Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Análisis de Variable Compleja 1
Diego Sarceño 201900109
11 de febrero de 2021

Análisis de Variable Compleja 1

Problema 1
Tomando a $z = a + bi$, se tiene:

$$\frac{a+bi}{[(a+1)^2+bi]} = \frac{a+bi}{(a+1)^2-b^2+2bi(a+1)}\left(\frac{(a+1)^2-b^2-2bi(a+1)}{(a+1)^2-b^2-2bi(a+1)}\right)$$

$\boxed{\mathcal{S}}$ Tomando únicamente la parte imaginaria, se tiene:

$$b\big[(a+1)^2-b^2\big]-2ab(a+1) = -2a^2b-2ab-b^3+2ab+b = -b(a^2+b^2-1) = 0$$

Lo que demuestra:

$$\mathrm{Im}\left\{\frac{z}{(z+1)^2}\right\} = 0$$

$\square$

Problema 2
Tomando la propiedad $z\bar{z} = |z|^2$, se tiene:

$$\left|\frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z}\right|^2 = \left(\frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z}\right)\left(\overline{\frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z}}\right)$$

Desrrollando se tiene:

$$= \frac{|z|^2+|\alpha|^2+\bar{z}\alpha+\overline{\bar{z}\alpha}}{1+\bar{\alpha}z+\overline{\bar{\alpha}z}+|\bar{\alpha}z|} = \frac{|z|^2+|\alpha|^2+2\,\mathrm{Re}\{\bar{z}\alpha\}}{1+2\,\mathrm{Re}\{\bar{\alpha}z\}+|\bar{\alpha}z|^2}$$

$\boxed{\mathcal{S}}$ Por las condiciones del problema se tiene que $|z|^2|\alpha|^2 < 2$ y $|\alpha z|^2 < 1$, con lo que:

$$< \frac{2+2\,\mathrm{Re}\{\bar{z}\alpha\}}{2+2\,\mathrm{Re}\{\bar{\alpha}z\}} = 1$$

Asumiendo que existe caso de igualdad, se toma:

$$|z+\alpha| = |1+\bar{\alpha}z|$$

Siguiendo la idea del inicio:

$$(z+\alpha)(\bar{z}+\bar{\alpha}) = (1+\bar{\alpha}z)(1+\alpha\bar{z})$$

Desarrollando se llega a:

$$|z|^2 + |\alpha|^2 = 1 + |z|^2|\alpha|^2$$

De modo que:

$$(1 - |z|^2)(1 - |\alpha|^2) = 0$$

$\mathcal{S}$ Como $|\alpha| < 1$, entonces es necesario que $|z| = 1$. Con esto se concluye que:

$$\left|\frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z}\right| \leq 1$$

Con el caso de igualdad cuando z esta en el circulo unitario. $\square$

Problema 3

Es claro que el módulo de z es 1, con lo que, la forma polar esta dada por:

$$z = \text{cis}\ \pi/4$$

Sabiendo el Teorema de Moivre, se tiene que:

$$\text{cis}\, 1^2\ \pi/4 + \text{cis}\, 2^2\ \pi/4 + \cdots + \text{cis}\, 12^2\ \pi/4$$

Con esto, para los impares se tiene que $1 + i/\sqrt{2}$. Multiplos de 4, el resultado es 1 y pares no multiplos de 4 se tiene -1. De modo que:

$\mathcal{S}$

$$z^{1^2} + z^{2^2} + \cdots + z^{12^2} = 6\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

Para el lado derecho, se tiene que el inverso de $\left(1 + i/\sqrt{2}\right)^{-1} = 1 - i/\sqrt{2}$, con esto el lado derecho de la expresión:

$$\frac{1}{z^{1^2}} + \frac{1}{z^{2^2}} + \cdots + \frac{1}{z^{12^2}} = 6\frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

Multiplicando ambos resultados se tiene que: (usando $\bar{z}z = |z|^2$)

$$\left(z^{1^2} + z^{2^2} + \cdots + z^{12^2}\right)\left(\frac{1}{z^{1^2}} + \frac{1}{z^{2^2}} + \cdots + \frac{1}{z^{12^2}}\right) = \boxed{36}$$

$\mathcal{S}$ **Problema 4**

Problema 5

Sabiendo la relación de las medianas y el gravicentro, entonces tomando los segmentos de recta, simplemente se realiza dicho procedimiento. Tomando cualquier lado (en este caso se tomará ac)

