Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Análisis de Variable Compleja 1
Diego Sarceño 201900109
26 de enero de 2021

Análisis de Variable Compleja 1

$\boxed{\mathcal{S}}$

Problema 1
Es claro que el módulo de z es 1, con lo que, la forma polar esta dada por:

$$z = \operatorname{cis} \pi/4$$

Sabiendo el Teorema de Moivre, se tiene que:

$$\operatorname{cis} 1^2\ \pi/4 + \operatorname{cis} 2^2\ \pi/4 + \cdots + \operatorname{cis} 12^2\ \pi/4$$

Con esto desarrollando se tiene que para los impares el resultado es: $1 + i/\sqrt{2}$. Para las potencias de 2 y 12 se tiene: 1, para el resto es -1. Con esto la parte izquierda tiene un valor total de:

$$z^{1^2} + z^{2^2} + \cdots + z^{12^2} = 1 + 6\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

Para el lado derecho, se tiene que el inverso de $\left(1 + i/\sqrt{2}\right)^{-1} = 1 - i/\sqrt{2}$, con esto el lado derecho de la expresión:

$$\frac{1}{z^{1^2}} + \frac{1}{z^{2^2}} + \cdots + \frac{1}{z^{12^2}} = 1 + 6\frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

Multiplicando ambos resultados se tiene que:

$$\left(z^{1^2} + z^{2^2} + \cdots + z^{12^2}\right)\left(\frac{1}{z^{1^2}} + \frac{1}{z^{2^2}} + \cdots + \frac{1}{z^{12^2}}\right) = \boxed{37 + 6\sqrt{2}}$$

$\boxed{\mathcal{S}}$

Problema 2
Por inducción, el caso base se cumple claramente. La hipotesis inductiva: $n = k$

$$\cos\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos(2k-1)\theta = \frac{\sin 2k\theta}{2\sin\theta}$$

Paso inductivo $k+1$:

$$\cos\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos(2k+1)\theta = \frac{\sin 2k\theta}{2\sin\theta} + \cos(2k+1)\theta$$

$\mathcal{S}$

Tomando el lado derecho de la ecuación, se tiene que:

$$= \frac{1}{2\sin\theta}\left[\sin 2k\theta + \underbrace{2\cos\theta\sin\theta}_{\sin 2\theta}\cos 2k\theta - 2\sin^2\theta\sin 2k\theta\right]$$

$$= \frac{1}{2\sin\theta}[\sin 2k\theta\cos 2\theta + \sin 2\theta\cos 2k\theta]$$

Con lo que, utilizando identidades trigonométricas, se tiene que:

$$\cos\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos(2k+1)\theta = \frac{\sin 2(k+1)\theta}{2\sin\theta}$$

$\square$

$\mathcal{S}$

Problema 3

Como $\lambda_i \geq 0$ y $\lambda 1 + \cdots + \lambda_n = 1$, esto implica que $\lambda_i \leq 1$. Por la desigualdad triangular:

$$\left|\sum_i \lambda_i a_i\right| \leq \sum_i |\lambda_i a_i|$$

Como cada $|a_i|$ y λ_i son menores a 1, entonces su producto también es menor a 1, además de ser menor a ambos factores, con esto es claro que:

$$\sum_i |\lambda_i a_i| < 1$$

Por ende:

$$\left|\sum_i \lambda_i a_i\right| < 1$$

$\square$

$\mathcal{S}$

Problema 4

Incisos:

a) Sea $z \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| = |\beta| = 1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
 ($\Rightarrow$) Sabiendo que $z = \alpha + \beta$, con esto $|z| = |\alpha + \beta|$. Utilizando la desigualdad triangular:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| = 2$$

Con esto se tiene que:

$$|z| \leq 2$$

($\Leftarrow$) Es claro que existen $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tales que $|\alpha| = |\beta| = 1$, puesto que son números complejos pertenecientes al circulo unitario. Además, por la desigualdad triangular se tiene que $|\alpha| + |\beta| \geq |\alpha + \beta|$. Con esto $\alpha + \beta$ es un vector dentro de la circunferencia de radio 2. Como $|z| \leq 2$, es un vector dentro del circulo de radio 2. Como ambos son arbitrarios, sin pérdida de generalidad, $z = \alpha + \beta$ $\square$

Problema 5
Separando la expresión de la izquierda por pares, se tiene que:

$$\underbrace{\left(\frac{\xi}{1+\xi^2}+\frac{\xi^2}{1+\xi^4}\right)}_{1}+\underbrace{\left(\frac{\xi^3}{1+\xi}+\frac{\xi^4}{1+\xi^3}\right)}_{2}$$

Tomando los parentesis, tomando y desarrollando la suma de fracciones, con esto se tiene que, para 1: (Sabiendo $\xi^5 = 1$)

$\mathcal{S}$

$$\left(\frac{\xi}{1+\xi^2}+\frac{\xi^2}{1+\xi^4}\right)=\frac{1+\xi+\xi^2+\xi^4}{(1+\xi^2)(1+\xi^4)}=\frac{1+\xi^2+\xi^4+\xi^6}{(1+\xi^2)(1+\xi^4)}=1$$

Siguiendo con la parte 2:

$$\left(\frac{\xi^3}{1+\xi}+\frac{\xi^4}{1+\xi^3}\right)=\frac{\xi^3+\xi^6+\xi^4+\xi^5}{(1+\xi)(1+\xi^3)}=\frac{1+\xi+\xi^3+\xi^4}{(1+\xi)(1+\xi^3)}=1$$

Por lo que, sumando ambas partes se tiene que:

$$\frac{\xi}{1+\xi^2}+\frac{\xi^2}{1+\xi^4}+\frac{\xi^3}{1+\xi}+\frac{\xi^4}{1+\xi^3}=2$$

□

Problema 6
Nombrando a $|z+1| = \alpha$ y $|z-1| = \beta$, como se trata de módulos, ambos son reales. Además, nombramos a $z = a + bi$. Con esto, la igualdad se reescribe como:

$$\sqrt{(a-\alpha)^2+b^2}=\sqrt{(a+\beta)^2+b^2}$$

Con esto es claro que:

$$(a-\alpha)^2=(a+\beta)^2$$

Desarrollando ambos lados de la ecuación se llega a lo siguiente:

$$(\alpha+\beta)[(\alpha-\beta)-2a]=0$$

$\mathcal{S}$

Con esto se tienen dos casos:

$\alpha+\beta=0$ Como $\alpha,\beta \geq 0$, entonces $\alpha = -\beta = 0$. Dado esto, se tiene que:

$$(a\pm 1)^2+b^2=0$$

Con esto, se concluye que $\boxed{\mathrm{Im}\{z\}=0}$ y $\boxed{\mathrm{Re}\{z\}=\pm 1}$.

$(\alpha-\beta)=2a$ Considerando $\mathrm{Re}\{z\} = 0$, la parte imaginaria queda libre, por lo que, la otra solución a la ecuación propuesta es: $\boxed{\mathrm{Re}\{z\}=0}$ y por lo tanto $\boxed{\mathrm{Im}\{z\}=\text{libre}}$.

□