



TAREA 3

Ejercicio 1

Solución, expandiendo los operadores de momento angular y se utiliza la siguiente propiedad: $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$.

- Demostrar $[L_x, Y] = i\hbar Z$

$$\begin{aligned} &= [YP_z, Y] - [ZP_y, Y] \\ &= Y[P_z, Y] + [Y, Y]P_z - Z[P_z, Y] - [Z, Y]P_y \\ &= -Z[P_y, Y] = -Z(-i\hbar) \\ &= i\hbar Z. \end{aligned}$$

- Demostrar $[L_x, P_y] = i\hbar P_z$

$$\begin{aligned} &= [YP_z, P_y] - [ZP_y, P_y] \\ &= Y[P_z, P_y] + [Y, P_y]P_z \\ &= i\hbar P_z. \end{aligned}$$

- Demostrar $[L_x, P^2] = 0$

$$\begin{aligned} &= [L_x, P_x^2 + P_y^2 + P_z^2] \\ &= \underbrace{[YP_z, P_x^2]}_0 + \underbrace{[YP_z, P_y^2]}_{2i\hbar P_y P_z} + \underbrace{[YP_z, P_z^2]}_0 - \underbrace{[ZP_y, P_x^2]}_0 - \underbrace{[ZP_y, P_y^2]}_0 - \underbrace{[ZP_y, P_z^2]}_{2i\hbar P_z P_y} \\ &= 2i\hbar[P_y, P_z] = 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 2

Ejercicio 3

Sabiendo que $L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$, entonces, aplicando el conmutador a un vector cualquiera, se tiene

$$\begin{aligned} [L_z, \cos \phi I]f &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}(\cos \phi f) - \cos \phi \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} f \right) \\ &= i\hbar \sin \phi f - i\hbar \cos \phi \frac{\partial f}{\partial \phi} + i\hbar \cos \phi \frac{\partial f}{\partial \phi} \\ &= i\hbar \sin \phi f; \end{aligned}$$

por ende,

$$[L_z, \cos \phi I] = i\hbar \sin \phi.$$

Para $[L_z, \sin 2\phi I]$, realizamos exactamente lo mismo

$$\begin{aligned} [L_z, \sin 2\phi I]f &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} (\sin 2\phi f) - \sin 2\phi \left(-\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} f \right) \\ &= -i\hbar 2 \underbrace{\cos 2\phi}_{\cos^2 \phi - \sin^2 \phi} f - i\hbar \sin 2\phi \frac{\partial f}{\partial \phi} + i\hbar \sin 2\phi \frac{\partial f}{\partial \phi} \\ &= 2i\hbar (\sin^2 \phi - \cos^2 \phi) f; \end{aligned}$$

entonces,

$$[L_z, \sin 2\phi I] = 2i\hbar (\sin^2 \phi - \cos^2 \phi).$$

Ejercicio 4

Sabiendo que

$$L^2 |l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1) |l, m\rangle$$

$$L_z |l, m\rangle = \hbar m |l, m\rangle.$$

Ya se tiene la base propia, teniendo que $m \in [-l, l]$ entonces GRAFICA! Además, se tiene que

$$L_+ |l, m\rangle = C_+ |l, m\rangle$$

$$L_- |l, m\rangle = C_- |l, m\rangle,$$

cuyas constantes (según Zettili) son

$$C_{\pm} = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}.$$

Encontrando las representaciones matriciales ($m' \neq m$ y $l = l' = 1$) $\langle l, m | \hat{A} | l', m' \rangle$

$$\langle 1, 0 | L_- | 1, 1 \rangle = \sqrt{2}\hbar$$

$$\langle 1, -1 | L_- | 1, 0 \rangle = \sqrt{2}\hbar$$

$$L_- = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

el resto son cero.

$$\langle 1, 1 | L_+ | 1, 0 \rangle = \sqrt{2}\hbar$$

$$\langle 1, 0 | L_+ | 1, -1 \rangle = \sqrt{2}\hbar$$

$$L_+ = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

L_z es más claro por su definición

$$\begin{aligned}\langle 1, 1 | L_z | 1, 1 \rangle &= \hbar \\ \langle 1, 0 | L_z | 1, 0 \rangle &= 0 \\ \langle 1, -1 | L_z | 1, -1 \rangle &= -\hbar \\ L_z &= \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Teniendo la relación entre los operadores escalera y L_y y L_x

$$\begin{aligned}L_x &= \frac{1}{2}(L_+ + L_-), \\ L_y &= \frac{i}{2}(L_- - L_+).\end{aligned}$$

Reemplazando y sumando las matrices, se tiene

$$\begin{aligned}L_x &= \frac{\hbar}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ L_y &= \frac{\hbar}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Y $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$, utilizando mathematica

$$L^2 = \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 5

Sabiendo que los operadores se pueden escribir en términos de los operadores escalera

$$\begin{aligned}L_x &= \frac{1}{2}(L_+ + L_-) \\ L_y &= \frac{1}{2}(L_- - L_+),\end{aligned}$$

Entonces, es claro que $\langle L_x \rangle = 0$ dado que $\langle L_+ \rangle = \langle L_- \rangle = 0$. Ahora $L_x^2 = \frac{1}{4}(L_+^2 + L_+L_- + L_-L_+ + L_-^2)$, por lo anterior $\langle L_+^2 \rangle = \langle L_-^2 \rangle = 0$, entonces

$$\begin{aligned}\langle L_x^2 \rangle &= \frac{1}{4} \langle L_+L_- + L_-L_+ \rangle, \\ \langle L_y^2 \rangle &= -\frac{1}{4} \langle -L_+L_- - L_-L_+ \rangle,\end{aligned}$$

lo que implica que $\langle L_x^2 \rangle = \langle L_y^2 \rangle$. Calculando su valor, tomamos la relación $\langle L_x^2 \rangle = \langle L_y^2 \rangle = \frac{1}{2}[\langle L^2 \rangle - \langle L_z^2 \rangle]$, entonces

$$\langle L_x^2 \rangle = \langle L_y^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{2} [l(l+1) - m^2].$$

Es claro que $l(l+1) - m^2 \geq m(m+1) - m^2 = m$, por ende

$$\Delta L_x \Delta L_y = \sqrt{\langle L_x^2 \rangle \langle L_y^2 \rangle} \geq \frac{1}{2} \hbar^2 m.$$

Ejercicio 6

Solución

- Para J_+ , partimos de

$$\begin{aligned} J_z J_+ |j, m\rangle &= (J_z J_+ - J_+ J_z + J_+ J_z) |j, m\rangle \\ &= ([J_z, J_+] + J_+ J_z) |j, m\rangle \\ &= \hbar J_+ |j, m\rangle + \hbar m J_+ |j, m\rangle \\ &= \hbar(m+1) J_+ |j, m\rangle, \end{aligned}$$

lo que implica que $J_+ |j, m\rangle$ es vector propio de J_z , por lo que

$$J_+ |j, m\rangle = C |j, m+1\rangle.$$

- Para J_- , se tiene que

$$\begin{aligned} J_z J_- |j, m\rangle &= (J_z J_- - J_- J_z + J_- J_z) |j, m\rangle \\ &= ([J_z, J_-] + J_- J_z) |j, m\rangle \\ &= -\hbar J_- |j, m\rangle + \hbar m J_- |j, m\rangle \\ &= \hbar(m-1) J_- |j, m\rangle, \end{aligned}$$

lo que implica que $J_- |j, m\rangle$ es vector propio de J_z , por lo que

$$J_- |j, m\rangle = C |j, m-1\rangle.$$