



## ANÁLISIS DE VARIABLE COMPLEJA 1

### Problema 1

Tomando a  $z = a + bi$ , se tiene:

$$\frac{a + bi}{[(a + 1)^2 + b^2]} = \frac{a + bi}{(a + 1)^2 - b^2 + 2bi(a + 1)} \left( \frac{(a + 1)^2 - b^2 - 2bi(a + 1)}{(a + 1)^2 - b^2 - 2bi(a + 1)} \right)$$

Tomando únicamente la parte imaginaria, se tiene:

S 
$$b[(a + 1)^2 - b^2] - 2ab(a + 1) = -2a^2b - 2ab - b^3 + 2ab + b = -b(a^2 + b^2 - 1) = 0$$

Lo que demuestra:

$$\operatorname{Im} \left\{ \frac{z}{(z + 1)^2} \right\} = 0$$

□

Con el término  $a^2 + b^2 - 1$  de la última igualdad, es claro que solo los puntos del círculo unitario y los reales cumplen la relación propuesta.

### Problema 2

Tomando la propiedad  $z\bar{z} = |z|^2$ , se tiene:

$$\left| \frac{z + \alpha}{1 + \bar{\alpha}z} \right|^2 = \left( \frac{z + \alpha}{1 + \bar{\alpha}z} \right) \left( \frac{\bar{z} + \bar{\alpha}}{1 + \alpha\bar{z}} \right)$$

Desarrollando se tiene:

S 
$$= \frac{|z|^2 + |\alpha|^2 + \bar{z}\alpha + \bar{\bar{z}}\bar{\alpha}}{1 + \bar{\alpha}z + \bar{\alpha}\bar{z} + |\bar{\alpha}z|} = \frac{|z|^2 + |\alpha|^2 + 2\operatorname{Re}\{\bar{z}\alpha\}}{1 + 2\operatorname{Re}\{\bar{\alpha}z\} + |\bar{\alpha}z|^2}$$

Por las condiciones del problema se tiene que  $|z|^2|\alpha|^2 < 2$  y  $|\alpha z|^2 < 1$ , con lo que:

$$< \frac{2 + 2\operatorname{Re}\{\bar{z}\alpha\}}{2 + 2\operatorname{Re}\{\bar{\alpha}z\}} = 1$$

Asumiendo que existe caso de igualdad, se toma:

$$|z + \alpha| = |1 + \bar{\alpha}z|$$

Siguiendo la idea del inicio:

$$(z + \alpha)(\bar{z} + \bar{\alpha}) = (1 + \bar{\alpha}z)(1 + \alpha\bar{z})$$

Desarrollando se llega a:

$$|z|^2 + |\alpha|^2 = 1 + |z|^2|\alpha|^2$$

De modo que:

$$(1 - |z|^2)(1 - |\alpha|^2) = 0$$

Como  $|\alpha| < 1$ , entonces es necesario que  $|z| = 1$ . Con esto se concluye que:

$$\left| \frac{z + \alpha}{1 + \bar{\alpha}z} \right| \leq 1$$

Con el caso de igualdad cuando  $z$  esta en el circulo unitario. □

### Problema 3

Es claro que el módulo de  $z$  es 1, con lo que, la forma polar esta dada por:

$$z = \text{cis } \pi/4$$

Sabiendo el Teorema de Moivre, se tiene que:

$$\text{cis } 1^2 \pi/4 + \text{cis } 2^2 \pi/4 + \cdots + \text{cis } 12^2 \pi/4$$

Con esto, para los impares se tiene que  $1 + i/\sqrt{2}$ . Multiplos de 4, el resultado es 1 y pares no multiplos de 4 se tiene  $-1$ . De modo que:

$$z^{1^2} + z^{2^2} + \cdots + z^{12^2} = 6 \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

Para el lado derecho, se tiene que el inverso de  $(1 + i/\sqrt{2})^{-1} = 1 - i/\sqrt{2}$ , con esto el lado derecho de la expresión:

$$\frac{1}{z^{1^2}} + \frac{1}{z^{2^2}} + \cdots + \frac{1}{z^{12^2}} = 6 \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

Multiplicando ambos resultados se tiene que: (usando  $\bar{z}z = |z|^2$ )

$$\left( z^{1^2} + z^{2^2} + \cdots + z^{12^2} \right) \left( \frac{1}{z^{1^2}} + \frac{1}{z^{2^2}} + \cdots + \frac{1}{z^{12^2}} \right) = \boxed{36}$$