$\mathcal{S}$ se tiene que el punto medio entre dichos vértices es:

$$\frac{a+c}{2}$$

$\mathcal{S}$

Ahora, para el segmento entre este nuevo punto y el vértice restante es:

$$b + t\left(\frac{a+c}{2} - b\right)$$

Por la relación se tiene que $t = 2/3$, con esto y desarrollando se tiene:

$$\boxed{G = \frac{a+b+c}{3}}$$

$\mathcal{S}$

Problema 6
Por inducción, el caso base se cumple claramente. La hipotesis inductiva: $n = k$

$$\cos\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos{(2k-1)\theta} = \frac{\sin 2k\theta}{2\sin\theta}$$

Paso inductivo $k+1$:

$$\cos\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos{(2k+1)\theta} = \frac{\sin 2k\theta}{2\sin\theta} + \cos{(2k+1)\theta}$$

Tomando el lado derecho de la ecuación, se tiene que:

$$= \frac{1}{2\sin\theta}\left[\sin 2k\theta + \underbrace{2\cos\theta\sin\theta}_{\sin 2\theta}\cos 2k\theta - 2\sin^2\theta\sin 2k\theta\right]$$

$$= \frac{1}{2\sin\theta}[\sin 2k\theta\cos 2\theta + \sin 2\theta\cos 2k\theta]$$

Con lo que, utilizando identidades trigonométricas, se tiene que:

$$\cos\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos{(2k+1)\theta} = \frac{\sin 2(k+1)\theta}{2\sin\theta}$$

□

$\mathcal{S}$

Problema 7
Tomando a dos complejos z_1 y z_2, con parte real y compleja pertenecientes a los naturales; lo que implica que, $|z_1|^2 = \mathrm{Re}\{z_1\}^2 + \mathrm{Im}\{z_1\}^2$ y $|z_2|^2 = \mathrm{Re}\{z_2\}^2 + \mathrm{Im}\{z_2\}^2$. Por lo que $|z_1|^2, |z_2|^2 \in C$, realizando el producto de los dos módulos $|z_1|^2|z_2|^2 = z_1\bar{z_1}z_2\bar{z_2} = z_1z_2\overline{z_1z_2} = |z_1z_2|^2$. Ahora, verificando que las componentes sean enteros:

$$|z_1z_2|^2 = \left(\underbrace{\mathrm{Re}\{z_1\}\,\mathrm{Re}\{z_2\} - \mathrm{Im}\{z_1\}\,\mathrm{Im}\{z_2\}}_{\in\mathbb{Z}}\right)^2 + \left(\underbrace{\mathrm{Re}\{z_1\}\,\mathrm{Im}\{z_2\} + \mathrm{Re}\{z_2\}\,\mathrm{Im}\{z_1\}}_{\in\mathbb{Z}}\right)^2$$

Por lo que $|z_1z_2|^2 \in C$. □

$\mathcal{S}$

Problema 8
Como se tiene que $\xi = \exp\{\frac{2\pi i}{n}\}$, de modo que el polinomio se puede representar de dos formas distintas:

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = 1 + z + \cdots + z^{n-1}$$

$$(z-1)\prod_{k=1}^{n-1}(z - \xi^k) = z^n - 1$$

Sustituyendo la segunda representación en la primera, con lo que se tiene:

$$\prod_{k=1}^{n-1}(z - \xi^k) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$$

La productoria es representa la serie de multiplicandos dada en el problema, por lo que, sustituyendo $z = 1$ en la ecuación dada, con esto se tiene que el resultado es:

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n-1}(1 - \xi^k) = n}$$

El hecho de hacer $z \to 1$ no genera problema, es sencillo verlo aplicando limites.

$\mathcal{S}$

Problema 9
Como $\lambda_i \geq 0$ y $\lambda 1 + \cdots + \lambda_n = 1$, esto implica que $\lambda_i \leq 1$. Por la desigualdad triangular:

$$\left|\sum_i \lambda_i a_i\right| \leq \sum_i |\lambda_i a_i|$$

Como cada $|a_i|$ y λ_i son menores a 1, entonces su producto también es menor a 1, además de ser menor a ambos factores, con esto es claro que:

$$\sum_i |\lambda_i a_i| < 1$$

Por ende:

$$\left|\sum_i \lambda_i a_i\right| < 1$$

$\square$

$\mathcal{S}$

Problema 10
Expresando los complejos en forma polar y, por teorema de DeMoivre, se tiene:

$$2^m\left[\cos\left(\frac{m\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{m\pi}{3}\right)\right] = 2^{n/2}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right]$$

$\mathcal{S}$

Con esto se tiene que:

$$\cos\left[\pi\left(\frac{m}{3}+\frac{n}{4}\right)\right]+i\sin\left[\pi\left(\frac{m}{3}+\frac{n}{4}\right)\right]=2^{n/2-m}$$

Con esto es necesario que la parte imaginaria sea cero, por ende la suma del ángulo debe de ser par. Además, m debe ser multiplo de 3, y n multiplo de 4, también debe de cumplir que n es el doble de m. Matemáticamente hablando:

$$\left(\frac{m}{3}+\frac{n}{4}\right)\equiv 0 \mod 2$$

Y

$$\frac{n}{2}=m$$

Con esto, se tiene que:

$$\frac{5}{6}m\equiv 0 \mod 2$$

En otra forma $\frac{5}{6}m=2q$, con lo que $m=\frac{12}{5}q$. Para el mínimo de q para que m sea entero, es decir $q=5$, entonces $\boxed{m=12}$ y $\boxed{n=24}$. Al valuar se comprueba que la igualdad se cumple.

