Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
EDP 1
Diego Sarceño 201900109
17 de febrero de 2021

PROYECTO

Índice

Parte I

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con más de dos Variables

En este capítulo se estudiarán conceptos básicos para la solución de ecuaciones diferenciales parciales, para lo cual se recolectan conceptos de geometría y ecuaciones diferenciales ordinarias.

1. Superficies y Curvas en Tres Dimensiones

Tomando una superficie en el espacio cartesiano (x, y, z)

$$f(x, y, z) = 0$$

Se escoje un punto que satisface la ecuación anterior y se incrementa $(\delta x, \delta y, \delta z)$ lo que esta relacionado con la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z = 0$$

En otras palabras, en la vecindad de $P(x, y, z)$ existen puntos $P'(x + \xi, y + \eta, z + \zeta)$ que satisfacen la ecuación de superficie y que para cualesquiera dos, el tercero esta dado por:

$$\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

Las ecuaciones de la forma:

$$x = F_1(u, v) \qquad y = F_2(u, v) \qquad z = F_3(u, v)$$

Son conocidas como las **Ecuaciónes Paramétricas de la Superficie.** Esto es porque tanto u como v pueden ser expresadas como funciones de x e y, una vez se encuentre dichos valores, se conocerán u y v; además, z se encuentra sustituyendo lo encontrado anteriormente en su ecuación, con esto, es claro que cumplen con la ecuación de superficie.

Cabe recalcar que varios conjuntos de ecucaciones paramétricas generan las mismas superficies, vease:

$$(a \sin u \cos v, a \sin u \cos v, a \cos u)$$

Y

$$\left(a\frac{1-v^2}{1+v^2}\cos u, a\frac{1-v^2}{1+v^2}\sin u, \frac{2av}{1+v^2}\right)$$

Generan la superficie esférica

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

Las superficies pueden ser previstas como una curva, siempre y cuando cumplan con las ecuaciones de la superficie y esten en el plano $z = k$. Lo que significa que (x, y, z) esta en la curva Γ_k.
Tomando como ejemplo:

