrando su diferencial

$$dG = V dP - S_B dT,$$

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial P} \right)_T dP + \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_P dT.$$

entonces

$$\left( \frac{\partial G}{\partial P} \right)_T = V,$$

$$\left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_P = -S_B.$$

### 13.5. Potencial Químico

Si se agrega una partícula a un sistema, entonces su energía interna cambiará una cantidad que definimos como el **potencial químico**  $\mu$ . Así que cuando este es el caso la primera y segunda ley de la termodinámica se deben modificar, agregando un término extra: **DS: aguas, me valió el cambio de notación xdddd**

$$dU = T dS_B - P dV + \mu dN,$$

donde  $N$  es el número de partículas del sistema. Esto inmediatamente implica que podemos escribir

$$\mu = \left( \frac{\partial U}{\partial N} \right)_{S,V}.$$

Recordemos que la energía libre de Helmholtz se define como  $A = U + TS_B$  y la energía libre de Gibbs como  $G = U - PV - TS_B$ , por consiguiente

$$dF = -P dV - S_B dT + \mu dN$$

$$dG = V dP - S_B dT + \mu dN,$$

con lo cual se tiene

$$\mu = \left( \frac{\partial F}{\partial N} \right)_{V,T}$$

$$\mu = \left( \frac{\partial G}{\partial N} \right)_{P,T},$$

de manera que esta última expresión para  $\mu$  en términos de la energía libre de Gibbs se volverá particularmente útil dado que mantener las variables  $P$  y  $T$  constantes es algo viable en el experimento.

Podemos considerar que la función de entropía es  $S_B = S_B(U, V, N)$ , de tal forma que

$$dS_B = \left( \frac{\partial S_B}{\partial U} \right)_{N,V} dU + \left( \frac{\partial S_B}{\partial V} \right)_{N,U} dV + \left( \frac{\partial S_B}{\partial N} \right)_{U,V} dN.$$

Si dividimos la ecuación de la primera ley dentro de  $T$  y despejamos para  $dS_B$  se tiene

$$dS_B = \frac{dU}{T} + \frac{P dV}{T} - \frac{\mu dN}{T},$$

y al compararlo con la ecuación anterior podemos concluir que

$$\left( \frac{\partial S_B}{\partial U} \right)_{N,V} = \frac{1}{T} \quad \left( \frac{\partial S_B}{\partial V} \right)_{N,U} = \frac{P}{T} \quad \left( \frac{\partial S_B}{\partial N} \right)_{U,V} = -\frac{\mu}{T}.$$

## Capítulo 14

# Distribuciones de Fermi-Dirac y Bose-Einstein

Hasta ahora hemos trabajado con partículas iguales pero distinguibles. Ahora vamos a considerar partículas iguales (idénticas) que son indistinguibles, por ejemplo; los electrones, los neutrinos, los fotones, etc. Tenemos dos tipos de partículas para el caso de partículas indistinguibles, estos dos tipos son los Fermiones y Bosones.

**Fermiones:** Los fermiones son partículas indistinguibles que en un estado dado no puede haber más de dos partículas; es decir, en un estado dado o está desocupado o solamente hay una partícula.

**Bosones:** Los bosones son partículas que en un estado dado puede haber cualquier número de partículas.

En esto se tendrá como índice a la energía.

### 14.1. Degeneración de la Energía

$g_i$  = Número de Estados con energía  $E_i$ .

### 14.2. Distribución Fermi-Dirac (Caso 3)

$n_i$  = Número de partículas en el estado  $i$ . En este caso vamos a considerar Fermiones. Debido a esto tenemos  $0 \leq n_i \leq g_i$ . ¿De cuantas formas se pueden colocar  $n_i$  partículas en el nivel de energía  $E_i$  que tiene  $g_i$  estados?

Tenemos que elegir  $n_i$  estados de  $g_i$  estados disponibles; donde no se puede y no importa el orden (caso 3). Por lo tanto el resultado es

$${}_{{g_i}}C_{{n_i}} = \binom{g_i}{n_i} = \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!}.$$

$\Omega$  = Número de microestados.

$$\Omega = \prod_{i=1}^k \binom{g_i}{n_i} = \prod_{i=1}^k \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!}.$$

Queremos maximizar  $\Omega$  sujeta a dos restricciones  $\sum n_i = n$  y  $\sum n_i E_i = E_T$ . Además, si maximizamos  $\log \Omega$ , también maximizamos  $\Omega$ . Vamos a calcular  $\frac{n_i}{g_i}$  en lugar de  $n_i$ . Para resolver el problema anterior utilizaremos la fórmula de Stirling, reemplazándola y aplicando el logaritmo e ignorando  $\frac{1}{2} \log 2\pi$  y los  $1/2$ , por lo tanto, hay que maximizar

$$\log \Omega = \sum_{i=1}^n [g_i \log g_i - n_i \log n_i - (g_i - n_i) \log (g_i - n_i)]$$

aplicamos multiplicadores de Lagrange

$$F(n_1, n_2, \dots, n_k, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n [g_i \log g_i - n_i \log n_i - (g_i - n_i) \log (g_i - n_i)] - \alpha \left( \sum_{i=1}^k n_i - n \right) - \beta \left( \sum_{i=1}^k n_i E_i - E_T \right).$$

Ahora  $\frac{\partial F}{\partial n_i} = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial n_i} = -\log n_i + \log (g_i - n_i) - \alpha - \beta E_i.$$

$$\log \left( \frac{g_i - n_i}{n_i} \right) = \alpha + \beta E_i$$

introducimos la variable  $\mu = -\alpha/\beta$

$$\frac{g_i}{n_i} - 1 = e^{\alpha + \beta E_i}$$

seguimos operando

$$\frac{n_i}{g_i} = \frac{1}{e^{\beta(E_i - \mu)} + 1} \quad \text{Fermi-Dirac}$$

entonces

$$\sum_{i=1}^k \frac{g_i E_i}{e^{\beta(E_i - \mu)} + 1} = E_T.$$

### 14.3. Distribución de Bose-Einstein (Caso 4)

$n_i$  es el número de partículas en el nivel de energía  $E_i$ . En este caso  $n_i \geq 0$ , porque son bosones y en un mismo estado puede haber cualquier número de partículas. Osea  $n_i$  puede ser mayor que  $g_i$ .

Tenemos que elegir  $n_i$  veces  $g_i$  estados donde no importa el orden y sí se puede repetir (distribuciones). Tenemos al siguiente número de posibilidades

$$\binom{n_i + g_i - 1}{n_i} = \binom{n_i + g_i - 1}{g_i - 1}$$

por lo que

$$\binom{n_i + g_i - 1}{n_i} = \frac{(n_i + g_i - 1)}{n_i!(g_i - 1)!}.$$

Para calcular el número de microestados hacemos uso de la regla del producto y tenemos que

$$\Omega = \prod_{i=1}^k \frac{(n_i + g_i - 1)}{n_i!(g_i - 1)!}$$

y las mismas condiciones que el caso anterior. Ahora maximizamos  $\log \Omega$  bajo el mismo procedimiento: fórmula de stirling, selección de términos irrelevantes y multiplicadores de Lagrange.

$$\log \left( \frac{g_i + n_i - 1}{n_i} \right) = \alpha + \beta E_i$$

vamos a ignorar el  $-1$  y  $\mu = \alpha/\beta$

$$\frac{n_i}{g_i} = \frac{1}{e^{\beta(E_i - \mu)} - 1} \quad \text{Bose-Einstein}$$

entonces

$$\sum_{i=1}^k \frac{g_i E_i}{e^{\beta(E_i - \mu)} - 1} = E_T.$$

# Capítulo 15

## Gas de Fotones

### 15.1. Radiación de Cuerpo Negro

Ahora se estudiará la distribución de energía en una cavidad de volumen  $V$  en ondas electromagnéticas. En la cavidad de volumen  $V$  la energía está en las ondas electromagnéticas. Una onda electromagnética es el resultado de las oscilaciones del campo eléctrico y el campo magnético. Las oscilaciones del campo eléctrico y el magnético obedecen las leyes de la electrodinámica y de la mecánica cuántica. En particular las ondas electromagnéticas se comportan según la Teoría Cuántica de Campos; al oscilar los campos obtenemos partículas llamadas **fotones** que siguen la estadística de Bose-Einstein; los fotones son bosones. Las ondas electromagnéticas, por ende los fotones, viaja a la velocidad de la luz

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

También sabemos que las ondas electromagnéticas son ondas transversales; el campo eléctrico y magnético oscilan perpendicularmente a la dirección de propagación, permitiendo que tanto el campo eléctrico como el magnético tengan dos direcciones linealmente independientes para oscilar; por lo tanto, tenemos dos polarizaciones.

Las ondas que se forman en la cavidad de volumen  $V$  son ondas estacionarias. Las ondas estacionarias se forman con la superposición de dos ondas simples que viajan en sentidos opuestos. La energía está directamente relacionada con la frecuencia.

#### 15.1.1. Cálculo de la Función de Degeneración $g(E)$

Las ondas estacionarias son la combinación lineal de los modos normales, en general se tiene que  $k_n = \frac{3\pi}{L}$ ; además, sabemos que  $\lambda\nu = \frac{\omega}{k} = c$ . Si consideramos la propagación en 3-D  $k_n = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$ . El índice discreto  $n$  está altamente degenerado y vamos a cambiarlo por  $n \rightarrow \omega_n \rightarrow \omega$  para calcular la energía  $E_n$  usamos Mecánica Cuántica **DS: No se hará el desarrollo, ver Clase 15 Notas de Clase 2022**. Con esto se llega a que la función de degeneración es

$$g(\omega) = \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3},$$

con  $g(\omega) d\omega = \text{número de estados entre } \omega \text{ y } \omega + d\omega$ . Reemplazando  $E(\omega) = \hbar\omega$ , entonces

$$f(E) = \frac{V E^2}{\pi^2 c^2 \hbar^3},$$

con  $f(E) dE$  es el número de estados entre  $E$  y  $E + dE$ .

Debido a que los fotones son bosones, se distribuyen según la estadística de Bose-Einstein, dicho de otra forma, tienen la distribución de Bose-Einstein

$$E_T = \sum_{i=1}^k \frac{g_i E_i}{e^{\beta(E_i - \mu)} - 1}$$

ahora  $\alpha = 0$  y si  $i \rightarrow \omega$  se tiene que  $g_i \rightarrow g(\omega)$  y  $E_i = E(\omega) = \hbar\omega$  entonces

$$E_T = \int_0^\infty \frac{g(\omega) E(\omega)}{e^{\beta E(\omega)} - 1} d\omega$$

$$E_T = \int_0^\infty \frac{V \omega^2 \hbar \omega}{\pi^2 c^3 (e^{\beta \hbar \omega} - 1)} d\omega.$$

Integrando se tiene que

$$E_T = \left( \frac{V \pi^2 k_B^4}{15 \hbar^3 c^3} \right) T^4.$$

### 15.1.2. Constante de Stefan-Boltzmann

$\sigma = \text{constante de Stefan-Boltzmann}$

$$\sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60 \hbar^3 c^2}.$$

por lo que la energía total se reescribe como  $E_T = \frac{4\sigma V}{c} T^4$ .

### 15.1.3. Densidad de Energía

$e = \frac{E_T}{V} = \text{densidad de energía}$ . Regresando a la integral

$$e = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} = \int_0^\infty \mu(\omega) d\omega.$$

con esto definimos  $\mu(\omega)$

$$\mu(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3 (e^{\beta \hbar \omega} - 1)}$$

donde  $\mu$  es la energía por unidad de volumen. Y en términos de la frecuencia

$$\mu(\nu) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3 \left( e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1 \right)}.$$

#### 15.1.4. Conteo de Fotones

De lo que se estudió en la distribución de Bose-Einstein el número de fotones es

$$N = \frac{V}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^2 d\omega}{(e^{\beta \hbar \omega} - 1)}.$$

#### 15.1.5. Función de Partición

Teniendo

$$\frac{\partial \log \mathcal{Z}}{\partial \beta} = -E_T = -\frac{V \pi^2}{15 \hbar^3 c^3} \frac{1}{\beta^4}$$

Entonces, la función de partición es

$$\boxed{\mathcal{Z}(\beta) = e^{\frac{V \pi^2}{45 \hbar^3 c^3 \beta^3}}.}$$



Parte III

Mecánica Cuántica

*"Cualquiera que no se sorprenda por la teoría cuántica, no la ha entendido" - Niels Bohr.*

## Capítulo 16

# Notación de Dirac (Repaso Álgebra Lineal)

Se hará un repaso de ciertas definiciones y propiedades, para tenerlas frescas, no se ahondará demasiado en cada una, ni se demostrarán.

### 16.1. Espacios de Hilbert y Espacio Dual

Los estados en mecánica Cuántica son descritos por medio de vectores. Sea  $\mathcal{H}$  un espacio vectorial sobre un campo escalar  $\mathbb{F}$ , pero en Mecánica Cuántica el campo de escalares es el campo de los números complejos  $\mathbb{C}$ . Los elementos de  $\mathcal{H}$  son vectores. Si  $\phi \in \mathcal{H}$ , en la notación de Dirac lo escribimos de la siguiente forma

$$\phi = |\phi\rangle \quad \text{Kets.}$$

Los elementos de  $\mathcal{H}$  los llamamos, vectores o kets. De esta forma decimos que el ket  $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ . Si  $\lambda$  es un escalar, o sea que  $\lambda \in \mathbb{C}$  la multiplicación por escalar queda así  $\lambda\phi = |\lambda\phi\rangle = \lambda|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ .

#### 16.1.1. El Espacio Dual

Sea  $\mathcal{H}^*$  el espacio dual algebraico de  $\mathcal{H}$ . La definición de  $\mathcal{H}^*$  es la siguiente:  $\mathcal{H}^* = \{\psi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } \psi \text{ es lineal}\}$ . A  $\psi$  se le conoce como funcional o Bra. Los cuales son descritos de la siguiente forma  $\psi \in \mathcal{H}^*$  entonces  $\psi = \langle\psi|$ . Una propiedad importante de esto que mencionamos es que a todo Ket le corresponde un Bra. En la notación de Dirac el funcional  $\psi \in \mathcal{H}^*$  operando sobre el ket  $\phi \in \mathcal{H}$  se escribe de la siguiente manera

$$\psi(\phi) = \langle\psi|\phi\rangle \in \mathbb{C} \quad \text{Braket.}$$

### 16.2. Operadores Lineales

Sea  $\mathcal{H}$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{F}$ . Una función  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  es un operador lineal si y solo si para todos 2 vectores cualesquiera del espacio y un escalar de campo  $A(\phi_1 + \phi_2) = A\phi_1 + A\phi_2$  y  $A(\lambda\phi_1) = \lambda A\phi_1$ . Los cuales son representados por matrices. Dado que los Bra son lineales, cumplen

con estas características, es decir que los brackets son lineales en la segunda coordenada **DS: la parte del ket**. En Mecánica Cuántica usaremos operadores hermíticos, unitarios y escalares. Cuando un operador actúa sobre un bracket se escribe de la siguiente forma  $\langle\psi|A|\phi\rangle$ .

## 16.3. Los KetBras

Sea  $\mathcal{H}$  un espacio vectorial sobre los números complejos y  $\mathcal{H}^*$  es su espacio dual. Para todo  $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$  y todo bra  $\langle\psi| \in \mathcal{H}^*$ , definimos el ketbra  $|\phi\rangle\langle\psi|$  de la siguiente forma

$$|\phi\rangle\langle\psi| : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

$$|\alpha\rangle \mapsto |\beta\rangle = \langle\psi|\beta\rangle |\phi\rangle$$

Esto es bastante confuso viendo solo así, el resto de operaciones son bastante intuitivas o ya conocidas, pero esta es un producto tensorial conocido como **producto exterior** calculado de la siguiente forma **DS: no se ha mencionado pero es bastante obvio, los kets son vectores columna y los bra vectores fila**.

$$|\phi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix} (\psi_1 \quad \psi_2 \quad \cdots \quad \psi_N) = \begin{pmatrix} \phi_1\psi_1 & \phi_1\psi_2 & \cdots & \phi_1\psi_N \\ \phi_2\psi_1 & \phi_2\psi_2 & \cdots & \phi_2\psi_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_N\psi_1 & \phi_N\psi_2 & \cdots & \phi_N\psi_N \end{pmatrix}$$

Esto no se vio en clase pero es imprescindible saberlo. Además, uno de los usos de esto es la construcción de un operador de proyección, dado un ket de norma 1, la proyección ortonormal en el subespacio generado por  $|\phi\rangle$  es  $|\phi\rangle\langle\phi|$ . Este es un operador idempotente<sup>1</sup>

### 16.3.1. Producto de kronecker

El producto tensorial de Kronecker es el que utilizaremos en mecánica cuántica (el producto de Kronecker es una generalización a matrices del producto exterior)

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \phi_{11}\mathbf{B} & \phi_{12}\mathbf{B} & \phi_{13}\mathbf{B} \\ \phi_{21}\mathbf{B} & \phi_{22}\mathbf{B} & \phi_{23}\mathbf{B} \\ \phi_{31}\mathbf{B} & \phi_{32}\mathbf{B} & \phi_{33}\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}\psi_{11} & \phi_{11}\psi_{12} & \phi_{12}\psi_{11} & \phi_{12}\psi_{12} & \phi_{13}\psi_{11} & \phi_{13}\psi_{12} \\ \phi_{11}\psi_{21} & \phi_{11}\psi_{22} & \phi_{12}\psi_{21} & \phi_{12}\psi_{22} & \phi_{13}\psi_{21} & \phi_{13}\psi_{22} \\ \phi_{21}\psi_{11} & \phi_{21}\psi_{12} & \phi_{22}\psi_{11} & \phi_{22}\psi_{12} & \phi_{23}\psi_{11} & \phi_{23}\psi_{12} \\ \phi_{21}\psi_{21} & \phi_{21}\psi_{22} & \phi_{22}\psi_{21} & \phi_{22}\psi_{22} & \phi_{23}\psi_{21} & \phi_{23}\psi_{22} \\ \phi_{31}\psi_{11} & \phi_{31}\psi_{12} & \phi_{32}\psi_{11} & \phi_{32}\psi_{12} & \phi_{33}\psi_{11} & \phi_{33}\psi_{12} \\ \phi_{31}\psi_{21} & \phi_{31}\psi_{22} & \phi_{32}\psi_{21} & \phi_{32}\psi_{22} & \phi_{33}\psi_{21} & \phi_{33}\psi_{22} \end{bmatrix}$$

## 16.4. Más Sobre Operadores Lineales

### 16.4.1. La Transpuesta

Sea  $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  un operador lineal **DS: que no un operador es una transformación de un espacio sobre sí mismo??** donde  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  son espacios vectoriales sobre  $\mathbb{C}$ . Definimos la transpuesta

<sup>1</sup>Un operador idempotente es uno que aplicado sobre sí mismo da como resultado él mismo,  $A^2 = A$ .

de  $A$ , denotada por  $A^T$ , como

$$A^T : \mathcal{H}_2^* \rightarrow \mathcal{H}_1^*$$

$$\langle \beta | \mapsto \langle \alpha | = A^T(\langle \beta |)$$

o sea que  $A^T \langle \beta | = \langle \beta | A$ .

### 16.4.2. Bases y Bases Duales

Sea  $\mathcal{H}$  un espacio vectorial sobre los complejos, y  $\alpha = \{|\alpha_1\rangle, \dots, |\alpha_k\rangle\}$  base de  $\mathcal{H}$ . La base dual de la siguiente forma  $\beta = \{\langle\beta_1|, \dots, \langle\beta_k|\}$  donde

$$\langle\beta_i|\alpha_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

## 16.5. Componentes de Kets y Bras

Por definición de base todo elemento del espacio puede ser escrito como combinación lineal de la base. Con esto se tienen las siguientes propiedades

**Fourier en Abstracto:**  $a_i = \langle\beta_i|\phi\rangle$ . O de manera continua

$$|\phi\rangle = \int_{x \in \mathbb{R}} dx \phi(x) |\alpha_x\rangle$$

con  $\phi(x)$  función de onda.

**Covarianza y contravarianza:** Los kets son vectores contravariantes y los bras son vectores covariantes.

**Fourier en Abstracto:**  $b_i = \langle\psi|\alpha_i\rangle$ . O de manera continua

$$|\phi\rangle = \int dx \phi(x) |x\rangle,$$

$$\langle\psi| = \int dx \langle x| \psi(x).$$

**Representación matricial de operadores lineales:**  $a_{ij} = \langle\beta_i|T|\alpha_j\rangle$ ,  $A$  es la representación matricial de  $T$  respecto a la base  $\alpha$ .

$$T|\alpha_j\rangle = \sum_{k=1}^n a_{kj} |\alpha_k\rangle.$$

**Teorema 16.5.1.** Sea  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un operador lineal y  $\alpha = \{|\alpha_i\rangle\}$  una base de  $\mathcal{H}$ . Si  $a_{ij} = \langle\beta_i|T|\alpha_j\rangle$  entonces

$$T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} |\alpha_i\rangle\langle\beta_j|.$$

**La Identidad:** La identidad  $I : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  es un operador lineal que deja todo igual.

$$I = \sum_{i=1}^n |\alpha_i\rangle\langle\beta_i|.$$

## 16.6. Espacios de Hilbert

Un espacio de Hilbert, como lo explicaremos más adelante, es un Espacio vectorial con producto interno completo<sup>2</sup>.

### 16.6.1. Producto Interno

Sea  $\mathcal{H}$  un espacio vectorial sobre el campo de los números complejos  $\mathbb{C}$ . Un producto interno en  $\mathcal{H}$  es una función de la siguiente forma

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$$

que tiene las siguientes propiedades

1. Asimetría.
2. Linealidad segunda componente.
3. Definida positiva.
4. No degenerado.

La pareja  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es llamada espacio con producto interno.

**Primera Propiedad:**  $\langle k\psi, \phi \rangle = k^* \langle \psi, \phi \rangle$ .

**Segunda Propiedad:**  $\langle \psi_1 + \psi_2, \phi \rangle = \langle \psi_1, \phi \rangle + \langle \psi_2, \phi \rangle$ .

#### Norma

Sea  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio con producto interno, para todo vector  $\phi \in \mathcal{H}$  se define la norma de  $\phi$  de la siguiente forma

$$\|\phi\| = \sqrt{\langle \phi, \phi \rangle}.$$

**Tercera Propiedad:**  $|\langle \psi, \phi \rangle| \leq \|\psi\| \|\phi\|$ .

**Cuarta Propiedad:**  $\|\psi + \phi\| \leq \|\psi\| + \|\phi\|$ .

**Ortogonalidad:** Sea  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio de hilbert  $\psi, \phi \in \mathcal{H}$  son ortogonales si y solo si  $\langle \psi, \phi \rangle = 0$ .

**Vectores Unitarios:** Todo vector que tenga norma 1.

**Bases Ortonormales:** Bases cuyos elementos cumplen con lo siguiente  $\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = \delta_{ij}$ . **DS: Todo conjunto de vectores ortonormales es linealmente independiente.**

**Teorema 16.6.1.** Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert. Si  $\psi \in \mathcal{H}$  se puede expresar de la siguiente forma

$$\psi = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i$$

entonces

$$c_i = \langle \phi_i, \psi \rangle.$$

Donde  $\{\phi_1, \phi_2, \dots\}$ .

---

<sup>2</sup>Es decir, que toda secuencia de Cauchy converge dentro del espacio.

## Distancia

$$\rho(\phi, \psi) = \|\psi - \phi\|.$$

### 16.6.2. Sucesiones de Cauchy

Sea  $(\mathcal{H}, \langle, \rangle)$  un espacio con producto interno y  $\{\phi_i\} = \{\phi_0, \dots\}$   $\phi_i \in \mathcal{H}$  una sucesión en  $\mathcal{H}$ . Esta sucesión es de Cauchy si y solo si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{Z}^+$  tal que si  $k, l \geq N$  tenemos que  $\|\phi_k - \phi_l\| < \varepsilon$ .

