

---

# Potencial Apantallado

---

**Daniel Morales**

daniel2200812@correo.uis.edu.co  
Universidad Industrial de Santander

**David García**

david2220664@correo.uis.edu.co  
Universidad Industrial de Santander

Oct 24, 2024

## ABSTRACT

Análisis de la trayectoria de partículas cargadas tras interacción con potenciales apantallados de Yukawa y potenciales de Coulomb tradicionales.

## Índice

1. Introducción .....	1
2. Metodología .....	2
3. El experimento y los resultados .....	3
4. Conclusiones y Recomendaciones .....	8
Referencias .....	8

## 1. Introducción

Uno de los experimentos que más marcó el siglo XX fue el que hizo rutherford en el año de 1911, que consiste de bombardear partículas alfa a una fina lámina de oro para así estudiar la estructura atómica que compone la materia, el experimento mostró como muchas de las partículas atravesaban la lámina, lo que llevó a determinar que la mayor parte de los átomos por ende la materia es espacio vacío, por otro lado algunas de las partículas fueron desviadas o reflectadas, estas fueron entonces las pocas que pudieron chocar e interactuar con el nucleo del atomo. Este experimento y conclusiones trajeron una revolución completa al modelo atómico de esa época. Para poder estudiar la interacción entre los átomos que hacen parte de la lámina y las partículas cargadas que se mueven hacia la lámina, es pertinente observar que a estas distancias los electrones de los átomos y el potencial que estos generan es mejor analizando usando el potencial apantallado de Yukawa

$$V(r) = \frac{k}{r} e^{-ar} \quad (1)$$

el cual es una aproximación mucho más útil que el potencial de Coulomb normal cuando se tiene en cuenta interacciones entre partículas cargadas y los orbitales externos de un átomo. Sabiendo esto es necesario analizar cómo la constante de apantallamiento  $a$  y otras condiciones iniciales como la energía cinética inicial de la partícula afectan el comportamiento de la colisión entre las partículas y el ángulo de dispersión que se define como la diferencia entre el ángulo inicial y el ángulo final.

## 2. Metodología

El primer paso es inferir las ecuaciones de movimiento de la partícula cargada que va a interactuar con el campo eléctrico de los electrones externos.

Primeramente para el caso del potencial central de Coulomb tendríamos un lagrangiano de la forma:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{r} \quad (2)$$

Lo que aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange para la coordenada  $\theta$  y  $r$  nos resultaria en las ecuaciones de movimiento

$$mr^2\dot{\theta} = l_{\theta} \quad (3)$$

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{k}{r^2} \quad (4)$$

En segunda instancia para el potencial de Yukawa tenemos el lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{r}e^{-ar} \quad (5)$$

Lo que resolviendo para  $\theta$  y  $r$  tenemos las ecuaciones de la forma:

$$mr^2\dot{\theta} = l_{\theta} \quad (6)$$

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + k\left(\frac{e^{-ar}}{r^2} + a\frac{e^{-ar}}{r}\right) \quad (7)$$

Por otro lado para poder realizar un análisis más correcto de la forma en la que la partícula es reflejada es importante definir el ángulo de dispersión, el cual se define como:

$$\theta_{\max} = b \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{v(r)}{E} - \frac{b^2}{r^2}}} \quad (8)$$

(Mario, n.d.)

donde  $b$  y  $E$  son parametros,  $b$  siendo el parametro de impacto y  $E$  es la energía mecánica del sistema conformado por la carga que intercatua y la carga fuente del potencial. Esta ecuación funciona para cualquier potencial central, en este caso usaremos el potencial de Yukawa ya que es precisamente del que queremos analizar.

Para poder solucionar esta integral es necesario encontrar el valor de  $r_{\min}$  el cual se refiere a la distancia más cerca que estará la partícula del centro del potencial y podemos encontrarla a partir de la ecuación:

$$Er^2 - V(r)r^2 - \frac{l^2}{2\mu} = 0 \quad (9)$$

(Mario, n.d.)

En el cual se usará momentáneamente el potencial de coulomb para obtener el radio mínimo esperado de tal forma que obtenemos una ecuación de la forma

$$Er^2 - kr - \frac{l^2}{2\mu} = 0 \quad (10)$$

Solucionando las raíces de este polinomio encontraremos nuestro  $r_0$  siendo este nuestro radio mínimo esperado.