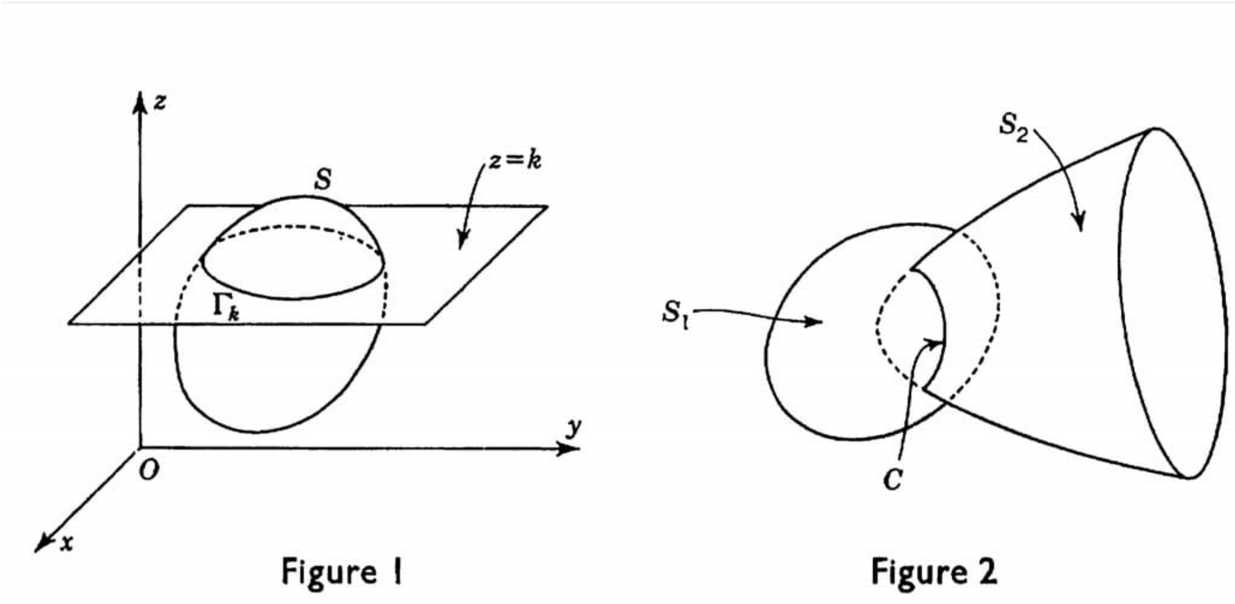

Figura 1: Ejemplo de Curva en Superficie

Esta idea puede ser facilmente generalizada simplemente tomando dos superficies que se intersectan, la curva de intersección es el análogo de Γ_k en el ejemplo anterior. Esta idea esta representada en la "Figure 2" de 1. Matemáticamente hablando, la curva C es conformada por todos aquellos puntos que cumplen las ecuaciones de ambas superficies:

$$f(x,y,z) = 0 \qquad g(x,y,z) = 0$$

Dicha curva se puede representar por medio de sus ecuaciones paramétricas. Ahora, suponiendo que la curva C esta sobre la superficie cuya ecuación es:

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0$$

Derivando F se tienen la relación:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0$$

De modo que la tangente a la curva es:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

La ecuación del plano π_1 en el punto $P(x,y,z)$ y la superficie S_1 es:

$$(X-x)\frac{\partial F}{\partial x} + (Y-y)\frac{\partial F}{\partial y} + (Z-z)\frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

Con (X,Y,Z) es cualquier otro punto en el plano. Realizando lo mismo para la superficie S_2. Se tiene:

$$(X-x)\frac{\partial G}{\partial x} + (Y-y)\frac{\partial G}{\partial y} + (Z-z)\frac{\partial G}{\partial z} = 0$$

Y la intersección L de los planos π_1 y π_2 en P es tangente a la curva C.

Para visualizarlo de mejor manera, se tiene la siguiente figura:

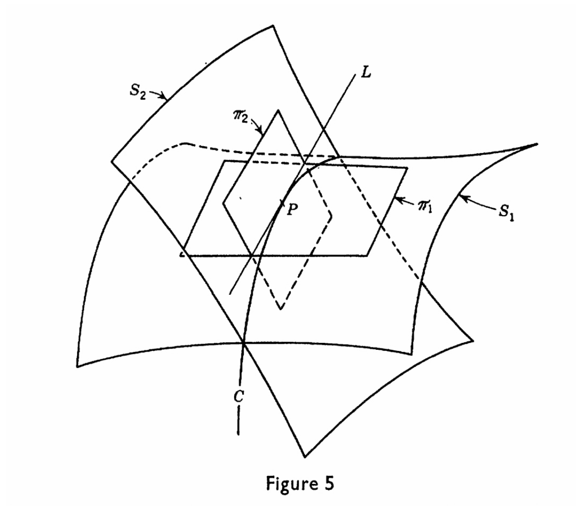

Figura 2: Visualización de la Recta Tangente a la Curva

De las ecuaciones de los planos se tiene que las ecuaciones de la recta L son:

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial z}-\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial y}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial z}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x}}$$

En otras palabras, las razones de dirección de la recta L son:

$$\left\{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right\}$$

1.1. Problemas Resueltos

2. Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden y Primer Grado de Tres Variables

Un ejemplo claro de sistema de ecuaciones simultaneas de primer orden y primer grado es:

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=f_i(x_1,\ldots,x_n,t)$$

aparece frecuentemente en física. Otro ejemplo claro, es el Hamiltoniano de un sistema en movimiento con n grados de libertad tiene la forma:

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\qquad\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial p_i}\qquad i=1,\ldots,n$$

Donde $H(q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n,t)$ es el Hamiltoneano del sistema. Para un sistema de un grado de libertad se tiene:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial q}\qquad\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial p}$$

Si se tiene:

$$-\frac{\partial H}{\partial q}=\frac{P(p,q,t)}{R(p,q,t)}\qquad\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{Q(p,q,t)}{R(p,q,t)}$$

