Diego Sarceño

201900109

LSD

Lista de Ejercicios, p1

Clase 2

Ej 1

Resolvemos la EDO

$$\frac{dx}{dt} = 2x+3$$

$$\Rightarrow x(t) = \left(x_0 + \frac{3}{2}\right)e^{2t} + \frac{3}{2}.$$

$$x(t) = x_0 e^{2t} - \frac{3}{2}$$

Volviendo $x(t) \to \Phi(t, x_0)$, la órbita en $x_0 = 4$ es

$$\boxed{\Phi_4(t) = 4e^{2t} - \frac{3}{2}}$$

Ej 2

Diagrama de Trayectorias.

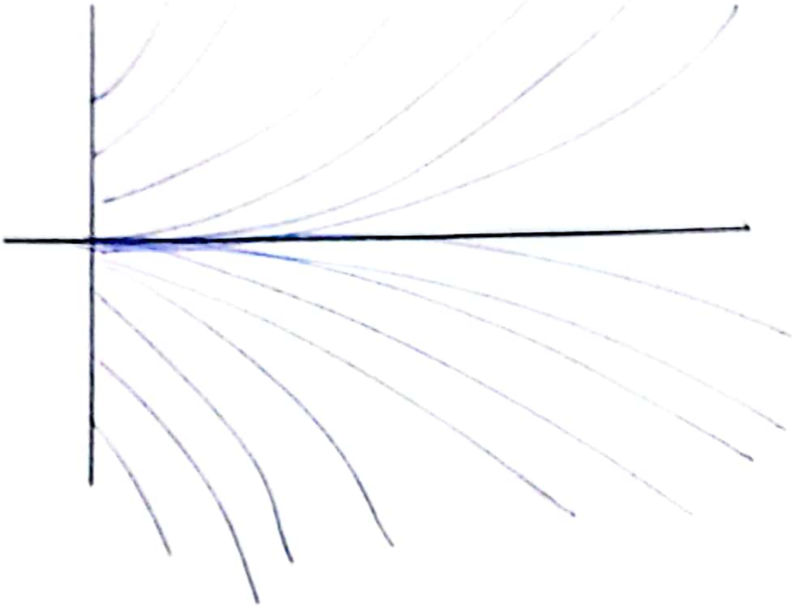
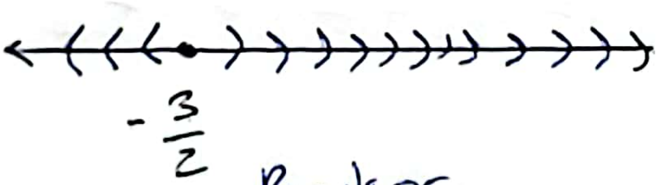


Diagrama de Fase



Repulsor.

Clase 3

Ej 3

Demostraremos que $X(t-c)$ satisface $\dot{x}(t-c) = f(x(t-c))$ $\forall t \in (a+c, b+c)$

$\Rightarrow$ Sea $u = t-c$

$$\dot{x}(t-c) = \frac{d}{dt} x(u)$$

$$= \frac{dx(u)}{du}\frac{du}{dt}$$

$$= \frac{dx(u)}{du}$$

$$\Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = f(x(t))$$

$$\Rightarrow \dot{x}(u) = f(x(u))$$

$$\dot{x}(t-c) = f(x(t-c))$$

Ej 4

Cambio de variables $\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 4t - 2 + 3x_1x_2 - 6t^2 x_1 \end{cases}$$

Para llegar al autónomo $x_3 = t$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 4x_3 - 2 + 3x_1x_2 - 6x_3^2 x_1 \\ \dot{x}_3 = 1 \end{cases}$$

Escaneado con CamScanner

Ej 5

A mano se puede realizar utilizando división sintética entre $(x-c)$ con $c \in \left\{ \dfrac{\text{div. término independiente}}{\text{div. coef. principal}} \right\}$

Pero, ya no estamos para esos trotes; utilizando Mathematica

$$f(x) = x(x-1)(x+1)(x+3)^3$$

$$f'(x) = 6x^5+45x^4+104x^3+54x^2-54x-27$$

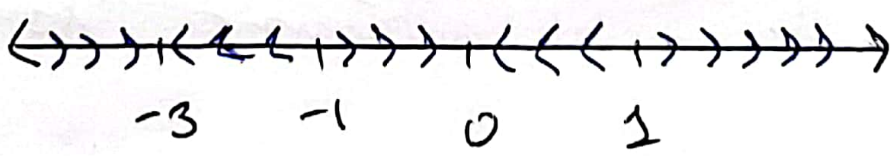
Realizando el test.

