Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Mecánica Cuántica 2
Diego Sarceño 201900109
29 de noviembre de 2022

Tarea 3

Ejercicio 1
Solución, expandiendo los operadores de momento angular y se utiliza la siguiente propiedad: $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$.

- Demostrar $[L_x, Y] = i\hbar Z$

$$
\begin{aligned}
&= [YP_z, Y] - [ZP_y, Y] \\
&= Y[P_z, Y] + [Y, Y]P_z - Z[P_z, Y] - [Z, Y]P_y \\
&= -Z[P_y, Y] = -Z(-i\hbar) \\
&= i\hbar Z.
\end{aligned}
$$

- Demostrar $[L_x, P_y] = i\hbar P_z$

$$
\begin{aligned}
&= [YP_z, P_y] - [ZP_y, P_y] \\
&= Y[P_z, P_y] + [Y, P_y]P_z \\
&= i\hbar P_z.
\end{aligned}
$$

- Demostrar $[L_x, P^2] = 0$

$$
\begin{aligned}
&= [L_x, P_x^2 + P_y^2 + P_z^2] \\
&= \underbrace{[YP_z, P_x^2]}_{0} + \underbrace{[YP_z, P_y^2]}_{2i\hbar P_y P_z} + \underbrace{[YP_z, P_z^2]}_{0} - \underbrace{[ZP_y, P_x^2]}_{0} - \underbrace{[ZP_y, P_y^2]}_{0} - \underbrace{[ZP_y, P_z^2]}_{2i\hbar P_z P_y} \\
&= 2i\hbar[P_y, P_z] = 0
\end{aligned}
$$

Ejercicio 2
Para $j = 3/2$ se tienen los posibles valores de $m = -\,3/2\ ,-\,1/2\ , 1/2\ , 3/2$. Y los ángulos de interes son $\theta_1 = \arccos \frac{3/2}{\sqrt{15}/2} = 39.2^o$ y $\theta_2 = \arccos \frac{1/2}{\sqrt{15}/2} = 75^o$.

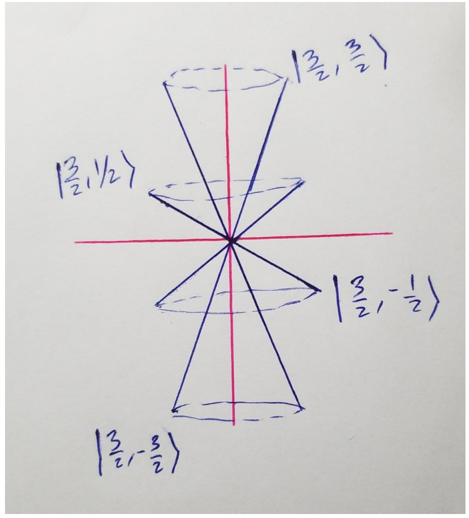

Figura 1: Representación de los kets propios de J^2.

También, dados los kets propios de J^2 y J_z, se tienen las entradas

$$J^2\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle = \frac{15}{4}\hbar^2\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle, \qquad J_z\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle = -\frac{3}{2}\hbar\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle,$$
$$J^2\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{15}{4}\hbar^2\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle, \qquad J_z\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = -\frac{1}{2}\hbar\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle,$$
$$J^2\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{15}{4}\hbar^2\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle, \qquad J_z\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{2}\hbar\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle,$$
$$J^2\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle = \frac{15}{4}\hbar^2\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle. \qquad J_z\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle = \frac{3}{2}\hbar\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle.$$

Con esto, sus respectivas representaciones matriciales es

$$J^2 = \frac{15}{4}\hbar^2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$J_z = \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}.$$

Ahora, para los operadores escaleras, se sabe que $J_\pm\,|j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m\pm 1)}\,|j,m+1\rangle$. De la misma forma se construye la matriz para J_+ y para $J_- = J_+^\dagger$. Entonces

$$J_+ = \hbar\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0\end{pmatrix},$$

$$J_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teniendo las relaciones $J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-)$ y $J_y = \frac{-i}{2}(J_+ - J_-)$, por lo que

$$J_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_y = -\frac{i\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3
Sabiendo que $L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$, entonces, aplicando el conmutador a un vector cualquiera, se tiene

$$\begin{aligned} [L_z, \cos\phi I]f &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}(\cos\phi f) - \cos\phi\left(-\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}f\right) \\ &= i\hbar\sin\phi f - i\hbar\cos\phi\frac{\partial f}{\partial\phi} + i\hbar\cos\phi\frac{\partial f}{\partial\phi} \\ &= i\hbar\sin\phi f; \end{aligned}$$

por ende,

$$[L_z, \cos\phi I] = i\hbar\sin\phi.$$

Para $[L_z, \sin 2\phi I]$, realizamos exactamente lo mismo

$$\begin{aligned} [L_z, \sin 2\phi I]f &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}(\sin 2\phi f) - \sin 2\phi\left(-\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}f\right) \\ &= -i\hbar 2 \underbrace{\cos 2\phi}_{\cos^2\phi - \sin^2\phi} f - i\hbar\sin 2\phi\frac{\partial f}{\partial\phi} + i\hbar\sin 2\phi\frac{\partial f}{\partial\phi} \\ &= 2i\hbar\big(\sin^2\phi - \cos^2\phi\big)f; \end{aligned}$$

entonces,

$$[L_z, \sin 2\phi I] = 2i\hbar\big(\sin^2\phi - \cos^2\phi\big).$$

Ejercicio 4
Sabiendo que

$$L^2 |l,m\rangle = \hbar^2 l(l+1)|k,m\rangle$$
$$L_z |l,m\rangle = \hbar m |l,m\rangle.$$

