Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Análisis de Variable Compleja 1
Diego Sarceño 201900109
18 de abril de 2021

Tarea 3

Problema 1
Dividiendo en casos, se toma un $|\varepsilon| > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{C}$ cualquiera. Haciendolo muy pequeño se tiene que

$$f(a) < |\varepsilon|,$$

$\mathcal{S}$

como es para cualquier valor, entonces $f(a) = 0$. Ahora, tomando a $(a) = f(z)$ para todo $z \in G$, implica que $f(z)$ tiene un máximo en $\mathbb{C}$, por lo que esta acotada. Utilizando el teorema de Liouville, implica que la función $f(z)$ es constante.

Problema 2
Se toma una integral auxiliar para llegar a las integrales propuestas

$$\int_{|z|=1} e^{-iz^n} \, \mathrm{d}z \,.$$

Como la integral esta sobre el circulo unitario, parametrizando la curva

$$z = \cos\theta + i\sin\theta,$$

de esto, sustituyendo la integral

$$\int_0^{2\pi} e^{\sin n\theta}[\cos(-\cos n\theta) + i\sin(-\cos n\theta)][-\sin\theta + i\cos\theta] \, \mathrm{d}z \,.$$

$\mathcal{S}$

Separando parte real y parte imaginaria, y utilizando identidades trigonométricas,

$$\begin{aligned} &- \int_0^{2\pi} e^{\sin\theta}[\sin\theta\cos(-\cos n\theta) + \cos\theta\sin(-\cos n\theta)] \, \mathrm{d}\theta \\ &+ i\int_0^{2\pi} e^{\sin\theta}[\cos\theta\cos(-\cos n\theta) - \sin\theta\sin(-\cos n\theta)] \, \mathrm{d}\theta \\ = &- \int_0^{2\pi} e^{\sin\theta}\sin(\theta - \cos n\theta) \, \mathrm{d}\theta + i\int_0^{2\pi} e^{\sin\theta}\cos(\theta - \cos n\theta) \, \mathrm{d}\theta \,. \end{aligned}$$

Además, como la función e^{-iz^n} es claro que es holomorfa en el circulo unitario; entonces, por Cauchy, la integral es cero

$$\int_{|z|=1} e^{-iz^n} \, \mathrm{d}z = 0.$$

Por lo que, la parte real y parte imaginaria de la integral deben de ser cero, lo que demuestra que las integrales propuestas son cero.

Problema 3
Definiendo la función
$$g(z) = \frac{f(z)}{z - z_o},$$
derivando respecto a z
$$g'(z) = \frac{f'(z)}{z - z_o} - \frac{f(z)}{(z - z_o)^2}.$$
Integrando la función propuesta, como $z_o \notin \gamma$ ni a su interior, entonces $g'(z)$ es holomorfa en γ:
$$\oint_\gamma g'(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$
Por lo que
$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{z - z_o}\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_o)^2}\,\mathrm{d}z\,.$$
$\square$

Problema 4
Dada la parametrización $\gamma(t) = re^{it}$, para la integral
$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z\,,$$
sustituyendo en la integral,
$$\int_0 \pi e^{ir(\cos t + i\sin t)} \frac{1}{re^{it}} ire^{it}\,\mathrm{d}t\,.$$
Simplificando
$$\int_0 \pi e^{-r\sin t}(i\cos(r\cos t) - \sin(r\cos t))\,\mathrm{d}t\,,$$
esto es análogo a las soluciones de estado estable de ecuaciones diferenciales, en este caso no hay parte estable, solo transitoria, de modo que, al realizar el límite
$$\lim_{r\to\infty} \int_0^\pi e^{-r\sin t}(i\cos(r\cos t) - \sin(r\cos t))\,\mathrm{d}t = 0,$$
obviamente, la analogía es para la variable r.

Problema 5

Problema 6

Problema 7
Incisos:

a) En γ el número de raíces del polinomio para la función dada, son singularidades de dicha función, puesto que cada polinomio (por teorema fundamental del álgebra) se puede represetar de la siguiente forma

$$f(z) = (z - z_1)^{d_1} \cdots (z - z_n)^{d_n},$$

donde $\sum d_i = m$ con $n \leq m$, d_i la multiplicidad de cada raíz y m el grado de f. Suponiendo que de las n raíces p de ellas están dentro de γ, $p \leq n$. Se realiza la derivada del polinomio

$$f'(z) = d_1(z - z_1)^{d_1 - 1} \cdots (z - z_n)^{d_n} + \cdots + (z - z_1)^{d_1} \cdots d_n(z - z_n)^{d_n - 1},$$

con esto, se dividen ambas funciones y se separan en n fracciones

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d_1(z - z_1)^{d_1 - 1} \cdots (z - z_n)^{d_n} + \cdots + (z - z_1)^{d_1} \cdots d_n(z - z_n)^{d_n - 1}}{(z - z_1)^{d_1} \cdots (z - z_n)^{d_n}}$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d_1}{z - z_1} + \cdots + \frac{d_n}{z - z_n}.$$

Al momento de integrar, todas aquellas raíces que no esten dentro de γ, por cauchy, la integral será cero, para las p raíces dentro, se utiliza la primera fórmula de integración de cauchy, se tiene

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z = d_1(2\pi i) + \cdots + d_p(2\pi i)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{p} d_i,$$

lo que es el número de raíces dentro de γ contando sus multiplicidades.

b)

$\mathcal{S}$

Problema 8
Como γ es una curva cerrada simple, utilizando la primera fórmula de cauchy, se tiene que

$$f'(0) = \frac{1!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z^2} \, \mathrm{d}z \, .$$

Encontrando el módulo de ambos lados; además, sabiendo que $|z| < 1$, se tiene

$$\left| f'(0) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \right| \left| \int_\gamma \frac{f(z)}{z^2} \, \mathrm{d}z \right| < \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z \right|,$$

por desigualdad ML

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z \right| \leq \frac{1}{2\pi}(M = 1) * (L = 2\pi) = 1.$$

Por lo que

$$\left| f'(0) \right| \leq 1.$$

$\mathcal{S}$

$\boxed{\mathcal{S}}$ $\square$

$\boxed{\mathcal{S}}$ Problema 9

$\boxed{\mathcal{S}}$ Problema 10