Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Mecánica Cuántica 2
Diego Sarceño 201900109
13 de octubre de 2022

Hoja de Trabajo 1

Ejercicio 1
Teniendo la forma de cada operador y sabiendo que $[x, p] = i\hbar$, entonces

$$[a, a^\dagger] = \frac{m\omega}{2\hbar}\left[x + \frac{ip}{m\omega}, x - \frac{ip}{m\omega}\right] = \frac{m\omega}{2\hbar}\left(-\frac{2i}{m\omega}[x, p]\right) = \mathbb{1}.$$

Ejercicio 2
Tomando los operadores de creación y aniquilación, se tiene

$$aa^\dagger = \frac{m\omega}{2\hbar}\left(x^2 + \frac{p^2}{m^2\omega^2} + \frac{i}{m\omega}[x, p]\right) + \frac{1}{2}\hbar\omega = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{p^2}{2m}.$$

Ejercicio 3
Teniendo las definiciones de los operadores de creación y aniquilación

$$\left.\begin{array}{rcl} a\left|n\right\rangle & = & \sqrt{n}\left|n-1\right\rangle \\ a^\dagger\left|n\right\rangle & = & \sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a^2\left|n\right\rangle & = & \sqrt{n(n-1)}\left|n-2\right\rangle \\ a^{\dagger^2}\left|n\right\rangle & = & \sqrt{(n+1)(n+2)}\left|n+2\right\rangle \end{array}\right. .$$

Calulamos los operadores X y P en términos de a y $a^\dagger$

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a^\dagger + a\right) \\ P &= m\omega i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a^\dagger - a\right) \\ X^2 &= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(a^{\dagger^2} + a^\dagger a + aa^\dagger + a^2\right) \\ P^2 &= -\left(\frac{m\omega\hbar}{2}\right)^2\left(a^{\dagger^2} + a^2 - a^\dagger a - aa^\dagger\right). \end{aligned}$$

Encontrando

$$\begin{aligned} \langle m|x|n\rangle &= \langle m|\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a^\dagger + a\right)|n\rangle \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n+1}\left\langle m|n+1\right\rangle + \sqrt{n}\left\langle m|n-1\right\rangle\right) \\ &\boxed{= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n+1}\delta_{m,n+1} + \sqrt{n}\delta_{m,n-1}\right)} \end{aligned}$$

bajo la misma idea

$$\boxed{\langle m|p|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} i\left(\sqrt{n+1}\delta_{m,n+1} - \sqrt{n}\delta_{m,n-1}\right)}.$$

$$\langle m|x^2|n\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\langle m|\left[\sqrt{(n+1)(n+2)}\,|n+2\rangle + \sqrt{n(n-1)}\,|n-2\rangle + n\,|n\rangle + (n+1)\,|n\rangle\right]$$
$$\boxed{= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\sqrt{(n+1)(n+2)}\delta_{m,n+2} + \sqrt{n(n-1)}\delta_{m,n-2} + n\delta_{m,n} + (n+1)\delta_{m,n}\right)}$$

$$\boxed{\langle m|p^2|n\rangle = -\frac{m\omega\hbar}{2}\left(\sqrt{(n+1)(n+2)}\delta_{m,n+2} + \sqrt{n(n-1)}\delta_{m,n-2} - n\delta_{m,n} - (n+1)\delta_{m,n}\right)}$$

y

$$\boxed{\langle m|[x,p]|n\rangle = i\hbar\delta_{m,n}}$$

Ejercicio 4
Tomando únicamente el signo $+$, se tiene

$$[J_z, J_+] = \frac{\hbar^2}{2}\left[a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-, a_+^\dagger a_-\right].$$

Utilizando la propiedad $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$, se tiene

$$[a_+^\dagger a_+, a_+^\dagger a_-] = a_+^\dagger \underbrace{[a_+, a_+^\dagger a_-]}_{a_-} + \underbrace{[a_+^\dagger, a_+^\dagger a_-]}_{0} a_+ = a_+^\dagger a_-$$

$$[a_-^\dagger a_-, a_+^\dagger a_-] = a_-^\dagger \underbrace{[a_-, a_+^\dagger a_-]}_{0} + \underbrace{[a_-^\dagger, a_+^\dagger a_-]}_{-a_+^\dagger} a_- = -a_+^\dagger a_-,$$

entonces

$$\boxed{[J_z, J_+] = \hbar J_+}$$

La misma idea para J_-.

