Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Estadística 1
Diego Sarceño 201900109
1 de mayo de 2022

Tarea 4

1. Distribución de Probabilidad Discreta

273

Dada la variable aleatoria X con distribución $\{1, \ldots, n\}$. Calculamos lo siguiente

- **E(X)** Por definición

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} x_i f(x_i) = \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{i=0}^{n} x_i}_{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{n+1}{2}.$$

- **E(X²)** Por definición

$$E(X^2) = \sum_{i=0}^{n} x_i^2 f(x_i) = \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{i=0}^{n} x_i^2 x_i^2}_{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- **V(X)** Por definición de varianza

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n+1}{2},$$

simplificando con Mathematica (porque ya no estamos para estos trotes xD)

$$V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

2. Distribución de Probabilidad de Bernoulli

286

Teniendo la varianza para la distribución de Bernoulli $V(X) = p(1-p)$, encontramos p para maximizar $V(X)$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} V(X) = 1 - 2p = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{p = \frac{1}{2}}.$$

3. Distribución de Probabilidad Binomial

305

Dados los datos $p = 0.9$ y $n = 20$, queremos obtener la probabilidad de no tener el ni el mínimo de éxito, es decir, $x = 18$, por ende queremos la probabilidad acumulada hasta $x = 17$. Utilizando la siguiente función de R: `pbinom(17, size = 20, prob = 0.9)`. Con dicha función se tiene $P(X \leq 17) = \sum_{x=0}^{17} \binom{20}{x} p^x (1-p)^{20-x} = 0.3230732$.

4. Distribución de Probabilidad Geométrica

311

Dada la ecuación propuesta $E(X) = \sum_{x=0}^{\infty}(1-F(x))$, reemplazando $F(x) = 1-(1-p)^{x+1}$, entonces

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty}(1-p)^{x+1} = \frac{1-p}{1-1+p} = \frac{1-p}{p}.$$

5. Distribución de Probabilidad Binomial Negativa

331

Dado que necesitamos n lanzamientos y $r = 6$ éxitos; por ende, el número de fracasos $x = n - r$. Sustituyendo en la función de densidad de probabilidad

$$\boxed{f(n-6) = \binom{n-1}{n-6}\left(\frac{1}{6}\right)^6\left(\frac{5}{6}\right)^{n-6}.}$$

6. Distribución de Probabilidad Hipergeométrica

341

Dados los datos, se tiene $N = 100$, $K = 90$, $n = 5$ y $x \in [2, n]$. Con esto, dado que queremos la probabilidad de que se realize la compra, calculamos

$$1 - \sum_{x=2}^{5} \frac{\binom{90}{x}\binom{10}{5-x}}{\binom{100}{5}} = 0.9231433.$$

Para esto se utilizó R.

```
var1 <- 0
for (i in 2:5){
var1 <- var1 + dhyper(i,90,10,5)
}
```

7. Distribución de Probabilidad de Poisson

343

Encontrando el valor esperado $E(X)$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_x^\infty x e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \\ &= \sum_x^\infty e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{(x-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda}\underbrace{\sum_x^\infty \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}}_{e^\lambda} \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

Ahora, encontrando la varianza $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$, encontramos la esperanza de X^2

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_x x^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \\ &= \sum_x \lambda x e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda}\sum_j (j+1)\frac{\lambda^j}{j!} \\ &= \lambda e^{-\lambda}\left[\underbrace{\sum_j j\frac{\lambda^j}{j!}}_{\lambda e^\lambda} + \underbrace{\sum_j \frac{\lambda^j}{j!}}_{e^\lambda}\right] \\ &= \lambda^2 + \lambda, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} V(X) &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

8. Distribución de Probabilidad Uniforme Continua

357

a) Entontrando $E(X)$, se tiene que $f(x) = \frac{1}{b-a}$, entonces

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

b) Encontrando $E(X^2)$, entonces, realizando la integral

$$\int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\frac{b^3-a^3}{3} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}.$$

c) Encontrando la varianza,

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{a^2+b^2}{12} - \frac{ab}{6} = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

9. Distribución de Probabilidad Exponencial

375

Encontramos el enésimo momento, $E(X^n)$, realizando la integral

$$E(X^n) = \lambda \int_0^\infty x^n e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x\,,$$

realizando el cambio de variable $\lambda x = t$, se tiene

$$\int_0^\infty \left(\frac{t}{\lambda}\right)^n e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda^n}\int_0^\infty t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t\,,$$

la cual es exactamente a la función Gamma valuada en $n+1$, $\Gamma(n+1) = n!$, por lo tanto

$$E(X^n) = \frac{\Gamma(n+1)}{\lambda^n} = \frac{n!}{\lambda^n}.$$

10. Distribución Gamma

386

Por definición de esperanza, se tiene

$$E(X) = \int_0^\infty x\frac{(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\underbrace{\int_0^\infty \frac{u}{\lambda}u^{\alpha-1}e^{-u}\,\mathrm{d}u}_{\frac{1}{\lambda}\Gamma(\alpha+1)},$$

entonces, por propiedades de la función gamma, $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$; por lo que,

