Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Mecánica Cuántica 2
Diego Sarceño 201900109
28 de octubre de 2022

Tarea 2

Ejercicio 1
Solución: Para el estado

$$|S_n+\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|+\rangle + \frac{i}{2}|-\rangle .$$

a) El estado ya se encuentra respecto a la base α.

b) El bra sería

$$\langle S_n+| = \frac{\sqrt{3}}{2}\langle +| - \frac{i}{2}\langle -| .$$

c) Tomando $|S_x+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$, encontramos la probabilidad de medir $+\frac{\hbar}{2}$

$$|\langle S_x+|S_n+\rangle|^2 = \frac{1}{2} = 50\,\%.$$

d) Realizamos lo mismo que en el inciso anterior con $|S_y-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle$. Entonces

$$|\langle S_y-|S_n+\rangle|^2 = 0.0669873 = 6.699\,\%.$$

e) Utilizando la matriz de cambio de base vista en clase

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix},$$

Encontramos el estado $|S_n+\rangle$ en términos de la base γ. Encontramos el vector $(|S_n+\rangle)_\gamma$ en términos de la base resolviendo el siguiente sistema

$$\frac{a}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \frac{b}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ i/2 \end{pmatrix}.$$

Con lo que encontramos al estado

$$(|S_n+\rangle)_\gamma = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}|S_y+\rangle + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}|S_y-\rangle .$$

f) Teniendo $|\psi_o\rangle = |S_n+\rangle$ y el operador evolución $U(t) = e^{-\frac{it}{\hbar}H} = e^{-\frac{it}{\hbar}\omega S_z}$. Aplicando $|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi_o\rangle$, entonces

$$|\psi(t)\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{it}{\hbar}\omega S_z}|+\rangle + \frac{i}{2}e^{-\frac{it}{\hbar}\omega S_z}|-\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{i\omega t}{2}}|+\rangle + \frac{i}{2}e^{\frac{i\omega t}{2}}|-\rangle .$$

g) Con el resultado anterior, valuamos en un tiempo $t = \pi/\omega$.

$$\left|\psi\left(\frac{\pi}{\omega}\right)\right\rangle = -\frac{i\sqrt{3}}{2}\left|+\right\rangle - \frac{1}{2}\left|-\right\rangle .$$

Ejercicio 2
Solución:

a) Aplicando el operador evolución al estado $|\psi_o\rangle = |S_y+\rangle$, se tiene

$$|\psi(t)\rangle = U(t)\,|\psi_o\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i\omega t}{2}}\left|+\right\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}e^{\frac{i\omega t}{2}}\left|-\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|+\right\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}e^{i\omega t}\left|-\right\rangle .$$

b) El bra sería

$$\langle\psi(t)| = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\langle+\right| - \frac{i}{\sqrt{2}}e^{-i\omega t}\left\langle-\right|$$

c) Para un $t = \frac{\pi}{\omega}$, se tiene

$$\left|\psi\left(\frac{\pi}{\omega}\right)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|+\right\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}\left|-\right\rangle = \left|S_y-\right\rangle .$$

d) Para $t = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\left|\psi\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|+\right\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}\left|-\right\rangle = \left|S_y+\right\rangle .$$

e) Ya se demostró en los dos incisos anteriores.

f) Gráficamente,

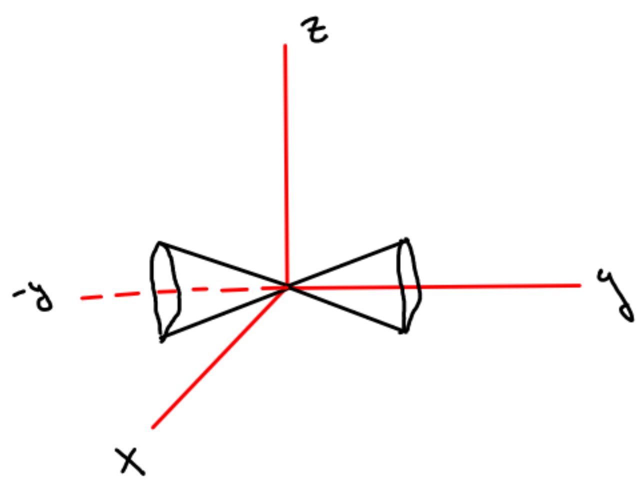

Figura 1: Podemos visualizar, en el eje y positivo, los estados $|\psi_o\rangle$ y $|\psi(2\pi/\omega)\rangle$; mientras que en el eje y negativo, visualizamos $|\psi(\pi/\omega)\rangle$.

g) Utilizamos el módulo de funciones para encontrar $\langle\psi(t)|S_y|\psi(t)\rangle$, lo que nos da

$$\langle S_y\rangle = \frac{\hbar}{4}\left(e^{i\omega t} + e^{i\omega t}\right) = \frac{\hbar}{2}\cos\omega t.$$

Ejercicio 3
Sabiendo que para las matrices de pauli se cumple que

$$[\sigma_j, \sigma_k] = 2i\varepsilon_{jkl}\sigma_l,$$

donde ε_{jkl} es el tensor de Levi−Civita. Entonces, sabiendo que los operadores en cada eje están definidos como $S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x$, $S_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y$ y $S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z$, entonces, reemplazando valores y utilizando la función `LeviCivitaTensor[3]` para encontrar los respectivos valores del mismo.

$$[S_x, S_z] = 2\left(\frac{\hbar^2}{4}\right)i\varepsilon_{xzy}\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\hbar^2}{2} \\ \frac{\hbar^2}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$[S_y, S_z] = 2\left(\frac{\hbar^2}{4}\right)i\varepsilon_{yzx}\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i\hbar^2}{2} \\ \frac{i\hbar^2}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4
Solución: Teniendo que los operadores escalera se definen como

$$S_+ = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_- = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Y que $|S_y+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ y $|S_y-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

a)

$$S_+\,|S_y+\rangle = \hbar\begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b)

$$S_+\,|S_y-\rangle = \hbar\begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c)

$$S_-\,|S_y+\rangle = \hbar\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

d)

$$S_-\,|S_y-\rangle = \hbar\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$