Ahora volviendo con reescribimos la ecuación utilizando el potencial de yukawa, lo cual nos queda de la forma

$$Er^2 - ke^{-\alpha r}r - \frac{l^2}{2\mu} = 0 \quad (11)$$

Las raíces de esta ecuación ahora si son el  $r_{\min}$  que tanto estábamos buscando, y para poder resolver esta ecuación haremos uso del método de newton raphson usando al  $r_0$  que habíamos hallado como parámetro para comenzar a sacar las raíces.

Una vez reunido todo esto podemos volver a definir la integral con la que encontraremos el ángulo de dispersión usando el potencial de Yukawa esto nos generaría la ecuación:

$$\theta_{\max} = b \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{kre^{-\alpha r}}{E} - \frac{b^2}{r^2}}} \quad (12)$$

La cual se puede resolver numéricamente para encontrar  $\theta_{\max}$  en términos de los parámetros  $b, \alpha, E$ .

Ahora definimos a  $\sigma(\Omega)$  como la cantidad de partículas que son desviadas en un específico ángulo sólido por unidad de tiempo. Esto se llamará sección eficaz de dispersión.

$$\sigma(\Omega) = \frac{n(\Omega)}{I} \quad (13)$$

(Mario, n.d.)

Por lo que multiplicando a ambos lados por un diferencial de angulo solido  $\Omega$  se obtendrá.

$$I\sigma(\Omega)d\Omega = n(\Omega)d\Omega \quad (14)$$

Usando el hecho que  $d\Omega = \frac{dA}{r^2} = 2\pi \sin(\chi)d\chi$  y que para conservar la cantidad de particulas que pasan por e anillo ancho  $db$  y radio  $b$  por unidad de tiempo debe ser igual al numero de particulas dispersadas en el angulo solido  $d\Omega$ .

$$I2\pi bdb = I\sigma(\Omega)d\Omega \quad (15)$$

Lo cual implica

$$I2\pi bdb = I\sigma(\Omega)2\pi \sin(\chi)d\chi \quad (16)$$

$$\frac{b}{\sin(\chi)} \frac{db}{d\chi} = \sigma(\Omega) \quad (17)$$

Como  $\sigma(\Omega)$  representa una probabilidad, se toma el valor absoluto de la Ec. 17 que es equivalente a

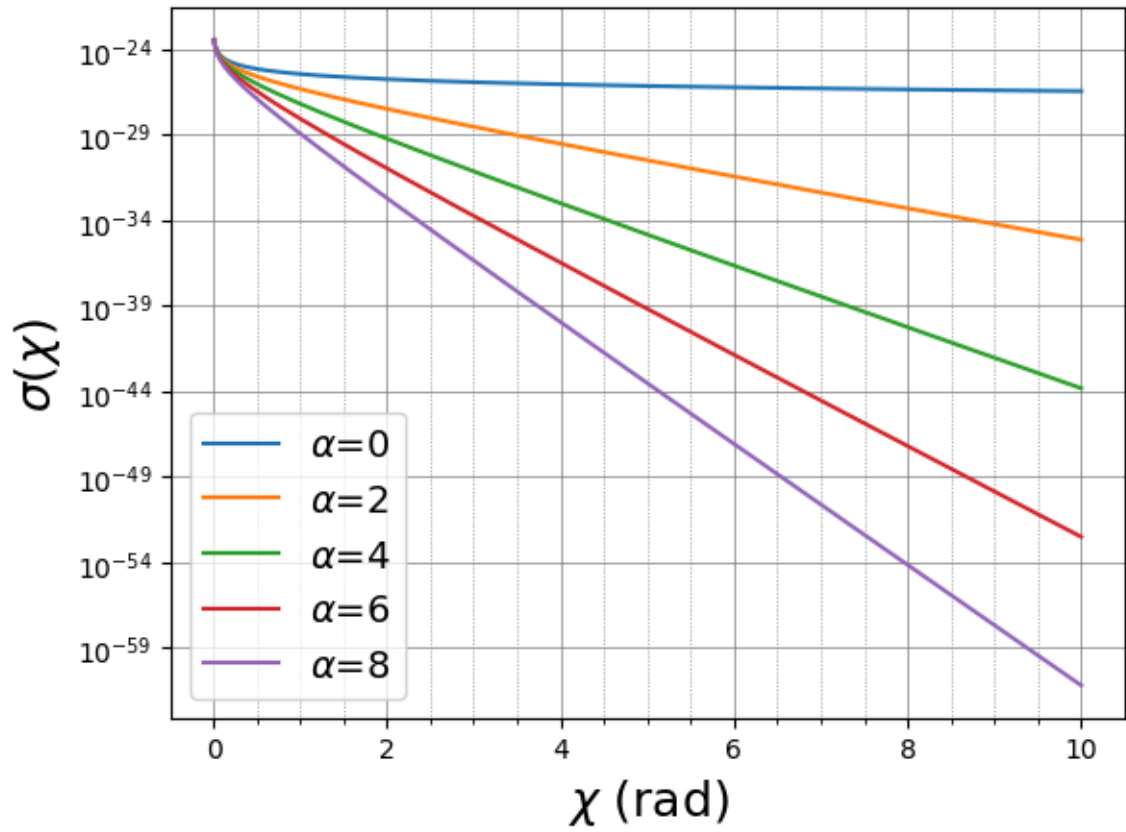
$$\frac{b}{\sin(\chi)} \left| \frac{db}{d\chi} \right| = \sigma(\Omega) \quad (18)$$

