Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Mecánica 3
Diego Sarceño 201900109
19 de noviembre de 2021

Tarea 6

1. Problema 1

Dada la fuerza gravitacional

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}$$

y la condición $M \gg m$, se tiene:

a) Dado que la fuerza (en coordenadas polares) se define como $-\frac{\partial U}{\partial r} = F$ (Magnitud), se tiene que la energía potencial, al integrar, es.

$$\boxed{U = -\frac{GMm}{r}}$$

b) Dada la definición general de energía cinética para coordenadas ortogonales

$$T = \frac{1}{2}m\left(h_1^2\dot{q}_1^2 + h_2^2\dot{q}_2^2 + h_3^2\dot{q}_3^2 + \cdots\right)$$

Para coordenadas polares, se tiene los factores de escala $h_r = 1$; $h_\theta = r$, sustituyendo y sabiendo que $\dot{r} = 0$, entonces

$$\boxed{T = \frac{1}{2}mr\dot{\theta}^2}$$

c) Dada la energía cinética y potencial del planeta, se tiene que el lagrangiano es:

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}mr\dot{\theta}^2 + \frac{GMm}{r}}$$

d) Para el hamiltoniano, se tienen los momentum conjugados:

$$\begin{cases} p_r = 0 \\ p_\theta = mr\dot{\theta} \end{cases}$$

Con esto, sustituyendo en la definición de hamiltoneano, se tiene:

$$\boxed{\mathcal{H} = \frac{1}{2}mr\dot{\theta}^2 - \frac{GMm}{r}}$$

e) Dado que se tienen únicamente dos grados de libertad, se tienen dos ecuaciones de Euler-Lagrange, de modo que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = 0 \rightarrow \boxed{r^2\dot{\theta}^2 = 2GM}$$

, para la otra coordenada

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = 0 \rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = 0}$$

2. Problema 2

Dado el lagrangiano y que se conseva dadas las transformaciones, entonces se tiene:

$$\mathcal{L}(t, q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n) = \mathcal{L}(t + \delta t, q_1 + \delta q_1, \ldots, q_n + \delta q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$$

Esto implica que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ y $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$, dada la primera igualdad se tiene

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0,$$

el hamiltoniano se conserva; además, dada la segunda igualdad

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = 0,$$

por lo que, los momentum conjugados se conservan. Dadas ambas conclusiones, y que δt y δq_i no dependen del tiempo, se tiene claro, aplicando el Teorema de Noether, que

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_i^n p_i \delta q_i - \mathcal{H}\delta t\right] = 0;$$

lo que, en efecto, implica que $\displaystyle\sum_i^n p_i \delta q_i - \mathcal{H}\delta t = \text{cte}.$

3. Problema 3

Dada la relación $q_1' = q_1 \cos\theta + q_2 \sin\theta$ y $q_2' = -q_1 \sin\theta + q_2 \cos\theta$. Por lo que, los deltas quedan tal que: $\delta q_1 = q_1(\cos\theta - 1) + q_2 \sin\theta$ y $\delta q_2 = -q_1 \sin\theta + q_2(\cos\theta - 1)$. Multiplicando y dividiendo entre θ, luego tomando el límite dentro del parentesis cuando $\theta \to 0$, lo que da:

$$\delta q_1 = \left[\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{q_1(\cos\theta - 1)}{\theta} + \frac{q_2 \sin\theta}{\theta}\right)\right]\theta,$$

$$\delta q_2 = \left[\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{q_2(\cos\theta - 1)}{\theta} - \frac{q_1 \sin\theta}{\theta}\right)\right]\theta.$$

