Diego Sarceño

201900109

SP

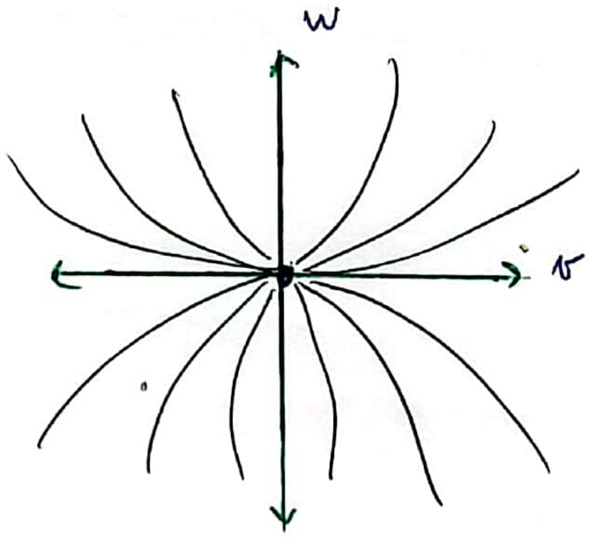
Parcial 2

1

1.1) Nodo Regular (Caso discreto y Continuo).

→ Caso Continuo.

Dada una matriz A diagonalizable con valores propios $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mu \neq \lambda$ pero el mismo signo y el sistema $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ se obtiene el diagrama de fase



Su estabilidad se determina

$sgn(\mu) > 0 \rightarrow$ Inestable

$sgn(\mu) < 0 \rightarrow$ Estable.

→ Caso Discreto:

Lo mismo que en el caso continuo pero para el sistema

$\vec{X}_{n+1} = A\vec{X}_n$, el diagrama es igual que el caso continuo.

Estabilidad:

- $|\lambda|, |\mu| > 1 \rightarrow$ repulsor
- $0 < |\lambda|, |\mu| < 1 \rightarrow$ Atractor.

1.2) Nodo Degenerado. (Caso Continuo y Discreto).

→ Caso Continuo.

Se obtiene cuando A del sistema $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ es no-diagonalizable y tiene un único valor propio $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Estabilidad:

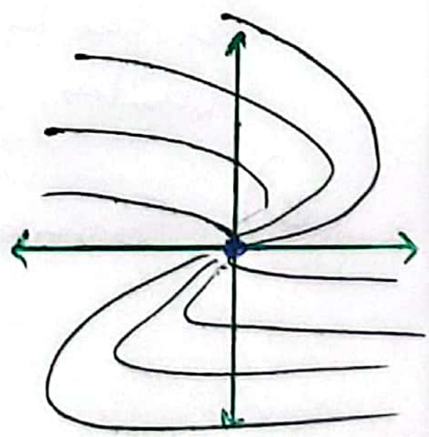
- $\mu > 0$ → inestable
- $\mu < 0$ → estable

→ Caso Discreto:

Igual que en el caso continuo pero para el sistema $\vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n$

Estabilidad:

- $|\lambda| > 1$ → repulsor
- $0 < |\lambda| < 1$ → atractor.

Diagrama: 

1.3) Pasos para graficar un centro. (Caso Continuo)

a) Verificar que los valores propios sean imaginarios puros conjugados, así se trata de un centro.

b) Calcular uno de los vectores propios complejos y obtener su parte real e imaginaria.

c) Trazar el paralelogramo $\bar{a}+\bar{b}$, $\bar{b}-\bar{a}$, $-\bar{a}-\bar{b}$, $\bar{a}-\bar{b}$ en el plano x,y.

(con $\bar{a} = Re(\vec{v})$, $\bar{b} = Im(\vec{v})$ y $\bar{v}$ vector propio).