## 16.7. Ejemplos de Espacios de Hilbert

**Espacio Unitario:**  $(\mathbb{C}^n, \langle, \rangle)$ .

**Funciones Cuadrado Integrables:**  $(L^2(D), \langle, \rangle)$  con producto interno definido por

$$\langle \psi, \phi \rangle = \int_D d\vec{x} \psi^*(x) \phi(x).$$

Existe una versión generalizada con una función de peso dentro de la integral  $w(\vec{x})$ .

## 16.8. Operadores Lineales en Espacios de Hilbert

En esta sección vamos a estudiar los operadores lineales que aparecen en Mecánica Cuántica, como lo son los operadores unitarios y los operadores Hermíticos.

### 16.8.1. Operador Adjunto

Sea  $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  un operador lineal,  $A^+ : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  es la adjunta de  $A$  si y solo si para todo  $\phi \in \mathcal{H}_1$  y  $\psi \in \mathcal{H}_2$  tenemos que

$$\langle A^+(\psi), \phi \rangle = \langle \psi, A(\phi) \rangle.$$

### 16.8.2. Operador Unitario

Los operadores unitarios preservan el producto interno, preservan la estructura del espacio de Hilbert, preservan la magnitud y los ángulos; y lo definimos de la siguiente forma:

$$\langle U(\psi), U(\phi) \rangle = \langle \psi, \phi \rangle.$$

### 16.8.3. Operadores Hermíticos

Sea  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  en un operador lineal del espacio de Hilbert en sí mismo  $A$  es hermítico si y solo si para todo  $\psi, \phi \in \mathcal{H}$  tenemos que

$$\langle \psi, A\phi \rangle = \langle A\psi, \phi \rangle.$$

### Propiedades

**Propiedad 1:**  $A$  es hermítico si y solo si  $A^+ = A$ .

**Propiedad 2:**  $U$  es unitario si y solo si  $U^+ = U^{-1}$ .

**Propiedad 3:** Los valores propios de un operador Hermítico son reales puros.

**Propiedad 4:** Los vectores propios, correspondientes a valores propios distintos de un operador Hermítico, son ortogonales entre sí.

**Propiedad 5:**  $\langle A(\psi), \phi \rangle = \langle \psi, A^+ \phi \rangle$ .

**Propiedad 6:**  $(A^+)^+ = A$ .

**Propiedad 7:**  $(A + B)^+ = A^+ + B^+$ .

**Propiedad 8:**  $(AB)^+ = B^+ A^+$ .

**Propiedad 9:**  $(cA)^+ = c^* A^+$ .

**Propiedad 10:**  $(A^n)^+ = (A^+)^n$ .

#### 16.8.4. El Conmutador

Sea  $\mathcal{H}$  un espacio vectorial cualquiera y  $A, B$  operadores lineales. Se define a  $[A, B]$  como el conmutador de  $A$  y  $B$

$$[A, B] = AB - BA.$$

**Propiedad 11:**  $[A, B] - [B, A]$ .

**Propiedad 12:**  $[A, B]^+ = [B^+, A^+]$ .

**Propiedad 13:** Si  $A$  y  $B$  son operadores hermíticos entonces  $D = i[A, B]$  es hermítico también.

**Propiedad 14:** Si  $A$  y  $B$  son hermíticos entonces  $D = A + B$  es también hermítico.

**Propiedad 15:** Si  $U$  y  $W$  son operadores unitarios entonces  $UW$  también es unitario.

Los operadores unitarios son cerrados respecto al producto. Con los operadores unitarios formamos Grupos de Lie. Por otro lado los operadores hermíticos son cerrados respecto a la suma, con los operadores Hermíticos se forman Algebras de Lie. Existe una relación muy estrecha entre los grupos de Lie y algebras de Lie. En Mecánica Cuántica existe una relación estrecha entre los operadores unitarios y los operadores hermíticos, por medio de la función exponencial.

$$U = e^{iH},$$

con  $U$  unitario y  $H$  hermítico.



## 16.9. Espacios de Hilbert y Espacio Dual

El espacio dual es un espacio vectorial es un concepto puramente algebraico; pero, desde el punto de vista puramente algebraico, no hay una transformación canónica entre un espacio vectorial y su dual. Sin embargo, si tenemos la misma estructura de espacio de Hilbert entonces podemos dar una asignación o correspondencia canónica de kets a bras.

### 16.9.1. Transformación Antilineal

Sean  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  dos espacios vectoriales sobre el campo de los números complejos.  $T : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  es antilineal si y solo si  $T(\phi + \psi) = T\phi + T\psi$  y  $T(\lambda\phi) = \lambda^* T\phi$ . A todo ket le corresponde un bra, por medio de una transformación antilineal.

**Teorema 16.9.1.** Si  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es un espacio de Hilbert entonces  $\mathcal{I} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$  definida por  $(\mathcal{I}(\phi))(\psi) = \langle \phi, \psi \rangle$  es una transformación antilineal inyectiva de  $\mathcal{H}$  a su espacio dual  $\mathcal{H}^*$ . Una de las propiedades de  $\mathcal{I}$  es que es inyectiva.

A todo ket le corresponde un bra por medio de una transformación antilineal inyectiva.

**Teorema 16.9.2.** Si existe una transformación antilineal inyectiva  $\mathcal{I} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$  donde para todo  $\phi \in \mathcal{H}$   $(\mathcal{I}(\phi))(\phi) \geq 0$  y para todo  $\psi \in \mathcal{H}$   $(\mathcal{I}(\psi))(\phi) = (\mathcal{I}(\phi))(\psi)^*$  entonces  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  definida de la siguiente forma  $\langle \psi, \phi \rangle = (\mathcal{I}(\psi))(\phi)$ ; es un producto interno.

**Teorema 16.9.3.**

$$\mathcal{I}_1 \circ A^+ = A^T \circ \mathcal{I}_2.$$

### Propiedades Extra de la Notación de Dirac

**Propiedad 1:**  $\langle A\phi | = \langle \phi | A^+$ .

**Propiedad 2:**  $\langle \psi | A | \phi \rangle^* = \langle \phi | A^+ | \psi \rangle$ .

**Propiedad 3:**  $(|\psi\rangle\langle\phi|)^+ = |\phi\rangle\langle\psi|$ .

**Propiedad 4:**  $I = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$ .

## Capítulo 17

# Postulados de Mecánica Cuántica

El formalismo de la mecánica cuántica está basado en una cierta cantidad de postulados. Estos están basados en una gran cantidad de experimentos y observaciones. Estos representan el conjunto mínimo de supuestos necesarios para desarrollar la teoría de mecánica cuántica.

### 17.1. Experimento de Stern-Gerlach

El experimento de Stern-Gerlach consistía en enviar un haz de átomos de plata a través de un campo magnético inhomogéneo. El campo magnético crecía en intensidad en la dirección perpendicular a la que se envía el haz. El espín de los diferentes átomos fuerza a las partículas de espín positivo  $+1/2$  a ser desviadas hacia arriba y a las partículas de espín opuesto  $-1/2$  a ser desviadas en el sentido contrario, y por lo tanto puede medir el momento magnético de las partículas.

En el caso clásico no cuántico, una partícula cualquiera con un momento magnético entrará en el campo magnético con su momento magnético orientado al azar. El efecto del campo magnético sobre tales partículas clásicas ocasionaría que fueran desviadas también en sentidos opuestos pero dependiendo el grado de deflexión del ángulo inicial entre el momento magnético y el campo magnético al que se somete el haz. Por lo tanto algunas partículas serían desviadas fuertemente, otras de manera más débil y progresivamente se irían encontrando partículas desviadas en ambas direcciones cubriendo todo el espectro de intensidades posibles.

Sin embargo, el experimento de Stern-Gerlach pone de manifiesto que esto no es así, y se observa que todas las partículas se desvían o bien hacia arriba o bien hacia abajo, pero ambos grupos con la misma intensidad. Las partículas tienen o bien espín  $+\frac{\hbar}{2}$  o  $-\frac{\hbar}{2}$ , sin valores intermedios.

El momento magnético  $m$  del átomo puede medirse mediante esta experiencia, y es igual en módulo al magnetón de Bohr  $m_B$ .

### 17.2. Postulados

#### 17.2.1. Enunciados

- 1. Estado de un Sistema:** El estado de cualquier sistema físico está definido, en cierto tiempo  $t$ , por un vector de estado  $|\psi(t)\rangle$  en un espacio de hilbert  $\mathcal{H}$ ;  $|\psi(t)\rangle$  contiene (y sirve como

base para extraer) toda la información necesaria de un sistema. Cualquier superposición de vectores de estado es un vector de estado.

**2. Observables y Operadores:** A cualquier cantidad física medible  $A$ , conocida como observable o variable dinámica, le corresponde un Operador Hermítico  $A$  (también denotado como  $\hat{A}$ , pero no se usará esta notación para ser prácticos) cuyos eigenvectores son forman una base completa.

**3. Mediciones y Eigenvalores de Operadores:** La medición de un observable  $A$  puede ser representada formalmente por la acción de  $A$  sobre un vector de estado  $|\psi(t)\rangle$ . El único posible resultado de una medición es uno de los eigenvalores  $a_n$  (que son reales) del operador  $A$ . Si el resultado de una medición de  $A$  sobre un estado  $|\psi(t)\rangle$  es  $a_n$ , el estado del sistema inmediatamente después de la medida cambia a  $|\psi_n\rangle$ :

$$A|\psi(t)\rangle = a_n|\psi_n\rangle,$$

donde  $a_n = \langle\psi_n|\psi(t)\rangle$ . Notese que  $a_n$  es la componente de  $|\psi(t)\rangle$  cuando está proyectada sobre el eigenvector  $|\psi_n\rangle$ .

**4. Resultado Probabilístico de las Mediciones:** Se tienen dos espectros:

**Espectro Discreto:** Al realizar una medición de un observable  $A$  de un sistema en un estado  $|\psi\rangle$ , la probabilidad de obtener uno de los eigenvalores no degenerados  $a_n$  del operador correspondiente está dada por

$$P_n(a_n) = \frac{|\langle\psi_n|\psi\rangle|^2}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{|a_n|^2}{\langle\psi|\psi\rangle},$$

donde  $|\psi_n\rangle$  es el eigenvector de  $A$  con eigenvalor  $a_n$ . Si el eigenvalor  $a_n$  es  $m$ -degenerado,  $P_n$  se convierte en

$$P_n(a_n) = \frac{\sum_{j=1}^m |\langle\psi_n^j|\psi\rangle|^2}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{\sum_{j=1}^m |a_n^{(j)}|^2}{\langle\psi|\psi\rangle}.$$

La acción de medir cambia el estado de  $|\psi\rangle$  a  $|\psi_n\rangle$ . Si el sistema ya se encuentra en el estado  $|\psi_n\rangle$  de  $A$ , la medición de  $A$  produce con certeza el siguiente eigenvalor  $a_n$ :  $A|\psi_n\rangle = a_n|\psi_n\rangle$ .

**Espectro Continuo:** La relación mostrada en el espectro anterior, es válida para un espectro discreto, puede ser extendida para determinar la densidad de probabilidad que un determinado observable  $A$  produce un valor entre  $a$  y  $a + da$  en un sistema cuyo estado inicial es  $|\psi\rangle$ :

$$dP(a) = \frac{|\psi(a)|^2}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{|\psi(a)|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(a')|^2 da'};$$

por ejemplo, la densidad de probabilidad de encontrar una partícula entre  $x$  y  $x + dx$  está dada por  $\frac{dP(x)}{dx} = |\psi(x)|^2 / \langle\psi|\psi\rangle$ .

**5. Evolución del Sistema:** La evolución en el tiempo de un vector de estado  $|\psi(t)\rangle$  de un sistema esta regida por la *Ecuación de Schrödinger* dependiente del tiempo

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{\mathbf{H}} |\psi(t)\rangle,$$

donde  $\hat{\mathbf{H}}$  es el operador Hamiltoniano correspondiente a la energía total del sistema.

### 17.2.2. Propiedades y Operadores

**Operador Proyección:** Sea  $\mathcal{H}$  el espacio Cuántico y  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  un ket cualquiera de  $\mathcal{H}$ . El operador proyección  $P_\psi$  se define de la siguiente forma

$$P_\psi |\psi\rangle = \frac{\langle\psi|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} |\psi\rangle.$$

**Valor Esperado de un Observable:** Sea  $A$  un observable de cierto sistema cuántico cuyo espacio de estado  $\mathcal{H}$ :  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  donde  $A$  es hermitico. Además  $\{|\alpha_i\rangle\}$  es una base ortonormal de  $\mathcal{H}$ , compuesta de kets propios de  $A$ . Donde

$$A |\alpha_i\rangle = a_i |\alpha_i\rangle$$

$a_i \in \mathbb{R}$  es valor propio de  $A$  correspondiente al ket propio de  $A$ . Si el sistema cuántico está en el estado  $|\psi\rangle$  el valor esperado de  $A$  se define de la siguiente forma:

$$\langle A \rangle_\psi = \text{Valor esperado de } A \text{ cuando el sistema está en el estado } |\psi\rangle.$$

$$\langle A \rangle_\psi = \sum_i a_i P(a_i) \qquad \langle A \rangle_\psi = \int_x dx a_x f(x)$$

$P(a_i)$  probabilidad de medir el estado  $|\alpha_i\rangle$  cuando el sistema está en el estado  $|\psi\rangle$ . Cuando no hay problema de ambigüedad:  $\langle A \rangle = \langle A \rangle_{|\psi\rangle}$ .

**Propiedad del Valor Esperado:**  $\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$ .

**Observables Compatibles:** Los observables  $A$  y  $B$  son compatibles si y solo si  $[A, B] = 0$ . Dicho de otra forma  $A$  y  $B$  son compatibles si y solo si  $A$  y  $B$  conmutan. Ejemplos:

- Las coordenadas de las posiciones.
- Las componentes del momentum lineal.
- El momentum angular total con el momentum angular del eje  $z$ .

**Conjunto Completo de Operadores que Conmutan (CSCO):** Si  $A$  y  $B$  dos observables que no conmutan, entonces estos no pueden ser medidos simultaneamente; el orden en el que son medidos importa.

**Teorema 17.2.1.** *Si dos observables son compatibles, sus correspondientes operadores poseen un conjunto común de estados propios. (Esto es válido para estados propios degenerados y no degenerados.)*

Este teorema conduce a la siguiente definición:

**Definición 17.2.1.** *Un conjunto de operadores Hermíticos  $A, B, C, \dots$  es llamado un CSCO si los operadores conmutan mutuamente y si el conjunto de sus estados propios es completo y no degenerado (único).*

**Observables Incompatibles:**  $A$  y  $B$  son incompatibles si y solo si  $[A, B] \neq 0$ .

**Operador Dispersión:** Dado un observable  $A$ , definimos su operador de dispersión de la siguiente forma:

$$\Delta A = A - \langle A \rangle I.$$

**Propiedad 1:** El operador de dispersión es hermítico.

**Propiedad 2:**  $\langle (\Delta A)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$ .

**Propiedad 3:**  $[\Delta A, \Delta B] = [A, B]$ .

**Propiedad 4:**  $|\langle \psi | [A, B] | \psi \rangle| \leq |\langle \psi | \Delta A \Delta B | \psi \rangle|$ .

**Propiedad 5:** Principio de Incertidumbre  $\langle (\Delta A)^2 \rangle \langle (\Delta B)^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2$ .

### 17.3. Principio de Incertidumbre de Heisenberg

Como veremos más adelante el observable de la posición  $X$  y del momentum  $P$ , son incompatibles.

$$[X, P] = i\hbar I.$$

por lo tanto, se tiene que

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}.$$

## Capítulo 18

# Posición y Momentum

Ahora vamos a estudiar una partícula en una dimensión. El tiempo es independiente de la posición. La posición es un observable que medimos por medio de su coordenadas  $x \in \mathbb{R}$ . Tenemos lo siguiente:  $X$  = observable de la posición. Al medir  $X$ , en el tiempo  $t$ , obtenemos la coordenada  $x$  que es un número real puro. La coordenada  $x$  que medimos es un valor propio de  $X$ , por lo tanto, al valor propio  $x$  le corresponde su espacio propio que consta de todos los kets propios asociados al valor propio  $x$ .

En este caso, posición y momentum en una dimensión no vamos a tener degeneración. Entonces el espacio propio del valor propio  $x \in \mathbb{R}$  está generado por un solo ket propio que lo representamos por  $|x\rangle$ . Recordemos que a todo ket  $|x\rangle$  le corresponde un bra  $\langle x|$ . Entonces tenemos lo siguiente:  $X|x\rangle = x|x\rangle$ .

Los kets propios son ortogonales entre sí y genera el espacio de estado de la partícula. En este caso vamos a llamar  $\mathcal{H}_o$  al espacio de estado de la partícula:  $\{|x\rangle\}$  es base ortonormal de  $\mathcal{H}_o$ . La base ortonormal de  $\mathcal{H}_o$  está formada de ket propios de observable de la posición  $X$ .

### 18.1. Representación de los Estados

Dado el postulado 1 de la mecánica cuántica y sabiendo que todo ket representa un estado real ("físico"). Recordando álgebra lineal  $|\psi\rangle$  se escribe como combinación lineal de los elementos de la base ortonormal. Por lo tanto, para toda  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_o$

$$|\psi\rangle = \sum_x c_x |x\rangle,$$

para índice continuo

$$|\psi\rangle = \int dx \psi(x) |x\rangle$$

$$|\psi\rangle = \int dx \langle x| \psi^*(x)$$

### 18.1.1. Interpretación de $\psi(x)$

En las integrales, al igual que las sumatorias usan variables mudas

$$|\psi\rangle = \int dy \psi(y) |y\rangle$$

pero si  $x \neq y \Rightarrow \langle x|y\rangle$  por que  $|x\rangle$  y  $|y\rangle$  son ortogonales. En caso de ser iguales tenemos la *Delta de Dirac*

$$\langle x|y\rangle = \delta(x - y).$$

por lo tanto

$$\langle x|\psi\rangle = \int_{y \in \mathbb{R}} \psi(y) \langle x|y\rangle$$

$$\langle x|\psi\rangle = \int_{y \in \mathbb{R}} \psi(y) \delta(y - x) = \psi(x).$$

$$\boxed{\psi(x) = \langle x|\psi\rangle.}$$

$\psi(x)$  = Densidad de amplitud de probabilidad de medir  $x$  cuando la partícula está en el estado  $|\psi\rangle$ .  
 $|\psi(x)|^2$  = Densidad de probabilidad de medir  $x$  cuando la partícula está en el estado  $|\psi\rangle$ .

Dado que  $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$  entonces

$$\mathcal{H}_o \leftrightarrow L^2(\mathbb{R}).$$

## 18.2. Traslaciones

A continuación vamos a estudiar las traslaciones en  $\mathbb{R}$  y su prerepresentación unitaria sobre  $\mathcal{H}_o$ .

**Definición 18.2.1.** Para todo  $a \in \mathbb{R}$  tenemos la siguiente función:  $\tau_a = x + a$ .

El conjunto de todas las traslaciones con la composición forman un grupo abeliano. Lo anterior traslación define el siguiente operador unitario.  $T_a |x\rangle = |x + a\rangle$ . Algunas observaciones importantes son las siguientes:

1. La traslación  $\tau_a$  no es una transformación lineal, porque en caso  $a \neq 0$  el origen  $x = 0$  queda trasladado a  $x = a \neq 0$ . Las traslaciones en los espacios  $\mathbb{R}^n$  no son lineales.
2. El operador  $T_a : \mathcal{H}_o \rightarrow \mathcal{H}_o$  sí es una transformación lineal que representa a la función  $\tau_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Como veremos más adelante  $T_a$  es un operador unitario.
3. Las traslaciones  $\tau_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $a \in \mathbb{R}$  forman un grupo abeliano al igual que los operadores unitarios  $T_a : \mathcal{H}_o \rightarrow \mathcal{H}_o$ .
4. Grupo es una estructura algebraica que aparece repetidas veces en Física. Debido a que no conocemos esta estructura algebraica; incluimos rápidamente y brevemente su definición.  
Un grupo  $(G, \circ)$  es un conjunto con una operación binaria la cual

a) Es cerrada.

- b) Es asociativa.
- c) Tiene elemento neutro (I).
- d) Todo elemento tiene inverso.
- e) Es conmutativa (Grupo Abelian).

### 18.2.1. Superposición

Superposición es un término ampliamente usado en mecánica cuántica; en lugar de combinación lineal.

#### Definición 18.2.2. Operador $P$

$$P = \lim_{a \rightarrow 0} i\hbar \frac{T_a - I}{a}$$

$$P = i\hbar \left. \frac{dT_a}{da} \right|_{a=0}.$$

Donde  $a$  es el parámetro de traslación.

**Propiedad 1 (operador  $T_a$ ):** El operador  $T_a : \mathcal{H}_o \rightarrow \mathcal{H}_o$  es unitario.

**Propiedad 2:** Si  $\psi(x) = \langle x|\psi \rangle$  entonces  $\langle x|T_a|\psi \rangle = \psi(x - a)$ .

**Propiedad 3 (operador  $P$ ):**  $\langle x|P|\psi \rangle = i\hbar \frac{\partial \psi(x)}{\partial x}$ .

**Propiedad 4:**  $\langle x|P^n|\psi \rangle = (-i\hbar)^n \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n}$ .

**Propiedad 5:**  $\langle x|(\frac{aP}{i\hbar})^n|\psi \rangle = (-a)^n \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n}$ .

**Propiedad 6:**  $T_a = \exp\{-\frac{ia}{\hbar}P\}$ .

**Propiedad 7:**  $P$  es hermitico.

**Propiedad 8 (para ambos operadores):**  $[X, P] = i\hbar I$ .

**Propiedad 9:**  $\langle x|p \rangle = N e^{\frac{ipx}{\hbar}}$ , donde  $|x\rangle$  es ket propio de  $X$  y  $|p\rangle$  es ket propio de  $P$ . ( $N$  es la constante de normalización)

**Propiedad 10:** Si  $p$  y  $p_o$  son valores propios distintos del observable  $P$ , entonces tenemos que

$$p - p_o = \frac{2\pi n\hbar}{T}$$

los valores propios de  $P$  están discretizados.

**Propiedad 11:**  $N = \frac{1}{\sqrt{T}}$ .

**Propiedades 12:**

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{\frac{ix(p_m - p_n)}{\hbar}} dx = \frac{2\pi\hbar}{\Delta p} \delta_{mn}$$

donde  $\Delta = p_{n+1} - p_n = \frac{2\pi\hbar}{T}$  y  $\delta_{mn}$  es la delta de Kronecker.



