
Pendulos acoplados con resorte

Daniel Morales

daniel2200812@correo.uis.edu.co
Universidad Industrial de Santander

David García

david2220664@correo.uis.edu.co
Universidad Industrial de Santander

May 16, 2023

ABSTRACT

Problema físico de aplicación de ecuaciones de Euler-Lagrange, situación en la que se puede ver fácilmente el comportamiento de los sistemas caóticos, de donde se origina a través de las ecuaciones de movimiento, además de como solucionarlo para pequeñas aproximaciones.

Índice

1. Introducción	1
2. Metodología	1
3. El experimento y los resultados	5
4. Conclusiones y Recomendaciones	12
Referencias	13

1. Introducción

Dos péndulos de igual masa m cuelgan de varillas sin masa y con misma longitud l , a su vez estos dos péndulos se encuentran unidos o acoplados por un resorte de constante elástica k . Para poder resolver un sistema de este estilo se tiene que conocer tanto la ecuación de la posición como de la velocidad para cada una de las masas, estas las podríamos encontrar utilizando las leyes de Newton lo cual nos generaría un aproximado mínimo de 4 ecuaciones diferenciales de segundo orden para poder definir la posición de cada una de las masas. Por otro lado, utilizando el formalismo de Lagrange y el concepto de coordenadas generalizada, podemos ver como el problema esta constreñido por dos parámetros que son las longitudes constantes de las varillas de los péndulos, esto nos permite reducir el numero de coordenadas generalizadas de 4 a 2, porque al final solo terminaremos resolviendo 2 ecuaciones diferenciales de segundo orden, lo cual es mucho mas conveniente. Inevitablemente al ser un sistema medianamente complejo estas ecuaciones no son integrables de forma analítica para obtener una ecuación de la posición es por esto por lo que en este caso es indispensable el uso de métodos numéricos para encontrar los parámetros que condicionan el sistema y el mejor estimado de cómo se comportaría. El análisis de este tipo de sistemas es muy importante porque permite extender la comprensión de sistemas con soluciones a las ecuaciones no analíticas, viendo como los parámetros y las condiciones iniciales son las que pueden llegar a tener mas impacto en el desarrollo del movimiento llevando así a los famosos sistemas caóticos.

2. Metodología

Ya que habíamos concluido que el sistema solo tendría dos coordenadas generalizadas gracias a las ligaduras, para construir nuestro lagrangiano tendremos que definir las energías cinéticas y potenciales de las dos masas en términos de las dos coordenadas que sean mas convenientes para nuestro sistema, en este caso nos decidimos por usar la coordenada θ_1 que se mide con respecto a vertical del péndulo uno y la coordenada θ_2 que se mide respecto a la vertical de la masa. Como se muestra en el Diagrama 1.

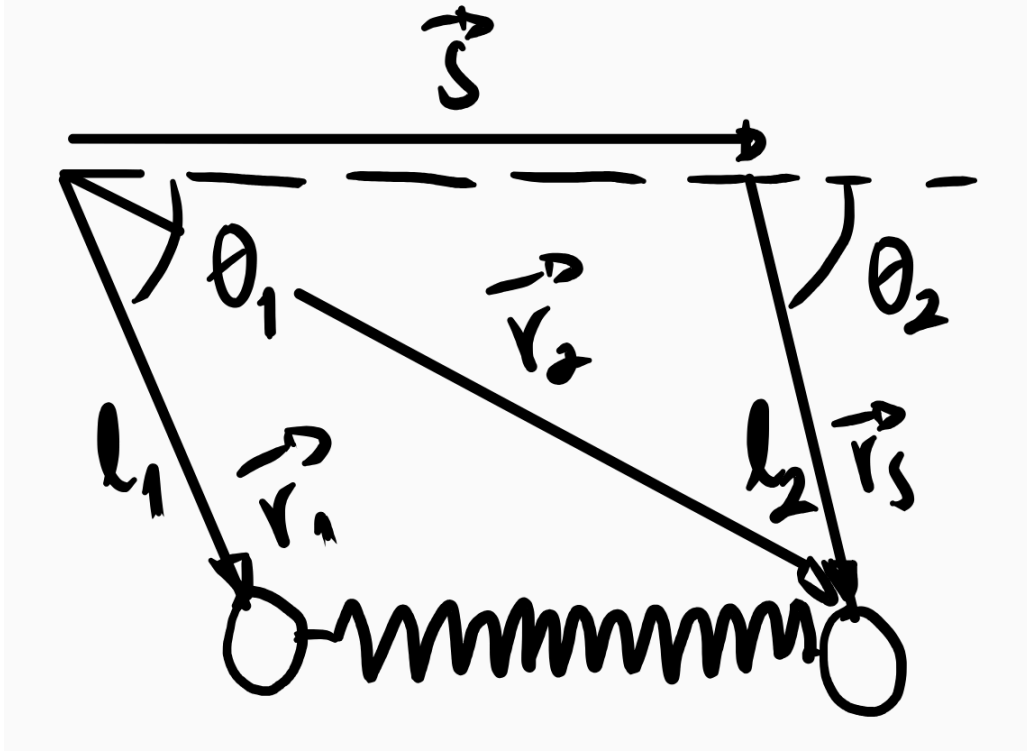


Diagrama 1: Muestra las definiciones de las coordenadas generalizadas θ_1 y θ_2 además los vectores utilizados para definir el lagrangiano. En este caso se definen los vectores desde el pivote de la barra que sostiene la masa m_1 .

