

1. Mecánica Clásica

Péndulo sujeto a una circunferencia

En la figura 5 se muestra un péndulo de longitud l con una masa puntual m que se mueve en un plano. Obtenga las ecuaciones Hamiltonianas de movimiento para el péndulo plano cuyo radio de suspensión rota uniformemente en la circunferencia de un círculo vertical de radio a .

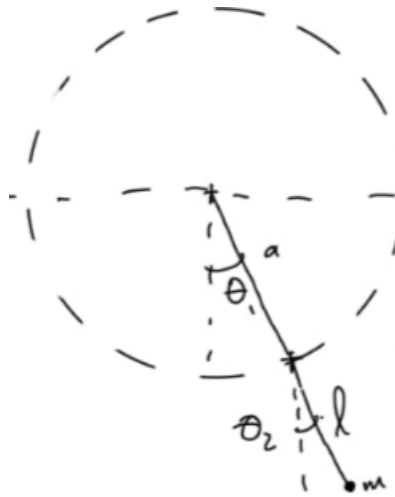


Figura 1

Solución:

$$L = T - V$$

$$V = -mga \cos \theta_1 - mg\ell \cos \theta_2$$

$$T = \frac{1}{2}m[a^2\dot{\theta}_1^2 + \ell^2\dot{\theta}_2^2 + 2a\ell\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]$$

$$L = \frac{1}{2}m[a^2\dot{\theta}_1^2 + \ell^2\dot{\theta}_2^2 + 2a\ell\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] + mga \cos \theta_1 + mg\ell \cos \theta_2$$

$$P_{\theta_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = ma^2\dot{\theta}_1 + mal\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$P_{\theta_2} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m\ell^2\dot{\theta}_2 + mal\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Encontrar $\dot{\theta}_1$ y $\dot{\theta}_2$ en términos de P_{θ_1} y P_{θ_2}

$$\dot{\theta}_2 = \frac{aP_{\theta_2} - \ell P_{\theta_1} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{mal^2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\ell P_{\theta_1} - a P_{\theta_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{ma^2 \ell \sin^2(\theta_1 - \theta_2)}$$

Expresar $H = \sum \dot{\theta}_i P_{\theta_i} - L$ en términos de P_{θ_1} y P_{θ_2}

$$\begin{aligned} H &= \dot{\theta}_1 P_{\theta_1} + \dot{\theta}_2 P_{\theta_2} - L \\ &= \dot{\theta}_1 [ma^2 \dot{\theta}_1 + mal \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] + \dot{\theta}_2 [m\ell^2 \dot{\theta}_2 + mal \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)] - \\ &\quad - \left\{ \frac{1}{2} m [a^2 \dot{\theta}_1^2 + \ell^2 \dot{\theta}_2^2 + 2a\ell \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] + mga \cos \theta_1 + mg\ell \cos \theta_2 \right\} \\ &= ma^2 \dot{\theta}_1^2 + mal \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m\ell^2 \dot{\theta}_2^2 + mal \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \frac{1}{2} ma^2 \dot{\theta}_1^2 - \\ &\quad - \frac{1}{2} m\ell^2 \dot{\theta}_2^2 - mal \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - mga \cos \theta_1 - mg\ell \cos \theta_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow H &= \frac{1}{2} ma^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m\ell^2 \dot{\theta}_2^2 + mal \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - mga \cos \theta_1 - mg\ell \cos \theta_2 \\ \Rightarrow H &= \frac{1}{2} ma^2 \left\{ \frac{\ell P_{\theta_1} - a P_{\theta_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{a^2 \ell m \sin^2(\theta_1 - \theta_2)} \right\} + \frac{1}{2} m\ell^2 \left\{ \frac{a P_{\theta_2} - \ell P_{\theta_1} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{ma\ell^2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)} \right\} + \\ &+ mal \left\{ \frac{\ell P_{\theta_1} - a P_{\theta_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{a^2 \ell m \sin^2(\theta_1 - \theta_2)} \right\} \left\{ \frac{a P_{\theta_2} - \ell P_{\theta_1} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{ma\ell^2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)} \right\} - mga \cos \theta_1 - mg\ell \cos \theta_2 \end{aligned}$$

Simplificando:

$$H = \frac{\ell^2 P_{\theta_1}^2 + a^2 P_{\theta_2}^2 - 2a\ell P_{\theta_1} P_{\theta_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{2ma^2 \ell^2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)} - mga \cos \theta_1 - mg\ell \cos \theta_2$$

