

PROBLEMA DE LOS 3 CUERPOS, PUNTOS DE LAGRANGE

Diego Sarceño *

Guatemala, 10 de abril de 2021

Resumen

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

1. Introducción

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

$$\int_a^b f(x)dx,$$

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

*Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de San Carlos de Guatemala.

2. Puntos de Lagrange

2.1. Problema de los Tres Cuerpos

El problema de los tres cuerpos no es soluble analíticamente; sin embargo, realizando ciertas restricciones al problema llega a poderse resolver. Consideraciones a tomar:

1. Dos cuerpos masivos en orbitas circulares alrededor de su centro de masa.
2. El tercer objeto de masa m tiene la condición: $m \ll M_1, M_2$, donde M_1 y M_2 son las masas de los dos objetos anteriormente mencionados.

2.1.1. Problema de los dos Cuerpos

Partiendo del problema conocido de los dos cuerpos, el cual ya es conocido, se toma el sistema respecto de un punto de referencia O

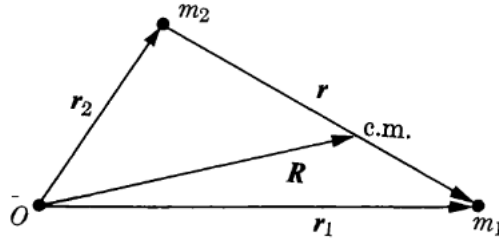


Figura 1: Posición de ambos cuerpos en el espacio, representando su posición relativa y respecto a un sistema de coordenadas O . El vector \mathbf{R} representa la posición del centro de masa relativa al sistema O . Imagen extraída de [1], cap 4.

Además, la ecuación de movimiento

$$\mu \ddot{\mathbf{r}}_{21} = \mathbf{F}, \quad \mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2},$$

al término μ se le conoce como masa reducida¹. Para la fuerza gravitacional y una trayectoria circular, la expresión para frecuencia angular del sistema, se tiene

$$\omega^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{a^3}.$$

2.1.2. Sistema de Referencia Estrellado

Para simplificar el análisis del problema, se introduce un sistema en movimiento, en concreto, en rotación. Esto es para eliminar el movimiento de los cuerpos más masivos, a este nuevo sistema le llamaremos O^* . Este nuevo sistema tendrá su origen en el centro de masa y, a la distancia entre los cuerpos se le llamará a . De modo que las posiciones en O^* están dadas solo en el eje x^* como

$$x_1 = \frac{M_2}{M_1 + M_2}, \quad x_2 = -\frac{M_1}{M_1 + M_2};$$

¹De [2] capítulo 8, sección 2

además, se fija $\vec{\omega} = \omega \hat{\mathbf{z}}$ y la masa m solo se mueve en el plano x^*y^* . Con todo esto, la ecuación de movimiento en el sistema O^*

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = F_1 + F_2 - m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}) - 2m\omega \times \frac{d^* \mathbf{r}}{dt}.$$

En la cual las dos fuerzas representadas son las fuerzas de cada una de las masas sobre la masa m orbitando. Expresandolas en componentes

$$F_1 = \frac{GM_1 m}{((x - x_1)^2 + y^2)^{3/2}} (x - x_1, y), \quad F_2 = \frac{GM_2 m}{((x - x_2)^2 + y^2)^{3/2}} (x - x_2, y).$$

Analizando el resto de términos, se tiene que la fuerza de coriolis es perpendicular a la velocidad, por lo que no tiene un potencial asociado. Para el término de la fuerza centrífuga, es sencillo corroborar que es una fuerza central², lo que implica que tiene una energía potencial asociada. Desarrollando el término de la fuerza centrífuga y encontrando el potencial

$$\begin{aligned} -m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}) &= m\omega^2 (x\hat{\mathbf{x}}^* + y\hat{\mathbf{y}}^*) \\ V_c &= -\frac{1}{2}m\omega^2 (x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Con el análisis anterior, se concluye que la energía potencial total del sistema es

$$V = -\frac{GM_1 m}{((x - x_1)^2 + y^2)^{1/2}} - \frac{GM_2 m}{((x - x_2)^2 + y^2)^{1/2}} - \frac{1}{2}m\omega^2 (x^2 + y^2).$$

Por simplicidad no se tomara la energía potencial, sino que el potencial gravitacional del sistema, por simplicidad al momento de desarrollar los calculos

$$\mathcal{G} = -\frac{GM_1}{((x - x_1)^2 + y^2)^{1/2}} - \frac{GM_2}{((x - x_2)^2 + y^2)^{1/2}} - \frac{1}{2}\omega^2 (x^2 + y^2).$$

2.2. Puntos de Lagrange

Para un sistema de dos cuerpos, los puntos de lagrange son las posiciones en donde un objeto/satélite podría estar en reposo respecto al sistema orbital. Estos puntos representan las posiciones en donde la atracción del sistema presenta una rotación sincrónica con la menor masa del sistema. Matemáticamente hablando, son las soluciones de equilibrio al problema de los 3 cuerpos restringido. Para cualquier sistema de 3 cuerpos existen 5 de estos puntos de lagrange, representados por L_1, L_2, L_3, L_4 y L_5 .

3. Resultados

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

²Fuerza radial conservativa.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Figura 2: Error relativo de la aproximación en función del número de trapecios. Fuente: elaboración propia.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

4. Conclusiones

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Figura 3: Área bajo la curva obtenido mediante las dos implementaciones, secuencial y paralelo en función del número de trapecios. En el inserto está la diferencia del valor obtenido en la implementación secuencial menos el valor obtenido en la implementación paralela. Fuente: elaboración propia.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Agradecimientos

Se agradece a la ECFM-USAC por el uso del clúster Euclides donde se realizaron las pruebas de rendimiento reportadas en este trabajo.

Referencias

- [1] R. Symon, *Mechanics* 3a. Ed. Addison–Wesley Publishing Company, 1971
- [2] R. Taylor, *Classical Mechanics*, Edwards Brothers, Inc. 2005.