La ecuación anterior se puede colocar de la forma:

$$\frac{\mathrm{d}p}{P(p,q,t)} = \frac{\mathrm{d}q}{Q(p,q,t)} = \frac{\mathrm{d}t}{R(p,q,t)}$$

Dado esto, la ecuación anterior se puede expresar de una forma general, teniendo P, Q, R funciones de x, y, z, entonces se tiene:

$$\frac{\mathrm{d}x}{P} = \frac{\mathrm{d}y}{Q} = \frac{\mathrm{d}z}{R} \tag{1}$$

Para asegurar la unicidad de la ecuación se tiene el siguiente teorema:

Teorema 1

Si las funciones $f_1(x,y,z)$ y $f_2(x,y,z)$ son continuas en una región definida por $|x-a| < k$, $|y-b| < l$, $|z-c| < m$ y si en dicha región las funciones satisfacen una condición Lipschitz del tipo:

$$|f_1(x,y,z) - f_1(x,\eta,\zeta)| \leq A_1|y-\eta| + B_1|z-\zeta|$$

$$|f_2(x,y,z) + f_2(x,\eta,\zeta)| \leq A_2|y-\eta| + B_2|z-\zeta|$$

en un intervalo adecuado $|x-a| < h$ existe un único par de funciones $y(x)$ y $z(x)$ continuas y con derivadas continuas en dicho intervalo, que satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f_1 \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = f_2$$

y que tienen la propiedad de $y(a) = b$, $z(a) = c$ donde a, b, c son arbitrarios.

No se demostrará este teorema, para una demostración formal consulte el siguiente libro de análisis[1].

El resultado del teorema se muestra en la figura 3. En base al teorema, existe un cilindro $y = y(x)$ pasando por el punto $(a, b, 0)$, y un cilindro $z = z(x)$ pasando por le punto $(a, 0, c)$, tales que $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f_1$ y $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = f_2$. La solución completa del par de ecuaciones consiste en un conjunto de puntos en común con los cilindros, es decir, la curva de intersección Γ.

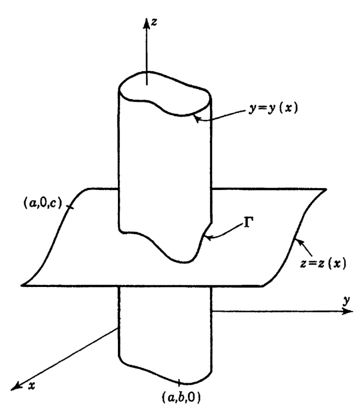

Figure 6

Figura 3: Visualización del Teorema 1

[1]E. Goursat, "A Course in Mathematical Analysis" (Ginn, Boston, 1917), vol. II, pt. II, pp. 45ff.

De esto se concluye que, la solución general del conjunto de ecuaciones del tipo (1) será una familia de curvas de dos parámetros.

3. Métodos de Solución de $\mathrm{d}x/P = \mathrm{d}y/Q = \mathrm{d}z/R$

De la sección anterior se tiene:

$$\frac{\mathrm{d}x}{P} = \frac{\mathrm{d}y}{Q} = \frac{\mathrm{d}z}{R}$$

Si se pueden derivar dos relaciones de la forma:

$$u_1(x, y, z) = c_1 \qquad u_2(x, y, z) = c_2$$

Variando esas constantes, se obtiene la familia de curvas que satisfacen la ecuación.

Método (a): Para encontrar las funciones u_1 y u_2 se puede observar que cualquier dirección tangencial por un punto (x, y, z) a una superficie $u_1 = c_1$ satisface la relación:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u_1}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial u_1}{\partial z}\,\mathrm{d}z = 0$$

Si $u_1 = c_1$ es un sistema adecuado de superficies, la dirección tangencial a la curva de integral por el punto (x, y, z) si también es una dirección tangencial a esta superficie. De esto:

$$P\frac{\partial u_1}{\partial x} + Q\frac{\partial u_1}{\partial y} + R\frac{\partial u_1}{\partial z} = 0$$