Luego determinar $\dot{\theta}_1 = \frac{\partial H}{\partial P_{\theta_1}}$, $\dot{\theta}_2 = \frac{\partial H}{\partial P_{\theta_2}}$, $P_{\theta_1} = \frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}_1}$, $P_{\theta_2} = \frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}_2}$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \frac{\partial H}{\partial P_{\theta_1}} = \frac{\ell P_{\theta_1} - a P_{\theta_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{a^2 \ell m \sin^2(\theta_1 - \theta_2)} \\ \dot{\theta}_2 &= \frac{\partial H}{\partial P_{\theta_2}} = \frac{-\ell P_{\theta_1} \cos(\theta_1 - \theta_2) + a P_{\theta_2}}{a\ell^2 m \sin^2(\theta_1 - \theta_2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_{\theta_1} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta_1} \\ &= -mga \sin \theta_1 - \frac{P_{\theta_1} P_{\theta_2}}{a\ell m \sin(\theta_1 - \theta_2)} + \left\{ \frac{\ell^2 P_{\theta_1}^2 + a^2 P_{\theta_2}^2 - 2a\ell P_{\theta_1} P_{\theta_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{2a^2 \ell^2 m \sin^4(\theta_1 - \theta_2)} \right\} \sin(2(\theta_1 - \theta_2)) \\ \Rightarrow P_{\theta_2} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta_2} \\ &= -mg\ell \sin \theta_2 + \frac{P_{\theta_1} P_{\theta_2}}{a\ell m \sin(\theta_1 - \theta_2)} - \left\{ \frac{\ell^2 P_{\theta_1}^2 + a^2 P_{\theta_2}^2 - 2a\ell P_{\theta_1} P_{\theta_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{2a^2 \ell^2 m \sin^4(\theta_1 - \theta_2)} \right\} \sin(2(\theta_1 - \theta_2)) \end{aligned}$$

2. Electromagnetismo

Nanopartícula cilíndrica

Los plasmas constituyen uno de los cuatro estados de la materia. Si nos vamos a las escalas más pequeñas, los electrones de conducción en los metales constituyen un plasma al ser un gas de partículas

cargadas que pueden responder de manera colectiva a campos electromagnéticos, en particular, a la radiación a frecuencias ópticas donde las cargas responden principalmente al campo eléctrico incidente.

Si diseñamos una nanopartícula metálica apropiadamente, funcionará como una nanoantena para radiación visible, la cual se puede utilizar para mejorar el acoplo de la luz con emisores cuánticos, como nanofuentes de calor (por absorción de la energía) o como biosensores entre otras aplicaciones.

Considere una nanopartícula cilíndrica de oro de $40nm$ de diámetro y $60nm$ de longitud que se ilumina con luz blanca. Ignoren efectos de disipación o retardo, y consideren la condición inicial que muestra la figura en cuanto a la reconfiguración de las cargas cuando éstas interactúan con el campo eléctrico incidente.

- Presente una expresión simplificada para la **longitud de onda** resonante si consideramos que la luz incidente tiene la polarización indicada en la figura, y comente cómo depende ésta de la razón de aspecto R de la partícula, la cual se define como $R = d/2r$, donde d corresponde a la longitud y r al radio de la cara transversal.
- ¿A qué longitud de onda exhibirá una resonancia dicha partícula?

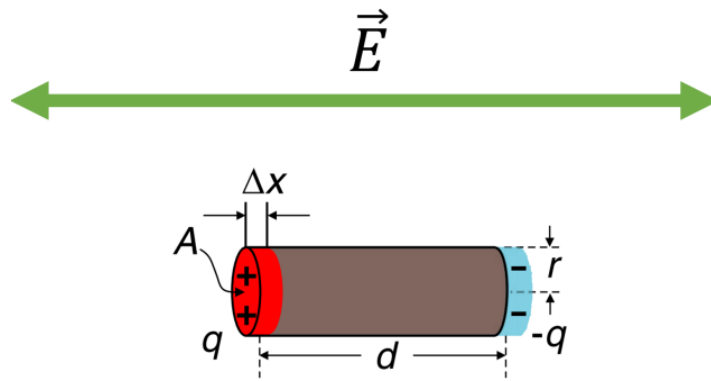


Figura 2

Solución:

El sistema se podía modelar analizando la fuerza de restitución a partir del planteamiento de la energía potencial eléctrica de un sistema de dos cargas separadas por una distancia d donde el valor de la carga q se obtiene a partir del número de cargas en un volumen determinado, dado por el desplazamiento Δx de la Figura.

$$q = neV,$$

$$E = ne(A\Delta x).$$

Por otro lado, la energía potencial entre dos cargas es:

$$u(\Delta x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{d} m = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(neA)^2}{d} (\Delta x)^2.$$

