



## HOJA DE TRABAJO 7

### 1. Problema 1

Tomando  $\Psi(x, t) = c_1 e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} \psi_1(x) + c_2 e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} \psi_2(x)$ , para  $t > 0$ , entonces calculamos  $|\Psi(x, t)|^2 = \Psi^*(x, t)\Psi(x, t)$ . Entonces

$$\begin{aligned} |\Psi(x, t)|^2 &= \left( c_1 e^{\frac{iE_1 t}{\hbar}} \psi_1^*(x) + c_2 e^{\frac{iE_2 t}{\hbar}} \psi_2^*(x) \right) \left( c_1 e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} \psi_1(x) + c_2 e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} \psi_2(x) \right) \\ &= c_1^2 |\psi_1(x)|^2 + c_2^2 |\psi_2(x)|^2 + c_1 c_2 e^{-\frac{iE_1}{\hbar}(E_2 - E_1)t} \psi_1^*(x) \psi_2(x) + c_1 c_2 e^{-\frac{iE_2}{\hbar}(E_1 - E_2)t} \psi_1(x) \psi_2^*(x). \end{aligned}$$

Cuya derivada es claramente distinta de cero, por lo que no es un estado estacionario.

### 2. Problema 2

Tomando  $f(\alpha) = e^{\alpha A} B e^{-\alpha A}$ , expandimos en Taylor alrededor de cero, de modo que la función será de la forma

$$f(\alpha) = f(0) + \frac{\alpha}{1!} f'(0) + \frac{\alpha^2}{2!} f''(0) + \frac{\alpha^3}{3!} f'''(0) + \dots$$

Con esto encontramos cada una de las derivadas valuadas en cero.

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= A e^{\alpha A} B e^{-\alpha A} - e^{\alpha A} B A e^{-\alpha A} \\ f'(0) &= AB - BA = [A, B]. \\ f''(\alpha) &= A^2 e^{\alpha A} B e^{-\alpha A} - A e^{\alpha A} B A e^{-\alpha A} - A e^{\alpha A} B A e^{-\alpha A} + e^{\alpha A} B A^2 e^{-\alpha A}, \\ f''(0) &= A^2 B - ABA - ABA + BA^2 = A[A, B] - [A, B]A = [A, [A, B]]. \\ f'''(\alpha) &= A^3 e^{\alpha A} B e^{-\alpha A} - A^2 e^{\alpha A} B A e^{-\alpha A} - A^2 e^{\alpha A} B A e^{-\alpha A} + A e^{\alpha A} B A^2 e^{-\alpha A} - A^2 e^{\alpha A} B A e^{-\alpha A} \\ &\quad + A e^{\alpha A} B A^2 e^{-\alpha A} + A e^{\alpha A} B A^2 e^{-\alpha A} - e^{\alpha A} B A^3 e^{-\alpha A}, \\ f'''(0) &= A^3 B - A^2 BA - A^2 BA + ABA^2 - A^2 BA + ABA^2 + ABA^2 - BA^3 = A^2[A, B] \\ &\quad + [A, B]A^2 - A[A, B]A - A[A, B]A = A[A, [A, B]] - [A, [A, B]]A \\ f'''(0) &= [A, [A, [A, B]]]. \\ &\vdots \end{aligned}$$

Sustituyendo lo anterior en la expansión de Taylor

$$e^{\alpha A} B e^{-\alpha A} = B + \alpha[A, B] + \frac{\alpha^2}{2!} [A, [A, B]] + \frac{\alpha^3}{3!} [A, [A, [A, B]]] + \dots$$

### 3. Problema 3

Tomando lo demostrado anteriormente, se calculan los respectivos conmutadores.

a) Tomando  $\hat{A} = i\sigma_y$  y  $\hat{B} = \sigma_x$ , entonces, calculando cada conmutador

$$\begin{aligned}
 [i\sigma_y, \sigma_x] &= -2i^2\sigma_z \\
 \left[ i\sigma_y, \underbrace{[i\sigma_y, \sigma_x]}_{-2i^2\sigma_z} \right] &= 2^2i^4\sigma_x \\
 \left[ i\sigma_y, \underbrace{[i\sigma_y, [i\sigma_y, \sigma_x]]}_{2^2i^4\sigma_x} \right] &= 2^3i^6\sigma_z. \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{1}$$

Teninedo las relaciones de conmutacion (1), entonces, agrupamos las que esten relacionadas con cada una de las matrices de pauli presentes; asimismo, simplificamos las potencias de  $i$

$$e^{i\alpha\sigma_y}\sigma_x e^{-i\alpha\sigma_y} = \underbrace{\left(1 - \frac{(2\alpha)^2}{2!} + \dots\right)}_{\cos 2\alpha}\sigma_x + \underbrace{\left((2\alpha) - \frac{(2\alpha)^3}{3!} + \dots\right)}_{\sin 2\alpha}\sigma_z$$

$$\boxed{e^{i\alpha\sigma_y}\sigma_x e^{-i\alpha\sigma_y} = \sigma_x \cos 2\alpha + \sigma_z \sin 2\alpha.}$$

b) Tomando  $\hat{A} = i\sigma_z$  y  $\hat{B} = \sigma_x$ , entonces, calculando cada conmutador

$$\begin{aligned}
 [i\sigma_z, \sigma_x] &= 2i^2\sigma_y \\
 \left[ i\sigma_z, \underbrace{[i\sigma_z, \sigma_x]}_{2i^2\sigma_y} \right] &= -2^2i^4\sigma_x \\
 \left[ i\sigma_z, \underbrace{[i\sigma_z, [i\sigma_z, \sigma_x]]}_{-2^2i^4\sigma_x} \right] &= -2^3i^6\sigma_y. \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{2}$$

