Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Mecánica Estadística
Diego Sarceño 201900109
23 de mayo de 2022

Tarea 6

1. Problema 1

Tomando el número de onda tridimensional $\vec{k} = k_x\hat{\mathbf{x}} + k_y\hat{\mathbf{y}} + k_z\hat{\mathbf{z}} = \frac{\pi}{L}(n_x\hat{\mathbf{x}} + n_y\hat{\mathbf{y}} + n_z\hat{\mathbf{z}})$, cuya norma $k_n = \frac{\pi}{L}\sqrt{n_x^2 n_y^2 n_z^2} = \frac{\pi}{L}n$. Tomando las coordenadas en terminos de coordenadas esféricas, calculámos el número de puntos entre n y $n + \mathrm{d}n = \widetilde{g}(n)\,\mathrm{d}n$. Integrando

$$\widetilde{g}(n)\,\mathrm{d}n = \left(\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} n^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}n = \frac{\pi}{2}n^2\,\mathrm{d}n\,.$$

Dado que $E_n = \hbar\omega = \frac{\hbar\pi c}{L}n$, entonces $n = \frac{L\omega}{\pi c}$ $\mathrm{d}n = \frac{L}{\pi c}\,\mathrm{d}\omega$ sustituyendo en lo anterior

$$g(\omega)\,\mathrm{d}\omega = 2\left(\frac{\pi}{2}\frac{L^2\omega^2}{\pi^2c^2}\frac{L}{\pi c}\,\mathrm{d}\omega\right) = \frac{L^3\omega^2}{\pi^2c^3}\,\mathrm{d}\omega\,;$$

por lo tanto,

$$\boxed{g(\omega) = \frac{V\omega^2}{\pi^2c^3}}$$

2. Problema 2

Utilizando la distribución de Bose−Einstein

$$\frac{n_i}{g_i} = \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{e^{\beta(E_i-\mu)}-1} \qquad \Rightarrow \qquad E_T = \sum_{i=1}^{k}\frac{g_iE_i}{e^{\beta(E_i-\mu)}-1},$$

entonces, integrando

$$E_T = \int_0^\infty \frac{V\hbar\omega^3\,\mathrm{d}\omega}{\pi^2c^3(e^{\beta\hbar\omega}-1)}.$$

Utilizando la serie geométrica reescribimos la integral de la siguiente forma

$$\int_0^\infty \frac{\omega^3\,\mathrm{d}\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^\infty \omega^3 e^{-\beta\hbar\omega(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\beta^4\hbar^4(k+1)^4}\int_0^\infty y^{4-1}e^{-y}\,\mathrm{d}y\,.$$

Utilizando la función Gamma y la función zeta de Riemann valuadas en 4.

$$= \frac{1}{\beta^4\hbar^4}\frac{\pi^4}{15},$$

entonces

$$\boxed{E_T = \frac{V\pi^2}{15\hbar^3 c^3 \beta^4} = \left(\frac{V\pi^2 k_B^4}{15\hbar^3 c^3}\right) T^4}.$$

Encontramos la función espectral de densidad de energía volumétrica, de modo que

$$e = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \underbrace{\frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}}_{\mu(\omega)} \mathrm{d}\omega \, ,$$

entonces

$$\boxed{\mu(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3 (e^{\beta\hbar\omega} - 1)}}. \tag{1}$$

Ahora, tomando $\omega = 2\pi\nu$, $\lambda\nu = c$ y $h = 2\pi\hbar$, sustituyendo

$$\boxed{\mu(\nu) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3 (e^{\beta h\nu} - 1)}} \tag{2}$$

y

$$\boxed{\mu(\lambda) = \frac{8\pi h}{\lambda^3 \left(e^{\frac{\beta hc}{\lambda}} - 1\right)}} \tag{3}$$

3. Problema 3

Tomando todas las constantes igual a 1, para facilitar la graficación, de modo que los números de los ejes de las gráficas no significan nada, únicamente la "forma" de la gráfica.

