

PROBLEMA DE LOS 3 CUERPOS, PUNTOS DE LAGRANGE

Diego Sarceño *

Guatemala, 12 de abril de 2021

Resumen

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

1. Introducción

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

2. Puntos de Lagrange

2.1. Problema de los Tres Cuerpos

El problema de los tres cuerpos no es soluble analíticamente; sin embargo, realizando ciertas restricciones al problema llega a poderse resolver. Consideraciones a tomar:

1. Dos cuerpos masivos en órbitas circulares alrededor de su centro de masa.
2. El tercer objeto de masa m tiene la condición: $m \ll M_1, M_2$, donde M_1 y M_2 son las masas de los dos objetos anteriormente mencionados.

*Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de San Carlos de Guatemala.

2.1.1. Problema de los dos Cuerpos

Partiendo del problema conocido de los dos cuerpos, el cual ya es conocido, se toma el sistema respecto de un punto de referencia O

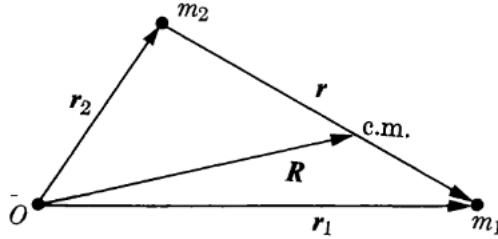


Figura 1: Posición de ambos cuerpos en el espacio, representando su posición relativa y respecto a un sistema de coordenadas O . El vector \mathbf{R} representa la posición del centro de masa relativa al sistema O . Imagen extraída de [1], cap 4.

Además, la ecuación de movimiento

$$\mu \ddot{\mathbf{r}}_{21} = \mathbf{F}, \quad \mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2},$$

al término μ se le conoce como masa reducida¹. Para la fuerza gravitacional y una trayectoria circular, la expresión para frecuencia angular del sistema, se tiene

$$\omega^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{a^3}.$$

2.1.2. Sistema de Referencia Estrellado

Para simplificar el análisis del problema, se introduce un sistema en movimiento, en concreto, en rotación. Esto es para eliminar el movimiento de los cuerpos más masivos, a este nuevo sistema le llamaremos O^* . Este nuevo sistema tendrá su origen en el centro de masa y, a la distancia entre los cuerpos se le llamará a . De modo que las posiciones en O^* están dadas solo en el eje x^* como

$$x_1 = \frac{M_2}{M_1 + M_2} a, \quad x_2 = -\frac{M_1}{M_1 + M_2} a;$$

además, se fija $\vec{\omega} = \omega \hat{\mathbf{z}}$ y la masa m solo se mueve en el plano x^*y^* . Con todo esto, la ecuación de movimiento en el sistema O^*

$$m \frac{d^{*2}r}{dt^2} = F_1 + F_2 - m\omega \times (\omega \times r) - 2m\omega \times \frac{dr}{dt}.$$

En la cual las dos fuerzas representadas son las fuerzas de cada una de las masas sobre la masa m orbitando. Expresandolas en componentes

$$F_1 = \frac{GM_1 m}{((x - x_1)^2 + y^2)^{3/2}}(x - x_1, y), \quad F_2 = \frac{GM_2 m}{((x - x_2)^2 + y^2)^{3/2}}(x - x_2, y).$$

Analizando el resto de términos, se tiene que la fuerza de coriolis es perpendicular a la velocidad, por lo que no tiene un potencial asociado. Para el término de la fuerza centrífuga, es sencillo corroborar que

¹De [2] capítulo 8, sección 2

es una fuerza central², lo que implica que tiene una energía potencial asociada. Desarrollando el término de la fuerza centrífuga y encontrando el potencial

$$\begin{aligned}-m\omega \times (\omega \times r) &= m\omega^2(x\hat{\mathbf{x}}^* + y\hat{\mathbf{y}}^*) \\ V_c &= -\frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2).\end{aligned}$$

Con el análisis anterior, se concluye que la energía potencial total del sistema es

$$V = -\frac{GM_1m}{((x-x_1)^2+y^2)^{1/2}} - \frac{GM_2m}{((x-x_2)^2+y^2)^{1/2}} - \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2).$$