### 18.2.2. Representación Respecto al Momentum

Ahora tenemos dos bases para  $\mathcal{H}_o$  con  $-T/2 \leq x \leq T/2$  o sea que  $\mathcal{H}_o = L^2[-T/2, T/2]$

- Base  $\alpha = \{|x\rangle\}$   $x \in [-T/2, T/2]$ .
- Base  $\beta = \{|p_n\rangle\}$   $n \in \mathbb{Z}$ .

entonces para todo  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_o$ , podemos expresar a  $|\psi\rangle$  como combinación lineal de la base  $\alpha$  y también como superposición de los elementos de la base  $\beta$ . Por lo tanto

$$|\psi\rangle = \int_{-T/2}^{T/2} dx a_x |x\rangle$$

$$|\psi\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n |p_n\rangle$$

y recordemos que

$$a_c = \langle x|\psi\rangle \quad c_n = \langle p_n|\psi\rangle.$$

## 18.3. Series de Fourier

$$\psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{\sqrt{T}} e^{\frac{ipx}{\hbar}}.$$

### 18.3.1. Coeficientes de Fourier

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-\frac{ip_n x}{\hbar}} \psi(x) dx.$$

de lo anterior tenemos lo siguiente

$$\psi(x) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \int_{-T/2}^{T/2} e^{-\frac{ip_n x}{\hbar}} \psi(x) dx \right) e^{\frac{ipx}{\hbar}}.$$

## 18.4. Representación en 1 Dimensión. Tamaño Infinito

Ahora pasaremos del intervalo  $[-T/2, T/2]$  a toda la recta real  $(-\infty, \infty)$ . Este paso de finito a infinito lo haremos tomando el límite cuando  $T \rightarrow \infty$ . Con esto se tiene lo siguiente

**Propiedad 13:** Si  $x \in (-\infty, \infty)$  entonces

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{ipx}{\hbar}} \quad \langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{ipx}{\hbar}}.$$

Ahora repetimos lo que hicimos en forma discreta a forma continua. Observemos que tanto, el espectro del observable posición  $X$  y el del momentum  $P$  son continuas y pueden tomar cualquier valor real.

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x) |x\rangle,$$

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp \tilde{\psi}(p) |p\rangle.$$

#### 18.4.1. Integral de Fourier

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{\frac{ipx}{\hbar}} \tilde{\psi}(p).$$

#### 18.4.2. Transformada de Fourier

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{ipx}{\hbar}} \psi(x).$$

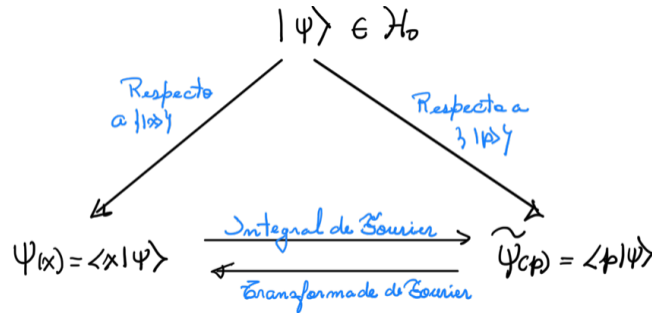


Figura 18.1: Relación entre la base y la transformación usada para cambiar la función de estado de esta.

**Propiedad 14:**  $\langle p|X|\psi\rangle = i\hbar \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial p}.$

### 18.5. Posición y Momentum 3-D

Ahora estudiaremos los Observables de posición y momentum en 3 dimensiones. Ya sabemos que la posición de las partículas está dada por  $\vec{r} = (x, y, z)$  y  $\vec{X} = (X, Y, Z)$ .

$$\begin{aligned}
X |\vec{r}\rangle &= X |\vec{x}\rangle = X |x, y, z\rangle = x |x, y, z\rangle \\
Y |\vec{r}\rangle &= Y |\vec{y}\rangle = Y |x, y, z\rangle = y |x, y, z\rangle \\
Z |\vec{r}\rangle &= Z |\vec{z}\rangle = Z |x, y, z\rangle = z |x, y, z\rangle.
\end{aligned}$$

También

$$\begin{aligned}
|\vec{r}\rangle &= |x, y, z\rangle = |x\rangle \otimes |y\rangle \otimes |z\rangle \\
\mathcal{H}_1 &= \mathcal{H}_o \otimes \mathcal{H}_o \otimes \mathcal{H}_o.
\end{aligned}$$

El conjunto de kets propios  $\{|x, y, z\rangle\}$  forma una base ortonormal  $\mathcal{H}_1$ . Debido a que  $|\vec{x}\rangle$  es una base ortonormal de  $\mathcal{H}_1$  tenemos que

$$\langle \vec{x} | \vec{x}' \rangle = \delta'(\vec{x} - \vec{x}').$$

### 18.5.1. Representación Respecto a $\{|\vec{x}\rangle\}$

Supongamos que la partícula está en el estado  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1$ . El ket  $|\psi\rangle$  se puede escribir como una superposición de los estados base.

$$|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \psi(\vec{x} | \vec{x}\rangle).$$

Debido a que  $\{|\vec{x}\rangle\}$  es una base ortonormal

$$\psi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \psi \rangle.$$

**Propiedad 15:**  $[X_i, X_j] = 0$  para  $i, j = 1, 2, 3$ .

**Propiedad 16:** Siguiendo con la idea del operador traslación, tomando  $a = \vec{a}$ :  $T_{\vec{a}}$  es unitario.

**Definición 18.5.1. Operador  $P_j$ :**

$$P_j = i\hbar \left. \frac{dT_{\vec{a}}}{da_j} \right|_{a_j=0}.$$

De esta definición se tiene

$$\begin{aligned}
\langle \vec{x} | P_x | \psi \rangle &= -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} & j = 1 \\
\langle \vec{x} | P_y | \psi \rangle &= -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial y} & j = 2 \\
\langle \vec{x} | P_z | \psi \rangle &= -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial z} & j = 3.
\end{aligned}$$

**Propiedad 17:**  $[P_j, P_k] = 0$ .

**Propiedad 18:**  $T_{\vec{a}} = e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{a} \cdot \vec{P}}$ .

**Propiedad 19:** Si  $\vec{P} = (P_x, P_y, P_z)$  entonces

$$\langle \vec{x} | \vec{P} | \psi \rangle = -i\hbar \nabla \psi(\vec{x}),$$

donde  $\psi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \psi \rangle$ .

**Propiedad 20:** Dado el momentum lineal total  $P^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2$ . Entonces  $\langle \vec{x} | P^2 | \psi \rangle = -\hbar^2 \nabla^2 \psi$ .

**Propiedad 21:**  $[X_j, P_k] = i\hbar \delta_{jk} I$ .

**Propiedad 22:**  $[X_j, P_j^n] = i\hbar n P_j^{n-1}$ .

**Propiedad 23:** Sean  $A, B, C$  operadores y  $b, c$  números complejos.

$$[A, bB + cC] = b[A, B] + c[A, C].$$

**Propiedad 24:** Sea  $F(P_j) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_j^n$  entonces

$$[X_j, F(P_j)] = i\hbar F'(P_j).$$

## 18.6. Momentum Respecto a la Posición en 3-D

El observable  $\vec{P}$  es una terna ordenada (como era de esperarse luego de todo lo visto anteriormente) y son compatibles. Estos observables nos proporcionan una base ortonormal de nuestro espacio de estado.

$$\begin{aligned} P_x | \vec{p} \rangle &= P_x | p_x, p_y, p_z \rangle = p_x | p_x, p_y, p_z \rangle \\ P_y | \vec{p} \rangle &= P_y | p_x, p_y, p_z \rangle = p_y | p_x, p_y, p_z \rangle \\ P_z | \vec{p} \rangle &= P_z | p_x, p_y, p_z \rangle = p_z | p_x, p_y, p_z \rangle. \end{aligned}$$

También

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_o \otimes \mathcal{H}_o \otimes \mathcal{H}_o.$$

Sabemos

$$\psi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \psi \rangle,$$

$$\tilde{\psi}(\vec{p}) = \langle \vec{p} | \psi \rangle.$$

**Propiedad 25:**  $\langle \vec{x} | \vec{p} \rangle = N e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}}$  Donde  $N$  es una constante de normalización y  $\vec{p} \cdot \vec{x} = xp_x + yp_y + zp_z$ .

**Propiedad 26:**  $\langle \vec{x} | \vec{p} \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}}$ .

**Propiedad 27:** (Transformada inversa de Fourier)

$$\psi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{p} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}} \tilde{\psi}(\vec{p}).$$

**Propiedad 28: (Transformada de Fourier)**

$$\tilde{\psi}(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{p} e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}} \psi(\vec{x}).$$

**Definición 18.6.1. Valor Propio Degenerado:**

Sea  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un operador lineal  $a \in \mathbb{C}$  es un valor propio degenerado si y solo si existen vectores  $|\psi\rangle$  y  $|\phi\rangle$  linealmente independientes tal que

$$A|\psi\rangle = a|\psi\rangle$$

$$A|\phi\rangle = a|\phi\rangle.$$

Recordemos del álgebra lineal que el conjunto de todos los vectores propios de  $A$  con valor propio  $a$ , forma un subespacio vectorial. De lo anterior tenemos que  $a$  es un valor propio degenerado si y solamente si el espacio propio tiene dimensión mayor o igual a 2.

**Propiedad 29:** Si  $A$  y  $B$  son observables que tienen la misma base ortonormal de kets propios, entonces  $A$  y  $B$  son compatibles.

**Propiedad 30:** Si  $A$  y  $B$  son observables compatibles, donde todos sus valores propios son no degenerados, entonces  $A$  y  $B$  comparten base ortonormal de kets propios.

**Teorema 18.6.1.** Si  $A$  y  $B$  son observables compatibles entonces  $A$  y  $B$  comparten base de kets propios.

## Capítulo 19

# Energía y Hamiltoniano

### 19.1. Dinámica Cuántica

Ahora se estudiará la evolución en el tiempo de un sistema cuántica. Dicho de otra forma, vamos a estudiar la evolución de un estado  $|\psi\rangle$  que representa un sistema interactuando con el medio.

#### 19.1.1. Operador Evolución $U(t, a)$

El operador evolución describe el estado de un sistema después de haber transcurrido un tiempo  $\Delta t = a$ ; de la siguiente forma

$$U(t, a) |\psi_t\rangle = |\psi_{t+a}\rangle.$$

El problema recae en calcular  $U$ .

**Propiedad 1:**  $U_a$  es unitario.

### 19.2. El Hamiltoniano

Ahora a definimos el Hamiltoniano en el tiempo  $t$  de la siguiente forma

$$H(t) = i\hbar \left. \frac{\partial U(t, a)}{\partial a} \right|_{a=0}.$$

Tal y como se verá más adelante  $H$  es un operador Hermítico.

**Propiedad 2 (Ecuación de Schrodinger):**  $H(t) |\psi_t\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_t\rangle$ . Donde  $H(t)$  es la energía total del sistema cuántico.

**Propiedad 3:**  $H^\dagger(t) |\psi_t\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_t\rangle$ .

**Propiedad 4:** **DS: Ahora es bastante obvio.**  $H$  es hermítico.

### 19.2.1. Casos del Hamiltoniano en Física

En Física tenemos tres casos del Hamiltoniano

1. El Hamiltoniano es independiente del tiempo

$$H(t) = H = \text{cte.}$$

2. El Hamiltoniano depende del tiempo pero el Hamiltonianos a tiempos diferentes conmutan.
3. El Hamiltoniano depende del tiempo y Hamiltonianos a tiempos diferentes no conmutan.

**Propiedad 5:** Si  $H(t) = H$  es independiente del tiempo entonces.

$$U(t, a) = e^{-\frac{ia}{\hbar} H}.$$

**Propiedad 6:** Si los Hamiltonianos conmutan a tiempos diferentes

$$U(t, a) = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_t^{t+a} H(t') dt'}.$$

### 19.3. Estados Estacionarios

Recordemos que un estado se representa por un ket y cualquier múltiplo  $c|\psi\rangle$  representa el mismo estado. Un estado es estacionario si y solo si los kets  $|\psi_t\rangle$  que representan al estado del sistema en el tiempo  $t$  son múltiplos de  $|\psi_o\rangle = |\psi_0\rangle$  para cualquier  $t$ ,  $|\psi_t\rangle = c(t)|\psi_o\rangle$ .

Los estados estacionarios no cambian respecto al tiempo, aunque los kets que los representan pueden cambiar. Siempre requerimos que la magnitud de los kets sea 1 por lo tanto  $c(t) = 1$ .

$$|\psi_t\rangle = e^{i\theta(t)} |\psi_o\rangle.$$

Sea  $A$  un observable cualquiera; el valor esperado del observable  $A$  cuando el sistema está en el estado  $|\psi_t\rangle$  viene dado por:

#### 19.3.1. Punto de Vista de Heisenberg

$$\langle A \rangle = \langle \psi(0) | (U^+(t) A U(t)) | \psi(0) \rangle.$$

Para Heisenberg, el estado no evoluciona si no que evoluciona el observable.

$$A(t) = U^+(t) A U(t).$$

### 19.3.2. Punto de Vista de Schrodinger

$$\langle A(t) \rangle = (\langle \psi(0) | U^\dagger(t)) A(U(t) | \psi_t \rangle).$$

Para Schrodinger, el observable no evoluciona sino que es el estado lo que evoluciona. Donde dicho estado obedece la ecuación de Schrodinger.

La ecuación de Schrodinger independiente del tiempo calcula los valores propios y kets propios del Hamiltoniano  $H$ .

**Propiedad Previa a la Ecuación de Heisenberg:**

$$\frac{\partial U(t)}{\partial t} = \frac{dU}{dt} = \frac{1}{i\hbar} H U(t).$$

### 19.3.3. Ecuación de Movimiento de Heisenberg

Sea  $A$  un observable y  $H$  el Hamiltoniano.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [A(t), H(t)].$$



## Capítulo 20

# Oscilador Armónico Cuántico

El oscilador armónico cuántico es el análogo mecánico cuántico del oscilador armónico clásico. Es uno de los sistemas modelo más importante en mecánica cuántica, ya que cualquier potencial se puede aproximar por un potencial armónico en las proximidades del punto de equilibrio estable (mínimo). Además, es uno de los sistemas mecánico cuánticos que admite una solución analítica sencilla.

### 20.1. Oscilador Armónico

Dado el sistema físico de oscilador más simple se tiene que su hamiltoniano es

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}kX^2.$$

Dado que  $H, P, X$  son observables incompatibles. Recordemos que  $[X, P] = i\hbar I$ . Y con esto tenemos el operador evolución

$$U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}tH}.$$

### 20.2. Ecuación de Schrodinger

$$H|\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle$$

Si presentamos la ecuación de Schrodinger respecto a la posición, tenemos lo siguiente

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

#### 20.2.1. Ecuación de Schrodinger Independiente del Tiempo

La ecuación de Schrodinger independiente del tiempo es la ecuación que calcula los valores propios y los kets propios del Hamiltoniano mostrado al inicio del capítulo.

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle,$$

$E$  es el valor propio de  $H$ , por lo tanto  $E$  es un valor real puro,  $E \in \mathbb{R}$ . Con esto aplicamos el bra  $\langle \psi |$  se llega a la ecuación de Schrodinger Independiente del Tiempo para el oscilador armónico, respecto a la posición

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d\psi}{dx} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \psi(x) = E\psi(x).$$

### 20.3. Operadores en el Oscilador Cuántico

En lugar de resolver la ecuación de Schrodinger independiente del tiempo directamente, para calcular los valores propios y kets propios del Hamiltoniano; vamos a usar el operador creador, el operador anulador y el operador número. Como veremos a continuación el método de operadores es un método muy eficiente para calcular valores propios y ket propios.

#### 20.3.1. Operador Anulador o Aniquilador

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( X + i \frac{P}{m\omega} \right).$$

#### 20.3.2. Operador Creador

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( X - i \frac{P}{m\omega} \right).$$

#### 20.3.3. Operador Número

$$N = a^\dagger a.$$

Los operadores anulador y creador son operadores tipo escalera; no son ni hermíticos ni unitarios.

#### 20.3.4. Propiedades de los Operadores

**Propiedad 1:**  $[a, a^\dagger] = I$ .

**Propiedad 2:**  $N = \frac{1}{\hbar\omega} H - \frac{1}{2} I$ .

**Propiedad 3:**  $H$  es hermítico.

**Propiedad 4:**  $H$  y  $N$  conmutan.

**Propiedad 5:** Si  $|n\rangle$  es ket propio de  $N$  con valor propio  $n$  entonces

$$H |n\rangle = (n + 1/2)\hbar\omega |n\rangle.$$

**Propiedad 6:**  $[N, a] = -a$ .

**Propiedad 7:**  $[N, a^\dagger] = a^\dagger$ .

**Propiedad 8:**  $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ .

**Propiedad 9:**  $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ .

**Propiedad 10:** Si  $n$  es valor propio del operador número  $N$  entonces  $n \geq 0$ .

**Propiedad 11:** Si  $n$  es valor propio del operador número  $N$  entonces  $n$  es un número entero no negativo.

**Propiedad 12:** Los valores y vectores propios de  $N$  y  $H$  son

$$H|n\rangle = \hbar\omega(n+1/2)|n\rangle,$$

$$N|n\rangle = n|n\rangle.$$

Dado esto vemos que la base ortonormal dada por el operador número y el hamiltoniano está discretizada. De esto se tiene que todo estado del oscilador armónico simple se puede escribir como una combinación lineal de los estados propios de la energía total.

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle.$$

por Fourier  $C_n \langle n|\psi\rangle$ , amplitud de probabilidad de medir energía  $\hbar\omega(n+1/2)$  cuando el sistema está en el estado  $|\psi\rangle$ .

**Propiedad 13:**  $|c_n|^2$  probabilidad de medir la energía  $\hbar\omega(n+1/2)$  cuando el sistema está en el estado  $|\psi\rangle$ . **DS: Tarde vos pero  $|n\rangle$  es el nivel de energía.**

Para continuar con todo esto, se calculará  $\langle x|n\rangle$  donde  $|\langle x|n\rangle|^2$  es la probabilidad de medir la posición  $x$  cuando la partícula está en el  $n$ -ésimo nivel de energía. Pero antes, más propiedades!!!!

**Propiedad 14:**  $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle$ .

**Propiedad 15:** Representación matricial de  $a$ :  $\langle l|a|n\rangle = \sqrt{n}\delta_{l,n-1}$ .

$$a = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

**Propiedad 16:** Representación matricial de  $a^\dagger$ :  $\langle l|a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\delta_{l,n+1}$ .

$$a^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

**Propiedad 17:**  $X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger)$ .

**Propiedad 18:**  $P = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(a^\dagger - a)$ .

**Propiedad 19:** Representación matricial de  $X$ :  $\langle l|X|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{n}\delta_{l,n-1} + \sqrt{n+1}\delta_{l,n+1})$ .

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

**Propiedad 20:** Representación matricial de  $P$ :  $\langle l|P|n\rangle = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(-\sqrt{n}\delta_{l,n-1} + \sqrt{n+1}\delta_{l,n+1})$ .

$$P = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

**Propiedad 21:**  $\langle x|0\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4}\lambda^{1/2}}e^{-\frac{1}{2}(x/\lambda)^2}$ , donde  $\lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$  y  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

**Propiedad 22:** Si  $\langle x|\psi\rangle = \psi(x)$  entonces  $\langle x|(X - \frac{i}{m\omega}P)^n|\psi\rangle = (x - \lambda^2 \frac{d}{dx})^n \psi(x)$ .

**Propiedad 23:**  $\langle x|n\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{n!2^n}\lambda^{n+1/2}}(x - \lambda^2 \frac{d}{dx})^n e^{1\frac{1}{2}(\frac{x}{\lambda})^2}$ .

## 20.4. Dinámica del Oscilador Armónico Cuántico

Primero se estudiará desde el punto de vista de Schrodinger y luego desde el punto de vista de Heisenberg. Desde el punto de vista de Schrodinger, lo que evoluciona es el estado  $|\psi(t)\rangle$  o sea que  $|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle$ . Desde el punto de vista de Heisenberg, o que evoluciona son los observables; donde,  $X(t) = U(t)^\dagger X(0)U(t)$ , así para todos los observables. Para el oscilador armónico  $H$  es independiente del tiempo.

### 20.4.1. Punto de Vista de Schrodinger

El estado de la partícula en el tiempo  $t$  queda descrita por el ket  $|\psi(t)\rangle$ . Para el oscilador cuántico el Hamiltoniano  $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2$  es independiente del tiempo

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{itH}{\hbar}} |\psi_o\rangle.$$

### 20.4.2. Solución al Oscilador Armónico Cuántico

Si el oscilador inicialmente está en el estado  $|\psi_0\rangle$  vamos a calcular su estado en el tiempo  $t$ , respecto a la base otorgada por el Hamiltoniano  $\{|n\rangle\}$ .

**Propiedad 1:**  $e^{-\frac{it}{\hbar}H} |n\rangle = e^{-i\omega(n+1/2)t} |n\rangle$ . Entonces

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(t) |n\rangle,$$

donde  $b_n(t) = c_n e^{-in\omega t}$ .

### 20.4.3. Punto de Vista de Heisenberg

Desde el punto de vista de Heisenberg el estado no evoluciona, los que evolucionan son los observables. Recordando

$$\begin{aligned} X(t) &= U^\dagger(t) X U(t), \\ P(t) &= U^\dagger(t) P U(t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} [X(t), H(t)] \\ \frac{dP}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} [P(t), H(t)]. \end{aligned} \quad \text{Ecuación de Heisenberg.} \quad (20.1)$$

En el oscilador armónico cuántico  $H(t) = H$ . Desarrollando los conmutadores y utilizando propiedades de las aprendidas, se tiene que

$$\frac{dX}{dt} = \frac{P(t)}{m} \quad (20.2)$$

$$\frac{dP}{dt} = -m\omega^2 X(t). \quad (20.3)$$

# Capítulo 21

## Espín 1/2

En este capítulo se estudiará un sistema cuántico con dos estados independientes, osea que el espacio de estado es un espacio de dos dimensiones,  $\mathbb{C}^2$ . El experimento físico que motiva el formalismo es el experimento de Stern-Gerlach, el cual ya se mostró al inicio del capítulo 17.

### 21.1. Generalidades

De lo mostrado en esa explicación vamos a establecer que el ket propio para el espín con valor positivo  $+\hbar/2$  es  $|S_z, +\hbar/2\rangle = |S_z, +\rangle = |+\rangle$  y el otro ket propio es  $|S_z, -\hbar/2\rangle = |S_z, -\rangle = |-\rangle$ . Por lo tanto tenemos una base para el espacio de estado  $\mathbb{C}^2$  que es  $\alpha = \{|+\rangle, |-\rangle\}$ . Osea que

$$S_z |+\rangle = \frac{\hbar}{2} |+\rangle \quad (21.1)$$

$$S_z |-\rangle = -\frac{\hbar}{2} |-\rangle. \quad (21.2)$$

Entonces, el observable  $S_z$  representado respecto a la base  $\alpha$

$$(S_z)_\alpha = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Todoe stado de las partículas se representa por medio de un ket como una superposición de los kets propios del observable  $S_z$

$$|\psi\rangle = a |+\rangle + b |-\rangle.$$

donde siempre requerimos que  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ .

#### 21.1.1. El Operador Identidad

Recordemos que si  $\alpha$  es base del espacio de estado  $\mathcal{H}$  entonces

$$I = |+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|. \quad (21.3)$$

### 21.1.2. Cambio de Base

El aparato para observar  $S_z$  cuando es girado nos da otro observable, en especial cuando lo giramos  $90^\circ$ . Tenemos otro observable que es  $S_x$  y se obtienen solamente dos valores  $\pm \frac{\hbar}{2}$ , obteniendo otros dos kets propios que representan los kets propios del observable  $S_x$

$$S_x |S_x, +\rangle = \frac{\hbar}{2} |S_x, +\rangle \quad (21.4)$$

$$S_x |S_x, -\rangle = \frac{\hbar}{2} |S_x, -\rangle. \quad (21.5)$$

Entonces tenemos la siguiente observación del experimento

$$|\langle S_x, + | S_z, + \rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

$$|\langle S_x, - | S_z, + \rangle|^2 = \frac{1}{2}.$$

Recordemos que  $|\langle S_x, + | S_z, + \rangle|^2$  es la probabilidad de medir  $+\hbar/2$  en el eje  $x$  cuando la partícula está en el estado  $|+\rangle$ . De lo anterior tenemos que  $S_x$  y  $S_z$  son incompatibles y dan bases diferentes de kets propios. A la base en el eje  $x$  le llamaremos  $\beta$ .