### Problema 4

### Problema 5

Sabiendo la relación de las medianas y el gravicentro, entonces tomando los segmentos de recta, simplemente se realiza dicho procedimiento. Tomando cualquier lado (en este caso se tomará  $ac$ )

se tiene que el punto medio entre dichos vértices es:

$$\frac{a+c}{2}$$

Ahora, para el segmento entre este nuevo punto y el vértice restante es:

S

$$b+t\left(\frac{a+c}{2}-b\right)$$

Por la relación se tiene que  $t = 2/3$ , con esto y desarrollando se tiene:

$$G = \frac{a+b+c}{3}$$

### Problema 6

Por inducción, el caso base se cumple claramente. La hipótesis inductiva:  $n = k$

$$\cos \theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos (2k-1)\theta = \frac{\sin 2k\theta}{2 \sin \theta}$$

Paso inductivo  $k+1$ :

$$\cos \theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos (2k+1)\theta = \frac{\sin 2k\theta}{2 \sin \theta} + \cos (2k+1)\theta$$

Tomando el lado derecho de la ecuación, se tiene que:

S

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2 \sin \theta} \left[ \sin 2k\theta + \underbrace{2 \cos \theta \sin \theta}_{\sin 2\theta} \cos 2k\theta - 2 \sin^2 \theta \sin 2k\theta \right] \\ &= \frac{1}{2 \sin \theta} [\sin 2k\theta \cos 2\theta + \sin 2\theta \cos 2k\theta] \end{aligned}$$

Con lo que, utilizando identidades trigonométricas, se tiene que:

$$\cos \theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos (2k+1)\theta = \frac{\sin 2(k+1)\theta}{2 \sin \theta}$$

□

### Problema 7

Tomando a dos complejos  $z_1$  y  $z_2$ , con parte real y compleja pertenecientes a los naturales; lo que implica que,  $|z_1|^2 = \text{Re}\{z_1\}^2 + \text{Im}\{z_1\}^2$  y  $|z_2|^2 = \text{Re}\{z_2\}^2 + \text{Im}\{z_2\}^2$ . Por lo que  $|z_1|^2, |z_2|^2 \in \mathbb{C}$ , realizando el producto de los dos módulos  $|z_1|^2 |z_2|^2 = z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = |z_1 z_2|^2$ . Ahora, verificando que las componentes sean enteros:

S

$$|z_1 z_2|^2 = \left( \underbrace{\text{Re}\{z_1\} \text{Re}\{z_2\} - \text{Im}\{z_1\} \text{Im}\{z_2\}}_{\in \mathbb{Z}} \right)^2 + \left( \underbrace{\text{Re}\{z_1\} \text{Im}\{z_2\} + \text{Re}\{z_2\} \text{Im}\{z_1\}}_{\in \mathbb{Z}} \right)^2$$

S

Por lo que  $|z_1 z_2|^2 \in C$ .

□

### Problema 8

Como se tiene que  $\xi = \exp\{\frac{2\pi i}{n}\}$ , de modo que el polinomio se puede representar de dos formas distintas:

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = 1 + z + \dots + z^{n-1}$$

$$(z - 1) \prod_{k=1}^{n-1} (z - \xi^k) = z^n - 1$$

Sustituyendo la segunda representación en la primera, con lo que se tiene:

S

$$\prod_{k=1}^{n-1} (z - \xi^k) = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}$$

La productoria es representa la serie de multiplicandos dada en el problema, por lo que, sustituyendo  $z = 1$  en la ecuación dada, con esto se tiene que el resultado es:

$$\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \xi^k) = n$$

El hecho de hacer  $z \rightarrow 1$  no genera problema, es sencillo verlo aplicando limites.

