Proyecto Genérico

SISTEMAS DINÁMICOS, SEGUNDO SEMESTRE 2023

1st Diego Sarceño Ramírez
201900109

I. CAPÍTULO 1

I-A. *Problema 1.1*

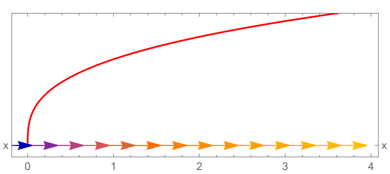
Para $h(x) = rx(1-x)$ y $n = \{0, 1, 2, 3, 4, 101, 102, 103, 104\}$.

a) Con $r = 2$ y $x = 0.25$.
b) Con $r = 2$ y $x = 0.2345$.
c) Con $r = 3.1$ y $x = 0.25$.
d) Con $r = 3.1$ y $x = 0.252345$.
e) Con $r = 4$ y $x = 0.25$.
f) Con $r = 4$ y $x = 0.2345$.

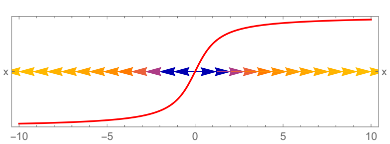
I-B. *Problema 1.3*

Diagramas de Fase realizados en *Mathematica*.

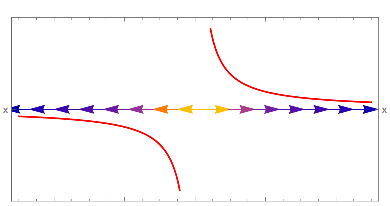
a) $f(x) = x^{1/3}$.



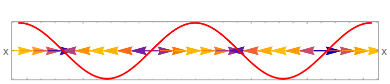
b) $g(x) = 2\arctan x$.



c) $r(x) = 1/x$.



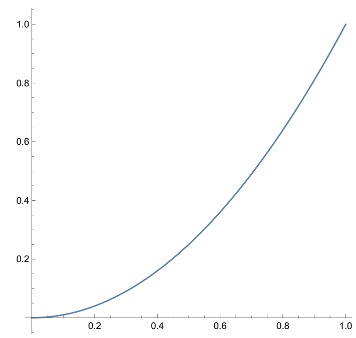
d) $C(x) = \cos x$.



II. CAPÍTULO 2

II-A. *Problema 2.1*

a) Viendo la gráfica de la función $f(x) = x^2$, es claro que $f([0, 1]) \to [0, 1]$.



b) Para el intervalo dado, la función x^2 es invertible, entonces $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, por lo que $f^{-1}(f([0, 1])) = f(f^{-1}([0, 1])) \to [0, 1]$ al menos para el intervalo dado.
c) Con $S(x) = \sin x$ se sabe que $S([0, \pi/2]) \to [0, 1]$; por lo que $S^{-1}(x) = \arcsin(x) \Rightarrow S^{-1}(S([0, \pi/2])) \to [0, \pi/2]$.

II-B. *Problema 2.4*

Suponga $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ está definido como $f(x) = \frac{1}{2}x$.

a) Luego de valuar los puntos en el intervalo $[-1, 1]$ estos se mapean en el intervalo $[-1/2, 1/2]$.
b) Para $f(f(x)) = \frac{1}{4}x$, sucede lo mismo que el inciso anterior, el rango es $[-1/4, 1/4]$.
c) Aplicando f n veces sobre sí misma, se tiene que $f^n(x) = \frac{1}{2^n}x$.

II-C. *Problema 2.8 (Desigualdad del Triángulo)*

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $-|a, b| \leq a, b \leq |a, b|$.

a) Sumando las desigualdades dadas en el problema, se tiene $-(|a|+|b|) \leq a+b \leq |a|+|b|$, lo que implica que $|a + b| \leq |a| + |b|$.
b) Reemplazamos b por $-b$ en la desigualdad triangular, lo que nos da $|a - b| \leq |a| + |-b| = |a| + |b|$.
c) Restamos $|b|$ en la desigualdad del inciso b): $|a| \geq |a - b| - |b|$.
d) Tomamos $a = a - b + b$ y aplicamos la desigualdad triangular $|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$. Restamos $|b|$ de ambos lados y: $|a| - |b| \leq |a - b|$.

