Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Mecánica Cuántica 2
Diego Sarceño 201900109
4 de noviembre de 2022

Hoja de Trabajo 3

Ejercicio 1
Solución

a) El operador es claramente unitario, sabiendo que $x = x^\dagger$, entonces $U(k)U(k)^\dagger = \mathbb{1}$. Para la sumatoria, reescribimos el valor absoluto como el producto de un complejo por su conjugado

$$\sum_{n'} \left| \langle n|U|n'\rangle \right|^2 = \sum_{n'} \langle n|U|n'\rangle \, \langle n|U|n'\rangle^\dagger = \sum_{n'} \langle n|U|n'\rangle \, \langle n'|U^\dagger|n\rangle = \sum_{n'} \langle n|n\rangle = 1.$$

b)

c) Tomando

$$\left(e^{\lambda a^\dagger}\right)^\dagger |n\rangle = e^{\lambda a} |n\rangle \,,$$

escribiendo la exponencial en serie de tayor

$$\left(\sum_i \lambda^i \frac{a^i}{i!}\right) |n\rangle = |n\rangle + \lambda\sqrt{n}\,|n-1\rangle + \cdots + \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\sqrt{(n-1)!}\,|n-(n-1)\rangle + \frac{\lambda^n}{n!}\sqrt{n!}\,|0\rangle \,.$$

Dado que $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$, entonces

$$\langle n|e^{\lambda a^\dagger}|0\rangle = \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}.$$

d)

Ejercicio 2
Solución

a)

b)

c)

Ejercicio 3
Solución

a) Encontramos el hamiltoniano dado el potencial

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - qE(t)x = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}) - qE(t)\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^\dagger + a).$$

Encontrando los conmutadores

$$\begin{aligned}[H, a] &= \hbar\omega\Big([a^\dagger a, a] + [1/2\ , a]\Big) - qE(t)\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\Big([a^\dagger, a] + [a, a]\Big) \\ &= -\hbar\omega a + qE(t)\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[H, a^\dagger] &= \hbar\omega\Big([a^\dagger a, a^\dagger] + [1/2\ , a^\dagger]\Big) - qE(t)\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\Big([a^\dagger, a^\dagger] + [a, a^\dagger]\Big) \\ &= \hbar\omega a^\dagger - qE(t)\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}.\end{aligned}$$

b)

c)