Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Mecánica Cuántica 1
Diego Sarceño 201900109
10 de marzo de 2022

Tarea 1

1. Problema 1

Tomando dos estados $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H}$ y dos operadores hermíticos A, B, entonces, por definición, se tiene

$$\langle\psi|A|\phi\rangle = \langle\phi|A|\psi\rangle^*$$
$$\langle\psi|B|\phi\rangle = \langle\phi|B|\psi\rangle^*$$

por linealidad, sumamos ambas expresiones

$$\langle\psi| \left(A|\phi\rangle + B|\phi\rangle\right) = \left[\langle\phi| \left(A|\psi\rangle + B|\psi\rangle\right)\right]^*$$
$$\langle\psi|(A+B)|\phi\rangle = \langle\phi|(A+B)|\psi\rangle^* .$$

Con esto, queda demostrado que $(A+B) = (A+B)^\dagger$

2. Problema 2

Teniendo dos operadores unitarios U_1 y U_2, tomamos el nuevo operador U_1U_2, con esto, aplicamos su operador adjunto

$$U_1U_2(U_1U_2)^\dagger = U_1\underbrace{U_2U_2^\dagger}_{=I}U_1^\dagger$$
$$U_1U_1^\dagger = I,$$

esto se cumple por propiedades de los operadores unitarios, y se demuestra que U_1U_2 es unitario.

3. Problema 3

Dado $C = i[A,B]$ con A, B hermíticos, tomando el adjunto de C

$$\begin{aligned} C^\dagger = i^*[A,B]^\dagger &= -i\Big((AB)^\dagger - (BA)^\dagger\Big) \\ &= -i\Big(B^\dagger A^\dagger - A^\dagger B^\dagger\Big) \\ &= -i(BA - AB) \\ &= i(AB - BA) = C. \end{aligned}$$

Con esto queda demostrado que le operador C es hermítico.

4. Problema 4

Dados A y B hermíticos:

a) ($\Rightarrow$) dado que $AB = (AB)^\dagger$, tomando el lado derecho $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger = BA$, esto implica que $[A, B] = 0$, por lo que conmutan. $\square$
($\Leftarrow$) Dado que $[A, B] = 0$, entonces $0 = AB - BA = AB - B^\dagger A^\dagger = AB - (AB)^\dagger = 0$, lo que implica que AB es hermítico. $\square$

b) Dado $(A + B)^n$ tomamos el binomio de newton y aplicamos el adjunto

$$\begin{aligned}(A+B)^{n\dagger} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(A^{n-k}B^k\right)^\dagger \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (B^\dagger)^k (A^\dagger)^{n-k}\end{aligned}$$

renombrando los exponentes (esto se puede hacer puesto solo es cambiar el orden de las sumas y los operadores son conmutativos respecto a la suma)

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^{n-k}A^k = (B + A)^n = (A + B)^n$$

entonces, $(A + B)^n$ es hermítico $\square$

5. Problema 5

Dado un operador A

$$(A + A^\dagger)^\dagger = A^\dagger + \left(A^\dagger\right)^\dagger = A^\dagger + A \qquad \square$$

y

$$\left[i(A - A^\dagger)\right]^\dagger = i^*(A^\dagger - A) = i(A - A^\dagger).$$

6. Problema 6

Dado un A hermítico, entonces $\left(e^{iA}\right)^\dagger = e^{-iA^\dagger} = e^{-iA}$ esto es fácil ver debido a la expanción Taylor de la exponencial. Con esto

$$\left(e^{iA}\right)\left(e^{-iA}\right) = I.$$

7. Problema 7

Tomando un estado cualquiera $|\phi\rangle = a_j |\alpha_j\rangle$, entonces definimos $A = \sum_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$, aplicando A al estado, se tiene

$$A|\phi\rangle = \sum_i \sum_j a_j |\alpha_i\rangle \underbrace{\langle\alpha_i|\alpha_j\rangle}_{\delta_{ij}}.$$

Dado que la delta de kronecker es 1 solo cuando $i = j$, entonces simplificando la expresión se tiene

$$\Rightarrow \quad \sum_i a_i \left|\alpha_i\right\rangle = \left|\phi\right\rangle,$$

lo que implica que $A = I$ $\square$

8. Problema 8

Tomando a ambos vectores en términos de una base ortonormal del espacio y los coeficientes del Fourier ($a_j = \langle e_j|\psi\rangle$)

$$\begin{aligned}\left|\phi\right\rangle &= \sum_\alpha \left\langle\mu_\alpha|\phi\right\rangle \left|\mu_\alpha\right\rangle \\ \left|\psi\right\rangle &= \sum_\beta \left\langle\mu_\beta|\psi\right\rangle \left|\mu_\beta\right\rangle\end{aligned}$$

Con esto, encontramos el bra del estado $|\phi\rangle$, aplicando el nuevo funcional al vector $|\psi\rangle$, se tiene

$$\begin{aligned}\left\langle\phi|\psi\right\rangle &= \sum_\alpha \sum_\beta \left(\left\langle\phi|\mu_\alpha\right\rangle \left\langle\mu_\alpha\right|\right)\left(\left\langle\mu_\beta|\psi\right\rangle \left|\mu_\beta\right\rangle\right) \\ &= \sum_\alpha \sum_\beta \left\langle\phi|\mu_\alpha\right\rangle \left\langle\mu_\beta|\psi\right\rangle \underbrace{\left\langle\mu_\alpha|\mu_\beta\right\rangle}_{\delta_{\alpha\beta}}.\end{aligned}$$

Dada la delta de kroneker, los términos de la sumatoria que permanecen son aquellos cuyos índices $\alpha = \beta$, entonces solo permanece una de las dos sumatorias

$$\begin{aligned}\left\langle\phi|\psi\right\rangle &= \sum_\alpha \left\langle\phi|\mu_\alpha\right\rangle \left\langle\mu_\alpha|\psi\right\rangle \\ \left\langle\phi|\psi\right\rangle &= \left\langle\phi\right| \underbrace{\left(\sum_\alpha |\mu_\alpha\rangle\langle\mu_\alpha|\right)}_{I} \left|\psi\right\rangle.\end{aligned}$$

Lo que demuestra lo solicitado.

9. Problema 9

Dado que la el operador cumple con $H^4 = I$, aplicamos el operador 4 veces a un vector propio cualquiera, con lo que se tiene

$$H^4 \left|\psi_n\right\rangle = a_n^4 \left|\psi_n\right\rangle = I \left|\psi_n\right\rangle,$$

con esto, se tiene la ecuación algebraica

$$a_n^4 - 1 = 0. \tag{1}$$

a) Teniendo (1) y que H es hermítico (valores propios reales), las únicas soluciones admitidas son $\boxed{a_n = \pm 1}$.

b) Para el caso en el que H no es hermítico, se tiene que $\boxed{a_n = \pm 1, \quad a_n = \pm i}$.