



ANÁLISIS DE VARIABLE COMPLEJA 1

Problema 1

Tomando la propiedad $z\bar{z} = |z|^2$, se tiene:

$$\left| \frac{z + \alpha}{1 + \bar{\alpha}z} \right|^2 = \left(\frac{z + \alpha}{1 + \bar{\alpha}z} \right) \left(\frac{\bar{z} + \bar{\alpha}}{1 + \alpha\bar{z}} \right)$$

Desarrollando se tiene:

$$= \frac{|z|^2 + |\alpha|^2 + \bar{z}\alpha + \bar{\bar{z}}\bar{\alpha}}{1 + \bar{\alpha}z + \bar{\alpha}\bar{z} + |\bar{\alpha}z|^2} = \frac{|z|^2 + |\alpha|^2 + 2\operatorname{Re}\{\bar{z}\alpha\}}{1 + 2\operatorname{Re}\{\bar{\alpha}z\} + |\bar{\alpha}z|^2}$$

Por las condiciones del problema se tiene que $|z|^2|\alpha|^2 < 2$ y $|\alpha z|^2 < 1$, con lo que:

$$< \frac{2 + 2\operatorname{Re}\{\bar{z}\alpha\}}{2 + 2\operatorname{Re}\{\bar{\alpha}z\}} = 1$$

Asumiendo que existe caso de igualdad, se toma:

S

$$|z + \alpha| = |1 + \bar{\alpha}z|$$

Siguiendo la idea del inicio:

$$(z + \alpha)(\bar{z} + \bar{\alpha}) = (1 + \bar{\alpha}z)(1 + \alpha\bar{z})$$

Desarrollando se llega a:

$$|z|^2 + |\alpha|^2 = 1 + |z|^2|\alpha|^2$$

De modo que:

$$(1 - |z|^2)(1 - |\alpha|^2) = 0$$

Como $|\alpha| < 1$, entonces es necesario que $|z| = 1$. Con esto se concluye que:

$$\left| \frac{z + \alpha}{1 + \bar{\alpha}z} \right| \leq 1$$

Con el caso de igualdad cuando z esta en el circulo unitario. □

S

Problema 2

Es claro que el módulo de z es 1, con lo que, la forma polar esta dada por:

$$z = \text{cis } \pi/4$$

Sabiendo el Teorema de Moivre, se tiene que:

$$\text{cis } 1^2 \pi/4 + \text{cis } 2^2 \pi/4 + \cdots + \text{cis } 12^2 \pi/4$$

Con esto, para los impares se tiene que $1 + i/\sqrt{2}$. Multiplos de 4, el resultado es 1 y pares no multiplos de 4 se tiene -1 . De modo que:

S

$$z^{1^2} + z^{2^2} + \cdots + z^{12^2} = 6 \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

Para el lado derecho, se tiene que el inverso de $(1 + i/\sqrt{2})^{-1} = 1 - i/\sqrt{2}$, con esto el lado derecho de la expresión:

$$\frac{1}{z^{1^2}} + \frac{1}{z^{2^2}} + \cdots + \frac{1}{z^{12^2}} = 6 \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

Multiplicando ambos resultados se tiene que: (usando $\bar{z}z = |z|^2$)

$$(z^{1^2} + z^{2^2} + \cdots + z^{12^2}) \left(\frac{1}{z^{1^2}} + \frac{1}{z^{2^2}} + \cdots + \frac{1}{z^{12^2}} \right) = \boxed{36}$$

Problema 3

Sabiendo la relación de las medianas y el gravicentro, entonces tomando los segmentos de recta, simplemente se realiza dicho procedimiento. Tomando cualquier lado (en este caso se tomará ac) se tiene que el punto medio entre dichos vértices es:

$$\frac{a+c}{2}$$

S

Ahora, para el segmento entre este nuevo punto y el vértice restante es:

$$b + t \left(\frac{a+c}{2} - b \right)$$

Por la relación se tiene que $t = 2/3$, con esto y desarrollando se tiene:

$$G = \frac{a+b+c}{3}$$

Problema 4

Por inducción, el caso base se cumple claramente. La hipotesis inductiva: $n = k$