En el Diagrama 1 es posible observar 2 ligaduras y 2 particulas en 2 dimensiones del espacio, por lo que hay 2 grados de libertad en este sistema. Las ligaduras son en este sistema $\|\vec{r}_1\| = l_1$ y $\|\vec{r}_s\| = l_2$.

Con esto podemos definir la energía cinética total, la cual solo será de traslación, esto debido a que estamos tomando la velocidad de su centro de masa y las masas no rotan con respecto a su centro de masa. De manera que la energía cinetica se define como:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^2 \quad (1)$$

Ahora se definen los vectores usando las coordenadas generalizadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= l_1 \left[\cos \theta_1 \hat{i} + \sin \theta_1 \hat{j} \right] \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}_s + s \hat{i} = l_2 \left[\cos \theta_2 \hat{i} + \sin \theta_2 \hat{j} \right] + s \hat{i} \end{aligned} \quad (2)$$

y sus derivadas respectivamente:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}_1 &= l_1 \dot{\theta}_1 \left[-\sin \theta_1 \hat{i} + \cos \theta_1 \hat{j} \right] \\ \dot{\vec{r}}_2 &= l_2 \dot{\theta}_2 \left[-\sin \theta_2 \hat{i} + \cos \theta_2 \hat{j} \right]\end{aligned}\quad (3)$$

Por definición, el elemento cuadrado de un vector la norma al cuadrado, que es lo mismo que el producto interno de sí mismo.

$$\dot{\vec{r}}^2 = \langle \dot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}} \rangle \quad (4)$$

Con esto volvemos a la Ec. 1 y la redefinimos como:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \langle \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_1 \rangle + \frac{1}{2} m_2 \langle \dot{\vec{r}}_2, \dot{\vec{r}}_2 \rangle \quad (5)$$

Con lo anterior, ya es posible continuar a definir la energía potencial, que será de tipo gravitacional y elástica asociada al resorte. Para esto es necesario definir un vector \vec{g} como $-g\hat{j}$. Entonces la energía potencial se ve como:

$$V = m_1 \vec{g} \cdot \vec{r}_1 + m_2 \vec{g} \cdot \vec{r}_2 + \frac{1}{2} k [d - d_0]^2 \quad (6)$$

Donde se define a d_0 como la longitud natural del resorte (constante) y a d como la distancia entre las partículas.

$$d = \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\| \quad (7)$$

Usando las Ec. 5, Ec. 6 y Ec. 7 es posible obtener el Lagrangiano que está definido como $L = T - V$.

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_1 g l_1 \sin \theta_1 + m_2 g l_2 \sin \theta_2 \dots \\ &\dots - \frac{1}{2} k \left[\sqrt{l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + 2s(l_2 \cos \theta_2 - l_1 \cos \theta_1) + s^2} - d_0 \right]^2\end{aligned}\quad (8)$$

Pero para el primer problema $m_1 = m_2$ y $l_1 = l_2$. Por lo que la Ec. 8 puede ser reescrita como:

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{2} m l^2 [\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2] + m g l [\sin \theta_1 + \sin \theta_2] \dots \\ &\dots - \frac{1}{2} k \left[\sqrt{2l^2 [1 - \cos(\theta_2 - \theta_1)] + l s (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) + s^2} - d_0 \right]^2\end{aligned}\quad (9)$$

Ahora solamente se aplican las Ecuaciones de Euler-Lagrange¹ a la Ec. 9 para obtener las ecuaciones de movimiento del sistema, que son respectivamente:

$$\begin{aligned}m l^2 \ddot{\theta}_1 &= m g l \cos \theta_1 + \frac{1}{2} k [-2l^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + l s \sin \theta_1] \dots \\ &\dots \frac{\sqrt{2l^2 [1 - \cos(\theta_2 - \theta_1)] + l s (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) + s^2} - d_0}{\sqrt{2l^2 [1 - \cos(\theta_2 - \theta_1)] + l s (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) + s^2}}\end{aligned}\quad (10)$$

Ec. 10: Ecuación de movimiento con la coordenada generalizada θ_1 .

¹ $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta_i}$

$$\begin{aligned}
ml^2\ddot{\theta}_2 &= mgl \cos \theta_2 - \frac{1}{2}k[2l^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - ls \sin \theta_2] \dots \\
&\dots \frac{\sqrt{2l^2[1 - \cos(\theta_2 - \theta_1)] + ls(\cos \theta_2 - \cos \theta_1)] + s^2 - d_0}}{\sqrt{2l^2[1 - \cos(\theta_2 - \theta_1)] + ls(\cos \theta_2 - \cos \theta_1)] + s^2}}
\end{aligned} \tag{11}$$

Ec. 11: Ecuación de movimiento con la coordenada generalizada θ_2 .

