Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Análisis de Variable Compleja 1
Diego Sarceño 201900109
18 de marzo de 2021

# Tarea 2

**Problema 1**

**Problema 2**

**Problema 3**
Para la función $f(z) = |z|$, si la función es entera, implica directamente que es holomorfa. Por contradicción se asumirá la función holomorfa; entonces, la parte real e imaginaria son armónicas, de modo que:

$$\nabla^2 f = 0$$

Aplicando el laplaciano:

$$\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$$

Lo que contradice el hecho de que sea holomorfa, puesto que la igualdad no se cumple en ningún $z \in \mathbb{C}$, por lo tanto $f$ no es entera. $\square$

**Problema 4**
($\Rightarrow$) Si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, entonces su parte real e imaginaria es cero. Desarrollando las derivadas parciales de la definición:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = u_x + iv_x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = u_y + iv_y.$$

Sustituyendo se tiene

$$= \frac{1}{2}[(u_x - v_y) + (u_y - v_y)i].$$

Como la parte real e imaginaria son cero, entonces,

$$u_x = v_y$$

$$u_y = -v_x$$

Las cuales son las ecuaciones de Cauchy$-$Riemann.
($\Leftarrow$)

$\mathcal{S}$

**Problema 5**

**Problema 6**
Incisos:

a)

b) Tomando la forma exponencial del seno, se tiene que:

$$\sin\sqrt{z} = \frac{e^{i\sqrt{z}} - e^{-i\sqrt{z}}}{2i}$$

Utilizando el teorema de DeMoivre se puede descomponer $\sqrt{z} = |z|^{1/2}(\cos\theta/2 + i\sin\theta/2)$. Por simplicidad se tomará a $a = |z|^{1/2}$.

$$= \frac{e^{ai\cos\theta/2}\,e^{-a\sin\theta/2} - e^{-ai\cos\theta/2}\,e^{a\sin\theta/2}}{2i}$$

Sumando y restando el primer término pero con la segunda exponencial en signo positivo; de modo que:

$$= \frac{1}{i}e^{ai\cos\theta/2}\underbrace{\left[\frac{e^{a\sin\theta/2} + e^{-a\sin\theta/2}}{2}\right]}_{\cosh(a\sin\theta/2)} - \frac{e^{-ai\cos\theta/2}\,e^{a\sin\theta/2}}{2i} - \frac{e^{ai\cos\theta/2}\,e^{a\sin\theta/2}}{2i}$$

$\mathcal{S}$

Volviendo a sumar y restar el mismo término se tiene que:

$$= \cosh(a\sin\theta/2)\sin(a\cos\theta/2) - i\left(\underbrace{\frac{e^{ai\cos\theta/2} + e^{-ai\cos\theta/2}}{2}}_{\cos(a\cos\theta/2)}\right)\cosh(a\sin\theta/2)$$

$$+ie^{a\sin\theta/2}\left[\underbrace{\frac{e^{ai\cos\theta/2} + e^{-ai\cos\theta/2}}{2}}_{\cos(a\cos\theta/2)}\right]$$

Reduciendo y simplificando:

$$= \cosh(a\sin\theta/2)\sin(a\cos\theta/2) + i\cos(a\cos\theta/2)\left(\underbrace{\frac{-e^{a\sin\theta/2} - e^{-a\sin\theta/2}}{2} + e^{a\sin\theta/2}}_{\sinh(a\sin\theta/2)}\right)$$

El resultado de la expansión es:

$$\sin\sqrt{z} = \cosh\left(|z|^{1/2}\sin\theta/2\right)\sin\left(|z|^{1/2}\cos\theta/2\right) + i\sinh\left(|z|^{1/2}\sin\theta/2\right)\cos\left(|z|^{1/2}\cos\theta/2\right)$$

$\boxed{\mathcal{S}}$ **Problema 7**

$\boxed{\mathcal{S}}$ **Problema 8**

$\boxed{\mathcal{S}}$ **Problema 9**