S

$$\cos \theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos (2k-1)\theta = \frac{\sin 2k\theta}{2 \sin \theta}$$

Paso inductivo $k + 1$:

$$\cos \theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos (2k + 1)\theta = \frac{\sin 2k\theta}{2 \sin \theta} + \cos (2k + 1)\theta$$

Tomando el lado derecho de la ecuación, se tiene que:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2 \sin \theta} \left[\sin 2k\theta + \underbrace{2 \cos \theta \sin \theta}_{\sin 2\theta} \cos 2k\theta - 2 \sin^2 \theta \sin 2k\theta \right] \\ &= \frac{1}{2 \sin \theta} [\sin 2k\theta \cos 2\theta + \sin 2\theta \cos 2k\theta] \end{aligned}$$

Con lo que, utilizando identidades trigonométricas, se tiene que:

$$\cos \theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos (2k + 1)\theta = \frac{\sin 2(k + 1)\theta}{2 \sin \theta}$$

□

Problema 5

Como $\lambda_i \geq 0$ y $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, esto implica que $\lambda_i \leq 1$. Por la desigualdad triangular:

$$\left| \sum_i \lambda_i a_i \right| \leq \sum_i |\lambda_i a_i|$$

Como cada $|a_i|$ y λ_i son menores a 1, entonces su producto también es menor a 1, además de ser menor a ambos factores, con esto es claro que:

$$\sum_i |\lambda_i a_i| < 1$$

Por ende:

$$\left| \sum_i \lambda_i a_i \right| < 1$$

□

Problema 6

Expresando los complejos en forma polar y, por teorema de DeMoivre, se tiene:

$$2^m \left[\cos \left(\frac{m\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{m\pi}{3} \right) \right] = 2^{n/2} \left[\cos \left(\frac{n\pi}{4} \right) - i \sin \left(\frac{n\pi}{4} \right) \right]$$

Con esto se tiene que:

$$\cos \left[\pi \left(\frac{m}{3} + \frac{n}{4} \right) \right] + i \sin \left[\pi \left(\frac{m}{3} + \frac{n}{4} \right) \right] = 2^{n/2-m}$$

Con esto es necesario que la parte imaginaria sea cero, por ende la suma del ángulo debe de ser par. Además, m debe ser multiplo de 3, y n multiplo de 4, también debe de cumplir que n es el

doble de m . Matemáticamente hablando:

$$\left(\frac{m}{3} + \frac{n}{4}\right) \equiv 0 \pmod{2}$$

Y

$$\frac{n}{2} = m$$

S

Con esto, se tiene que:

$$\frac{5}{6}m \equiv 0 \pmod{2}$$

En otra forma $\frac{5}{6}m = 2q$, con lo que $m = \frac{12}{5}q$. Para el mínimo de q para que m sea entero, es decir $q = 5$, entonces $m = 12$ y $n = 24$. Al evaluar se comprueba que la igualdad se cumple.

Problema 7

Sabiendo que $|z| = \sqrt{2}$, de la expresión dada, se desarrolla la diferencia de cuadrados:

$$|(z^2 - 1)(z - 1)| = |(z - 1)^2(z + 1)|$$

Como el módulo cuadrado es igual al producto entre el complejo y el conjugado:

$$|(z + 1)(z - 1)^2|^2 = (z + 1)(\bar{z} + 1)(z - 1)^2(\bar{z} - 1)^2$$

Desarrollando y sustituyendo el módulo de z , así como la identidad $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}\{z\}$, se tiene:

$$= [9 - 4 \operatorname{Re}\{z\}^2][3 - 2 \operatorname{Re}\{z\}]$$

$$= 27 - 18 \operatorname{Re}\{z\} - 12 \operatorname{Re}\{z\}^2 + 8 \operatorname{Re}\{z\}^3$$

