Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Relatividad Especial
Diego Sarceño 201900109
27 de febrero de 2022

Reseña

Reseña del caítulo 1.7 del libro de Tsamparlis.

1. Tema 1

La idea de esta sección es encontrar la transfomración del Lorentz de una manera algebraica. Esto inicia dada la ecuación

$$\eta = L^t \eta L, \tag{1}$$

donde $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Se supone una matriz arbitraria de bloques en el espacio cartesiano lorentziano

$$L = \begin{pmatrix} D & A \\ B & A \end{pmatrix} \tag{2}$$

con D una matriz 1×1, B un vector columna, C un vector fila y A una matriz 3×3. Sustituyendo esta trasformación en (1) se llega a un sistema de ecuaciónes matricial; el cual, para resolverse, es necesario dividirse en casos.

$$\begin{gathered} A^t A - C^t C = I_3 \\ B^t A - DC = 0 \\ B^t B - D^2 = -1 \end{gathered} \tag{3}$$

Caso 1: $C = 0$ y $A \neq 0$, lo que nos deja que $A^t A = I_3$, $B = 0$ y $D = \pm 1$. Con esto se construyen las transformaciones

$$R_+(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \qquad R_-(E) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \tag{4}$$

las cuales son trasformaciones euclideanas ortogonales, las cuales cumplen con las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} \det R_\pm(E) = \pm 1 \\ R_+^t(E) R_+(E) = R_-(E)^t R_-(E) = I_4 \\ R_+(E)^t R_-(E) = \eta \end{cases} \tag{5}$$

Caso 2: Para este caso se define $A = \text{diag}(K, 1, 1), |K| \geq 1$, $B^t = (B_1, B_2, B_3)$, $C = (C_1, C_2, C_3)$; dado esto, y tomando (3) implica que:

$$\begin{cases} C_1 = \pm\sqrt{K^2 - 1},\ C_2 = C_3 = 0 \\ B_1 = \pm\frac{D}{K}\sqrt{K^2 - 1},\ B_2 = B_3 = 0\ . \\ D = \pm |K| \end{cases} \tag{6}$$

Esto define las siguientes transformaciones de Lorentz

$$L_1 = \begin{pmatrix} K & C_1 & 0 & 0 \\ C_1 & K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} -K & -C_1 & 0 & 0 \\ C_1 & K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$L_3 = \begin{pmatrix} K & C_1 & 0 & 0 \\ -C_1 & K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_4 = \begin{pmatrix} -K & -C_1 & 0 & 0 \\ -C_1 & K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las soluciones especiales son llamadas *boosts*.

Solución General: Para esto se definió β como $B = -D\beta$, dado esto y utilizando el sistema (3), dado esto β debe cumplir que $0 < \beta^2 < 1$. Realizando un poco de algebra matricial se concluye que

$$\begin{cases} A = \pm\left(I + \frac{D-1}{\beta^2}\beta\beta^t\right)E, \\ B = \mp D\beta, \\ C = \mp D\beta^t, \end{cases}$$

con E una matriz euclideana ortogonal, entonces se concluye la transformación general de Lorentz

$$L(\beta, E) = L(\beta)R(E), \tag{7}$$

donde la matriz $R(E)$ es la solución del caso 1.

$$L(\beta) = \begin{pmatrix} \pm\gamma & \mp\gamma\beta^t \\ \mp\gamma\beta & \pm\left(\delta^\mu_\nu + \frac{\det L(\gamma-1)}{\beta^2}\beta\beta^t\right) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Con $D = \pm\gamma$ y $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Si se toman todos los casos de las matrices euclideanas ortogonales se tendrían 8 casos en total. Y, nos interesan cuatro casos

a) Trans. propia de Lorentz ($D = \gamma$):

$$L_{+\uparrow}(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta^t \\ -\gamma\beta & I + \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta\beta^t \end{pmatrix} \tag{9}$$

b) Trans. de Lorentz con inversión espacial ($D = \gamma$):

$$L_{-\downarrow}(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta^t \\ -\gamma\beta & -I - \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta\beta^t \end{pmatrix} \tag{10}$$

c) Trans. de Lorentz con inversión temporal ($D = -\gamma$):

$$L_{-\uparrow}(\beta) = \begin{pmatrix} -\gamma & \gamma\beta^t \\ \gamma\beta & I - \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta\beta^t \end{pmatrix} \tag{11}$$

d) Trans. de Lorentz con inversión espacio-temporal ($D = -\gamma$):

$$L_{+\downarrow}(\beta) = \begin{pmatrix} -\gamma & -\gamma\beta^t \\ \gamma\beta & -I - \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta\beta^t \end{pmatrix} \tag{12}$$