Para la fuerza de restitución:

$$F = -\frac{\partial u(\Delta x)}{\partial \Delta x} = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{(neA)^2}{d} \Delta x.$$

Luego, igualando ésta fuerza a $F = -kx$, y considerando $\omega = \sqrt{k/m}$, se obtiene

$$\omega = \frac{neA}{2\pi\epsilon_0 d m_T},$$

donde $m_T = nmAd$ es la masa total de las cargas (electrones). Finalmente, la longitud de onda es dada por la relación $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$.

$$\therefore \lambda = 4\sqrt{2}\pi cR\sqrt{\frac{\epsilon_0 m}{ne^2}},$$

donde hemos sustituido $R \equiv d/2r$.

La sustitución $R = 1,5$ lleva al resultado $\lambda \approx 584nm$, de modo que la nanopartícula es resonante en el visible.

3. Mecánica Cuántica

Entropía de entrelazamiento de dos fermiones

Considere un sistema de dos fermiones, ambos con spin- $\frac{1}{2}$ y cada uno puede ocupar cualquiera de los dos sitios etiquetados como $i = 1, 2$. La dinámica viene descrita por el Hamiltoniano de Hubbard,

$$H = -t \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \left(c_{1\sigma}^\dagger c_{2\sigma} + c_{2\sigma}^\dagger c_{1\sigma} \right) + U \sum_i n_{i\uparrow} n_{i\downarrow}. \quad (1)$$

Aquí σ etiqueta los dos valores posibles de spin que tienen nuestros fermiones. Donde c y c^\dagger son los operadores de aniquilación y creación fermiónicos. Los mismos siguen el álgebra,

$$\{c_{i\sigma}, c_{j\sigma'}^\dagger\} = \delta_{i,j} \delta_{\sigma,\sigma'}, \quad (2)$$

y por último $n_{i\sigma} \equiv c_{i\sigma}^\dagger c_{i\sigma}$ es el operador de número que nos dice la cantidad de spins en el sitio- i con spin- σ . El primer término del Hamiltoniano permite que los fermiones brinquen de un sitio a otro, el segundo juega el rol de un potencial que penaliza ($U > 0$) que dos fermiones estén en el mismo sitio.

(a) Escriba una regla de selección que nos permita restringir los estados $|\psi\rangle$ al sector donde únicamente tenemos 2 partículas.

(b) Determine una base válida de estados para nuestro sistema de 2 fermiones y 2 sitios.

(c) El Hamiltoniano que estamos considerando tiene varias simetrías, una de ellas es la conservación de spin total σ_T . Por simplicidad limitemos ahora nuestra base al sector donde el spin total es 0.

Reescriba la base del inciso (b) pero con esta consideración y determine entonces la nueva base $\{|\phi_a\rangle\}$ de estados de dos fermiones con spin total 0.

(d) Encuentre los elementos de matriz del Hamiltoniano en esta base $h_{ab} = \langle\phi_a|H|\phi_b\rangle$.

(e) Encuentre el autovalor y autovector de la matriz encontrada en el inciso anterior asociados a el autovalor más bajo. Además reescriba el estados base de la forma:

$$|\Psi\rangle = \sum_a \alpha_a |\phi_a\rangle. \quad (3)$$

(f) Antes de haber impuesto la restricción sobre el número de partículas y spin total el espacio de Hilbert se podía factorizar de forma: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, donde \mathcal{H}_i es el espacio local generado por la base $\{|0\rangle, c_{i\downarrow}^\dagger |0\rangle, c_{i\uparrow}^\dagger |0\rangle, c_{i\uparrow}^\dagger c_{i\downarrow}^\dagger |0\rangle\}$. Utilizando esto, determine la matriz de densidad reducida para el primer sitio

$$\rho_1 = \text{Tr}_{\mathcal{H}_2} (|\Psi\rangle\langle\Psi|). \quad (4)$$

(g) Determine los autovalores λ_α de ρ_1 y calcule la entropía de von Neumann,

$$S_1 = - \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \log (\lambda_{\alpha}) . \quad (5)$$

Qué sucede en el límite $U/t \rightarrow \infty$?