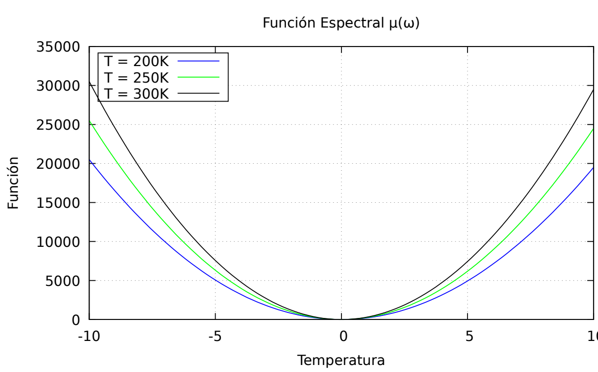

Figura 1: Gráfica de la ecuación (1).

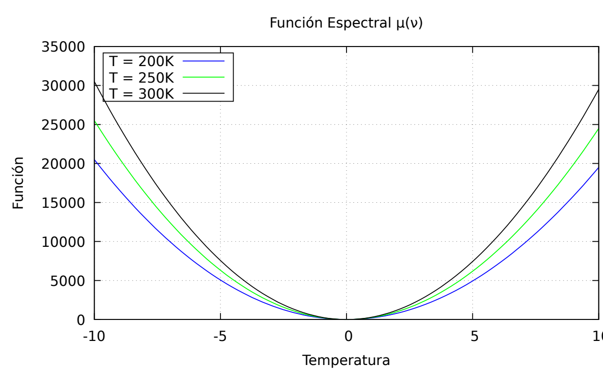

Figura 2: Gráfica de la ecuación (2).

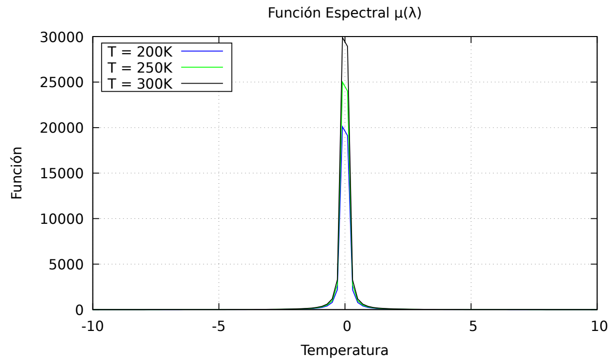

Figura 3: Gráfica de la ecuación (3).

4. Problema 4

Dado que

$$\ln Z = \frac{V\pi^2 k_B^3 T^3}{45\hbar^3 c^3},$$

entonces, para la energía libre de Helmholtz $A = -\ln Z/\beta$, reescribiento un poco lo anterior se tiene

$$\boxed{A = -\frac{4VT^4}{3(60)}\frac{1}{c}\frac{k_B^4\pi^2}{\hbar^3 c^2} = -\frac{4V\sigma T^4}{3c}}.$$

Ahora, tomando la entroía $S = k_B(\beta E_T + \ln Z)$, con $\frac{\mathrm{d}\ln Z}{\mathrm{d}\beta} = -E_T$. Entonces

$$\boxed{S = k_B\left(\frac{3V\pi^2}{45\hbar^3c^3\beta^3} + \frac{V\pi^2}{45\hbar^3c^3\beta^3}\right) = \frac{16}{3(60)}\frac{V\pi^2k_B^4T^4}{\hbar^3c^3} = \frac{16V\sigma T^4}{3c}}.$$

5. Problema 5

Realizando lo mismo que en el problema 2, solo que para $z = 3$, de modo que

$$\int_0^\infty \frac{\omega^2}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\,\mathrm{d}\omega = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\beta^3\hbar^3(k+1)^3}\int_0^\infty y^{3-1}e^{-y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\beta^3\hbar^3}\zeta(3)\Gamma(3) = \frac{2\zeta(3)}{\beta^3\hbar^3}\zeta(3),$$

entonces,

$$\boxed{N = \frac{2\zeta(3)k_B^3T^3V}{\pi^2\hbar^3c^3}}$$

Tomando la energía promedio $\varepsilon = E_T/N$, entonces, sustituyendo las expresiones y simplificando

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\pi^4 k_B T}{30\zeta(3)} = 2.70k_BT}$$