Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Mecánica Cuántica 1
Diego Sarceño 201900109
1 de mayo de 2022

Hoja de Trabajo 6

1. Problema 1

Se utilizó mathematica, aqui solo aparecerán las respuestas, al final del pdf esta el desarrollo.

a) Constante de normalización $\sqrt{\dfrac{a}{\pi}}$.

b) La probabilidad de encontrar la partícula en en intervalo $\left(\frac{-a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$ es: $\frac{1}{3}$.

c) Para el valor esperado del operador momentum, tenemos el siguiente cálculo

$$\langle\psi|\hat{\mathbf{P}}|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x}\,\mathrm{d}x = i\frac{p_0}{\hbar}$$

2. Problema 2

Realizando la expansión Taylor de la función $f(p)$, y por linealidad del conmutador se puede expandir la sumatoria

$$[x, f(p)] = \cancelto{0}{[x, f(0)]} + [x, f'(0)p] + \left[x, \frac{1}{2}f''(0)p^2\right] + \cdots,$$

Dada la relación $[x,p] = i\hbar$ y se sigue cumpliendo la relación encontrada en la hoja 5. Entonces, la expansión anterior se escribe de la siguiente forma

$$[x, f(p)] = i\hbar f'(0) + \frac{1}{2!}f''(0)(2p)(i\hbar) + \cdots = i\hbar \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} ip^{i-1}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}}_{\frac{\mathrm{d}f(p)}{\mathrm{d}p}}.$$

Por lo tanto $[x, f(p)] = i\hbar\frac{\mathrm{d}f(p)}{\mathrm{d}p}$.

a) Encontrando $[x, T_a]$, con $T_a = e^{-iap/\hbar}$, con p el operador de momentum. Utilizando la relación antes demostrada, dado que $T_a = f(p)$. Entonces,

$$[x, T_a] = i\hbar\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}e^{-iap/\hbar}\right) = i\hbar\left(\frac{-ia}{\hbar}e^{-iap/\hbar}\right) = ae^{-iap/\hbar}\boxed{= aT_a.}$$

b) Para el valor esperado dada una traslación T_a, entonces $\langle\psi| T_a^\dagger X T_a |\psi\rangle$. Utilizanmos la siguiente expresión $T_a^\dagger \underbrace{[X, T_a]}_{aT_a} = T_a^\dagger X T_a - \underbrace{T_a^\dagger T_a}_{I} X$, despejando y sustituyendo $T_a^\dagger X T_a$, entonces

$$\langle\psi| T_a^\dagger X T_a |\psi\rangle = \langle\psi| T_a^\dagger a T_a + X |\psi\rangle = a \langle\psi|\psi\rangle + \langle X\rangle = \boxed{\langle X\rangle + a.}$$

3. Problema 3

4. Problema 4

Tomando el término $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle A\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\psi| A |\psi\rangle$, entonces, se tiene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\psi| A |\psi\rangle = \int \mathrm{d}^3r\, \frac{\partial\psi^*}{\partial t} A\psi + \int \mathrm{d}^3r\, \psi^* A \frac{\partial\psi}{\partial t} + \int \mathrm{d}^3r\, \psi^* \frac{\partial A}{\partial t}\psi,$$

entonces, sabiendo que el postulado de evolución temporal $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi$, entonces

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\psi|A|\psi\rangle = \frac{-1}{i\hbar}\langle\psi| H^\dagger A |\psi\rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle\psi| AH |\psi\rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle,$$

como el hamiltoniano es un operador hermítico, entonces, reduciendo la expresión dada y sabiendo $[H, A] = HA - AH$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle A\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[H, A]\rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle$$

□

5. Problema 5

Utilizando el teorema de Ehrenfest para el hamiltoniano dado, encontramos las ecuaciones de movimiento. Encontrando primero $[H, x]$ y $[H, p]$, se tiene

$$\begin{array}{c} [H,x] = \frac{1}{2}[p^2,x] + \frac{1}{2}m\omega_1[x^2,x] + \frac{1}{2}m\omega_2[x,x] + \frac{1}{2}mC[I,x] = -\frac{i\hbar p}{m} \\ [H,p] = \frac{1}{2}[p^2,p] + \frac{1}{2}m\omega_1[x^2,p] + \frac{1}{2}m\omega_2[x,p] + \frac{1}{2}mC[I,p] = m\omega_1 i\hbar x + \frac{1}{2}m\omega_2 i\hbar \end{array}.$$

Con esto, y sabiendo que $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$, entonces, sustituyendo en el teorema de Ehrenfest

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle x\rangle = \frac{1}{m}\langle p\rangle \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle p\rangle = -m\omega_1\langle x\rangle - \frac{1}{2}m\omega_2 \end{cases}.$$

Resolviendo las ecuaciones diferenciales, la solución la realizamos en mathematica.