Sugerencias

- Para A, B matrices del mismo tamaño (2×2 en este problema), el polinomio característico se puede simplificar de la siguiente forma:

$$\det \left[\begin{pmatrix} A & B \\ B & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix} - \lambda 1_{4 \times 4} \right] = \det \left(-(A - \lambda 1_{2 \times 2})(\lambda 1_{2 \times 2}) - B^2 \right)$$

- Si no logra determinar los coeficientes α_a del autovector, para poder continuar con el problema puede utilizar estas propiedades:

$$|\alpha_1|^2 = |\alpha_2|^2 = \frac{x}{2+2x}, \quad |\alpha_3|^2 = |\alpha_4|^2 = \frac{1}{2+2x}, \quad (6)$$

$$x \equiv \frac{4t}{U + \sqrt{U^2 + (4t)^2}} \quad (7)$$

$$\text{Tr}_{\mathcal{H}_2} (|i\rangle_1 \langle j|_1 \otimes |\ell\rangle_2 \langle m|_2) \equiv \sum_n \langle n|_2 \left(|i\rangle_1 \langle j|_1 \otimes |\ell\rangle_2 \langle m|_2 \right) |n\rangle_2 \quad (8)$$

Solución

(a) Los estados $|\Psi\rangle$ que nos interesan con únicamente 2 partículas deben cumplir la siguiente regla,

$$\left(\sum_{i,\sigma} n_{i,\sigma} - 2 \right) |\Psi\rangle = 0 \quad (9)$$

Donde en el primer término solo iteramos sobre ambos sitios y contamos cuantas partículas hay con cada uno de los valores posibles de spin. Restringimos que el valor de esta suma deba ser necesariamente 2.

(b) Debido al principio de exclusión de Pauli, Los estados de dos fermiones en dos sitios posibles son los siguientes:

$$\{ |\uparrow, \downarrow\rangle, |\uparrow\downarrow, 0\rangle, |0, \uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow, \uparrow\rangle, |\uparrow, \uparrow\rangle, |\downarrow, \downarrow\rangle \}. \quad (10)$$

(c) Ahora reducimos la base eliminando los dos estados que no tienen spin total 0. Los estados a eliminar serían $|\uparrow, \uparrow\rangle, |\downarrow, \downarrow\rangle$. Por ende quedamos con la base,

$$\{ |\phi_a\rangle \} = \{ |\uparrow, \downarrow\rangle, |\uparrow\downarrow, 0\rangle, |0, \uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow, \uparrow\rangle \}. \quad (11)$$

(d)

$$h_{ab} = \begin{pmatrix} \langle \uparrow\downarrow, 0 | H | \uparrow\downarrow, 0 \rangle & \langle \uparrow\downarrow, 0 | H | 0, \uparrow\downarrow \rangle & \langle \uparrow\downarrow, 0 | H | \downarrow, \uparrow \rangle & \langle \uparrow\downarrow, 0 | H | \downarrow, \uparrow \rangle \\ \langle 0, \uparrow\downarrow | H | \uparrow\downarrow, 0 \rangle & \langle 0, \uparrow\downarrow | H | 0, \uparrow\downarrow \rangle & \langle 0, \uparrow\downarrow | H | \uparrow, \downarrow \rangle & \langle 0, \uparrow\downarrow | H | \downarrow, \uparrow \rangle \\ \langle \uparrow, \downarrow | H | \uparrow\downarrow, 0 \rangle & \langle \uparrow, \downarrow | H | 0, \uparrow\downarrow \rangle & \langle \uparrow, \downarrow | H | \uparrow, \downarrow \rangle & \langle \uparrow, \downarrow | H | \downarrow, \uparrow \rangle \\ \langle \downarrow, \uparrow | H | \uparrow\downarrow, 0 \rangle & \langle \downarrow, \uparrow | H | 0, \uparrow\downarrow \rangle & \langle \downarrow, \uparrow | H | \uparrow, \downarrow \rangle & \langle \downarrow, \uparrow | H | \downarrow, \uparrow \rangle \end{pmatrix}$$

Ahora podemos calcular cada columna por separado, empezamos por la primera evaluando $H | \uparrow\downarrow, 0 \rangle$:

$$H|\uparrow\downarrow, 0\rangle = Hc_{1\uparrow}^\dagger c_{1\downarrow}^\dagger |0\rangle = -t \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \left(c_{1\sigma}^\dagger c_{2\sigma} c_{1\uparrow}^\dagger c_{1\downarrow}^\dagger + c_{2\sigma}^\dagger c_{1\sigma} c_{1\uparrow}^\dagger c_{1\downarrow}^\dagger \right) |0\rangle + U \sum_i n_{i\uparrow} n_{i\downarrow} |\uparrow\downarrow, 0\rangle \quad (12)$$

