Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Mecánica Estadística
Diego Sarceño 201900109
23 de marzo de 2022

Hoja de Trabajo 3

1. Problema 1

Teniendo el sistema $A^{(0)}$ compuesto por A y A' y sabiendo que A es muy pequeño en comparaión con A', por conservación de la energía

$$E_r + E' = E^{(0)}.$$

Entonces, cuanto A tiene una energía E_r A' tiene energía $E' = E^{(0)} - E_r$. Si A esta en un estado definido r el número de estados accesibles para A' en el sistema total $A^{(0)}$ es

$$\Omega'(E^{(0)} - E_r);$$

además, se postula que en una situación de equilibrio es igualmente probable que el sistema se encuentre en cualquiera de sus estados accesibles $P_r = C$, entonces

$$P_r = C'\Omega'(E^{(0)} - E_r).$$

Como A es mucho menor a A' podemos aproximar el número de estados accesibles, utilizando logaritmos para poder utilizar las series de Taylor. Como $E_r \ll E^{(0)}$, realizamos la siguiente expansión

$$\ln \Omega'(E^{(0)} - E_r) \approx \ln \Omega'(E^{(0)}) - E_r \frac{\partial \ln \Omega'(E^{(0)})}{\partial E'} + \cdots,$$

y definimos a β como

$$\beta = \frac{\partial \ln \Omega'(E^{(0)})}{\partial E'}.$$

Dada la expansión realizada se tiene

$$\Omega'(E^{(0)} - E_r) = \underbrace{\Omega'(E^{(0)})}_{C'} e^{-\beta E_r},$$

entonces

$$P_r = C' e^{-\beta E_r}.$$

Sabiendo que $\sum_r P_r = 1$, encontramos la constante de normalización $\mathfrak{z} = \sum_r e^{-\beta E_r}$, entonces es claro que

$$\boxed{P_r = \frac{e^{-\beta E_r}}{\displaystyle\sum_i e^{-\beta E_i}}}$$

2. Problema 2

Sabiendo que el valor esperado de la energía es $\langle E_i \rangle = U$, entonces tomando la función de partición y derivando la respecto a β

$$\frac{d\mathfrak{z}}{d\beta} = \sum_{i=1}^{k} -E_i e^{-\beta E_i},$$

multiplicando y dividiendo entre la función de partición se tiene

$$\frac{1}{\mathfrak{z}}\frac{d\mathfrak{z}}{d\beta} = -\sum_{i=1}^{k} p_i E_i = -U.$$

Por regla de la cadena

$$\frac{d\ln\mathfrak{z}}{d\beta} = \frac{d\ln\mathfrak{z}}{d\mathfrak{z}}\frac{d\mathfrak{z}}{d\beta} = \frac{1}{\mathfrak{z}}\frac{d\mathfrak{z}}{d\beta}.$$

$$\frac{d\ln\mathfrak{z}}{d\beta} = -U.$$

Teniendo esto, y sabiendo que $\beta = 1/k_B T$, encontramos el diferencial de esta expresión $d\beta = -\,dT\big/k_B T^2$, sustituyendo el diferencial en la expresión anterior

$$\boxed{k_B T^2 \frac{d\ln\mathfrak{z}}{dT} = U}$$

3. Problema 3

Tomando la entropía

$$S = -k_B \sum_{i=1}^{k} p_i \ln p_i,$$

sustituyendo la probabilidad definida como

$$\ln p_i = -\beta E_i - \ln\mathfrak{z}.$$

Sustituyendo en la ecuación de entropía se tiene

$$S = k_B\beta \underbrace{\sum_{i=1}^{k} p_i E_i}_{U} + k_B \ln\mathfrak{z} \underbrace{\sum_{i=1}^{k} p_i}_{1},$$

entonces

$$S = k_B(\beta U + \ln\mathfrak{z}) \tag{1}$$

Teniendo (1) sustituímos la definición de β, entonces

$$\boxed{S = \frac{U}{T} + k_B \ln\mathfrak{z}}$$

4. Problema 4

Tomando la relación obtenida en el ejercicio anterior, despejamos la función $\mathfrak{z}$,

$$TS = U + \frac{1}{\beta}\ln\mathfrak{z},$$

$$-\beta(U - TS) = \ln\mathfrak{z},$$

entonces

$$\boxed{\mathfrak{z} = e^{-\beta F}}$$

con $F = U - TS$.

5. Problema 5

Encontrando el diferencial de la función de Helmholtz, sabiendo que $\mathrm{d}U = T\,\mathrm{d}S - p\,\mathrm{d}V$, entonces

$$\mathrm{d}F = T\,\mathrm{d}S - p\,\mathrm{d}V - T\,\mathrm{d}S - S\,\mathrm{d}T = -S\,\mathrm{d}T - p\,\mathrm{d}V\,.$$

Lo que implica directamente que

$$\boxed{S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V}$$