$x=-3$ Atractor

$x=1$ Repulsor

$x=-1$ Repulsor

$x=0$ Atractor



Diag. Fase.

Ej 6

Clase 4

Ej 7

El campo vectorial son círculos concéntricos en sentido antihorario.

El radio es el que se mantiene constante por trayectoria

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

verificamos,

$$\dot{f}_{(x,y)} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y}$$

$$= -2xy + 2xy = 0$$

Ej 8

Aplicando $\frac{d}{dt}$ al sistema se llega a:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -x \\ \ddot{y} = -y \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} y(t) = C_3 \cos t + C_4 \operatorname{sen} t \\ x(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t \end{matrix}$$

Valuando condiciones iniciales.

$$R = C_1 \cos(0) + C_2 \operatorname{sen}(0)$$
$$0 = C_3 \cos(0) + C_4 \operatorname{sen}(0)$$

$C_1 = R$

$C_3 = 0$

Para encontrar C_2 y C_4 derivamos y tomamos el sistema original

$$\begin{cases} -R \operatorname{sen} t + \cos t = -C_4 \operatorname{sen}(t) \\ C_4 \cos t = R \cos t + C_2 \operatorname{sen} t \end{cases}$$

$\Rightarrow C_2 = 0$ y $C_4 = R$

$$\boxed{(x(t), y(t)) = (R \cos(t), R \operatorname{sen}(t))}$$

Escaneado con CamScanner

Ej 9

Dado $f(x,y) = x^2 + y^2$

g debe ser medido en la dirección del flujo

$$g(x,y) = \tan^{-1}(y/x)$$

$$\dot{g}(x,y) = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2+y^2} \;, \quad \begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

$$\boxed{\dot{g}(x,y) = 1}$$

Ej 10

Para $\dot{x} = ax(L-x)$, resolviendo en mathematica

$$x(t) = \frac{e^{aLt} L}{e^{aLt} - e^{Lc_1}}$$

$$\boxed{\Phi(t,x) = \frac{e^{aLt} L}{e^{aLt} - e^{Lx}}}$$

Ej 11

Clase 5

Ej 12

Solución general

$$x_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1} a_k\right)\left(x_0 + \sum_{m=0}^{n-1} b_m \left(\prod_{k=0}^{m} a_k\right)^{-1}\right)$$

para $x_{n+1} = (-1)^n x_n + n^2$, $x_0 = 0$

$a_k = (-1)^k$, $b_m = m^2$ y $x_0 = 0$

$$x_n = \underbrace{\left(\prod_{k=0}^{n-1} (-1)^k\right)}_{(-1)^{(n-1)n/2}} \left(\sum_{m=0}^{n-1} m^2 \underbrace{\left(\prod_{k=0}^{m} (-1)^k\right)^{-1}}_{(-1)^{-m(m+1)/2}}\right)$$

$$x_n = \sum_{m=0}^{n-1} m^2 (-1)^{n(n-1)/2 - m(m+1)/2}$$

$$q = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{m(m+1)}{2}.$$

Escaneado con CamScanner

Ej 13

Resolver $x_{n+1} = a x_n + b$ y reemplazando en la solución general

$$x_n = a^n \left(x_0 + b \underbrace{\sum_{m=0}^{n-1} a^{-(m+1)}}_{\frac{1-a^{-(m+1)}}{1-a}} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{x_n = x_0 a^n + b\left(\frac{a^n - 1}{1-a}\right)}$$

Ej 14

El solución de $x_{n+1} = 3x_n - 2$.

Org.

$x_1 - 3x_0 = -2$

$x_2 - 3x_1 = -2$

$\vdots$

$x_{n+1} - 3x_n = -2$

Telescópica.