Note que el tercer término nos da el valor de U unicamente ya que el estado tiene dos partículas en el mismo sitio y por ende si penaliza la energía. El primer termino es cero por que el operador $c_{2\sigma}$ siempre actuará sobre el vacío y por ende se anula. En el segundo termino procedemos a expandir la suma sobre el spin y obtenemos,

$$\begin{aligned} &= -t \left(c_{2\uparrow}^\dagger \underbrace{c_{1\uparrow}^\dagger c_{1\uparrow}^\dagger}_1 c_{1\downarrow}^\dagger + c_{2\downarrow}^\dagger \underbrace{c_{1\downarrow}^\dagger c_{1\uparrow}^\dagger}_{-c_{1\uparrow}^\dagger c_{1\downarrow}^\dagger} c_{1\downarrow}^\dagger \right) + U |\uparrow\downarrow, 0\rangle \\ &= -t \left(c_{2\uparrow}^\dagger c_{1\downarrow}^\dagger |0\rangle - c_{2\downarrow}^\dagger c_{1\uparrow}^\dagger |0\rangle \right) + U |\uparrow\downarrow, 0\rangle = -t |\downarrow, \uparrow\rangle + t |\uparrow, \downarrow\rangle + U |\uparrow\downarrow, 0\rangle \end{aligned}$$

De aquí tenemos entonces ya la primera columna de la matriz h_{ab} :

$$\begin{pmatrix} \langle \uparrow\downarrow, 0 | H | \uparrow\downarrow, 0 \rangle \\ \langle 0, \uparrow\downarrow | H | \uparrow\downarrow, 0 \rangle \\ \langle \uparrow, \downarrow | H | \uparrow\downarrow, 0 \rangle \\ \langle \downarrow, \uparrow | H | \uparrow\downarrow, 0 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ 0 \\ t \\ -t \end{pmatrix}.$$

Ahora solo repetir el procedimiento anterior para los otros 3 vectores base y se obtiene la matriz,

$$h_{ab} = \begin{pmatrix} U & 0 & t & -t \\ 0 & U & -t & t \\ t & -t & 0 & 0 \\ -t & t & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(e) Utilizando la sugerencia viendo que la matriz tiene precisamente la estructura necesaria calculamos el determinante y obtenemos el siguiente polinomio característico,

$$(\lambda^2 - \lambda U - 2t^2)^2 - 4t^4 = 0. \implies \lambda^2 - \lambda U - 2t^2 = \pm 2t^2 \quad (13)$$

Por ende, las soluciones son $\lambda = 0, U$ para el caso donde tomamos la raíz negativa. Para la raíz negativa solo debemos resolver la cuadrática y obtenemos:

$$\lambda = \frac{U}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{4t}{U} \right)^2} \right) \quad (14)$$

La solución es entonces el autovalor más bajo y su autovector (normalizado) correspondiente:

$$\lambda_- = \frac{U}{2} \left(1 - \sqrt{1 + \left(\frac{4t}{U} \right)^2} \right) \quad (15)$$

$$\vec{\alpha} = \alpha_a = \frac{1}{2 + \frac{32t^2}{(U + \sqrt{U^2 + (4t)^2})^2}} \left(\frac{4t}{U + \sqrt{U^2 + (4t)^2}}, \frac{-4t}{U + \sqrt{U^2 + (4t)^2}}, -1, 1 \right) \quad (16)$$

(f)

$$|\Psi\rangle\langle\Psi| = \sum_{a,b} \alpha_a \alpha_b^* |\phi_a\rangle\langle\phi_b| = \sum_{a,b} \alpha_a \alpha_b^* |\phi_a\rangle_1 \langle\phi_b|_1 \otimes |\phi_a\rangle_2 \langle\phi_b|_2. \quad (17)$$

$$\rho_1 = \text{Tr}_{\mathcal{H}_2} (|\Psi\rangle\langle\Psi|) = \sum_n 1_1 \otimes \langle n|_2 \left(\sum_{a,b} \alpha_a \alpha_b^* |\phi_a\rangle_1 \langle\phi_b|_1 \otimes |\phi_a\rangle_2 \langle\phi_b|_2 \right) 1_1 \otimes |n\rangle_2 \quad (18)$$

$$\rho_1 = \sum_n \sum_{a,b} \alpha_a \alpha_b^* \langle n|\phi_a\rangle \langle\phi_b|n\rangle |\phi_a\rangle_1 \langle\phi_b|_1 = \sum_{a,b} \alpha_a \alpha_b^* \langle\phi_b| \underbrace{\left(\sum_n |n\rangle\langle n| \right)}_{=1} |\phi_a\rangle |\phi_a\rangle_1 \langle\phi_b|_1 \quad (19)$$

$$\rho_1 = \sum_{a,b} \alpha_a \alpha_b^* \underbrace{\langle\phi_b|\phi_a\rangle}_{\delta_{a,b}} |\phi_a\rangle_1 \langle\phi_b|_1 \quad (20)$$

$$\rho_1 = \sum_a |\alpha_a|^2 |\phi_a\rangle_1 \langle\phi_a|_1 \quad (21)$$

$$\Rightarrow \rho_1 = |\alpha_1|^2 |\uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| + |\alpha_2|^2 |0\rangle\langle 0| + |\alpha_3|^2 |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\alpha_4|^2 |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \quad (22)$$