Por simplicidad no se tomara la energía potencial, sino que el potencial gravitacional del sistema, por simplicidad al momento de desarrollar los calculos

$$\mathcal{G} = -\frac{GM_1}{((x-x_1)^2+y^2)^{1/2}} - \frac{GM_2}{((x-x_2)^2+y^2)^{1/2}} - \frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2).$$

2.2. Puntos de Lagrange

Para un sistema de dos cuerpos, los puntos de lagrange son las posiciones en donde un objeto/satélite podría estar en reposo respecto al sistema orbital. Estos puntos representan las posiciones en donde la atracción del sistema presenta una rotación sincrónica con la menor masa del sistema. Matemáticamente hablando, son las soluciones de equilibrio al problema de los 3 cuerpos restringido. Para cualquier sistema de 3 cuerpos existen 5 de estos puntos de lagrange, representados por L_1, L_2, L_3, L_4 y L_5 .

3. Implementación

3.1. Simplificación del Modelo

Para que la implementación sea más simple, y que el programa/lenguaje que se utilice no gaste recursos trabajando con números de grandes ordenes de magnitud o de ordenes muy pequeños. Se realizará el siguiente cambio de variables $\xi = x/a$ y $\eta = y/a$, con lo que

$$\xi_1 = \frac{x_1}{a}, \quad \xi_2 = \frac{x_2}{a} = \xi_1 - 1,$$

lo que reduce la posición de cada masa a un número entre 0 y 1. Dado esto, el potencial gravitacional se reescribe a (sustituyendo M_1 y M_2 despejados de las expresiones de ξ_1 y ξ_2 , esto para tener una expresión más amigables)

$$\mathcal{G}(\xi, \eta) = \frac{G(M_1 + M_2)}{a} \left[\frac{\xi_2}{\sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + \eta^2}} - \frac{\xi_1}{\sqrt{(\xi - \xi_2)^2 + \eta^2}} - \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) \right],$$

la implementación se realizó en el sistema (ξ, η) .

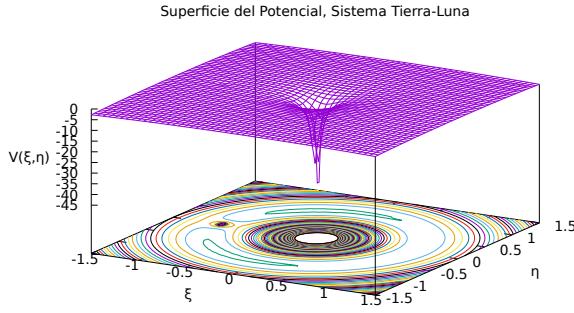
3.2. Implementación en *Gnuplot*

El código generado, al no ser un algoritmo como tal, no se mostrará el pseudocódigo, pero si se desea ver el código utilizado, revisar la sección de anexos 6.

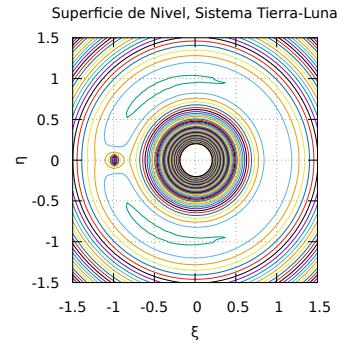
²Fuerza radial conservativa.

3.2.1. Sistema Tierra–Luna

Dadas las masas $M_e = 5.972 \times 10^{24} kg$ y $M_l = 7.329 \times 10^{22} kg$, se encuentran las posiciones respectivas respecto al origen del sistema estrellado en coordenadas (ξ, η) . De modo que, la superficie potencial y sus curvas de nivel son:



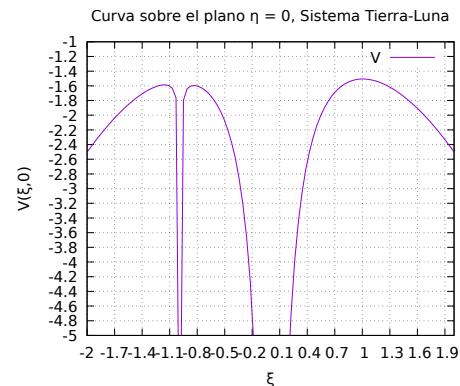
(a) Superficie Potencial



(b) Curvas de Nivel

Figura 2: Sistema Tierra–Luna: (a) La singularidad en la superficie representa a la tierra. Como se verá más adelante, entre mayor sea la diferencia entre las masas de los cuerpos, menor será la distinción del cuerpo de menor masa. (b) En las curvas de nivel se ven representados, no al nivel que se requiere, los puntos de interés en cierto rango.