Con esto se concluye que $\delta q_1 = q_2\theta$ y $\delta q_2 = q_1\theta$. Ahora, por el teorema de Noether ($\delta t = 0$):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[p_1 q_2 \theta - p_2 q_1 \theta] = 0;$$

por lo tanto, $J = p_1 q_2 - p_2 q_1 = \text{cte}.$

4. Problema 4

Dadas las fuerzas involucradas $f_i = f_i^c + f_i^h + f_i^d$ con N partículas y k restricciones holonómicas. Con esto, tenemos, por definición

$$f_i - \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = 0;$$

con lo que

$$\sum_{i=1}^{N}\left(f_i^c + f_i^h - \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}\right)\cdot \mathrm{d}r_i = -\sum_{i=1}^{N} f_i^d \cdot \mathrm{d}r_i\,. \tag{1}$$

Por el principio del trabajo virutal, se tiene que $f_i^h \cdot \mathrm{d}r_i$. Además, se tiene que $\mathrm{d}r_i$ es virtual, por lo que respeta las restricciones holonómicas, entonces

$$\mathrm{d}r_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\,\mathrm{d}q_j \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}r_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1} \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\dot{q}_j.$$

También se tiene $\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial r_i}{\partial q_j}$ y $T_i = \frac{p_i\cdot p_i}{2m_i}$. Ahora, se tienen dos relaciones matemáticas útiles:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_j} + p_i \cdot \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\mathrm{d}r_i}{\mathrm{d}t}\right) \\ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(p_i\cdot p_i) = 2p_i \cdot \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} \end{cases} \begin{matrix} \Rightarrow \\ \text{lo que implica} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}q_j}\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p_i\cdot\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - p_i \cdot \frac{\partial v_i}{\partial q_j} \\ \frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_j} = p_i \cdot \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j};\; \frac{\partial T_i}{\partial q_j} = p_i\cdot\frac{\partial v_i}{\partial q_j}. \end{matrix}$$

Sustituyendo las dos últimas ecuaciones en la primera mostrada en la llave, se tiene que:

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}q_j}\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T_i}{\partial q_j},$$

realizando la sumatoria respecto al número de partículas en el sistema

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T_i}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j},$$

entonces:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}q_j}\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\,\mathrm{d}q_j = \sum_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}. \tag{2}$$

Ahora, para el término de las fuerzas conservativas, se tiene

$$\sum_{i=1}^{N} f_i^c \cdot \mathrm{d}r_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{N} f_i^c \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\,\mathrm{d}q_j\,;$$

además, se sabe que $f_i^c = -\boldsymbol{\nabla} U$, lo que de forma expandida es

$$f_i^c = -\frac{\partial U}{\partial x_i}\hat{\boldsymbol{\imath}} - \frac{\partial U}{\partial y_i}\hat{\boldsymbol{\jmath}} - \frac{\partial U}{\partial z_i}\hat{\mathbf{z}}$$

y

$$\frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{\partial y_i}{\partial q_j}\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{\partial z_i}{\partial q_j}\hat{\mathbf{z}}.$$

Por lo tanto, realizando la sumatoria se tiene

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)\mathrm{d}q_j = \frac{\partial U}{\partial q_j}\,\mathrm{d}q_j\,,$$

por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{N} f_i^c \cdot \mathrm{d}r_i = -\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial q_j}\,\mathrm{d}q_j\,,$$

como el potencial no depende de $\dot{q}_j$ entonces $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = 0$, con esto y la ecuación (2), se tiene ($\mathcal{L} = T - U$)

$$\sum_{i=1}^{N} \left(f_i^c - \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} \right) \cdot \mathrm{d}r_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right) \mathrm{d}q_j \, . \tag{3}$$

Para las fuerzas disipativas se tiene que el producto escalar entre ellas y el diferencial de posición siempre es negativo, por lo que se dicha fuerza se tomará directamente positiva y se obviará el signo negativo. Dado esto, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{N} f_i^d \cdot \mathrm{d}r_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} f_i^d \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \mathrm{d}q_j \, , \tag{4}$$

igualando (3) y (4) debido a la ecuación (1), se tiene que

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right) \mathrm{d}q_j = \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{N} f_i^d \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right] \mathrm{d}q_j \, ,$$

dada la igualdad, se obvia la sumatoria respecto a j, entonces

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j; \quad Q_j = \sum_{i=1}^{N} f_i^d \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j}}$$