

Tarea 1

MECÁNICA ESTADÍSTICA

1st Diego Sarceño Ramírez
201900109

I. FÓRMULA DE STIRLING

La función factorial tiene varias formas de definirse, las que más me gustan son las dos siguientes

$$n! = \prod_{k=1}^n k \quad (1)$$
$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n < 2 \\ (n-1)! \cdot n & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

La productoria y la fórmula de recurrencia. Una forma de aproximar la función factorial es la fórmula de Stirling. La aproximación de Stirling la deducimos aplicando la función logaritmo a la definición clásica de factorial y, por propiedades de los logaritmos, se separan en sumas:

$$\ln n! = \sum_{k=1}^n \ln k.$$

Dado esto, utilizamos la definición de integral en sumatoria, con lo que, desarrollando la integral de $\ln k$. Dada esta comparación, es claro que el área bajo la curva dada por la integral es menor a la dada por la sumatoria. Con esto y la solución de la integral

$$\ln n! > n \ln n - n + 1,$$

Esa es una forma de llegar a la fórmula de Stirling; sin embargo, una forma más directa de llegar es por medio de la función gamma, la cual es otra forma de definir la función factorial. Tomando la función gamma y sustituyendo $x^n = e^{n \ln x}$, entonces

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{n \ln x - x} dx.$$

Con esto, realizamos la sustitución $x = n + y$ y $dx = dy$, realizando un poco de álgebra en el exponente y sabiendo la serie de Laurent de $\ln(a + \frac{y}{n})$, con esto se llega a

$$n! \approx e^{-n} n^n \int_{-n}^\infty e^{-\frac{y^2}{2n}} dy.$$

Lo que es igual a

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n \quad (2)$$

II. TRIÁNGULO DE PASCAL

II-0a. Teorema de Construcción del Triángulo de Pascal [3]: Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y $r = 1, 2, \dots, n-1$, se tiene

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}. \quad (3)$$

Demostración. Tomando el teorema del binomio

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^{n-r} y^r, \quad (4)$$

si $x = 1$ y expresamos lo restante como $(1+y)^n = (1+y)(1+y)^{n-1} = (1+y)^{n-1} + y(1+y)^{n-1}$. Con esto encontramos el coeficiente de y^r en los tres términos dados, lo que nos da

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1},$$

lo que justamente es (3). \square

II-0b. Visualización: La ecuación (3), visualmente se representa como

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & \\ & & & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & \\ & & & & & & \\ & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\ & & & & & & \\ & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\ & & & & & & \\ & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \end{array}$$

Figura 1. Representación visual del triángulo de Pascal. Es claro que cada término de las filas es creado por la suma de los dos superiores.

III. GASES IDEALES

Los experimentos en gases muestran que la presión (p) de un volumen (V) de un gas, dependen de su temperatura (T). Vease [2].

III-A. Ley de Boyle

Dado un gas a temperatura constante, se tiene

$$p \propto \frac{1}{V}. \quad (5)$$

III-B. Ley de Gay-Lussac

Para un gas a volumen constante

$$p \propto T. \quad (6)$$

III-C. Charles

Para un gas a presión constante, se tiene

$$V \propto T, \quad (7)$$

con T medido en Kelvin.

III-D. Ley de los Gases Ideales

Estas tres leyes combinadas forman la ley de gases ideales

$$pV \propto T, \quad (8)$$

para N moléculas en el gas, la expresión anterior se convierte en

$$pV = Nk_B T. \quad (9)$$

III-E. Constantes

En la ecuación (9), se introducen dos constantes, la constante de Boltzmann y el Número de Avogadro.

- **Constante de los Gases Ideales:** Esta constante nace en la teoría de los gases; sin embargo, aparece en ámbitos que no tienen que ver con gases, esto es por como está construida

$$R = k_B N_A. \quad (10)$$

Tiene un valor de $R = 8.3144 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ en el sistema internacional.

- **Constante de Boltzmann:** Esta constante relaciona la temperatura absoluta y la energía, recae su importancia en la definición de entropía. Su valor numérico es $k_B = 1.380649 \times 10^{-23} \text{ J/K}$, en el sistema internacional.

III-E1. Número de Avogadro y Ley de Avogadro: El número de Avogadro es el factor de proporcionalidad entre el número de partículas o entidades elementales y la cantidad de sustancia. La constante de Avogadro tiene un valor de $N_A = 6.02214076 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$. La ley de Avogadro relaciona el nuevo concepto de cantidad de sustancia con el número de partículas para distintas sustancias gaseosas, citando literalmente de *wikipedia* [wik]:

"Volúmenes iguales de distintas sustancias gaseosas, medidos en las mismas condiciones de presión y temperatura, contienen el mismo número de moléculas."

En otras palabras

$$N \propto n, \quad (11)$$

con N el número de partículas y n el número de moles.

III-F. Amadeo Avogadro

Un Físico y Químico italiano, nacido en Italia en 1776 y fallecido en 1856. Graduado en 1792 de doctor en derecho canónico. En 1809, obtiene el puesto de profesor en el colegio real de Vercelli, en 1811, enunció la hipótesis de la, ahora conocida, ley de Avogadro. Para ello se apoyó en la teoría atómica de Dalton y en la ley de Gay-Lussac, (6). En 1814 publicó un trabajo llamado "Memoria sobre las masas relativas de las moléculas de los cuerpos simples, o densidades esperadas de su gas, y sobre la constitución de algunos de sus compuestos, para servir seguidamente como

ensayo sobre el mismo sujeto", y en 1820 publicó otro llamado "Nuevas consideraciones sobre la teoría de las proporciones determinadas en las combinaciones, y sobre la determinación de las masas de las moléculas de los cuerpos" y poco después "Memoria sobre la forma de incluir los compuestos orgánicos en las leyes ordinarias de las proporciones determinadas". En el año 1820, la universidad de Turín creó una cátedra para él, la cual ocuparía hasta su muerte.

III-G. Ludwig Boltzmann

Un físico austríaco nacido en Viena en el año 1844 y fallecido en 1906. Un pionero en Mecánica Estadística, graduado de doctor de la universidad de Viena en 1866. Trabajó como docente en la Universidad de Viena por el año de 1894, y en 1900 se trasladó a Leipzig. Entre sus obras más reconocidas están las que fueron publicadas en 1870 en las cuales expone cómo la segunda ley de la termodinámica se puede explicar aplicando análisis estadísticos, de donde deduce el teorema de equipartición de la energía y derivó una ecuación para el cambio en la distribución de energía entre los átomos de un sistema debido a las colisiones. A partir de ello realizó nuevos descubrimientos, de los cuales, uno de los más relevantes es la famosa ecuación de entropía, la cual relaciona estados macroscópicos y microscópicos $S = k_B \ln \Omega$. Se suicidó en 1906.

REFERENCIAS

[wik] Wikipedia.

[2] Blundell, S. J. and Blundell, K. M. (2006). *Concepts in Thermal Physics*. Department of Physics, University of Oxford, UK.

[3] Freund, J. E. (2014). *Mathematical Statistics with Applications*. Pearson.