



## TAREA 4

### Ejercicio 1

Sabiendo que los operadores se pueden escribir en términos de los operadores escalera

$$L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)$$

$$L_y = \frac{1}{2}(L_- - L_+),$$

Entonces, es claro que  $\langle L_x \rangle = 0$  dado que  $\langle L_+ \rangle = \langle L_- \rangle = 0$ . Ahora  $L_x^2 = \frac{1}{4}(L_+^2 + L_+L_- + L_-L_+ + L_-^2)$ , por lo anterior  $\langle L_+^2 \rangle = \langle L_-^2 \rangle = 0$ , entonces

$$\langle L_x^2 \rangle = \frac{1}{4} \langle L_+L_- + L_-L_+ \rangle,$$

$$\langle L_y^2 \rangle = -\frac{1}{4} \langle -L_+L_- - L_-L_+ \rangle,$$

lo que implica que  $\langle L_x^2 \rangle = \langle L_y^2 \rangle$ . Calculando su valor, tomamos la relación  $\langle L_x^2 \rangle = \langle L_y^2 \rangle = \frac{1}{2}[\langle L^2 \rangle - \langle L_z^2 \rangle]$ , entonces

$$\langle L_x^2 \rangle = \langle L_y^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{2} [l(l+1) - m^2].$$

### Ejercicio 2

Partiendo de la definición de los operadores

$$L_x = i\hbar \left( Z \frac{\partial}{\partial y} - Y \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$L_y = i\hbar \left( X \frac{\partial}{\partial z} - Z \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

$$L_z = i\hbar \left( Y \frac{\partial}{\partial x} - X \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Utilizando la regla de la cadena y trasladando a coordenadas esfericas

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \sin \theta \cos \phi$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta \sin \phi$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \cos \theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{r} \cos \theta \cos \phi$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{r} \cos \theta \sin \phi$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = -\frac{1}{r} \sin \theta$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{1}{r} \frac{\sin \phi}{\sin \theta}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{\cos \phi}{\sin \theta}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0.$$

reemplazando en la definición de los operadores junto con la regla de la cadena. Por lo tanto, se tiene

$$L_x = i\hbar \left( \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right),$$

lo mismo para  $y$

$$L_y = i\hbar \left( -\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

y

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}.$$

Ahora, encontrando el cuadrado de cada componente, se tiene

$$\begin{aligned} L_x^2 &= -\hbar^2 \left( \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \left( \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \\ L_y^2 &= -\hbar^2 \left( -\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \left( -\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \\ L_z^2 &= -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \end{aligned}$$

Luego de un poco de álgebra, se llega a

$$L^2 = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right].$$

### Ejercicio 3

Solución:

a)

b) Sabemos que  $\langle r, \theta, \phi | l, m \rangle$ , lo podemos escribir en términos de los armónicos esféricos  $Y_l^m$ . Estos los encontramos resolviendo la ecuación  $L^2 \psi = \lambda \psi$  por separación de variables. Las soluciones resultan  $\Theta(\theta) = P_l^m(\cos \theta)$  y  $\Phi(\phi) = e^{im\phi}$ . Por propiedades de los polinomios de Legendre, la constante de normalización es  $C_{lm} = (-1)^m \sqrt{\left(\frac{2l+1}{2}\right) \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}$  y la de  $\Psi$  es  $\frac{1}{2\pi}$ . Entonces, los armónicos esféricos se pueden escribir como

$$\langle r, \theta, \phi | l, m \rangle = Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}.$$

c) Con el inciso anterior calculamos  $\langle r, \theta, \phi | 2, 1 \rangle$  y  $\langle r, \theta, \phi | 2, 2 \rangle$  únicamente valuando  $l, m$  en  $Y_l^m$ . Entonces (utilizando la tabla 5.1 y 5.2 de Zettili.)

$$\begin{aligned} \langle r, \theta, \phi | 2, 1 \rangle &= Y_2^1(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} e^{i\phi} \sin \theta \cos \theta, \\ \langle r, \theta, \phi | 2, 2 \rangle &= Y_2^2(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} e^{2i\phi} \sin^2 \theta. \end{aligned}$$



**Ejercicio 4**

Tomando cada uno de los respectivos operadores en términos de las matrices de Pauli

$$S^2 = \frac{\hbar^2}{4}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2).$$

En forma matricial es

$$S^2 = \frac{3\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Encontrando  $S^2 \boxplus S^2$ , planteamos el producto  $S^2 \otimes I_2 + I_2 \otimes S^2$ , luego de resolverlo en *Mathematica*

$$S^2 \boxplus S^2 = \frac{3\hbar^2}{2} I_4.$$

b) Los valores y vectores propios, dado que es una identidad, los vectores propios son la base canónica

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

con valor propio  $\frac{3\hbar^2}{2}$  para todos los vectores propios.

**Ejercicio 5**

Sabiendo que

$$|1, 1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1, 0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1, -1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Utilizando la función `Norm[]` y `Solve[]` se encuentra la constante de normalización la cuál es  $A = \pm \frac{2}{\sqrt{7}}$ . Con esto y por lo encontrado la tarea pasada,  $\langle L_x \rangle = \langle L_y \rangle = 0$ . Ahora, para los otros dos operadores

$$\begin{aligned} \langle \psi | L_z | \psi \rangle &= -\frac{\hbar}{7} + \hbar \frac{2}{7} = \frac{\hbar}{7}, \\ \langle \psi | L^2 | \psi \rangle &= \frac{2\hbar^2}{7} + \frac{4}{7}(2\hbar^2) + \frac{2}{7}(2\hbar^2) = 2\hbar^2. \end{aligned}$$

Para la probabilidad de encontrar  $\hbar$ , utilizamos la forma matricial del operador  $L_z$

$$L_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

con esto, utilizamos la función creada el semestre anterior para el cálculo de la probabilidad de medir  $\hbar$ , `GeneralProbability[Lz, psi, hbar]`, la cual nos da 5/7.

**Ejercicio 6**

Dadas las relaciones

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z, \quad [J_y, J_z] = i\hbar J_x, \quad [J_z, J_x] = i\hbar J_y.$$



Utilizando la propiedad  $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$ , se pueden expandir los términos del lado izquierdo de la igualdad

$$\begin{aligned}[J_x J_y, J_z] &= i\hbar J_x^2 - i\hbar J_y^2, \\ [J_x, J_y J_z] &= -i\hbar J_y^2 + i\hbar J_z,\end{aligned}$$

sumando y factorizando

$$= i\hbar(J_x^2 - 2J_y^2 + J_z^2).$$

Concluyendo la demostración.

