Parcial 1

Materia Condensada 2

Diego Sarceño
201900109

1 de marzo de 2023

a) Encuentre una expresión para la energía de unión de un electrón en una dimensión en un pozo cuadrado simple de profundidad U_o y ancho a. (Asuma que la solución es simétrica respecto del punto medio del pozo)

b) Encuentre un resultado numérico para la energía de unión en términos de U_o para el caso especial de $|U_o| = 2\hbar^2/ma^2$ y comparelo con el límite apropiado de la figura 20. En este límite de pozos muy separados el ancho de banda llega a cero, por lo que la energía de $k = 0$ es la misma que la energía para cualquier otra k en la banda de energía más baja. Otras bandas estan formadas de los estados excitados del pozo, en este límite.

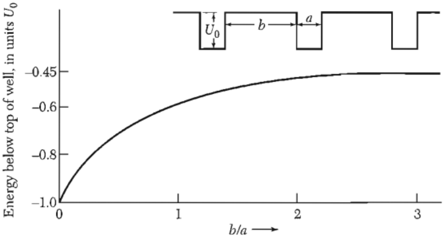

Figure 20 Ground orbital ($k = 0$) energy for an electron in a periodic square well potential of depth $|U_0| = 2\hbar^2/ma^2$. The energy is lowered as the wells come closer together. Here a is held constant and b is varied. Large b/a corresponds to separated atoms. (Courtesy of C. Y. Fong.)

Figura: Figura 20, "Introduction to solid state physics" - Wiley, Kittel.

Solución

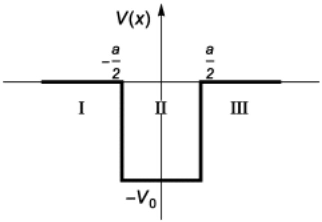

Figura: Pozo de potencial.

Solución

Para la región del pozo, se tiene la ecuación de Schrodinger

$$\left(-\frac{\hbar}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - U_o\right)\psi = E\psi$$

Solución

Para la región del pozo, se tiene la ecuación de Schrodinger

$$\left(-\frac{\hbar}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - U_o\right)\psi = E\psi$$

Cuya solución es $\psi_{II} = B\cos kx$.

Para la región del pozo, se tiene la ecuación de Schrodinger

$$\left(-\frac{\hbar}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - U_o\right)\psi = E\psi$$

Cuya solución es $\psi_{II} = B\cos kx$. Mientras que para la región anterior al pozo (que es la otra región de interés) la ecuación y su solución es:

Solución

Para la región del pozo, se tiene la ecuación de Schrodinger

$$\left(-\frac{\hbar}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - U_o\right)\psi = E\psi$$

Cuya solución es $\psi_{II} = B\cos kx$. Mientras que para la región anterior al pozo (que es la otra región de interés) la ecuación y su solución es:

$$-\frac{\hbar}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi = E\psi \qquad \Rightarrow \qquad \psi_I = Ae^{\kappa x}.$$

Para la región del pozo, se tiene la ecuación de Schrodinger

$$\left(-\frac{\hbar}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - U_o\right)\psi = E\psi$$

Cuya solución es $\psi_{II} = B\cos kx$. Mientras que para la región anterior al pozo (que es la otra región de interés) la ecuación y su solución es:

$$-\frac{\hbar}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi = E\psi \qquad \Rightarrow \qquad \psi_I = Ae^{\kappa x}.$$

Donde

$$\kappa = \sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}}, \quad k = \sqrt{\frac{2m(E+U_o)}{\hbar^2}}.$$

Solución

Por lo que

$$\boxed{E=-\frac{\hbar^2\kappa^2}{2m},\quad E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}-U_o.}$$

Por lo que

$$\boxed{E = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m}, \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - U_o.}$$

Además, en el límite de la energía de unión $(x = -a/2)$, las funciones propias y sus primeras derivadas deben ser continuas en las discontinuidades del potencial, es decir:

Por lo que

$$\boxed{E = -\frac{\hbar^2\kappa^2}{2m}, \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - U_o.}$$

Además, en el límite de la energía de unión $(x = -a/2)$, las funciones propias y sus primeras derivadas deben ser continuas en las discontinuidades del potencial, es decir:

$$\psi_I(-a/2) = \psi_{II}(-a/2), \quad \psi_I'(-a/2) = \psi_{II}'(-a/2).$$

Solución

Por lo que

$$\boxed{E = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m}, \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - U_o.}$$

Además, en el límite de la energía de unión $(x = -a/2)$, las funciones propias y sus primeras derivadas deben ser continuas en las discontinuidades del potencial, es decir:

$$\psi_I(-a/2) = \psi_{II}(-a/2), \quad \psi_I'(-a/2) = \psi_{II}'(-a/2).$$

Dividiendo estas dos ecuaciones se tiene la siguiente relación:

Por lo que

$$\boxed{E = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m}, \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - U_o.}$$

Además, en el límite de la energía de unión ($x = -a/2$), las funciones propias y sus primeras derivadas deben ser continuas en las discontinuidades del potencial, es decir:

$$\psi_I(-a/2) = \psi_{II}(-a/2), \quad \psi_I'(-a/2) = \psi_{II}'(-a/2).$$

Dividiendo estas dos ecuaciones se tiene la siguiente relación:

$$\boxed{\kappa = k \tan \frac{ka}{2}.} \tag{1}$$

Solución

Es lógico pensar que las energías deber ser iguales bajo la relación (1), sin embargo, es necesaria una implementación numérica[1] para resolver esto. Por lo que se dará por hecho y tomando la figura 1 la energía que cumple con lo solicitada es $\boxed{E = -0{,}45}$, ya que hace que hace que los pozos estén lo suficientemente separados para que la energía $k = 0$ sea la misma que cualquier otra k en la banda de energía más baja.

[1] Una implementación posible es la proporcionada por Hyperphysics

a) Calcule el periodo $\Delta(1/B)$ esperado para el potasio en el modelo de electrón libre.

b) Cuál es el área en el espacio real de la orbita externa, para $B = 10kG = 1T$? El mismo periodo se aplica a oscilaciones en la resistividad eléctrica, conocida como el efecto Shubnikow-de Haas.

Solución

(a) Tomando la periodicidad en el efecto Haas−Van Alphen

Solución

(a) Tomando la periodicidad en el efecto Haas−Van Alphen

$$\Delta\left(\frac{1}{B}\right) = \frac{2\pi e}{\hbar c S}.$$

Solución

(a) Tomando la periodicidad en el efecto Haas$-$Van Alphen

$$\Delta\left(\frac{1}{B}\right) = \frac{2\pi e}{\hbar c S}.$$

En donde $S = 4\pi k_F^2$, este k_F lo encontramos en la tabla 1 capítulo 6.

Solución

(a) Tomando la periodicidad en el efecto Haas−Van Alphen

$$\Delta\left(\frac{1}{B}\right) = \frac{2\pi e}{\hbar c S}.$$

En donde $S = 4\pi k_F^2$, este k_F lo encontramos en la tabla 1 capítulo 6.

Table 1 **Calculated free electron Fermi surface parameters for metals at room temperature**

(Except for Na, K, Rb, Cs at 5 K and Li at 78 K)

Valency	Metal	Electron concentration, in cm^{-3}	Radius[a] parameter r_s	Fermi wavevector, in cm^{-1}	Fermi velocity, in $cm\ s^{-1}$	Fermi energy, in eV	Fermi temperature $T_F \equiv \epsilon_F/k_B$, in deg K
1	Li	4.70×10^{22}	3.25	1.11×10^8	1.29×10^8	4.72	5.48×10^4
	Na	2.65	3.93	0.92	1.07	3.23	3.75
	K	1.40	4.86	0.75	0.86	2.12	2.46

Solución

(a) Tomando la periodicidad en el efecto Haas−Van Alphen

$$\Delta\left(\frac{1}{B}\right) = \frac{2\pi e}{\hbar c S}.$$

En donde $S = 4\pi k_F^2$, este k_F lo encontramos en la tabla 1 capítulo 6.
Con lo que, luego de valuar en sistema CGS:
$\Delta(1/B) = 1{,}35 \times 10^{-9} G^{-1}$.

Solución

(b) Tenemos la relación entre la velocidad y la frecuencia angular: $\omega_c R = v_F$ con $\omega_c = eB/mc$.

Solución

(b) Tenemos la relación entre la velocidad y la frecuencia angular: $\omega_c R = v_F$ con $\omega_c = eB/mc$.
Además, por la cuantización del momentum: $p_F = mv_F = \hbar k_F$, se reemplaza en lo anterior y se tiene

Solución

(b) Tenemos la relación entre la velocidad y la frecuencia angular: $\omega_c R = v_F$ con $\omega_c = eB/mc$.
Además, por la cuantización del momentum: $p_F = mv_F = \hbar k_F$, se reemplaza en lo anterior y se tiene

$$R = \frac{\hbar k_F c}{eB},$$

Solución

(b) Tenemos la relación entre la velocidad y la frecuencia angular: $\omega_c R = v_F$ con $\omega_c = eB/mc$.
Además, por la cuantización del momentum: $p_F = mv_F = \hbar k_F$, se reemplaza en lo anterior y se tiene

$$R = \frac{\hbar k_F c}{eB},$$

$$\text{Area} = \pi R^2 = 4{,}94 \times 10^{-4} cm^2$$

GRACIAS POR SU ATENCIÓN < 3