HT4 Mecánica Cuántica

Diego Sarceño, 201900109

Llamamos al módulo “qmDS”

In[32]:=
```
<< qmDS`
```

Problema 1:

Teniendo el estado $|\psi(0)\rangle$ y el Hamiltoniano H definidos de la siguiente forma

In[49]:=
```
MatrixForm[ψ0 = Normalize[{4 - I, -2 + 5 * I, 3 + 2 * I}]]
MatrixForm[H1 = 1/Sqrt[2] * {{0, -I, 0}, {I, 3, 3}, {0, 3, 0}}]
```

Out[49]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{4-i}{\sqrt{59}} \\ -\frac{2-5i}{\sqrt{59}} \\ \frac{3+2i}{\sqrt{59}} \end{pmatrix}$$

Out[50]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

a) Al medir la energía del sistema, los posibles resutados son

In[35]:=
```
Eigenvalues[H1]
```

Out[35]= $\left\{\frac{5}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}, 0\right\}$

In[36]:=
```
Eigenvectors[H1]
Eigenvectors[H1] // MatrixForm
```

Out[36]= $\{\{-i, 5, 3\}, \{-i, -2, 3\}, \{3i, 0, 1\}\}$

In[47]:=
```
normEigv = Normalize /@ Eigenvectors[H1]
```

Out[47]= $\left\{\left\{-\frac{i}{\sqrt{35}}, \sqrt{\frac{5}{7}}, \frac{3}{\sqrt{35}}\right\}, \left\{-\frac{i}{\sqrt{14}}, -\sqrt{\frac{2}{7}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right\}, \left\{\frac{3i}{\sqrt{10}}, 0, \frac{1}{\sqrt{10}}\right\}\right\}$

In[51]:=
```
Solve[{x * normEigv[[1]] + y * normEigv[[2]] + z * normEigv[[3]] == ψ0}, {x, y, z}]
```

Out[51]= $\left\{\left\{x \to i \sqrt{\frac{35}{59}},\ y \to \sqrt{\frac{14}{59}},\ z \to -i \sqrt{\frac{10}{59}}\right\}\right\}$

Los posibles valores de la energía son $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}, 0\right)$.

b) Reescribiendo el sistema en términos de los vectores propios del hamiltoniano (los cuales son ortogonales y ya se normalizaron).

$$\left|\psi(0)\right\rangle = i \sqrt{\frac{35}{59}}\ e^{\frac{-i}{\hbar} \frac{5}{\sqrt{2}} t} \left|\phi_1\right\rangle + \sqrt{\frac{14}{59}}\ e^{\frac{i}{\hbar} \sqrt{2}\, t} \left|\phi_2\right\rangle - i \sqrt{\frac{10}{59}} \left|\phi_3\right\rangle$$

c) Teniendo esto, podemos calcular los valores de espectacion para $t > 0$ y $t = 0$,

Para tiempos mayores a cero.

In[54]:= $\left(\left(\frac{5}{\sqrt{2}} * \frac{35}{59}\right) + \left(-\sqrt{2} * \frac{14}{59}\right) + \left(0 * \frac{10}{59}\right)\right)$ // N

Out[54]= 1.76177

Para el tiempo igual a cero.

In[56]:=
```
ExpectationValue[H1, ψ0] // N
```

Out[56]= 1.76177

d) Si, debido a que e H tiene valores propios no degenerados.

Problema 2:

Tomando la matriz de pauli en “z” calculamos los valores y vectores propios

In[39]:=
```
Eigensystem[PauliMatrix[3]]
```

Out[39]= {{-1, 1}, {{0, 1}, {1, 0}}}

Dado esto, el vector propio que nos interesa es el vector asociado al valor propio positivo, con esto realizaremos los cálculos posteriores.