Ejercicio 5

a) Teniendo las funciones $\varphi_{0,1}(x)$

$$\varphi_0(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt[4]{\pi}}$$

$$\varphi_1(x) = \frac{\sqrt{2}e^{-\frac{x^2}{2}}x}{\sqrt[4]{\pi}},$$

Aplicamos el hamiltoniano $H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}x^2$ con $p = -i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, lo que nos da

$$H\varphi_0(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{2\sqrt[4]{\pi}} = \frac{1}{2}\varphi_0(x),$$

y

$$H\varphi_1(x) = \frac{3e^{-\frac{x^2}{2}}x}{\sqrt{2}\sqrt[4]{\pi}} = \frac{3}{2}\varphi_1(x).$$

b) Ahora, si definimos otra función

$$\varphi_2(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\alpha x^2 - 1\right)}{\sqrt{2}\sqrt[4]{\pi}},$$

de modo que sea ortogonal a $\varphi_0(x)$ y $\varphi_1(x)$, se encuentra el valor de α. Para ello utilizamos mathematica, y el resultado de los productos internos respectivos, se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \varphi_0(x)\varphi_2^*(x) = \frac{\alpha - 2}{2\sqrt{2}}$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \varphi_1(x)\varphi_2^*(x) = 0.$$

Entonces el valor de $\alpha = 2$.

c) Aplicando el hamiltoniano, vemos que también es función propia de él, con valor propio $5/2$

$$H\varphi_2(x) = \frac{5e^{-\frac{x^2}{2}}\left(2x^2 - 1\right)}{2\sqrt{2}\sqrt[4]{\pi}} = \frac{5}{2}\varphi_2(x).$$

Ejercicio 6
Solución

a) Tomando el operador creación

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{\hbar}{m\omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right);$$

además, sabiendo que $\langle x|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle x|a^{\dagger 2}|0\rangle$ y que

$$\langle x|0\rangle = \varphi_o(x) = \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}.$$

Entonces, sustituyendo las relaciones obtenidas ateriormente se llega a $\varphi_2(x)$,

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\left(\frac{2m\omega}{\hbar}x^2 - 1\right)e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

b) Graficando las funciones de onda:

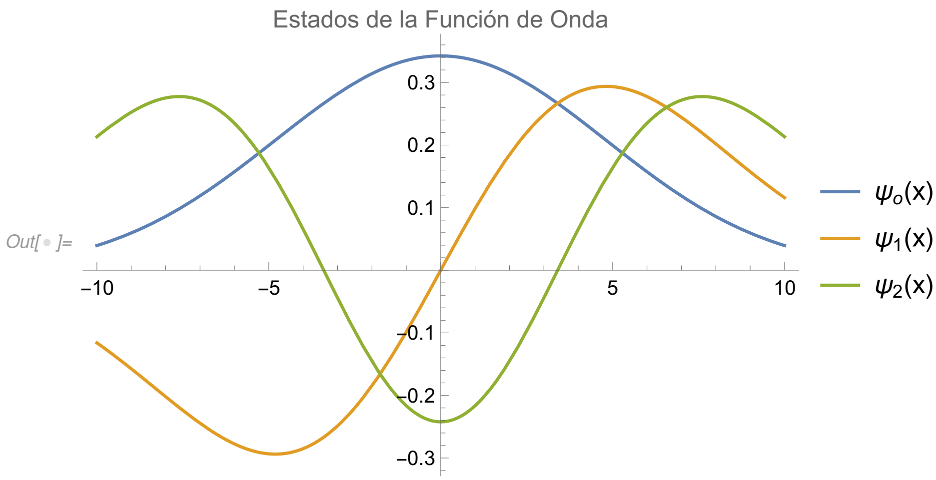

Figura 1: Gráfica de las funciones de onda $\varphi_{0,1,2}(x)$.

c) Para el útlimo inciso, ver el script de mathematica.