Lenguajes Regulares

Diego Sarceño

23 de febrero de 2022

Cerradura bajo la Concatenación

La clase de lenguajes regulares es cerrada bajo la operación de concatenación. (Lenguajes bajo el mismo alfabeto.)

Idea de la Demostración

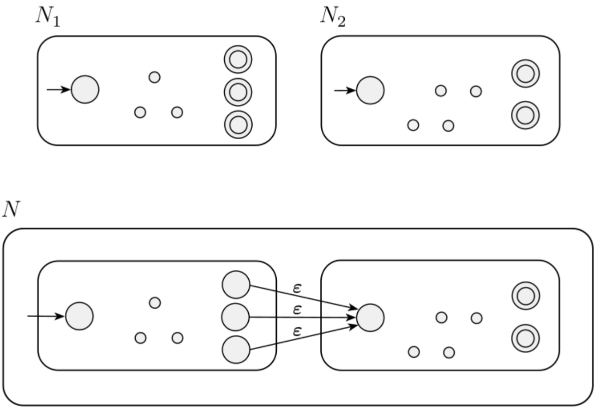
Dados dos lenguajes A_1 y A_2, se define la concatenación como

$$A_1 \circ A_2 = A_1 A_2 = \{xy | x \in A_1 \ \wedge \ y \in A_2\}.$$

Con esta definición en mente, se trabajará parecido al caso de la union, con la salvedad de que en vez de ser AFDs serán AFNDs. Se tomarán N_1 y N_2 AFNDs que reconozcan a A_1 y A_2. Se construirá un AFND que acepte estados como si fueran partidos en dos pedazos, en concreto, pedazos que acepte N_1 y el otro pedazo lo acepte N_2.

Visualización de la Idea

Ya con esta idea, lo que vamos a hacer (visualmente) es:



Desarrollo

Ya con esto, se definen los AFNDs $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ y $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$. Ahora construímos N como $N = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F_2)$:

Desarrollo

Ya con esto, se definen los AFNDs $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ y $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$. Ahora construímos N como $N = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F_2)$:

1. $Q = Q_1 \cup Q_2$, dado que queremos tener todos los estados de ambos autómatas.

Desarrollo

Ya con esto, se definen los AFNDs $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ y $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$. Ahora construímos N como $N = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F_2)$:

1. $Q = Q_1 \cup Q_2$, dado que queremos tener todos los estados de ambos autómatas.
2. El alfabeto no cambia.

Desarrollo

Ya con esto, se definen los AFNDs $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ y $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$. Ahora construímos N como $N = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F_2)$:

1. $Q = Q_1 \cup Q_2$, dado que queremos tener todos los estados de ambos autómatas.
2. El alfabeto no cambia.
3. La función de transición se vuelve una función por casos, tomando $x \in \Sigma$ y $q \in Q$

$$\delta(q,x) = \begin{cases} \delta_1(q,x) & q \in Q_1 \quad \text{y} \quad q \notin F_1 \\ \delta_1(q,x) & x \neq \varepsilon \\ \delta_2(q,x) \cup \{q_2\} & q \in F_1 \quad \text{y} \quad x = \varepsilon \\ \delta_2(q,x) & q \in Q_2 \end{cases}$$

Desarrollo

Ya con esto, se definen los AFNDs $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ y $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$. Ahora construímos N como $N = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F_2)$:

1. $Q = Q_1 \cup Q_2$, dado que queremos tener todos los estados de ambos autómatas.
2. El alfabeto no cambia.
3. La función de transición se vuelve una función por casos, tomando $x \in \Sigma$ y $q \in Q$

$$\delta(q,x) = \begin{cases} \delta_1(q,x) & q \in Q_1 \quad \text{y} \quad q \notin F_1 \\ \delta_1(q,x) & x \neq \varepsilon \\ \delta_2(q,x) \cup \{q_2\} & q \in F_1 \quad \text{y} \quad x = \varepsilon \\ \delta_2(q,x) & q \in Q_2 \end{cases}$$

4. El estado inicial es el de N_1 y los estados de aceptación son los de N_2.

N Acepta toda cadena de $A_1 A_2$

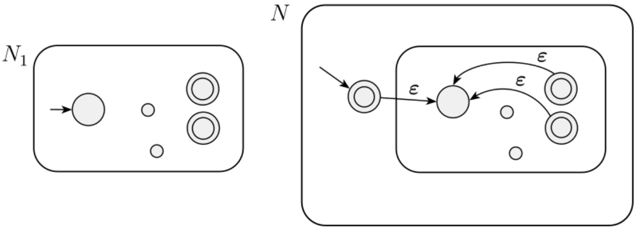
La clase de lenguajes regulares es cerrada bajo la Clausura de Kleene.

Dado el lenguaje A, la clausura de Kleene se define como

$$A^* = \{x_0 x_1 \cdots x_n \,|\, n \geq 0, \quad x_i \in A\},$$

Para esta prueba, se agregará un nuevo estado inicial (que también será de aceptación), puesto que es necesario aceptar la cadena vacía; además, el conjunto de estados de aceptación debe estar conectado con el estado inicial del autómata original. Esto será más claro en la siguiente diapositiva.

Visualización de la Idea



Desarrollo

Tomando $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$, y se construye
$N = (Q, \Sigma, \delta, q_o, F)$, donde

Desarrollo

Tomando $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$, y se construye $N = (Q, \Sigma, \delta, q_o, F)$, donde

1. $Q \cup \{q_o\}$

Desarrollo

Tomando $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$, y se construye $N = (Q, \Sigma, \delta, q_o, F)$, donde

1. $Q \cup \{q_o\}$
2. Tomando $q \in Q$ y $a \in \Sigma_\varepsilon$

$$\delta(q, x) = \begin{cases} \delta_1(q, x) & q \in Q_1, \quad q \notin F \\ \delta_1(q, x) & q \in F, \quad a \neq \varepsilon \\ \delta_1(q, x) \cup \{q_1\} & a = \varepsilon \\ \{q_1\} & q = q_o \quad a = \varepsilon \\ \emptyset & q = q_o \quad a \neq \varepsilon \end{cases}$$

Tomando $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$, y se construye $N = (Q, \Sigma, \delta, q_o, F)$, donde

1. $Q \cup \{q_o\}$
2. Tomando $q \in Q$ y $a \in \Sigma_\varepsilon$

$$\delta(q,x) = \begin{cases} \delta_1(q,x) & q \in Q_1, \quad q \notin F \\ \delta_1(q,x) & q \in F, \quad a \neq \varepsilon \\ \delta_1(q,x) \cup \{q_1\} & a = \varepsilon \\ \{q_1\} & q = q_o \quad a = \varepsilon \\ \emptyset & q = q_o \quad a \neq \varepsilon \end{cases}$$

3. Estado inicial q_o

Tomando $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$, y se construye $N = (Q, \Sigma, \delta, q_o, F)$, donde

1. $Q \cup \{q_o\}$
2. Tomando $q \in Q$ y $a \in \Sigma_\varepsilon$

$$\delta(q,x) = \begin{cases} \delta_1(q,x) & q \in Q_1, \quad q \notin F \\ \delta_1(q,x) & q \in F, \quad a \neq \varepsilon \\ \delta_1(q,x) \cup \{q_1\} & a = \varepsilon \\ \{q_1\} & q = q_o \quad a = \varepsilon \\ \emptyset & q = q_o \quad a \neq \varepsilon \end{cases}$$

3. Estado inicial q_o
4. $F = F_1 \cup \{q_o\}$