

Lección 7

José David Ruiz Álvarez

josed.ruiz@udea.edu.co

Instituto de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Antioquia

18 de septiembre de 2018

1. Método de Runge-Kutta

Se define el método de Runge-Kutta de orden 4, o método clásico de Runge-Kutta, por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x_{n+1} = x_n + h \quad (1)$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n) \quad (2)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_1}{2}\right) \quad (3)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_2}{2}\right) \quad (4)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + hk_3) \quad (5)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (6)$$

siguiendo la definición de un problema de ecuación diferencial ordinaria $y' = f(x, y)$; $y(x_0) = y_0$.

Ejercicio 1: Implemente el método de Runge-Kutta de orden 4 en python y utilícelo para encontrar soluciones a la ecuación diferencial, $y' = x - y$ con valor inicial $x_0 = 0$; $y_0 = 1$.

Ejercicio 2: Compare las soluciones encontradas con el método de Runge-Kutta con el método de Euler y método de Euler mejorado.

2. Método de Runge-Kutta generalizado

El método de Runge-Kutta de orden 4 hace parte de la familia de métodos de Runge-Kutta, cuya generalización se puede escribir a través de las siguientes ecuaciones:

$$x_{n+1} = x_n + h \quad (7)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad (8)$$

$$k_2 = f(x_n + hc_2, y_n + h(a_{21}k_1)) \quad (9)$$

$$k_3 = f(x_n + hc_3, y_n + h(a_{31}k_1 + a_{32}k_2)) \quad (10)$$

$$\dots \quad (11)$$

$$k_s = f(x_n + hc_s, y_n + h(a_{s1}k_1 + a_{s2}k_2 + \dots + a_{s,s-1}k_{s-1})) \quad (12)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i \quad (13)$$

Los valores de las constantes a_{ij} , b_i , c_i definen la estabilidad del método. El método de Euler es un método de Runge-Kutta de orden 1. El método clásico de Runge-Kutta tiene $c_2 = c_3 = 1/2$, $c_4 = 1$, $a_{21} = a_{32} = 1/2$, $a_{43} = 1$, $b_1 = b_4 = 1/6$, $b_2 = b_3 = 1/3$ y el resto de coeficientes son cero.

Ejercicio 3: Implemente el método de Runge-Kutta de orden 3 definido por $c_2 = 1/2$, $c_3 = 1$, $a_{21} = 1/2$, $a_{31} = -1$, $a_{32} = 2$, $b_1 = b_3 = 1/6$, $b_2 = 2/3$ y el resto de coeficientes son cero en python y utilícelo para encontrar soluciones a la ecuación diferencial, $y' = x - y$ con valor inicial $x_0 = 0$; $y_0 = 1$.

Ejercicio 4: Compare las soluciones encontradas con el método de Runge-Kutta de orden 3 con el método de Euler, método de Euler mejorado y el método de Runge-Kutta de orden 4.