Para tener un mayor análisis sobre la influencia de los parámetros y las condiciones iniciales es conveniente volver a escribir el lagrangiano. Centrándonos específicamente en las masas y las longitudes, consideremos que $m_2 = c_1 m$ y $l_2 = c_2 l$, esto nos permite tener mas control sobre estos parámetros y ver el impacto que tendrán en el movimiento resultante para poder compararlo con el caso en el que las masas son las mismas, en el que las distancias son las mismas, o en el que las distancias y las masas son las mismas. Además de comparar diferentes valores de c_1 y c_2 con las mismas condiciones iniciales.

Esto nos da como resultado el Lagrangiano:

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}c_1mc_2^2l^2\dot{\theta}_2^2 + mgl \sin \theta_1 + c_1mgc_2l \sin \theta_2 \dots \\
&\dots - \frac{1}{2}k \left[\sqrt{l^2[1 + c_2^2 - 2c_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)] + 2ls[c_2 \cos \theta_2 - \cos \theta_1] + s^2 - d_0} \right]^2
\end{aligned} \tag{12}$$

De aqui se obtendrán las nuevas ecuaciones de movimiento para analizar el comportamiento.

Ahora se hara una comparación con un sistema semejante pero con el resorte conectado a la mitad de las varillas. Donde la unica diferencia será la definicion de Ec. 7, que será de esta manera:

$$d = \left\| \left[\frac{\vec{r}_s}{2} + s\hat{i} \right] - \frac{\vec{r}_1}{2} \right\| = \sqrt{\frac{l^2}{2}[1 - \cos(\theta_2 - \theta_1)] + ls[\cos \theta_2 - \cos \theta_1] + s^2} \tag{13}$$

Utilizando la Ec. 9 y reemplazando por el nuevo d de la Ec. 13 obtenemos el Lagrangiano del nuevo sistema:

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}ml^2[\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2] + mgl[\sin \theta_1 + \sin \theta_2] \dots \\
&\dots - \frac{1}{2}k \left[\sqrt{\frac{l^2}{2}[1 - \cos(\theta_2 - \theta_1)] + ls[\cos \theta_2 - \cos \theta_1] + s^2 - d_0} \right]^2
\end{aligned} \tag{14}$$

Como se observa solo hay un pequeño cambio en una constante que deja a las ecuaciones de movimiento de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
ml^2\ddot{\theta}_1 &= mgl \cos \theta_1 + \frac{1}{2}k \left[-\frac{l^2}{2} \sin(\theta_2 - \theta_1) + ls \sin \theta_1 \right] \dots \\
&\dots \frac{\sqrt{\frac{l^2}{2}[1 - \cos(\theta_2 - \theta_1)] + ls[\cos \theta_2 - \cos \theta_1] + s^2 - d_0}}{\sqrt{\frac{l^2}{2}[1 - \cos(\theta_2 - \theta_1)] + ls[\cos \theta_2 - \cos \theta_1] + s^2}}
\end{aligned} \tag{15}$$

Ec. 15: Ecuación de movimiento con la coordenada generalizada θ_1 para el sistema con el resorte en la mitad de las varillas.

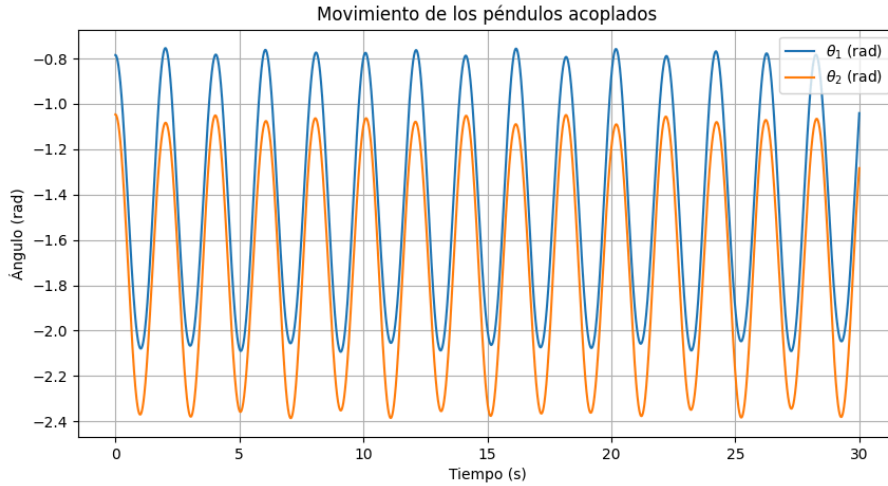
$$\begin{aligned}
ml^2\ddot{\theta}_2 = mgl \cos \theta_2 - \frac{1}{2}k \left[\frac{l^2}{2} \sin(\theta_2 - \theta_1) - ls \sin \theta_2 \right] \dots \\
\dots \frac{\sqrt{\frac{l^2}{2}[1 - \cos(\theta_2 - \theta_1)] + ls[\cos \theta_2 - \cos \theta_1] + s^2 - d_0}}{\sqrt{\frac{l^2}{2}[1 - \cos(\theta_2 - \theta_1)] + ls[\cos \theta_2 - \cos \theta_1] + s^2}}
\end{aligned} \tag{16}$$

Ec. 16: Ecuación de movimiento con la coordenada generalizada θ_2 para el sistema con el resorte en la mitad de las varillas.