### Problema 9

Como  $\lambda_i \geq 0$  y  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ , esto implica que  $\lambda_i \leq 1$ . Por la desigualdad triangular:

$$\left| \sum_i \lambda_i a_i \right| \leq \sum_i |\lambda_i a_i|$$

Como cada  $|a_i|$  y  $\lambda_i$  son menores a 1, entonces su producto también es menor a 1, además de ser menor a ambos factores, con esto es claro que:

S

$$\sum_i |\lambda_i a_i| < 1$$

Por ende:

$$\left| \sum_i \lambda_i a_i \right| < 1$$

□

### Problema 10

Expresando los complejos en forma polar y, por teorema de DeMoivre, se tiene:

S

$$2^m \left[ \cos\left(\frac{m\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{m\pi}{3}\right) \right] = 2^{n/2} \left[ \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right]$$

Con esto se tiene que:

$$\cos \left[ \pi \left( \frac{m}{3} + \frac{n}{4} \right) \right] + i \sin \left[ \pi \left( \frac{m}{3} + \frac{n}{4} \right) \right] = 2^{n/2-m}$$

Con esto es necesario que la parte imaginaria sea cero, por ende la suma del ángulo debe de ser par. Además,  $m$  debe ser multiplo de 3, y  $n$  multiplo de 4, también debe de cumplir que  $n$  es el doble de  $m$ . Matemáticamente hablando:

$$\left( \frac{m}{3} + \frac{n}{4} \right) \equiv 0 \pmod{2}$$

Y

$$\frac{n}{2} = m$$

Con esto, se tiene que:

$$\frac{5}{6}m \equiv 0 \pmod{2}$$

En otra forma  $\frac{5}{6}m = 2q$ , con lo que  $m = \frac{12}{5}q$ . Para el mínimo de  $q$  para que  $m$  sea entero, es decir  $q = 5$ , entonces  $m = 12$  y  $n = 24$ . Al valuar se comprueba que la igualdad se cumple.

### Problema 11

Reescribiendo la igualdad como una productoria y tomando el seno como función compleja:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} &= \prod_{k=1}^{n-1} \left( \frac{-i}{2} \right) \left( e^{\frac{k\pi i}{n}} - e^{-\frac{k\pi i}{n}} \right) \\ &= \left( \frac{i}{2} \right)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} e^{-\frac{k\pi i}{n}} \left( 1 - e^{\frac{2\pi k i}{n}} \right) \\ &= \left( \frac{i}{2} \right)^{n-1} \exp \left\{ \frac{-\pi i}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k \right\} \underbrace{\prod_{k=1}^{n-1} \left( 1 - e^{\frac{2\pi k i}{n}} \right)}_{\frac{z^n - 1}{z - 1}} \end{aligned}$$

Aplicando L'Hopital a la fracción de polinomios y valuando en 1; además, aplicando la formula de Gauss a la sumatoria dada:

$$= n \left( \frac{i}{2} \right)^{n-1} \exp \left\{ -\frac{\pi i(n-1)}{2} \right\}$$

Separando la exponencial y sustituyendo por la forma polar del complejo se tiene:

$$= n \left( \frac{i}{2} \right)^{n-1} [i(-i)^n] = \frac{n}{2^{n-1}} i^{2n} (-1)^n = \frac{n}{2^{n-1}} (i^4)^n = \frac{n}{2^{n-1}}$$

Lo que demuestra la igualdad. □

**Problema 12**

Para las trayectorias dadas se tienen las siguientes series: (representadas como un número complejo)

$$z = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right) + \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots\right)i$$

Representandolo en forma de sumatoria

$$z = \left[1 - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right] + i \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\right]$$

De las cuales, la parte real es la serie de Taylor (alrededor de cero) de la función  $\ln(1+x)$  valuada en  $x=1$ ; similarmente, la parte imaginaria es la serie de Taylor alrededor de cero asociada a  $\arctan x$  valuada en  $x=1$ , de modo que las coordenadas del punto al cual convergen las dos series es:

$$1 - \left(\frac{1}{2} \ln 2, \frac{\pi}{4}\right)$$

**Problema 13**

Sabiendo que  $|z| = \sqrt{2}$ , de la expresión dada, se desarrolla la diferencia de cuadrados:

$$|(z^2 - 1)(z - 1)| = |(z - 1)^2(z + 1)|$$

Como el módulo cuadrado es igual al producto entre el complejo y el conjugado:

$$|(z + 1)(z - 1)^2|^2 = (z + 1)(\bar{z} + 1)(z - 1)^2(\bar{z} - 1)^2$$

Desarrollando y sustituyendo el módulo de  $z$ , así como la identidad  $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}\{z\}$ , se tiene:

$$\begin{aligned} &= [9 - 4 \operatorname{Re}\{z\}^2][3 - 2 \operatorname{Re}\{z\}] \\ &= 27 - 18 \operatorname{Re}\{z\} - 12 \operatorname{Re}\{z\}^2 + 8 \operatorname{Re}\{z\}^3 \end{aligned}$$

