Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Mecánica Cuántica 1
Diego Sarceño 201900109
1 de mayo de 2022

Hoja de Trabajo 6

1. Problema 1

Se utilizó mathematica, aqui solo aparecerán las respuestas, al final del pdf esta el desarrollo.

a) Constante de normalización $\sqrt{\dfrac{a}{\pi}}$.

b) La probabilidad de encontrar la partícula en en intervalo $\left(\frac{-a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$ es: $\frac{1}{3}$.

c) Para el valor esperado del operador momentum, tenemos el siguiente cálculo

$$\langle\psi|\hat{\mathbf{P}}|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x}\,\mathrm{d}x = i\frac{p_0}{\hbar}$$

2. Problema 2

Realizando la expansión Taylor de la función $f(p)$, y por linealidad del conmutador se puede expandir la sumatoria

$$[x, f(p)] = \cancelto{0}{[x, f(0)]} + [x, f'(0)p] + \left[x, \frac{1}{2}f''(0)p^2\right] + \cdots,$$

Dada la relación $[x, p] = i\hbar$ y se sigue cumpliendo la relación encontrada en la hoja 5. Entonces, la expansión anterior se escribe de la siguiente forma

$$[x, f(p)] = i\hbar f'(0) + \frac{1}{2!}f''(0)(2p)(i\hbar) + \cdots = i\hbar \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} ip^{i-1}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}}_{\frac{\mathrm{d}f(p)}{\mathrm{d}p}}.$$

Por lo tanto $[x, f(p)] = i\hbar\frac{\mathrm{d}f(p)}{\mathrm{d}p}$.

a) Encontrando $[x, T_a]$, con $T_a = e^{-iap/\hbar}$, con p el operador de momentum. Utilizando la relación antes demostrada, dado que $T_a = f(p)$. Entonces,

$$[x, T_a] = i\hbar\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}e^{-iap/\hbar}\right) = i\hbar\left(\frac{-ia}{\hbar}e^{-iap/\hbar}\right) = ae^{-iap/\hbar}\boxed{= aT_a.}$$

b) Para el valor esperado dada una traslación T_a, entonces $\langle\psi| T_a^\dagger X T_a |\psi\rangle$. Utilizanmos la siguiente expresión $T_a^\dagger \underbrace{[X, T_a]}_{aT_a} = T_a^\dagger X T_a - \underbrace{T_a^\dagger T_a}_{I} X$, despejando y sustituyendo $T_a^\dagger X T_a$, entonces

$$\langle\psi| T_a^\dagger X T_a |\psi\rangle = \langle\psi| T_a^\dagger a T_a + X |\psi\rangle = a \langle\psi|\psi\rangle + \langle X\rangle = \boxed{\langle X\rangle + a.}$$

3. Problema 3

4. Problema 4

Tomando el término $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle A\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\psi| A |\psi\rangle$, entonces, se tiene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\psi| A |\psi\rangle = \int \mathrm{d}^3 r\, \frac{\partial\psi^*}{\partial t} A\psi + \int \mathrm{d}^3 r\, \psi^* A \frac{\partial\psi}{\partial t} + \int \mathrm{d}^3 r\, \psi^* \frac{\partial A}{\partial t}\psi,$$

entonces, sabiendo que el postulado de evolución temporal $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi$, entonces

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\psi|A|\psi\rangle = \frac{-1}{i\hbar}\langle\psi| H^\dagger A |\psi\rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle\psi| AH |\psi\rangle + \left\langle\frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle,$$

como el hamiltoniano es un operador hermítico, entonces, reduciendo la expresión dada y sabiendo $[H, A] = HA - AH$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle A\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[H, A]\rangle + \left\langle\frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle$$

□

5. Problema 5

Utilizando el teorema de Ehrenfest para el hamiltoniano dado, encontramos las ecuaciones de movimiento. Encontrando primero $[H, x]$ y $[H, p]$, se tiene

$$\begin{array}{c} [H,x] = \frac{1}{2}[p^2,x] + \frac{1}{2}m\omega_1[x^2,x] + \frac{1}{2}m\omega_2[x,x] + \frac{1}{2}mC[I,x] = -\frac{i\hbar p}{m} \\ [H,p] = \frac{1}{2}[p^2,p] + \frac{1}{2}m\omega_1[x^2,p] + \frac{1}{2}m\omega_2[x,p] + \frac{1}{2}mC[I,p] = m\omega_1 i\hbar x + \frac{1}{2}m\omega_2 i\hbar \end{array}.$$

Con esto, y sabiendo que $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$, entonces, sustituyendo en el teorema de Ehrenfest

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle x\rangle = \frac{1}{m}\langle p\rangle \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle p\rangle = -m\omega_1\langle x\rangle - \frac{1}{2}m\omega_2 \end{cases}.$$

Resolviendo las ecuaciones diferenciales, la solución la realizamos en mathematica.

6. Problema 6

a) Teniendo la función de onda dada, la constante de normalización es:

$$\boxed{N = \frac{1}{\sqrt{8abc}}.}$$

b) Dado el resultado de la integral y sabiendo las propiedades de exponentes, entonces se tiene que la probabilidad de se de un resultado entre 0 y a es

$$\frac{\left(1 - e^{-\frac{1}{\operatorname{sgn}(a)}}\right)\operatorname{sgn}(a)}{8bc} e^{-\left(\frac{|y|}{b} + \frac{|z|}{c}\right)},$$

donde $\operatorname{sgn}(a)$ es la función signo.

c) Calculamos para $-b$ a b y para $-c$ a c, integramos dos veces, siguiendo el resultado mostrado en mathematica:

$$\frac{\operatorname{sgn}(b)\operatorname{sgn}(c)\left(1 - e^{-\operatorname{sgn}(b)}\right)\left(1 - e^{-\operatorname{sgn}(c)}\right)}{2a}$$