Diego Sarceño

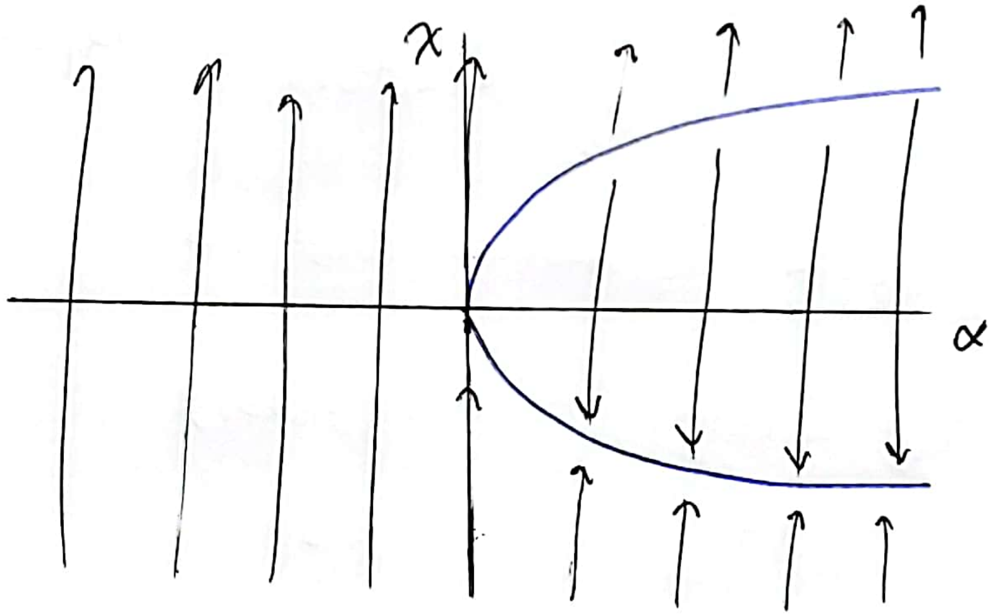
201900109

ISD

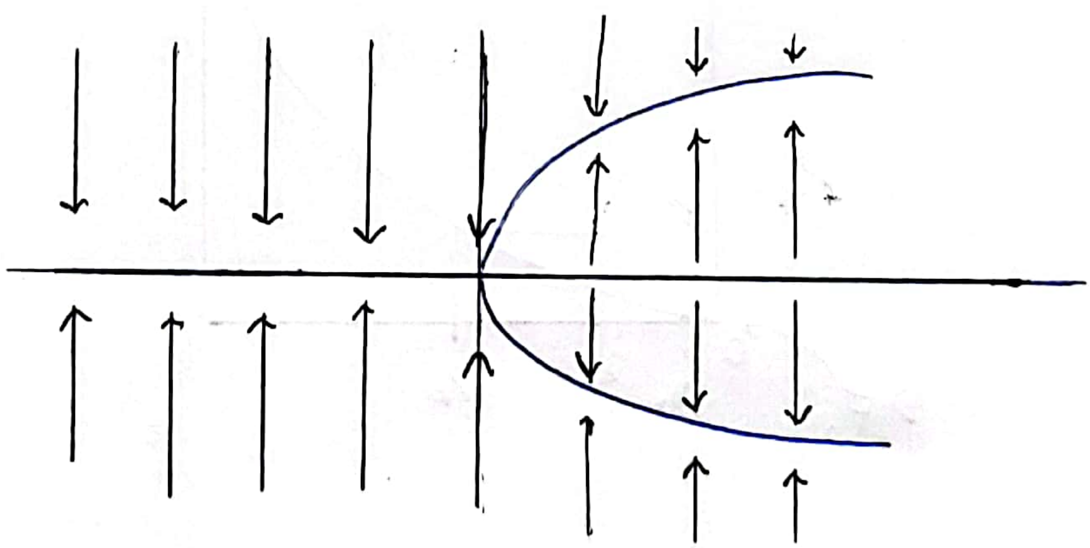
Parcial 1

P1

1a) Bifurcación fold (Tangencial)



Bifurcación tridente (Pitchfork).



