



TAREA 2

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Para la función $f(z) = |z|$, si la función es entera, implica directamente que es holomorfa. Por contradicción se asumirá la función holomorfa; entonces, la parte real e imaginaria son armónicas, de modo que:

$$\nabla^2 f = 0$$

Aplicando el laplaciano:

$$\frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0$$

Lo que contradice el hecho de que sea holomorfa, puesto que la igualdad no se cumple en ningún $z \in \mathbb{C}$, por lo tanto f no es entera. \square

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Incisos:

a)

b) Tomando la forma exponencial del seno, se tiene que:

$$\sin \sqrt{z} = \frac{e^{i\sqrt{z}} - e^{-i\sqrt{z}}}{2i}$$

Utilizando el teorema de DeMoivre se puede descomponer $\sqrt{z} = |z|^{1/2} (\cos \theta/2 + i \sin \theta/2)$.

Por simplicidad se tomará a $a = |z|^{1/2}$.

$$= \frac{e^{ai \cos \theta/2} e^{-a \sin \theta/2} - e^{-ai \cos \theta/2} e^{a \sin \theta/2}}{2i}$$

Sumando y restando el primer término pero con la segunda exponencial en signo positivo; de modo que:

$$= \frac{1}{i} e^{ai \cos \theta/2} \left[\underbrace{\frac{e^{a \sin \theta/2} + e^{-a \sin \theta/2}}{2}}_{\cosh(a \sin \theta/2)} \right] - \frac{e^{-ai \cos \theta/2} e^{a \sin \theta/2}}{2i} - \frac{e^{ai \cos \theta/2} e^{a \sin \theta/2}}{2i}$$

Volviendo a sumar y restar el mismo término se tiene que:

$$= \cosh(a \sin \theta/2) \sin(a \cos \theta/2) - i \left(\underbrace{\frac{e^{ai \cos \theta/2} + e^{-ai \cos \theta/2}}{2}}_{\cos(a \cos \theta/2)} \right) \cosh(a \sin \theta/2) \\ + i e^{a \sin \theta/2} \left[\underbrace{\frac{e^{ai \cos \theta/2} + e^{-ai \cos \theta/2}}{2}}_{\cos(a \cos \theta/2)} \right]$$

Reduciendo y simplificando:

$$= \cosh(a \sin \theta/2) \sin(a \cos \theta/2) + i \cos(a \cos \theta/2) \left(\underbrace{\frac{-e^{a \sin \theta/2} - e^{-a \sin \theta/2}}{2}}_{\sinh(a \sin \theta/2)} + e^{a \sin \theta/2} \right)$$

El resultado de la expansión es:

$$\sin \sqrt{z} = \cosh(|z|^{1/2} \sin \theta/2) \sin(|z|^{1/2} \cos \theta/2) + i \sinh(|z|^{1/2} \sin \theta/2) \cos(|z|^{1/2} \cos \theta/2)$$

S

Problema 7

S

Problema 8

S

Problema 9