Encontrando la varianza del la matriz de pauli en x:

In[69]:=
```
vPx = ExpectationValue[PauliMatrix[1].PauliMatrix[1], Eigenvectors[PauliMatrix[3]][[2]]] -
  ExpectationValue[PauliMatrix[1], Eigenvectors[PauliMatrix[3]][[2]]]^2
```

Out[69]= 1

Para comprobar el principio de incertidumbre generalizado, encontramos la varianza de la matriz de pauli en “x” respecto al estado vector asociado al valor propio positivo de la matriz de pauli en “z”.

Ahora encontramos la varianza del operador conmutador entre las dos matrices de pauli utilizadas con el estado mencinado.

In[71]:=
```
vCxz = ExpectationValue[
  Conmutator[PauliMatrix[1], PauliMatrix[3]], Eigenvectors[PauliMatrix[3]][[2]]]
```

Out[71]= 0

Sustituyendo en el principio de incertidumbre generalizado

In[72]:= $vPx * vPz \geq \frac{1}{4} * \text{Abs}[vCxz]^2$

Out[72]= True

Lo que demuestra que si lo cumple.

Problema 3:

Se tienen los dos vectores

In[57]:=
```
σ = {PauliMatrix[1], PauliMatrix[2], PauliMatrix[3]}
MatrixForm[n = {Sin[θ], 0, Cos[θ]}]
```

Out[57]= {{{0, 1}, {1, 0}}, {{0, −i}, {i, 0}}, {{1, 0}, {0, −1}}}

Out[58]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \text{Sin}[\theta] \\ 0 \\ \text{Cos}[\theta] \end{pmatrix}$$

In[59]:=
```
MatrixForm[A = Sum[n[[i]] * σ[[i]], {i, 1, 3}]]
```

Out[59]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \text{Cos}[\theta] & \text{Sin}[\theta] \\ \text{Sin}[\theta] & -\text{Cos}[\theta] \end{pmatrix}$$

In[60]:=
```
MatrixForm[PauliMatrix[1].A]
```

Out[60]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \text{Sin}[\theta] & -\text{Cos}[\theta] \\ \text{Cos}[\theta] & \text{Sin}[\theta] \end{pmatrix}$$

In[76]:=
```
(v = Normalize[Flatten[ObservableEV[A, 1]]])
```

Out[76]= $$\left\{\frac{\text{Cot}[\theta] + \text{Csc}[\theta]}{\sqrt{1 + \text{Abs}[\text{Cot}[\theta] + \text{Csc}[\theta]]^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + \text{Abs}[\text{Cot}[\theta] + \text{Csc}[\theta]]^2}}\right\}$$

In[67]:=
```
Normalize /@ Eigenvectors[PauliMatrix[1]]
```

Out[67]= $$\left\{\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\right\}$$

In[81]:= $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.v // FullSimplify

Out[81]= $\frac{1+\mathrm{Cot}[\theta]+\mathrm{Csc}[\theta]}{\sqrt{2+2\,\mathrm{Conjugate}[\mathrm{Cot}[\theta]+\mathrm{Csc}[\theta]]\,(\mathrm{Cot}[\theta]+\mathrm{Csc}[\theta])}}$

```
In[ ]:= GeneralProbability[PauliMatrix[1], Eigenvectors[PauliMatrix[1]][[2]], 1]
Out[ ]= 1
```

b) Ahora encontramos la varianza de σ_x respecto al estado obtenido anteriormente

In[80]:= varianza = v.((PauliMatrix[1].PauliMatrix[1]).v) − (v.(PauliMatrix[1].v))^2 // FullSimplify

Out[80]= $\frac{4+\left(-3+\mathrm{Abs}[\mathrm{Cot}[\theta]+\mathrm{Csc}[\theta]]^2\right)\mathrm{Csc}\left[\frac{\theta}{2}\right]^2}{\left(1+\mathrm{Abs}[\mathrm{Cot}[\theta]+\mathrm{Csc}[\theta]]^2\right)^2}$

Problema 4:

Tenemos el sistema $\left|\psi(0)\right\rangle = \frac{\Lambda}{\sqrt{12}}\left|\phi_1\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}\left|\phi_2\right\rangle + \frac{2}{\sqrt{12}}\left|\phi_3\right\rangle + \frac{1}{2}\left|\phi_4\right\rangle$, encontramos la constante de normalizacion

a) Los estados del sistema los utilizamos normalizados para que el cálculo de las probabilidades siempre sea un valor válido.

