

Universidad de San Carlos de Guatemala Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas Mecánica 3 Diego Sarceño 201900109 18 de noviembre de 2021



Tarea 6

1. Problema 1

Dada la fuerza gravitacional

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}$$

y la condición $M \gg m$, se tiene:

a) Dado que la fuerza (en coordenadas polares) se define como $-\frac{\partial U}{\partial r} = F$ (Magnitud), se tiene que la energía potencial, al integrar, es.

$$U = -\frac{GMm}{r}$$

b) Dada la definición general de energía cinética para coordenadas ortogonales

$$T = \frac{1}{2}m(h_1^2\dot{q}_1^2 + h_2^2\dot{q}_2^2 + h_3^2\dot{q}_3^2 + \cdots)$$

Para coordenadas polares, se tiene los factores de escala $h_r = 1$; $h_\theta = r$, sustituyendo y sabiendo que $\dot{r} = 0$, entonces

$$T = \frac{1}{2} m r \dot{\theta}^2$$

c) Dada la energía cinética y potencial del planeta, se tiene que el lagrangiano es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mr\dot{\theta}^2 + \frac{GMm}{r}$$

d) Para el hamiltoniano, se tienen los momentum conjugados:

$$\begin{cases} p_r = 0 \\ p_\theta = mr\dot{\theta} \end{cases}$$

Con esto, sustituyendo en la definición de hamiltoneano, se tiene:

$$H = \frac{1}{2}mr\dot{\theta}^2 - \frac{GMm}{r}$$

e) Dado que se tienen únicamente dos grados de libertad, se tienen dos ecuaciones de Euler-Lagrange, de modo que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = 0 \rightarrow \boxed{r^2 \dot{\theta}^2 = 2GM}$$

, para la otra coordenada

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = 0 \to \left[\ddot{\theta} = 0 \right]$$

2. Problema 2

Dado el lagrangiano y que se conseva dadas las transformaciones, entonces se tiene:

$$\mathcal{L}(t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = \mathcal{L}(t + \delta t, q_1 + \delta q_1, \dots, q_n + \delta q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$$

Esto implica que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ y $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$, dada la primera igualdad se tiene

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0,$$

el hamiltoniano se conserva; además, dada la segunda igualdad

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = 0,$$

por lo que, los momentum conjugados se conservan. Dadas ambas conclusiones, y que δt y δq_i no dependen del tiempo, se tiene claro, aplicando el Teorema de Noether, que

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\sum_{i=1}^{n} p_{i} \delta q_{i} - H \delta t \right] = 0;$$

lo que, en efecto, implica que $\sum_{i}^{n} p_{i} \delta q_{i} - H \delta t = \text{cte.}$

3. Problema 3

Dada la relación $q_1' = q_1 \cos \theta + q_2 \sin \theta$ y $q_2' = -q_1 \sin \theta + q_2 \cos \theta$. Por lo que, los deltas quedan tal que: $\delta q_1 = q_1(\cos \theta - 1) + q_2 \sin \theta$ y $\delta q_2 = -q_1 \sin \theta + q_2(\cos \theta - 1)$. Multiplicando y dividiendo entre θ , luego tomando el límite dentro del parentesis cuando $\theta \to 0$, lo que da:

$$\delta q_1 = \left[\lim_{\theta \to 0} \left(\frac{q_1(\cos \theta - 1)}{\theta} + \frac{q_2 \sin \theta}{\theta} \right) \right] \theta,$$

$$\delta q_2 = \left[\lim_{\theta \to 0} \left(\frac{q_2(\cos \theta - 1)}{\theta} - \frac{q_1 \sin \theta}{\theta} \right) \right] \theta.$$

Con esto se concluye que $\delta q_1=q_2\theta$ y $\delta q_2=q_1\theta$. Ahora, por el teorema de Noether ($\delta t=0$):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[p_1q_2\theta - p_2q_1\theta] = 0;$$

por lo tanto, $J = p_1 q_2 - p_2 q_1 = \text{cte.}$

4. Problema 4