Para iniciar con algunas aproximaciones de los puntos más evidentes, se toma la coordenada $\eta = 0$. Lo que genera la siguiente curva en dicho plano:



Lo que facilita los primeros tres puntos de lagrange estan dados en $L_1 \approx (-1.17, 0)$, $L_2 \approx (-0.90, 0)$ y $L_3 \approx (1, 0)$. Estos puntos están representados en el sistema de coordenadas (ξ, η) ; por lo que, realizando el cambio de sistema correspondiente $x = a\xi$, donde a es la distancia entre ambos cuerpos (para el sistema tierra–luna $a = 3.844 \times 10^8 m$), se tiene que $L_1 \approx (-4.497 \times 10^8, 0)$, $L_2 \approx (-3.46 \times 10^8, 0)$ y $L_3 \approx (3.844 \times 10^8, 0)$, todo medido en m .

Aumentando el número de curvas de nivel se remarca más, el hecho de que los puntos L_4 y L_5 estan entre las curvas alargadas verdes. Con eso, la parte más gruesa representaría la posición de los puntos; de modo que, los ultimos dos puntos serían $L_4 \approx (-0.5, 0.8)$ y $L_5 \approx (-0.5, -0.8)$, es decir, en términos de coordenadas (x, y) : $L_4 \approx (-1.922 \times 10^8, 3.075 \times 10^8)$ y $L_5 \approx (-1.922 \times 10^8, -3.075 \times 10^8)$, medido en m .

Figura 3: Curva sobre el plano $\eta = 0$, bajo un poco de análisis de calculo diferencial, o directamente por las gráficas, se pueden representar los primeros 3 puntos de Lagrange.

3.2.2. Sistema Sol–Jupiter

Ya con el procedimiento explicado en el sistema anterior, las gráficas de potenciales y la curva sobre el plano $\eta = 0$, para las masas $M_s = 1.989 \times 10^{30} kg$ y $M_J = 1.898 \times 10^{27}$, son:

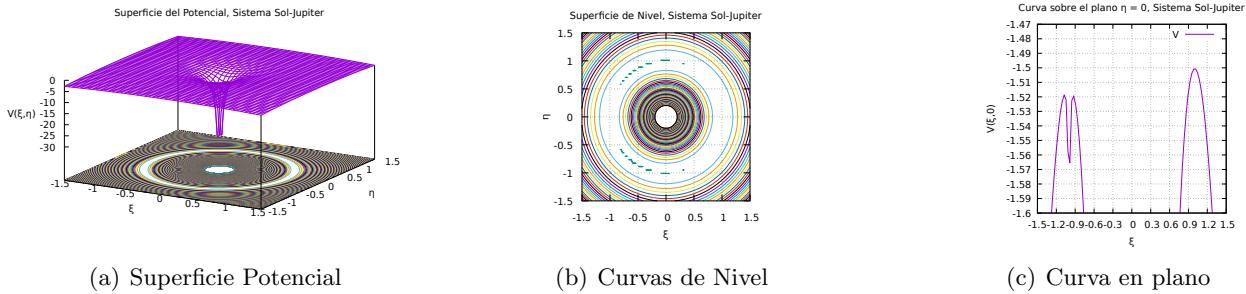


Figura 4: Sistema Sol–Jupiter: (a) Superficie que representa el potencial gravitacional generado por el sistema. (b) Curvas de nivel, como se mencionó en la figura 2, entre mayor sea la diferencia entre las masas, menor será la distinción del cuerpo más pequeño. (c) Puntos de Lagrange sobre el plano $\eta = 0$.