III. Capítulo 3

III-A. *Problema 3.2*

Sea $x \in (a,b)$, se cumple que $a < x < b$, supongamos que $\varepsilon > 0$ es la distancia de x al punto final más cercano de (a,b) i.e. $\varepsilon = \text{mín}\, x-a, b-x$. Ahora sea $y \in B_\varepsilon(x) := \{w \in \mathbb{R} \,|\, |w-x| < \varepsilon\}$, entonces se cumple que $|y-x| < \varepsilon$. Por la definición de ε se tienen dos casos.

(CASO I.) $\varepsilon = x - a$,

$$\begin{aligned} |y-x| &< x-a \\ -(x-a) < y-x &< x-a \\ a < y &< 2x-a. \end{aligned}$$

(CASO II.) $\varepsilon = b - x$,

$$\begin{aligned} |y-x| &< b-x \\ -(b-x) < y-x &< b-x \\ 2x-b < y &< b. \end{aligned}$$

Esto nos dice claramente que $a < y < b$, por ende $y \in (a,b)$. De esta forma, $B_\varepsilon(x) \subseteq (a,b)$, lo que implica que (a,b) es un conjunto abierto.

III-B. *Problema 3.3*

La demostración es muy parecida a la realizada en el problema anterior, solo que esta vez la siguiente desigualdad $|x-y| \leq \varepsilon \leq |x-a|$. Por el mismo procedimiento del problema anterior, es claro que $a \leq y \leq 2x-a$ y $2x-b \leq y \leq b$. Por lo que $a \leq y \leq b$, lo que implica que la bola cerrada con radio ε y radio x pertenece al intervalo $[a,b]$, por lo que es un conjunto cerrado.

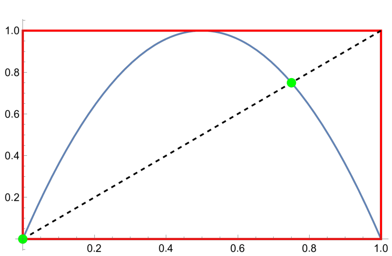
III-C. *Problema 3.5*

Si tomamos un número $q \in \mathbb{Q}$ y $r > 0$, considerando un intervalo abierto $(q-r, q+r)$, este intervalo contendrá números irracionales, lo que implica que los números racionales no son un conjunto abierto.

IV. Capítulo 4

IV-A. *Problema 4.3*

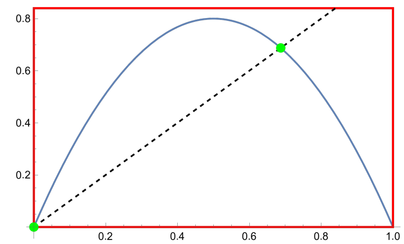
Para $h(x) = 4x(1-x)$, se tiene la siguiente gráfica



Iteración 1	$(9/16, 27/64)$
Iteración 2	$(3/4, 9/16)$
Iteración 3	$(3/4, 3/4)$.

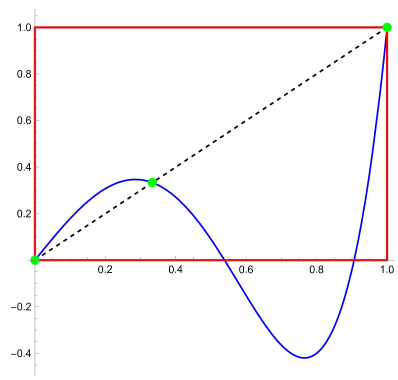
IV-B. *Problema 4.5*

Para $h(x) = 3.2x(1-x)$, se tiene puntos fijos en $x = 0$ y $x = 0.6875$ (luego de resolver la ecuación $3.2x(1-x) = x$), lo que demuestra que los puntos fijos están en el intervalo $[0,1]$.