6. Problema 6

a) Teniendo la función de onda dada, la constante de normalización es:

$$\boxed{N = \frac{1}{\sqrt{8abc}}.}$$

b) Dado el resultado de la integral y sabiendo las propiedades de exponentes, entonces se tiene que la probabilidad de se de un resultado entre 0 y a es

$$\frac{\left(1 - e^{-\frac{1}{\mathrm{sgn}(a)}}\right)\mathrm{sgn}(a)}{8bc} e^{-\left(\frac{|y|}{b} + \frac{|z|}{c}\right)},$$

donde $\mathrm{sgn}(a)$ es la función signo.

c) Calculamos para $-b$ a b y para $-c$ a c, integramos dos veces, siguiendo el resultado mostrado en mathematica:

$$\frac{\mathrm{sgn}(b)\mathrm{sgn}(c)\left(1 - e^{-\mathrm{sgn}(b)}\right)\left(1 - e^{-\mathrm{sgn}(c)}\right)}{2a}$$

Hoja de Trabajo 6

Diego Sarceño, 201900109

Calculos realizados para la hoja.

Problema 1

In[ ]:=
```
n =.
```

In[ ]:=
```
$Assumptions := Element[a, Reals] && Element[p0, Reals] && Element[ℏ, Reals];
```

$$\psi 1 = n * \frac{\text{Exp}\left[\frac{p0*x*I}{\hbar}\right]}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

Out[ ]= $$\frac{e^{\frac{i\, p0\, x}{\hbar}}\, n}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

Encontrando la constante de normalización

In[ ]:= $$n = \sqrt{\frac{1}{\text{Integrate}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)^2, \{x, -\infty, \infty\}\right]}}$$

Out[ ]= $$\frac{1}{\left(\frac{1}{a^2}\right)^{1/4}\sqrt{\pi}} \quad \text{if } \text{Re}[a^2] \geq 0 \,||\, a^2 \notin \mathbb{R}$$

Ahora, hallamos la probabilidad de encontrar a la partícula en el intervalo $\left(\frac{-a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$.

In[ ]:= $$\text{Integrate}\left[n^2 * \frac{1}{x^2+a^2}, \left\{x, \frac{-a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}\right\}\right]$$

Out[ ]= $$\frac{1}{3\sqrt{\frac{1}{a^2}}\, a} \quad \text{if } (\text{Re}[a^2] \geq 0 \,||\, a^2 \notin \mathbb{R}) \,\&\&\, \text{Re}[a] \geq 0 \,\&\&\, \text{Im}[a] == 0$$

Encontramos el valor esperado del momentum lineal

In[ ]:= $D\left[\sqrt{\frac{a}{\pi}} * \frac{\text{Exp}\left[\frac{p0*x*I}{\hbar}\right]}{\sqrt{x^2+a^2}}, x\right]$

Out[ ]= $-\frac{\sqrt{a}\, e^{\frac{i\, p0\, x}{\hbar}}\, x}{\sqrt{\pi}\, (a^2+x^2)^{3/2}} + \frac{i \sqrt{a}\, e^{\frac{i\, p0\, x}{\hbar}}\, p0}{\sqrt{\pi}\, \sqrt{a^2+x^2}\, \hbar}$

In[ ]:= $\text{Integrate}\left[\sqrt{\frac{a}{\pi}} * \frac{\text{Exp}\left[-\frac{p0*x*I}{\hbar}\right]}{\sqrt{x^2+a^2}} * D\left[\sqrt{\frac{a}{\pi}} * \frac{\text{Exp}\left[\frac{p0*x*I}{\hbar}\right]}{\sqrt{x^2+a^2}}, x\right], \{x, -\infty, \infty\}\right]$

Out[ ]= $\frac{i\, p0}{\hbar}$ if $\text{Re}[a] > 0$

.

Problema 3

Problema 5

Inciso (b).

In[ ]:= $\text{DSolve}\left[\left\{x'[t] == \frac{1}{m} * p[t],\ p'[t] - m * \omega_1 * x[t] == -\frac{1}{2} * m * \omega_2,\ x[0] == a_0,\ p[0] == b_0\right\}, \{x[t], p[t]\}, t\right]$ // ExpToTrig

