Parcial 2

Materia Condensada 2

Diego Sarceño
201900109

19 de abril de 2023

Penetración de Campo Magnético en una placa. La ecuación de penetración puede ser escrita como

$$\lambda^2\nabla^2 B = B, \tag{1}$$

donde λ es la profundidad de penetración.

Penetración de Campo Magnético en una placa. La ecuación de penetración puede ser escrita como

$$\lambda^2 \nabla^2 B = B, \tag{1}$$

donde λ es la profundidad de penetración.

a) Demuestre que $B(x)$ dentro de una placa superconductora perpendicular al eje x y de grosor δ está dado por

$$B(x) = B_a \frac{\cosh x/\lambda}{\cosh \delta/2\lambda}, \tag{2}$$

donde B_a es el campo fuera de la placa y paralelo a ella; $x = 0$ es en el centro de la placa.

Penetración de Campo Magnético en una placa. La ecuación de penetración puede ser escrita como

$$\lambda^2 \nabla^2 B = B, \tag{1}$$

donde λ es la profundidad de penetración.

a) Demuestre que $B(x)$ dentro de una placa superconductora perpendicular al eje x y de grosor δ está dado por

$$B(x) = B_a \frac{\cosh x/\lambda}{\cosh \delta/2\lambda}, \tag{2}$$

donde B_a es el campo fuera de la placa y paralelo a ella; $x = 0$ es en el centro de la placa.

b) La magnetización efectiva $M(x)$ en la placa está definida por $B(x) - B_a = 4\pi M(x)$. Demuestre, en CGS, que $4\pi M(x) = -B_a(1/8\lambda^2)(\delta^2 - 4x^2)$, para $\delta \ll \lambda$.

(a) Tomando la ecuación (1) (Ecuación de London) y valuamos (2)

$$\frac{\lambda^2 B_a}{\cosh \delta/2\lambda} \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2} \cosh x/\lambda}_{\frac{1}{\lambda^2} \cosh x/\lambda} = B_a \frac{\cosh x/\lambda}{\cosh \delta/2\lambda}$$

(a) Tomando la ecuación (1) (Ecuación de London) y valuamos (2)

$$\frac{\lambda^2 B_a}{\cosh \delta/2\lambda} \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2} \cosh x/\lambda}_{\frac{1}{\lambda^2} \cosh x/\lambda} = B_a \frac{\cosh x/\lambda}{\cosh \delta/2\lambda}$$

Lo que demuestra que cumple con la ecuación de London.

(a) Tomando la ecuación (1) (Ecuación de London) y valuamos (2)

$$\frac{\lambda^2 B_a}{\cosh \delta/2\lambda} \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2} \cosh x/\lambda}_{\frac{1}{\lambda^2}\cosh x/\lambda} = B_a \frac{\cosh x/\lambda}{\cosh \delta/2\lambda}$$

Lo que demuestra que cumple con la ecuación de London.
Ahora, dada la condición de frontera

$$B\left(\pm\frac{\delta}{2}\right) = B_a,$$

es claro que se cumple por la propiedad $\cosh x = \cosh -x$.

(b) Para encontrar la magnetización efectiva y tomar en cuenta que $\lambda \gg \delta$, expandimos en taylor los cosenos hiperbólicos

$$\cosh x/\lambda = 1 + \frac{x^2}{2\lambda^2} + \cdots$$

$$\cosh \delta/2\lambda = 1 + \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{4\lambda^2} + \cdots .$$

(b) Para encontrar la magnetización efectiva y tomar en cuenta que $\lambda \gg \delta$, expandimos en taylor los cosenos hiperbólicos

$$\cosh x/\lambda = 1 + \frac{x^2}{2\lambda^2} + \cdots$$

$$\cosh \delta/2\lambda = 1 + \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{4\lambda^2} + \cdots .$$

Con esto, se toman los primeros términos y se sustituyen en la ecuación (2)

$$B(x) = B_a \frac{1 + \frac{x^2}{2\lambda}}{1 + \frac{\delta^2}{8\lambda^2}} = B_a \frac{4(2\lambda^2 + x^2)}{\delta^2 + 8\lambda^2}.$$

