Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Mecánica Cuántica 2
Diego Sarceño 201900109
11 de noviembre de 2022

Hoja de Trabajo 4

Ejercicio 1
Teniendo el conmutador, desarrollamos

$$[S, H] = [S, -S \cdot B] \equiv \sum_{i=1}^{3} -[S_i, S_i]B_i = 0.$$

Ejercicio 2
Aplicando el operador al estado de la partícula

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\infty + i\sigma_1)\left|\psi\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi}\right)\left|0\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi} + i\cos\frac{\theta}{2}\right)\left|1\right\rangle,$$

agrupando llegamos a

$$= \cos\frac{\theta}{2}\underbrace{\frac{\left|0\right\rangle + i\left|1\right\rangle}{\sqrt{2}}}_{\left|S_y+\right\rangle} + i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi}\frac{\left|0\right\rangle + i\left|1\right\rangle}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\theta}{2}\left|S_y+\right\rangle + i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi}\left|S_y+\right\rangle$$

lo que implica que el estado se rotó 90^o alrededor del eje x.

Ejercicio 3
Solución

a) El estado es $\left|\psi(0)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\left|+\right\rangle + i\left|-\right\rangle)$.

b) Siendo $H(t) = \omega(t)S_z$ y $\omega(t) = \lambda t$ para $t \leq T$, entonces resolviendo la ecuación

$$\lambda t S_z \left|\psi\right\rangle = i\hbar\frac{\partial\left|\psi\right\rangle}{\partial t},$$

se tiene

$$\left|\psi(t)\right\rangle = e^{-\frac{i\lambda t^2}{2}S_z}\left|S_y+\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-\frac{i\lambda t^2}{4}}\left|0\right\rangle + ie^{\frac{i\lambda t^2}{4}}\left|1\right\rangle\right].$$

Por lo que $\theta(t) = \frac{\lambda t^2}{4}$.

Ejercicio 4
Solución

a) Tomando $H = \mathbf{M} \cdot B_o = \gamma S \cdot B_o$ ($B_o = -\frac{1}{\gamma}(\omega_x, \omega_y, \omega_x, z)$) se tiene, por definición de operador evolución

$$U(t,0) = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} = e^{\frac{i}{\hbar}[\omega_x S_x + \omega_y S_y + \omega_z S_z]t} = e^{iMt}. \qquad \square$$

b) La representación matricial de M luego de desarrollar los productos escalares

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \omega_z & \omega_x - i\omega_y \\ \omega_x + i\omega_y & -\omega_z \end{pmatrix},$$

Y su cuadrado es

$$M^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 & 0 \\ 0 & \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 \end{pmatrix}.$$