$\mathcal{S}$

Problema 11

Reescribiendo la igualdad como una productoria y tomando el seno como función compleja:

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}&=\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{-i}{2}\right)\left(e^{\frac{k\pi i}{n}}-e^{-\frac{k\pi i}{n}}\right)\\&=\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}e^{-\frac{k\pi i}{n}}\left(1-e^{\frac{2\pi ki}{n}}\right)\\&=\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\exp\left\{\frac{-\pi i}{n}\sum_{k=1}^{n-1}k\right\}\underbrace{\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-e^{\frac{2\pi ki}{n}}\right)}_{\frac{z^n-1}{z-1}}\end{aligned}$$

Aplicando L'Hopital a la fracción de polinomios y valuando en 1; además, aplicando la formula de Gauss a la sumatoria dada:

$$=n\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\exp\left\{-\frac{\pi i(n-1)}{2}\right\}$$

Separando la exponencial y sustituyendo por la forma polar del complejo se tiene:

$$=n\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}[i(-i)^n]=\frac{n}{2^{n-1}}i^{2n}(-1)^n=\frac{n}{2^{n-1}}(i^4)^n=\frac{n}{2^{n-1}}$$

Lo que demuestra la igualdad. $\square$

$\mathcal{S}$

Problema 12

Problema 13

Sabiendo que $|z| = \sqrt{2}$, de la expresión dada, se desarrolla la diferencia de cuadrados:

$$\left|(z^2-1)(z-1)\right| = \left|(z-1)^2(z+1)\right|$$

Como el módulo cuadrado es igual al producto entre el complejo y el conjugado:

$$\left|(z+1)(z-1)^2\right|^2 = (z+1)(\bar{z}+1)(z-1)^2(\bar{z}-1)^2$$

Desarrollando y sustituyendo el módulo de z, asi como la identidad $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\{z\}$, se tiene:

$$= \left[9 - 4\,\mathrm{Re}\{z\}^2\right][3 - 2\,\mathrm{Re}\{z\}]$$

$\mathcal{S}$

$$= 27 - 18\,\mathrm{Re}\{z\} - 12\,\mathrm{Re}\{z\}^2 + 8\,\mathrm{Re}\{z\}^3$$

Para encontrar el máximo, el máximo de esta ecuación, también es el máximo para la expresión dada, entonces, $x = \mathrm{Re}\{z\}$, se tiene:

$$f(x) = 27 - 18x - 12x^2 + 8x^3$$

Como es una función de variable real, el criterio de la primera y segunda derivada es válido, por ende:

$$f'(x) = 4x^2 - 4x - 3 = 0$$

De esto, las dos soluciones $x_1 = 3/2$ y $x_2 = -1/2$. Faluandolo en la segunda derivada, se tiene que el máximo de la función esta en x_2. Por lo que, valuando $f(x_2)$, se tiene: $f(-1/2) = 32$, con lo que:

$$\boxed{\left|(z^2-1)(z-1)\right| = \sqrt{32}}$$

Problema 14

Incisos:

a) Sea $z \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| = |\beta| = 1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

($\Rightarrow$) Sabiendo que $z = \alpha + \beta$, con esto $|z| = |\alpha + \beta|$. Utilizando la desigualdad triangular:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| = 2$$

$\mathcal{S}$

Con esto se tiene que:

$$|z| \leq 2$$

($\Leftarrow$) Es claro que existen $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tales que $|\alpha| = |\beta| = 1$, puesto que son números complejos pertenecientes al circulo unitario. Además, por la desigualdad triangular se tiene que $|\alpha| + |\beta| \geq |\alpha + \beta|$. Con esto $\alpha + \beta$ es un vector dentro de la circunferencia de radio 2. Como $|z| \leq 2$, es un vector dentro del circulo de radio 2. Como ambos son arbitrarios, sin pérdida de generalidad, $z = \alpha + \beta$ $\square$