IV-C. *Problema 4.10*

Restringiendo el quinto polinomio de Legendre[1] a números positivos, se tiene



Los puntos fijos estan en $x = 0, 1/3, 1$.

V. Capítulo 5

V-A. *Problema 5.3*

VI. Capítulo 6

VI-A. *Problema 6.1*

Encontramos los puntos fijos y si son atractores, repulsores, nodos o no están definidos.

a) Para $f(x) = -x^3$, con puntos fijos reales $x = 0$ el cual es un nodo, ya que al valuar por derecha y por izquierda se tiene comportamiento atractor y repulsor.
b) Para $f(x) = x^3 - x$, con puntos fijos en $x = \pm\sqrt{2}$ los cuales son repulsores y $x = 0$ el cuál es atractor.
c) Para $f(x) = -x^3 - x$, con puntos fijos reales en $x = 0$ el cual es atractor.
d) Para $f(x) = e^{x-1}$, con puntos fijos en $x = 1$ y dado el comportamiento alrededor de dicho punto se concluye que es un nodo.
e) Para $f(x) = e^{-x}$, con punto fijo en $x = 0.567143$ el cual es un atractor.

[1] $P_5(x) = \frac{1}{2^5 5!}\frac{\mathrm{d}^5}{\mathrm{d}x^5}[(x^2-1)^5] = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$.

f) Para $f(x) = \sin x$, con puntos fijos en $x = 0$ el cual no está definido algebraicamente, pero realizando el gráfico es claro que es atractor.
g) Para $f(x) = -x^{1/3}$, con punto fijo real en $x = 0$ el cual es atractor por la derecha.
h) Para $f(x) = -\frac{4}{\pi}\arctan x$, con punto fijo en $x = 0$ el cual es atractor.

Para ver los cálculos, revisar el notebook/pdf de mathematica.

VII. Capítulo 7

VII-A. Problema 7.2

Tomando $h_r(x) = rx(1-x)$.

a) Resolviendo la ecuación $rx(1-x)-x = 0$ se tienen raíces $r = 0$ y $\frac{r-1}{r}$. Utilizando *mathematica* o

$$-rx^2 + (r-1)x = 0$$
$$\frac{-(r-1) \pm \sqrt{((r-1)^2)}}{-2r} = x$$
$$x = 0 \qquad\qquad x = \frac{r-1}{r}$$

b) El punto fijo $x = 0$ es repulsor dado que r es positivo siempre. Y $x = \frac{r-1}{r}$ es repulsor para $0 < r < 2$, indeterminado para $r = 2$ y atractor para $r > 2$.

VIII. Capítulo 11

VIII-A. Problema 11.3

a) Dada $d_3(x,y) = (x-y)^2$ verificamos que se cumplan los 4 axiomas
   - Es claramente semidefinido positivo dado que $r^2 > 0 \,\forall\, r \in \mathbb{R}$.
   - Identidad de los Indescernibles. $(\Rightarrow)$ $d_3(x,y) = (x-y)^2 = 0 \Rightarrow x = y$. $(\Leftarrow)$ $x = y$ entonces $d_3(x,x) = (x-x)^2 = 0$. Lo que cumple la identidad.
   - Simetría. $d_3(x,y) = (x-y)^2 = (-1)^2(y-x)^2 = d_3(y,x)$.
   - Desigualdad triangular. Expandiendo ambos lados para verificar si se cumple o no para cualesquiera x, y, z. $x^2+z^2-2xz+z^2+y^2-2yz \geq x^2+y^2-2xy \rightarrow 2z^2+2xy \geq 2xz+2yz$ lo que no es necesariamente cierto para cualesquiera x, y, z.

