

# PROBLEMA DE LOS 3 CUERPOS, PUNTOS DE LAGRANGE

Diego Sarceño \*

Guatemala, 11 de abril de 2021

## Resumen

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

## 1. Introducción

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

$$\int_a^b f(x)dx,$$

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

---

\*Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de San Carlos de Guatemala.

## 2. Puntos de Lagrange

### 2.1. Problema de los Tres Cuerpos

El problema de los tres cuerpos no es soluble analíticamente; sin embargo, realizando ciertas restricciones al problema llega a poderse resolver. Consideraciones a tomar:

1. Dos cuerpos masivos en orbitas circulares alrededor de su centro de masa.
2. El tercer objeto de masa  $m$  tiene la condición:  $m \ll M_1, M_2$ , donde  $M_1$  y  $M_2$  son las masas de los dos objetos anteriormente mencionados.

#### 2.1.1. Problema de los dos Cuerpos

Partiendo del problema conocido de los dos cuerpos, el cual ya es conocido, se toma el sistema respecto de un punto de referencia  $O$

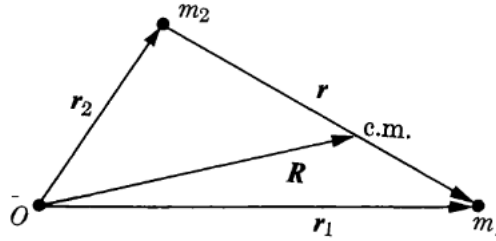


Figura 1: Posición de ambos cuerpos en el espacio, representando su posición relativa y respecto a un sistema de coordenadas  $O$ . El vector  $\mathbf{R}$  representa la posición del centro de masa relativa al sistema  $O$ . Imagen extraída de [1], cap 4.

Además, la ecuación de movimiento

$$\mu \ddot{\mathbf{r}}_{21} = \mathbf{F}, \quad \mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2},$$

al término  $\mu$  se le conoce como masa reducida<sup>1</sup>. Para la fuerza gravitacional y una trayectoria circular, la expresión para frecuencia angular del sistema, se tiene

$$\omega^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{a^3}.$$

#### 2.1.2. Sistema de Referencia Estrellado

Para simplificar el análisis del problema, se introduce un sistema en movimiento, en concreto, en rotación. Esto es para eliminar el movimiento de los cuerpos más masivos, a este nuevo sistema le llamaremos  $O^*$ . Este nuevo sistema tendrá su origen en el centro de masa y, a la distancia entre los cuerpos se le llamará  $a$ . De modo que las posiciones en  $O^*$  están dadas solo en el eje  $x^*$  como

$$x_1 = \frac{M_2}{M_1 + M_2}a, \quad x_2 = -\frac{M_1}{M_1 + M_2}a;$$

---

<sup>1</sup>De [2] capítulo 8, sección 2

además, se fija  $\vec{\omega} = \omega \hat{\mathbf{z}}$  y la masa  $m$  solo se mueve en el plano  $x^*y^*$ . Con todo esto, la ecuación de movimiento en el sistema  $O^*$

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 - m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}) - 2m\omega \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

En la cual las dos fuerzas representadas son las fuerzas de cada una de las masas sobre la masa  $m$  orbitando. Expresandolas en componentes

$$\mathbf{F}_1 = \frac{GM_1 m}{((x - x_1)^2 + y^2)^{3/2}}(x - x_1, y), \quad \mathbf{F}_2 = \frac{GM_2 m}{((x - x_2)^2 + y^2)^{3/2}}(x - x_2, y).$$