(Mario, n.d.)

Para calcular esto se hizo una diferenciación finita obteniendo numéricamente los valores de  $\chi$  con respecto a  $b$ , luego se usó la función gradient de numpy. La cual utiliza un metodo de diferencias finitas centrado para obtener la primera derivada, en este caso  $\frac{db}{d\chi}$ .

### 3. El experimento y los resultados

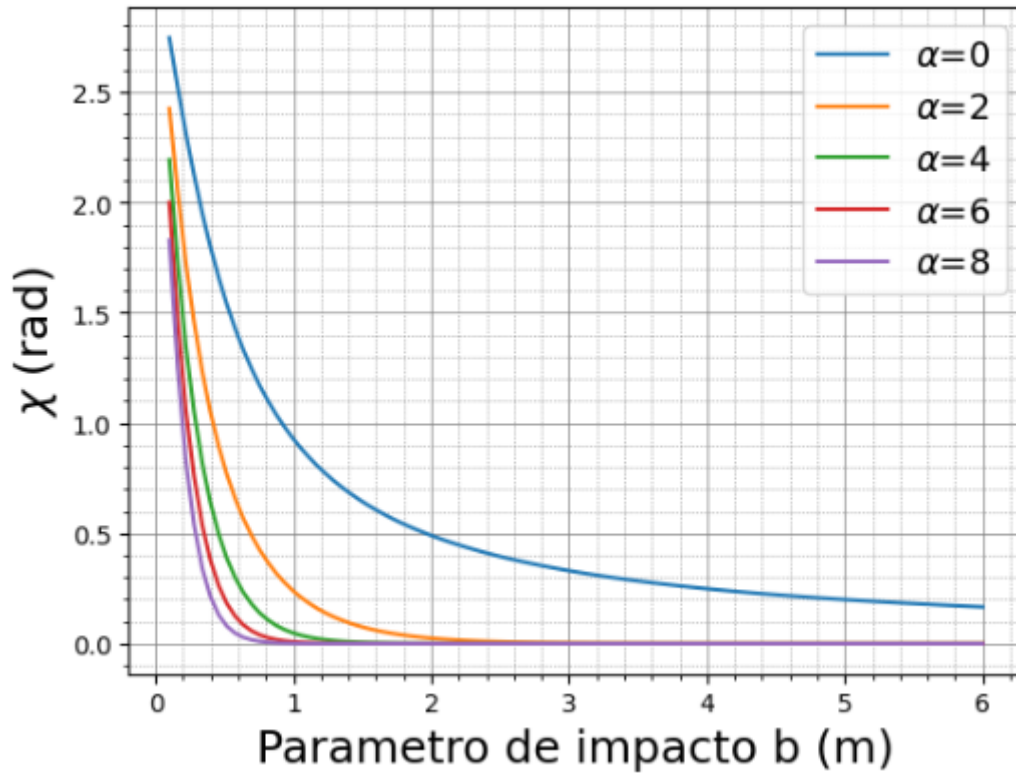
Primero es importante resaltar la diferencia en comportamiento con respecto a la distancia de los dos potenciales esto se puede ver evidenciado en la siguiente gráfica:



Gráfica 1: Comparativa del decaimiento de los dos potenciales con respecto a la distancia.

