Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Mecánica Cuántica 2
Diego Sarceño 201900109
28 de octubre de 2022

Hoja de Trabajo 2

Ejercicio 1

Ejercicio 2

Tomando el operador número y el estado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{17}}|0\rangle + \frac{3}{\sqrt{17}}|1\rangle - \frac{2}{\sqrt{17}}|2\rangle - \sqrt{\frac{3}{17}}|3\rangle$, entonces, calculando el valor esperado $\langle\psi|N|\psi\rangle$, primero aplicamos $N|\psi\rangle = a^\dagger a|\psi\rangle$

$$a^\dagger a|\psi\rangle = \frac{3}{\sqrt{17}}|1\rangle - 2\sqrt{\frac{4}{17}}|1\rangle - \sqrt{\frac{27}{17}}|2\rangle,$$

$$\langle\psi|N|\psi\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{17}}\langle 0| + \frac{3}{\sqrt{17}}\langle 1| - \frac{2}{\sqrt{17}}\langle 2| - \sqrt{\frac{3}{17}}\langle 3|\right)\left(\frac{3}{\sqrt{17}}|1\rangle - 2\sqrt{\frac{4}{17}}|1\rangle - \sqrt{\frac{27}{17}}|2\rangle\right) = \frac{26}{17}.$$

Para el Hamiltoniano, $H = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)$, utilizamos la función `ExpectationValue[]` creada el semestre pasado para encontrar el valor esperado del Hamiltoniano, el cual es

$$\langle\psi|H|\psi\rangle = \frac{69}{34}\hbar\omega.$$

Ejercicio 3

Sabiendo que $\Delta X = \sqrt{\langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2}$ y $\Delta P = \sqrt{\langle P^2\rangle - \langle P\rangle^2}$. Encontramos cada uno de los valores esperados

$$\begin{aligned}
\langle X\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\Big(\langle 5|a|5\rangle + \langle 5|a^\dagger|5\rangle\Big) = 0,\\
\langle P\rangle &= 0,\\
\langle X^2\rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega}(2(5)+1) = \frac{11\hbar}{2m\omega},\\
\langle P^2\rangle &= \frac{m\omega\hbar}{2}(2(5)+1) = \frac{11m\omega\hbar}{2};
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$(\Delta X\Delta P)_5 = \sqrt{\frac{11\hbar}{2m\omega}}\sqrt{\frac{11m\omega\hbar}{2}} = \frac{11\hbar}{2}.$$

Para $|0\rangle$, se tiene

$$\begin{aligned}
\langle 0|X^2|0\rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega},\\
\langle 0|P^2|0\rangle &= \frac{\hbar m\omega}{2}.
\end{aligned}$$

Con lo que $(\Delta X \Delta P)_0 = \frac{\hbar}{2}$.

Ejercicio 4

Teniendo la energía para el oscilador cuántico $E_n = \hbar\omega\big(n + \frac{1}{2}\big)$, tomando la energía del oscilador armónico $E = \frac{1}{2}m\omega^2 l^2$. Entonces, en términos de ω

$$l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

La probabilidad fuera del límite clásico es

$$P_{out} = 1 - P_{in} \qquad \Rightarrow \qquad P_{out} = 1 - \int_{-A_0}^{A_0} |\psi_0(x)| \,\mathrm{d}x\,,$$

para el estado base se tiene

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}};$$

por lo tanto

$$P_{out} = 1 - \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \int_{-A_0}^{A_0} e^{-\frac{m\omega x^2}{\hbar}} \,\mathrm{d}x \qquad \Rightarrow \qquad P_{out} = 1 - \operatorname{erf} 1 = 15.73\,\%.$$

Ejercicio 5

Dado que tenemos un oscilador armónico asimétrico el cuál unicamente se mueve en x positivas, además, la función de onda debe anularse en $x = 0$. Tomando las soluciones del oscilador, las únicas que son cero en el origen son aquellas impares, entonces los niveles de energía son

$$E_n = \left(2n + 1 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega.$$

Ejercicio 6