Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Análisis de Variable Compleja 1
Diego Sarceño 201900109
19 de marzo de 2021

Tarea 2

$\mathcal{S}$ **Problema 1**

$\mathcal{S}$ **Problema 2**

$\mathcal{S}$ **Problema 3**

Para la función $f(z) = |z|$, si la función es entera, implica directamente que es holomorfa. Por contradicción se asumirá la función holomorfa; entonces, la parte real e imaginaria son armónicas, de modo que:

$$\nabla^2 f = 0$$

Aplicando el laplaciano:

$$\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$$

Lo que contradice el hecho de que sea holomorfa, puesto que la igualdad no se cumple en ningún $z \in \mathbb{C}$, por lo tanto f no es entera. $\square$

$\mathcal{S}$ **Problema 4**

($\Rightarrow$) Si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, entonces su parte real e imaginaria es cero. Desarrollando las derivadas parciales de la definición:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = u_x + iv_x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = u_y + iv_y.$$

Sustituyendo se tiene

$$= \frac{1}{2}[(u_x - v_y) + (u_y - v_y)i].$$

Como la parte real e imaginaria son cero, entonces,

$$u_x = v_y$$

$$u_y = -v_x$$

Las cuales son las ecuaciones de Cauchy$-$Riemann.

($\Leftarrow$)

$\mathcal{S}$

Problema 5
Para el abierto dado, se tiene que la función es holomorfa, por lo que se cumplen las ecuaciones de CR; donde, $u = 3$ y $v = v$

$$u_x = v_y \quad \rightarrow \quad v_y = 0 \quad v = \phi(x)$$

$$u_y = -v_x \quad \rightarrow \quad v_x = 0 \quad \rightarrow \quad v = \phi(y)$$

Pero dicha constante de integración no puede ser función de ambas variables, por ende, la función $\boxed{v = c}$.

$\mathcal{S}$

Problema 6
Incisos:

a)

b) Tomando la forma exponencial del seno, se tiene que:

$$\sin\sqrt{z} = \frac{e^{i\sqrt{z}} - e^{-i\sqrt{z}}}{2i}$$

Utilizando el teorema de DeMoivre se puede descomponer $\sqrt{z} = |z|^{1/2}(\cos\theta/2 + i\sin\theta/2)$. Por simplicidad se tomará a $a = |z|^{1/2}$.

$$= \frac{e^{ai\cos\theta/2}\, e^{-a\sin\theta/2} - e^{-ai\cos\theta/2}\, e^{a\sin\theta/2}}{2i}$$

Sumando y restando el primer término pero con la segunda exponencial en signo positivo; de modo que:

$$= \frac{1}{i}e^{ai\cos\theta/2}\underbrace{\left[\frac{e^{a\sin\theta/2} + e^{-a\sin\theta/2}}{2}\right]}_{\cosh(a\sin\theta/2)} - \frac{e^{-ai\cos\theta/2}\, e^{a\sin\theta/2}}{2i} - \frac{e^{ai\cos\theta/2}\, e^{a\sin\theta/2}}{2i}$$

Volviendo a sumar y restar el mismo término se tiene que:

$$= \cosh(a\sin\theta/2)\sin(a\cos\theta/2) - i\left(\underbrace{\frac{e^{ai\cos\theta/2} + e^{-ai\cos\theta/2}}{2}}_{\cos(a\cos\theta/2)}\right)\cosh(a\sin\theta/2)$$

$$+ie^{a\sin\theta/2}\left[\underbrace{\frac{e^{ai\cos\theta/2} + e^{-ai\cos\theta/2}}{2}}_{\cos(a\cos\theta/2)}\right]$$

$\mathcal{S}$

Reduciendo y simplificando:

$$= \cosh(a\sin\theta/2)\sin(a\cos\theta/2) + i\cos(a\cos\theta/2)\left(\underbrace{\frac{-e^{a\sin\theta/2} - e^{-a\sin\theta/2}}{2} + e^{a\sin\theta/2}}_{\sinh(a\sin\theta/2)}\right)$$

El resultado de la expansión es:

$$\sin\sqrt{z} = \cosh\left(|z|^{1/2}\sin\theta/2\right)\sin\left(|z|^{1/2}\cos\theta/2\right) + i\sinh\left(|z|^{1/2}\sin\theta/2\right)\cos\left(|z|^{1/2}\cos\theta/2\right)$$

$\mathcal{S}$

Problema 7

Si ambas funciones son enteras, se cumplen las ecuaciones de CR en todo $\mathbb{C}$. Con esta idea, para f se tienen las siguientes ecuaciones

$$u_x = v_y$$
$$u_y = -v_x$$

Y para $\bar{f}$, se tiene

$$U_x = V_y \to u_x = -v_y$$
$$U_y = V_x \to u_y = v_x$$

Con lo que, igualando las derivadas de la parte real, se concluye que $v = b$, lo que implica directamente que $u = a$, por ende $f(z) = a + bi$, constante. $\square$

$\mathcal{S}$

Problema 8

Por contradicción, suponemos la función holomorfa, por lo que las ecuaciones de CR. Con lo que:

$$v_y = u_x = e^x$$
$$v_x = 0$$

Integrando la primera ecuación $v = ye^x + \phi(x)$. Pero, al derivar para la segunda ecuación de CR, $v_x = -ye^x + \phi'(x) = 0$, lo que contradice la "utilidad" de $\phi(x)$, puesto que depende también de y, lo que no es posible ($\rightarrow\leftarrow$).

$\mathcal{S}$

Problema 9