Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Mecánica Cuántica 2
Diego Sarceño 201900109
2 de diciembre de 2022

Tarea 4

Ejercicio 1

Sabiendo que los operadores se pueden escribir en términos del los operadores escalera

$$L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)$$
$$L_y = \frac{1}{2}(L_- - L_+),$$

Entonces, es claro que $\langle L_x \rangle = 0$ dado que $\langle L_+ \rangle = \langle L_- \rangle = 0$. Ahora $L_x^2 = \frac{1}{4}\big(L_+^2 + L_+L_- + L_-L_+ + L_-^2\big)$, por lo anterior $\langle L_+^2 \rangle = \langle L_-^2 \rangle = 0$, entonces

$$\langle L_x^2 \rangle = \frac{1}{4} \langle L_+L_- + L_-L_+ \rangle ,$$

$$\langle L_y^2 \rangle = -\frac{1}{4} \langle -L_+L_- - L_-L_+ \rangle ,$$

lo que implica que $\langle L_x^2 \rangle = \langle L_y^2 \rangle$. Calculando su valor, tomamos la relación $\langle L_x^2 \rangle = \langle L_y^2 \rangle = \frac{1}{2}\big[\langle L^2 \rangle - \langle L_z^2 \rangle\big]$, entonces

$$\langle L_x^2 \rangle = \langle L_y^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{2}\big[l(l+1) - m^2\big].$$

Ejercicio 2

Partiendo de la definición de los operadores

$$L_x = i\hbar\bigg(Z\frac{\partial}{\partial y} - Y\frac{\partial}{\partial z}\bigg)$$
$$L_y = i\hbar\bigg(X\frac{\partial}{\partial z} - Z\frac{\partial}{\partial x}\bigg)$$
$$L_z = i\hbar\bigg(Y\frac{\partial}{\partial x} - X\frac{\partial}{\partial y}\bigg).$$

Utilizando la regla de la cadena y trasladando a coordenadas esfericas

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \operatorname{sen}\theta\cos\phi \qquad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi \qquad \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{1}{r}\frac{\sin\phi}{\sin\theta}$$
$$\frac{\partial r}{\partial y} = \operatorname{sen}\theta\sin\phi \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{r}\frac{\cos\phi}{\sin\theta}$$
$$\frac{\partial r}{\partial z} = \cos\theta \qquad \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\frac{1}{r}\sin\theta \qquad \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0.$$

reemplazando en la definición de los operadores junto con la regla de la cadena. Por lo tanto, se tiene

$$L_x = i\hbar\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right),$$

lo mismo para y

$$L_y = i\hbar\left(-\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

y

$$L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}.$$

Ahora, encontrando el cuadrado de cada componente, se tiene

$$\begin{aligned}
L_x^2 &= -\hbar^2\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right),\\
L_y^2 &= -\hbar^2\left(-\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left(-\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right),\\
L_z^2 &= -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}.
\end{aligned}$$

Luego de un poco de álgebra, se llega a

$$L^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right].$$

Ejercicio 3