A lo largo del desarrollo ha sido facil darse cuenta que los sistemas son dificiles de integrar al tener ecuaciones tan complejas es por esto que para terminar se va a hacer una aproximacion de angulos pequeños al lagrangiano original, de la forma $\theta_1 \ll 1$, $\theta_2 \ll 1$, $\sin \theta_1 \sim \theta_1$, $\sin \theta_2 \sim \theta_2$, $\cos \theta_1 \sim 1$ y $\cos \theta_2 \sim 1$. Con esto podemos comparar el grado de dificultad de encontrar y solucionar las ecuaciones de movimiento además de poder ver que tan valido es hacer este tipo de aproximaciones para este tipo de sistemas.

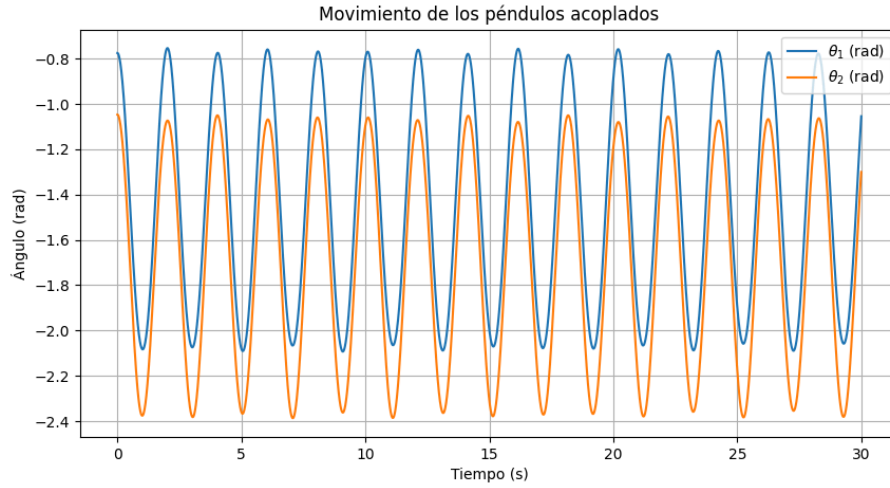
3. El experimento y los resultados

Una vez obtenidas las ecuaciones de movimiento Ec. 10 y Ec. 11, se hizo uso de un codigo en Python que a partir de unas condiciones iniciales dadas puede estimar la posición de las masas a lo largo del tiempo. Primero estableceremos los parametros que serán constantes durante todo el desarrollo, para este caso decidimos usar un resorte de constante $k = 20[N/m]$ y longitud natural de $0.6[m]$, una distancia entre pivotes de $1[m]$. Teniendo en cuenta o anterior la primera situacion que vamos a integrar es en la que ambas masas y ambas logitudes son iguales. De lo cual se obtuvo lo siguiente con condiciones iniciales de $\theta_1 = -\pi/4$, $\theta_2 = -\pi/3$, $\dot{\theta}_1 = 0$ y $\dot{\theta}_2 = 0$.

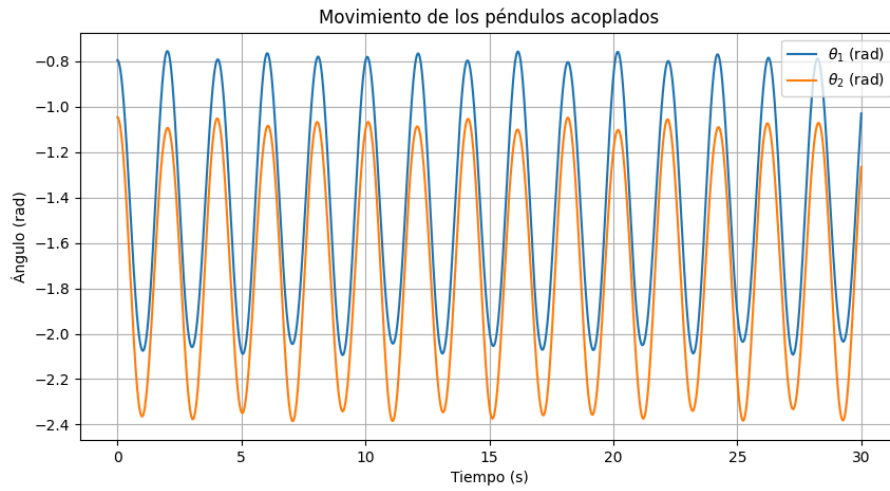


Gráfica 1: Valores de las coordenadas generalizadas en radianes con respecto al tiempo en segundos.

