Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Mecánica Cuántica 1
Diego Sarceño 201900109
8 de abril de 2022

Hoja de Trabajo 5

1. Problema 1

a. Demostración de identidades

a) Partiendo del lado derecho de la ecuación,

$$\begin{aligned}[A, C] + [B, C] &= (AC - CA) + (BC - CB) \\ &= (A + B)C - C(A + B) \\ &= [A + B, C].\end{aligned}$$

$\square$

b) Partiendo del lado derecho de la ecuación,

$$\begin{aligned}A[B, C] + [A, C]B &= A(BC - CB) + (AC - CA)B \\ &= ABC - ACB + ACB - CAB \\ &= ABC - CAB = (AB)C - C(AB) \\ &= [AB, C].\end{aligned}$$

$\square$

b. Tomando la relación obtenida en $1.a.b.$ separamos $[x^n, p]$ en $x^{n-1}[x, p] + [x^{n-1}, p]x = i\hbar x^{n-1} + [x^{n-1}, p]x$, utilizamos esta misma idea para realizar este proceso $n - 1$ veces. La segunda vez sería $[x^n, p] = 2i\hbar x^{n-1} + [x^{n-2}, p]x^2$. Luego de realizarlo $n - 1$ veces llegamos a $(n - 1)i\hbar x^{n-1} + [x, p]x^{n-1}$, entonces $[x^n, p] = ni\hbar x^{n-1}$.

c. Tomando $[f(x), p]$, dado que $f(x)$ tiene una expansión de Taylor

$$f(x) = \sum_j a_j x^j,$$

dada la linealidad en primera componente y por el ejercicio anterior

$$\sum_j a_j [x^j, p] = \sum_j j a_j i\hbar x^{j-1} = i\hbar \underbrace{\sum_j j a_j x^{j-1}}_{\frac{\mathrm{d} \sum_j a_j x^j}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}} = i\hbar \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}.$$

$\square$

d. Tomando $[\hbar w(a_-a_+ - 1/2\ , a_\pm)]$, separando por linealidad y la propiedad mostrada en 1.*b*. se tiene

$$[\hbar w(a_-a_+ - 1/2\ , a_\pm)] = \hbar w\left(\underbrace{[a_-a_+, a_\pm]}_{a_-[a_+,a_\pm]+[a_-,a_\pm]a_+} - [\frac{1}{2}I, a_\pm]\right),$$

depende de lo que se escoja (+ o −) y sabiendo que $[a_-, a_+] = 1$, se tiene que $[\hbar w(a_-a_+ - 1/2\ , a_\pm)] = \pm\hbar w a_\pm$. □

2. Problema 2

Dada la función de onda

$$\psi(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha x^2/2},$$

encontramos

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) x \psi(x)\, \mathrm{d}x\,,$$

y

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) x^2 \psi(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Utilizando mathematica, para encontrar estas dos integrales y para ns mayores, tenemos que para los n pares tenemos una relación, mientras que para n impares el valor esperado es cero. Entonces,

$$\langle x \rangle = 0,$$
$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{2\alpha}.$$

Teniendo esta tendencia, entonces

$$\boxed{\langle x^{17} \rangle = 0}.$$