#### Representación de $|S_x, \pm\rangle$ y $|S_y, \pm\rangle$ respecto a $\alpha$

Vamos a calcular los siguientes valores para  $a_{ij}$  y  $b_{ij}$ .

$$|S_x, +\rangle = a_{11} |+\rangle + a_{21} |-\rangle$$

$$|S_x, -\rangle = a_{21} |+\rangle + a_{22} |-\rangle$$

además<sup>1</sup>

$$|S_y, +\rangle = b_{11} |+\rangle + b_{21} |-\rangle$$

$$|S_y, -\rangle = b_{21} |+\rangle + b_{22} |-\rangle$$

Sujeto a las siguientes condiciones

$$|\langle S_x, + | S_x, + \rangle|^2 = |\langle S_x, - | S_x, - \rangle|^2 = 1$$

$$|\langle S_y, + | S_y, + \rangle|^2 = |\langle S_y, - | S_y, - \rangle|^2 = 1$$

Así como también  $\langle S_x, + | S_x, - \rangle = \langle S_y, + | S_y, - \rangle = 0$ . Y calculando los brackets se tiene que  $|a_{11}|^2 = |a_{12}|^2 = |a_{21}|^2 = |a_{22}|^2 = \frac{1}{2}$ . De lo anterior llegamos a

$$|S_x, +\rangle = e^{i\phi} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle + \frac{e^{i\phi_1}}{\sqrt{2}} |-\rangle \right)$$

---

<sup>1</sup>a la base de  $y$  le llamaremos  $\gamma$ .

además,  $|S_x, +\rangle = e^{-i\phi} |S_x, +\rangle$ , representan el mismo estado, por lo tanto podemos elegir la fase igual a cero. Se hace lo mismo para  $|S_x, -\rangle$ .

$$|S_x, +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle + \frac{e^{i\phi_1}}{\sqrt{2}} |-\rangle \quad (21.6)$$

$$|S_x, -\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle - \frac{e^{i\phi_1}}{\sqrt{2}} |-\rangle. \quad (21.7)$$

Y se realiza el mismo procedimiento para  $|S_y, \pm\rangle$ .

$$|S_y, +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle + \frac{e^{i\phi_3}}{\sqrt{2}} |-\rangle \quad (21.8)$$

$$|S_y, -\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle - \frac{e^{i\phi_3}}{\sqrt{2}} |-\rangle. \quad (21.9)$$

Reemplazando las fases se tiene

$$|S_x, +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle \quad (21.10)$$

$$|S_x, -\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle \quad (21.11)$$

$$|S_y, +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} |-\rangle \quad (21.12)$$

$$|S_y, -\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}} |-\rangle. \quad (21.13)$$

Ahora, veremos matricialmente los observables respecto a la base  $\alpha$ . Ahora tenemos

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |S_x, +\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |S_x, -\rangle \quad (21.14)$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |S_x, +\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |S_x, -\rangle \quad (21.15)$$

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |S_y, +\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |S_y, -\rangle \quad (21.16)$$

$$|-\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}} |S_y, +\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} |S_y, -\rangle. \quad (21.17)$$

### Representación Matricial de $S_x$ Respecto a $\alpha$

Aplicamos el operador  $S_x$  a los elementos de la base  $\alpha$ .

$$(S_x)_\alpha = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (21.18)$$

Donde  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  es la **primera matriz de pauli**  $\sigma_1 = \sigma_x$ .



### Representación Matricial de $S_y$ Respecto a $\alpha$

Aplicamos el operador  $S_y$  a los elementos de la base  $\alpha$ .

$$(S_y)_\alpha = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (21.19)$$

Donde  $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$  es la **segunda matriz de pauli**  $\sigma_2 = \sigma_y$ .

### Representación Matricial de $S_z$ Respecto a $\alpha$

Aplicamos el operador  $S_z$  a los elementos de la base  $\alpha$ .

$$(S_z)_\alpha = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (21.20)$$

Donde  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  es la **tercera matriz de pauli**  $\sigma_3 = \sigma_z$ .

#### 21.1.3. Matrices de Pauli

Las matrices de pauli son matrices hermíticas que me sirven de base para formar un Espacio Vectorial sobre los reales que eventualmente se convertirá en un Álgebra de Lie.

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (21.21)$$

## 21.2. Espín Total $S^2$

El espín total  $S^2$  se define de la siguiente forma

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2. \quad (21.22)$$

**Propiedad 1:**  $S^2 = \frac{3\hbar^2}{4} I$ .

#### 21.2.1. Operadores Escaleras $S_+$ , $S_-$

Tenemos que la base propia del observable  $S_x$  es  $\beta$  y la del observable  $S_y$  es  $\gamma$ ; estas dos bases son diferentes, lo que implica que son incompatibles, no se pueden medir simultáneamente. Debido a lo anterior vamos a definir los operadores escalera

$$S_+ = S_x + iS_y \quad (21.23)$$

$$S_- = S_x - iS_y, \quad (21.24)$$

observemos que  $S_+^\dagger = S_-$  y viceversa, no son operadores hermíticos, ni unitarios; son operadores tipo escalera.

**Propiedad 2:**  $S_+ = \hbar |+\rangle\langle -|$ .

**Propiedad 3:**  $S_- = \hbar |-\rangle\langle +|$ .

**Propiedad 4:**

$$S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$$

$$S_y = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-)$$

**Propiedad 5:**  $[S_x, S_y] = i\hbar S_z$ .

## 21.3. Presección del Espín 1/2

En esta clase vamos a estudiar la evolución del espín en un electrón sometido a un campo magnético  $\vec{B}$  uniforme y constante dirigido en la dirección  $z$ . Debido a que el electrón tiene espín, también tiene un momento dipolar magnético  $\vec{\mu}$ ; para el electrón  $\mu = \frac{\hbar e}{2mc}$ , donde  $e$  es la carga del electrón. La dirección del momento dipolar magnético es la misma que la del espín. Además tenemos que al estar un electrón en un campo magnético  $\vec{B}$  tenemos que la energía total es:  $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ . Nosotros medimos el observable del espín por medio del momento dipolar magnético. Antes de plantear el hamiltoniano consideremos la siguiente expresión para el espín  $\vec{S}$  que es el espín total, con esto tenemos el hamiltoniano

$$H = \vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\frac{e}{mc} \vec{S} \cdot \vec{B}. \quad (21.25)$$

Considerando que el campo magnético está en la dirección del eje  $z$ :  $H = -\frac{eB_z}{mc} S_z$ . Tomando las constantes como un nuevo parámetro  $\omega = -\frac{eB_z}{mc} \Rightarrow H = \omega S_z$ .

## 21.4. Evolución de un Estado

Ahora vamos a estudiar la forma en que evoluciona un estado cualquiera  $|\psi_o\rangle$  sometido a un Hamiltoniano  $H = \omega S_z$ . Ahora

$$U(t) = e^{-\frac{i\omega t}{\hbar} S_z}. \quad (21.26)$$

**Propiedad 1:**  $e^{-\frac{i\omega t}{\hbar} S_z} |+\rangle = e^{-\frac{i\omega t}{2}} |+\rangle$ .

**Propiedad 2:**  $e^{-\frac{i\omega t}{\hbar} S_z} |-\rangle = e^{\frac{i\omega t}{2}} |-\rangle$ .

### 21.4.1. Casos Especiales

Como primera instancia vamos a considerar que el estado inicial es un estado propio del Hamiltoniano  $H = \omega S_z$  por ejemplo  $H |+\rangle = \frac{\omega\hbar}{2} |+\rangle$ .

**Caso 1:** ( $|\psi_o\rangle = |+\rangle$ )  $|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i\omega t}{2}} |+\rangle$  pero eso representa el mismo estado que  $|+\rangle$ . En este caso  $|+\rangle$  representa un estado estacionario. **DS: los kets del Hamiltoniano representan estados estacionarios que no evolucionan.**

**Caso 2: (Estado inicial  $|S_x, +\rangle$ )** En este caso  $|\psi_o\rangle = |S_x, +\rangle$  o sea que  $|\psi_t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2}}|-\rangle$ .  
Valuando

$$\begin{aligned} |\psi_{\pi/2\omega}\rangle &= |S_y, +\rangle \\ |\psi_{\pi/\omega}\rangle &= |S_x, -\rangle \\ |\psi_{3\pi/2\omega}\rangle &= |S_y, -\rangle \end{aligned}$$

El "cono" va precesando (rotando) con una velocidad angular de precesión igual a  $\omega$ .

### 21.4.2. Consideraciones sobre el Espín 1/2

Aspectos del Espín 1/2 que son las siguientes:

1. Los estados del espín 1/2 como ejemplo secillo de espinor.
2. Entrelazamiento dos partículas, cada una de ellas con espín 1/2.

#### Estados de Espín 1/2 como Espinor

REcordemos que estamos estudiando una partícula de espín 1/2 cuyo espacio de estado es  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$  que es un espacio unitario. En el espacio de estado  $\mathcal{H}$  tenemos un producto interno dado por el Braket. En otras palabras el espacio de estado tiene estructura geométrica llamada unitaria. Podemos hablar de ortogonalidad entre estados y magnitud de kets.

#### Entrelazamiento de dos Partículas con Espín 1/2

Vamos a considerar dos partículas, la partícula con espín 1/2 y la partícula con espín 1/2 también. Con estas dos partículas formamos un sistema de dos partículas de espín 1/2 donde podemos medir el momentum angular total y el momentum angular en  $z$ . Dado el sistema de dos partículas su espacio de estado esta dado por  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  cuya base es  $\{|+\rangle \otimes |+\rangle, |+\rangle \otimes |-\rangle, |-\rangle \otimes |+\rangle, |-\rangle \otimes |-\rangle\} = \{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$ . Vamos a medir el momentum angular del sistema en el eje  $z$

$$\begin{aligned} J_z |\uparrow\uparrow\rangle &= \hbar |\uparrow\uparrow\rangle \\ J_z |\uparrow\downarrow\rangle &= 0 |\uparrow\downarrow\rangle \\ J_z |\downarrow\uparrow\rangle &= 0 |\downarrow\uparrow\rangle \\ J_z |\downarrow\downarrow\rangle &= -\hbar |\downarrow\downarrow\rangle \end{aligned}$$

$J_z$  es la adición<sup>2</sup> de  $S_{1z}$  y  $S_{2z}$

$$J_z = S_{1z} \boxplus S_{2z}. \quad (21.27)$$

---

<sup>2</sup>Adición de Espines:  $J_i = S_{1i} \boxplus S_{2i} = S_{1i} \otimes I + I \otimes S_{2i}$ , con  $i = \{x, y, z\}$ .

## Capítulo 22

# Momentum Angular

### 22.1. Introducción por Medio de los Observables del Spin

Con lo último visto en el capítulo anterior, definimos un operador de momentum angular más general

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2. \quad (22.1)$$

La base de kets propios  $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$  es base de  $J_z$  pero no son kets propios de  $J^2$ . Ahora mostramos su representación matricial

$$J_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (22.2)$$

$$J_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & -i & 0 \\ i & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & -i \\ 0 & i & i & 0 \end{pmatrix}, \quad (22.3)$$

$$J_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (22.4)$$

$$J^2 = \hbar^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (22.5)$$

Encontramos los kets propios de  $J^2$ , los cuales forman la siguiente base  $\{|\uparrow\uparrow\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle), |\downarrow\downarrow\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle)\}$ .

$$(J^2)_\delta = \begin{pmatrix} 2\hbar^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\hbar^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\hbar^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (22.6)$$

Recordemos el postulado 5: Cuando medimos un observable, el estado del sistema cambia (colapsa) a un estado propio del observable, correspondiente al valor propio que medimos.

**Observación:** Al medir el momentum angular total  $J^2$  de un sistema de dos partículas con espín  $1/2$  estas partículas quedan entrelazadas en estado propio correspondiente al valor propio que medimos. Cuando medimos  $J^2$  obtenemos  $2\hbar^2$  o cero. Si medimos  $2\hbar^2$  para  $J^2$  el sistema queda en algún estado generado por los kets propios correspondientes  $\{|\uparrow\uparrow\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle), |\downarrow\downarrow\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)\}$ . Pero si cuando medimos  $J^2$  obtenemos cero el sistema de las dos partículas está en el estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\uparrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\downarrow\rangle$$

donde a los coeficientes se les conocen como **Coefficientes de Clebsch-Gordan**. Si estamos en el estado  $|\psi\rangle$  y a continuación medimos  $S_{1z}$  podríamos obtener  $\pm\hbar/2$ . Un resultado del entrelazamiento es el siguiente:

Si medimos  $S_{1z}$  cuando el sistema está en el estado  $|\psi\rangle$  y nos da  $+\hbar/2$  entonces con toda seguridad al medir  $S_{2z}$  nos dará  $-\hbar/2$ . Si medimos  $S_{1z}$  cuando el sistema está en el estado  $|\psi\rangle$  y nos da  $-\hbar/2$  entonces con toda seguridad al medir  $S_{2z}$  nos dará  $+\hbar/2$ .

## 22.2. Introducción Formal

Recordando como se definió el momentum lineal, usamos traslaciones en espacios euclidianos. De forma análoga vamos a usar rotaciones en espacios euclidianos para introducir el concepto de momentum angular.

### 22.2.1. Rotación Pasiva

**DS: No lo voy a decir...** Es la clásica: (se rotan los ejes de referencia)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Rotación  $R_z(\alpha)$  ángulo  $\alpha$  alrededor del eje  $z$ .

### 22.2.2. Rotación Activa

Se rota el objeto, no rota el sistema de referencia.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Por el momento se le dará preferencia al punto de vista activa, con el cual vamos a desarrollar la teoría básica del Momentum Angular.

**Propiedad 1:**  $D_z(\alpha)$  es un operador unitario.

**Propiedad 2:**  $\langle r, \theta, \phi | D_z(\alpha) | \psi \rangle$

## 22.3. Operadores

### 22.3.1. Definición del Operador $L_z$

$$L_z = i\hbar \left. \frac{dD_z(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0}. \quad (22.7)$$

**Propiedad 3:**  $\langle r, \theta, \phi | L_z | \psi \rangle = -i\hbar \frac{\partial \psi(r, \theta, \phi)}{\partial \phi}$ .

**Propiedad 4:**  $\langle r, \theta, \phi | \left( \frac{\alpha L_z}{i\hbar} \right)^n | \psi \rangle = (-\alpha)^n \frac{\partial^n \psi}{\partial \phi^n}$ .

**Propiedad 5:**  $D_z(\alpha) = e^{-\frac{i\alpha L_z}{\hbar}}$ .

**Propiedad 6:**  $\langle r, \theta, \phi | L_z^\dagger | \psi \rangle = -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial \phi}$ . Lo que implica que  $L_z^\dagger = L_z$  es Hermítico.

**Propiedad 7:** Calculamos los operadores en términos de los observables de posición y momentum.

$$L_z = X P_y - Y P_x \quad (22.8)$$

$$L_x = Y P_z - Z P_y \quad (22.9)$$

$$L_y = Z P_x - X P_z \quad (22.10)$$

y

$$D_x(\alpha) = e^{-\frac{i\alpha L_x}{\hbar}}$$

$$D_y(\alpha) = e^{-\frac{i\alpha L_y}{\hbar}}$$

A diferencia de las traslaciones, las rotaciones no conmutan.

## 22.4. Momentum Angular Orbital

Tomando el producto cruz como se definió en kinder, definimos el momentum angular orbital se tiene

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P}. \quad (22.11)$$

**Propiedad 8:** Conmutadores.

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z \quad (22.12)$$

$$[L_x, L_z] = -i\hbar L_y \quad (22.13)$$

$$[L_y, L_z] = i\hbar L_x. \quad (22.14)$$

**Propiedad 9:** Dado el momentum angular total  $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ , se tiene  $[L^2, L_k] = 0$ , con  $k = \{x, y, z\}$ .

**Propiedad 10:** Operadores escalera

$$\begin{aligned} L_+ &= L_x + iL_y \\ L_- &= L_x - iL_y. \end{aligned}$$

### 22.4.1. Valores y Vectores Propios

$$L_z |j, m\rangle = m\hbar |j, m\rangle \quad (22.15)$$

$$L^2 |j, m\rangle = \lambda_j |j, m\rangle. \quad (22.16)$$

**Propiedad 11:**  $[L_+, L_-] = 2\hbar L_z$ .

**Propiedad 12:**  $[L_z, L_+] = \hbar L_+$  y  $[L_z, L_-] = -\hbar L_-$ .

**Propiedad 13:**  $L^2 = \frac{1}{2}(L_+ L_- + L_- L_+) + L_z^2$ .

**Propiedad 14:**  $L^2 = L_z^2 + \hbar L_z + L_- L_+$  y  $L^2 = L_z^2 - \hbar L_z + L_+ L_-$ .

**Propiedad 15:** Ahora, volviendo al operador general de momento angular

$$\begin{aligned} J_+ &= J_x + iJ_y \\ J_- &= J_x - iJ_y \\ [J_+, J_-] &= 2\hbar J_z \\ [J_z, J_+] &= \hbar J_+ \\ [J_z, J_-] &= -\hbar J_- \\ J &= \frac{1}{2}(J_+ J_- + J_- J_+) + J_z^2 \\ J^2 &= J_z^2 - \hbar J_z + J_+ J_- \end{aligned}$$

**Propiedad 16:**  $L_+ |j, m\rangle = c |j, m+1\rangle$ .

**Propiedad 17:**  $L_- |j, m\rangle = c |j, m-1\rangle$ .

**Propiedad 18:**  $L^2 |j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j, m\rangle$ .

**Propiedad 19:** El valor mínimo de  $m$  para los kets propios  $|j, m\rangle$  con  $j$  fijo es  $m = -j$ .

**Propiedad 20:** Los valores que puede tener  $j$  son los siguientes  $j = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, \dots$

**Propiedad 21:** Dimensión del subespacio propio para  $j$ :  $\dim \mathcal{H}_j = 2j + 1$ .

**Propiedad 22:**  $L_+ |j, m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |j, m+1\rangle$ .

**Propiedad 23:**  $L_- |j, m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} |j, m-1\rangle$ .

### 22.4.2. Armónicos Esféricos

La representación de los ket propios  $|l, m\rangle$ , cuando  $l$  es entero, respecto a la posición en coordenadas esféricas nos quedan los Armónicos Esféricos. Ahora  $l = 0, 1, 2, \dots$

$$\langle r, \theta, \phi | l, m \rangle = Y_l^m(\theta, \phi). \quad (22.17)$$

## Capítulo 23

# Métodos Aproximados

### 23.1. Teoría de Perturbaciones

#### 23.1.1. No Degenerada

Esta teoría se basa en encontrar la solución a la ecuación de Schrodinger independiente del tiempo.

$$H = H^{(0)} + \lambda H'. \quad (23.1)$$

Donde  $H$  lo desconocemos,  $H^{(0)}$  conocemos la solución,  $H'$  término perturbativo y  $\lambda$  consante de acoplamiento. Dada una solución conocida  $H^{(0)}\psi_n^{(0)} = E_n^{(0)}\psi_n^{(0)}$ , y queremos encontrar la forma en serie de los elementos de onda solución de otro hamiltoniano  $H\psi_n = E_n\psi_n$ .

$$\begin{aligned} \psi_n &= \psi_n^{(0)} + \lambda\psi_n^{(1)} + \lambda^2\psi_n^{(2)} + \dots \\ E_n &= E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \dots \end{aligned}$$

Reemplazando

$$\left(H^{(0)} + \lambda H'\right)\left(\psi_n^{(0)} + \lambda\psi_n^{(1)} + \lambda^2\psi_n^{(2)} + \dots\right) = \left(E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \dots\right)\left(\psi_n^{(0)} + \lambda\psi_n^{(1)} + \lambda^2\psi_n^{(2)} + \dots\right). \quad (23.2)$$

Desarrollando esto y agrupando los elementos respecto a  $\lambda$ , multiplicamos por  $\langle\psi_n^{(0)}|$ . Se llega a la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \psi_n^{(1)} &= \sum_{m \neq n} \frac{\langle\psi_m^{(0)}|H'|\psi_n^{(0)}\rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \psi_m^{(0)} \\ E_n &= E_n^{(0)} + \langle\psi_n^{(0)}|H'|\psi_n^{(0)}\rangle \\ \psi_n &= \psi_n^{(0)} + \psi_n^{(1)}. \end{aligned}$$

### 23.2. Átomo de Hidrógeno

Empezaremos recordando los observables y sus operadores asociados:



Observable	Operador
$\vec{r}$	$\hat{R}$
$\vec{p}$	$\hat{P} = -i\hbar\nabla$
$T = \frac{p^2}{2m}$	$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$
$E = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{p}, t)$	$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \hat{V}(\hat{R}, t)$
$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$	$\hat{L} = -i\hbar\hat{R} \times \nabla$

El operador momentum para dos partículas diferentes, conmuta por el simple hecho de que las partículas son diferentes.

Tomaremos el hamiltoniano del sistema:

$$H = \frac{P^2}{2m} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}, \quad (23.3)$$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}. \quad (23.4)$$

La masa es normalmente tomada como la masa del electrón; esto es, debido a que se trata de un problema de dos cuerpos se toma la masa reducida que, luego de un poco de álgebra tiene la siguiente forma  $m \approx m_e - \frac{m_e^2}{M}$ , pero dado que la masa del protón es más de 3 ordenes de magnitud mayor que la del electrón, el ultimo término se ignora y nos deja únicamente la masa del electrón.

La ecuación de Schrodinger es el siguiente problema:

$$H\psi = E_n\psi.$$

La solución más conocida es por medio de separación de variables

$$\psi_{n,j,m}(r, \theta, \phi) = R_{n,l}(r)Y_{l,m}(\theta, \phi). \quad (23.5)$$

donde  $R$  son los polinomios de Laguerre generalizados y  $Y$  son los armónicos esféricos. Los estados están indexados por 3 números cuánticos  $n = 1, 2, \dots$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$  y  $m = -l, \dots, +l$ . En lo cual, la energía solo depende en uno de estos números cuánticos

$$E_n = -\left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{m}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}, \quad (23.6)$$

también se puede escribir de la siguiente forma

$$E_n = -\frac{Ry}{n^2},$$

donde  $Ry = 13.6eV$  es la energía de *Rydberg*, es la energía en el estado base del hidrógeno. También es útil esta otra forma de escribir los niveles de energía

$$E_n = -\frac{(Z\alpha)^2 mc^2}{2n^2}, \quad \text{donde} \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}. \quad (23.7)$$

Esto implica que podemos ver como las energías que ligan al electrón son comparadas con la energía en reposo de la masa del electrón. La cantidad  $\alpha \approx 1/137$  es adimensional y se conoce como

la *constante de estructura fina*. La constante de estructura fina debería pensarse como la manera de caracterizar la fuerza de la, valga la redundancia, fuerza electromagnética. La solución a la ecuación de Schrodinger para el átomo de hidrógeno es la siguiente

$$\psi_{n,j,m}(r, \theta, \phi) = e^{-\frac{r}{na_o}} \left( \frac{r}{a_o} \right)^l \sum_{k=0}^{n-L-1} b_k \left( \frac{r}{a_o} \right)^k Y_{l,m}(\theta, \phi). \quad (23.8)$$

# Capítulo 24

## Problemas en Una Dimensión

Tener en mente la ecuación de Schrodinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x). \quad (24.1)$$

donde sabemos que la función de onda tiene como dimensionales  $1/\sqrt{m}$ .

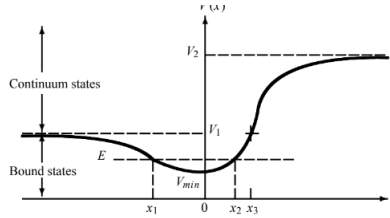


Figura 24.1: Forma de un potencial general.

