Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Mecánica Cuántica 2
Diego Sarceño 201900109
3 de octubre de 2022

Hoja de Trabajo 3

Ejercicio 1
Teniendo las definiciones de los operadores de creación y aniquilación

$$\left.\begin{array}{rcl} a\left|n\right\rangle & = & \sqrt{n}\left|n-1\right\rangle \\ a^\dagger\left|n\right\rangle & = & \sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a^2\left|n\right\rangle & = & \sqrt{n(n-1)}\left|n-2\right\rangle \\ a^{\dagger 2}\left|n\right\rangle & = & \sqrt{(n+1)(n+2)}\left|n+2\right\rangle \end{array}\right. .$$

Calulamos los operadores X y P en términos de a y $a^\dagger$

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a^\dagger + a\right) \\ P &= m\omega i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a^\dagger - a\right) \\ X^2 &= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(a^{\dagger 2} + a^\dagger a + aa^\dagger + a^2\right) \\ P^2 &= -\left(\frac{m\omega\hbar}{2}\right)^2\left(a^{\dagger 2} + a^2 - a^\dagger a - aa^\dagger\right). \end{aligned}$$

Encontrando

$$\begin{aligned} \langle m|X|n\rangle &= \langle m|\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a^\dagger + a\right)|n\rangle \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n+1}\left\langle m|n+1\right\rangle + \sqrt{n}\left\langle m|n-1\right\rangle\right) \\ &\boxed{= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n+1}\delta_{m,n+1} + \sqrt{n}\delta_{m,n-1}\right)} \end{aligned}$$

bajo la misma idea

$$\boxed{\langle m|P|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}i\left(\sqrt{n+1}\delta_{m,n+1} - \sqrt{n}\delta_{m,n-1}\right)}.$$

$$\begin{aligned} \langle m|X^2|n\rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega}\left\langle m\right|\left[\sqrt{(n+1)(n+2)}\left|n+2\right\rangle + \sqrt{n(n-1)}\left|n-2\right\rangle + n\left|n\right\rangle + (n+1)\left|n\right\rangle\right] \\ &\boxed{= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\sqrt{(n+1)(n+2)}\delta_{m,n+2} + \sqrt{n(n-1)}\delta_{m,n-2} + n\delta_{m,n} + (n+1)\delta_{m,n}\right)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\langle m|P^2|n\rangle = -\frac{m\omega\hbar}{2}\left(\sqrt{(n+1)(n+2)}\delta_{m,n+2} + \sqrt{n(n-1)}\delta_{m,n-2} - n\delta_{m,n} - (n+1)\delta_{m,n}\right)}$$

Encontrando XP y PX, se tiene

$$XP = \frac{\hbar}{2} i \Big(\sqrt{(n+1)(n+2)}\delta_{m,n+2} - n\delta_{m,n} + (n+1)\delta_{m,n+1} - \sqrt{n(n-1)}\delta_{m,n-2} \Big),$$

$$PX = \frac{\hbar}{2} i \Big(\sqrt{(n+1)(n+2)}\delta_{m,n+2} + n\delta_{m,n} - (n+1)\delta_{m,n+1} - \sqrt{n(n-1)}\delta_{m,n-2} \Big).$$

entonces

$$\boxed{\langle m|XP + PX|n\rangle = \hbar i \Big(\sqrt{(n+1)(n+2)}\delta_{m,n+2} - \sqrt{n(n-1)}\delta_{m,n-2} \Big).}$$

Ejercicio 2

Ejercicio 3

Ejercicio 4

Ejercicio 5

Ejercicio 6