(g) Como vemos del inciso (f) ya ρ_1 es diagonal y tiene autovalores $\{|\alpha_1|^2, |\alpha_2|^2, |\alpha_3|^2, |\alpha_4|^2\}$ del inciso (e) o de la sugerencia sabemos que $|\alpha_1|^2 = |\alpha_2|^2 = \frac{x}{2+2x}$, $|\alpha_3|^2 = |\alpha_4|^2 = \frac{1}{2+2x}$. Por ende,

$$S_1 = 2 \left[\frac{x}{2+2x} \log \left(\frac{x}{2+2x} \right) + \frac{1}{2+2x} \log \left(\frac{1}{2+2x} \right) \right] \quad (23)$$

$$\text{con } x \equiv \frac{4t}{U + \sqrt{U^2 + (4t)^2}}.$$

En el límite cuando $U/t \rightarrow \infty$ vemos que $x \rightarrow 0$ por lo tanto en este límite $S_1 \rightarrow \log 2$. Este resultado nos dice que el entrelazamiento del estado base es máximo. Tiene sentido puesto que el estado base, debido a la penalización es $\frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow, \downarrow\rangle + |\downarrow, \uparrow\rangle)$

4. Dinámica

Salto con liana

Un atleta en un bungee está atado a una cuerda elástica de longitud L . El otro extremo de la cuerda está sujeta a un puente encima de un río. El atleta de masa m cae desde el borde del puente, desde el reposo. Al caer no toca el agua. La cuerda tiene una constante k de fuerza por unidad de distancia.

Asumiendo que la masa de la cuerda es despreciable (en comparación con la masa del atleta), y que la cuerda obedece la Ley de Hooke, obtenga:

- La distancia y que cae el atleta antes de alcanzar el reposo por primera vez.
- La velocidad máxima que alcanza el atleta durante su caída.
- El tiempo durante la caída antes de llegar al reposo por primera vez.

Solución

(a) El saltador se detiene cuando la energía potencial gravitacional perdida es igual a la energía de deformación almacenada:

$$mgy = \frac{1}{2}k(y - L)^2$$

$$ky^2 - 2y(kL + mg) + kL^2 = 0$$

Cuya solución viene dada por la ecuación cuadrática:

$$y = \frac{2(kL + mg) \pm \sqrt{4(kL + mg)^2 - 4k^2L^2}}{2k}$$

Considerando la raíz positiva,

$$y = \frac{kL + mg + \sqrt{2mgKL + m^2g^2}}{k}$$

(b) La velocidad máxima se alcanza cuando la aceleración es cero y las fuerzas se equilibran, es decir,

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgL$$

$$v = \sqrt{2gL}$$

(c) Para calcular el tiempo durante la caída antes de llegar el reposo consideramos dos tramos, Tiempo para llegar al reposo (t_R) = tiempo en caída libre (t_f) + tiempo en que la cuerda oscila (SHM) para dejar de estirarse (t_o)

Para el primer intervalo de tiempo, consideramos la ecuación de movimiento:

$$L = ut + \frac{1}{2}gt_1^2$$

$$L = 0 + \frac{1}{2}gt_1^2$$

Despejando para el t_1 :

$$t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g}} \quad (24)$$

Para el segundo intervalo, consideramos que el atleta comienza a oscilar con la velocidad de caída libre: $v_\tau = \sqrt{2gL}$, por lo que el periodo de la oscilación viene dado por (Fig.3) :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Y el tiempo cuando el atleta comienza a oscilar es:

$$\tau = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{v_\tau}{v} = \frac{1}{\omega} \arcsin \sqrt{\frac{2gL}{v}}$$