### 24.1. Propiedades del Movimiento en Una Dimensión

#### 24.1.1. Espectro Discreto (Estados Ligados)

Los estados ligados se dan cuando la partícula no se puede mover al infinito. La partícula está confinada a una región limitada de espacio. La ecuación de Schrodinger permite únicamente soluciones discretas. El potencial de pozo infinito y el oscilador armónico son ejemplos que producen estados ligados. En la figura Fig. 24.1 es claro que el movimiento de la partícula está confinado a estar entre  $x_1$  y  $x_2$ <sup>1</sup> y cuando el nivel de energía de la partícula está entre  $V_{min} < E < V_1$ .

**Teorema 24.1.1.** *En un problema de una dimensión, los niveles de energía de un estado ligado son discretos y no degenerados.*

**Teorema 24.1.2.** *La función de onda  $\psi_n(x)$  de un problema de estado ligado en una dimensión tiene  $n$  nodos ( $\psi_n(x)$  se hace cero  $n$  veces) si  $n = 0$  corresponde al estado base y  $n - 1$  nodos si  $n = 1$  corresponde al estado base.*

<sup>1</sup>Los puntos  $x_1$  y  $x_2$  son los puntos de inflexión del potencial.

### 24.1.2. Espectro Continuo (Estados ligados)

Los estados libres ocurren en los casos donde el movimiento del sistema no está restringido; el ejemplo más clásico es *la partícula libre*.

**Caso  $V_1 < E < V_2$ :** En este caso el movimiento de la partícula es hacia  $-\infty$ . Dado que es un punto de inflexión clásico, por lo que el espectro es continuo y ninguno de sus valores ni vectores propios son degenerados.

**Case  $E > V_2$ :** El espectro de energía es continuo y el movimiento de la partícula es infinito en ambas direcciones. Todos los niveles de energía de este espectro son doblemente degenerados.

### 24.1.3. Potenciales Simétricos y Paridad

La gran mayoría de potenciales que se conocen/utilizan a nivel microscópico son simétricos respecto a la inversión espacial  $V(-x) = V(x)$ . Esta simetría implica simplificaciones en los cálculos.

**Espectro No Degenerado:** Primero se considerará el caso donde los valores propios del Hamiltoniano corresponden a este potencial son no degenerados. Se sabe que un operador simétrico no degenerado tiene los mismos estados propios que el operador paridad. Dado que los estados propios del operador paridad tienen paridad definida, los estados ligados de una partícula moviéndose en un potencial unidimensional simétrico tienen paridad definida

$$V(-x) = V(x) \Rightarrow \psi(-x) = \pm\psi(x). \quad (24.2)$$

**Espectro Degenerado:** Si el espectro del hamiltoniano correspondiente a un potencial es degenerado, los estados propios son expresados solo en términos de estados pares e impares. Los estados propios no tienen paridad definida.

## 24.2. Partícula Libre: Estados Continuos

Este es el problema más clásico y simple, se tiene  $V(x) = 0$  para toda  $x$ . Se tiene que la solución se da en paquetes de onda

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(k) e^{i(kx - \omega t)} dk,$$

donde  $\phi(k)$ , la amplitud de los paquetes de onda está dada por la transformación de Fourier de  $\psi(x, 0)$  como

$$\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, 0) e^{-ikx} dx.$$

Primero, el momento, posición y energía de la partícula no se conocen con certeza; solo un estado probabilístico es posible. Segundo, el paquete de onda y la partícula viajan a la misma velocidad  $v_g = p/m$ , conocida como velocidad de grupo.

## 24.3. Potencial Escalonado

Otro ejemplo simple consiste en una partícula que es libre en todos lados, excepto en un punto en particular, por ejemplo  $x = 0$ , un potencial de este tipo es conocido como potencial escalonado:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ V_o, & z \geq 0 \end{cases}. \quad (24.3)$$

En este problema se intenta analizar la dinámica de un flujo de partículas moviéndose de izquierda a derecha. Se considerarán dos casos, dependiendo si  $E$  es mayor o menor a  $V_o$ .

**Caso  $E > V_o$ :** Las partículas son libres en  $x < 0$  y sienten el potencial repulsivo  $V_o$  que inicia en  $x = 0$  y se mantiene constante para  $x > 0$ . Analizando esto clásicamente, cuando la partícula empieza a entrar en la región cercana a 0 el el momentum lineal es  $\sqrt{2m(E - V_o)}$ , pero como la energía es suficiente para vencer el potencial, el paquete de partículas simplemente perderá energía cinética. Desde el punto de vista cuántico, la partícula está regido por la ecuación de Schrodinger para estas dos regiones

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k_1^2\right)\psi_1(x) = 0 \quad (x < 0), \quad (24.4)$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k_2^2\right)\psi_1(x) = 0 \quad (x \geq 0), \quad (24.5)$$

donde  $k_1^2 = 2mE/\hbar^2$  y  $k_2^2 = 2m(E - V_o)/\hbar^2$ . Las soluciones más generales de estas dos ecuaciones son

$$\psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \quad (x < 0), \quad (24.6)$$

$$\psi_2(x) = Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x} \quad (x \geq 0), \quad (24.7)$$

donde los términos exponenciales positivos representan las ondas moviéndose en la dirección  $x$  y para las negativas en la dirección  $-x$ .

En resumen, hay partículas reflectadas a pesar de que poseen energía suficiente para atravesar la barrera, a esto se le conoce como *wavelike behavior*. **DS: Terminar esta explicación en Zettili, p221.**

**Caso  $E < V_o$ :** Dado que la energía que poseen las partículas es menor al potencial de barrera, estas saldrán rebotadas sin poder cruzarlo **DS: bastante obvio, hablando clásicamente**. Cuánticamente, esto no es del todo así, a la izquierda de la barrera las ecuaciones que modelan esto son (24.4) y (24.6). Pero para el lado derecho del potencial se tiene lo siguiente

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k_2^2\right)\psi_2(x) = 0 \quad (x \geq 0), \quad (24.8)$$

$$\psi_2(x) = Ce^{-k_2x} + De^{k_2x} \quad (x \geq 0), \quad (24.9)$$

dado que el valor de la función en todo el espacio debe ser finito,  $D$  debe ser cero. A diferencia del caso clásico, en el caso cuántico se tiene probabilidad distinta de cero de encontrar alguna partícula a la derecha de la barrera

$$P(x) = |\psi_t(x)|^2 = |C|^2 e^{-2k_2x} = \frac{4k_1^2|A|^2}{k_1^2 + k_2^2} e^{-2k_2x}.$$

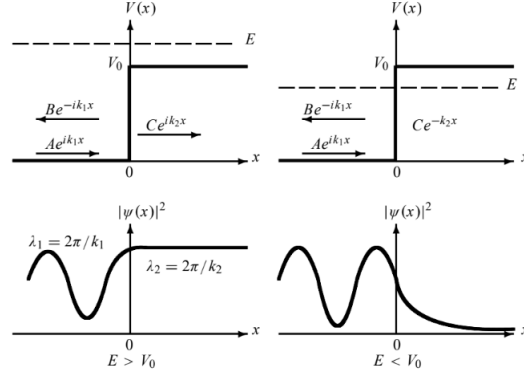


Figura 24.2: Escalamiento de potencial y direcciones de propagación de los resultados posibles, ondas reflejadas y transmitidas, más sus densidades de probabilidad  $|\psi(x)|^2$  para ambos casos.

## 24.4. Pozo de Potencial

Consideremos un haz de partículas de masa  $m$  que son enviadas desde la izquierda de una barrera de potencial

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ V_0, & 0 \leq x \leq a, \\ 0, & x > a. \end{cases} \quad (24.10)$$

Este potencial, repulsivo, no admite estados ligados. Estamos tratando con un problema de dispersión unidimensional. Volveremos a tomar 2 casos

**Caso  $E > V_0$ :** Clásicamente, el resultado final es como si no existiera la barrera. Cuánticamente, es intuitivo lo que sucederá, la partícula mantendrá el comportamiento oscilatorio con menor amplitud conforme se pasa de regiones. **DS: Revisar Zettili, p226.**

**Caso  $E < V_0$ :** Clásicamente, es también bastante intuitivo el resultado. Cuánticamente, no lo es, aunque es esperado algo similar a lo visto en el problema anterior.

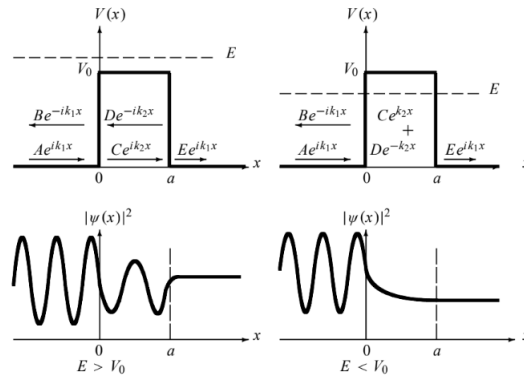


Figura 24.3: Escalamiento de potencial y direcciones de propagación de los resultados posibles, ondas reflejadas y transmitidas, más sus densidades de probabilidad  $|\psi(x)|^2$  para ambos casos.

### 24.4.1. Tunelamiento

En general, el efecto de tunelamiento consiste en la propagación de una partícula a través de una región donde la energía de la partícula es menor que el potencial. Esto es cierto solo si la el potencial es una función suave y varía lentamente respecto a  $x$ .

## 24.5. Potencial de Pozo Cuadrado Infinito

### 24.5.1. Asimétrico

El potencial es de la siguiente forma

$$V(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq a, \\ +\infty, & x > a. \end{cases} \quad (24.11)$$

Clásicamente, la partícula se mantiene con un momentum constante siendo reflectada continuamente dado el pozo de potencial. Cuánticamente, se espera que esta partícula tenga una única solución ligada y un espectro no degenerado de la energía. Veremos soluciones dentro del pozo, las cuales son las esperadas, soluciones al oscilador armónico y esto nos da la energía

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} k_n^2 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (24.12)$$

La energía está cuantizada. Esto era esperable dado que se trata de estados ligados y su espectro de energía es por definicion discreto. Con esto y normalizando la función de onda tenemos que

$$\boxed{\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).} \quad (24.13)$$

Esta es la solución a la ecuación de Schrodinger independiente de tiempo, para la dependiente del tiempo

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} = \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{a} e^{-\frac{in^2 E_1 t}{\hbar}}. \quad (24.14)$$

### 24.5.2. Simétrico

Para el potencial simétrico

$$V(x) = \begin{cases} +\infty, & x < -a/2, \\ 0, & -a/2 \leq x \leq a/2, \\ +\infty, & x > a/2. \end{cases} \quad (24.15)$$

El espectro de la energía se mantiene dada esta traslación, dado que el hamiltoniano es invariante ante transformaciones espaciales; como solo contiene parte cinética, conmuta con el momentum de la partícula  $[H, P] = 0$ . El espectro es discreto y no degenerado. La función correspondiente al potencial es

$$|\psi\rangle_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \left[ \frac{n\pi}{a} \left( x + \frac{a}{2} \right) \right] = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \cos \frac{n\pi x}{a} & (n = 1, 3, 5, \dots), \\ \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} & (n = 2, 4, 6, 8, \dots) \end{cases} \quad (24.16)$$

Las funciones de onda correspondientes a los números cuánticos impares son simétricas y las pares son antisimétricas.

## 24.6. Potencial de Pozo Cuadrado Finito

Consideremos una partícula de masa  $m$  moviéndose en el siguiente potencial

$$V(x) = \begin{cases} V_o, & x < -a/2, \\ 0, & -a/2 \leq x \leq a/2, \\ V_o, & x > a/2. \end{cases} \quad (24.17)$$

Los únicos casos interesantes son  $E > V_o$  y  $E < V_o$ . Se esperan soluciones continuas y doblemente degeneradas para el espectro de la energía de  $E > V_o$  y uno discreto y no degenerada para  $E < V_o$ .

### 24.6.1. Soluciones de Dispersión ( $E > V_o$ )

Clásicamente, si la partícula parte desde la izquierda con un momento constante de  $\sqrt{2m(E - V_o)}$  se acelerará hasta  $\sqrt{2mE}$  en el pozo y luego se ralentizará hasta su momentum inicial luego de salir de él. Cuánticamente, como se hizo para los potenciales escalados, se puede comprobar que se obtiene un coeficiente de reflexión finito. La solución es fácil de obtener; solo se siguen los pasos seguidos en las demostraciones anteriores. La función de onda tiene un patrón de oscilación en las tres regiones.

### 24.6.2. Soluciones de Estados Ligados ( $E < V_o$ )

Clásicamente, la partícula está confinada al pozo. Cuánticamente, las soluciones son bastante interesantes, se espera un espectro de energía discreto y funciones de onda que decaen en ambas regiones fuera del pozo, pero oscilante dentro. **DS: ver Zettili, p235.**



Parte IV

Mecánica Clásica

*"La frase más exitante que se puede oír en ciencia, la que anuncia nuevos descubrimientos, no es «eureka» sino «Eso es divertido...»" - Isaac Asimov.*

## Capítulo 25

# Movimiento de una Partícula en una Dimensión

Se estudiará el movimiento de una partícula a lo largo de una línea recta.

### 25.1. Teoremas de Energía y Momentum

El movimiento de una partícula esta gobernado por la ecuación de la Segunda Ley de Newton

$$F = m \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (25.1)$$

Antes de considerar su solución de esta ecuación es necesario recordar algunos conceptos básicos, como el momentum lineal

$$p = mv = m \frac{dx}{dt}. \quad (25.2)$$

Suponiendo que la masa es constante (esto no es cierto en casos específicos), se tiene

$$F = \frac{dp}{dt}. \quad (25.3)$$

Esta ecuación muestra que el cambio del momentum en el tiempo es igual a la fuerza aplicada. A esto le llamamos el Teorema del Momentum Lineal. Integrando en el tiempo, se tiene

$$p_2 - p_1 = \int_{t_1}^{t_2} F dt. \quad (25.4)$$

A la integral de la derecha se le conoce como *Impulso*.

Otra cantidad importante a tomar en cuenta es la *energía cinética*

$$T = \frac{1}{2}mv^2. \quad (25.5)$$

Multiplicando la Segunda Ley de Newton por la velocidad, se tiene lo siguiente

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}mv^2 \right) = \frac{dT}{dt} = Fv. \quad (25.6)$$

Integrando de ambos lados y reemplazando la velocidad por su definición, se llega al *Teorema Trabajo y Energía*

$$T_2 - T_1 = \int_{t_1}^{t_2} F \, dx. \quad (25.7)$$

## 25.2. Fuerza

### 25.2.1. Fuerza Aplicada Dependiente del Tiempo

SI la fuerza  $F$  está dada por una función dependiente del tiempo, resolviendo el teorema impulso momento para  $x$  y  $\dot{x}$ .

$$v = v_o + \frac{1}{m} \int_{t_o}^t F(t) \, dt \quad (25.8)$$

$$x - x_o = v_o(t - t_o) + \frac{1}{m} \int_{t_o}^t \left[ \int_{t_o}^t F(t) \, dt \right] dt. \quad (25.9)$$

### 25.2.2. Fuerza de Restitución Dependiente de la Velocidad

La Segunda Ley de Newton en términos de la velocidad

$$m \frac{dv}{dt} = F(v). \quad (25.10)$$

Integramos y se obtienen soluciones de la siguiente forma

$$v = \varphi\left(v_o, \frac{t - t_o}{m}\right)$$

$$x = x_o + \int_{t_o}^t \varphi\left(v_o, \frac{t - t_o}{m}\right) dt.$$

Estas fuerzas restitutivas dependen de potencias de la velocidad del objeto/sistema en movimiento

$$F = \mp bv^n, \quad (25.11)$$

Si  $n$  es un entero impar, se toma el signo negativo, en otro caso se toma el signo de modo que la velocidad sea opuesta a la velocidad.

### 25.2.3. Fuerza Conservativa

Para una fuerza dependiente exclusivamente de la posición. Ahora definimos la energía potencial

$$V(x) = - \int_{x_s}^x F(x) \, dx \quad (25.12)$$

Con esto se puede definir la energía total

$$E = T + V. \quad (25.13)$$

Resolviendo para la velocidad se obtiene

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}}[E - V(x)]^{1/2} \quad (25.14)$$

entonces

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_o}^x [E - V(x)]^{1/2} dx = t - t_o. \quad (25.15)$$

Con todo esto obtenemos la relación directa entre potencial y fuerza

$$F = -\nabla V \quad (25.16)$$

## Campos Vectoriales

Para que un campo vectorial  $\vec{F}$  sea considerado conservativo, deben cumplirse las siguientes condiciones:

1. **Existencia de un potencial escalar:** Existe una función escalar  $f$  tal que  $\vec{F} = \nabla f$ . Esto significa que el campo vectorial puede ser expresado como el gradiente de una función escalar.
2. **La circulación de  $\vec{F}$  sobre cualquier curva cerrada es cero:** Para que un campo vectorial  $\vec{F}$  sea conservativo, la integral de línea del campo vectorial sobre cualquier curva cerrada  $C$  debe ser cero:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Esto implica que el trabajo realizado por el campo a lo largo de una trayectoria cerrada es nulo.

3. **Independencia del camino:** En un campo conservativo, la integral de línea de  $\vec{F}$  entre dos puntos cualesquiera es independiente del camino tomado entre esos puntos. Es decir, si  $A$  y  $B$  son dos puntos en el espacio, entonces:

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

es la misma para cualquier camino entre  $A$  y  $B$ .

4. **La condición de rotacional cero (campo irrotacional):** Para un campo vectorial  $\vec{F}$  ser conservativo, su rotacional debe ser cero en toda la región de interés:

$$\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$$

Esta condición implica que no hay "vorticidad" en el campo vectorial.

5. **Simplemente conexa del dominio:** Para que el criterio del rotacional cero garantice que un campo es conservativo, el dominio del campo debe ser simplemente conexo. Un dominio es simplemente conexo si cualquier curva cerrada dentro de él puede ser contraída continuamente a un punto sin salir del dominio. En otras palabras, no debe haber agujeros en el dominio.

#### 25.2.4. Caída Libre

Una situación más que conocida para nosotros, ahora le incluiremos fuerzas de resitución

$$F = -mg - bv, \quad (25.17)$$

Esta es una aproximación más didáctica que real, para objetos pequeños con velocidades terminales grandes, esta es una mejor aproximación

$$F = bv^2. \quad (25.18)$$

### 25.3. Osciladores

#### 25.3.1. Oscilador Armónico Simple

DS: Básico, bueno, bonito y barato, todos lo conocemos y nos gusta :3 La ecuación característica de los osciladores armónicos simple

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0. \quad (25.19)$$

Cuya energía potencial y total es

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2$$
$$E = \frac{1}{2} kA^2$$

#### 25.3.2. Diagramas de Fase

Diagrama realizado con  $x$  y  $\dot{x}$  como las coordenadas. Estos diagramas muestran información relevante acerca del movimiento del sistema. Estos diagramas tienen como objetivos

- Visualización de la dinámica del sistema.
- Análisis de estabilidad.
- Predicción del comportamiento futuro.
- Estudio de sistemas caóticos.

#### 25.3.3. Oscilaciones Amortiguadas

El oscilador armónico simple es un oscilador libre. Para este tipo de oscilación se tiene

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_o^2 x = 0. \quad (25.20)$$

donde  $\beta = b/2m$  es el parámetro de amortiguamiento. La solución general es la siguiente

$$x(t) = e^{-\beta t} \left[ A_1 \exp\left\{\sqrt{\beta^2 - \omega_o^2} t\right\} + A_2 \exp\left\{-\sqrt{\beta^2 - \omega_o^2} t\right\} \right] \quad (25.21)$$

Para este tipo de oscilaciones se tienen 3 casos

**Subamortiguado:**  $\omega_o^2 > \beta^2$ . Cuya solución es

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \cos \omega_1 t - \delta \quad \omega_1^2 = \omega_o^2 - \beta^2. \quad (25.22)$$

**Amortiguamiento Crítico:**  $\omega_o^2 = \beta^2$ . Cuya solución es

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\beta t}. \quad (25.23)$$

**Sobreamortiguado:**  $\omega_o^2 < \beta^2$ . Cuya solución es

$$x(t) = Ae^{-\beta t} [A_1 e^{\omega_2 t} + A_2 e^{-\omega_2 t}] \quad \omega_2 = \sqrt{\beta^2 - \omega_o^2}. \quad (25.24)$$

#### 25.3.4. Oscilaciones Forzadas

El caso más simple de oscilaciones forzadas es el de una fuerza externa senoidal

$$F = -kx - b\dot{x} + F_o \cos \omega t. \quad (25.25)$$

Matemáticamente se obtienen dos soluciones una complementaria y una particular. La solución complementaria

$$x_c(t) = e^{-\beta t} [A_1 \exp\{\sqrt{\beta^2 - \omega_o^2} t\} + A_2 \exp\{-\sqrt{\beta^2 - \omega_o^2} t\}], \quad (25.26)$$

y para la solución particular

$$x_p(t) = D \cos \omega t - \delta \quad (25.27)$$

**DS: Revisando Thornton, p118**

$$x_p(t) = \frac{A}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2) + 4\omega^2\beta^2}} \cos \omega t - \delta$$

$$\delta = \arctan \frac{2\omega\beta}{\omega_o^2 - \omega^2}.$$

## Capítulo 26

# Movimiento de una Partícula en Varias Dimensiones

### 26.1. Primeras y Segundas Derivadas en Diferentes Coordenadas

Primera derivada en coordenadas esféricas

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{e}_r + r\left(\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\hat{e}_\phi\right)$$

Segunda derivada en coordenadas esféricas

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\left(\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\hat{e}_\phi\right) + r\left(\ddot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{\theta}\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} + \ddot{\phi}\sin\theta\hat{e}_\phi + \dot{\phi}\cos\theta\dot{\theta}\hat{e}_\phi\right)$$

Primera derivada en coordenadas cilíndricas

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\hat{e}_\phi + \dot{z}\hat{e}_z$$

Segunda derivada en coordenadas cilíndricas

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{e}_\rho + \left(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}\right)\hat{e}_\phi + \ddot{z}\hat{e}_z$$

### 26.2. Osciladores Armónicos en Dos Dimensiones

Considerando el movimiento de una partícula con dos grados de libertad.

$$\left.\begin{aligned}F_x &= -kr \cos\theta = -kx \\F_y &= -kr \sin\theta = -ky\end{aligned}\right\} \quad (26.1)$$

Cuyas soluciones son

$$\left.\begin{aligned}x(t) &= \cos(\omega_x t - \alpha) \\y(t) &= \cos(\omega_y t - \beta)\end{aligned}\right\} \quad (26.2)$$

Las trayectorias seguidas por un oscilador en dos dimensiones se denominan *figuras de Lissajous*.