En esta gráfica no se puede observar nada fuera de lo comun, al agregar una pequeña variación a las condiciones iniciales de ± 0.01 [rad] en cualquiera de las coordenadas generalizadas (θ_1 , θ_2) se obtiene lo siguiente:



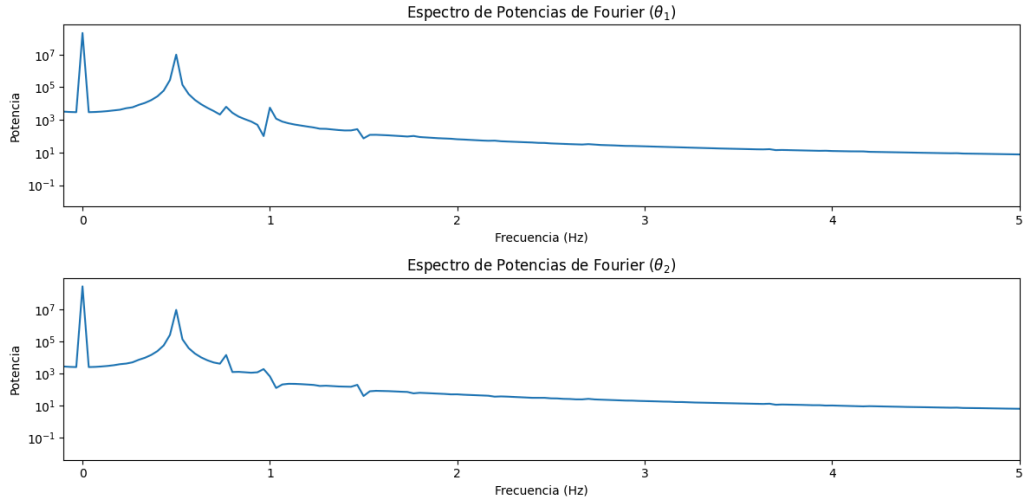
Gráfica 2: Valores de las coordenadas generalizadas en radianes con respecto al tiempo en segundos con una variación en la condición inicial θ_1 de $+0.01$.



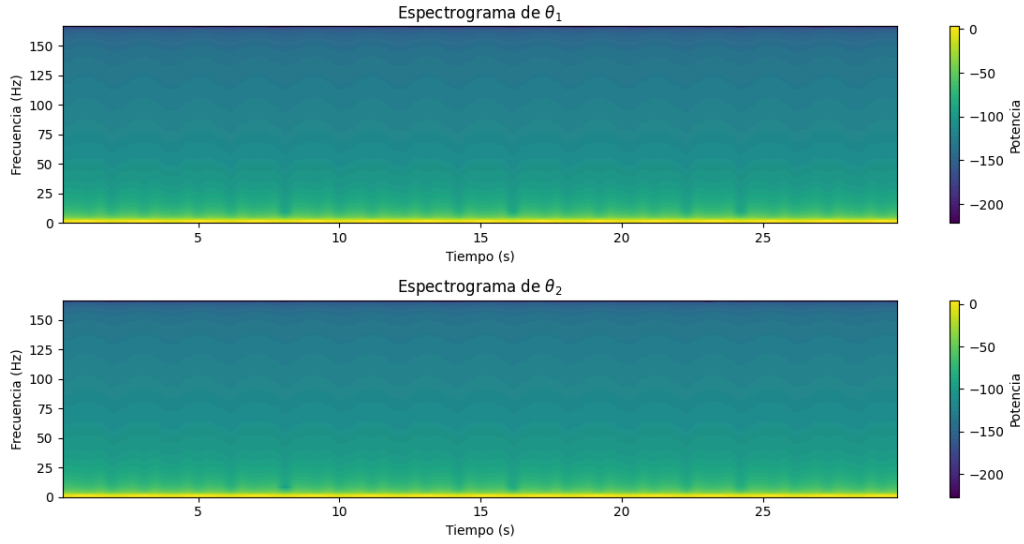
Gráfica 3: Valores de las coordenadas generalizadas en radianes con respecto al tiempo en segundos con una variación en la condición inicial θ_1 de -0.01 .

Como es posible observar no hay caos, ya que las coordenadas generalizadas se comportan de una manera muy semejante al hacer pequeñas variaciones en las condiciones iniciales (Mario, n.d.).

Por medio de un análisis de Fourier en la Gráfica 4 y la huella de un espectrograma en la Gráfica 5 se ve las mayores amplitudes se encuentran en las bajas frecuencias.