Para encontrar u_1, y similarmente u_2, se intenta encontrar funciones P', Q' y R' tales que:

$$PP' + QQ' + RR' = 0 \tag{2}$$

Y, además, existe una función u_1 con las propiedades:

$$P' = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \qquad Q' = \frac{\partial u_1}{\partial y}, \qquad R' = \frac{\partial u_1}{\partial z}$$

Lo que implica que:

$$P'\,\mathrm{d}x + Q'\,\mathrm{d}y + R'\,\mathrm{d}z$$

Es una diferencial exacta de $\mathrm{d}u_1$. Se tomará el ejemplo 2 del libro (Sección 3, capítulo 1, pp. 11.)
Método (b): Suponga que se pueden encontrar tres funciones P', Q', R' tal que:

$$\frac{P'\,\mathrm{d}x + Q'\,\mathrm{d}y + R'\,\mathrm{d}z}{PP' + QQ' + RR'}$$

Es un diferencial exacto $\mathrm{d}W'$, y si se pueden encontrar otras tres funciones P'', Q'', R'' tales que:

$$\frac{P''\,\mathrm{d}x + Q''\,\mathrm{d}y + R''\,\mathrm{d}z}{PP'' + QQ'' + RR''}$$

El cual es un diferencial exacto $\mathrm{d}W''$. De esto, se sabe que:

$$\mathrm{d}W' = \mathrm{d}W''$$

De lo que se deriva.

$$W' = W'' + c_1$$

Donde c_1 es una constante arbitraria.

Método (c): Cuando una de las variables es ausente de las ecuaciones iniciales, se pueden encontrar las curvas integral en una manera sencilla.

$$\frac{\mathrm{d}y}{Q} = \frac{\mathrm{d}z}{R}$$

Puede ser descrito en la forma

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} = f(y, z)$$

De las EDOs esta ecuación tiene solución de la forma:

$$\phi(y, z, c_1) = 0$$

Resolviendo la ecuación para z y sustituyendolo se obtiene

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x, y, c_1)$$

Lo que tiene solución:

$$\psi(x, y, c_1, c_2) = 0$$

4. Trayectorias Ortogonales de un Sistema de Curvas en una Superficie

Este problema es muy conocido, para 3 dimensiones: sea una superficie:

$$F(x, y, z) = 0$$

Se considera un conjunto de curvas en las cuales la superficie se encuentra, tomando un nuevo conjuto de curvas las cuales cortan a todas las curvas del otro conjunto en un ángulo de 90 grados. Este nuevo sistema de curvas es llamado el sistema de *trayectorias ortogonales* del conjunto de curvas dado.

En general, el sistema de curvas se puede representar como las intersecciones de la familia de superficies

$$G(x, y, z) = c_1$$

Con la superficie dada.

En caso general, la dirección tangencial $(\mathrm{d}x\,, \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z)$ a la curva dada en el punto (x, y, z) en la superficie F, satisface las ecuaciones:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial F}{\partial z}\,\mathrm{d}z = 0$$

y

$$\frac{\partial G}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial G}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial G}{\partial z}\,\mathrm{d}z = 0$$

Los trios deben cumplir:

$$\frac{\mathrm{d}x}{P} = \frac{\mathrm{d}y}{Q} = \frac{\mathrm{d}z}{R}$$

Donde

$$(P, Q, R) = \left(\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}, \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)}, \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \right)$$

Para el sistema ortogonal se tienen las siguiente dirección tangencial $(\mathrm{d}x', \mathrm{d}y', \mathrm{d}z')$ que estan en la superficie F, tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}x' + \frac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}y' + \frac{\partial F}{\partial z}\,\mathrm{d}z' = 0$$

El cual es perpendicular al sistema de curvas original, de la relación anterior se tiene:

$$P\,\mathrm{d}x' + Q\,\mathrm{d}y' + R\,\mathrm{d}z' = 0$$

Y de las últimas dos ecuaciones se tiene

$$\frac{\mathrm{d}x'}{P'} = \frac{\mathrm{d}y'}{Q'} = \frac{\mathrm{d}z'}{R'}$$

Donde:

$$P' = R\frac{\partial F}{\partial y} - Q\frac{\partial F}{\partial z}$$
$$P' = P\frac{\partial F}{\partial z} - R\frac{\partial F}{\partial x}$$
$$P' = Q\frac{\partial F}{\partial x} - P\frac{\partial F}{\partial y}$$

La solucion del sistema primado y la relación F da el sistema de trayectorias ortogonales.