   Lo que implica que $d_3(x,y) = (x-y)^2$ no es una métrica.

b) Para $d_4(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ las primeras 3 propiedades se cumplen claramente, dado que $|x-y|$ es una metría en sí. Por ende, solo hace falta ver si cumple la desigualdad triangular, y reemplazando los valores aboslutos por a, b, c para facilidad

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} \geq \frac{c}{1+c},$$

expandiendo y reduciendo términos semejantes

$$a + b + 2ab + abc \geq c.$$

Lo que claramente se cumple dado que $|x-y|$ es una métrica y cumple la desigualdad triangular $a + b \geq c$, y dado que todos son positivos, la desigualdad se cumple. Lo que implica que $d_4(x,y)$ es una métrica.

IX. Capítulo 14

IX-A. Problema 14.1

Simplificando

a) $(2-3i) + (-1-4i) = 1-7i$.
b) $\frac{1}{2}i - (1+i) = -1 - \frac{1}{2}i$.
c) $(2+i)(i) = -1+2i$.
d) $(2+i)/i = 1-2i$.
e) $(1-4i)(2+3i) = 2-8i+3i+12 = 14-5i$.
f) $\frac{1-4i}{2+3i} = \frac{1-4i}{2+3i}\frac{2-3i}{2-3i} = \frac{-10-11i}{13} = -\frac{10}{13} - \frac{11}{13}i$.

IX-B. Problema 14.2

Encontrando módulo y argumento utilizando `AbsArg[]` (usamos mathematica por practicidad, para aprovechar la herramienta y por la simplicidad del problema)

a) $1-4i \rightarrow (\sqrt{17}, -75.9639^o)$.
b) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}i \rightarrow \left(\frac{\sqrt{13}}{4}, 56.1499^o\right)$.
c) $2 \rightarrow (2, 0^o)$.

IX-C. Problema 14.3

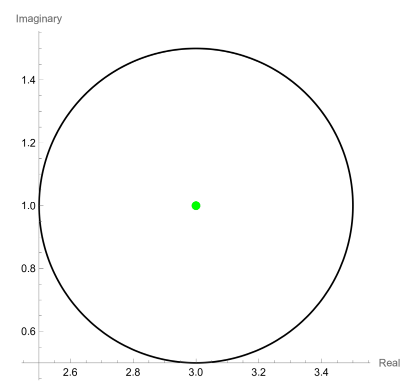


Figura 1. Vecindad de radio 0.5 del punto $3+i$.

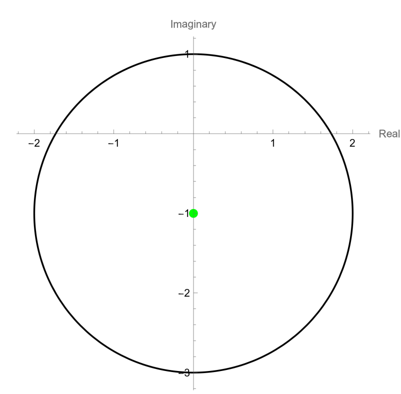


Figura 2. Vecindad de radio 2 del punto $-i$.

IX-D. Problema 14.4

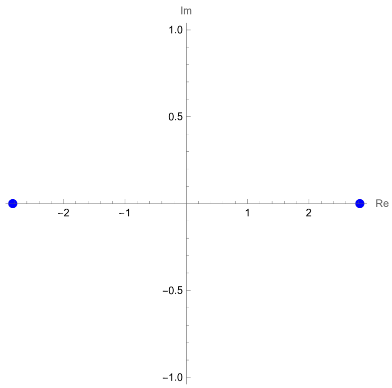


Figura 3. Soluciones de $z^2 = 8$.

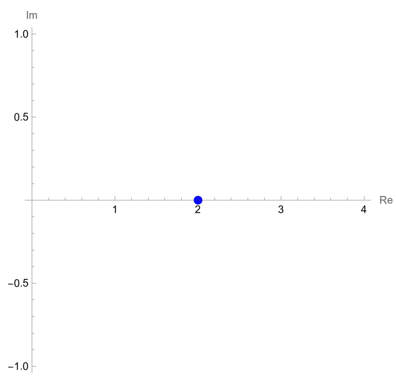


Figura 4. Soluciones de $z^3 = 8$.

