Resonadores Ópticos y Propagación de Laseres

Diego Sarceño

4 de noviembre de 2022

Enunciado del Problema (Problema 3 Capítulo 3)

En un resonador de ida y vuelta para un laser, el espejo completamente reflejante a la izquierda tiene poder focal convergente P_1 y el espejo de salida tiene poder convergente P_2. La región de en medio contiene una gran cantidad de lentes, tal que la matriz de trasnporte de datos no es una matriz simple. Si denotamos esta matriz por

$$M = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix},$$

demuestre que la matriz ida y vuelta calculada respecto del espejo de salida tiene la forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_0 & B_0 \\ C_0 & A_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución

Es necesario considerar el efecto de la propagación inversa a travez del sistema optico. Se puede visualizar como una cadena de matrices $\mathcal{R}$ y $\mathcal{F}$ cuyo producto es la matriz $\begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix}$. Si la misma cadena de matrices es multiplicada en reversa, el resultado debería ser $\begin{pmatrix} D_0 & B_0 \\ C_0 & A_0 \end{pmatrix}$.

Solución

Por inducción, definimos la matriz

$$M = M_1 M_2 \cdots M_i \cdots M_n,$$

donde cada matriz individual es M_i es unimodular y sus elementos A_i y D_i son iguales. Tomamos a M_B como la matriz "hacia atras"

$$M_B = M_n \cdots M_i \cdots M_2 M_1.$$

Con lo que es necesario demostrar que

$$M_B = \begin{pmatrix} D & B \\ C & A \end{pmatrix}.$$

Solución

Consideramos la cadena

$$M_B \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M = M_n \cdots M_i \cdots M_2 \underbrace{M_1 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_1} M_2 \cdots M_i \cdots M_n,$$

tomando el producto señalado,

$$M_1 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B_1 C_1 - A_1^2 & B_1(D_1 - A_1) \\ C_1(D_1 - A_1) & D_1^2 - B_1 C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

sabiendo que $A_1 = D_1$ y $A_1 D_1 - C_1 B_1$. Con esta idea, es claro que

$$M_i \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_i = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución

Con lo encontrado anteriormente, multiplicamos por la derecha los siguientes operadores equivalentes, uno por el lado izquierdo y el otro en el lado derecho de la igualdad

$$M^{-1}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$M_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & B \\ C & A \end{pmatrix}.$$

Llegamos a lo que queríamos demostrar.

GRACIAS POR SU ATENCIÓN < 3