



ESTADÍSTICA 1

1. Probabilidad

1.1. Probabilidad Clásica

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad (1)$$

¿Qué problemas tiene la probabilidad clásica?

La definición conocida de probabilidad clásica puede aplicarse cuando:

- El espacio muestral es finito.
- Todos los elementos del espacio muestral tienen el mismo peso.

Propiedades de la Probabilidad Clásica

- $P(\Omega) = 1$.
- $P(A) \geq 0$ para cualquier evento A .
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si A y B son disjuntos.

1.2. Probabilidad Geométrica

Si un experimento aleatorio tiene como espacio muestral $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ cuya área está bien definida y es finita, entonces se define la probabilidad geométrica de un evento $A \subseteq \Omega$ como

$$P(A) = \frac{\text{Área de } A}{\text{Área de } \Omega} \quad (2)$$

Propiedades de la Probabilidad Geométrica

- $P(\Omega) = 1$.
- $P(A) \geq 0$ para cualquier evento A .
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si A y B son disjuntos.

1.3. Probabilidad Frecuentista

Sea n_A el número de ocurrencias de un evento A en n realizaciones de un experimento aleatorio. La probabilidad frecuentista del evento A se define como el límite

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n} \quad (3)$$

En estadística, a diferencia del análisis matemático, el infinito no tiene sentido; por lo que utilizar el límite es un abuso de notación. Para efectos prácticos se tomará el concepto de "infinito" como una cantidad grande en repeticiones del experimento.

1.4. Espacios de Probabilidad

Definición 1

Un espacio de probabilidad es una terna (Ω, \mathcal{F}, P) , donde Ω es un conjunto arbitrario, \mathcal{F} es una σ -álgebra de subconjuntos de Ω , y P es una medida de probabilidad sobre \mathcal{F} .

Para entender de mejor manera esta definición, es necesario introducir otros conceptos antes, tomaremos a \mathcal{F} como una colección de subconjuntos de Ω .

Definición 2

MEDIDA DE PROBABILIDAD. Una función P definida sobre una σ -álgebra \mathcal{F} y con valores en el intervalo $[0, 1]$ es una *medida de probabilidad* si $P(\Omega) = 1$ y es σ -aditiva, es decir, si cumple que

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$

cuando A_1, A_2, \dots son elementos de \mathcal{F} que cumplen con la condición de ser ajenos dos a dos, esto es, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para valores de i y j distintos.

Definición 3

SIGMA ÁLGEBRA. Una colección de \mathcal{F} de subconjuntos de Ω es una σ -álgebra si

- a) $\emptyset \in \mathcal{F}$.
- b) $\Omega \in \mathcal{F}$.
- c) Si $A \in \mathcal{F}$ entonces $A^c \in \mathcal{F}$.
- d) Si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ entonces

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

Ejemplo 1

1. $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$.

La primera y segunda condición se cumplen. El tercer axioma, dado que tomamos el conjunto universo como Ω , entonces los complementos pertenecen a la σ -álgebra. El cuarto axioma también se cumple. Entonces \mathcal{F} es una σ -álgebra.



$$2. \mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}.$$

Haciendo la analogía, Ω es el espacio muestral, \mathcal{F} son los eventos.