Diego Sarceño
201900109

Sistemas Dinámicos.

Resumen

Para iniciar es necesario saber qué es un sistema dinámico. Lo que es una formalización matemática para cualquier regla fija que describe la relación de dependencia de un punto en un espacio ambiente respecto de un parámetro, el cual es generalmente llamado tiempo y puede ser discreto ($n \in \mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$) o continuo ($t \in \mathbb{R}$ o $t \in (a,b)$). En concreto es una 3-tupla (T, X, Φ) con T el espacio del parámetro, X el espacio de estados y Φ la evolución del sistema.

Para iniciar con todo lo visto en el curso se repasó un poco los sistemas de ecuaciones diferenciales, en lo cual se presenta el "truco" utilizado por los físicos y es volver una ecuación dif. de orden n en n ecuaciones lineales, lo que es muy útil para resolver analíticamente o simplificar la solución numérica. Además, se recuerda la parte de diagramas de fase, que en 1-D se construyen encontrando los ceros de $f(x)$ en el sistema $\dot{x} = f(x)$ y las reglas de la primera derivada.

Con esto se introducen los tipos de ceros: Atractor, repulsor y Nodo. También se introdujo la idea de mapa, lo que es una función que genera un sistema dinámico discreto por medio de realizar una composición n veces y si es continua se le llama mapa. Con esta idea se define el concepto de órbita, que es la función resultante de mantener fijo el parámetro $\mathcal{O}_x = \{x, f(x), f^2(x), \dots\}$. Y esto da pie a las recursiones, que son $x_{n+1} = f(x_n)$.

Dado que estamos trabajando con funciones y puntos críticos, es necesario dar teoremas/definiciones referentes a la continuidad. Por esto, se define la continuidad de Lipschitz, la cual para una función $f: \mathbb{R}^n \supseteq X \to \mathbb{R}^m$ es llamada Lipschitz continua con cte. λ si $d(f(x), f(y)) \leq \lambda\, d(x, y)$ $\forall x, y \in X$, lo que nos asegura que toda recta secante por un punto está acotada por λ. Además, si $\lambda < 1$ se dice que f es una contracción, lo que implica que todas las órbitas converjan al mismo punto fijo (que es único).

Es posible seguir la órbita de un punto x_0 en la gráfica de f en el plano I^2 mediante un Diagrama de Verhulst. en el cual, las intersecciones de f con la diagonal $y(x) = x$ son los puntos fijos.

Escaneado con CamScanner

Una parte a priori, no muy importante pero interesante, es que dado un mapa continuo $f: X \to X$ para cada $x \in X$ se define $\omega(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{f^k(x) \mid k \geq n\}}$ → clausura

y $\alpha(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{f^{-k}(x) \mid k \geq n\}}$ que son los puntos de acumulación de las semi-órbitas. Y si f es creciente y no tiene puntos fijos en I°, entonces un extremo es fijo y si $f \in \mathcal{C}^0$ en (a,b) es atractor ó pasa uno de 2: 1 → Exactamente uno entre (a,b) es atractor y el otro repulsor.
2 → Ambos son puntos fijos con un atractor y

Para entender mejor el comportamiento, tanto de los sistemas dinámicos en general, como de los puntos fijos y para ello utilizaremos las bifurcaciones que es simplemente tomar $f(x) \to f_\alpha(x) = f(x) + \alpha$ y variar el parámetro α, para luego plotear α v X en un diagrama que nos muestre una curva de puntos fijos para diferentes valores de α y el comportamiento de f dependiendo del tipo de punto fijo que se tenga. Esto redefine los puntos fijos a los pares $(\alpha, x) \mid f(a,x) = x$.

Continuando, un sistema dinámico es, por ejemplo, las poblaciones y su evolución de ahí la ecuación diferencial logística del Verhulst $\dot{p} = rp\left(1 - \frac{1}{K}p\right)$

tasa de crecimiento

capacidad máxima del medio

la cual viendo su forma discreta normalizada $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$

Luego de lo repasado hasta ahora, llega la mejor parte (para mí) cuando aparece el álgebra lineal. Recordamos que una matriz diagonal es aquella en la que sus valores propios tienen la misma dimensión algebraica que geométrica y dicha matriz es de la forma $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Pero para las que no cumplan esto se tiene una forma 'seudodiagonal' para ellos, La forma de Jordan, en la que se tiene una matriz diagonal de bloques de la forma $B_n = \begin{pmatrix} \lambda_n & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_n & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ con 1's en la diagonal arriba de la principal. Estos surgen de analizar los espacios propios generalizados.