5. Formas Diferenciales y Ecuaciones Pfaffianas

Definición 1
Sea F_i $(i = 1, \ldots, n)$ son funciones de una o todas las n variables independientes, la relación:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i\,\mathrm{d}x_i = 0$$

Es llamada **Ecuación Diferencial Pfaffiana**.

Para una ecuación Pfaffiana de dos variables $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0$, puede ser descrita en una forma como $\mathrm{d}\phi$ con $\phi = c$, en este caso se dice que la ecuación es *exacta* o *integrable*. Incluso sino es exacta se escribe la ecuación de la forma:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial \phi}{\partial y}\,\mathrm{d}y = 0$$

Existen ϕ y μ tales que:

$$\frac{1}{P}\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{Q}\frac{\partial \phi}{\partial y} = \mu$$

A μ se le conoce como el factor integrante de la ecuación diferencial Pfaffiana.
Teorema 2
Una ecuación diferencial Pfaffiana en dos variables siempre posee un factor integrante.

Teorema 3
Una condición necesaria y suficiente que existen entre dos funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ una relación $F(u, v) = 0$, que no envuelve x o y es que:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0$$

Teorema 4
Si $\mathbf{X}$ es un vectortal que $\mathbf{X}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{X}$ y μ es una función arbitraria de x, y, z, entonces $(\mu\mathbf{X})\cdot \boldsymbol{\nabla} \times (\mu\mathbf{X}) = 0$.

Como no todas las funciones de esta forma poseen integrales de la forma $\mu(x, y, z)$.
Teorema 5
Una condicion suficiente y necesaria para que la ecuación Pfaffiana $\mathbf{X}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$ sea integrable es que $\mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{X} = 0$.

DS: En la siguiente sección se estudiarán los métodos de solución de ecuaciones Pfaffianas.
Teorema 6
Dado un factor integrante de la ED Pfaffiana:

$$X_1 \,\mathrm{d}x_1 + X_2 \,\mathrm{d}x_2 + \cdots + X_n \,\mathrm{d}x_n = 0$$

Se pueden encontrar un número infinito de ellos.

6. Solución a Ecuaciones Diferenciales Pfaffianas en Tres Variables

7. Teorema de Carathéodory

8. Aplicaciones a Termodinámica

Parte II
Ecuaciones Diferenciales Parciales de Primer Orden

9. Ecuaciones Diferenciales Parciales

10. Origenes de las Ecuaciones Diferenciales Parciales de Primer Orden

11. Problema de Cauchy para Ecuaciones de Primer Orden

12. Ecuaciones Lineales de Primer Orden

13. Superficies Integrales

14. Superficies Ortogonales a un Sistema de Superficies

15. Ecuaciones Diferenciales Parciales No Lineales

16. Método de Características de Cauchy

17. Sistemas Compatibles de Ecuaciones de Primer Orden

18. Método de Charpit

19. Tipos Especiales de Ecuaciones de Primer Orden

20. Soluciones Satisfactorias a Condiciones

21. Método de Jacobi

22. Aplicaciones

Parte III
Ecuaciones Diferenciales Parciales de Segundo Orden

23. Origen de Ecuaciones de Segundo Orden

24. Ecuaciones de Segundo Orden en Física

25. Ecuaciones de Orden Superior en Física

26. Ecuaciones Diferenciales Parciales Lineales con Coeficientes Constantes

27. Ecuaciones con Coeficientes Variables

28. Curvas Características de Ecuaciones de Segundo Orden

29. Características de Ecuaciones en Tres Variables

30. Solución de Ecuaciones Hiperbólicas Lineales

31. Separación de Variables

32. Método de Transformaciones Integrales

33. Ecuaciones No Lineales de Segundo Orden