Aquí podemos ver como a pequeña escala, cuando la distancia tiende a 0 el potencial de Yukawa tiende a comportarse como el potencial tradicional justo como fue la intención, además podemos observar el decaimiento más rápido que tiene con respecto al potencial común.

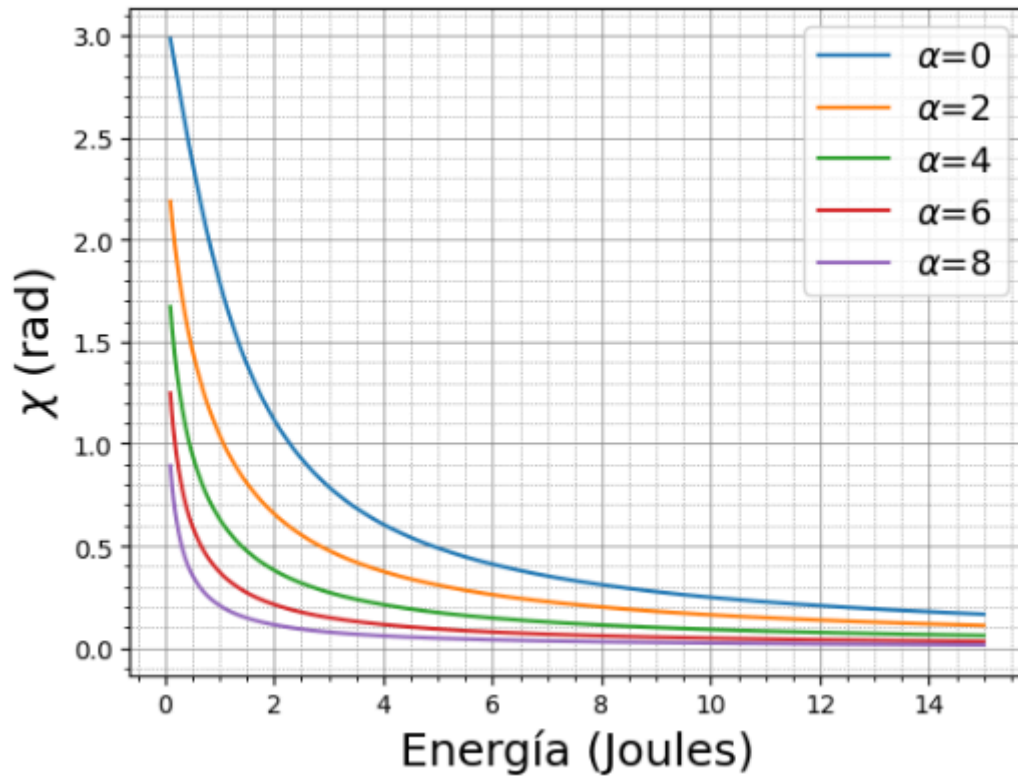
A continuación vamos a analizar el comportamiento del ángulo de dispersión para diferentes valores de  $b$  que es la constante de impacto y de  $a$  que es la constante de apantallamiento.



Gráfica 2: Ángulo de dispersión vs parametro b para diferentes valores de  $\alpha$ .

A partir de esta gráfica podemos sacar muchas diversas conclusiones sobre el comportamiento del sistema, la primera es que podemos ver como el potencial de yukawa es un potencial de corto alcance esto porque comparado con  $\alpha = 0$  que es representa el comportamiento usando el potencial de coulomb normal, la ángulos de dispersión con valores notables se acumulan todos entre el 0 y 1, mientras que en el potencial normal si hay dispersión para mayores valores. Además podemos observar como la constante de apantallamiento tiene una relación inversa con la magnitud general de la dispersión, es decir entre mayor sea el apantallamiento del potencial menos van a tender las partículas a dispersarse al interactuar con él, asimismo podriamos ver como al crecer el valor de  $\alpha$ , se hace cada vez mas pequeño el rango efectivo del potenical, es decir en los que los resultados obtenidos de dispersion obtenidos tienen un valor relevante.