Teninedo las relaciones de conmutacion (2), entonces, agrupamos las que esten relacionadas con cada una de las matrices de pauli presentes; asimismo, simplificamos las potencias de  $i$

$$e^{i\alpha\sigma_z}\sigma_x e^{-i\alpha\sigma_z} = \underbrace{\left(1 - \frac{(2\alpha)^2}{2!} + \dots\right)}_{\cos 2\alpha}\sigma_x - \underbrace{\left((2\alpha) - \frac{(2\alpha)^3}{3!} + \dots\right)}_{\sin 2\alpha}\sigma_y$$

$$\boxed{e^{i\alpha\sigma_z}\sigma_x e^{-i\alpha\sigma_z} = \sigma_x \cos 2\alpha - \sigma_y \sin 2\alpha.}$$



c) Tomando  $\hat{A} = i\sigma_x$  y  $\hat{B} = \sigma_y$ , entonces, calculando cada conmutador

$$\begin{aligned}
 [i\sigma_x, \sigma_y] &= 2i^2\sigma_z \\
 \left[ i\sigma_x, \underbrace{[i\sigma_x, \sigma_y]}_{2i^2\sigma_z} \right] &= -2^2i^4\sigma_y \\
 \left[ i\sigma_x, \underbrace{[i\sigma_x, [i\sigma_x, \sigma_y]]}_{-2^2i^4\sigma_y} \right] &= -2^3i^6\sigma_z. \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{3}$$

Teniendo las relaciones de conmutación (3), entonces, agrupamos las que estén relacionadas con cada una de las matrices de Pauli presentes; asimismo, simplificamos las potencias de  $i$

$$e^{i\alpha\sigma_x}\sigma_y e^{-i\alpha\sigma_x} = \underbrace{\left(1 - \frac{(2\alpha)^2}{2!} + \dots\right)}_{\cos 2\alpha} \sigma_y - \underbrace{\left((2\alpha) - \frac{(2\alpha)^3}{3!} + \dots\right)}_{\sin 2\alpha} \sigma_z$$

$$\boxed{e^{i\alpha\sigma_x}\sigma_y e^{-i\alpha\sigma_x} = \sigma_y \cos 2\alpha - \sigma_z \sin 2\alpha.}$$

#### 4. Problema 4

Utilizando el teorema de Ehrenfest con el hamiltoniano  $H = \frac{p_z^2}{2m} - mgz$ . Entonces

a) para  $\frac{d\langle p_z \rangle}{dt}$

$$\frac{d\langle p_z \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [H, p_z] \rangle + \left\langle \cancel{\frac{\partial p_z}{\partial t}} \right\rangle^0,$$

calculando el conmutador

$$[H, p_z] = \frac{1}{2m} [p_z^2, p_z] - mg[z, p_z] = -mgi\hbar I.$$

Reemplazando en la ecuación anterior, se tiene

$$\boxed{\frac{d\langle p_z \rangle}{dt} = mg.}$$

Ahora, para el hamiltoniano

$$\frac{d\langle H \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \left\langle \cancel{[H, H]} \right\rangle^0 + \left\langle \cancel{\frac{\partial H}{\partial t}} \right\rangle^0,$$

$$\boxed{\frac{d\langle H \rangle}{dt} = 0.}$$

b) Ahora, calculamos lo mismo para  $z$  y resolvemos la ecuación con las condiciones iniciales siguientes:  $\langle z \rangle(0) = h$  y  $\langle p_z \rangle(0) = 0$ . Ahora calculamos con el teorema de Ehrenfest

$$\frac{d\langle z \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [H, z] \rangle + \left\langle \cancel{\frac{\partial z}{\partial t}} \right\rangle^0,$$

el conmutador es

$$[H, z] = \frac{1}{2m} [p_z^2, z] - mg[z, z] = -\frac{i\hbar p_z}{m}.$$

Dado esto, el sistema de ecuaciones a resolver es

$$\begin{cases} \frac{d\langle p_z \rangle}{dt} = mg \\ \frac{d\langle z \rangle}{dt} = \frac{1}{m} \langle p_z \rangle. \end{cases}$$

Realizando las integrales y valuando las condiciones iniciales, las soluciones son

$$\boxed{\begin{cases} \langle z \rangle(t) = h + \frac{1}{2}gt^2 \\ \langle p_z \rangle(t) = mgt. \end{cases}}$$

## 5. Problema 5

*PDF mathematica.*