$3^n x_1 - 3^{n+1} x_0 = -2(3^n)$

$3^{n-1} x_2 - 3^n x_1 = -2(3^{n-1})$

$\vdots$

$\cancel{3} x_{n+1} - 3x_n = -2$

$$x_{n+1} - 3^{n+1} x_0 = -2 \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} 3^k \right)}_{\frac{1-3^{n+1}}{1-3}}$$

$$x_{n+1} = 1 + 3^{n+1}(x_0 - 1)$$

$$n+1 \longrightarrow n$$

$$x_n = 1 + 3^{n+1}(x_0 - 1)$$

Ev. $\Phi(n,x) = 3^n(x-1)+1$

__Ej 15__

$$x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n \quad , \; x_0 = 1 \, , \; x_1 = 3.$$

Resolvemos el polinomio característico

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \, , \; x^1 = 1 \, , \; x^2 = 2.$$

$$x_n = A(x^1)^2 + B(x^2)^2 = A + 2^n B$$

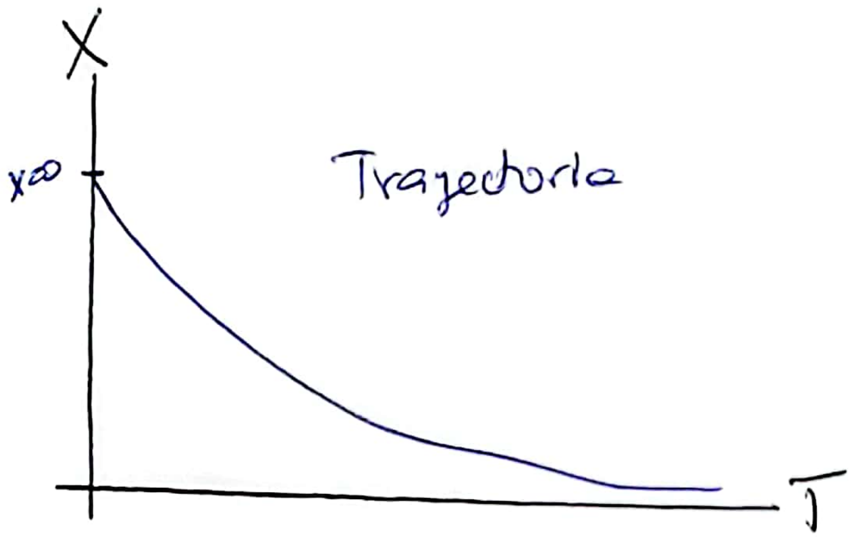
valuando C.I. $A = 1$; $B = 2$

$$\boxed{x_n = 2^{n+1} - 1}$$

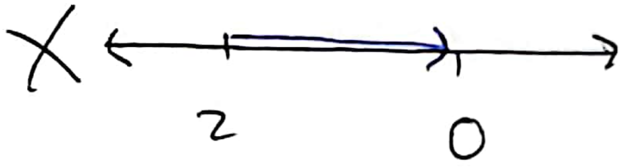
Ej 16

Clase 6

$x=2 \rightarrow \Phi_2(t) = 2e^{-t}$

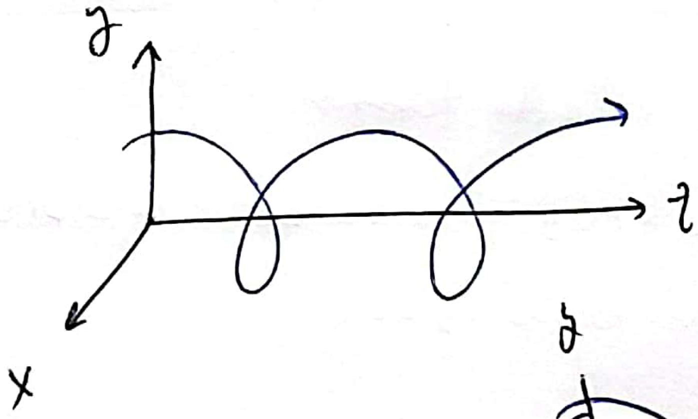


Órbita $[2,0)$



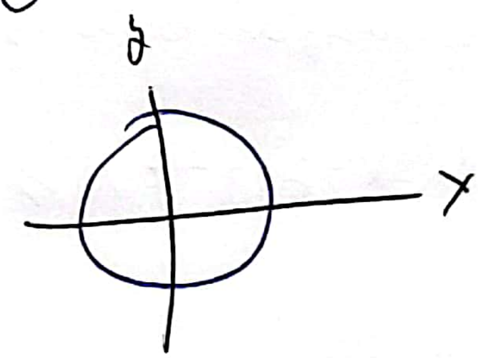
Ej 17

Ya se halló $(R\cos(t), R\operatorname{sen}(t))$



Trayectoria

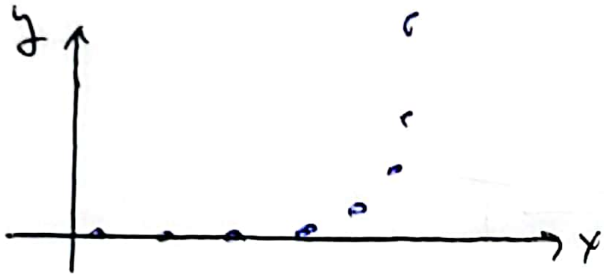
Órbita



Ej 18

$t = \pi/8$, puede generarse una discretización

$$\psi_{(n,x)} = f^{n}_{(x)} = \phi \circ \phi \circ \dots \circ \phi$$



Clase 7

Ej 19

$$\langle x-y, y-z\rangle = \langle x, y-z\rangle - \langle y, y-z\rangle$$

$$= \langle x, y\rangle - \langle x, z\rangle - \langle y, y\rangle + \langle y, z\rangle$$ ✓

→ dado que puede tomar valores negativos, su valor absoluto o es mayor o es igual

$$\Rightarrow |\langle x-y, y-z\rangle| \geq \langle x-y, y-z\rangle.$$ ✓

Ej 20

$$d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

$$= \underbrace{|x_1 - z_1 + z_1 - y_1|}_{\leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1|} + \underbrace{|x_2 - z_2 + z_2 - y_2|}_{\leq |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2|}$$

$$\leq |x_1 - z_1| + |x_2 - z_2| +$$

$$|z_1 - y_1| + |z_2 - y_2|$$

$$= d_1(x,z) + d_1(z,y) \quad \square$$

