Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Mecánica Cuántica 2
Diego Sarceño 201900109
27 de noviembre de 2022

Tarea 3

Ejercicio 1
Solución, expandiendo los operadores de momento angular y se utiliza la siguiente propiedad: $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$.

- Demostrar $[L_x, Y] = i\hbar Z$

$$\begin{aligned} &= [YP_z, Y] - [ZP_y, Y] \\ &= Y[P_z, Y] + [Y, Y]P_z - Z[P_z, Y] - [Z, Y]P_y \\ &= -Z[P_y, Y] = -Z(-i\hbar) \\ &= i\hbar Z. \end{aligned}$$

- Demostrar $[L_x, P_y] = i\hbar P_z$

$$\begin{aligned} &= [YP_z, P_y] - [ZP_y, P_y] \\ &= Y[P_z, P_y] + [Y, P_y]P_z \\ &= i\hbar P_z. \end{aligned}$$

- Demostrar $[L_x, P^2] = 0$

$$\begin{aligned} &= [L_x, P_x^2 + P_y^2 + P_z^2] \\ &= \underbrace{[YP_z, P_x^2]}_{0} + \underbrace{[YP_z, P_y^2]}_{2i\hbar P_y P_z} + \underbrace{[YP_z, P_z^2]}_{0} - \underbrace{[ZP_y, P_x^2]}_{0} - \underbrace{[ZP_y, P_y^2]}_{0} - \underbrace{[ZP_y, P_z^2]}_{2i\hbar P_z P_y} \\ &= 2i\hbar[P_y, P_z] = 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 2

Ejercicio 3

Ejercicio 4
Sabiendo que

$$L^2 |l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1) |k, m\rangle$$

$$L_z |l, m\rangle = \hbar m |l, m\rangle .$$

Ya se tiene la base propia, teniendo que $m \in [-l, l]$ entonces GRAFICA! Además, se tiene que

$$\begin{aligned} L_+ \left| l, m \right\rangle &= C_+ \left| l, m \right\rangle \\ L_- \left| l, m \right\rangle &= C_- \left| l, m \right\rangle, \end{aligned}$$

cuyas constantes (según Zettili) son

$$C_\pm = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}.$$

Encontrando las representaciones matriciales ($m' \neq m$ y $l = l' = 1$) $\langle l, m|\hat{A}|l', m'\rangle$

$$\begin{aligned} \langle 1, 0|L_-|1, 1\rangle &= \sqrt{2}\hbar \\ \langle 1, -1|L_-|1, 0\rangle &= \sqrt{2}\hbar \\ L_- &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

el resto son cero.

$$\begin{aligned} \langle 1, 1|L_+|1, 0\rangle &= \sqrt{2}\hbar \\ \langle 1, 0|L_+|1, -1\rangle &= \sqrt{2}\hbar \\ L_+ &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

L_z es más claro por su definición

$$\begin{aligned} \langle 1, 1|L_z|1, 1\rangle &= \hbar \\ \langle 1, 0|L_z|1, 0\rangle &= 0 \\ \langle 1, -1|L_z|1, -1\rangle &= -\hbar \\ L_z &= \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Teniendo la relación entre los operadores escalera y L_y y L_x

$$L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-),$$

$$L_y = \frac{i}{2}(L_- - L_+).$$

Reemplazando y sumando las matrices, se tiene

$$L_x = \frac{\hbar}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_y = \frac{\hbar}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Y $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$, utilizando mathematica

$$L^2 = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 5