Problema 15
Separando la expresión de la izquierda por pares, se tiene que:

$$\underbrace{\left(\frac{\xi}{1+\xi^2}+\frac{\xi^2}{1+\xi^4}\right)}_{1}+\underbrace{\left(\frac{\xi^3}{1+\xi}+\frac{\xi^4}{1+\xi^3}\right)}_{2}$$

Tomando los parentesis, tomando y desarrollando la suma de fracciones, con esto se tiene que, para 1: (Sabiendo $\xi^5 = 1$)

$$\mathcal{S}$$

$$\left(\frac{\xi}{1+\xi^2}+\frac{\xi^2}{1+\xi^4}\right)=\frac{1+\xi+\xi^2+\xi^4}{(1+\xi^2)(1+\xi^4)}=\frac{1+\xi^2+\xi^4+\xi^6}{(1+\xi^2)(1+\xi^4)}=1$$

Siguiendo con la parte 2:

$$\left(\frac{\xi^3}{1+\xi}+\frac{\xi^4}{1+\xi^3}\right)=\frac{\xi^3+\xi^6+\xi^4+\xi^5}{(1+\xi)(1+\xi^3)}=\frac{1+\xi+\xi^3+\xi^4}{(1+\xi)(1+\xi^3)}=1$$

Por lo que, sumando ambas partes se tiene que:

$$\frac{\xi}{1+\xi^2}+\frac{\xi^2}{1+\xi^4}+\frac{\xi^3}{1+\xi}+\frac{\xi^4}{1+\xi^3}=2$$

□

Problema 16
($\Rightarrow$) Tomando la forma polar del complejo se tiene $z = \cos\theta + i\sin\theta$. Con esto, y por el teorema de DeMoivre es claro que:

$$\sin\theta = -\sin n\theta$$

$$\cos\theta + \cos n\theta = -1$$

$\mathcal{S}$

Claramente, la identidad del seno, y por el dominio de los argumentos, se tiene que el ángulo θ debe cumplir $\theta = 2k\pi - n\theta$. Sustituyendo en la identidad del coseno: $\cos 2k\pi - \theta = \cos 2k\pi \cos\theta +$ $\sin 2k\pi \sin\theta$, por lo que $2\cos\theta = -1$, por lo que $\theta = 2\pi/3$ y $n\theta = 4\pi/3$. De esto es claro que, debido a que para que $2\pi/3$ es tres veces menor que 2π, y el único angulo que cumple que la suma de los cosenos sea -1, es el $4\pi/3$, por lo que el n debe cumplir que $n \equiv 2 \bmod 3$, esto es para que el ángulo sea 240 o un equivalente.

($\Leftarrow$) Sabiendo que $n \equiv 2 \bmod 3$, implica que $n = 3q + 2$ para $q = 0, 1, \ldots$. Además, tomando $x^3 - 1 = 0$ con $|x| \neq 1$. Por lo que $(x-1)(x^2+x+1) = 0$, entonces $x^2 + x + 1 = 0$. Teniendo $p(z) = z^{3q+2} + z + 1$. Despejando $(x+1)$ del polinomio igualado a cero, y valuando x en $p(z)$, se tiene $p(x) = x^2(x^{3q} - 1) = 0$; lo que claramente implica que existe un número complejo con $|x| = 1$, tal que es solución del polinomio $z^{3q+2} + z + 1$. □

Problema 17
$\mathcal{S}$
Nombrando a $|z+1| = \alpha$ y $|z-1| = \beta$, como se trata de módulos, ambos son reales. Además,

nombramos a $z = a + bi$. Con esto, la igualdad se reescribe como:

$$\sqrt{(a-\alpha)^2 + b^2} = \sqrt{(a+\beta)^2 + b^2}$$

Con esto es claro que:

$$(a-\alpha)^2 = (a+\beta)^2$$

Desarrollando ambos lados de la ecuación se llega a lo siguiente:

$$(\alpha+\beta)[(\alpha-\beta) - 2a] = 0$$

$\mathcal{S}$ Con esto se tienen dos casos:

$\alpha + \beta = 0$ Como $\alpha, \beta \geq 0$, entonces $\alpha = -\beta = 0$. Dado esto, se tiene que:

$$(a \pm 1)^2 + b^2 = 0$$

Con esto, se concluye que $\boxed{\text{Im}\{z\} = 0}$ y $\boxed{\text{Re}\{z\} = \pm 1}$.

$(\alpha - \beta) = 2a$ Considerando $\text{Re}\{z\} = 0$, la parte imaginaria queda libre, por lo que, la otra solución a la ecuación propuesta es: $\boxed{\text{Re}\{z\} = 0}$ y por lo tanto $\boxed{\text{Im}\{z\} = \text{libre}}$.

$\square$

$\mathcal{S}$ **Problema 18**