1b) Tomando $f(x) = x^2$

Función

Puntos fijos $x(x-1) = 0$

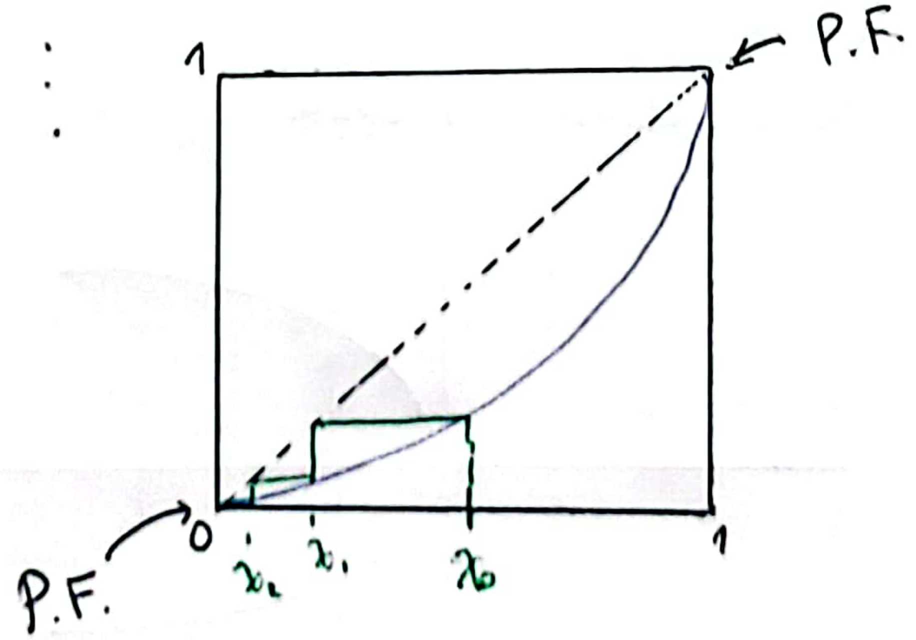
$x = 0$ y $x = 1$

Aractor

Repulsor

Punto Inicial: Tomamos $x_0 = 1/2$.

$x_1 = f(x_0) = 1/4$, $x_2 = f(f(x_0)) = 1/16$



1c)

Si $f: I \to I$, con $I = [a,b]$, es creciente (no necesariamente escrita) y f no tiene puntos fijos en I° entonces al menos un extremo es fijo, y si $f \in \mathcal{C}^1$ para una de 2:

*) exactamente uno entre a y b es fijo y atractor.

**) ambos son puntos fijos, uno atractor y el otro repulsor.

P2

2a.1) EDO $\Rightarrow \dot{x} = x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 18x - 9$

$\dot{x} = f(x) = 0 \Rightarrow$ Raices.

$$f(x) = (x+3)(x-1)^2(x-3)$$

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 16x + 18.$$

$x = -3$

$f'(-3) = -96 < 0$

Aractor

$x = 3$

$f'(3) = 24 > 0$

Repulsor

$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ f'(1) = 0 \end{array}\right\}$ Falla

$\rightarrow$ Para $x \in (-3, 1)$

$f(-1) = -32$

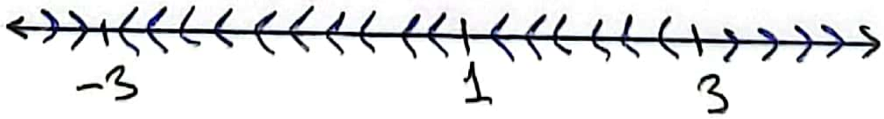
$\hookrightarrow$ decreciente

$\rightarrow$ Para $x \in (1, 3)$

$f(2) = -5$

$\hookrightarrow$ decreciente.

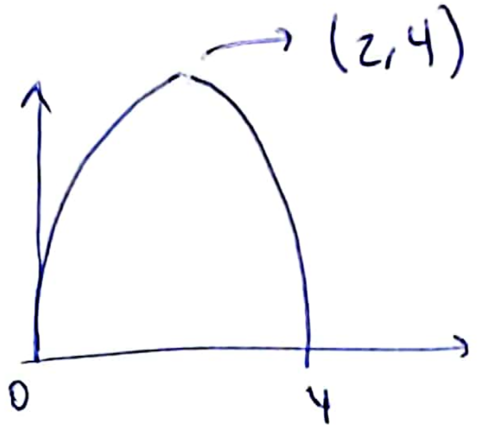
Diagrama de Fase



2a.2)

Dado que el test de la primera derivada falla siempre con raíces de multiplicidad >1, lo podemos tomar como dos puntos fijos que se 'juntarán' estilo bifurcación tipo tangencial (fold).