El atleta llega al reposo a la mitad del medio ciclo de la oscilación en un tiempo total dado por:

$$t_R = t_f + t_o$$

$$t_R = t_f + \frac{T}{2} - \tau$$

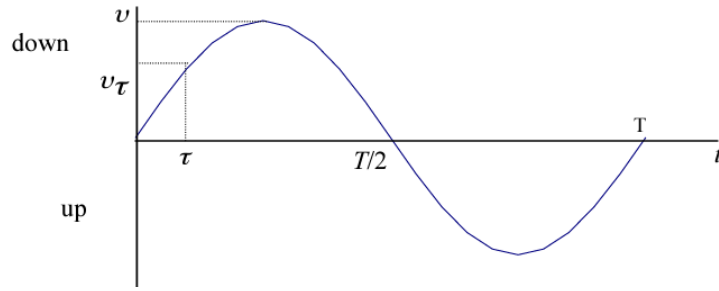


Figura 3

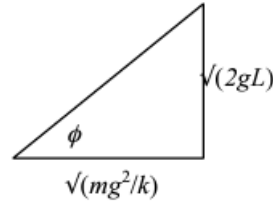


Figura 4

$$t_R = \sqrt{\frac{2L}{g}} + \pi\sqrt{\frac{m}{k}} - \frac{1}{w} \arcsin \frac{\sqrt{2gL}}{v}$$

$$t_R = \sqrt{\frac{2L}{g}} + \pi\sqrt{\frac{m}{k}} - \frac{1}{w} \arcsin \frac{\sqrt{2gL}}{\sqrt{2gL + mg^2/k}}$$

$$t_R = \sqrt{\frac{2L}{g}} + \sqrt{\frac{m}{k}} \left(\pi - \arcsin \frac{\sqrt{2gL}}{\sqrt{2gL + mg^2/k}} \right)$$

Que es lo mismo que:

$$t_R = \sqrt{\frac{2L}{g}} + \sqrt{\frac{m}{k}} \left(\frac{\pi}{2} + \arccos \frac{\sqrt{2gL}}{\sqrt{2gL + mg^2/k}} \right)$$

ò

$$t_R = \sqrt{\frac{2L}{g}} + \sqrt{\frac{m}{k}} \tan^{-1} \left(-\sqrt{\frac{2kL}{mg}} \right)$$

5. Cuerpo Rígido

Fricción de Impacto

La figura muestra una esfera sólida y homogénea de radio R y masa m . Antes de caer al suelo, su centro de masa está en reposo, pero la esfera gira con velocidad angular ω_0 respecto a un eje horizontal a través de su eje. El punto más bajo de la esfera está a una altura h del suelo. La pelota cae por gravedad y rebota a una nueva altura αh . Despreciando la resistencia del aire y la deformación de la esfera, y considerando el coeficiente de fricción μ_k entre la esfera y el suelo, el momento de inercia de la esfera respecto a su eje de rotación es

$$I = \frac{2mR^2}{5} \quad (25)$$

Considere la siguiente situación: la esfera se desliza durante el tiempo de impacto.

- Encuentre el valor mínimo de ω_0 para que se presente ésta situación.
- Calcule $\tan\theta$, para el ángulo θ como se muestra en la figura.
- Calcule la distancia horizontal que recorre la esfera entre el primer y el segundo impacto.

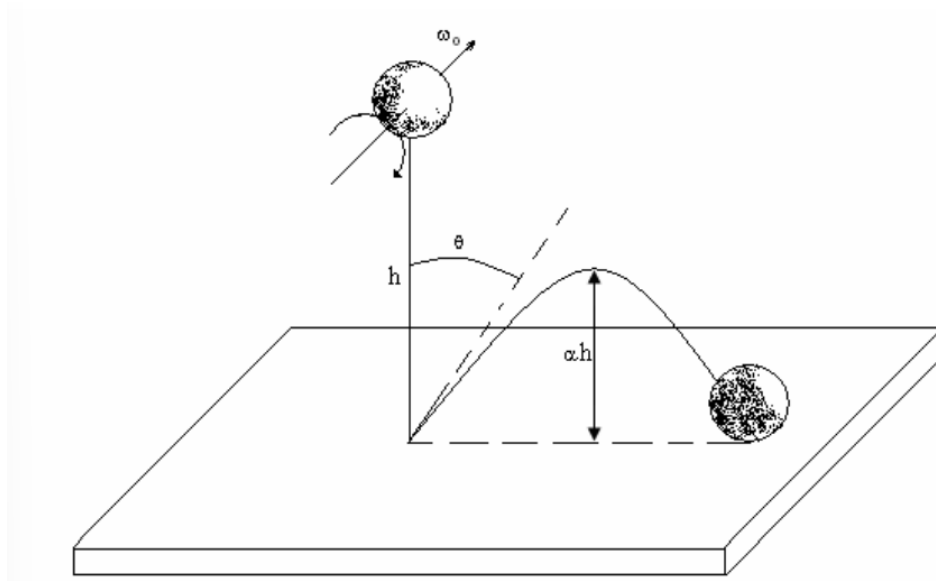


Figura 5

Solución

Velocidad en el instante previo al impacto

$$mgh = m \frac{v_o^2}{2}$$

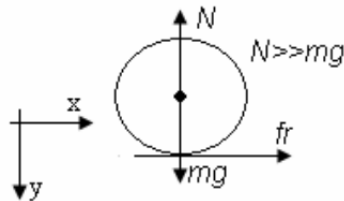
$$v_o = \sqrt{2gh}$$

Cálculo de la componente vertical de la velocidad en el instante posterior al impacto