Por lo dicho acerca de la figura 4(b), no se puede calcular la posición de los puntos L_4 y L_5 . Entonces, de la figura 4(c) las coordenadas son $L_1 \approx (-1.1, 0)$, $L_2 \approx (-0.9, 0)$ y $L_3 \approx (1.1, 0)$. Para encontrar la posición en el plano sistema (x, y) , se usa el cambio de coordenadas mostrado en el sistema anterior y la distancia $a = 7.5 \times 10^{11} m$: $L_1 \approx (-8.25 \times 10^{11}, 0)$, $L_2 \approx (-6.75 \times 10^{11}, 0)$ y $L_3 \approx (8.25 \times 10^{11}, 0)$, en m .

3.2.3. Sistema Sol–Tierra

Para este sistema, la diferencia de masas es absurdamente grande (6 ordenes de magnitud). Las masas de los cuerpos son $M_e = 5.972 \times 10^{24} kg$ y $M_s = 1.989 \times 10^{30} kg$. Por el mismo argumento del sistema anterior, solo se mostrarán los puntos de Lagrange sobre el plano $\eta = 0$.

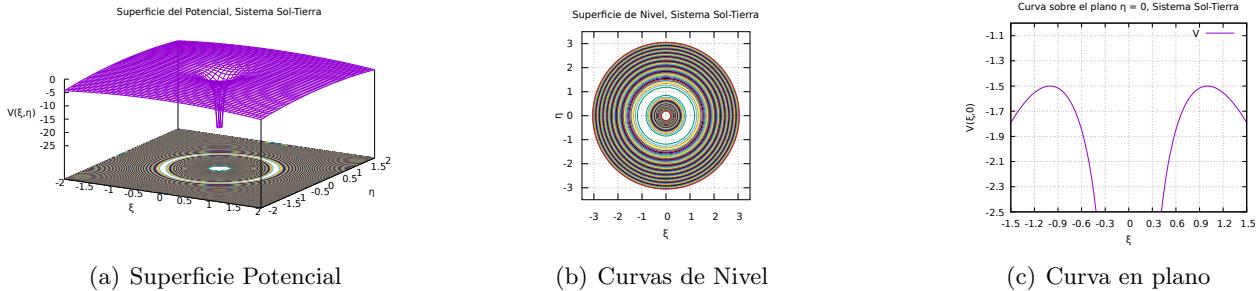


Figura 5: Sistema Sol–Tierra: (a) Superficie potencial para el sistema Sol–Tierra, a diferencia de los dos sistemas anteriores, ya no es posible distinguir de ninguna forma la presencia de la tierra en la superficie. (b) Curvas de nivel, al haber 6 ordenes de magnitud de diferencia entre las masas, no es perceptible la aportación gravitacional de la Tierra comparada con la del sol. (c) Curva sobre el plano $\eta = 0$

Analizando la gráfica 5(c), es curioso observar que los puntos L_1 y L_2 son prácticamente el mismo (cosa que no es cierta), por lo que $L_1 \approx L_2 \approx (-0.95, 0)$ y $L_3 \approx (1, 0)$. Convirtiendo al sistema (x, y) , se tiene $L_1 \approx L_2 \approx (-1.4212 \times 10^{11}, 0)$ y $L_3 \approx (1.496 \times 10^{11}, 0)$, dado que $a = 1.456 \times 10^{11} m$.

3.3. Implementación en *Mathematica*

Dadas las implementaciones realizadas en el interprete *Gnuplot*, es claro que se requiere mayor calidad en la imagen para tener una mejor presición al momento de visualizar los datos. *Mathematica* permite realizar esto, de una manera más sencilla y con mejores resultados. Los datos de las masas son exactamente los mismos que la parte anterior, así como las distancias entre objetos de análisis.