Para encontrar el máximo, el máximo de esta ecuación, también es el máximo para la expresión dada, entonces,  $x = \operatorname{Re}\{z\}$ , se tiene:

$$f(x) = 27 - 18x - 12x^2 + 8x^3$$

Como es una función de variable real, el criterio de la primera y segunda derivada es válido, por ende:

$$f'(x) = 4x^2 - 4x - 3 = 0$$

De esto, las dos soluciones  $x_1 = 3/2$  y  $x_2 = -1/2$ . Evaluándolo en la segunda derivada, se tiene que el máximo de la función está en  $x_2$ . Por lo que, valuando  $f(x_2)$ , se tiene:  $f(-1/2) = 32$ , con lo que:

$$|(z^2 - 1)(z - 1)| = \sqrt{32}$$

**Problema 14**

Incisos:

- a) Sea
- $z \in \mathbb{C}$
- con
- $|\alpha| = |\beta| = 1$
- ,
- $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$
- .

 $(\Rightarrow)$  Sabiendo que  $z = \alpha + \beta$ , con esto  $|z| = |\alpha + \beta|$ . Utilizando la desigualdad triangular:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| = 2$$

Con esto se tiene que:

$$|z| \leq 2$$

$(\Leftarrow)$  Es claro que existen  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  tales que  $|\alpha| = |\beta| = 1$ , puesto que son números complejos pertenecientes al círculo unitario. Además, por la desigualdad triangular se tiene que  $|\alpha| + |\beta| \geq |\alpha + \beta|$ . Con esto  $\alpha + \beta$  es un vector dentro de la circunferencia de radio 2. Como  $|z| \leq 2$ , es un vector dentro del círculo de radio 2. Como ambos son arbitrarios, sin pérdida de generalidad,  $z = \alpha + \beta$   $\square$

- b)
- $(\Rightarrow)$
- Sabiendo que existen
- $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$
- con
- $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$
- tales que
- $z = \alpha + \beta + \gamma$
- . Tomando el módulo de
- $z$
- se tiene:

$$|z| = |\alpha + \beta + \gamma|$$

Por desigualdad triangular se tiene:

$$|z| \leq |\alpha| + |\beta + \gamma|$$

Por la desigualdad triangular  $|\beta + \gamma| \leq |\beta| + |\gamma|$ , sumando  $|\alpha|$  en ambos lados:

$$|z| \leq |\alpha| + |\beta| + |\gamma|$$

Sumando los 3 módulos:

$$\boxed{|z| \leq 3}$$

 $(\Leftarrow)$  Tomando  $|z| \leq 3$  se tienen dos casos:

**Igualdad:** Tomando tres complejos del círculo unitario con el mismo argumento principal (es decir, tres complejos iguales) la suma de ellos es igual a otro complejo, al que se llamará  $z$  cuyo módulo es 3, i.e.  $z$  es múltiplo de  $\alpha$  ( $\beta$  o  $\gamma$ ). Concluyendo el caso de igualdad.

**Desigualdad estricta:** Es trivial, puesto que tomando tres complejos con módulo 1, cuyos argumentos sean distintos, es decir, no sean iguales, se tiene que la suma de dichos tres tiene un módulo menor a la suma de los módulos. Concluyendo la prueba.  $\square$

**Problema 15**

Separando la expresión de la izquierda por pares, se tiene que:

$$\underbrace{\left( \frac{\xi}{1+\xi^2} + \frac{\xi^2}{1+\xi^4} \right)}_1 + \underbrace{\left( \frac{\xi^3}{1+\xi} + \frac{\xi^4}{1+\xi^3} \right)}_2$$

Tomando los parentesis, tomando y desarrollando la suma de fracciones, con esto se tiene que, para 1: (Sabiedo  $\xi^5 = 1$ )

$$\left( \frac{\xi}{1 + \xi^2} + \frac{\xi^2}{1 + \xi^4} \right) = \frac{1 + \xi + \xi^2 + \xi^4}{(1 + \xi^2)(1 + \xi^4)} = \frac{1 + \xi^2 + \xi^4 + \xi^6}{(1 + \xi^2)(1 + \xi^4)} = 1$$

Siguiendo con la parte 2:

S

$$\left( \frac{\xi^3}{1 + \xi} + \frac{\xi^4}{1 + \xi^3} \right) = \frac{\xi^3 + \xi^6 + \xi^4 + \xi^5}{(1 + \xi)(1 + \xi^3)} = \frac{1 + \xi + \xi^3 + \xi^4}{(1 + \xi)(1 + \xi^3)} = 1$$

Por lo que, sumando ambas partes se tiene que:

$$\frac{\xi}{1 + \xi^2} + \frac{\xi^2}{1 + \xi^4} + \frac{\xi^3}{1 + \xi} + \frac{\xi^4}{1 + \xi^3} = 2$$

□

### Problema 16

( $\Rightarrow$ ) Tomando la forma polar del complejo se tiene  $z = \cos \theta + i \sin \theta$ . Con esto, y por el teorema de DeMoivre es claro que:

$$\sin \theta = -\sin n\theta$$

$$\cos \theta + \cos n\theta = -1$$

Claramente, la identidad del seno, y por el dominio de los argumentos, se tiene que el ángulo  $\theta$  debe cumplir  $\theta = 2k\pi - n\theta$ . Sustituyendo en la identidad del coseno:  $\cos 2k\pi - \theta = \cos 2k\pi \cos \theta + \sin 2k\pi \sin \theta$ , por lo que  $2 \cos \theta = -1$ , por lo que  $\theta = 2\pi/3$  y  $n\theta = 4\pi/3$ . De esto es claro que, debido a que para que  $2\pi/3$  es tres veces menor que  $2\pi$ , y el único ángulo que cumple que la suma de los cosenos sea  $-1$ , es el  $4\pi/3$ , por lo que el  $n$  debe cumplir que  $n \equiv 2 \pmod{3}$ , esto es para que el ángulo sea  $240$  o un equivalente.

S

( $\Leftarrow$ ) Sabiendo que  $n \equiv 2 \pmod{3}$ , implica que  $n = 3q + 2$  para  $q = 0, 1, \dots$ . Además, tomando  $x^3 - 1 = 0$  con  $|x| \neq 1$ . Por lo que  $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$ , entonces  $x^2 + x + 1 = 0$ . Teniendo  $p(z) = z^{3q+2} + z + 1$ . Despejando  $(x + 1)$  del polinomio igualado a cero, y valuando  $x$  en  $p(z)$ , se tiene  $p(x) = x^2(x^{3q} - 1) = 0$ ; lo que claramente implica que existe un número complejo con  $|x| = 1$ , tal que es solución del polinomio  $z^{3q+2} + z + 1$ . □

### Problema 17

Nombrando a  $|z + 1| = \alpha$  y  $|z - 1| = \beta$ , como se trata de módulos, ambos son reales. Además, nombramos a  $z = a + bi$ . Con esto, la igualdad se reescribe como:

S

$$\sqrt{(a - \alpha)^2 + b^2} = \sqrt{(a + \beta)^2 + b^2}$$

Con esto es claro que:

$$(a - \alpha)^2 = (a + \beta)^2$$



Desarrollando ambos lados de la ecuación se llega a lo siguiente:

$$(\alpha + \beta)[(\alpha - \beta) - 2a] = 0$$

Con esto se tienen dos casos:

$\alpha + \beta = 0$  Como  $\alpha, \beta \geq 0$ , entonces  $\alpha = -\beta = 0$ . Dado esto, se tiene que:

$$(a \pm 1)^2 + b^2 = 0$$

Con esto, se concluye que  $\boxed{\operatorname{Im}\{z\} = 0}$  y  $\boxed{\operatorname{Re}\{z\} = \pm 1}$ .

$(\alpha - \beta) = 2a$  Considerando  $\operatorname{Re}\{z\} = 0$ , la parte imaginaria queda libre, por lo que, la otra solución a la ecuación propuesta es:  $\boxed{\operatorname{Re}\{z\} = 0}$  y por lo tanto  $\boxed{\operatorname{Im}\{z\} = \text{libre}}$ . Para esta misma condición, si  $\boxed{\operatorname{Im}\{z\} = 0}$ , se tiene la siguiente igualdad:

$$|a + 1| - |a - 1| = 2|a|$$

Por propiedades de los números reales, se tiene que:

$$2|a| = ||a + 1| - |a - 1|| \leq |a + 1 - a + 1| = 2$$

Lo que implica que  $|a| \leq 1$ , por lo que son los valores aceptados de la parte real son  $\boxed{-1 \leq \operatorname{Re}\{z\} \leq 1}$ .

□

S

## Problema 18