

Universidad de San Carlos de Guatemala Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas Análisis de Variable Compleja 1 Diego Sarceño 201900109 13 de abril de 2021



# Tarea 3



#### Problema 1

#### Problema 2

Se toma una integral auxiliar para llegar a las integrales propuestas

$$\int_{|z|=1} e^{-iz^n} \, \mathrm{d}z.$$

Como la integral esta sobre el circulo unitario, parametrizando la curva

$$z = \cos \theta + i \sin \theta,$$

de esto, sustituyendo la integral

$$\int_0^{2\pi} e^{\sin n\theta} [\cos (-\cos n\theta) + i \sin (-\cos n\theta)] [-\sin \theta + i \cos \theta] dz.$$

 $\mathcal{S}$ 

Separando parte real y parte imaginaria, y utilizando identidades trigonométricas,

$$-\int_{0}^{2\pi} e^{\sin\theta} [\sin\theta\cos(-\cos n\theta) + \cos\theta\sin(-\cos n\theta)] d\theta + i\int_{0}^{2\pi} e^{\sin\theta} [\cos\theta\cos(-\cos n\theta) - \sin\theta\sin(-\cos n\theta)] d\theta$$

$$\int_{0}^{2\pi} e^{\sin\theta} [\sin\theta\cos(-\cos n\theta) + \cos\theta\sin(-\cos n\theta)] d\theta + i\int_{0}^{2\pi} e^{\sin\theta} [\cos\theta\cos(-\cos n\theta) - \sin\theta\sin(-\cos n\theta)] d\theta$$

$$-\int_0^{2\pi} e^{\sin\theta} \sin(\theta - \cos n\theta) d\theta + i \int_0^{2\pi} e^{\sin\theta} \cos(\theta - \cos n\theta) d\theta.$$

Además, como la función  $e^{-iz^n}$  es claro que es holomorfa en el circulo unitario; entonces, por Cauchy, la integral es cero

$$\int_{|z|=1} e^{-iz^n} \, \mathrm{d}z = 0.$$

Por lo que, la parte real y parte imaginaria de la integral deben de ser cero, lo que demuestra que las integrales propuestas son cero.

#### Problema 3

Definiendo la función



$$g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0},$$

derivando respecto a z

$$g'(z) = \frac{f'(z)}{z - z_o} - \frac{f(z)}{(z - z_o)^2}.$$

Integrando la función propuesta, como  $z_o \notin \gamma$  ni a su interior, entonces g'(z) es holomorfa en  $\gamma$ :

 $\mathcal{S}$ 

$$\oint_{\gamma} g'(z) \, \mathrm{d}z = 0.$$

Por lo que

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{z - z_o} \, \mathrm{d}z = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_o)^2} \, \mathrm{d}z.$$

#### Problema 4

Dada la parametrización  $\gamma(t) = re^{it}$ , para la integral

$$\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z} \, \mathrm{d}z \,,$$

sustituyendo en la integral,

$$\int_0 \pi e^{ir(\cos t + i\sin t)} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} \,\mathrm{d}t \,.$$

|S|

Simplificando

$$\int_0^{\infty} \pi e^{-r\sin t} (i\cos(r\cos t) - \sin(r\cos t)) dt,$$

esto es análogo a las soluciones de estado estable de ecuaciones diferenciales, en este caso no hay parte estable, solo transitoria, de modo que, al realizar el límite

$$\lim_{r\to\infty} \int_0^\pi e^{-r\sin t} (i\cos\left(r\cos t\right) - \sin\left(r\cos t\right)) \,\mathrm{d}t = 0,$$

obviamente, la analogía es para la variable r.

S

## Problema 5

 $\mathcal{S}$ 

## Problema 6

Problema 7

S

a) En  $\gamma$  el número de raíces del polinomio para la función dada, son singularidades de dicha función, puesto que cada polinomio (por teorema fundamental del álgebra) se puede represetar de la siguiente forma

$$f(z) = (z - z_1)^{d_1} \cdots (z - z_n)^{d_n},$$

donde  $\sum d_i = m$  con  $n \leq m$ ,  $d_i$  la multiplicidad de cada raíz y m el grado de f. Suponiendo que de las n raíces p de ellas están dentro de  $\gamma$ ,  $p \leq n$ . Se realiza la derivada del polinomio

$$f'(z) = d_1(z - z_1)^{d_1 - 1} \cdots (z - z_n)^{d_n} + \cdots + (z - z_1)^{d_1} \cdots d_n(z - z_n)^{d_n - 1}$$

con esto, se dividen ambas funciones y se separan en n fracciones

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d_1(z-z_1)^{d_1-1}\cdots(z-z_n)^{d_n}+\cdots+(z-z_1)^{d_1}\cdots d_n(z-z_n)^{d_n-1}}{(z-z_1)^{d_1}\cdots(z-z_n)^{d_n}}$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d_1}{z - z_1} + \dots + \frac{d_n}{z - z_n}.$$

Al momento de integrar, todas aquellas raíces que no esten dentro de  $\gamma$ , por cauchy, la integral será cero, para las p raíces dentro, se utiliza la primera fórmula de integración de cauchy, se tiene

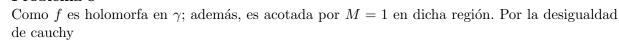
$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = d_1(2\pi i) + \dots + d_p(2\pi i)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^{p} d_i,$$

lo que es el número de raíces dentro de  $\gamma$  contando sus multiplicidades.

b)

### Problema 8



# 

# $\mathcal{S}$ Problema 10