### 26.3. Teoremas del Momentum Angular

El momentum angular está definido de la siguiente forma

$$L = rmv_\theta = mr^2\dot{\theta}. \quad (26.3)$$

Ahora, notemos que

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = rF_\theta \quad (26.4)$$

Y de esto, integramos llegamos al *Teorema Impulso-Momentum* para el momentum angular.

$$L_2 - L_1 = mr_2^2\dot{\theta}_2 - mr_1^2\dot{\theta}_1 = \int_{t_1}^{t_2} rF_\theta dt. \quad (26.5)$$

Respecto a un punto  $O$

$$L_O = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}). \quad (26.6)$$

### 26.4. Movimiento en una Fuerza Central

Las fuerzas centrales son aquellas que representan atracción ( $F(r) < 0$ ) o repulsión ( $F(r) > 0$ ) a un punto en concreto desde el origen. Normalmente son dos partículas interactuando. En la gran mayoría de los casos de fuerza central, dicha fuerza es inversamente proporcional al  $r^2$ . Bajo una fuerza central no se tiene torque, por ende

$$\frac{dL}{dt} = 0. \quad (26.7)$$

Con esto, se reduce el problema a dos ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 &= F(r), \\ mr\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} &= 0. \end{aligned}$$

Y sabiendo que la energía total es de la forma

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + V(r). \quad (26.8)$$

Reemplazando el momentum angular, y despejando, se obtiene

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}} \left( E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2} \right)^{1/2}, \quad (26.9)$$

$$\sqrt{\frac{2}{m}}t = \int_{r_o}^r \frac{dr}{\left( E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2} \right)^{1/2}}, \quad (26.10)$$

$$\theta = \theta_o + \int_0^t \frac{L}{mr^2} dt. \quad (26.11)$$

Ahora, tomando la segunda ley de newton mostrada al inicio de la sección, reemplazamos el momentum angular

$$m\ddot{r} = F(r) + \frac{L^2}{mr^3}. \quad (26.12)$$

Esta ecuación tiene la forma del movimiento en una dimensión más una **fuerza centrífuga**. Esta es una *fuerza ficticia*. Con esto, integrando, definimos el potencial efectivo

$$'V(r)' = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}. \quad (26.13)$$

El ultimo término es la energía potencial asociada a la fuerza centrífuga.

### 26.4.1. Fuerza Inversamente Proporcional al Cuadrado de la Distancia

El problema más importante de la mecánica clásica es

$$F = \frac{K}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad V(r) = \frac{K}{r}. \quad (26.14)$$

y el potencial efectivo

$$'V(r)' = \frac{K}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}. \quad (26.15)$$

## 26.5. Órbitas Elípticas, El Problema de Kepler

Antes de los descubrimientos de Newton, Kepler anunció tres leyes del movimiento planetario dadas las observaciones astronomicas de Tycho Brahe.

1. Los planetas se mueven en elipses con el sol en uno de los focos.
2. Las áreas por las que pasa el radiovector desde el planeta al sol en tiempos iguales son iguales.
3. El cuadrado del periodo de revolución es proporcional al cubo del semieje mayor.

## Capítulo 27

# Sistemas de Partículas

### 27.1. Leyes de Conservación

DS: Solo se enunciarán, no vale la pena la demostración.

#### 27.1.1. Conservación del Momentum Lineal

Es la segunda Ley de Newton, para varias dimensiones

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0. \quad (27.1)$$

Y el centro de masa de un sistema de partículas se mueve como una única partícula cuya masa es la masa total del sistema, sobre la cual actúa una fuerza igual al total de las fuerzas externas actuando sobre el sistema.

#### 27.1.2. Conservación del Momentum Angular

Se tiene

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}. \quad (27.2)$$

#### 27.1.3. Conservación de la Energía

Es una que ya vimos, se definió a principios de esta parte.

$$E = V + T, \quad (27.3)$$

donde  $E$  es constante.

### 27.2. Problema de los Dos Cuerpos

Este es uno de los problemas más bonitos cuya solución es simple pero brutal. Tomaremos las dos partículas, las fuerzas entre ellas y las fuerzas externas

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= \mathbf{F}_1^i = \mathbf{F}_1^i + \mathbf{F}_1^e, \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= \mathbf{F}_2^i = \mathbf{F}_2^i + \mathbf{F}_2^e. \end{aligned}$$

Y se introduce un cambio de coordenadas en base al centro de masa y la distancia entre las partículas ( DS: No la distancia de cada una al centro de masa).

$$R = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}$$

$$r = r_1 - r_2.$$

Cuya transformación inversa es

$$r_1 = R + \frac{m_2}{m_1 + m_2} r,$$

$$r_2 = R - \frac{m_1}{m_1 + m_2} r.$$

Entonces se tiene (asumiendo  $F_1^e/m_1 = F_2^e/m_2$ )

$$M\ddot{R} = F,$$

$$\mu\ddot{r} = F_1^i,$$

donde  $M = m_1 + m_2$ ,  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  (masa reducida).  $F = F_1^e + F_2^e$  y  $F_1^i$  es la fuerza de la partícula 2 sobre la partícula 1.

DS: El problema de N cuerpos no es soluble analíticamente y la parte de Osciladores Acoplados se trabajará en la parte de mecánica lagrangiana y hamiltoniana.

## Capítulo 28

# Cuerpo Rígido

Para un cuerpo macroscópico definimos la densidad

$$\rho = \frac{dM}{dV}, \quad (28.1)$$

con

$$M = \iiint_{\text{cuerpo}} \rho dV. \quad (28.2)$$

### 28.1. Ubicación de un Cuerpo Rígido

Se necesitan 6 coordenadas para describir la posición de un cuerpo rígido, para un punto  $P_1$  ( $x_1, y_1, z_1$ ) (centro de masa),  $(\theta_2, \phi_2)$  para la orientación de  $P_2$  a una distancia de  $P_1$  (un eje) y  $\psi$  para la rotación alrededor del eje  $P_1P_2$ .

Utilizando los teoremas de momentum lineal y rotacional se tiene que

- Si  $F$  es independiente de la orientación, podemos resolver  $F = M\ddot{R}$ .
- Si  $N$  es independiente de  $R$ , podemos resolver  $\frac{dL}{dt} = N$ .
- Si  $F$  y  $N$  dependen entre sí, las ecuaciones se resuelven acopladas.

#### 28.1.1. Consideraciones Generales

Si el objeto gira alrededor de un punto arbitrario,  $F = M\ddot{R}$  sirve para saber la fuerza necesaria que mantiene el punto fijo y  $\frac{dL}{dt} = N$  nos da el movimiento de rotación. Aunque es difícil aplicar  $\frac{dL}{dt} = N$  por la elección de los ángulos determinen la orientación del objeto.

#### 28.1.2. Momento de Inercia

Tomando una partícula rotando alrededor de un eje

$$L = \sum_i m_i r_i^2 \dot{\theta} = \left( \sum_i m_i r_i^2 \right) \dot{\theta} = I_z \dot{\theta} \quad (28.3)$$

donde  $I_z$  es el momento de inercia alrededor del eje  $z$ .

$$I_z = \iiint_{\text{cuerpo}} \rho r^2 dV. \quad (28.4)$$

- Radio de giro:  $Mk_z^2 = I_z$ , donde  $k_z$  es la distancia de donde toda masa debe estar como partícula puntual para tener el mismo momento de inercia que el objeto original.

### 28.1.3. Ecuación de Rotación

Esta es la ecuación de movimiento para un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo.

$$\frac{dL}{dt} = I_z \ddot{\theta} = N_z. \quad (28.5)$$

### 28.1.4. Centro de Masa

- Si un cuerpo es simétrico respecto a un plano, el centro de masa está en el plano.
- Si un cuerpo es simétrico respecto de dos planos, el centro de masa está en la intersección de los planos.
- Si un cuerpo es simétrico alrededor de un eje, el centro de masa está en el eje.
- Si un cuerpo es simétrico respecto de tres planos, el centro de masa está en la intersección de los planos.
- **Importante:** Si un cuerpo se compone de varias partes cuyos centros de masa son conocidos, entonces el centro de masa del cuerpo compuesto se puede calcular como si las partes fueran partículas puntuales.

**Definición 28.1.1. Centroide:**

$$R = \frac{1}{V} \iiint_V r dV \quad R = \frac{1}{A} \iint_A r dA \quad R = \frac{1}{s} \int_c r ds. \quad (28.6)$$

**Teorema 28.1.1. Teorema de Pappus:** Si una curva plana rota alrededor de un eje en el mismo plano y ambos no se interesectan, en el área de la superficie de revolución es igual a la longitud de la curva por la longitud de la trayectoria del centroide.

**Teorema 28.1.2. Teorema de Ejes Paralelos:** El momento de inercia de un cuerpo alrededor de un eje dado es igual al momento de inercia alrededor de un eje paralelo que pasa por el centro de masa, más el momento de inercia alrededor del eje dado como si toda la masa del cuerpo estuviera concentrada en el centro de masa.

**Teorema 28.1.3. Teorema de Ejes Perpendiculares:** Para una lámina plana, la suma de los momentos de inercia de una lámina plana alrededor de dos ejes perpendiculares en el plano de la lámina es igual al momento de inercia alrededor de un eje que pasa por el punto donde se interesectan, perpendicular a la lámina.

## Capítulo 29

# Gravitación

Ecuación de Gravitación Universal

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \iiint \frac{Gm(r' - r)\rho(r')}{|r' - r|^3} dV'. \quad (29.1)$$

Con esto se define el campo gravitacional

$$g(r) = \iiint \frac{G(r' - r)\rho(r')}{|r' - r|^3} dV' \quad (29.2)$$

Y también se define la energía potencial gravitacional y el potencial gravitacional

$$V_m(r) = \sum_i \frac{-Gmm_i}{|r - r_i|} \quad \mathcal{G} = \sum_i \frac{Gm_i}{|r - r_i|} \quad (29.3)$$

Los cuales cumplen con las siguientes relaciones, dado que la fuerza y el campo gravitacional son conservativos

$$F = -\nabla V \quad g = \nabla \mathcal{G}. \quad (29.4)$$

por lo mismo

$$\nabla \times g = 0. \quad (29.5)$$

Y utilizando lo que se verá para la Ley de Gauss en electricidad, aplicado aqui nos da como resultado, que el flujo gravitacional es

$$\nabla \cdot g = -4\pi G\rho. \quad (29.6)$$

y en términos del potencial

$$\nabla^2 \mathcal{G} = -4\pi G\rho. \quad (29.7)$$

## Capítulo 30

# Sistema de Coordenadas en Movimiento

Origen de coordenadas en movimiento

$$\begin{aligned}r &= r^* + h \\ r^* &= r - h.\end{aligned}$$

Los ejes de  $O^*$  son paralelos a los de  $O$ ,  $O^*$  se mueve respecto a  $O$ .

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= \frac{dr^*}{dt} + \frac{dh}{dt} \\ a &= a^* + a_h\end{aligned}$$

Al término  $ma_h$  se le conoce como fuerza ficticia. Por segunda ley de newton

$$m \frac{d^2 r^*}{dt^2} + ma_h = F \quad (30.1)$$

Si  $O^*$  se mueve con velocidad constante

$$m \frac{d^2 r^*}{dt^2} = F$$

Ahora para un sistema rotado

$$r = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}} = x^*\hat{\mathbf{x}}^* + y^*\hat{\mathbf{y}}^* + z^*\hat{\mathbf{z}}^*. \quad (30.2)$$

Con todo esto se definen dos derivadas  $\frac{d^*}{dt}$  para el sistema que rota y  $\frac{d}{dt}$  para el sistema fijo. Definiremos un vector  $A$  en ambos sistemas de coordenadas

$$\begin{aligned}A &= A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}} \\ A &= A_x^*\hat{\mathbf{x}}^* + A_y^*\hat{\mathbf{y}}^* + A_z^*\hat{\mathbf{z}}^*\end{aligned}$$

y encontramos sus derivadas respecto a su propio sistema de referencia

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= \dot{A}_x\hat{\mathbf{x}} + \dot{A}_y\hat{\mathbf{y}} + \dot{A}_z\hat{\mathbf{z}} \\ \frac{d^*A}{dt} &= \dot{A}_x^*\hat{\mathbf{x}}^* + \dot{A}_y^*\hat{\mathbf{y}}^* + \dot{A}_z^*\hat{\mathbf{z}}^*.\end{aligned}$$



Ahora, si queremos la derivada de  $A$  en el sistema  $O^*$

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= \frac{d}{dt} [A_x^* \hat{\mathbf{x}}^* + A_y^* \hat{\mathbf{y}}^* + A_z^* \hat{\mathbf{z}}^*] \\ &= \dot{A}_x^* \hat{\mathbf{x}}^* + \dot{A}_y^* \hat{\mathbf{y}}^* + \dot{A}_z^* \hat{\mathbf{z}}^* + A_x^* \frac{d\hat{\mathbf{x}}^*}{dt} + A_y^* \frac{d\hat{\mathbf{y}}^*}{dt} + A_z^* \frac{d\hat{\mathbf{z}}^*}{dt}.\end{aligned}$$

Supongamos que  $O^*$  rota alrededor del eje  $z$  con velocidad  $\omega$  y consideremos un vector  $B$  que está en reposo en  $O^*$ . Pero en  $O$  tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{dB}{dt} &= \omega B \sin \theta \hat{\mathbf{v}} \\ \frac{dB}{dt} &= \omega \times B.\end{aligned}$$

Desarrollando se llega al siguiente operador

$$\frac{d}{dt} = \frac{d^*}{dt} + \omega \times \quad (30.3)$$

Y derivando nuevamente respecto al tiempo y reemplazando  $A = r$

**Teorema 30.0.1. Teorema de Coriolis:**

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d^2 * r}{dt^2} + 2\omega \times \frac{d * r}{dt} + \omega \times (\omega \times r) + \frac{d * \omega}{dt} \times r. \quad (30.4)$$

donde el término  $2\omega \times \frac{d * r}{dt}$  es la **aceleración de coriolis** y  $\omega \times (\omega \times r)$  es la **aceleración centrípeta**. Y para una partícula cualquiera y una fuerza  $F$  se tiene

$$\boxed{m \frac{d^2 * r}{dt^2} = F + m[g - \omega \times (\omega \times r)] - 2m\omega \times \frac{d * r}{dt}. \quad (30.5)}$$

En donde al término  $g_e = g(r) - \omega \times (\omega \times r)$  se le conoce como **gravedad efectiva**.

### 30.1. Fuerza de Coriolis

La ecuación para movimiento en la tierra es

$$m \frac{d^2 * r}{dt^2} = F + m[g - \omega \times (\omega \times r)] - 2m\omega \times \frac{d * r}{dt}. \quad (30.6)$$

Dejando solo la fuerza de coriolis

$$m \frac{d^2 * r}{dt^2} = -2m\omega \times \frac{d * r}{dt}. \quad (30.7)$$

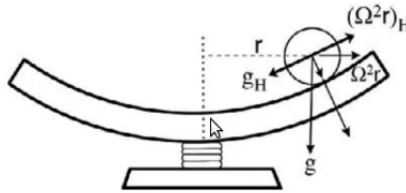


Figura 30.1: Figura para ejemplificar la fuerza de *Coriolis*.

Hacemos  $\omega = (0, 0, \omega)$  y llamamos  $v = \frac{d*r}{dt} = (v_x, v_y, 0)$ . Expandiendo el producto vectorial  $\frac{d*v}{dt} = (2\omega v_y, -2\omega v_x, 0)$  entonces, se tienen ecuaciones diferenciales para las componentes

$$\frac{d*v_x}{dt} = 2\omega v_y, \quad \frac{d*v_y}{dt} = -2\omega v_x. \quad (30.8)$$

Resolviendo las ecuaciones se tiene que

$$\begin{aligned} v_y(t) &= A \cos(2\omega t + \theta), \\ v_x(t) &= A \sin(2\omega t + \theta) \end{aligned}$$

Se tomarán como condiciones iniciales  $v_x(0) = v_{x0}$  y  $v_y(0) = 0$ , entonces

$$v_x(t) = v_{x0} \sin(2\omega t + \pi/2) = \cos(2\omega t), \quad (30.9)$$

$$v_y(t) = v_{x0} \cos(2\omega t + \pi/2) = \sin(2\omega t). \quad (30.10)$$

Integramos para encontrar la posición

$$x(t) = \frac{v_{x0}}{2\omega} \sin(2\omega t), \quad (30.11)$$

$$y(t) = \frac{v_{x0}}{2\omega} \cos(2\omega t) - \frac{v_{x0}}{2\omega}. \quad (30.12)$$

Es claro que la trayectoria de la partícula en el sistema estrellado es un círculo.

### 30.1.1. Péndulo de Foucault

Tomando un péndulo largo y pesado, esto nos da oscilaciones "planas" sin elevación. La fuerza de coriolis es perpendicular al plano de oscilación, es  $< 0.1\%$  de  $mg_e$  y tiene un efecto de precesión del plano de oscilación. Para describir bien esto, nos 'iremos' a un sistema que rota con el plano de oscilación.

Introducimos coordenadas en donde el péndulo no precesa. Llamamos  $\Omega\hat{\mathbf{z}}$  a la *velocidad de precesión del plano*. También llamamos  $O'$  al sistema que gira con velocidad  $\Omega\hat{\mathbf{z}}$ , recordamos cómo tomar las derivadas

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d*r}{dt} + \omega \times r, \quad \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2*r}{dt^2} + 2\omega \times \frac{d*r}{dt} + \omega \times (\omega \times r) + \frac{d*\omega}{dt} \times r \quad (30.13)$$

Ahora transformaremos, nos trasladaremos del sistema  $O^*$  al sistema primado, con lo que se tiene

$$\frac{d*r}{dt} = \frac{d/r}{dt} + \Omega\hat{\mathbf{z}} \times r, \quad \frac{d^2*r}{dt^2} = \frac{d^2/r}{dt^2} + \Omega\hat{\mathbf{z}} \times (\Omega\hat{\mathbf{z}} \times r) + 2\Omega\hat{\mathbf{z}} \times \frac{d/r}{dt}. \quad (30.14)$$

**DS: Son 3 sistemas de coordenadas: El sistema fijo, el sistema estrellado que gira con el planeta y el sistema primado que es el que gira con el péndulo.** Ahora con un poco del álgebra y análisis vectorial<sup>1</sup> se llega a

$$m \frac{d^2/r}{dt^2} = \tau + mg_e - 2m(\Omega\hat{\mathbf{z}} + \omega) \times \frac{d/r}{dt} - m\Omega[\Omega\hat{\mathbf{z}} \cdot r + 2\omega \cdot r]\hat{\mathbf{z}} + m(\Omega^2 + 2\omega \cdot \Omega\hat{\mathbf{z}})r. \quad (30.15)$$

---

<sup>1</sup>Identidad BAC-CAB:  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$

El vector unitario  $\hat{\mathbf{z}}$  y el vector de posición  $\mathbf{r}$  están sobre el plano de oscilación. El vector resultante del producto cruz es el único que se sale del plano de oscilación y esto se escapa del objetivo del sistema primado; por ende, tenemos que ajustar la velocidad angular  $\Omega$  para que todas las fuerzas involucradas estén dentro del plano de oscilación. Entonces es necesario que  $\hat{\mathbf{z}} \cdot (\Omega \hat{\mathbf{z}} + \omega) = 0$ , por lo tanto  $\Omega = -\omega \cos \theta$  lo que contrarresta la precesión ocasionada por la fuerza de coriolis.

## 30.2. Problema Restringido de los Tres Cuerpos

Tomaremos el potencial para la masa  $m$  del sistema de tres cuerpos

$$V = -\frac{mM_1G}{[(x-x_1)^2 + y^2]^{1/2}} - \frac{mM_2G}{[(x-x_2)^2 + y^2]^{1/2}} - \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2), \quad (30.16)$$

donde  $\omega$  es la velocidad angular de la órbita circular  $M_1$  y  $M_2$ , la cuál está dada por

$$\omega^2 = \frac{(M_1 + M_2)G}{a^3}. \quad (30.17)$$

Al igual que las órbitas de fuerza central, nuestro análisis se basa en encontrar los puntos máximos y mínimos de la energía potencial.

Para hacer los cálculos más simples se realizará el siguiente cambio de variables.

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{a}, & \eta &= \frac{y}{a}, \\ \xi_1 &= \frac{x_1}{a} = \frac{M_2}{M_1 + M_2}, & \xi_2 &= \frac{x_2}{a} = -\frac{M_1}{M_1 + M_2} = \xi_1 - 1. \end{aligned}$$

Entonces, reemplazando variables

$$V = \frac{m(M_1 + M_2)G}{a} \left\{ \frac{\xi_2}{[(\xi - \xi_2)^2 + \eta^2]^{1/2}} - \frac{\xi_1}{[(\xi - \xi_1)^2 + \eta^2]^{1/2}} - \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) \right\}. \quad (30.18)$$

### 30.2.1. Puntos Máximos y Mínimos

La forma de proceder es tomar las derivadas de  $V$  dada por la última ecuación respecto de  $\xi$  y  $\eta$  e igualarlas a cero. Con esto llegamos a la siguiente relación

$$-\frac{\xi_2(\xi - \xi_1)}{|\xi - \xi_1|^3} + \frac{\xi_1(\xi - \xi_2)}{|\xi - \xi_2|^3} - \xi = 0. \quad (30.19)$$

Haciendo  $\eta = 0$  se tienen 3 puntos  $(\xi_A, 0)$ ,  $(\xi_B, 0)$ ,  $(\xi_C, 0)$ . Los siguientes dos puntos se encuentran con un poco de álgebra

$$\begin{aligned} (\xi - \xi_2)^2 + \eta^2 &= 1, \\ (\xi - \xi_1)^2 + \eta^2 &= 1. \end{aligned}$$

En donde los puntos  $A, B, C$  son puntos silla y  $D, E$  son máximos. El resto de la solución es gráfica.

# Capítulo 31

## Mecánica del Medio Continuo

### 31.1. Cuerda Vibrante

Consideraciones generales:

- La vibración ocurre en el plano vertical.
- La longitud de la cuerda es  $l$ .
- La cuerda está fija en los extremos.
- La vibración es pequeña.
- Cada punto se mueve verticalmente.
- La tensión es constante.

Luego de realizar la deducción se tiene la ecuación de onda

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad (31.1)$$

Resolviendo la ecuación por separación de variables se tienen las siguientes ecuaciones

$$\Theta(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t. \quad \text{Ecuación de Helmholtz} \quad (31.2)$$

$$X(x) = C_x \cos k_x x + D_x + \sin k_x x, \quad (31.3)$$

$$Y(y) = C_y \cos k_y y + D_y + \sin k_y y, \quad \text{Soluciones Espaciales} \quad (31.4)$$

$$Z(z) = C_z \cos k_z z + D_z + \sin k_z z. \quad (31.5)$$

Donde la constante de  $z$  depende de las otras dos, y esta relación es

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2. \quad (31.6)$$

Luego de aplicar las condiciones de frontera

$$p = (A \cos \omega_{lmn} t + B \sin \omega_{lmn} t) \cos \frac{l\pi x}{L_x} \cos \frac{m\pi y}{L_y} \cos \frac{n\pi z}{L_z}. \quad (31.7)$$

1. Las frecuencias  $\omega_{lmn}$  no son múltiplos enteros de una misma cantidad, como en el caso de la cuerda. Esto es importante porque es la razón por la cual una cuerda puede producir notas musicales.

### 31.1.1. Ondas Viajeras

Luego de encontrar la solución a la ecuación de onda en una dimensión

$$u(x, t) = A \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi ct}{l} + \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi ct}{l}. \quad (31.8)$$

### Ondas Viajeras y Estacionarias

$$\underbrace{B \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi ct}{l}}_{\text{ONda Estacionaria}} = \underbrace{\frac{B}{2} \cos \frac{n\pi}{l}(x - ct)}_{\text{Onda Viajera a la } \rightarrow} - \underbrace{\frac{B}{2} \cos \frac{n\pi}{l}(x + ct)}_{\text{Onda Viajera a la } \leftarrow}. \quad (31.9)$$

Para formar una onda estacionaria tenemos que superponer dos ondas viajeras con igual amplitud y que se muevan en direcciones opuestas con igual velocidad.

## 31.2. Equilibrio de Fluidos

### 31.2.1. Fuerzas de Volumen

Fuerza de volumen  $f$ , es la traducción común de *body force*. Es la fuerza que experimenta un fluido por unidad de volumen, de tal forma que un elemento de volumen  $dV$  experimenta una fuerza dada por  $f dV$ . El ejemplo más común es la fuerza de volumen ejercida por la gravedad, que está dada como  $f = \rho g$  donde  $\rho$  es la densidad del fluido.