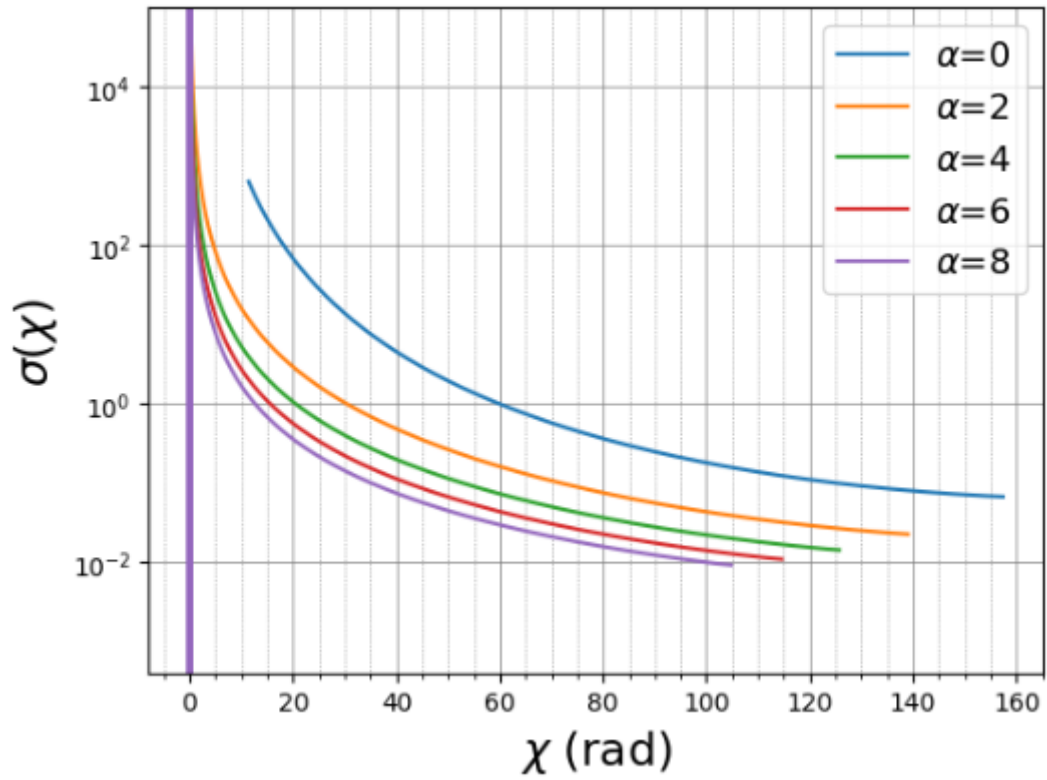
Siguiendo esta misma linea tenemos la grafica que relaciona el angulo de dispersion pero ahora con la energia total del sistema  $E$  y con direfentes parametros de  $\alpha$ .