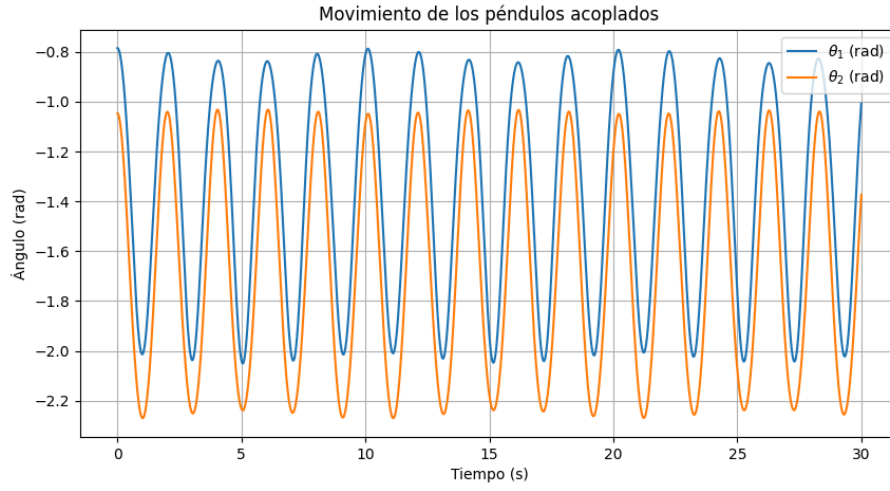


Gráfica 4: Espectro de potencias de Fourier del movimiento representado por la Gráfica 1

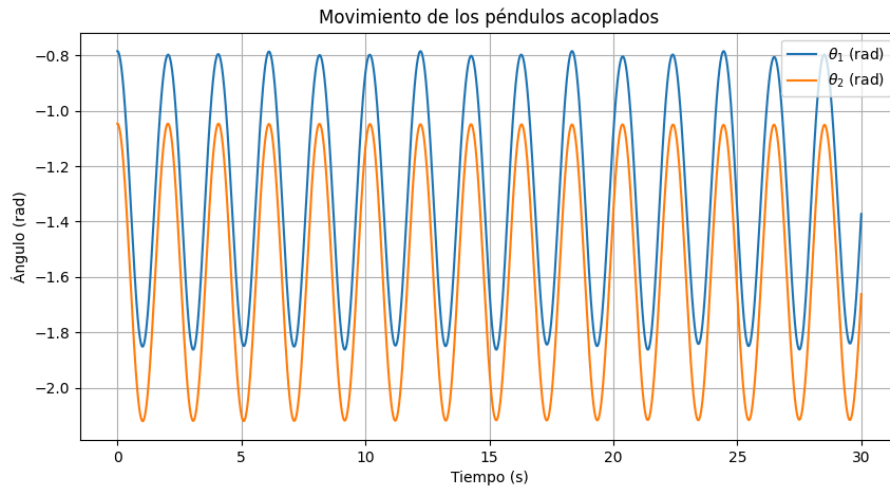


Gráfica 5: Espectrograma Gráfica 1

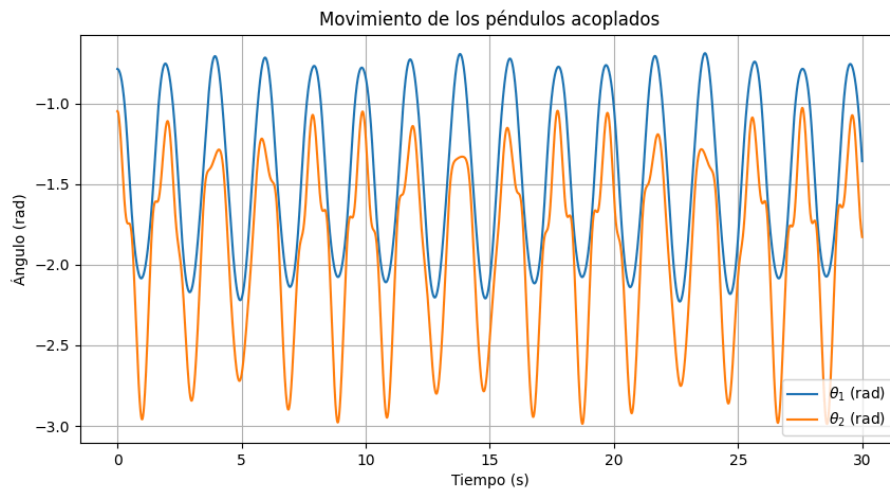
Ahora procedemos con la solución numérica del caso en que se definió el Lagrangiano con una relación entre las masas de la forma $m_2 = c_1 m$ usando las mismas condiciones iniciales de $\theta_1 = -\pi/4$, $\theta_2 = -\pi/3$, $\dot{\theta}_1 = 0$ y $\dot{\theta}_2 = 0$. Dando una grafica para ambas coordenadas en función del tiempo.



Gráfica 6: Valores de las coordenadas generalizadas en radianes con respecto al tiempo en segundos para las masas relacionadas con $c_1 = 2$.