### 31.2.2. Relación entre Presión y Energía Potencial

Encontrar la presión dentro de un fluido en equilibrio sabiendo la fuerza de volumen  $f(r)$  es equivalente a encontrar la **energía potencial** para una fuerza  $F(r)$ . Primero verificamos que  $\nabla \times f$  sea cero en todo el fluido. Luego tomamos un punto  $r_1$  en donde la presión es conocida y utilizamos la expresión

$$p(r) = p_1 + \int_{r_1}^r f \cdot dr. \quad (31.10)$$

que es una integral de línea a lo largo de una trayectoria. Si  $\nabla \times f = 0$  implica que  $f$  se puede expresar como el gradiente de una cantidad. De la expresión entre la fuerza de volumen  $f$  y la presión  $p$  es

$$f = \nabla p.$$

En el caso de fuerza de gravedad, sabemos que ésta apunta de arriba hacia abajo. El gradiente de la presión apunta en la misma dirección ya que la presión aumenta de arriba hacia abajo.

## 31.3. Cinemática de Fluidos

Se tienen dos puntos de vista

- **Lagrangiano:**

- Seguir el movimiento de un elemento de fluido.
- Dada su posición inicial  $\rightarrow$  posición futura.
- Como un sistema de partículas, forma en la que describimos la cuerda.

■ **Euleriano:**

- Establecer densidad y velocidad para cada punto e instante.
- El fluido se describe con la densidad  $\rho(x, y, z, t)$  y la velocidad  $v(x, y, z, t)$ .
- Centramos la atención en lo que sucede en un punto fijo en lugar de seguir a las partículas en su trayectoria.

### 31.3.1. Dos Tipos de Razones de Cambio

Desarrollando un poco el diferencial de presión

$$\boxed{\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + v \cdot \nabla p.} \quad (31.11)$$

### 31.3.2. Fluido Incompresible

Estudiando un poco la divergencia se tiene

$$\frac{d}{dt}(\delta V) = (\nabla \cdot v)\delta V. \quad (31.12)$$

Un caso importante a considerar es cuando  $\nabla \cdot v = 0$ , en cuyo caso vemos de la derivada del volumen es igual a cero, o bien que  $\delta V$  se mantiene constante. En otras palabras, decimos que el fluido es **incompresible**.

Un fluido es incompresible si cumple con  $\nabla \cdot v = 0$ .

Esta condición se cumple cuando el fluido es un líquido. Un gas se expande y se contrae, pero en ciertos casos se puede considerar incompresible también. Sin embargo, recordemos también que ningún objeto es totalmente líquido.

### 31.3.3. Masa

Suponiendo que la masa de un elemento de volumen es constante  $\delta m = \rho \delta V$ . Derivando respecto al tiempo y desarrollando  $\frac{d}{dt}\delta m$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho v = 0, \quad (31.13)$$

A lo que se le conoce como **ecuación de continuidad** y expresa e hecho de que la masa de cada elemento de volumen es constante, por lo tanto la masa total de todo el fluido también es constante. En otras palabras, la masa se conserva.

### 31.3.4. Vorticidad

Es el elemento proyectado en la dirección de un vector unitario  $\hat{\mathbf{n}}$

$$\text{Vorticidad} = \hat{\mathbf{n}} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}). \quad (31.14)$$

Si integramos la vorticidad en una superficie con vector normal, utilizando el teorema de Stokes, en donde si las integrales son cero podemos decir que la vorticidad es cero y esto nos dice que el fluido es **irrotacional**.

### 31.3.5. Ecuación de Movimiento para un Fluido Ideal

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{\mathbf{f}}{\rho}. \quad (31.15)$$

Si  $\rho = \rho(p)$  entonces el fluido es homogéneo.

### 31.3.6. Ley de Conservación

Vamos a partir de la ecuación de continuidad, la cual también le podemos llamar **ley de conservación de masa**.

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\iiint_V \rho dV}_{\text{masa}} + \underbrace{\iint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} \rho dS}_{\text{flujo de masa}} = 0. \quad (31.16)$$

Esto dice que la forma de una ley de conservación es

$$\frac{d}{dt} X + \text{flujo de } X = 0, \quad (31.17)$$

donde  $X$  es cualquier cantidad física que nos interese, por ejemplo: masa, momentum, energía, momentum angular, etc. Una forma generalizada es con la ecuación anterior es igual a  $Q$ , a la cual se le llama **fuentes** o **sumideros**.

De esto y de la fuerza de volumen podemos concluir que

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p - \rho \mathcal{G} = \text{cte}. \quad (31.18)$$

### 31.3.7. Flujo Estacionario

- Velocidad, densidad, presión, fuerzas de volumen son constantes en el tiempo.
- No cambian en el tiempo pero si en el espacio.
- Las derivadas  $\frac{\partial}{\partial t}$  son cero.
- La expresión  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rightarrow \frac{d}{dt} = \mathbf{v} \cdot \nabla$ .

## Capítulo 32

# Mecánica Lagrangiana y Hamiltoniana

### 32.1. Introducción

¿Por qué esto no es satisfactorio en la física moderna?

1. "Oscurece" algunas características de la dinámica de un sistema.
2. No está clara la relación entre las leyes de Newton y la Mecánica Cuántica.
3. Es difícil trabajar con sólidos.

Identificar estructuras y simetrías en los sistemas. Sistemas locales: QED, QCD, Débiles.

#### 32.1.1. Mecánica Newtoniana

Segunda ley de Newton

$$\vec{F} = m\vec{a} \longrightarrow \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \dot{\vec{p}}. \quad (32.1)$$

donde  $m = 0$ . Si conocemos  $\vec{r}$  y  $\dot{\vec{r}}$  en un tiempo  $t = t_o$ , integrando se encuentra  $\vec{r}(t)$ .

#### 32.1.2. Marco de Referencia Inercial

Es en el que una partícula con masa constante viaja en una línea recta.

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}t. \quad (32.2)$$

Si  $S$  es un marco de referencia inercial se tienen 10 transformaciones lineales independientes  $S \rightarrow S'$  también es un M.R. inercial.

- 3 Rotaciones:  $\vec{r}' = O\vec{r}$  donde  $O$  es una matriz  $3 \times 3$  ortogonal.
- 3 Traslaciones:  $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{c}$  donde  $\vec{c}$  es un vector constante.
- 3 Boost:  $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{u}t$  donde  $\vec{u}$  es una velocidad constante.
- 1 Traslaciones Temporales:  $t' = t + c$  donde  $c$  es real y constante.

Las leyes de Newton son invariantes ante este grupo de transformaciones: **Grupo Galileano**.



### 32.1.3. Momento Angular

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (32.3)$$

Medimos respecto a un punto en particular.

$$\vec{\tau} = \dot{\vec{L}} \quad (32.4)$$

### Leyes de Conservación

- Si  $\vec{F} = 0$  entonces  $\vec{p}$  es constante.
- Si  $\vec{\tau} = 0$  entonces  $\vec{L}$  es constante.

### 32.1.4. Energía

Energía cinética  $T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}$

$$\frac{dT}{dt} = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}, \quad (32.5)$$

entonces

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (32.6)$$

**Fuerzas Conservativas:** El trabajo realizado es independiente de la trayectoria. Y para una trayectoria cerrada

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \times \vec{F} = 0.$$

Por lo que se puede escribir  $\vec{F} = -\nabla V(r)$ .

Energía cinética de un sistema  $T = \frac{1}{2} \sum_i m \dot{\vec{r}}_i^2$  y tomando  $\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{\tilde{r}}$

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \sum_i \dot{\vec{\tilde{r}}}_i^2, \quad (32.7)$$

como en el caso de una sola partícula

$$T(t_2) - T(t_1) = \sum_i \int \vec{F}_i^{ext} \cdot d\vec{r}_i + \sum_{i \neq j} \int \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i. \quad (32.8)$$

- Fuerzas externas conservativas:  $\vec{F}_i^{ext} = -\nabla V_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ .
- Fuerzas internas conservativas:  $\vec{F}_{ij} = -\nabla_i V_{ij}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ .  $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \rightarrow V_{ij} = V_{ji}$  entonces  $V_{ij}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = V_{ij}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_j|)$ .

$$T(t_2) - T(t_1) = - \sum_i \int \nabla_i V_i(\vec{r}_i) \cdot d\vec{r}_i - \sum_{i \neq j} \int \nabla_i V_{ij}(r_1, \dots, r_N) \cdot d\vec{r}_i. \quad (32.9)$$

## 32.2. Generalidades

### 32.2.1. Principio Variacional y Ecuación de Lagrange

Movimiento de un sistema. Coordenadas generalizadas:  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , espacio de  $n$  dimensiones  
DS: Espacio de Configuración<sup>1</sup>.

### 32.2.2. El Principio de Hamilton (Principio de Mínima Acción)

El movimiento del sistema de un tiempo  $t_1$  a un tiempo  $t_2$  es tal que la acción

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \quad (32.10)$$

donde  $\mathcal{L}$  es el Lagrangiano  $T - V$ , tiene un valor estacionario para el movimiento.

$$\begin{aligned} \delta I &= 0, \\ \delta I &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t) dt = 0. \end{aligned}$$

Principio de Hamilton es suficiente para derivar las ecuaciones de movimiento.

### 32.2.3. Cálculo de Variaciones

DS: "Repaso" de algo que nunca se vió bien xd. Consideremos un problema de 1 dimensión  $f(y, \dot{y}, x)$  donde  $y = y(x)$ ,  $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$ ,  $[x_1, x_2]$ . Todo esto es por  $\delta J = 0$ , entonces

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, \dot{y}, x) dx. \quad (32.11)$$

Donde  $y(x, \alpha)$  son posibles trayectorias y  $y(x, 0)$  es la trayectoria correcta. Podemos escribir  $y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha \eta(x)$ , donde  $\eta(x)$  tiene que ser 0 en  $x_1$  y  $x_2$ .

$$\begin{aligned} J(\alpha) &= \int_{x_1}^{x_2} f(y(x, \alpha), \dot{y}(x, \alpha), x) dx, \\ \left( \frac{dJ}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} &= 0. \quad \text{Para un punto estacionario.} \end{aligned}$$

Derivando

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} \right) d\alpha \quad (32.12)$$

Considerando solo la segunda derivada al realizar integración por partes

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial x} dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx. \quad (32.13)$$

---

<sup>1</sup>Cada punto de la curva en el espacio de configuración es un instante en la configuración del sistema.

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{d\alpha} &= \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx \\ \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} dx &= 0 \quad \text{Condición puntos estacionarios} \end{aligned}$$

Recordemos  $y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha \eta(x)$ .

**Lema:**

$$\int_{x_2}^{x_1} M(x) \eta(x) dx = 0 \quad (32.14)$$

para  $\eta(x)$ : función arbitraria y continua (hasta la segunda derivada).  $M(x)$  se desvanece en el intervalo  $(x_1, x_2)$

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) = 0 \quad (32.15)$$

la cantidad diferencial

$$\left( \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} d\alpha \equiv \delta y \quad (32.16)$$

variación infinitesimal de la trayectoria variada respecto de la trayectoria correcta. La variación de  $J$

$$\left( \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} d\alpha \equiv \delta J \quad (32.17)$$

entonces

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right)}_{=0} \delta y dx = 0 \quad (32.18)$$

#### 32.2.4. Principio de Hamilton y Ecuación de Lagrange

$$\delta J = \int_1^2 f(y_1(x), \dots; \dot{y}_1(x), \dots; x) dx \quad (32.19)$$

Lo de  $y_i(x, \alpha)$  se cumple para todas las  $i$ , donde lo que nos interesa son las  $y_i(x, 0)$ , sabiendo que  $\eta_i(x)$  se desvanecen en los extremos. Realizando el mismo análisis que se realizó en la subsección anterior, se llega a

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} = 0} \quad (32.20)$$

En donde si se tienen  $N$  partículas, implica tener  $n = 3N$  coordenadas. Cambiando de coordenadas

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0} \quad (32.21)$$

a lo que se conoce como **Ecuación de Lagrange**.

### 32.2.5. Restricción en las Coordenadas Generalizadas

#### Restricciones Holonómicas

$$f(x_A, t) = 0 \quad (32.22)$$

$\alpha = 1, 2, \dots, N - n$  con  $N$  número total de coordenadas y  $n$  número de grados de libertad. Por ejemplo: para  $M$  partículas, se tienen  $3M$  ecuaciones, que es lo mismo que  $3M = N$  coordenadas, y  $n$  ecuaciones/grados de libertad.

**Multiplicadores de Lagrange**  $x_A = x_A(q_1, \dots, q_n)$ ,  $N - n$  nuevos grados dinámicos de libertad,  $\lambda_\alpha(t)$ . Definimos el nuevo lagrangiano  $\mathcal{L}' = \mathcal{L}(x^A, \dot{x}^A) + \lambda_\alpha f_\alpha(x^A, t)$

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_A} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_A}}_{\text{La ecuación de movimiento sin restricciones}} = \underbrace{\lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_A}}_{\text{Restricciones en el sistema}} \quad (32.23)$$

#### Teorema 32.2.1.

$$\mathcal{L}[q_i, \dot{q}_i, t] = \mathcal{L}[x^A(q_i, t), \dot{x}^A(q_i, \dot{q}_i, t), t] \quad (32.24)$$

Imponer una restricción  $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \lambda_\alpha f_\alpha$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i}}, \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i} = 0.} \quad (32.25)$$

**Resumen** Un sistema descrito por  $N$  coordenadas generalizadas  $q_i$

$$\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0.$$

- Momento conjugado de  $q_i$  / momento canónico

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad (32.26)$$

$$\boxed{\dot{p}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}.} \quad (32.27)$$

### 32.2.6. Teorema de Noether

**Definición 32.2.1.**  $F(q_i, \dot{q}_i, t)$  constante de movimiento, cantidad conservada.

$$\frac{dF}{dt} = 0 \quad \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial F}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad (32.28)$$

para  $q_i$  que satisface la ecuación de movimiento. Si  $\mathcal{L}$  no depende explícitamente del tiempo.

$$H = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \mathcal{L} = \text{cte.} \quad (32.29)$$

Derivando el Hamiltoniano respecto al tiempo se supone  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0$  solo para algunas  $q_j$ .

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\frac{dp_j}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0.$$

Mapeo de los parametros  $q_j = Q_j(s, t)$   $s \in \mathbb{R}$  De modo que  $q_j(t) = Q_j(0, t)$ , se dice que esta transformación es una simetría continua del  $\mathcal{L}$ .

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = 0. \quad (32.30)$$

El teorema de Noether: Para cada una de estas simetrías hay una cantidad conservada.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial s} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_j} \frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial s}$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial Q_j}{\partial s} \right|_{s=0} = cte.$$

- Invarianza de  $\mathcal{L}$  ante traslaciones: Se conserva el momentum lineal.
- Invarianza de  $\mathcal{L}$  ante rotaciones: Se conserva el momentum angular.
- Homogeneidad en el tiempo: Conservación de la energía.

## 32.3. Formalismo de Hamilton

### 32.3.1. Ecuación de Hamilton

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, p_i, t) \quad (32.31)$$

con  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = p_i$ , ahora veamos la variación de  $H$

$$dH = (dp_i) \dot{q}_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \quad (32.32)$$

Esto lo podemos escribir como

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (32.33)$$

$$\boxed{\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}} \quad \boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}} \quad \boxed{-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}}. \quad (32.34)$$

### 32.3.2. Teorema de Liouville

### 32.3.3. Brakets de Poisson

Teniendo  $f(p, q)$ ,  $g(q, p)$  se define un braket de poisson

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i}. \quad (32.35)$$

Con las siguientes propiedades

- $\{f, g\} = -\{g, f\}$ .
- Linealidad:  $\{\alpha f + \beta g, h\} = \alpha\{f, h\} + \beta\{g, h\}$ .
- Leibniz rule:  $\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$ .
- Identidad de Jacobi:  $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ .
- Y por ultimo, para una función:

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (32.36)$$

### 32.3.4. Transformaciones Canónicas

Tomando  $\mathcal{J}_{ij} \equiv \frac{\partial y_i}{\partial x_j}$ , para que las ecuaciones de Hamilton queden invariantes

$$\boxed{\mathcal{J} \mathcal{J}^T = J.} \quad \text{Transformación Canónica.} \quad (32.37)$$

**Teorema 32.3.1.** *Los brackets de Poisson son invariantes ante transformaciones canónicas. Si los brackets de Poisson preservan la estructura:*

$$\{Q_i, Q_j\} = 0 \quad \{P_i, P_j\} = 0 \quad \{Q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad (32.38)$$

*la transformación es canónica.*

## Capítulo 33

# Cuerpo Rígido

### 33.1. Generalidades

$N$  puntos en donde la distancia entre ellos está fijo  $|r_i - r_j| = \text{constante}$  en el límite continuo  $\sum_i m_i \rightarrow \int dr \rho(r)$ . En donde se tienen 6 grados de libertad 3 traslaciones y 3 rotaciones. Ahora definimos  $\{\hat{\mathbf{e}}_a\}$  es el marco de referencia del espacio y  $\{\hat{\mathbf{e}}_a\}$  es el marco de referencia del cuerpo rígido. En donde los productos internos entre elementos de los marcos de referencia cumplen con la ortonormalidad.

Espacio de configuración,  $C$ , matrices  $3 \times 3$  ortogonales especiales  $\text{SO}(3)$ .

#### 33.1.1. Velocidad Angular

Teniendo  $\vec{r}(t) = \tilde{r}_a(t) \hat{\mathbf{e}}_a = r_a \hat{\mathbf{e}}_a(t)$ , ahora  $r_a \hat{\mathbf{e}}_a(t) = r_a R_{ab}(t) \hat{\mathbf{e}}_b$ , donde  $R_{ab}$  son elementos de una matriz. Derivamos respecto al tiempo con lo que analizamos tanto los vectores posición como la base  $\frac{d\hat{\mathbf{e}}_a(t)}{dt} = \frac{dR_{ab}}{dt} R_{cd} \hat{\mathbf{e}}_a = \omega_{ac} \hat{\mathbf{e}}_c$  y por facilidad definimos un objeto con un solo índice  $\omega_a = \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} \omega_{bc}$ <sup>1</sup>.

$$\frac{d\hat{\mathbf{e}}_a}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{\mathbf{e}}_a. \quad (33.1)$$

con  $\omega$  velocidad angular instantánea en el marco de referencia del cuerpo rígido.

#### 33.1.2. El Tensor de Inercia

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \quad (33.2)$$

usando  $\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \quad (33.3)$$

---

<sup>1</sup>Donde  $\varepsilon_{abc}$  es conocido como el símbolo de Levi Civita.

usando y desarrollando una identidad para los producto cruz e interno, por lo que se tiene que

$$T = \frac{1}{2} \omega_a I_{ab} \omega_b, \quad (33.4)$$

donde  $I_{ab} = \sum_i m_i [\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i \delta_{ab} - (\vec{r}_i)_a (\vec{r}_i)_b]$  donde  $I_{ab}$  es el tensor de inercia, es simétrico

$$I = \int d^3r \rho(\vec{r}) \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & y^2 + x^2 \end{pmatrix} \quad (33.5)$$

$I' = OIO^T$  donde  $I'$  es diagonal  $I' = \begin{pmatrix} I_1 & & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{pmatrix}$  con  $I_a$  son los momentos de inercias principales.

Propiedades del cuerpo rígido están dadas por su masa, su momento de inercia y sus ejes principales.

$I_a$  es real y positivo.

$$I_{ab} c^a c^b = \sum_i (r_i^2 c^2 - (\vec{r}_i \cdot \vec{c})^2) \geq 0. \quad (33.6)$$

Si  $\vec{c}$  es autovector de  $I$ ,  $I_{ab} c_a c_b = I_a |\vec{c}|^2$ ,  $I_a > 0$ .

**Teorema 33.1.1. Teorema de Ejes Paralelos: (Forma tensorial)**

$$(I_c)_{ab} = (I_{cm})_{ab} (c^2 \delta_{ab} - c_a c_b) M. \quad (33.7)$$

**Ecuaciones de Euler**

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3 (I_3 - I_2) &= 0, \\ I_2 \dot{\omega}_2 + \omega_1 \omega_3 (I_1 - I_3) &= 0, \\ I_3 \dot{\omega}_3 + \omega_1 \omega_2 (I_2 - I_1) &= 0. \end{aligned}$$



Parte V

# Electromagnetismo

*"El conocimiento es una red de ideas interconectadas, una vez que atrapamos una, las demás vienen detrás" - Michael Faraday.*

## Capítulo 34

# Análisis Vectorial

DS: Solo se enunciarán los teoremas y propiedades más importantes.

### 34.1. Operadores Vectoriales

#### 34.1.1. Gradiente

El gradiente de un campo escalar es un campo vectorial. Es un vector normal a la curva de nivel en el punto estudiado

$$\nabla f(r) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \hat{\mathbf{x}}_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \hat{\mathbf{x}}_n \right), \quad (34.1)$$

Cuando  $\nabla f = 0$  se tiene un punto estacionario (máximo o mínimo). Dicho de otra forma, el gradiente marca la dirección en la cual varía más rápido el campo escalar y su magnitud indica cuan rápido varía.

#### En Diferentes Sistemas de Coordenadas

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad \text{Coordenadas Esféricas}$$

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}.$$

#### 34.1.2. Divergencia

La divergencia de un campo vectorial mide la diferencia entre el flujo saliente y entrante en una región dada.

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (34.2)$$

La divergencia produce un escalar, mide cuanto un vector se dispersa o sale de un punto.

## En Diferentes Sistemas de Coordenadas

$$\nabla \cdot A = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla \cdot A = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad \text{Coordenadas Cilíndricas.}$$

### 34.1.3. Rotacional

Operador vectorial sobre campos vectoriales: tendencia de un campo vectorial a inducir rotación.

$$\nabla \times A = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (34.3)$$

## 34.2. Integración Vectorial

Integrales de línea, superficie y volumen. Integrandos pueden ser vectores o escalares.

### 34.2.1. Integrales de Línea

Recorridos o trayectorias

$$\int_c F(r) \cdot d\mathbf{l}. \quad (34.4)$$

Donde  $F$  es un campo vectorial,  $d\mathbf{l}$  desplazamiento vectorial infinitesimal a lo largo de la curva y  $c$  curva sobre la cual se integra. Cuando la integral de línea es independiente de la trayectoria el campo es conservativo.

### 34.2.2. Integrales de Superficie

Esta integral mide un flujo

$$\int_S F \cdot \hat{\mathbf{n}} da \quad (34.5)$$

Esto nos da un escalar. Si la integral es cerrada  $\oint F \cdot \hat{\mathbf{n}} da$ .

### 34.2.3. Teoremas Importantes

**Teorema 34.2.1. Teorema Fundamental de la Divergencia:**

$$\int_V \nabla \cdot F dV = \oint_S F \cdot \hat{\mathbf{n}} da. \quad (34.6)$$

**Teorema 34.2.2. Teorema de Stokes:**

$$\int_S (\nabla \times F) \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \oint_c F \cdot d\mathbf{l}. \quad (34.7)$$

## Capítulo 35

# Electrostática

Esta estudia los efectos mutuos que se producen entre los cuerpos como consecuencia de us carga eléctrica. La carga eléctrica es una propiedad fundamental y característica delas partículas elementales.

1. La carga no se crea ni se destruye.
2. Hay dos clases: positiva y negativa.
3. En un sistema cerrado la carga se conserva.

### 35.1. Ley de Coulomb

Experimentalemnte

1. Dos cargas puntuales ejercen fuerza a lo largo de la línea que las une e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.
2. La fuerza es proporcional al producto de las cargas.

