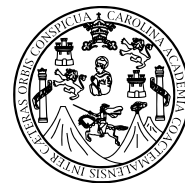




Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
EDP 1
Diego Sarceño 201900109
30 de enero de 2021



PROYECTO

Índice

I	Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con más de dos Variables	2
1.	Superficies y Curvas en Tres Dimensiones	2
1.1.	Problemas Resueltos	4

Parte I

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con más de dos Variables

En este capítulo se estudiarán conceptos básicos para la solución de ecuaciones diferenciales parciales, para lo cual se recolectan conceptos de geometría y ecuaciones diferenciales ordinarias.

1. Superficies y Curvas en Tres Dimensiones

Tomando una superficie en el espacio cartesiano (x, y, z)

$$f(x, y, z) = 0$$

Se escoje un punto que satisface la ecuación anterior y se incrementa $(\delta x, \delta y, \delta z)$ lo que esta relacionado con la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0$$

En otras palabras, en la vecindad de $P(x, y, z)$ existen puntos $P'(x + \xi, y + \eta, z + \zeta)$ que satisfacen la ecuación de superficie y que para cualesquiera dos, el tercero esta dado por:

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

Las ecuaciones de la forma:

$$x = F_1(u, v) \quad y = F_2(u, v) \quad z = F_3(u, v)$$

Son conocidas como las **Ecuaciones Paramétricas de la Superficie**. Esto es porque tanto u como v pueden ser expresadas como funciones de x e y , una vez se encuentre dichos valores, se conocerán u y v ; además, z se encuentra sustituyendo lo encontrado anteriormente en su ecuación, con esto, es claro que cumplen con la ecuación de superficie.

Cabe recalcar que varios conjuntos de ecuaciones paramétricas generan las mismas superficies, vease:

$$(a \sin u \cos v, a \sin u \sin v, a \cos u)$$

Y

$$\left(a \frac{1-v^2}{1+v^2} \cos u, a \frac{1-v^2}{1+v^2} \sin u, \frac{2av}{1+v^2} \right)$$

Generan la superficie esférica

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

Las superficies pueden ser previstas como una curva, siempre y cuando cumplan con las ecuaciones de la superficie y esten en el plano $z = k$. Lo que significa que (x, y, z) esta en la curva λ_k .

Tomando como ejemplo:

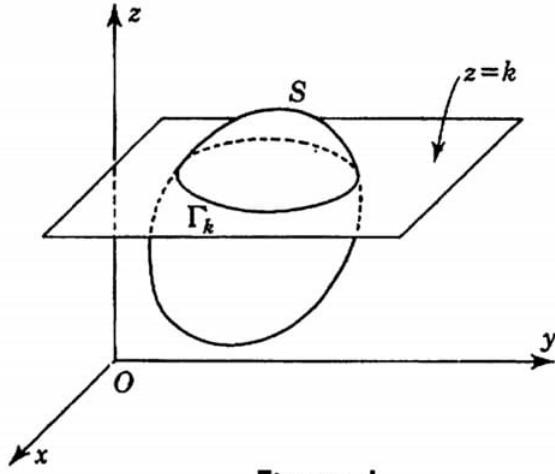


Figure 1

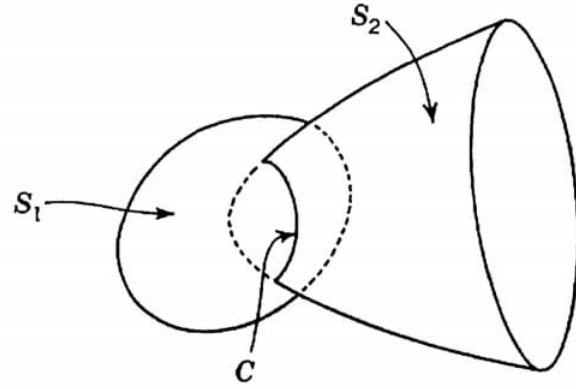


Figure 2

Figura 1: Ejemplo de Curva en Superficie

Esta idea puede ser facilmente generalizada simplemente tomando dos superficies que se intersectan, la curva de intersección es el análogo de Λ_k en el ejemplo anterior. Esta idea esta representada en la "Figure 2" de 1. Matemáticamente hablando, la curva C es conformada por todos aquellos puntos que cumplen las ecuaciones de ambas superficies:

$$f(x, y, z) = 0 \quad g(x, y, z) = 0$$

Dicha curva se puede representar por medio de sus ecuaciones paramétricas. Ahora, suponiendo que la curva C esta sobre la superficie cuya ecuación es:

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0$$

Derivando F se tienen la relación:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0$$

De modo que la tangente a la curva es:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

La ecuación del plano π_1 en el punto $P(x, y, z)$ y la superficie S_1 es:

$$(X - x) \frac{\partial F}{\partial x} + (Y - y) \frac{\partial F}{\partial y} + (Z - z) \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

Con (X, Y, Z) es cualquier otro punto en el plano. Realizando lo mismo para la superficie S_2 . Se tiene:

$$(X - x) \frac{\partial G}{\partial x} + (Y - y) \frac{\partial G}{\partial y} + (Z - z) \frac{\partial G}{\partial z} = 0$$

Y la intersección L de los planos π_1 y π_2 en P es tangente a la curva C .

Para visualizarlo de mejor manera, se tiene la siguiente figura:

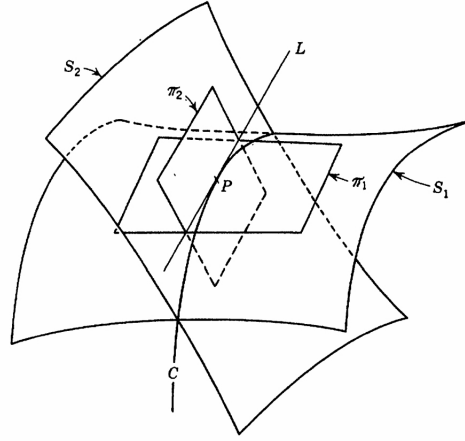


Figure 5

Figura 2: Visualización de la Recta Tangente a la Curva

De las ecuaciones de los planos se tiene que las ecuaciones de la recta L son:

$$\frac{X - x}{\frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial G}{\partial y}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial z}} = \frac{Z - z}{\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial x}}$$

En otras palabras, las razones de dirección de la recta L son:

$$\left\{ \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}, \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)}, \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \right\}$$

1.1. Problemas Resueltos

2. Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden y Primer Grado de Tres Variables