Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Estadística 1
Diego Sarceño 201900109
18 de abril de 2022

Tarea 4

1. Distribución de Probabilidad Discreta

273

Dada la variable aleatoria X con distribución $\{1, \ldots, n\}$. Calculamos lo siguiente

- **E(X)** Por definición

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} x_i f(x_i) = \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{i=0}^{n} x_i}_{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{n+1}{2}.$$

- **E(X²)** Por definición

$$E(X^2) = \sum_{i=0}^{n} x_i^2 f(x_i) = \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{i=0}^{n} x_i^2 x_i^2}_{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- **V(X)** Por definición de varianza

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n+1}{2},$$

simplificando con Mathematica (porque ya no estamos para estos trotes xD)

$$V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

2. Distribución de Probabilidad de Bernoulli

286

Teniendo la varianza para la distribución de Bernoulli $V(X) = p(1-p)$, encontramos p para maximizar $V(X)$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} V(X) = 1 - 2p = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{p = \frac{1}{2}}.$$

3. Distribución de Probabilidad Binomial

305

Dados los datos $p = 0.9$ y $n = 20$, queremos obtener la probabilidad de no tener el ni el mínimo de éxito, es decir, $x = 18$, por ende queremos la probabilidad acumulada hasta $x = 17$. Utilizando la siguiente función de R: `pbinom(17, size = 20, prob = 0.9)`. Con dicha función se tiene $P(X \leq 17) = \sum_{x=0}^{17} \binom{20}{x} p^x (1-p)^{20-x} = 0.3230732$.

4. Distribución de Probabilidad Geométrica

5. Distribución de Probabilidad Binomial Negativa

331

Dado que necesitamos n lanzamientos y $r = 6$ éxitos; por ende, el número de fracasos $x = n - r$. Sustituyendo en la función de densidad de probabilidad

$$\boxed{f(n-6) = \binom{n-1}{n-6} \left(\frac{1}{6}\right)^6 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-6}.}$$

6. Distribución de Probabilidad Hipergeométrica

341

Dados los datos, se tiene $N = 100$, $K = 90$, $n = 5$ y $x \in [2, n]$. Con esto, dado que queremos la probabilidad de que se realize la compra, calculamos

$$1 - \sum_{x=2}^{5} \frac{\binom{90}{x}\binom{10}{5-x}}{\binom{100}{5}} = 0.9231433.$$

Para esto se utilizó R.

```
var1 <- 0
for (i in 2:5){
var1 <- var1 + dhyper(i,90,10,5)
}
```

7. Distribución de Probabilidad de Poisson

343

Encontrando el valor esperado $E(X)$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x}^{\infty} x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \\ &= \sum_{x}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{x}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}}_{e^{\lambda}} \\
&= \lambda.
\end{aligned}
$$

Ahora, encontrando la varianza $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$, encontramos la esperanza de X^2

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{x} x^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \\
&= \sum_{x} \lambda x e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{j} (j+1) \frac{\lambda^j}{j!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \left[\underbrace{\sum_{j} j \frac{\lambda^j}{j!}}_{\lambda e^{\lambda}} + \underbrace{\sum_{j} \frac{\lambda^j}{j!}}_{e^{\lambda}} \right] \\
&= \lambda^2 + \lambda,
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
V(X) &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \\
&= \lambda.
\end{aligned}
$$

8. Distribución de Probabilidad Uniforme Continua

357

a) Entontrando $E(X)$, se tiene que $f(x) = \frac{1}{b-a}$, entonces

$$
E(X) = \int_{a}^{b} \frac{x}{b-a} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{a+b}{2}.
$$

b) Encontrando $E(X^2)$, entonces, realizando la integral

$$
\int_{a}^{b} \frac{x^2}{b-a} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} \frac{b^3 - a^3}{3} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}.
$$

c) Encontrando la varianza,

$$
Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{12} - \frac{ab}{6} = \frac{(a-b)^2}{12}.
$$

9. Distribución de Probabilidad Exponencial

375

Encontramos el enésimo momento, $E(X^n)$, realizando la integral

$$E(X^n) = \lambda \int_0^\infty x^n e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x\,,$$

realizando el cambio de variable $\lambda x = t$, se tiene

$$\int_0^\infty \left(\frac{t}{\lambda}\right)^n e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda^n}\int_0^\infty t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t\,,$$

la cual es exactamente a la función Gamma valuada en $n+1$, $\Gamma(n+1) = n!$, por lo tanto

$$E(X^n) = \frac{\Gamma(n+1)}{\lambda^n} = \frac{n!}{\lambda^n}.$$