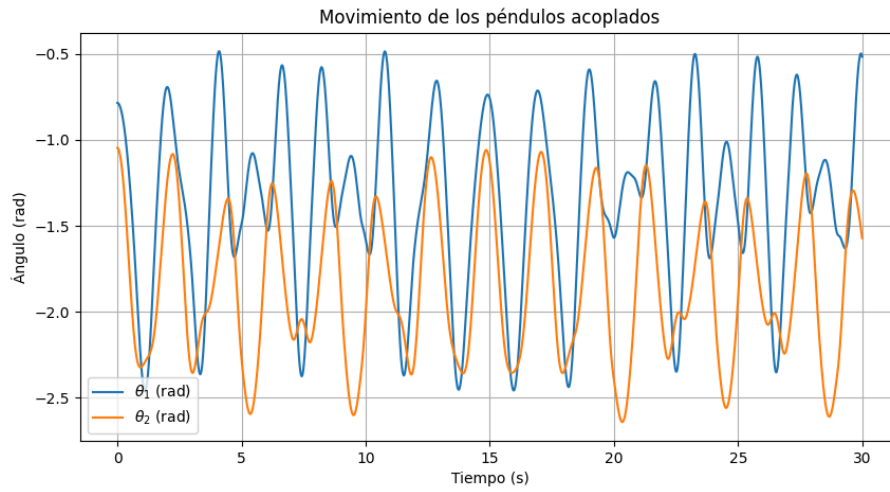


Gráfica 7: Valores de las coordenadas generalizadas en radianes con respecto al tiempo en segundos para las masas relacionadas con $c_1 = 20$.

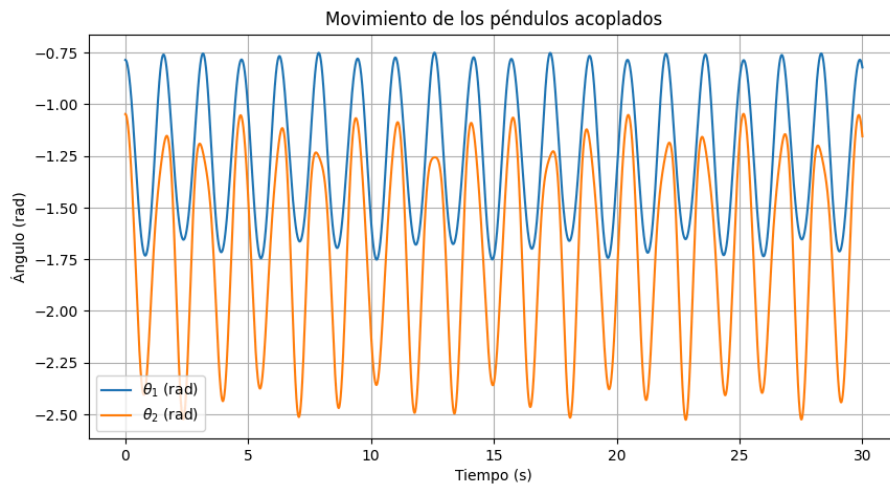


Gráfica 8: Valores de las coordenadas generalizadas en radianes con respecto al tiempo en segundos para las masas relacionadas con $c_1 = 0.2$.

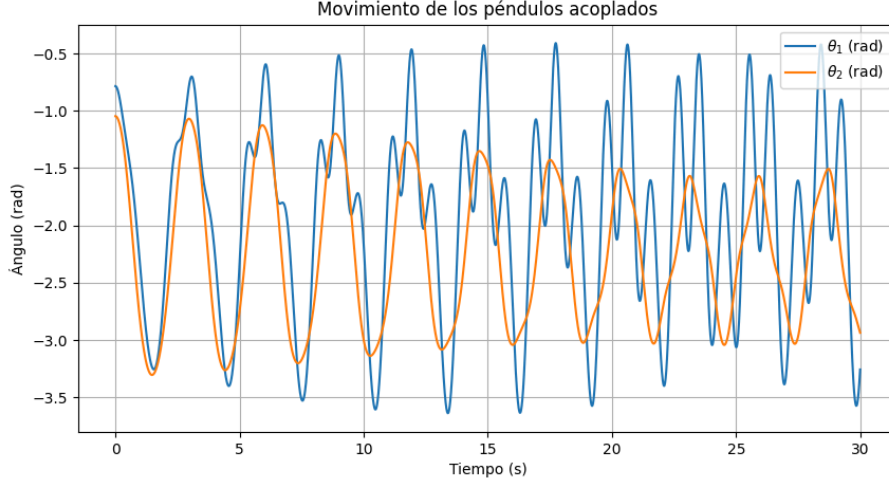
Continuando con la solución número para las diferencias de longitud generamos las gráficas de coordenadas en función del tiempo usando las mismas condiciones iniciales de $\theta_1 = -\pi/4$, $\theta_2 = -\pi/3$, $\dot{\theta}_1 = 0$ y $\dot{\theta}_2 = 0$.



Gráfica 9: Valores de las coordenadas generalizadas en radianes con respecto al tiempo en segundos para las longitudes relacionadas con $c_2 = 1.5$.

