Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Mecánica Cuántica 2
Diego Sarceño 201900109
10 de octubre de 2022

Hoja de Trabajo 3

Ejercicio 1
Teniendo las definiciones de los operadores de creación y aniquilación

$$\left.\begin{array}{rcl} a\,|n\rangle & = & \sqrt{n}\,|n-1\rangle \\ a^\dagger\,|n\rangle & = & \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a^2\,|n\rangle & = & \sqrt{n(n-1)}\,|n-2\rangle \\ a^{\dagger 2}\,|n\rangle & = & \sqrt{(n+1)(n+2)}\,|n+2\rangle \end{array}\right. .$$

Calulamos los operadores X y P en términos de a y $a^\dagger$

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\Big(a^\dagger + a\Big) \\ P &= m\omega i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\Big(a^\dagger - a\Big) \\ X^2 &= \frac{\hbar}{2m\omega}\Big(a^{\dagger 2} + a^\dagger a + a a^\dagger + a^2\Big) \\ P^2 &= -\left(\frac{m\omega\hbar}{2}\right)^2\Big(a^{\dagger 2} + a^2 - a^\dagger a - a a^\dagger\Big). \end{aligned}$$

Encontrando

$$\begin{aligned} \langle m|X|n\rangle &= \langle m|\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\Big(a^\dagger + a\Big)|n\rangle \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\big(\sqrt{n+1}\,\langle m|n+1\rangle + \sqrt{n}\,\langle m|n-1\rangle\big) \\ &\boxed{= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\big(\sqrt{n+1}\delta_{m,n+1} + \sqrt{n}\delta_{m,n-1}\big)} \end{aligned}$$

bajo la misma idea

$$\boxed{\langle m|P|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}i\big(\sqrt{n+1}\delta_{m,n+1} - \sqrt{n}\delta_{m,n-1}\big)}.$$

$$\begin{aligned} \langle m|X^2|n\rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega}\,\langle m|\left[\sqrt{(n+1)(n+2)}\,|n+2\rangle + \sqrt{n(n-1)}\,|n-2\rangle + n\,|n\rangle + (n+1)\,|n\rangle\right] \\ &\boxed{= \frac{\hbar}{2m\omega}\Big(\sqrt{(n+1)(n+2)}\delta_{m,n+2} + \sqrt{n(n-1)}\delta_{m,n-2} + n\delta_{m,n} + (n+1)\delta_{m,n}\Big)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\langle m|P^2|n\rangle = -\frac{m\omega\hbar}{2}\Big(\sqrt{(n+1)(n+2)}\delta_{m,n+2} + \sqrt{n(n-1)}\delta_{m,n-2} - n\delta_{m,n} - (n+1)\delta_{m,n}\Big)}$$

Encontrando XP y PX, se tiene

$$XP = \frac{\hbar}{2}i\Big(\sqrt{(n+1)(n+2)}\delta_{m,n+2} - n\delta_{m,n} + (n+1)\delta_{m,n+1} - \sqrt{n(n-1)}\delta_{m,n-2}\Big),$$

$$PX = \frac{\hbar}{2}i\Big(\sqrt{(n+1)(n+2)}\delta_{m,n+2} + n\delta_{m,n} - (n+1)\delta_{m,n+1} - \sqrt{n(n-1)}\delta_{m,n-2}\Big).$$

entonces

$$\boxed{\langle m|XP + PX|n\rangle = \hbar i\Big(\sqrt{(n+1)(n+2)}\delta_{m,n+2} - \sqrt{n(n-1)}\delta_{m,n-2}\Big).}$$

Ejercicio 2

Teniendo el estado inicial

$$|\psi_o\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle ,$$

para encontrar en todo instante t

$$\big|\psi_(t)\big\rangle = U(t)|\psi_o\rangle , \qquad U(t) = e^{-\frac{it}{\hbar}H}.$$

Sabiendo que $e^{-\frac{it}{\hbar}H}|n\rangle = e^{-i\omega(n+1/2)t}|n\rangle$, entonces

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-i\omega(n+1/2)t}|n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-i\omega nt}|n\rangle$$

podemos eliminar el término $e^{-i\frac{\omega}{2}t}$ dado que no afecta a la representación del estado.

$$\Psi(x,t) = \langle x|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-i\omega nt}\underbrace{\langle x|n\rangle}_{\phi_n(x)}.$$

Ejercicio 3

Teniendo el operador $X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^\dagger + a)$. Multiplicando por si mismo

$$X^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\underbrace{(a^\dagger + a)(a^\dagger + a)}_{a^{\dagger 2}+a^2+a^\dagger a+aa^\dagger},$$

$$X^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\Big(a^{\dagger 2} + a^2 + a^\dagger a + aa^\dagger\Big).$$

Ejercicio 4

Teniendo los operadores

$$X^2 = \tfrac{\hbar}{2m\omega}\Big(a^{\dagger 2} + a^2 + a^\dagger a + aa^\dagger\Big)$$
$$P^2 = -\tfrac{m\hbar\omega}{2}\Big(a^{\dagger 2} + a^2 - a^\dagger a - aa^\dagger\Big)$$
$$H = \hbar\omega\big(a^\dagger a + \tfrac{1}{2}\big).$$

y teniendo que $\langle n|a^2|n\rangle = \langle n|a^{\dagger^2}|n\rangle = 0$, $\langle n|a^\dagger a|n\rangle = n$ y $\langle n|aa^\dagger|n\rangle = n+1$. Entonces

$$\left\langle X^2\right\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1),$$

$$\left\langle P^2\right\rangle = \frac{m\hbar\omega}{2}(2n+1),$$

$$\langle H\rangle = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

Valuando para el estado base ($n=0$) se tiene

$$\left\langle X^2\right\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega},$$

$$\left\langle P^2\right\rangle = \frac{m\hbar\omega}{2},$$

$$\langle H\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}.$$

□

Ejercicio 5
Teniendo la energía para el oscilador cuántico $E_n = \hbar\omega\big(n+\frac{1}{2}\big)$, tomando la energía del oscilador armónico $E = \frac{1}{2}kA^2$. Entonces, en términos de ω

$$A_n = \sqrt{\frac{\hbar(2n+1)}{m\omega}}.$$

El parámetro λ es

$$\lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

La probabilidad fuera del límite clásico es

$$P_{out} = 1 - P_{in} \qquad \Rightarrow \qquad P_{out} = 1 - \int_{-A_0}^{A_0} |\psi_0(x)|\,\mathrm{d}x\,,$$

para el estado base se tiene

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}};$$

por lo tanto

$$P_{out} = 1 - \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}\int_{-A_0}^{A_0} e^{-\frac{m\omega x^2}{\hbar}}\,\mathrm{d}x \qquad \Rightarrow \qquad P_{out} = 1 - \operatorname{erf} 1 = 15.73\,\%.$$

Ejercicio 6
Dado lo encontrado el ejercicio anterior, encontramos la amplitud para el estado $|1\rangle$ y la probabilidad fuera del límite clásico.

$$A_1 = \sqrt{\frac{3\hbar}{m\omega}},$$

la función de onda es

$$\psi_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{\frac{1}{4}}}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{3/4} x e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}.$$

Integrando

$$P_{out} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{3/2}\int_{-A_1}^{A_1} x^2 e^{-\frac{m\omega x^2}{\hbar}}\,\mathrm{d}x = P_{out} = 1 - \left(\operatorname{erf}\left(\sqrt{3}\right) - 2\sqrt{\frac{3}{\pi}}e^{-3}\right) = 11.16\,\%.$$