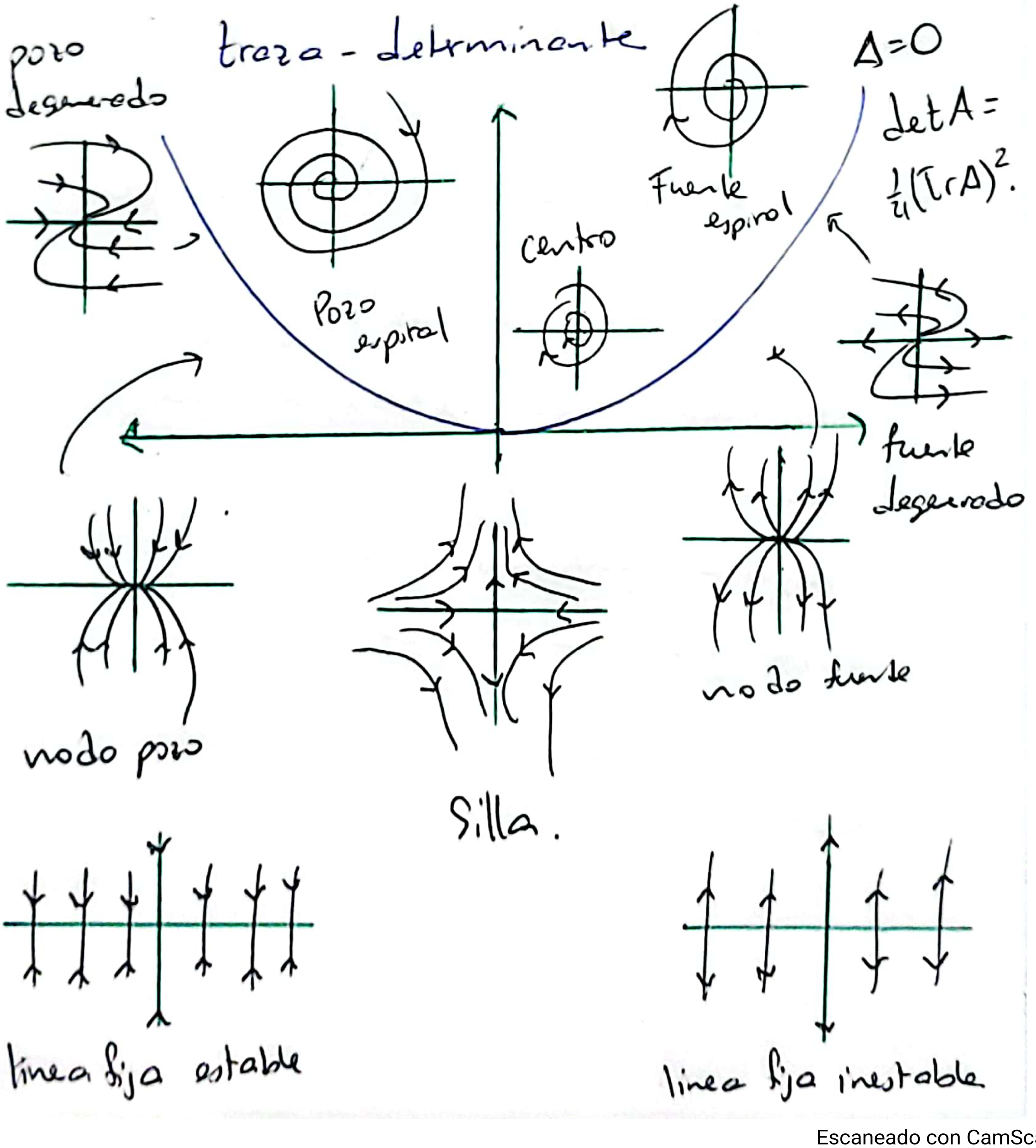
d) Dibujar el círculo/elipse que es tangente a los lados del paralelogramo. Y sus órbitas concéntricas.

e). Formar la matriz $P = (\bar{a}, \bar{b})$

f) Calcular la matriz $R = P^{-1}AP$ (Rotación) que indica la orientación del flujo en ab.

g) Calcular el determinante de P, que indica si se invierte el flujo en xy.

1.4) Diagrama de Poincaré en el plano traza - determinante



1.5) Linealizable Alrededor de $\vec{O}$ (Caso Continuo)

Un sistema no lineal $\dot{\vec{x}} = F(x)$ que tenga un punto crítico aislado en $\vec{x} = \vec{O}$ es linealizable si existe $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}^{n \times n}$ y un campo vectorial continuo $E: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $F(\vec{x}) = A\vec{x} + E(\vec{x})$ y $\lim_{\vec{x} \to \vec{0}} \frac{\|E(\vec{x})\|}{\|\vec{x}\|} = 0$.

1.6) Enuncie Poincaré-Lyapunov. (Caso Autónomo)

Si $\dot{x} = F(\vec{x})$ con $F \in \mathcal{C}^1$ y en su linealización $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, A tiene todos sus valores propios con parte real negativa, entonces el equilibrio es asintóticamente estable (atractor).

1.7) Enuncie Hartman-Grobman.

Si $\vec{x}^*$ es un equilibrio hiperbólico de un sistema $\dot{\vec{x}} = F(\vec{x})$, entonces el diagrama de fase del sistema es localmente homeomorfo en $\vec{x}^*$ al de su linealización.

1.8) Enuncie Poincaré-Bendixon.

Si A es una región cerrada y Acotada en $\mathbb{R}^2$, $\dot{\vec{x}} = F(\vec{x})$ es un sistema dinámico con $F: D \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial $\mathcal{C}^1$, definido en un dominio D que cumple: $A \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^2$, entonces:

Si $x \in D$ es tal que $\mathcal{O}_x^+$ eventualmente entra en A y no vuelve a salir y si $\mathcal{O}_x^+$ no incluye un equilibrio, entonces ya sea $\mathcal{O}_x$ es periódica o tiende a una órbita periódica $\omega(x)$.

1.9) Equidistribución de Weyl.

Para cada arco $I=[a,b] \subseteq S^1$ y cada punto inicial $x_0 \in S^1$, dada la rotación R_α en S^1 se cumple:

$\alpha \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \rho_I = b-a$. Asumimos que

$$0 \leq a < b \leq a+1.$$

1.10) Describa la Ley de Benford. para potencias de 2.

Un conjunto de datos satisface la ley de Benford si la probabilidad de que el primer dígito de un dato arbitrario del conjunto sea el dígito 'd' está dada por

$$P(d) = \log(d+1) - \log(d) = \log\left(1 + \frac{1}{d}\right).$$

$\boxed{2}$ Problemas

Clase 40, p11.

Hallar las infinitas matrices que sean logaritmos de la matriz de rotación

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Encontrando los valores propios de R_θ utilizando Eigensystem$[R_\theta]$.

$$\lambda_1 = \cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta) \qquad v_1 = \begin{pmatrix} +i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \cos(\theta) - i\operatorname{sen}(\theta) \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R_\theta = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\ln(R_\theta) = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Usando $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)$

$$\begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix}$$

$$\ln(R_\theta) = \frac{\theta}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix}}$$

Usando Mathematica $= 2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \theta\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

lógicamente esto es cierto para rotaciones completas $2\pi n$.

$$\boxed{\ln(R_\theta) = (\theta + 2\pi n)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$