



---

# ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES 1

---

## 1. Introducción

### 1.1. Distribución de Zonas

Cuadro 1: Zona

2	Parciales	40
$n$	Hojas de Trabajo, Investigaciones	20
1	Proyecto	15
1	Final	25
	Total	100

## 2. Orígenes Físicos de las EDP's

### 2.1. Modelos de Ecuaciones Diferenciales Parciales

Los modelos en EDP difieren claramente de los modelos EDO, puesto que la variable a encontrar depende de varias variables independientes. Físicamente, las EDPs modelan la evolución de sistemas en tiempo y espacio.

Ejemplos de EDPs en física:

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) \quad \text{Ecuación de Onda}$$

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy} = 0 \quad \text{Ecuación de Laplace}$$

Otro ejemplo claro es el flujo de calor, este modela la temperatura como una función del tiempo y de posición. La ecuación de calor es:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Donde  $k$  es conocida como la constante de difusividad (propiedad del material). Además, para este problema se tienen diferentes condiciones de frontera, dadas por el mismo espacio en el que se encuentra el sistema, en concreto, para este sistema se tienen:

$$T(0, t) = T(l, t) = 0$$

Estas son distintas de las ya conocidas, condiciones iniciales, las cuales son:

$$T(x, 0) = \phi(x)$$

Para  $0 < x < l$ . Es claro la diferencia entre ambas condiciones, las condiciones de frontera son referidas a las variables espaciales, mientras que las condiciones iniciales son referidas al parametro temporal. A este sistema se le llama un **modelo de evolución**.

Los modelos que no dependen del tiempo se les conocen como **modelos estacionarios**. Por ejemplo, si  $\Omega$  es un dominio espacial acotado representando una placa laminar. En la frontera de  $\Omega$ , denotada por  $\partial\Omega$ , se le impone una temperatura independiente del tiempo. Cuando la distribución de temperatura de estado estacionario  $T(x, y)$  en  $\Omega$  satisface la ecuación de Laplace:

$$T_{xx} + T_{yy} = 0 \quad (x, y) \in \Omega$$

Tomando la temperatura en la frontera de la lamina como  $f(x, y)$ , entonces se tiene:

$$T(x, y) = f(x, y) \quad (x, y) \in \partial\Omega$$

El cual es un modelo de equilibrio de temperatura. En EDP estos son modelos llamados **Problemas de Valores de Frontera**.

El problema de resolver la ecuación de Laplace para una región  $\Omega$  con condiciones de frontera se le conoce como **El Problema de Dirichlet**.

En general, un modelo de evolución EDP de segundo orden, se tiene una ecuación de la forma:

$$G(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt}, u_{xt}) = 0, \quad x \in I, \quad t > 0$$

Donde  $I$  es un intervalo espacial acotado o no acotado. El **orden** de la ecuación es el orden de la derivada más grande que tiene; además, la **linealidad** de  $G$  depende del exponente de la función y sus derivadas, la EDP es lineal si todos dichos exponentes son 1. También, la **homogeneidad** de la EDP depende de que cada término de la ecuación contiene a  $u$  o a una derivada de  $u$ .

En ciertos casos es mejor utilizar la notación de operadores, es decir:

$$u_t - ku_{xx} = 0 \equiv Lu = 0 \quad L = \frac{\partial}{\partial t} - k \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Este se dice que es operador lineal si se cumple que  $L(u + v) = Lu + Lv$  y  $L(cu) = cLu$ . Si el operador es lineal, entonces la ecuación se dice que es **homogenea**. Para las EDPs lineales las soluciones forman un espacio vectorial, es decir, las combinaciones lineales de dichas soluciones forman una solución, matemáticamente hablando, se tiene, si  $\{u_1, \dots, u_n\}$  son soluciones de  $Lu = 0$  y  $c_1, \dots, c_n$ , entonces:

$$c_1 u_1 + \dots + c_n u_n$$

Es también una solución de la EDP, a esto se le conoce como **Principio de Superposición**. El mismo se extiende para sumas infinitas y para un continuo de soluciones. Es decir, si  $u(x, t, \xi)$  es una familia de soluciones dependientes de un único parámetro, para toda  $\xi \in J$  se puede demostrar que:

$$\int_J c(\xi) u(x, t, \xi) d\xi$$

Es también una solución de  $Lu = 0$  para condiciones específicas de  $c(\xi)$ . Algo importante a recalcar es la linealidad del operador en  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{C}$ , es decir:

$$L(u + iv) = Lu + iLv$$

Esto no sucede para ecuaciones no lineales, las cuales son mucho más difícil de resolver y analizar.

La clasificación de las EDPs puede ser dependiente de su aparición en la física o directamente en la matemática, de esto, las EDPs se clasifican:

- Ecuaciones de Onda  $\equiv$  Ecuaciones Hiperbólicas
- Ecuación de Difusión  $\equiv$  Ecuaciones Parabólicas
- Ecuación de Equilibrio  $\equiv$  Ecuación Elíptica

Estas clasificaciones son para EDPs lineales de segundo orden.

Una solución a una EDP se refiere a una función  $u(x, t)$  definida para  $t > 0$  y  $x \in I$ , que satisface por sustitución en la EDP original.