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}.$$

Para el resto de calculos se utiliza exactamente la misma idea, de modo que

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2\frac{(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\underbrace{\int_0^\infty \frac{1}{\lambda^2}u^{\alpha+1}e^{-u}\,\mathrm{d}u}_{\frac{1}{\lambda^2}\Gamma(\alpha+2)},$$

siguiendo la recursividad de la función gamma, se tiene

$$E(X^2) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}.$$

Lo mismo para $E(X^3)$,

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^3 \frac{(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \underbrace{\int_0^\infty \frac{1}{\lambda^3} u^{\alpha+2} e^{-u}\,\mathrm{d}u}_{\frac{1}{\lambda^3}\Gamma(\alpha+3)},$$

entonces

$$E(X^3) = \frac{(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha}{\lambda^3}.$$

Encontrando la varianza $\operatorname{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$$\operatorname{Var}(X) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

11. Distribución Beta

398

Calculando $E(X^n)$

$$E(X^n) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 x^n x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{B(a,b)} \underbrace{\int_0^1 x^{a+n-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x}_{B(a+n,b)} = \frac{B(a+n,b)}{B(a,b)}.$$

12. Distribución Weibull

405

Realizando la sustitución $u = (\lambda x)^\alpha$, entonces calculando

$$E(X^n) = \int_0^\infty x^n \underbrace{(\alpha\lambda)(\lambda x)^{\alpha-1} e^{-(\lambda x)^\alpha}}_{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{u^{n/\alpha}}{\lambda^n} e^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{\Gamma(1+n/\alpha)}{\lambda^n}.$$

13. Distribución Normal

412

Por definición la mediana es μ. Para la moda, derivamos e igualamos a cero

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}(x-\mu)}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} = 0,$$

entonces

$$x_{\text{moda}} = \mu.$$

14. Distribución Ji-Cuadrada

430

Se plantea la integral y la sustitución $u = x/2$, entonces

$$E(X^m) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \int_0^\infty x^{\frac{n}{2}+m-1} e^{-x/2}\,\mathrm{d}x = \frac{2^{\frac{n}{2}+m-1}}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma(n/2)} \underbrace{\int_0^\infty u^{\frac{n}{2}+m-1} e^{-u}\,\mathrm{d}u}_{\Gamma(n/2+m)} = \frac{2^m}{\Gamma(n/2)}\Gamma(n/2+m).$$

15. Distribución t

438

Para esto, ploteamos la función de distribución para distintos n en el mismo intervalo en *mathematica*

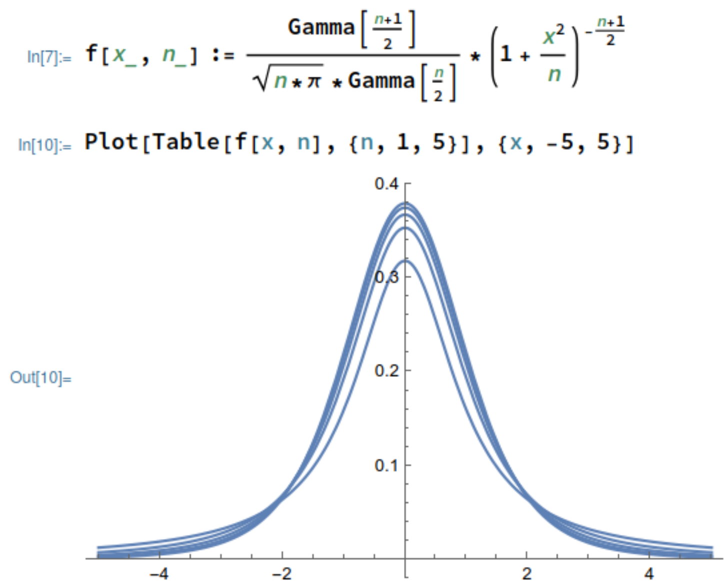

Figura 1: Función de distribución $f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(n/2)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$, para $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Con lo que es claro que la moda y la mediana coinciden en 0.

16. Distribución F

443

Tomando la maximizando la función de distribución, se tiene que la derivada igualada a cero es (con ayuda de *mathematica*)

$$-\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{a/2} x^{\frac{a}{2}-2}\left(\frac{ax}{b}+1\right)^{-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}}(abx - ab + 2ax + 2b)\Gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)(ax+b)} = 0,$$

entonces, una de las soluciones es $(abx - ab + 2ax + 2b) = 0$; por lo tanto

$$(abx - ab + 2ax + 2b) = 0, \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{b(a-2)}{a(b+2)}.$$