Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Mecánica Cuántica 1
Diego Sarceño 201900109
2 de mayo de 2022

Tarea 2

1. Problema 1

Dado que la base $\{|\alpha_i\rangle\}$ son kets propios de los observables A y B. Entonces aplicamos el conmutador a un vector cualquiera de la base

$$[A,B]\,|\alpha_i\rangle = AB\,|\alpha_i\rangle - BA\,|\alpha_i\rangle\,,$$
$$[A,B]\,|\alpha_i\rangle = A(b_i\,|\alpha_i\rangle) - B(a_i\,|\alpha_i\rangle),$$
$$[A,B]\,|\alpha_i\rangle = a_i b_i\,|\alpha_i\rangle - b_i a_i\,|\alpha_i\rangle = 0.$$

Lo que demuestra que los observables A y B son compatibles.

2. Problema 2

Dada la transformada de fourier

$$\widetilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ixp}{\hbar}}\,\psi(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Derivando esa expresión respecto a p

$$\frac{\partial\widetilde{\psi}(p)}{\partial p} = \frac{1}{i\hbar}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ixp}{\hbar}}\,x\psi(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{1}$$

Ahora, tomando

$$\langle p|X|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\langle p|x\rangle\,\langle x|X|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ixp}{\hbar}}\,x\psi(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{2}$$

Sustituyendo (2) en (1), se tiene

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial\widetilde{\psi}(p)}{\partial p} = \langle p|X|\psi\rangle\,.}$$

3. Problema 3

Tomando

$$\langle p|e^{-\frac{ia}{\hbar}X}|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\langle p|x\rangle\,\langle p|e^{-\frac{ia}{\hbar}X}|\psi\rangle = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-\frac{ixp}{\hbar}}\,\psi(x+a)\,\mathrm{d}x}_{\text{Transformada de Fourier }=\widetilde{\psi}(p+a)}\,.$$

$$\boxed{\langle p|e^{-\frac{ia}{\hbar}X}|\psi\rangle = \widetilde{\psi}(p+a)}$$

4. Problema 4

Tomando el conmutador y la serie de taylor de la exponencial

$$e^{P^2} = \sum_{n}^{\infty} \frac{P^{2n}}{n!},$$

entonces, reemplazando en el conmutador dado

$$[X, e^{P^2}] = \sum_{n}^{\infty} \frac{1}{n!}[X, P^{2n}] = \sum_{n}^{\infty} \frac{2n}{n!}(i\hbar)P^{2n-1} = 2i\hbar P \sum_{n}^{\infty} \frac{P^{2(n-1)}}{(n-1)!},$$

por lo que

$$\boxed{[X, e^{P^2}] = 2i\hbar P e^{P^2}}$$

5. Problema 5

Para el conmutador $[P, e^{X^2}]$, tomamos la misma idea del ejercicio pasado junto con la propiedad $[A, B] = -[B, A]$, entonces

$$[P, e^{X^2}] = -\sum_{n}^{\infty} \frac{1}{n!}[X^{2n}, P] = -2i\hbar X \sum_{n}^{\infty} \frac{X^{2(n-1)}}{(n-1)!},$$

de modo que

$$\boxed{[P, e^{X^2}] = -2i\hbar X e^{X^2}}$$

6. Problema 6

Dados dos observables A y B compatibles. Dado $|\phi\rangle$ es vector propio de A, se tiene la siguiente igualdad

$$\underbrace{[A, B]}_{0} |\phi\rangle = AB |\phi\rangle - BA |\phi\rangle = \underbrace{(A - aI)}_{\neq 0} \underbrace{B |\phi\rangle}_{\neq 0},$$

entonces, $B |\phi\rangle$ debe ser una constante por el ket dado, de modo que $A(b |\phi\rangle) - ab |\phi\rangle = (ab - ab) |\phi\rangle = 0$, entonces $|\phi\rangle$ es vector propio de B.