Diego Sarceño 201900109

Final

Problema Verde (Clase 34)

$\boxed{P1}$ Calcular e^M para cada posible $M \in \mathcal{M}^{3\times3}(\mathbb{R})$ que no sea diagonalizable y esté en forma de Jordan.

Como M no es diagonalizable

$$M = P^{-1} J P$$ con J matriz de bloques.

$$J = \mathrm{diag}(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3).$$

↳ Bloques de Jordan

Utilizando la serie de Mclauring

$$e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (P^{-1} J P)^k$$

Pero $(P^{-1}JP)^2 = (P^{-1}J\underbrace{P)(P^{-1}}_{I}JP)$

$$= P^{-1}J^2P$$

es fácil ver que se cumple para todo

$k \in \mathbb{N}$.

$$e^M = P^{-1}\Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} J^k}_{\hookrightarrow e^J.}\Big) P$$

Como J es diagonal

$$e^J = \begin{pmatrix} e^{\Omega_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & e^{\Omega_2} & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\Omega_3} \end{pmatrix}$$

pero $\Omega_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$ para matrices de cualquier tamaño.

Escaneado con CamScanner

Nuevamente con la serie de Mclauring

$$e^{\Omega i} = \mathbb{1} + \Omega i + \frac{1}{2}\Omega i^2 + \cdots$$

para esto utilizamos mathematico

al analizar cada una de los

entradas. (1ra fila

1ra: $e^{\lambda i}$ 2do: $e^{\lambda i}/1!$

3ra: $e^{\lambda i}/2!$ ...

$$\Rightarrow e^{\Omega i} = \begin{pmatrix} e^{\lambda i} & e^{\lambda i} & e^{\lambda i}/2! \\ 0 & e^{\lambda i} & e^{\lambda i} \\ 0 & 0 & e^{\lambda i} \end{pmatrix}$$

Para un bloque de cualquier orden.

$$e^{\Omega_i} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_i} & e^{\lambda_i}/1! & \cdots & \cdots & \dfrac{e^{\lambda_i}}{(n-1)!} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & e^{\lambda_i}/1! \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & e^{\lambda_i} \end{pmatrix}$$

Con $\Omega_i \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{R})$

Con esto ya se tiene la forma de e^{M} para cualquier matriz no diagonalizable y a teniendo la forma de cada e^{Ω_i} para cada bloque de Jordan.