Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Mecánica 3
Diego Sarceño 201900109
16 de noviembre de 2021

Tarea 6

1. Problema 1

Dada la fuerza gravitacional

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}$$

y la condición $M \gg m$, se tiene:

a) Dado que la fuerza (en coordenadas polares) se define como $-\frac{\partial U}{\partial r} = F$ (Magnitud), se tiene que la energía potencial, al integrar, es.

$$\boxed{U = -\frac{GMm}{r}}$$

b) Dada la definición general de energía cinética para coordenadas ortogonales

$$T = \frac{1}{2}m\left(h_1^2\dot{q}_1^2 + h_2^2\dot{q}_2^2 + h_3^2\dot{q}_3^2 + \cdots\right)$$

Para coordenadas polares, se tiene los factores de escala $h_r = 1$; $h_\theta = r$, sustituyendo y sabiendo que $\dot{r} = 0$, entonces

$$\boxed{T = \frac{1}{2}mr\dot{\theta}^2}$$

c) Dada la energía cinética y potencial del planeta, se tiene que el lagrangiano es:

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}mr\dot{\theta}^2 + \frac{GMm}{r}}$$

d) Para el hamiltoniano, se tienen los momentum conjugados:

$$\begin{cases} p_r = 0 \\ p_\theta = mr\dot{\theta} \end{cases}$$

Con esto, sustituyendo en la definición de hamiltoneano, se tiene:

$$\boxed{H = \frac{1}{2}mr\dot{\theta}^2 - \frac{GMm}{r}}$$

e) Dado que se tienen únicamente dos grados de libertad, se tienen dos ecuaciones de Euler-Lagrange, de modo que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = 0 \to \boxed{r^2\dot{\theta}^2 = 2GM}$$

, para la otra coordenada

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = 0 \to \boxed{\ddot{\theta} = 0}$$

2. Problema 2

Dado el lagrangiano y que se conseva dadas las transformaciones, entonces se tiene:

$$\mathcal{L}(t, q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n) = \mathcal{L}(t + \delta t, q_1 + \delta q_1, \ldots, q_n + \delta q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$$

Esto implica que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ y $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$, dada la primera igualdad se tiene

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0,$$

el hamiltoniano se conserva; además, dada la segunda igualdad

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = 0,$$

por lo que, los momentum conjugados se conservan. Dadas ambas conclusiones, y que δt y δq_i no dependen del tiempo, se tiene claro, aplicando el Teorema de Noether, que

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_i^n p_i \delta q_i - H\delta t\right] = 0;$$

lo que, en efecto, implica que $\displaystyle\sum_i^n p_i \delta q_i - H\delta t = \text{cte}.$

3. Problema 3

4. Problema 4