Ya se tiene la base propia, teniendo que $m \in [-l, l]$ entonces GRAFICA! Además, se tiene que

$$L_+ \left|l, m\right\rangle = C_+ \left|l, m\right\rangle$$
$$L_- \left|l, m\right\rangle = C_- \left|l, m\right\rangle,$$

cuyas constantes (según Zettili) son

$$C_\pm = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}.$$

Encontrando las representaciones matriciales ($m' \neq m$ y $l = l' = 1$) $\langle l, m|\hat{A}|l', m'\rangle$

$$\begin{aligned}\langle 1, 0|L_-|1, 1\rangle &= \sqrt{2}\hbar \\ \langle 1, -1|L_-|1, 0\rangle &= \sqrt{2}\hbar \\ L_- &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

el resto son cero.

$$\begin{aligned}\langle 1, 1|L_+|1, 0\rangle &= \sqrt{2}\hbar \\ \langle 1, 0|L_+|1, -1\rangle &= \sqrt{2}\hbar \\ L_+ &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

L_z es más claro por su definición

$$\begin{aligned}\langle 1, 1|L_z|1, 1\rangle &= \hbar \\ \langle 1, 0|L_z|1, 0\rangle &= 0 \\ \langle 1, -1|L_z|1, -1\rangle &= -\hbar \\ L_z &= \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Teniendo la relación entre los operadores escalera y L_y y L_x

$$L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-),$$

$$L_y = \frac{i}{2}(L_- - L_+).$$

Reemplazando y sumando las matrices, se tiene

$$L_x = \frac{\hbar}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_y = \frac{\hbar}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Y $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$, utilizando mathematica

$$L^2 = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 5

Sabiendo que los operadores se pueden escribir en términos del los operadores escalera

$$L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)$$
$$L_y = \frac{1}{2}(L_- - L_+),$$

Entonces, es claro que $\langle L_x \rangle = 0$ dado que $\langle L_+ \rangle = \langle L_- \rangle = 0$. Ahora $L_x^2 = \frac{1}{4}\left(L_+^2 + L_+L_- + L_-L_+ + L_-^2\right)$, por lo anterior $\left\langle L_+^2 \right\rangle = \left\langle L_-^2 \right\rangle = 0$, entonces

$$\left\langle L_x^2 \right\rangle = \frac{1}{4}\left\langle L_+L_- + L_-L_+ \right\rangle,$$

$$\left\langle L_y^2 \right\rangle = -\frac{1}{4}\left\langle -L_+L_- - L_-L_+ \right\rangle,$$

lo que implica que $\left\langle L_x^2 \right\rangle = \left\langle L_y^2 \right\rangle$. Calculando su valor, tomamos la relación $\left\langle L_x^2 \right\rangle = \left\langle L_y^2 \right\rangle = \frac{1}{2}\left[\left\langle L^2 \right\rangle - \left\langle L_z^2 \right\rangle\right]$, entonces

$$\left\langle L_x^2 \right\rangle = \left\langle L_y^2 \right\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\left[l(l+1) - m^2\right].$$

Es claro que $l(l+1) - m^2 \geq m(m+1) - m^2 = m$, por ende

$$\Delta L_x \Delta L_y = \sqrt{\left\langle L_x^2 \right\rangle \left\langle L_y^2 \right\rangle} \geq \frac{1}{2}\hbar^2 m.$$

Ejercicio 6

Solución

- Para J_+, partimos de

$$\begin{aligned} J_z J_+ \left| j, m \right\rangle &= (J_z J_+ - J_+ J_z + J_+ J_z) \left| j, m \right\rangle \\ &= ([J_z, J_+] + J_+ J_z) \left| j, m \right\rangle \\ &= \hbar J_+ \left| j, m \right\rangle + \hbar m J_+ \left| j, m \right\rangle \\ &= \hbar(m+1) J_+ \left| j, m \right\rangle, \end{aligned}$$

  lo que implica que $J_+ \left| j, m \right\rangle$ es vector propio de J_z, por lo que

$$J_+ \left| j, m \right\rangle = C \left| j, m+1 \right\rangle.$$

- Para J_-, se tiene que

$$\begin{aligned} J_z J_- \left| j, m \right\rangle &= (J_z J_- - J_- J_z + J_- J_z) \left| j, m \right\rangle \\ &= ([J_z, J_-] + J_- J_z) \left| j, m \right\rangle \\ &= -\hbar J_- \left| j, m \right\rangle + \hbar m J_- \left| j, m \right\rangle \\ &= \hbar(m-1) J_- \left| j, m \right\rangle, \end{aligned}$$

lo que implica que $J_- \left| j, m \right\rangle$ es vector propio de J_z, por lo que

$$J_- \left| j, m \right\rangle = C \left| j, m-1 \right\rangle .$$