Lección 6

José David Ruiz Álvarez

josed.ruiz@udea.edu.co

Instituto de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Antioquia

4 de septiembre de 2018

1. Solución numérica de ecuaciones diferenciales

Definimos de forma general una ecuación diferencial como

$$y' = f(x, y);\ y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

1.1. Método de Euler

Basado en la aproximación de la derivación como la diferencia media entre dos puntos de una función. La solución de la ecuación diferencial en el punto x_n es usada para aproximar la solución en el punto x_{n+1}. Definimos:

$$h = (b - a)/N = x_{n+1} - x_n;\ n = 0, 1, ..., N - 1 \tag{2}$$

definición con la cual podemos encontrar

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n = y_n + hf(x_n, y_n) \tag{3}$$

Definimos el error de truncamiento (asociado a tomar valores discretos sobre x) como la diferencia entre la solución numérica y la solución exacta de la ecuación diferencial en un paso, asumiendo que ambas soluciones son exactamente iguales en todos los pasos anteriores. El error del método de Euler sería entonces asociado a $y(n + 1) - y_{n+1} \approx \mathcal{O}(h^2)$

El método mejorado de Euler usa la tangente a la curva en el punto medio entre dos pasos para aproximar la solución en el punto $n + 1$ en lugar de la tangente en el punto n. Es definido por:

$$y_{n+1/2} = y_n + \frac{1}{2}hy'_n;\ y'_{n+1/2} = f(x_{n+1/2}, y_{n+1/2});\ y_{n+1} = y_n + hy'_{n+1/2} \tag{4}$$

este método tiene un error de truncamiento de $\mathcal{O}(h^3)$.

Ejercicio 1: Basado en el ejemplo dado en clase implemente el método mejorado de Euler y compare el error de truncamiento con el método de Euler.

1.2. Convergencia

Decimos que un esquema de partición $(x_0, ..., x_n)$ converge si

$$lim_{h \to 0} |y_n - y(x_n)|;\ nh = x_n - x_0 \tag{5}$$