Con esto en mente se introducen los diagramas de fase en 2 Dimensiones, los cuales tienen diferentes comportamientos según los valores propios de A en el sistema $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ con $A \in \mathcal{M}_{\varphi}^{2\times 2}(\mathbb{R})$ para lo cual

•) $Re(\lambda) > 0$ Inestable (Repulsor)

•) $Re(\lambda) < 0$ Estable (Atractor)

Visto de mejor manera y contando más posibilidades.

Matriz diagonal con valores propios:

- Reales no nulos
  - Distintos $\longrightarrow$ Nodo regular/silla
  - Iguales $\longrightarrow$ Nodo Estelado
- Uno es nulo
  - Eje fijo
- Ambos Nulos
  - Plano fijo
- Complejos Conjugados
  - Im. Puros $\longrightarrow$ Centro
  - No Puros $\longrightarrow$ Espiral

Matriz no diagonal con valor propio
$$\begin{cases} \text{Nulo} \rightarrow \text{estrellamiento/oblicuación} \\ \\ \text{Real no nulo} \rightarrow \text{Nodo Degenerado} \end{cases}$$

Para los cuales la dirección de las líneas/trayectorias depende del signo de los valores propios.

Las cuales estan representadas en el plano $tr(A) - det(A)$ llamado diagrama de poincaré.

Sea un Sistema dinámico no lineal y un punto de equilibrio aislado, la linealización local consiste en encontrar una vecindad del equilibrio en la que el sistema sea una lineal (localmente). Esto implica que un punto crítico aislado en $\vec{x} = \vec{0}$ es cuasilineal alrededor de $\vec{0}$ si $\exists\, A \in \mathcal{M}^{2\times 2}(\mathbb{R})$ y un campo vectorial $E: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$F(\vec{x}) = A\vec{x} + E(\vec{x}) \quad \text{y} \quad \lim_{\vec{x} \to 0} \frac{\|E(\vec{x})\|}{\|\vec{x}\|} = 0.$$

Para F_i polinomiales en $F(\vec{x}) = \begin{pmatrix} F_i(\vec{x}) \\ \vdots \end{pmatrix}$

El término independiente debe ser cero para que el punto crítico esté en el origen. Y la matriz A esta formada por los términos de orden 1 de los F_i.

Para estos sistemas no lineales se tienen ciertos teoremas muy importantes.

$\boxed{I}$ Poincaré -Lyapunov.

Si $\dot{\vec{x}} = F(\vec{x})$ con $F \in \mathcal{C}^1$ y si en su linealización $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, A tiene todos sus valores propios con parte real ~~con~~ negativa, entonces el equilibrio es asintóticamente estable (Atractor).

$\boxed{II}$ Hartman-Grobman

Hiperbolico $\rightarrow$ A no tiene valores propios con parte real cero.

Si $\vec{x}^*$ es un equilibrio hiperbólico de un sistema $\dot{\vec{x}} = F(\vec{x})$ entonces el diagrama de fase del sistema es localmente homeomorfo en $\vec{x}^*$ al de su linealización.

III Criterio de Bendixon.

Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ una región simplemente conexa y sea $C \subseteq D$ una curva cerrada simple.

Suponga que $f, g: D \to \mathbb{R}$ son funciones $\mathcal{C}^1$ y considere el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

Luego si $\nabla \cdot F$ no cambia de signo en D entonces C no puede ser una órbita del sistema, a menos que la divergencia se anule en el interior de C.

IV Poicaré - Bendixon

Si A es una región cerrada y acotada en $\mathbb{R}^2$, $\dot{\vec{x}} = F(\vec{x})$ es un sistema dinámico con $F: D \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial $\mathcal{C}^1$, definido en un dominio D que cumple: $A \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^2$, entonces:

Si $x \in D$ es tal que $\mathcal{O}_x^+$ eventualmente entre A y no vuelve a salir o $\mathcal{O}_x^+$ no incluye un equilibrio, entonces ya sea $\mathcal{O}_x$ es periódica o tiende a una orbita periódica $\omega(x)$.

$\boxed{V}$ Equidistribución de Weyl.

Si α es irracional, entonces para cada arco $I = [a,b) \subseteq S^1$ y cada $x \in S^1$ se tiene $\rho(I) = (b-a)$ se asume $a \leq b < a+1$.