Ej 21

A debe ser el borde de 'algo',

por ejemplo, una elipse

$$A := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = R^2, a, b, R \in \mathbb{R}_{>0} \}$$

Ej 22

$A, B \subseteq X$ E. Topológico, $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$

Todo punto en $A^\circ \cup B^\circ$ esta en $(A \cup B)^\circ$

Para $x \in A^\circ$, A° es vecindad de cada uno de sus puntos, por lo que es vecindad de x y dado que

$A^\circ \subseteq A \subseteq A \cup B$ => todos los puntos de A° estan en $(A \cup B)^\circ$

$\Rightarrow A^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$

Similarmente para $B^\circ \in (A \cup B)^\circ$

$\therefore A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$.

Ej 23

Tomando $A=[a,b]$ y $B=[b,c]$

$\rightarrow A \cup B=[a,c]$ y $(A \cup B)^{\circ}=(a,c)$

Pero $A^{\circ}=(a,b)$ y $B^{\circ}=(b,c)$

$\Rightarrow A^{\circ} \cup B^{\circ}=(a,b) \cup (b,c)$

$x=b \rightarrow x \in (A \cup B)^{\circ}$

$x \notin A^{\circ} \cup B^{\circ}$

$\square$

Ej 24

Tomando la función. x^2

$$\lambda \geq \frac{d(f(x), f(y))}{d(x,y)}, \ x>y.$$

$$\geq \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{\cancel{(x-y)}(x+y)}{\cancel{x-y}} = x+y$$

$\lambda \rightarrow \infty$, no es Lipschitz continua.

Ej 25

$f(x)=\sqrt{x}$ $f:[2,\infty)\to\mathbb{R}.$

$$\lambda \geq \frac{d(f(x),f(y))}{d(x,y)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y} = \frac{\cancel{\sqrt{x}-\sqrt{y}}}{\cancel{(\sqrt{x}-\sqrt{y})}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

maximizar $x=y=2.$

$$\Rightarrow \mathrm{Lip}(f) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Escaneado con CamScanner

Clase 10

Ej 26

Sean $A=(0,1)$ y $B_n=(n,e^n)$

$$m_n=\frac{e^n-1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} m_n = \lim_{n\to\infty}\frac{e^n-1}{n}=\infty$$

no es Lipschitz continua.

Ej 27

$\dot{y}=3y^{2/3}$, $y(0)=0$

Trivial $y=0$.

