Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Mecánica Cuántica 1
Diego Sarceño 201900109
10 de mayo de 2022

Hoja de Trabajo 7

1. Problema 1

Tomando $\Psi(x,t) = c_1 e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}}\psi_1(x) + c_2 e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}}\psi_2(x)$, para $t > 0$, entonces calculamos $|\Psi(x,t)|^2 = \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)$. Entonces

$$|\Psi(x,t)|^2 = \left(c_1 e^{\frac{iE_1 t}{\hbar}}\psi_1^*(x) + c_2 e^{\frac{iE_2 t}{\hbar}}\psi_2^*(x)\right)\left(c_1 e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}}\psi_1(x) + c_2 e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}}\psi_2(x)\right)$$

$$= c_1^2|\psi_1(x)|^2 + c_2^2|\psi_2(x)|^2 + c_1c_2 e^{-\frac{iE_1}{\hbar}(E_2-E_1)}\psi_1^*(x)\psi_2(x) + c_1c_2 e^{-\frac{iE_2}{\hbar}(E_1-E_2)}\psi_1(x)\psi_2^*(x).$$

Cuya derivada es claramente distinta de cero, por lo que no es un estado estacionario.

2. Problema 2

Tomando $f(\alpha) = e^{\alpha A}Be^{\alpha A}$, expandimos en taylor alrededor de cero, de modo que la función será de la forma

$$f(\alpha) = f(0) + \frac{\alpha}{1!}f'(0) + \frac{\alpha^2}{2!}f''(0) + \frac{\alpha^3}{3!}f'''(0) + \cdots .$$

Con esto encontramos cada una de las derivadas valuadas en cero.

$$\begin{aligned}
f'(\alpha) &= Ae^{\alpha A}Be^{-\alpha A} - e^{\alpha A}BAe^{-\alpha A}\\
f'(0) &= AB - BA = [A,B].\\
f''(\alpha) &= A^2e^{\alpha A}Be^{-\alpha A} - Ae^{\alpha A}BAe^{-\alpha A} - Ae^{\alpha A}BAe^{-\alpha A} + e^{\alpha A}BA^2e^{-\alpha A},\\
f''(0) &= A^2B - ABA - ABA + BA^2 = A[A,B] - [A,B]A = [A,[A,B]].\\
f'''(\alpha) &= A^3e^{\alpha A}Be^{-\alpha A} - A^2e^{\alpha A}BAe^{-\alpha A} - A^2e^{\alpha A}BAe^{-\alpha A} + Ae^{\alpha A}BA^2e^{-\alpha A} - A^2e^{\alpha A}BAe^{-\alpha A}\\
&\qquad + Ae^{\alpha A}BA^2e^{-\alpha A} + Ae^{\alpha A}BA^2e^{-\alpha A} - e^{\alpha A}BA^3e^{-\alpha A},\\
f'''(0) &= A^3B - A^2BA - A^2BA + ABA^2 - A^2BA + ABA^2 + ABA^2 - BA^3 = A^2[A,B]\\
&\qquad + [A,B]A^2 - A[A,B]A - A[A,B]A = A[A,[A,B]] - [A,[A,B]]A\\
f'''(0) &= [A,[A,[A,B]]].\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Sustituyendo lo anterior en la expanción de Taylor

$$\boxed{e^{\alpha A}Be^{\alpha A} = B + \alpha[A,B] + \frac{\alpha^2}{2!}[A,[A,B]] + \frac{\alpha^3}{3!}[A,[A,[A,B]]] + \cdots .}$$

3. Problema 3

Tomando lo demostrado anteriormente, se calculan los respectivos conmutadores.

a) Tomando $\hat{A} = i\sigma_y$ y $\hat{B} = \sigma_x$, entonces, calculando cada conmutador

$$\begin{aligned}
[i\sigma_y, \sigma_x] &= -2i^2\sigma_z \\
\Bigg[i\sigma_y, \underbrace{[i\sigma_y, \sigma_x]}_{-2i^2\sigma_z}\Bigg] &= 2^2 i^4 \sigma_x \\
\Bigg[i\sigma_y, \underbrace{[i\sigma_y, [i\sigma_y, \sigma_x]]}_{2^2 i^4 \sigma_x}\Bigg] &= 2^3 i^6 \sigma_z. \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{1}$$