2b.1) Graficando $f(x) = 4x - x^2$



$Y = [0,4]$

es claro que el rango $f|_Y$ está contenido en Y. Por lo tanto

Y es f-invariante.

2b.2)

2b.3)

Para la parte 3 haré un proyecto y 1 problema verde.

Clase 3II, p7, problema verde.

Teorema: Sea $A(t)$ contínuo en $t \in I$ para algún intervalo I, y sea $X(t)$ la solución fundamental de $\vec{x}' = A(t)\vec{x}$ en I. Entonces ya sea $W(t) = 0$ $\forall t \in I$, o bien $W(t) \neq 0$ $\forall t \in I$.

*) Caso especial. Eigen valores complejos:

Si $\lambda \pm \mu i$ son los eigenvalores, se pueden tomar las soluciones

$$\vec{x}_1(t) = e^{\lambda t}(\vec{a}\cos \mu t - \vec{b}\,\mathrm{sen}\, \mu t)$$

$$\vec{x}_2(t) = e^{\lambda t}(\vec{a}\,\mathrm{sen}\, \mu t + \vec{b}\cos \mu t)$$

donde $\vec{v} = \vec{a} \pm i\vec{b}$.

→ Demuestre lo anterior partiendo de la forma compleja $\vec{x} = e^{(\lambda \pm i\mu)t}\,\vec{v}$.

Dem: Tomamos la solución como combinación lineal de $\vec{x}_p$.

$$\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2$$

$$\Rightarrow \vec{x} = e^{\lambda t}\left[c_1 e^{\mu t i}\vec{v}_1 + c_2 e^{-\mu i t}\vec{v}_2\right]$$

Sabiendo que $e^{\theta i} = \cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta)$.

y $\vec{v}_1 = \vec{a} + \vec{b}i$ y $\vec{v}_2 = \vec{a} - \vec{b}i$.

$$\therefore \vec{x} = e^{\lambda t}\Big[c_1\big(\cos(\mu t) + i\,\text{sen}(\mu t)\big)\big(\vec{a} + \vec{b}i\big)$$

$$+ c_2\big(\cos(\mu t) - i\,\text{sen}(\mu t)\big)\big(\vec{a} - \vec{b}i\big)\Big]$$

$$\vec{x} = e^{\lambda t}\Big[c_1\vec{a}\cos(\mu t) + c_1\vec{a}i\,\text{sen}(\mu t)$$

$$+ c_1\vec{b}i\cos(\mu t) - c_1\vec{b}\,\text{sen}(\mu t)$$

$$+ c_2\vec{a}\cos(\mu t) - c_2\vec{a}i\,\text{sen}(\mu t)$$

$$- c_2\vec{b}i\cos(\mu t) - c_2\vec{b}\,\text{sen}(\mu t)\Big]$$

Agrupando.

$$\vec{x} = e^{\lambda t}\Big[(c_1+c_2)\big(\vec{a}\cos(\mu t) - \vec{b}\,\mathrm{sen}(\mu t)\big)$$

$$(c_1-c_2)\,i\big(\vec{a}\,\mathrm{sen}(\mu t) + \vec{b}\cos(\mu t)\big)\Big]$$

Podemos redefinir los constantes.

$$C_1 = c_1+c_2 \quad y \quad C_2 = (c_1-c_2)\,i.$$

$$\Rightarrow \vec{x} = e^{\lambda t}\Big[C_1\big(\vec{a}\cos(\mu t) - \vec{b}\,\mathrm{sen}(\mu t)\big) + C_2\big(\vec{a}\,\mathrm{sen}(\mu t) + \vec{b}\cos(\mu t)\big)\Big]$$

Lo que es una combinación lineal de sols. particulares

$$\vec{x}_1 = e^{\lambda t}\big(\vec{a}\cos(\mu t) - \vec{b}\,\mathrm{sen}(\mu t)\big)$$

$$\vec{x}_2 = e^{\lambda t}\big(\vec{a}\,\mathrm{sen}(\mu t) + \vec{b}\cos(\mu t)\big)$$