Sol. con mathematica $y(t)=t^3$

Ej 28

"Para $f:\mathbb{R}\supseteq I\to\mathbb{R}$ dif. en I | $|f'(x)|\leq\lambda$
$\Rightarrow f$ es λ-Lipschitz."

$$\lambda\geq\left|\frac{d}{dy}[3y^{2/3}]\right|=\left|\frac{2}{y^{1/3}}\right|$$

Escaneado con CamScanner

Valuando $y \to 0$ por ambos lados

$$\therefore \lim_{y \to 0} \left| \frac{2}{y^{1/2}} \right| = \infty$$

$$Lip(f) = \infty$$

no es Lipschitz continua.

Ej: 29

$f:[0,a] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 3x^2 - 2$

$$\lambda \geq |f'(x)| = |6x|$$

$$Lip(f) = 6a$$

para que no sea contracción

$$Lip(f) \geq 1$$

$$\boxed{\Rightarrow a \geq 1/6}$$

Escaneado con CamScanner

Clase 11

Ej 30

x_1 y x_2 puntos fijos

$$f(x_1) = x_1 \qquad f(x_2) = x_2$$

$$\lambda \geq \frac{d(f(x_1), f(x_2))}{d(x_1, x_2)}$$

$$= \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|} = \frac{|x_1 - x_2|}{|x_1 - x_2|} = 1$$

$\lambda \geq 1$ lo que implica que no es una contracción.

Ej 31

Mostrar $f(x) = \ln(1+e^x)$ satisface

$$d(x,y) > d(f(x), f(y)).$$

$$d(f(x), f(y)) - \ln\left|\frac{1+e^y}{1+e^x}\right|$$

Escaneado con CamScanner

jugando con el álgebra. $y>x \rightarrow e^y > e^x$

$$\Rightarrow \frac{1}{e^y} < \frac{1}{e^x}$$

$$\Rightarrow e^{-y}+1 < e^{-x}+1$$

$$e^y(e^{-y}+1) < e^y e^{-x}(e^x+1)$$

$$e^{+y}+1 < e^{y-x}(1+e^x$$

$$\frac{1+e^y}{1+e^x} < e^{y-x}$$ aplicando logaritmo

$$\ln\left|\frac{1+e^y}{1+e^x}\right| < y-x.$$

$$\lambda \geq |f'(x)| = \left|\frac{e^x}{1+e^x}\right|$$ graficando tiene asíntota en 1

$\Rightarrow \lambda \geq 1$ por lo que no es contracción.

Ej 32

$f: [\frac{1}{2}, \infty) \to [1/2, \infty) \qquad f(x) = \sqrt{x}$

$$\lambda \geq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$\Rightarrow Lip(f) = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ por lo que hay solo un punto fijo. Y las órbitas convergen.

$f(x_0) = x_0$

$\sqrt{x_0} = x_0$

$\Rightarrow \underline{x_0 = 1}$

Ej 33

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| = \{|6|+|3|, |-1|+|2|\}$$

$$= \{9, +3\}$$

$$\boxed{\|A\|_1 = 9}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)} \quad \boxed{= \sqrt{45}}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \{|6|+|-1|, |3|+|2|\}$$

$$\boxed{\|A\|_\infty = 7}$$

Escaneado con CamScanner

Ej 34

$$u = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \|Au\|_2^2 = (6\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)^2 + (3\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta)^2$$

$$= 45\cos^2\theta + 5\operatorname{sen}^2\theta.$$

Encontrando puntos fijos. $\frac{\pi}{2} n = \theta$

$$0 = \frac{d}{d\theta} \|Au\|_2^2.$$

$$\max_{\|u\|_2 = 1} \|Au\|_2^2 = 45\cos^2(m\pi) + 5\operatorname{sen}^2(m\pi)$$

$$\boxed{= \sqrt{45}}$$

Ej 35

$$J = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\|J\|_2 \leq \|J\|_F = \sqrt{\left|\frac{2}{3}x\right|^2 + \left|-\frac{1}{2}\right|^2 + \left|\frac{1}{4}\right|^2 + \left|\frac{1}{3}\right|^2}$$

$$< \sqrt{\frac{4}{9}a^2 + \frac{61}{144}}$$

Necesitamos que $\|J\|_2 < 1$.

$$a = \frac{\sqrt{83}}{8}$$

$$Q: -\frac{\sqrt{83}}{8} < x < \frac{\sqrt{83}}{8}.$$