Teninedo las relaciones de conmutacion (1), entonces, agrupamos las que esten relacionadas con cada una de las matrices de pauli presentes; asimismo, simplificamos las potencias de i

$$e^{i\alpha\sigma_y}\sigma_x e^{-i\alpha\sigma_y} = \underbrace{\left(1 - \frac{(2\alpha)^2}{2!} + \cdots\right)}_{\cos 2\alpha}\sigma_x + \underbrace{\left((2\alpha) - \frac{(2\alpha)^3}{3!} + \cdots\right)}_{\sin 2\alpha}\sigma_z$$

$$\boxed{e^{i\alpha\sigma_y}\sigma_x e^{-i\alpha\sigma_y} = \sigma_x \cos 2\alpha + \sigma_z \sin 2\alpha.}$$

b) Tomando $\hat{A} = i\sigma_z$ y $\hat{B} = \sigma_x$, entonces, calculando cada conmutador

$$\begin{aligned}
[i\sigma_z, \sigma_x] &= 2i^2\sigma_y \\
\Bigg[i\sigma_z, \underbrace{[i\sigma_z, \sigma_x]}_{2i^2\sigma_y}\Bigg] &= -2^2 i^4 \sigma_x \\
\Bigg[i\sigma_z, \underbrace{[i\sigma_z, [i\sigma_z, \sigma_x]]}_{-2^2 i^4 \sigma_x}\Bigg] &= -2^3 i^6 \sigma_y. \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2}$$

Teninedo las relaciones de conmutacion (2), entonces, agrupamos las que esten relacionadas con cada una de las matrices de pauli presentes; asimismo, simplificamos las potencias de i

$$e^{i\alpha\sigma_z}\sigma_x e^{-i\alpha\sigma_z} = \underbrace{\left(1 - \frac{(2\alpha)^2}{2!} + \cdots\right)}_{\cos 2\alpha}\sigma_x - \underbrace{\left((2\alpha) - \frac{(2\alpha)^3}{3!} + \cdots\right)}_{\sin 2\alpha}\sigma_y$$

$$\boxed{e^{i\alpha\sigma_z}\sigma_x e^{-i\alpha\sigma_z} = \sigma_x \cos 2\alpha - \sigma_y \sin 2\alpha.}$$

c) Tomando $\hat{A} = i\sigma_x$ y $\hat{B} = \sigma_y$, entonces, calculando cada conmutador

$$\begin{aligned} [i\sigma_x, \sigma_y] &= 2i^2\sigma_z \\ \Big[i\sigma_x, \underbrace{[i\sigma_x, \sigma_y]}_{2i^2\sigma_z}\Big] &= -2^2 i^4 \sigma_y \\ \Big[i\sigma_x, \underbrace{[i\sigma_x, [i\sigma_x, \sigma_y]]}_{-2^2i^4\sigma_y}\Big] &= -2^3 i^6 \sigma_z. \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3}$$

Teninedo las relaciones de conmutacion (3), entonces, agrupamos las que esten relacionadas con cada una de las matrices de pauli presentes; asimismo, simplificamos las potencias de i

$$e^{i\alpha\sigma_x}\sigma_y e^{-i\alpha\sigma_x} = \underbrace{\left(1 - \frac{(2\alpha)^2}{2!} + \cdots\right)}_{\cos 2\alpha}\sigma_y - \underbrace{\left((2\alpha) - \frac{(2\alpha)^3}{3!} + \cdots\right)}_{\sin 2\alpha}\sigma_z$$

$$\boxed{e^{i\alpha\sigma_x}\sigma_y e^{-i\alpha\sigma_x} = \sigma_y \cos 2\alpha - \sigma_z \sin 2\alpha.}$$

4. Problema 4

Utilizando el teorema de Ehrenfest con el hamiltoniano $H = \frac{p_z^2}{2m} - mgz$. Entonces

a) para $\frac{\mathrm{d}\langle p_z\rangle}{\mathrm{d}t}$

$$\frac{\mathrm{d}\left\langle p_z\right\rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{\hbar}\left\langle [H, p_z]\right\rangle + \cancelto{0}{\left\langle \frac{\partial p_z}{\partial t}\right\rangle},$$

calculando el conmutador

$$[H, p_z] = \frac{1}{2m}\left[p_z^2, p_z\right] - mg[z, p_z] = -mgi\hbar I.$$

Reemplazando en la ecuación anterior, se tiene

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\left\langle p_z\right\rangle}{\mathrm{d}t} = mg.}$$