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12}. \quad (35.1)$$

Esto es válido para cargas puntuales, pero para muchas cargas se aplica el principio de superposición. Ahora, si la carga se distribuye en un volumen  $V$  con densidad  $\rho$  y sobre la superficie  $S$  que limita  $V$  con densidad  $\sigma$ , la fuerza ejercida por esta distribución de carga sobre una carga puntual  $q$  está dada por:

$$F(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(r') \frac{r - r'}{|r - r'|^3} dV' + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \sigma(r') \frac{r - r'}{|r - r'|^3} dS'. \quad (35.2)$$

## 35.2. Campo Eléctrico

Campo vectorial físico  $\rightarrow$  región del espacio en la que interactúa la fuerza eléctrica. Se genera por cargas o campos magnéticos variables en el tiempo.

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i. \quad (35.3)$$

Entonces, de manera general, tomando en cuenta distribuciones continuas de carga y cargas puntuales

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{r - r_i}{|r - r_i|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{r - r'}{|r - r'|^3} \rho(r') dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{r - r'}{|r - r'|^3} \sigma(r') da' \quad (35.4)$$

## 35.3. Potencial Electroestático

El campo eléctrico cumple con

$$\nabla \times \vec{E} = 0. \quad (35.5)$$

Sabemos que  $\vec{E}(r) = -\nabla\varphi$  es un potencial electrostático. Pero con esto se tiene

$$\varphi(r) = - \int_{\mathcal{O}}^r \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (35.6)$$

donde  $\mathcal{O}$  es el punto de referencia. Notemos que

1. Potencial electrostático no es lo mismo que energía potencial.
2.  $\vec{E}$  es un vector derivado de un escalar y ya que  $\nabla \times E = 0$  esto implica: las componentes de  $\vec{E}$  no son independientes

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}. \quad (35.7)$$

3. EL sistema de referencia es fundamental.
4. El potencial obedece el principio de superposición.

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|r - r_i|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(r')}{|r - r'|} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(r')}{|r - r'|} da'. \quad (35.8)$$

## 35.4. Ley de Gauss

Importante relación entre la integral de la componente normal del campo eléctrico sobre una superficie cerrada y la carga total encerrada por la superficie.

$$\Psi_E = \int_S \vec{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da, \quad \text{Flujo Eléctrica} \quad (35.9)$$

Para una superficie cerrada imaginaria (superficie gaussiana). Se tiene que  $\Psi_E \propto q$ . Entonces

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{enc}. \quad (35.10)$$

y por el teorema de la divergencia

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (35.11)$$

A notar:

1. Simetría esférica: Superficie gaussiana  $\rightarrow$  esfera concéntrica.
2. Simetría cilíndrica: Superficie gaussiana  $\rightarrow$  cilindro coaxial.
3. Simetría plana: Superficie gaussiana  $\rightarrow$  caja.

## 35.5. Dipolo Eléctrico

Dos cargas iguales de signo contrario separados por una pequeña distancia. Supongamos una carga  $-q$  en  $r'$  y una carga  $q$  en  $r' + l$ . Entonces

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left( \frac{r - r' - l}{|r - r' - l|^3} - \frac{r - r'}{|r - r'|^3} \right) \quad (35.12)$$

expandiendo el término de dentro

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left[ \frac{3(r - r')l}{|r - r'|^3} (r - r') - \frac{l}{|r - r'|} + \dots \right] \quad (35.13)$$

### 35.5.1. Momento Dipolar Eléctrico

Si se coloca un dipolo en un campo  $\vec{E}$ , ambas cargas  $(q, -q)$  separadas una distancia  $l$ , experimentan fuerzas de igual magnitud y dirección contraria  $\vec{F}$  y  $-\vec{F}$ , por ende:  $\sum \text{vec} F = 0$  y  $\sum \tau \neq 0$ . Definimos el **momento dipolar** como  $\vec{p} = ql$ . Por ende

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(r - r') \cdot \vec{p}}{|r - r'|^3} (r - r') - \frac{\vec{p}}{|r - r'|^3} \right]. \quad (35.14)$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left[ \frac{1}{|r - r' - l|} - \frac{1}{|r - r'|} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(r - r') \cdot \vec{p}}{|r - r'|^3}. \quad (35.15)$$

## 35.6. Trabajo y Energía en Electroestática

Suponga una configuración de cargas estacionarias y se desea mover una carga de prueba  $Q$  de un punto  $a$  a un punto  $b$ . Por ende

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \frac{W}{Q} \quad (35.16)$$

La diferencia de potencial entre  $a$  y  $b$  es igual al trabajo por unidad de carga requerido para mover  $Q$  de  $a \rightarrow b$ .

### 35.6.1. Energía de una Distribución de Cargas Puntuales

Energía de la distribución  $\rightarrow$  trabajo para ensamblar la distribución.

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi(r_i). \quad (35.17)$$

de otra forma se puede reescribir el trabajo

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \left[ \oint_S \varphi \vec{E} \cdot d\vec{a} + \int_V E^2 \frac{d}{dV} \right] \quad (35.18)$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V E^2 \frac{d}{dV} \quad \text{Si el volumen crece } (r \rightarrow \infty). \quad (35.19)$$



## Capítulo 36

# Problemas Electrostáticos

Estos problemas no son sencillos de resolver. Por otro lado:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{Ecuación de Poisson.} \quad (36.1)$$

**Laplaciano:**

1. **Rectangulares:**

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (36.2)$$

2. **Esféricas:**

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2}. \quad (36.3)$$

3. **Cilíndricas:**

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (36.4)$$

Y cuando interesa conocer el potencial en regiones con  $\rho = 0$ .

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad \text{Ecuación de Laplace.} \quad (36.5)$$

### 36.1. Ecuación de Laplace

**Teorema 36.1.1.** Si  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  son todas soluciones de la ecuación de Laplace, entonces:

$$\varphi = c_1 \varphi_1 + \dots + c_n \varphi_n, \quad (36.6)$$

con  $c_i = \text{ctes}$ , también es solución de la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \varphi = c_1 \nabla^2 \varphi_1 + \dots + c_n \nabla^2 \varphi_n = 0. \quad (36.7)$$

**Teorema 36.1.2.** Dos soluciones de la ecuación de Laplace que satisfacen las mismas condiciones de frontera difieren a lo sumo en una constante aditiva.

### 36.1.1. Ecuación de Laplace en una Dimensión

Si  $\varphi$  es una función de una variable. Las soluciones para cada uno de los sistemas importantes de coordenadas

1. **Rectangulares:**

$$\varphi(x) = ax + b. \quad (36.8)$$

2. **Esféricas:**

$$\varphi(r) = -\frac{a}{r} + b. \quad (36.9)$$

3. **Cilíndricas:**

$$\varphi = a \ln |\rho| + b. \quad (36.10)$$

#### Caso Esférico

Para el caso esférico en dos dimensiones su solución luego de la separación de variables es

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta). \quad (36.11)$$

#### Caso Cilíndrico

Ahora para el caso cilíndrico en dos dimensiones, su solución es:

$$\varphi(\rho, \theta) = A_o + B_o \ln |\rho| + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \rho^n + B_n \rho^{-n}) (C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta). \quad (36.12)$$

#### Caso Cartesiano

Ahora la solución del caso cartesiano

$$\varphi(x, y, z) = A e^{-(k+m)^{1/2}x} \cos m^{1/2}y \cos k^{1/2}z. \quad (36.13)$$

## 36.2. Imágenes Electroestáticas

Para un conjunto dado de condiciones de frontera, la solución a la ecuación de Laplace es única y resolviendo para  $\varphi$  se ha encontrado la solución completa al problema.

El método de imágenes es un procedimiento para lograr este resultado sin resolver específicamente la ecuación diferencial. **DS: No se aplica universalmente, solo un número considerable de problemas (que bueno xd).**

Supongamos una carga  $q$  arriba de un plano conductor: La carga  $q$  inducirá una carga en el conductor. La potencia total a una distancia  $\vec{r}$  estará dado por la contribución de la carga más la inducida en el conductor:

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \varphi_1(r) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(r')}{|r - r'|} da' . \\ \varphi(r) &= \varphi_1(r) + \varphi_2(r). \end{aligned}$$

$\varphi_2(r)$  puede ser sustituido por un potencial debido a una distribución de carga especificada:

- Carga Imagen.
- Debe cumplir con las condiciones de frontera.

### 36.2.1. Sistemas Conductores y Coeficientes de Potencial

Cuando se tienen conductores con formas complicadas las soluciones analíticas quedan descartadas: Métodos numéricos. Se pueden sacar algunas conclusiones, supongamos  $N$  conductores en una geometría fija:

- Existe una relación lineal entre el potencial de un conductor y las cargas de los diversos conductores del sistema.  $N$  conductores descargados excepto el conductor  $j \rightarrow$  carga  $Q_{jo}$ . La solución de Laplace es el espacio fuera de los conductores la expresamos como:

$$\varphi_1^{(j)}(x, y, z) \rightarrow \text{potencial generado por } Q_{jo}. \quad (36.14)$$

El potencial de cada uno de los conductores estará dado por:

$$\varphi_1^{(j)}, \dots, \varphi_N^{(j)} \quad (36.15)$$

Reexpresando la carga del  $j$ -ésimo

$$\lambda Q_{jo}, \quad \lambda = \text{cte}, \quad \text{satisface la ecuación de Laplace.}$$

- El potencial también se multiplica por  $\lambda$ .
- Todas las derivadas se multiplica por  $\lambda$ .
- $\sigma_0 - \epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \rightarrow$  todas las densidades se multiplican por  $\lambda$ .
- Potencial de cada conductor es proporcional a  $Q_j$

$$\varphi_i^j = p_{ij} Q_j, \quad (i = 1, 2, \dots, M) \quad (36.16)$$

donde  $p_{ij}$  es constante que depende de la geometría utilizando el mismo argumento para conductor  $k$   $Q_k = \nu Q_{k_o}$  con  $\nu = \text{cte}$ . Generalizando

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^M p_{ij} Q_j. \quad (36.17)$$

## Capítulo 37

# Campo Electrostático en Medios Dieléctricos y su Teoría Microscópica

Existen materiales conductores y aislantes (dieléctricos)

- Material dieléctrico ideal: material que no tiene cargas libres.
- Bajo la presencia de un campo eléctrico externo: pueden tener pequeños desplazamientos.
- Dieléctrico se polariza. Un dieléctrico polarizado es eléctricamente neutro, sin embargo produce un campo eléctrico en los puntos exteriores e interiores del dieléctrico. En un caso externo, bajo un campo muy grande, ocurre la ionización. Un dipolo inducido  $\vec{p} = \alpha \vec{E}$  donde  $\alpha$  es la polarizabilidad atómica, depende de la estructura del átomo. Para moléculas es más complejo debido a que tienen direcciones preferenciales  $\alpha \rightarrow \alpha_{ij}$ .

### 37.1. Polarización

Consideremos un pequeño volumen  $\Delta V$  de un medio dieléctrico que como todo es eléctricamente neutro. Si el medio está polarizado: Momento dipolar eléctrico

$$\Delta \vec{p} = \int_{\Delta V} r \, dq. \quad (37.1)$$

$\Delta \vec{p}$  depende del tamaño del elemento de volumen. Se introduce el momento dipolar eléctrico por unidad de volumen y se conoce como polarización eléctrica:

$$P \equiv \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta V}. \quad (37.2)$$

Momento dipolar de una molécula

$$\vec{p}_m = \int_{\text{molecula}} r \, dq. \quad (37.3)$$

### 37.1.1. Campo Fuera de un Medio Dieléctrico

Consideramos una porción finita de material dieléctrico polarizado. Esta polarización genera un campo eléctrico  $\vec{E} \rightarrow \varphi$ . Cada elemento de  $\Delta V'$  se caracteriza por un momento dipolar  $\Delta \vec{p} = P \Delta V'$  y tenemos  $r \gg r'$ . La contribución de las cargas en  $\Delta V'$  al potencial está dada por:

$$\Delta \varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta \vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P(r') \cdot (\vec{r} - \vec{r}') \Delta V'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (37.4)$$

El potencial total es la suma de todas las contribuciones de todas las partes del dieléctrico:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_o} \frac{P(r')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'. \quad (37.5)$$

Ahora busquemos encontrar  $\vec{E}$

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \nabla' \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right). \quad (37.6)$$

Desarrollando la siguiente identidad:  $\nabla'(f\vec{F}) = f\nabla' \cdot \vec{F} + \vec{F} \cdot \nabla' f$ . Se desarrolla la integral anterior, con ello se llega a

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S_o} \frac{P \cdot \hat{n} da}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_o} \frac{(-\nabla' \cdot P) dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (37.7)$$

Con lo que se definen dos nuevas funciones escalares

- $\sigma_p = P \cdot \hat{n}$ .
- $\rho_p = -\nabla \cdot P$ .
- La densidad superficial de carga de polarización está dada por la componente de polarización normal a la superficie.
- La densidad de carga de polarización volumétrica es una medida de la no uniformidad de la polarización dentro del material.

Luego, calculando el campo eléctrico

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \int_S \sigma_p \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} da' + \int_{V_o} \rho_p \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \right]. \quad (37.8)$$

### 37.1.2. Campo Eléctrico dentro de un Dieléctrico

En un dieléctrico la carga de prueba es comparable al tamaño de las moléculas. EL campo eléctrico dentro del dieléctrico debe tener las mismas propiedades. El campo eléctrico en un dieléctrico es igual al campo eléctrico dentro de una cavidad.

La ley de Gauss en un dieléctrico viene dada por

$$\oint (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot \hat{n} da = Q. \quad (37.9)$$

donde el término  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  se le denomina **desplazamiento eléctrico**.

### 37.1.3. Suceptibilidad Dieléctrica y Constante Dieléctrica

La polarización de un medio dieléctrico ocurre en respuesta al campo eléctrico en el medio. El grado de polarización depende:

- Campo eléctrico
- Propiedades del material

A nivel macroscópico  $P = P(E)$ . En la mayoría de materiales  $P$  se anula cuando  $\vec{E} = 0$ . Para materiales de este tipo y si son materiales siótropos, la polarización tendrá el mismo sentido que  $\vec{E}$ .

$$P = \chi(E)\vec{E} = \epsilon_0\chi_e\vec{E}. \quad (37.10)$$

con esto se define  $\epsilon = \epsilon_0(1 - \chi_e)$ .

## 37.2. Condiciones de Frontera para los Vectores de Campo

Variación de  $\vec{E}$  y  $\vec{D}$  al pasar por una zona interfacial entre dos medios. Considerando dos emdios encontacto y una densidad superficial de carga externa  $\sigma$ . Construir una pequeña superficie  $S$ : forma de caja de pastillas de altura despreciable. Entonces

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \quad (37.11)$$

Observaciones

- La discontinuidad en la componente normal  $\vec{D}$  está dada por la densidad superficial de carga en la zona interfacial.
- Si no hay carga en la zona interfacial la componente normal de  $\vec{D}$  no es continúa.

Y por la ley de Gauss se concluye que la componente tangencial del campo eléctrico es continua.

DS: Después de toda esta parafernalia, el ejemplo clásico es el de la esfera dieléctrica en un campo eléctrico externo, revisar el libro.

## 37.3. Teoría Microscópica de los Dieléctricos

### 37.3.1. Campo Molecular en un Dieléctrico: $E_m$

Es el campo eléctrico en una posición molecular del dieléctrico el cual es producido por todas las fuentes externas y por todas las moléculas polarizadas del dieléctrico con excepción de la molécula en el punto considerado. El dieléctrico se polariza al inducir un campo. Suponemos polarización uniforme  $\nabla \cdot \vec{P} = 0$ . El campo eléctrico en el centro de la cavidad puede expresarse como:

$$\vec{E}_m = \vec{E}_x + \vec{E}_d + \vec{E}_s + \vec{E}' \quad (37.12)$$

- $E_x$  campo eléctrico primario debido a los planos.
- $E_d$  campo debido a la carga de polarización e la superficie.
- $E_s$  campo debido a la carga de polarización en la superficie  $S$ .
- $E'$  campo generado por dipolos dentro de  $S$ .

### 37.3.2. Moléculas Polares

- Momento dipolar permanente
- Están formadas por al menos dos especies distintas de átomos.
- En ausencia de campo eléctrico por una porción macroscópica del dieléctrico polar no está polarizada: dipolos individuales orientados al azar.

Si el dieléctrico polar se somete a un campo eléctrico, los dipolos se alinean con el campo. Si el campo es lo suficientemente intenso, la polarización alcanza el vapor de saturación:

$$P_s = N\vec{p}_m \quad (37.13)$$

Se requiere valores de campo muy intensos. Si la temperatura se eleva la polarización disminuye. Según la mecánica estadística, a una temperatura  $T$ , la probabilidad de encontrar una molécula con energía  $E$  es:

$$f(E) \propto e^{-E/kT} \quad (37.14)$$

La energía potencial de un dipolo permanente  $p_o$  en un campo eléctrico es:

$$u = -p_o \cdot E_m \quad (37.15)$$

La energía cinética de las moléculas no dependen del campo, entonces se desprecia su contribución en la distribución. El momento dipolar efectivo de un dipolo molecular es su componente en la dirección del campo:  $p_o \cos \theta$ . El valor promedio de la cantidad está dado por:

$$\langle x \rangle = \sum x_m p_m = \frac{\sum_m \chi_m e^{-\beta e_m}}{\sum_m e^{-\beta u_m}}. \quad (37.16)$$

pasando a lo continuo

$$\langle p_o \cos \theta \rangle = p_o \left( -\frac{1}{y} + \coth y \right) \quad (37.17)$$

con  $y = p_o \frac{E_m}{kT}$  y a esta fórmula se le conoce como **Fórmula de Langevin**. y el momento dipolar efectivo promedio

$$\langle p_o \cos \theta \rangle = \frac{p_o^2 E_m}{3kT}. \quad (37.18)$$

Polarizabilidad por orientación  $\alpha = \frac{p_o^2}{3kT}$ .

$$\alpha = \alpha_o + \frac{p_o^2}{3kT} \quad (37.19)$$

a esta se le conoce como la **ecuación de Langevin-Debye**.

### 37.3.3. Polarización Permanente: Ferroelectricidad

Sabemos que

$$E_m = E + \frac{p}{3\epsilon_0} \quad (37.20)$$

Generalmente  $E_m = 0$  cuando  $E = 0$ . Existen casos en los cuales  $E = 0$  y  $E_m = 0$  y esto se satisface para:

$$p_o = 0, \quad \frac{N\alpha}{3\epsilon_0} = 1. \quad (37.21)$$

la cual es la condición de polarización permanente.



## Capítulo 38

# Energía Electrostática

Simplifica la resolución de algunos problemas. Y la contribución de energía de un sistema de cargas se divide en sus contribuciones cinética y potencial.

Energía potencial de un grupo de cargas puntuales

$$u = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m q_i \varphi_j. \quad (38.1)$$

Energía electrostática de una distribución de carga:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \left[ \oint_S E \varphi \, da + \int_V E^2 \, dV \right]. \\ u &= \frac{1}{2} \int_V \rho(r) \varphi(r) \, dV + \frac{1}{2} \int_S \sigma(r) \varphi(r) \, da + \frac{1}{2} \sum_j Q_j \varphi_j. \end{aligned}$$

### 38.1. Condensadores

Los condensadores son componentes eléctricos que sirven para almacenar energía. Dos conductores que puedan almacenar cargas iguales pero opuestas con una diferencia de potencial entre sí. La relación entre la carga almacenada y el potencial asociado es la capacitancia

$$C \equiv \frac{Q}{\Delta\varphi}. \quad (38.2)$$

Cuya energía se puede expresar como:

$$u = \frac{1}{2} Q \Delta\varphi = \frac{1}{2} C \Delta\varphi^2 \quad (38.3)$$

Si los conductores que forman un condensador tienen formas geométricas sencillas, la capacitancia puede obtenerse analíticamente. Y para condensadores en circuitos paralelos y en serie<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>En paralelo se tiene la misma diferencia de potencial entre los nodos y para los circuitos en serie se conserva la carga.

$$C_{eq} = C_1 + C_2, \quad \text{Paralelo}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}, \quad \text{Serie.}$$

## Capítulo 39

# Corriente Eléctrica

Carga en movimiento  $\rightarrow$  corriente eléctrica. Proceso por el cual se transporta la carga  $\rightarrow$  condición. La corriente se define como la velocidad a la que se transporta la carga a través de una superficie dada en un sistema conductor

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (39.1)$$

Por convención: el sentido en que se mueven los portadores positivos se toma como el sentido de la corriente.

Cosas a notar:

- En gases la conducción es más complicada, ya que las poblaciones de portadores varían mucho con condiciones experimentales.
- Al estar en equilibrio térmico cada partícula tiene un movimiento aleatorio.
- Líquidos y gases  $\rightarrow$  movimientos hidrodinámicos.

### 39.1. Densidad de Corriente

Consideremos un medio conductor con un solo tipo de portador de carga:

- Sea  $N$  un número de portadores de carga por unidad de volumen.
- Asumimos una velocidad  $v$  para los portadores de carga.

Se define la densidad de carga como

$$\vec{J} = \sum_i N_i q_i v_i. \quad (39.2)$$

Cuya integral para una superficie da como resultado la corriente

$$I = - \oint_S \vec{J} \cdot \hat{n} da = - \int_V \nabla \cdot \vec{J} dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (39.3)$$

Lo que implica y da como resultado la **ecuación de la continuidad** y representa la **conservación de la carga**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0. \quad (39.4)$$

## 39.2. Ley de Ohm

## Capítulo 40

# El Campo Magnético de Corrientes Estacionarias

## Capítulo 41

# Propiedades Magnéticas de la Materia

## Capítulo 42

# Inducción Electromagnética

## Capítulo 43

# Energía Magnética



## Capítulo 44

# Corrientes que Varían Lentamente

## Capítulo 45

# Ecuaciones de Maxwell

## Capítulo 46

# Propagación de Ondas Monocromáticas

Parte VI

Reducción de Datos

## Capítulo 47

# Introducción al Cálculo de Probabilidades en Estadística

## Capítulo 48

# Incertezas

48.1. Uso y Reporte de Incertezas

48.2. Propagación de Incertezas

48.3. Análisis Estadístico de Incertezas Aleatorias

## Capítulo 49

# La Distribución Normal

## Capítulo 50

# Rechazo de Datos y la Media Ponderada



## Capítulo 51

# Distribución Binomial y de Poisson

## Capítulo 52

# Prueba Ji Cuadrado y Mínimos Cuadrados

## Parte VII

# Materia Condensada

# Bibliografía

- [1] Stephen J Blundell and Katherine M Blundell. *Concepts in thermal physics*. Oup Oxford, 2010.
- [2] Profesor Denis Boyer. Statistical physics, 2021.
- [3] Enrico Fermi. *Thermodynamics*. Courier Corporation, 2012.
- [4] David J Griffiths. *Introduction to electrodynamics*. Cambridge University Press, 2023.
- [5] Jerry B Marion. *Classical dynamics of particles and systems*. Academic Press, 2013.
- [6] EJ Moulton. H. goldstein, classical mechanics. 1952.
- [7] John R Reitz et al. *Fundamentos de la teoría electromagnética*. Biblioteca Hernán Malo González, 1996.
- [8] Profesor PhD. Rodrigo Sacahui. Electromagnetismo 1, 2021.
- [9] Jun John Sakurai and Jim Napolitano. *Modern quantum mechanics*. Cambridge University Press, 2020.
- [10] Profesor Ing. Rodolfo Samayoa. Mecánica cuántica, 2022.
- [11] Profesor Ing. Rodolfo Samayoa. Mecánica estadística, 2022.
- [12] John Robert Taylor and John R Taylor. *Classical mechanics*, volume 1. Springer, 2005.
- [13] Profesor David Tong. Classical mechanics, 2004-05.
- [14] Profesor David Tong. Dynamics and relativity, 2013.
- [15] Profesor David Tong. Statistical physics, 2013.
- [16] Profesor David Tong. Electromagnetism, 2015.
- [17] Nouredine Zettili. Quantum mechanics: concepts and applications. 2009.