Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Mecánica Cuántica 2
Diego Sarceño 201900109
5 de diciembre de 2022

Tarea 4

Ejercicio 1
Sabiendo que los operadores se pueden escribir en términos del los operadores escalera

$$L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)$$
$$L_y = \frac{1}{2}(L_- - L_+),$$

Entonces, es claro que $\langle L_x\rangle = 0$ dado que $\langle L_+\rangle = \langle L_-\rangle = 0$. Ahora $L_x^2 = \frac{1}{4}\left(L_+^2 + L_+L_- + L_-L_+ + L_-^2\right)$, por lo anterior $\left\langle L_+^2\right\rangle = \left\langle L_-^2\right\rangle = 0$, entonces

$$\left\langle L_x^2\right\rangle = \frac{1}{4}\left\langle L_+L_- + L_-L_+\right\rangle,$$

$$\left\langle L_y^2\right\rangle = -\frac{1}{4}\left\langle -L_+L_- - L_-L_+\right\rangle,$$

lo que implica que $\left\langle L_x^2\right\rangle = \left\langle L_y^2\right\rangle$. Calculando su valor, tomamos la relación $\left\langle L_x^2\right\rangle = \left\langle L_y^2\right\rangle = \frac{1}{2}\left[\left\langle L^2\right\rangle - \left\langle L_z^2\right\rangle\right]$, entonces

$$\left\langle L_x^2\right\rangle = \left\langle L_y^2\right\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\left[l(l+1) - m^2\right].$$

Ejercicio 2
Partiendo de la definición de los operadores

$$L_x = i\hbar\left(Z\frac{\partial}{\partial y} - Y\frac{\partial}{\partial z}\right)$$
$$L_y = i\hbar\left(X\frac{\partial}{\partial z} - Z\frac{\partial}{\partial x}\right)$$
$$L_z = i\hbar\left(Y\frac{\partial}{\partial x} - X\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Utilizando la regla de la cadena y trasladando a coordenadas esfericas

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \operatorname{sen}\theta\cos\phi \qquad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi \qquad \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{1}{r}\frac{\sin\phi}{\sin\theta}$$
$$\frac{\partial r}{\partial y} = \operatorname{sen}\theta\sin\phi \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{r}\frac{\cos\phi}{\sin\theta}$$
$$\frac{\partial r}{\partial z} = \cos\theta \qquad \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\frac{1}{r}\sin\theta \qquad \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0.$$

reemplazando en la definición de los operadores junto con la regla de la cadena. Por lo tanto, se tiene

$$L_x = i\hbar\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right),$$

lo mismo para y

$$L_y = i\hbar\left(-\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

y

$$L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}.$$

Ahora, encontrando el cuadrado de cada componente, se tiene

$$\begin{aligned}
L_x^2 &= -\hbar^2\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right),\\
L_y^2 &= -\hbar^2\left(-\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left(-\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right),\\
L_z^2 &= -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}.
\end{aligned}$$

Luego de un poco de álgebra, se llega a

$$L^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right].$$

Ejercicio 3
Solución:

a)

b) Sabemos que $\langle r,\theta,\phi|l,m\rangle$, lo podemos escribir en términos de los armónicos esféricos Y_l^m. Estos los encontramos resolviendo la ecuación $L^2\psi = \lambda\psi$ por separación de variables. Las soluciones resultan $\Theta(\theta) = P_l^m(\cos\theta)$ y $\Phi(\phi) = e^{im\phi}$. Por propiedades de los polinomios de Legendre, la constante de normalización es $C_{lm} = (-1)^m\sqrt{\left(\frac{2l+1}{2}\right)\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}$ y la de Ψ es $\frac{1}{2\pi}$. Entonces, los armónicos esféricos se pueden escribir como

$$\langle r,\theta,\phi|l,m\rangle = Y_l^m(\theta,\phi) = (-1)^m\sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}.$$

c) Con el inciso anterior calculamos $\langle r,\theta,\phi|2,1\rangle$ y $\langle r,\theta,\phi|2,2\rangle$ únicamente valuando l,m en Y_l^m. Entonces (utilizando la tabla 5.1 y 5.2 de Zettili.)

$$\begin{aligned}
\langle r,\theta,\phi|2,1\rangle &= Y_2^1(\theta,\phi) = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}e^{i\phi}\sin\theta\cos\theta,\\
\langle r,\theta,\phi|2,2\rangle &= Y_2^2(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}e^{2i\phi}\sin^2\theta.
\end{aligned}$$

Ejercicio 4
Tomando cada uno de los respectivos operadores en términos de las matrices de Pauli

$$S^2 = \frac{\hbar^2}{4}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2\right).$$

En forma matricial es

$$S^2 = \frac{3\hbar^2}{4}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

a) Encontrando $S^2 \boxplus S^2$, planteamos el producto $S^2 \otimes I_2 + I_2 \otimes S^2$, luego de resolverlo en *Mathematica*

$$S^2 \boxplus S^2 = \frac{3\hbar^2}{2} I_4.$$

b) Los valores y vectores propios, dado que es una identidad, los vectores propios son la base canónica

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\},$$

con valor propio $\frac{3\hbar^2}{2}$ para todos los vectores propios.

Ejercicio 5
Sabiendo que

$$|1,1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad |1,0\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad |1,-1\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Utilizando la función `Norm[]` y `Solve[]` se encuentra la constante de normalización la cuál es $A = \pm\frac{2}{\sqrt{7}}$. Con esto y por lo encontrado la tarea pasada, $\langle L_x\rangle = \langle L_y\rangle = 0$. Ahora, para los otros dos operadores

$$\langle\psi|L_z|\psi\rangle = -\frac{\hbar}{7} + \hbar\frac{2}{7} = \frac{\hbar}{7},$$
$$\langle\psi|L^2|\psi\rangle = \frac{2\hbar^2}{7} + \frac{4}{7}\left(2\hbar^2\right) + \frac{2}{7}(2\hbar^2) = 2\hbar^2.$$

Ejercicio 6
Dadas las relaciones

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z, \qquad [J_y, J_z] = i\hbar J_x, \qquad [J_z, J_x] = i\hbar J_y.$$

Utilizando la propiedad $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$, se pueden expandir los términos del lado izquierdo de la igualdad

$$[J_xJ_y, J_z] = i\hbar J_x^2 - i\hbar J_y^2,$$
$$[J_x, J_yJ_z] = -i\hbar J_y^2 + i\hbar J_z,$$

sumando y factorizando

$$= i\hbar\left(J_x^2 - 2J_y^2 + J_z^2\right).$$

Concluyendo la demostración.