3.3.1. Sistema Tierra–Luna

La gráfica del potencial y sus curvas de nivel son:

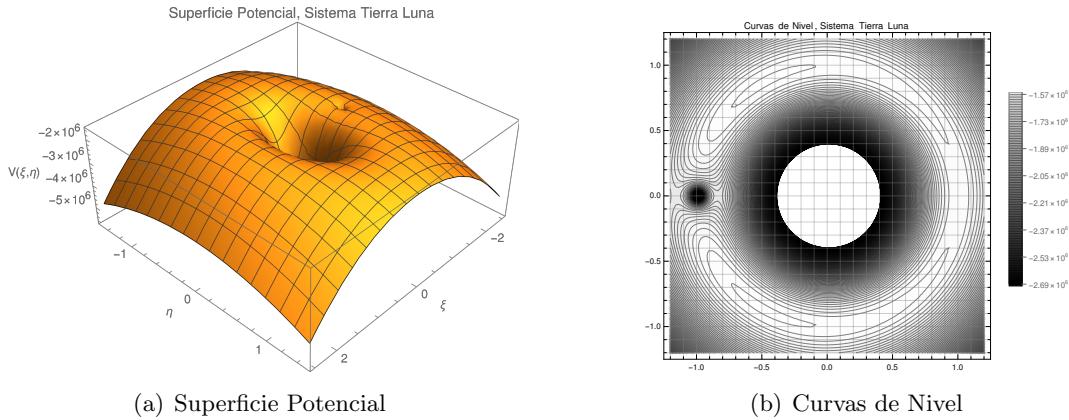


Figura 6: Sistema Tierra–Luna: (a) Superficie potencial, la luna es distinguible como la singularidad pequeña. (b) Curvas de nivel, claramente se muestran los 5 puntos de interés.

En la figura 6(b) es claro donde se ubican todos los puntos de interés; por lo que, los puntos de la gráfica de una forma más precisa son (puntos de Lagrange representados en ambos sistemas): $L_1 \approx (-1.15, 0) \approx (-4.42 \times 10^8, 0)$, $L_2 \approx (-0.835, 0) \approx (-3.21 \times 10^8, 0)$, $L_3 \approx (1, 0) \approx (3.844 \times 10^8, 0)$, $L_4 \approx (-0.6, 0.8) \approx (-2.31 \times 10^8, 3.075 \times 10^8)$ y $L_5 \approx (-0.6, -0.8) \approx (-2.31 \times 10^8, -3.075 \times 10^8)$.

Dadas las aproximaciones gráficas, para comparar los datos con una solución directa del problema con bases en el cálculo. Sabiendo que los máximos o mínimos de una función se encuentran por medio de la primera derivada igualada a cero. Como estamos trabajando con funciones de dos variables se genera un sistema de ecuaciones igualando las primeras derivadas a cero, es decir

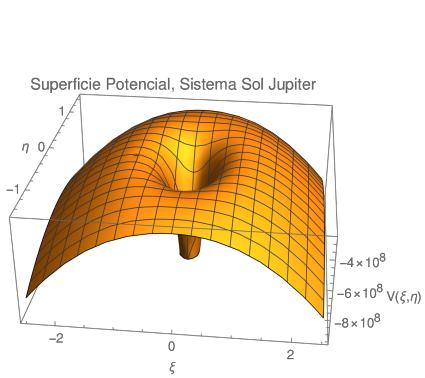
$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \xi} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \eta} = 0. \end{cases}$$

El sistema generado no es soluble analíticamente, por lo que se realiza una solución numérica con la función `Nsolve[{D[G,ξ]==0,D[G,η]==0},{ξ,η}]`. Lo que nos devuelve un arreglo con los puntos de Lagrange, los cuales son: $L_1 = (-1.1557, 0) = (-4.44 \times 10^8, 0)$, $L_2 = (-0.83689, 0) = (-3.22 \times 10^8, 0)$, $L_3 = (1.005, 0) = (3.863 \times 10^8, 0)$, $L_4 = (-0.4878, 0.866) = (-1.875 \times 10^8, 3.33 \times 10^8)$ y $L_5 = (-0.4878, -0.866) = (-1.875 \times 10^8, -3.33 \times 10^8)$.

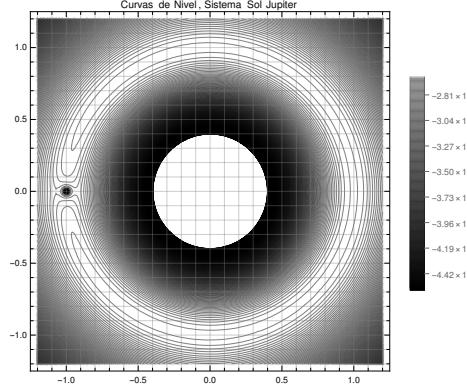
Comparando los tres datos recopilados, es claro que, a pesar de la discrepancia que pueda haber (que mayormente puede ser debida al hecho de ser método gráfico), prácticamente coinciden, lo que refuerza las validez de las medidas.