Out[ ]= $\Big\{\Big\{p[t] \to \frac{1}{4\sqrt{\omega_1}} \left(\text{Cosh}\left[t\sqrt{\omega_1}\right] - \text{Sinh}\left[t\sqrt{\omega_1}\right]\right)\Big(2\, b_0 \sqrt{\omega_1} + 2\,\text{Cosh}\left[2\, t\sqrt{\omega_1}\right] b_0 \sqrt{\omega_1} + 2\,\text{Sinh}\left[2\, t\sqrt{\omega_1}\right] b_0 \sqrt{\omega_1} - 2\, m\, a_0\, \omega_1 + 2\, m\,\text{Cosh}\left[2\, t\sqrt{\omega_1}\right] a_0\, \omega_1 + 2\, m\,\text{Sinh}\left[2\, t\sqrt{\omega_1}\right] a_0\, \omega_1 + m\,\omega_2 - m\,\text{Cosh}\left[2\, t\sqrt{\omega_1}\right] \omega_2 - m\,\text{Sinh}\left[2\, t\sqrt{\omega_1}\right] \omega_2\Big),\ x[t] \to \frac{1}{4\, m\, \omega_1}\left(\text{Cosh}\left[t\sqrt{\omega_1}\right] - \text{Sinh}\left[t\sqrt{\omega_1}\right]\right)\Big(-2\, b_0\sqrt{\omega_1} + 2\,\text{Cosh}\left[2\, t\sqrt{\omega_1}\right] b_0\sqrt{\omega_1} + 2\,\text{Sinh}\left[2\, t\sqrt{\omega_1}\right] b_0 \sqrt{\omega_1} + 2\, m\, a_0\, \omega_1 + 2\, m\,\text{Cosh}\left[2\, t\sqrt{\omega_1}\right] a_0\, \omega_1 + 2\, m\,\text{Sinh}\left[2\, t\sqrt{\omega_1}\right] a_0\, \omega_1 - m\,\omega_2 + 2\, m\,\text{Cosh}\left[t\sqrt{\omega_1}\right]\omega_2 - m\,\text{Cosh}\left[2\, t\sqrt{\omega_1}\right]\omega_2 + 2\, m\,\text{Sinh}\left[t\sqrt{\omega_1}\right]\omega_2 - m\,\text{Sinh}\left[2\, t\sqrt{\omega_1}\right]\omega_2\Big)\Big\}\Big\}$

Problema 6

Constante de normalización

In[ ]:= $n = 1 \Big/ \left(\sqrt{\left(\text{Integrate}\left[\text{Exp}\left[-\left(\frac{\text{Abs}[x]}{a}\right)\right], \{x, -\infty, \infty\}\right] * \text{Integrate}\left[\text{Exp}\left[-\left(\frac{\text{Abs}[y]}{b}\right)\right], \{y, -\infty, \infty\}\right] * \text{Integrate}\left[\text{Exp}\left[-\left(\frac{\text{Abs}[z]}{c}\right)\right], \{z, -\infty, \infty\}\right]\right)}\right)$

Out[ ]= $$1 \Big/ \left(\sqrt{\left(\left(\begin{cases} 2\,a & \text{Re}[a] > 0 \\ \text{Integrate}\left[e^{-\frac{\text{Abs}[x]}{a}}, \{x, -\infty, \infty\}, \text{Assumptions} \to \text{Re}[a] \le 0\right] & \text{True} \end{cases}\right) \left(\begin{cases} 2\,b & \text{Re}[b] > 0 \\ \text{Integrate}\left[e^{-\frac{\text{Abs}[y]}{b}}, \{y, -\infty, \infty\}, \text{Assumptions} \to \text{Re}[b] \le 0\right] & \text{True} \end{cases}\right) \left(\begin{cases} 2\,c & \text{Re}[c] > 0 \\ \text{Integrate}\left[e^{-\frac{\text{Abs}[z]}{c}}, \{z, -\infty, \infty\}, \text{Assumptions} \to \text{Re}[c] \le 0\right] & \text{True} \end{cases}\right)\right)}\right)$$

In[ ]:= $\psi 6 = \frac{1}{\sqrt{8\,a * b * c}}\ \text{Exp}\left[-\left(\frac{\text{Abs}[x]}{2 * a} + \frac{\text{Abs}[y]}{2 * b} + \frac{\text{Abs}[z]}{2 * c}\right)\right]$

Out[ ]= $$\frac{e^{-\frac{\text{Abs}[x]}{2\,a} - \frac{\text{Abs}[y]}{2\,b} - \frac{\text{Abs}[z]}{2\,c}}}{2\sqrt{2}\ \sqrt{a\,b\,c}}$$

In[ ]:= $\text{Integrate}\left[\frac{e^{-\frac{\text{Abs}[x]}{a}}}{8\,a\,b\,c}, \{x, 0, a\}\right]$

Out[ ]= $$\frac{\left(1 - e^{-\frac{1}{\text{Sign}[a]}}\right)\text{Sign}[a]}{8\,b\,c}$$

$\text{Integrate}\left[\frac{e^{-\frac{\text{Abs}[y]}{b}}}{2\,a\,b\,c}, \{y, -b, b\}\right]$

Out[ ]= $$\frac{\left(1 - e^{-\frac{\text{Conjugate}[b]\ \text{Sign}[b]}{b}}\right)\text{Sign}[b]}{a\,c}$$

$$\frac{\left(1 - e^{-\frac{\text{Conjugate}[b]\ \text{Sign}[b]}{b}}\right)\text{Sign}[b]}{4\,a\,c}$$

In[ ]:= $\text{Integrate}\left[e^{-\frac{\text{Abs}[z]}{c}}, \{z, -c, c\}\right]$

Out[ ]= $$2\,c\left(1 - e^{-\frac{\text{Conjugate}[c]\ \text{Sign}[c]}{c}}\right)\text{Sign}[c]$$