Ahora, para el hamiltoniano

$$\frac{\mathrm{d}\left\langle H\right\rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{\hbar}\cancelto{0}{\left\langle [H, H]\right\rangle} + \cancelto{0}{\left\langle \frac{\partial H}{\partial t}\right\rangle},$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\left\langle H\right\rangle}{\mathrm{d}t} = 0.}$$

b) Ahora, calculamos lo mismo para z y resolvemos la ecuación con las condiciones iniciales siguientes: $\left\langle z\right\rangle(0) = h$ y $\left\langle p_z\right\rangle(0) = 0$. Ahora calculamos con el teorema de Ehrenfest

$$\frac{\mathrm{d}\left\langle z\right\rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{\hbar}\left\langle [H, z]\right\rangle + \cancelto{0}{\frac{\partial z}{\partial t}},$$

el conmutador es

$$[H, z] = \frac{1}{2m}\left[p_z^2, z\right] - mg[z, z] = -\frac{i\hbar p_z}{m}.$$

Dado esto, el sistema de ecuaciones a resolver es

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\langle p_z\rangle}{\mathrm{d}t} = mg \\ \frac{\mathrm{d}\langle z\rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m}\left\langle p_z\right\rangle . \end{cases}$$

Realizando las integrales y valuando las condiciones inicales, las soluciones son

$$\boxed{\begin{cases} \left\langle z\right\rangle(t) = h + \frac{1}{2}gt^2 \\ \left\langle p_z\right\rangle(t) = mgt. \end{cases}}$$

5. Problema 5

PDF mathematica.

Problema 5:

Importamos nuestro paquete de funciones

In[1]:=
```
<< qmDS`
```

Dadas las matrices

In[2]:=
```
MatrixForm[H = ℏ * ω * {{1, 0, 0}, {0, -1, 0}, {0, 0, -1}}]
MatrixForm[B = b * {{1, 0, 0}, {0, 0, 1}, {0, 1, 0}}]
```

Out[2]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \omega\hbar & 0 & 0 \\ 0 & -\omega\hbar & 0 \\ 0 & 0 & -\omega\hbar \end{pmatrix}$$

Out[3]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

a) Evaluando si los operadores son compatibles

In[4]:=
```
Conmutator[H, B] // MatrixForm
```

Out[4]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vectores propios de los operadores

In[11]:=
```
Eigensystem[H]
Eigensystem[B]
```

Out[11]= $\{\{-\omega\hbar, -\omega\hbar, \omega\hbar\}, \{\{0, 0, 1\}, \{0, 1, 0\}, \{1, 0, 0\}\}\}$

Out[12]= $\{\{-b, b, b\}, \{\{0, -1, 1\}, \{0, 1, 1\}, \{1, 0, 0\}\}\}$

In[6]:=
```
eigvH = Eigensystem[H][[2]]
eigvB = Eigensystem[B][[2]]
```

Out[6]= $\{\{0, 0, 1\}, \{0, 1, 0\}, \{1, 0, 0\}\}$

Out[7]= $\{\{0, -1, 1\}, \{0, 1, 1\}, \{1, 0, 0\}\}$

In[8]:=
```
eigvB
H.# & /@ eigvB
```

Out[8]= $\{\{0, -1, 1\}, \{0, 1, 1\}, \{1, 0, 0\}\}$

Out[9]= $\{\{0, \omega\hbar, -\omega\hbar\}, \{0, -\omega\hbar, -\omega\hbar\}, \{\omega\hbar, 0, 0\}\}$

Con lo que encontramos la base común de eigenvectores, dado que al aplicar H a cada uno de los vectores propios de B, nos da un vector propio de B multiplicado por un valor propio de H.

b) Vemos cual de los siguientes conjuntos es un CSCO. {H} no lo es, puesto que sus valores propios son degenerados. {B} lo mismo que {H}. {H,B} forman un CSCO dado que cada vector propio se asocia a un par de valores propios diferente. Para $\{H^2, B\}$ sucede lo contrario, se tiene que un mismo par de valores propios se asocia a dos vectores propios distintos, por lo que no forman un CSCO.

In[10]:=
```
Conmutator[H.H, B] // MatrixForm
```

Out[10]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In[13]:=
```
Eigensystem[H.H]
Eigensystem[B]
```

Out[13]= $\{\{\omega^2 \hbar^2, \omega^2 \hbar^2, \omega^2 \hbar^2\}, \{\{0, 0, 1\}, \{0, 1, 0\}, \{1, 0, 0\}\}\}$

Out[14]= $\{\{-b, b, b\}, \{\{0, -1, 1\}, \{0, 1, 1\}, \{1, 0, 0\}\}\}$