3.3.2. Sistema Sol–Jupiter

Las gráficas representativas del sistema:



(a) Superficie Potencial



(b) Curvas de Nivel

Figura 7: Sistema Sol–Jupiter: (a) Superficie potencial, Jupiter es apenas distinguible. (b) Curvas de nivel, los puntos 4 y 5 ya no son tan distinguibles, con la idea de la implementación en gnuplot, se puede conjutar la posición.

En base a [7\(b\)](#), las posiciones de los puntos de Lagrange, en ambos sistemas, son: $L_1 \approx (-1.06, 0) \approx (-7.95 \times 10^{11}, 0)$, $L_2 \approx (-0.94, 0) \approx (-7.05 \times 10^{11}, 0)$, $L_3 \approx (1, 0) \approx (7.5 \times 10^{11}, 0)$, $L_4 \approx (-0.5, 0.85) \approx (-3.75 \times 10^{11}, 6.375 \times 10^{11})$ y $L_5 \approx (-0.5, -0.85) \approx (-3.75 \times 10^{11}, -6.375 \times 10^{11})$, medido en m .

Realizando el mismo procedimiento que en sistema anterior, se encuentran los siguientes puntos de Lagrange, por medio de métodos numéricos: $L_1 = (-1.0688, 0) = (-8.016 \times 10^{11}, 0)$, $L_2 = (-0.9324, 0) = (-6.993 \times 10^{11}, 0)$, $L_3 = (1, 0) = (7.5 \times 10^{11}, 0)$, $L_4 = (-0.499, 0.866) = (-3.7425 \times 10^{11}, 6.495 \times 10^{11})$ y $L_5 = (-0.499, -0.866) = (-3.7425 \times 10^{11}, -6.495 \times 10^{11})$, medido en m .

3.3.3. Sistema Sol–Tierra

Gráficas representativas:

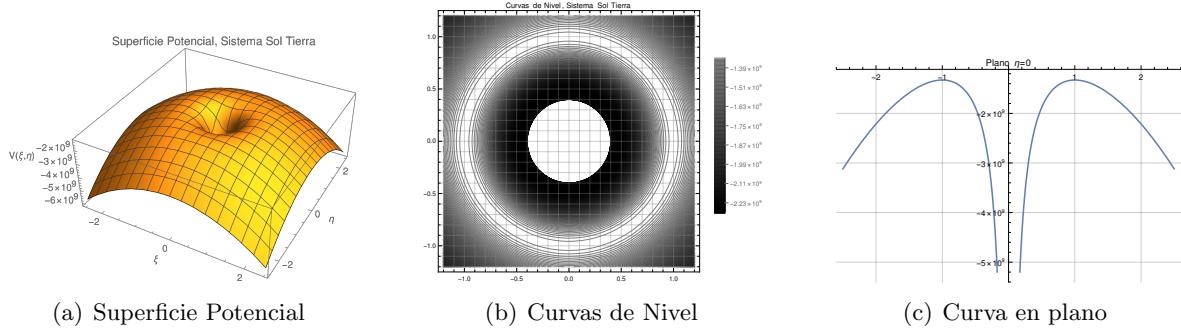


Figura 8: Sistema Sol–Tierra: (a) Superficie potencial, la Tierra no es distinguible, la diferencia en ordenes de magnitud. (b) Curvas de nivel, los puntos no son distinguibles. (c) Así como en la implementación en *Gnuplot*, no es perceptible la contribución gravitacional de la tierra, los puntos L_1 y L_2 prácticamente en el mismo punto (gráficamente hablando, es claro que físicamente no es cierto).

Gráficamente, de 8(c), solo es posible encontrar los primeros 3 puntos de Lagrange: $L_1 \approx L_2 \approx (-1, 0) \approx (-1.5 \times 10^{11}, 0)$ y $L_3 \approx (1, 0) \approx (1.5 \times 10^{11}, 0)$.