(b) Para encontrar la magnetización efectiva y tomar en cuenta que $\lambda \gg \delta$, expandimos en taylor los cosenos hiperbólicos

$$\cosh x/\lambda = 1 + \frac{x^2}{2\lambda^2} + \cdots$$

$$\cosh \delta/2\lambda = 1 + \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{4\lambda^2} + \cdots .$$

Con esto, se toman los primeros términos y se sustituyen en la ecuación (2)

$$B(x) = B_a \frac{1 + \frac{x^2}{2\lambda}}{1 + \frac{\delta^2}{8\lambda^2}} = B_a \frac{4(2\lambda^2 + x^2)}{\delta^2 + 8\lambda^2}.$$

Reemplazamos esto en la definición de magnetización efectiva

$$4\pi M(x) = B(x) - B_a = B_a \frac{4x^2 - \delta^2}{\delta^2 + 8\lambda^2},$$

Ahora, para $\delta \ll \lambda$ se tiene $1/(\delta^2 + 8\lambda^2) \approx 1/8\lambda^2$

$$4\pi M(x) = -B_a \frac{1}{8\lambda^2}\left(\delta^2 - 4x^2\right).$$

Efecto de un espacio de aire. Discuta el efecto de un espacio de aire entre las placas de un capacitor y un dielectrico en la medición de constantes dieléctricas grandes. Cuál es la constante dieléctrica aparente más grande posible si el espacio de aire tiene un espesor de 10^{-3} del total del espesor? La presencia de espacios de aire pueden distorcionar la medición de constantes dieléctricas grandes.

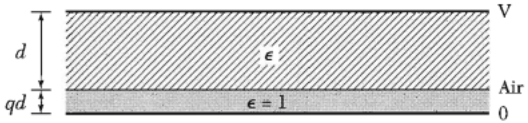

Figura: Capacitor y dieléctricos.

Dado que el desplazamiento eléctrico es continuo entre las superficies de un dieléctrico, entonces $E_{aire} = \varepsilon E_{diel}$. Dado esto podemos encontrar el potencial del dieléctrico

$$E_{aire} qd + E_{diel} d = E_{aire} d \left(q + \frac{1}{\varepsilon} \right).$$

Capítulo 16 Problema 3 Solución

Dado que el desplazamiento eléctrico es continuo entre las superficies de un dieléctrico, entonces $E_{aire} = \varepsilon E_{diel}$. Dado esto podemos encontrar el potencial del dieléctrico

$$E_{aire} qd + E_{diel} d = E_{aire} d \left(q + \frac{1}{\varepsilon} \right).$$

Por ley de Gauss $E_{aire} A = Q/\varepsilon_o = 4\pi Q$, en CGS.

Dado que el desplazamiento eléctrico es continuo entre las superficies de un dieléctrico, entonces $E_{aire} = \varepsilon E_{diel}$. Dado esto podemos encontrar el potencial del dieléctrico

$$E_{aire} qd + E_{diel} d = E_{aire} d \left(q + \frac{1}{\varepsilon} \right).$$

Por ley de Gauss $E_{aire} A = \ Q/\varepsilon_o \ = 4\pi Q$, en CGS. Para la capacitancia se tiene

$$C = \frac{A}{4\pi d \left(q + \frac{1}{\varepsilon} \right)}.$$

Dado que el desplazamiento eléctrico es continuo entre las superficies de un dieléctrico, entonces $E_{aire} = \varepsilon E_{diel}$. Dado esto podemos encontrar el potencial del dieléctrico

$$E_{aire} q d + E_{diel} d = E_{aire} d \left(q + \frac{1}{\varepsilon} \right).$$

Por ley de Gauss $E_{aire} A = \ Q/\varepsilon_o \ = 4\pi Q$, en CGS. Para la capacitancia se tiene

$$C = \frac{A}{4\pi d \left(q + \frac{1}{\varepsilon} \right)}.$$

De la definición de capacitancia, podemos definir una constante dieléctrica

$$\frac{1}{\varepsilon_e} = q + \frac{1}{\varepsilon}.$$

Si hacemos a ε muy grande para ver el comportamiento de ε_e, se tiene que para $\varepsilon \to \infty$

$$\varepsilon_e = \frac{1}{q}.$$

Por lo que dicha constate dieléctrica no podrá tener un valor mas grande que $1/q = 10^3$.

GRACIAS POR SU ATENCIÓN < 3