S

Para encontrar el máximo, el máximo de esta ecuación, también es el máximo para la expresión dada, entonces, $x = \operatorname{Re}\{z\}$, se tiene:

$$f(x) = 27 - 18x - 12x^2 + 8x^3$$

Como es una función de variable real, el criterio de la primera y segunda derivada es válido, por ende:

$$f'(x) = 4x^2 - 4x - 3 = 0$$

De esto, las dos soluciones $x_1 = 3/2$ y $x_2 = -1/2$. Evaluándolo en la segunda derivada, se tiene que el máximo de la función está en x_2 . Por lo que, valuando $f(x_2)$, se tiene: $f(-1/2) = 32$, con lo que:

$$|(z^2 - 1)(z - 1)| = \sqrt{32}$$

Problema 8

Incisos:

S

a) Sea $z \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| = |\beta| = 1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

(\Rightarrow) Sabiendo que $z = \alpha + \beta$, con esto $|z| = |\alpha + \beta|$. Utilizando la desigualdad triangular:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| = 2$$

Con esto se tiene que:

$$|z| \leq 2$$

(\Leftarrow) Es claro que existen $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tales que $|\alpha| = |\beta| = 1$, puesto que son números complejos pertenecientes al círculo unitario. Además, por la desigualdad triangular se tiene que $|\alpha| + |\beta| \geq |\alpha + \beta|$. Con esto $\alpha + \beta$ es un vector dentro de la circunferencia de radio 2. Como $|z| \leq 2$, es un vector dentro del círculo de radio 2. Como ambos son arbitrarios, sin pérdida de generalidad, $z = \alpha + \beta$ \square

Problema 9

Separando la expresión de la izquierda por pares, se tiene que:

$$\underbrace{\left(\frac{\xi}{1+\xi^2} + \frac{\xi^2}{1+\xi^4} \right)}_1 + \underbrace{\left(\frac{\xi^3}{1+\xi} + \frac{\xi^4}{1+\xi^3} \right)}_2$$

Tomando los parentesis, tomando y desarrollando la suma de fracciones, con esto se tiene que, para 1: (Sabiendo $\xi^5 = 1$)

$$\left(\frac{\xi}{1+\xi^2} + \frac{\xi^2}{1+\xi^4} \right) = \frac{1+\xi+\xi^2+\xi^4}{(1+\xi^2)(1+\xi^4)} = \frac{1+\xi^2+\xi^4+\xi^6}{(1+\xi^2)(1+\xi^4)} = 1$$

Siguiendo con la parte 2:

$$\left(\frac{\xi^3}{1+\xi} + \frac{\xi^4}{1+\xi^3} \right) = \frac{\xi^3+\xi^6+\xi^4+\xi^5}{(1+\xi)(1+\xi^3)} = \frac{1+\xi+\xi^3+\xi^4}{(1+\xi)(1+\xi^3)} = 1$$

Por lo que, sumando ambas partes se tiene que:

$$\frac{\xi}{1+\xi^2} + \frac{\xi^2}{1+\xi^4} + \frac{\xi^3}{1+\xi} + \frac{\xi^4}{1+\xi^3} = 2$$

\square

Problema 10

Nombrando a $|z+1| = \alpha$ y $|z-1| = \beta$, como se trata de módulos, ambos son reales. Además, nombramos a $z = a + bi$. Con esto, la igualdad se reescribe como:

$$\sqrt{(a-\alpha)^2 + b^2} = \sqrt{(a+\beta)^2 + b^2}$$

Con esto es claro que:

$$(a-\alpha)^2 = (a+\beta)^2$$

Desarrollando ambos lados de la ecuación se llega a lo siguiente:

$$(\alpha + \beta)[(\alpha - \beta) - 2a] = 0$$

Con esto se tienen dos casos:

$\alpha + \beta = 0$ Como $\alpha, \beta \geq 0$, entonces $\alpha = -\beta = 0$. Dado esto, se tiene que:

$$(a \pm 1)^2 + b^2 = 0$$

\mathcal{S}

Con esto, se concluye que $\boxed{\operatorname{Im}\{z\} = 0}$ y $\boxed{\operatorname{Re}\{z\} = \pm 1}$.

$(\alpha - \beta) = 2a$ Considerando $\operatorname{Re}\{z\} = 0$, la parte imaginaria queda libre, por lo que, la otra solución a la ecuación propuesta es: $\boxed{\operatorname{Re}\{z\} = 0}$ y por lo tanto $\boxed{\operatorname{Im}\{z\} = \text{libre}}$.

□