

PARCIAL 1, PARCIAL 2 Y EXAMEN FINAL

MATERIA CONDENSADA

Diego Sarceño

201900109

Guatemala, 17 de noviembre de 2022

1. Parcial 1

2. Parcial 2

2.1. Problema 1

Para el oscilador armónico cuántico se tiene el hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2, \quad (1)$$

también las relaciones adimensionales $Q^2 = m\omega q^2/\hbar$ y $P^2 = p^2/m\hbar\omega$. Los operadores q y p satisfacen $[q, p] = i\hbar$ y se tienen los operadores de creación y aniquilación

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iP), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q - iP),$$

con el operador número definido como $N = a^\dagger a$.

a) Dadas las relaciones adimensionales Q^2 y P^2 , se tienen de forma lineal $Q = \sqrt{m\omega/\hbar} q$ y $P = 1/\sqrt{m\omega\hbar} p$, entonces, el conmutador $[Q, P]$ es

$$[Q, P] = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}} \underbrace{[q, p]}_{i\hbar} = \boxed{i\hbar}.$$

b) Para el conmutador entre los operadores de creación y aniquilación se tiene

$$[a, a^\dagger] = \frac{1}{2}([Q, Q] + i[P, Q] - i[Q, P] + [P, P]) = \frac{1}{2}(1 + 1) = \boxed{1}.$$

c) El hamiltoniano en terminos de las relaciones adimensionales es

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}(P^2 + Q^2),$$

y, utilizando mathematica (para facilitar los cálculos), los operadores Q, P en términos de los operadores aniquilación y creación, son

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger), \quad P = -\frac{i}{\sqrt{2}}(a - a^\dagger).$$

Entonces

$$Q^2 = \frac{1}{2}(a^2 + a^{\dagger 2} + aa^{\dagger} + a^{\dagger}a), \quad P^2 = -\frac{1}{2}(a^2 + a^{\dagger 2} - aa^{\dagger} - a^{\dagger}a).$$

Sustituyendo en el hamiltoniano encontrado este inciso

$$H = \boxed{\frac{\hbar\omega}{2}(aa^{\dagger} + a^{\dagger}a)}.$$

d) Para este inciso, utilizamos la siguiente propiedad de los conmutadores $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$, entonces

$$[N, a] = a^{\dagger}[a, a] + \underbrace{[a^{\dagger}, a]}_{-1}a = \boxed{-a}.$$

$$[N, a^{\dagger}] = a^{\dagger}[a, a^{\dagger}] + [a^{\dagger}, a^{\dagger}]a = \boxed{-a^{\dagger}}.$$

Referencias

- [1] R. Symon, *Mechanics* 3a. Ed. Addison–Wesley Publishing Company, 1971
- [2] R. Taylor, *Classical Mechanics*, Edwards Brothers, Inc. 2005.