Utilizando métodos numéricos, los puntos de Lagrange para el sistema son: $L_1 = (-1.01, 0) = (-1.515 \times 10^{11}, 0)$, $L_2 = (-0.99, 0) = (-1.485 \times 10^{11}, 0)$, $L_3 = (1, 0) = (7.5 \times 10^{11}, 0)$, $L_4 = (-0.499997, 0.866) = (-7.49996 \times 10^{10}, 1.299 \times 10^{11})$ y $L_5 = (-0.499997, -0.866) = (-7.49996 \times 10^{10}, -1.299 \times 10^{11})$, medido en m .

4. Resultados

5. Conclusiones

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

6. Anexos

6.1. Códigos *Gnuplot*

Los códigos creados para el análisis bajo el lenguaje de *Gnuplot* son en principio iguales para cada sistema, así que solo se mostrarán para cada tipo de gráfica un único código.

6.1.1. Superficie de Potencial

```

1 # PROGRAM
2 # terminal
3 set terminal pdf
4 set output 'surfaceSolJupiter.pdf'

```

6.1.2. Curvas de Nivel

```
5  
6 # divisiones en la superficies para  
7 # una mejor vision  
7 set isosamples 50  
8  
9 # labels  
10 set title 'Superficie del Potencial  
10 , Sistema Sol-Jupiter'  
11 set xlabel 'xi'  
12 set ylabel 'eta'  
13 set zlabel 'V(xi,eta)',  
14  
15 # superficies de nivel  
16 set size ratio -1  
17 set nokey  
18 set contours  
19 set cntrparam levels incremental  
19 -5,0.005,0  
20  
21  
22 ## plot  
23 # ranges  
24 set xrange [-1.5:1.5]  
25 set yrange [-1.5:1.5]  
26  
27 # constantes  
28 xi1 = M2/(M2 + M1)  
29 xi2 = xi1 - 1  
30  
31 splot ( xi2/sqrt((x - xi1)**2 + y  
31 **2) - xi1/sqrt((x - xi2)**2 + y  
31 **2) - 0.5*(x**2 + y**2) ) t 'V'  
32  
33 set xrange [-3.5:3.5]  
34 set yrange [-3.5:3.5]  
35  
36 # constantes  
37 xi1 = M2/(M2 + M1)  
38 xi2 = xi1 - 1  
39  
40 splot ( xi2/sqrt((x - xi1)**2 + y  
40 **2) - xi1/sqrt((x - xi2)**2 + y  
40 **2) - 0.5*(x**2 + y**2) ) t 'V'
```

6.1.3. Plano $\eta = 0$

```
1 # PROGRAM  
2 # Idioma  
3 set encoding utf8  
4 # terminal
```

```

5 set terminal pdf
6 set output 'planePlotSolTierra.pdf'
7
8 # labels
9 set title 'Curva sobre el plano eta = 0, Sistema Sol-Tierra'
10 set xlabel 'xi'
11 set ylabel 'V(xi,0)'
12
13 # superficies de nivel
14 set size ratio 0.8
15 set grid
16 #set nokey
17
18 ## plot
19 # ranges
20 set xrange [-1.5:1.5]
21 set xtics -1.5,0.3,1.5
22 set yrange [-2.5:-1]
23 set ytics -2.5,0.2,-1
24
25 # constantes
26 xi1 = M2/(M2 + M1)
27 xi2 = xi1 - 1
28 y = 0
29
30 plot ( xi2/sqrt((x - xi1)**2 + y**2) - xi1/sqrt((x - xi2)**2 + y**2) -
0.5*(x**2 + y**2) ) t 'V'
31
32
33 # END PROGRAM

```

6.2. Código *Mathematica*

La implementación en el lenguaje de *Mathematica* fue realizada en un Notebook, por estética del informe no se colocaron imágenes del mismo; sin embargo, los códigos utilizados y el notebook de *Mathematica* están disponibles en un repositorio de *GitHub*³.

Referencias

- [1] R. Symon, *Mechanics* 3a. Ed. Addison-Wesley Publishing Company, 1971
- [2] R. Taylor, *Classical Mechanics*, Edwards Brothers, Inc. 2005.

³Repositorio: *GitHub*