Analizando el resto de términos, se tiene que la fuerza de coriolis es perpendicular a la velocidad, por lo que no tiene un potencial asociado. Para el término de la fuerza centrífuga, es sencillo corroborar que es una fuerza central<sup>2</sup>, lo que implica que tiene una energía potencial asociada. Desarrollando el término de la fuerza centrífuga y encontrando el potencial

$$\begin{aligned} -m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}) &= m\omega^2(x\hat{\mathbf{x}}^* + y\hat{\mathbf{y}}^*) \\ V_c &= -\frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Con el análisis anterior, se concluye que la energía potencial total del sistema es

$$V = -\frac{GM_1 m}{((x - x_1)^2 + y^2)^{1/2}} - \frac{GM_2 m}{((x - x_2)^2 + y^2)^{1/2}} - \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2).$$

Por simplicidad no se tomara la energía potencial, sino que el potencial gravitacional del sistema, por simplicidad al momento de desarrollar los calculos

$$\mathcal{G} = -\frac{GM_1}{((x - x_1)^2 + y^2)^{1/2}} - \frac{GM_2}{((x - x_2)^2 + y^2)^{1/2}} - \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2).$$

## 2.2. Puntos de Lagrange

Para un sistema de dos cuerpos, los puntos de lagrange son las posiciones en donde un objeto/satélite podría estar en reposo respecto al sistema orbital. Estos puntos representan las posiciones en donde la atracción del sistema presenta una rotación sincrónica con la menor masa del sistema. Matemáticamente hablando, son las soluciones de equilibrio al problema de los 3 cuerpos restringido. Para cualquier sistema de 3 cuerpos existen 5 de estos puntos de lagrange, representados por  $L_1, L_2, L_3, L_4$  y  $L_5$ .

## 3. Implementación

### 3.1. Simplificación del Modelo

Para que la implementación sea más simple, y que el programa/lenguaje que se utilice no gaste recursos trabajando con números de grandes ordenes de magnitud o de ordenes muy pequeños. Se realizará el siguiente cambio de variables  $\xi = x/a$  y  $\eta = y/a$ , con lo que

$$\xi_1 = \frac{x_1}{a}, \quad \xi_2 = \frac{x_2}{a} = \xi_1 - 1,$$

---

<sup>2</sup>Fuerza radial conservativa.

lo que reduce la posición de cada masa a un número entre 0 y 1. Dado esto, el potencial gravitacional se reescribe a (sustituyendo  $M_1$  y  $M_2$  despejados de las expresiones de  $\xi_1$  y  $\xi_2$ , esto para tener una expresión más amigables)

$$\mathcal{G}(\xi, \eta) = \frac{G(M_1 + M_2)}{a} \left[ \frac{\xi_2}{\sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + \eta^2}} - \frac{\xi_1}{\sqrt{(\xi - \xi_2)^2 + \eta^2}} - \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) \right],$$

la implementación se realizó en el sistema  $(\xi, \eta)$ .

### 3.2. Implementación en *Gnuplot*

El código generado, al no ser un algoritmo como tal, no se mostrará el pseudocódigo, pero si se desea ver el código utilizado, revisar la sección de anexos 5.

#### 3.2.1. Sistema Tierra–Luna

Dadas las masas  $M_e = 5.972 \times 10^{24} kg$  y  $M_l = 7.329 \times 10^{22} kg$ , se encuentran las posiciones respectivas respecto al origen del sistema estrellado en coordenadas  $(\xi, \eta)$ . De modo que, la superficie potencial y sus curvas de nivel son:

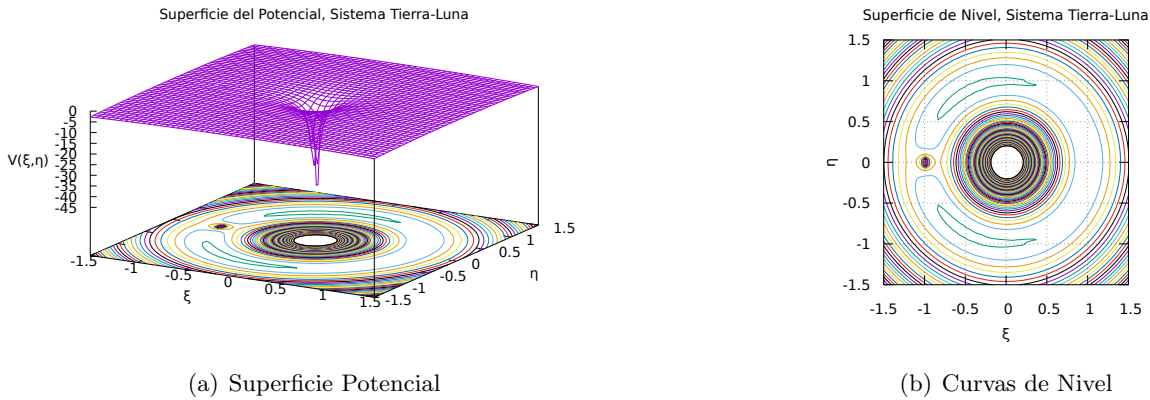
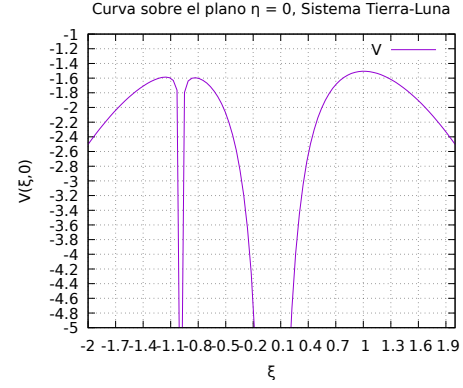


Figura 2: Sistema Tierra–Luna: (a) La singularidad en la superficie representa a la tierra. Como se verá más adelante, entre mayor sea la diferencia entre las masas de los cuerpos, menor será la distinción del cuerpo de menor masa. (b) En las superficies de nivel se ven representados, no al nivel que se requiere, los puntos de interés en cierto rango.

Para iniciar con algunas aproximaciones de los puntos más evidentes, se toma la coordenada  $\eta = 0$ . Lo que genera la siguiente curva en dicho plano:



Lo que facilita los primeros tres puntos de lagrange estan dados en  $L_1 \approx (-1.17, 0)$ ,  $L_2 \approx (-0.90, 0)$  y  $L_3 \approx (1, 0)$ . Estos puntos están representados en el sistema de coordenadas  $(\xi, \eta)$ ; por lo que, realizando el cambio de sistema correspondiente  $x = a\xi$ , donde  $a$  es la distancia entre ambos cuerpos (para el sistema tierra-luna  $a = 3.844 \times 10^8 m$ ), se tiene que  $L_1 \approx (-4.497 \times 10^8, 0)$ ,  $L_2 \approx (-3.46 \times 10^8, 0)$  y  $L_3 \approx (3.844 \times 10^8, 0)$ , todo medido en  $m$ .

Figura 3: Curva sobre el plano  $\eta = 0$ , bajo un poco de análisis de calculo diferencial, o directamente por las gráficas, se pueden representar los primeros 3 puntos de Lagrange.

### 3.2.2. Sistema Sol–Jupiter

### 3.2.3. Sistema Sol–Tierra

## 3.3. Implementación en *Mathematica*

### 3.3.1. Sistema Tierra–Luna

### 3.3.2. Sistema Sol–Jupiter

### 3.3.3. Sistema Sol–Tierra

## 4. Conclusiones

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Figura 4: Área bajo la curva obtenido mediante las dos implementaciones, secuencial y paralelo en función del número de trapecios. En el inserto está la diferencia del valor obtenido en la implementación secuencial menos el valor obtenido en la implementación paralela. Fuente: elaboración propia.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla

et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

## 5. Anexos

### Referencias

- [1] R. Symon, *Mechanics* 3a. Ed. Addison–Wesley Publishing Company, 1971
- [2] R. Taylor, *Classical Mechanics*, Edwards Brothers, Inc. 2005.