Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Relatividad Especial
Diego Sarceño 201900109
16 de marzo de 2022

Tarea 5

1. D'Alemebertiano

Dado el D'Alembertiano

$$\Box^2 = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

y dos sistemas de coordenadas $(l, x, y, z), (l', x', y', z')$, con $l = ct$.

a) Dadas las transformaciones de Lorentz

$$\begin{cases} x = ax' + bl', \\ l = bx' + al', \\ y = y', \\ z = z'. \end{cases}$$

Para transformar el D'Alembertiano al sistema de coordenadas primado, tomamos la relación entre las derivadas parciales

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial l}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial l} = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial l},$$
$$\frac{\partial}{\partial l'} = \frac{\partial x}{\partial l'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial l}{\partial l'}\frac{\partial}{\partial l} = b\frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial l},$$
$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y},$$
$$\frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Teniendo esto, encontramos la segunda derivada, aplicando cada operador encontrado consigo mismo

$$\left(\frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2}\right)' = a^2\frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2} + b^2\frac{\partial^2 \cdot}{\partial l^2} + 2ab\frac{\partial^2 \cdot}{\partial x \partial l},$$

$$\left(\frac{\partial^2 \cdot}{\partial l^2}\right)' = b^2\frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2} + a^2\frac{\partial^2 \cdot}{\partial l^2} + 2ab\frac{\partial^2 \cdot}{\partial x \partial l}.$$

Dado el D'Almebertiano primado, sustituímos las relaciones encontradas, reduciendo se tiene

$$\Box'^2 = \left(a^2 - b^2\right)\left(\frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \cdot}{\partial l^2}\right) + \frac{\partial^2 \cdot}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \cdot}{\partial z^2}.$$

$\square$

b) Sabiendo que, $a = \gamma$, $b = \beta\gamma$ y $\gamma = 1\Big/\sqrt{1-\beta^2}$, con esto y la relación obtenida en la reseña realizada ($\gamma^2 = \beta^2\gamma^2 + 1$), simplificando

$$\Box'^2 = \Box^2$$

$\Box$

c) Dada la función de onda electromagnética ϕ y la relación $\Box^2\phi = 0$, dado que bajo la transformación de Lorentz $\Box'^2 = \Box^2$, entonces $\Box'^2\phi = 0$, entonces es covariante bajo la transformación de Lorentz. Tomando las transformaciones Galileanas

$$\begin{cases} x = kl' + x', \\ y = y', \\ z = z', \\ l' = l. \end{cases}$$

Con esto, encontramos el D'Alembertiano mediante la transformacion Galileana, se tienen las segundas derivadas

$$\left(\frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2}\right)' = \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2},$$
$$\left(\frac{\partial^2 \cdot}{\partial y^2}\right)' = \frac{\partial^2 \cdot}{\partial y^2},$$
$$\left(\frac{\partial^2 \cdot}{\partial z^2}\right)' = \frac{\partial^2 \cdot}{\partial z^2},$$
$$\left(\frac{\partial^2 \cdot}{\partial l^2}\right)' = b^2\frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \cdot}{\partial l^2} + b\frac{\partial^2 \cdot}{\partial x \partial l}.$$

Sustituyendo en el D'Alembertiano

$$\Box'^2_{\text{gal}} = \nabla^2 - b^2\frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \cdot}{\partial l^2} - b\frac{\partial^2 \cdot}{\partial x \partial l} \neq \Box^2.$$

Con esto, es claro que el D'Alembertiano no es covariante bajo la transformación Galileana. $\Box$