

Universidad de San Carlos de Guatemala Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas Análisis de Variable Compleja 1 Diego Sarceño 201900109 18 de marzo de 2021



Tarea 2



Problema 1



Problema 2

Problema 3

Para la función f(z) = |z|, si la función es entera, implica directamente que es holomorfa. Por contradicción se asumirá la función holomorfa; entonces, la parte real e imaginaria son armónicas, de modo que:

$$\nabla^2 f = 0$$



Aplicando el laplaciano:

$$\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$$

Lo que contradice el hecho de que sea holomorfa, puesto que la igualdad no se cumple en ningún $z \in \mathbb{C}$, por lo tanto f no es entera.

Problema 4

 (\Rightarrow) Si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, entonces su parte real e imaginaria es cero. Desarrollando las derivadas parciales de la definición:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = u_x + iv_x,$$
 $\frac{\partial f}{\partial y} = u_y + iv_y.$

Sustituyendo se tiene

$$= \frac{1}{2}[(u_x - v_y) + (u_y - v_y)i].$$



Como la parte real e imaginaria son cero, entonces,

$$u_x = v_y$$

$$u_y = -v_x$$

Las cuales son las ecuaciones de Cauchy-Riemann. (\Leftarrow)

S

Problema 5

Problema 6

Incisos:

a)

b) Tomando la forma exponencial del seno, se tiene que:

$$\sin\sqrt{z} = \frac{e^{i\sqrt{z}} - e^{-i\sqrt{z}}}{2i}$$

Utilizando el teorema de DeMoivre se puede descomponer $\sqrt{z} = |z|^{1/2} (\cos \theta/2 + i \sin \theta/2)$. Por simplicidad se tomará a $a = |z|^{1/2}$.

$$=\frac{e^{ai\cos\theta/2}e^{-a\sin\theta/2}-e^{-ai\cos\theta/2}e^{a\sin\theta/2}}{2i}$$

Sumando y restando el primer término pero con la segunda exponencial en signo positivo; de modo que:

$$=\frac{1}{i}e^{ai\cos\theta/2}\underbrace{\left[\frac{e^{a\sin\theta/2}+e^{-a\sin\theta/2}}{2}\right]}_{\cosh\left(a\sin\theta/2\right)}-\frac{e^{-ai\cos\theta/2}e^{a\sin\theta/2}}{2i}-\frac{e^{ai\cos\theta/2}e^{a\sin\theta/2}}{2i}$$

Volviendo a sumar y restar el mismo término se tiene que:

$$= \cosh\left(a\sin\theta/2\right)\sin\left(a\cos\theta/2\right) - i\left(\underbrace{\frac{e^{ai\cos\theta/2} + e^{-ai\cos\theta/2}}{2}}_{\cos\left(a\cos\theta/2\right)}\right)\cosh\left(a\sin\theta/2\right)$$

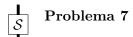
$$+ie^{a\sin\theta/2} \left[\underbrace{\frac{e^{ai\cos\theta/2} + e^{-ai\cos\theta/2}}{2}}_{\cos(a\cos\theta/2)}\right]$$

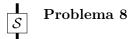
Reduciendo y simplificando:

$$= \cosh\left(a\sin\theta/2\right)\sin\left(a\cos\theta/2\right) + i\cos\left(a\cos\theta/2\right) \left(\underbrace{\frac{-e^{a\sin\theta/2} - e^{-a\sin\theta/2}}{2} + e^{a\sin\theta/2}}_{\sinh\left(a\sin\theta/2\right)} + e^{a\sin\theta/2}\right)$$

El resultado de la expansión es:

$$\sin \sqrt{z} = \cosh \left(|z|^{1/2} \sin \theta /2 \right) \sin \left(|z|^{1/2} \cos \theta /2 \right) + i \sinh \left(|z|^{1/2} \sin \theta /2 \right) \cos \left(|z|^{1/2} \cos \theta /2 \right)$$





 $\begin{array}{c|c} I & Problema 9 \\ \hline I & \end{array}$