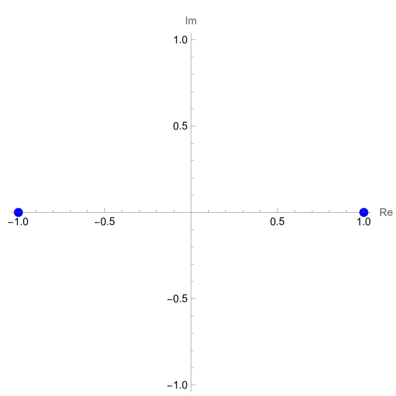


Figura 5. Soluciones de $z^2 = 1$.

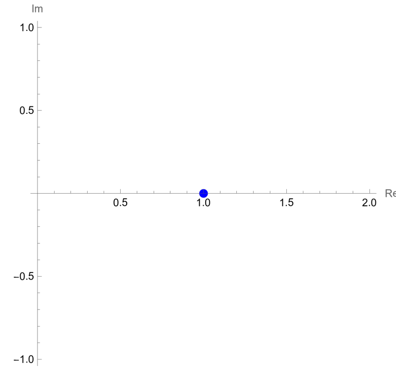


Figura 6. Soluciones de $z^3 = 1$.

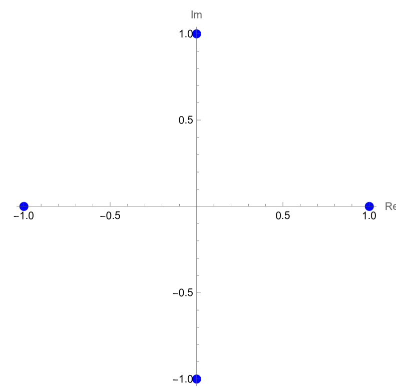


Figura 7. Soluciones de $z^4 = 1$.

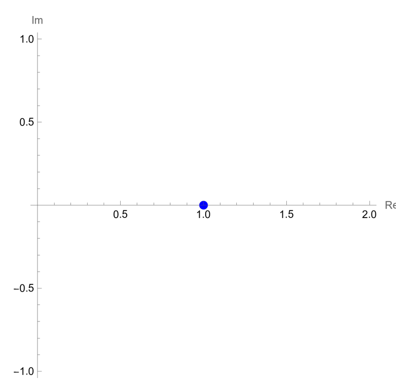


Figura 8. Soluciones de $z^5 = 1$.

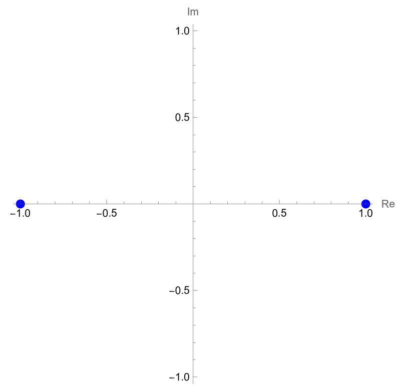


Figura 9. Soluciones de $z^6 = 1$.

IX-E. *Problema 14.6*

Regresando a la parte de métrica, se tiene $d(a+bi, c+di) = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$.

- **Semidefinido Positivo:** dado que el interior de la raíz es positivo, la función es positiva para todos los z_1, z_2.
- **Simetría:** Dado que $(x-y)^2 = (y-x)^2$, la función es simétrica.
- **Identidad de los Indesceribles:** Es claramente cierta.
- **Desigualdad Triangular:** Dado que $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq \sqrt{x+y}$, es trivial la desigualdad triangular.

Lo que implica que la función $d(a+bi, c+di)$ es una métrica.

X. Capítulo 15

Referencias

[1] Holmgren, R. (2000). *A first course in discrete dynamical systems*. Springer Science & Business Media.

[2] Brown, R. (2018). *A modern introduction to dynamical systems*. Oxford University Press.