



---

# ESTADÍSTICA 1

---

## 1. Probabilidad

### 1.1. Probabilidad Clásica

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad (1)$$

¿Qué problemas tiene la probabilidad clásica?

La definición conocida de probabilidad clásica puede aplicarse cuando:

- El espacio muestral es finito.
- Todos los elementos del espacio muestral tienen el mismo peso.

#### Propiedades de la Probabilidad Clásica

- $P(\Omega) = 1$ .
- $P(A) \geq 0$  para cualquier evento  $A$ .
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  si  $A$  y  $B$  son disjuntos.

### 1.2. Probabilidad Geométrica

Si un experimento aleatorio tiene como espacio muestral  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  cuya área está bien definida y es finita, entonces se define la probabilidad geométrica de un evento  $A \subseteq \Omega$  como

$$P(A) = \frac{\text{Área de } A}{\text{Área de } \Omega} \quad (2)$$

#### Propiedades de la Probabilidad Geométrica

- $P(\Omega) = 1$ .
- $P(A) \geq 0$  para cualquier evento  $A$ .
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  si  $A$  y  $B$  son disjuntos.

### 1.3. Probabilidad Frecuentista

Sea  $n_A$  el número de ocurrencias de un evento  $A$  en  $n$  realizaciones de un experimento aleatorio. La probabilidad frecuentista del evento  $A$  se define como el límite

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n} \quad (3)$$

En estadística, a diferencia del análisis matemático, el infinito no tiene sentido; por lo que utilizar el límite es un abuso de notación. Para efectos prácticos se tomará el concepto de "infinito" como una cantidad grande en repeticiones del experimento.

### 1.4. Espacios de Probabilidad

#### Definición 1

Un espacio de probabilidad es una terna  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , donde  $\Omega$  es un conjunto arbitrario,  $\mathcal{F}$  es una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $\Omega$ , y  $P$  es una medida de probabilidad sobre  $\mathcal{F}$ .

Para entender de mejor manera esta definición, es necesario introducir otros conceptos antes, tomaremos a  $\mathcal{F}$  como una colección de subconjuntos de  $\Omega$ .

#### Definición 2

MEDIDA DE PROBABILIDAD. Una función  $P$  definida sobre una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$  y con valores en el intervalo  $[0, 1]$  es una *medida de probabilidad* si  $P(\Omega) = 1$  y es  $\sigma$ -aditiva, es decir, si cumple que

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$

cuando  $A_1, A_2, \dots$  son elementos de  $\mathcal{F}$  que cumplen con la condición de ser ajenos dos a dos, esto es,  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para valores de  $i$  y  $j$  distintos.

#### Definición 3

SIGMA ÁLGEBRA. Una colección de  $\mathcal{F}$  de subconjuntos de  $\Omega$  es una  $\sigma$ -álgebra si

- a)  $\emptyset \in \mathcal{F}$ .
- b)  $\Omega \in \mathcal{F}$ .
- c) Si  $A \in \mathcal{F}$  entonces  $A^c \in \mathcal{F}$ .
- d) Si  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$  entonces

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

#### Ejemplo 1

1.  $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ .

La primera y segunda condición se cumplen. El tercer axioma, dado que tomamos el conjunto universo como  $\Omega$ , entonces los complementos pertenecen a la  $\sigma$ -álgebra. El cuarto axioma también se cumple. Entonces  $\mathcal{F}$  es una  $\sigma$ -álgebra.



$$2. \mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}.$$

Haciendo la analogía,  $\Omega$  es el espacio muestral,  $\mathcal{F}$  son los eventos.

### Teorema 1

Si  $A$  y  $B \in \mathcal{F}$  y  $\mathcal{F}$  es  $\sigma$ -álgebra entonces  $A \cap B \in \mathcal{F}$ .

*Demostración.* Tomando  $(A \cap B)^c$ , por leyes de DeMorgan,  $= A^c \cup B^c$ , lo que concluye la prueba.  $\square$

¿La intersección infinita de conjuntos está en la  $\sigma$ -álgebra?

### Teorema 2

Si  $S$  es una colección de subconjuntos de  $\Omega$  y cada uno de los elementos de  $S$  pertenecen a una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$ , entonces la intersección de todos los elementos de  $S$  pertenece a  $\mathcal{F}$ .

*Demostración.* Para el caso contable, se utiliza la idea de la demostración anterior, apliandola por inducción.  $\square$

### Definición 4

Sea  $S$  una colección de subconjuntos de  $\Omega$ , entonces la  $\sigma$ -álgebra generada por  $S$  es la menor  $\sigma$ -álgebra que contiene a  $S$ .

### Definición 5

Sea  $\mathcal{C}$  una colección no vacía de subconjuntos de  $\Omega$ . La  $\sigma$ -álgebra generada por  $\mathcal{C}$ , denotada por  $\sigma(\mathcal{C})$ , es la colección

$$\sigma(\mathcal{C}) = \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ } \sigma\text{-álgebra con } \mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}\}$$

### Definición 6

ÁLGEBRA. Una colección  $\mathcal{A}$  de subconjuntos de  $\Omega$  es una álgebra si cumple las siguientes condiciones:

1.  $\Omega \in \mathcal{A}$ .
2. Si  $A \in \mathcal{A}$ , entonces  $A^c \in \mathcal{A}$ .
3. Si  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ , entonces  $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A}$ .

Las  $\sigma$ -álgebra son subconjuntos de las álgebras.

### Definición 7

SEMIÁLGEBRA. Una colección  $\mathcal{S}$  de subconjuntos de  $\Omega$  es una semiálgebra si cumple las siguientes condiciones:

1.  $\Omega \in \mathcal{S}$ .
2. Si  $A, B \in \mathcal{S}$ , entonces  $A \cap B \in \mathcal{S}$ .



3. Si  $A, A_1 \in \mathcal{S}$  son tales que  $A_1 \subseteq A$ , entonces existen  $A_2, \dots, A_n \in \mathcal{S}$  tales que los subconjuntos  $A_1, \dots, A_n$  son ajenos dos a dos y se cumple que

$$A = \bigcup_{k=1}^n A_k.$$