In[43]:= Solve$\left[\frac{\Lambda^2}{12}+\frac{1}{6}+\frac{4}{12}+\frac{1}{4} == 0, \Lambda\right]$

Out[43]= $\{\{\Lambda \to -3\,i\}, \{\Lambda \to 3\,i\}\}$

b) Escribimos el estado del sistema para
$t > 0$,
$\left|\psi(0)\right\rangle = \frac{3\,i}{\sqrt{12}}\, e^{\frac{-i}{\hbar}E_1 t}\left|\phi_1\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}\, e^{\frac{-i}{\hbar}E_2 t}\left|\phi_2\right\rangle + \frac{2}{\sqrt{12}}\, e^{\frac{-i}{\hbar}E_3 t}\left|\phi_3\right\rangle + \frac{1}{2}\, e^{\frac{-i}{\hbar}E_4 t}\left|\phi_4\right\rangle$

c) La probabilidad de encontrar al sistema en el estado $\left|\phi_2\right\rangle$ es $\frac{1}{6}$.

Problema 5:

Al pasar cada uno de los filtros en el experimento de Stern-Gerlach, estamos proyectando el estado anterior en uno nuevo, dependiendo de que parte del haz se desea rechazar, con esto dicho, tenemos el estado luego de pasar por el último filtro:

$\left|-_z\right\rangle\left\langle -_z\right|\,\left|+_n\right\rangle\left\langle +_n\right|\,\left|+_z\right\rangle = \left|-_z\right\rangle$.

La intensidad del haz se es la probabilidad final (producto de probabilidades)
$\left|\,\left\langle -_z\right|\,\left|+_n\right\rangle\left\langle +_n\right|\,\left|+_z\right\rangle\,\right|^2$, para esto es necesario encontrar $\left|+_n\right\rangle$. El cual, por componentes se tiene

$\left|+_n\right\rangle = \sin(\theta)\left|+_x\right\rangle + \cos(\theta)\left|+_z\right\rangle$

b) Para maximizar la medición del segundo aparato es colapsarlo al eje x con un ángulo $+-\frac{\pi}{2}$.

Problema 6:

Dada la función $\psi(x, 0) = \frac{\lambda}{x\ +a}$, con esto encontramos la constante de normalización λ

In[7]:= $\sqrt{\frac{1}{\text{Integrate}\left[\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)^2, \{x, -\infty, \infty\}, \text{Assumptions} \to \text{Element}[a, \text{Reals}]\right]}}$

Out[7]= $\frac{\sqrt{a^4}\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\sqrt{\text{Abs}[a]}}$

In[9]:= $\lambda = \sqrt{\frac{2 * a^3}{\pi}}$

Out[9]= $\sqrt{a^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

In[10]:= $\psi x = \frac{\lambda}{x^2 + a^2}$

Out[10]= $\frac{\sqrt{a^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{a^2 + x^2}$

a) Con esto tenemos que $\lambda = \sqrt{\frac{2a}{\pi}}$.

b) Encontramos el valor esperado de x y de x^2 ($\left\langle\psi\right|\ X\ \left|\psi\right\rangle$ y $\left\langle\psi\right|\ X^2\ \left|\psi\right\rangle$), así como su incerteza.

