Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Estadística 1
Diego Sarceño 201900109
28 de marzo de 2022

# Tarea 4

## 1. Distribución de Probabilidad Discreta

### 273

Dada la variable aleatoria $X$ con distribución $\{1, \dots, n\}$. Calculamos lo siguiente

- **E(X)** Por definición

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} x_i f(x_i) = \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{i=0}^{n} x_i}_{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{n+1}{2}.$$

- **E(X²)** Por definición

$$E(X^2) = \sum_{i=0}^{n} x_i^2 f(x_i) = \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{i=0}^{n} x_i^2 x_i^2}_{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- **V(X)** Por definición de varianza

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n+1}{2},$$

simplificando con Mathematica (porque ya no estamos para estos trotes xD)

$$V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

## 2. Distribución de Probabilidad de Bernoulli

### 286

Teniendo la varianza para la distribución de Bernoulli $V(X) = p(1-p)$, encontramos $p$ para maximizar $V(X)$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} V(X) = 1 - 2p = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{p = \frac{1}{2}}.$$

# 3. Distribución de Probabilidad Binomial

### 305

Dados los datos $p = 0.9$ y $n = 20$, queremos obtener la probabilidad de no tener el ni el mínimo de éxito, es decir, $x = 18$, por ende queremos la probabilidad acumulada hasta $x = 17$. Utilizando la siguiente función de $R$: `pbinom(17, size = 20, prob = 0.9)`. Con dicha función se tiene $P(X \leq 17) = \sum_{x=0}^{17} \binom{20}{x} p^x (1-p)^{20-x} = 0.3230732$.

# 4. Distribución de Probabilidad Geométrica

# 5. Distribución de Probabilidad Binomial Negativa

### 331

Dado que necesitamos $n$ lanzamientos y $r = 6$ éxitos; por ende, el número de fracasos $x = n - r$. Sustituyendo en la función de densidad de probabilidad

$$\boxed{f(n-6) = \binom{n-1}{n-6} \left(\frac{1}{6}\right)^6 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-6}.}$$

# 6. Distribución de Probabilidad Hipergeométrica

### 341

Dados los datos, se tiene $N = 100$, $K = 90$, $n = 5$ y $x \in [2, n]$. Con esto, dado que queremos la probabilidad de que se realize la compra, calculamos

$$1 - \sum_{x=2}^{5} \frac{\binom{90}{x}\binom{10}{5-x}}{\binom{100}{5}} = 0.9231433.$$

Para esto se utilizó $R$.

```
var1 <- 0
for (i in 2:5){
var1 <- var1 + dhyper(i,90,10,5)
}
```

# 7. Distribución de Probabilidad de Poisson

### 343

Encontrando el valor esperado $E(X)$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x}^{\infty} x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \\ &= \sum_{x}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{x}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}}_{e^{\lambda}} \\
&= \lambda.
\end{aligned}
$$

Ahora, encontrando la varianza $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$, encontramos la esperanza de $X^2$

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{x} x^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \\
&= \sum_{x} \lambda x e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{j} (j+1) \frac{\lambda^j}{j!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \left[ \underbrace{\sum_{j} j \frac{\lambda^j}{j!}}_{\lambda e^{\lambda}} + \underbrace{\sum_{j} \frac{\lambda^j}{j!}}_{e^{\lambda}} \right] \\
&= \lambda^2 + \lambda,
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
V(X) &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \\
&= \lambda.
\end{aligned}
$$