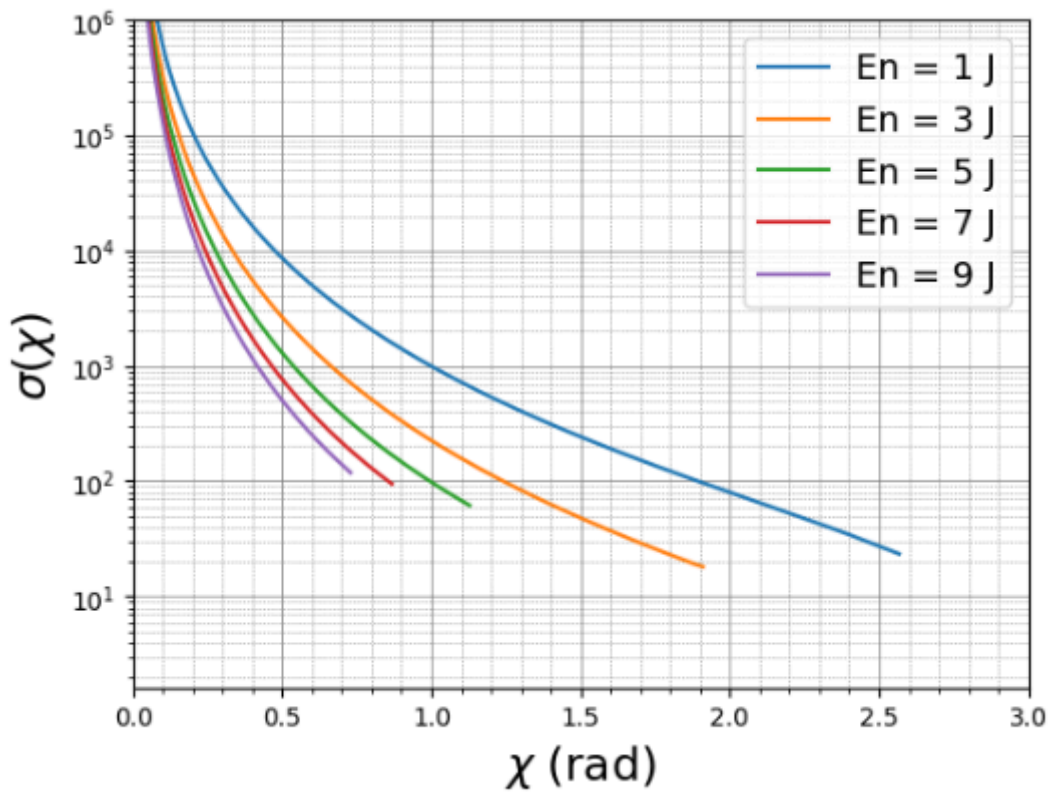
Gráfica 3: Ángulo de dispersión vs Energía para diferentes valores de  $\alpha$ .

Aquí podemos observar como a altas energías los valores de dispersión son relativamente más bajos que para las energías más pequeñas, esto nos podría indicar que las partículas con más energía tienden a atravesar el potencial sin mucha interacción y que por el contrario las partículas con poca energía sufren un desplazamiento muy alto al interactuar mucho más con el campo.

Finalmente, para el análisis de la sección transversal diferencial



Gráfica 4: Sección transversal diferencial para diferentes valores de  $E$ .



Gráfica 5: Sección transversal diferencial para diferentes valores de  $\alpha$ .

A Partir de la gráfica que representa varios valores de apantallamiento ( $\alpha$ ) podemos evidenciar cómo al aumentar  $\alpha$  la curva pareciese desplazarse hacia abajo en el eje y lo que implica un

decrecimiento en el valor de la sección transversal diferencial, lo que estaría a su vez relacionado con que a medida que crece el apantallamiento decrece el valor del ángulo de dispersión y por ende hay una interacción cada vez más débil con el campo, además podemos evidenciar que a medida que aumenta el ángulo de dispersión  $\chi$ , la sección transversal diferencial  $\sigma(\chi)$  disminuye rápidamente. Esto sugiere que los ángulos de dispersión pequeños contribuyen más a la sección transversal total, mientras que los ángulos grandes contribuyen mucho menos.

En segundo lugar para la gráfica que representa los diferentes valores de energía podemos observar cómo a mayor energía, la sección transversal disminuye lo que estaría relacionado con el cómo las partículas con mayor energía interactúan menos con el campo apantallado mientras que a bajas energías las partículas suelen tener una desviación mucho más alta. Esto refuerza la misma afirmación que habíamos hecho para la gráfica de ángulo de desviación contra energía.

## 4. Conclusiones y Recomendaciones

A partir de todo este análisis se pudo ver como el potencial de yukawa es un concepto necesario para poder modelar de una forma más fiel a la realidad este tipo de experimentos y como cada uno tiene unos resultados experimentales completamente distintos, siendo el potencial normal mucho más intrusivo a la hora de interactuar con partículas en su potencial, mientras que el potencial de yukawa tiende a dejar mucho más invariantes las trayectorias de algunas partículas que con esas mismas condiciones iniciales se habrían visto muy distorsionadas en el potencial normal de coulomb. Además pudimos determinar que parámetros como lo son la energía ( $E$ ) y la constante de apantallamiento ( $\alpha$ ) ambas tienen una relación inversa con la magnitud de la dispersión que sufre una partícula en un campo apantallado.

## Referencias

- [1] C. Mario, *Mecánica Clásica*, Versión A-2016.