In[11]:= vX = Integrate[ψx * x * ψx, {x, -∞, ∞}, Assumptions → Element[a, Reals]]

vXX = Integrate[ψx * x^2 * ψx, {x, -∞, ∞}, Assumptions → Element[a, Reals]]

Out[11]= 0

Out[12]= a^2

Ahora para la incerteza

In[13]:= sqrtvX = $\sqrt{vXX - vX^2}$

Out[13]= $\sqrt{a^2}$

c) Encontramos la funcion de onda en el espacio de momentum con la transformada de courier

In[22]:= $$n = \frac{1}{(2 * \pi * \hbar)^{\frac{3}{2}}}$$

Out[22]= $$\frac{1}{2\ \sqrt{2}\ \pi^{3/2}\ \hbar^{3/2}}$$

In[23]:= $$\text{Integrate}\left[\text{Exp}\left[-\frac{I * p * x}{\hbar}\right] * \frac{1}{x^2 + a^2}, \{x, -\infty, \infty\}\right]$$

Out[23]= $$\sqrt{\frac{1}{a^2}}\ e^{-\frac{\sqrt{\frac{p^2}{\hbar^2}}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}}}}\ \pi \text{ if } \frac{p}{\hbar} \in \mathbb{R}\ \&\&\ \text{Re}[a] \neq 0\ \&\&\ \left(\text{Re}\left[a^2\right] \geq 0 \,||\, a^2 \notin \mathbb{R}\right)$$

In[24]:= $$\frac{1}{\sqrt{\text{Integrate}\left[\left(n * \lambda\ \sqrt{\frac{1}{a^2}}\ e^{-\frac{\sqrt{\frac{p^2}{\hbar^2}}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}}}} * \pi\right)^2, \{p, -\infty, \infty\}\right]}} \text{ // FullSimplify}$$

Out[24]= $$\frac{2\ \pi}{\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{1}{a^2}}\ a\ \sqrt{\frac{1}{\hbar^2}}}{\hbar}}} \text{ if } \text{Re}\left[\frac{\sqrt{\frac{1}{\hbar^2}}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}}}\right] > 0$$

In[25]:= $$\psi p = \frac{2\ \pi}{\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{1}{a^2}}\ a\ \sqrt{\frac{1}{\hbar^2}}}{\hbar}}} * \pi * \sqrt{\frac{1}{a^2}} * \lambda * n * e^{-\frac{\sqrt{\frac{p^2}{\hbar^2}}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}}}}$$

Out[25]= $$\frac{\sqrt{\frac{1}{a^2}}\ \sqrt{a^3}\ e^{-\frac{\sqrt{\frac{p^2}{\hbar^2}}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}}}}}{\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{1}{a^2}}\ a\ \sqrt{\frac{1}{\hbar^2}}}{\hbar}}\ \hbar^{3/2}}$$

d) Teniendo la función en el espacio de momentum, calculamos los valores esperados y posteriormente la incerteza.

In[26]:=
```
vP = Integrate[ψp * p * ψp, {p, -∞, ∞}]
```

Out[26]= $0 \text{ if } \mathrm{Re}\left[\frac{\sqrt{\frac{1}{\hbar^2}}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}}}\right] > 0$

In[27]:=
```
vPP = Integrate[ψp * p^2 * ψp, {p, -∞, ∞}]
```

Out[27]= $\frac{\hbar^2}{2\,a^2} \text{ if } \mathrm{Re}\left[\frac{\sqrt{\frac{1}{\hbar^2}}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}}}\right] > 0$

In[28]:=
```
sqrtvP = √(vPP - vP^2)
```

Out[28]= $\frac{\sqrt{\frac{\hbar^2}{a^2}}}{\sqrt{2}} \text{ if } \mathrm{Re}\left[\frac{\sqrt{\frac{1}{\hbar^2}}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}}}\right] > 0$

e) Calculamos el principio de incertidumbre de Heisenberg, sabiendo que el conmutador del operador de posicion con el de momentum es $[X, P] = i\hbar I$, dado esto, calculamos el valor esperado y el principio de incertidumbre

In[31]:=
```
sqrtvP^2 * sqrtvX^2 ≥ 1/4 Abs[ℏ * I * Integrate[ψx * ψx, {x, -∞, ∞}]]^2
```

Out[31]= $\frac{\hbar^2}{2} \geq \frac{1}{4}\,\mathrm{Abs}\left[\left(\frac{1}{a^2}\right)^{3/2} a^3\,\hbar\right]^2 \text{ if } \textit{condition}$

Lo cual es claramente cierto.