$$v_{2y}^2 = 2g\alpha h$$

$$v_{2y} = \sqrt{2g\alpha h} = cv_o \quad c = \sqrt{\alpha}$$

Figure 1.2 shows the free body of the ball during impact



Considerando que el impulso lineal de las fuerzas es igual a la variación del momento lineal y que el impulso angular de los pares es igual a la variación del momento angular, tenemos:

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} N(t)dt = mv_o + mv_{2y} = m(1+c)\sqrt{2gh}$$

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} f_r(t)dt = mv_{2x}$$

$$I_\theta = \int_{t_1}^{t_2} Rf_r(t)dt = R \int_{t_1}^{t_2} f_r(t)dt = (\omega_o + \omega_2)$$

$$f_r = \mu_k N(t)$$

Sustituyendo (8) en las relaciones (6) y (7), y usando (5), encontramos que:

$$I_x = \mu_k \int_{t_1}^{t_2} = \mu_k I_y = \mu_k (1+c) \sqrt{2gh} = mv_{2x}$$

$$I_\theta = \mu_k R \int_{t_1}^{t_2} f_r(t) dt = R \mu_k m (1+c) \sqrt{2gh} = I(\mu_0 - \mu_2)$$

La cual nos puede dar la componente horizontal de la velocidad v_{2x} y la velocidad angular final en la forma

$$v_{2x} = \mu_k (1+c) \sqrt{2gh}$$

$$\omega_2 = \omega_0 - \frac{R \mu_k m (1+c)}{I} \sqrt{2gh}$$

si

$$\omega_2 R > v_{2x}$$

$$\omega_0 - \frac{R \mu_k m (1+c)}{I} \sqrt{2gh} > \frac{\mu_k (1+c)}{R} \sqrt{2gh}$$

$$\omega_0 > \frac{\mu_k \sqrt{2gh}}{R} (1+c) \left(\frac{mR^2}{I} + 1 \right)$$

Para $\tan \theta$ tenemos, de (4) y (11), que:

$$\tan \theta = \frac{v_{2x}}{v_{2y}} = \frac{I \omega_0 R}{I + mR^2} \frac{1}{c \sqrt{2gh}} = \frac{I \omega_0 R}{(I + mR^2)(c \sqrt{2gh})}$$

$$\tan \theta = \frac{2 \omega_0 R}{7c \sqrt{2gh}}$$

luego (18) y (19) dan la solución (fig. 1.3).

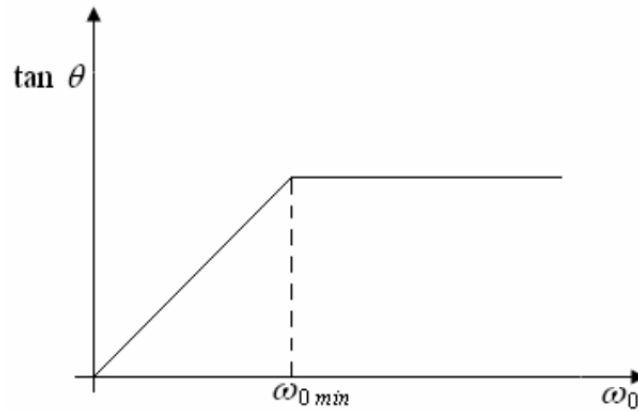


Figure 1.3

Vemos que θ no depende de ω_0 , si $\omega_0 > \omega_{0min}$, donde ω_{0min} esta dada por:

$$\omega_{0min} = \frac{\mu_k (1+c) \sqrt{2gh} \left(1 + \frac{mR^2}{I} \right)}{R}$$

$$\omega_{0min} = \frac{7\mu_k(1+c)\sqrt{2gh}}{2R}$$

El tiempo de subida y bajada de la pelota es:

$$t_v = 2\frac{v_{2y}}{g} = \frac{2c\sqrt{2gh}}{g} = 2c\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

La distancia a encontrar, entonces, es:

$$d_I = v_{2x}t_v = \mu_k(1+c)\sqrt{2gh}2c\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$d_I = 4\mu_k(1+c)ch$$