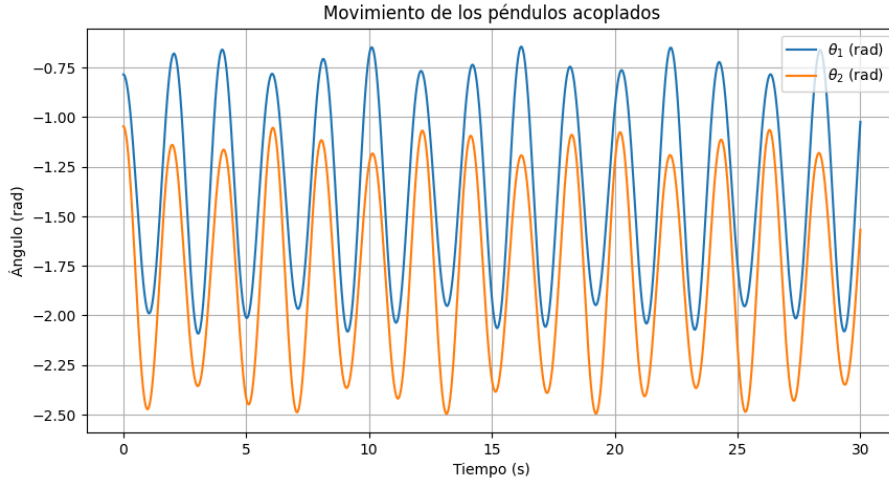


Gráfica 10: Valores de las coordenadas generalizadas en radianes con respecto al tiempo en segundos para las longitudes relacionadas con $c_2 = 0.5$.



Gráfica 11: Valores de las coordenadas generalizadas en radianes con respecto al tiempo en segundos para las longitudes relacionadas con $c_2 = 3$.

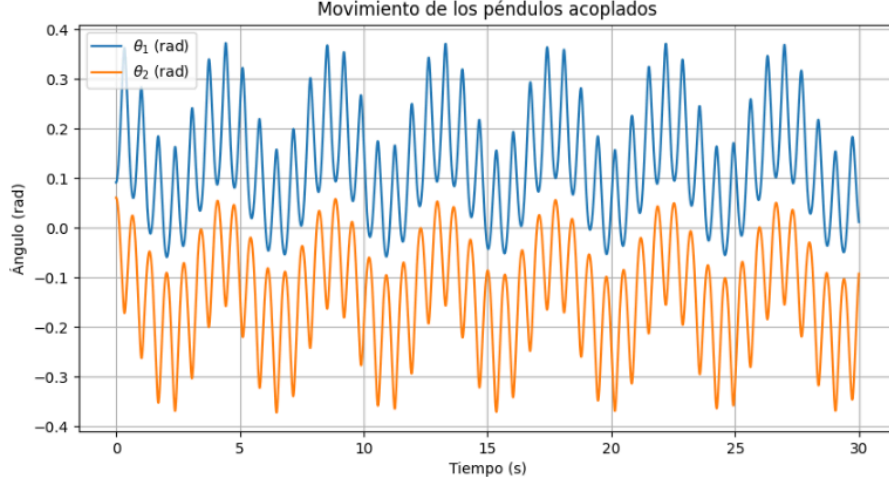
Ahora para el caso de cuando los péndulos están acoplados por el resorte en medio de las varilla, teniendo que cuenta un mismo valor para la masa y para la longitud, las soluciones numéricas a las ecuaciones de movimiento teniendo en cuenta las condiciones iniciales $\theta_1 = -\pi/4$, $\theta_2 = -\pi/3$, $\dot{\theta}_1 = 0$ y $\dot{\theta}_2 = 0$ son las siguientes:



Gráfica 12: Valores de las coordenadas generalizadas en radianes con respecto al tiempo en segundos para cuando el resorte se encuentra en medio de las varillas

En este caso de las varillas, a pesar de conservar las ecuaciones iniciales y tener unas masas y longitudes iguales podemos ver como la dinámica del sistema se mantuvo de alguna manera semejante, aquí es posible ver la estabilidad de este sistema.

Finalmente, tenemos que hacer la comparación del comportamiento de los sistemas anteriores con un nuevo sistema usando aproximación de ángulos pequeños. Para este caso se usó la condición inicial $\theta_1 = 0.0915$, $\theta_2 = 0.0607$, $\dot{\theta}_1 = 0$ y $\dot{\theta}_2 = 0$, además de esto se usó un lagrangiano distinto para estas aproximaciones, ya que el Lagrangiano original da problemas en el tiempo de ejecución. Para este lagrangiano las coordenadas generalizadas van con respecto a la vertical, y los vectores se definen como $r_1 = l[\sin \theta_1 \hat{i} - \cos \theta_1 \hat{j}]$ y $r_2 = l[\sin \theta_1 \hat{i} - \cos \theta_1 \hat{j}] + s\hat{i}$. Para el sistema tradicional de masas y longitudes iguales se llegó al siguiente resultado:



Gráfica 13: Valores de las coordenadas generalizadas en radianes con respecto al tiempo en segundos para aproximaciones de ángulos pequeños.

Para probar el nivel de caos del sistema vamos a añadir una variación a la condición inicial de $+0.01$ [Rad] a θ_1 y ver qué tanto cambia su comportamiento con respecto al caso anterior

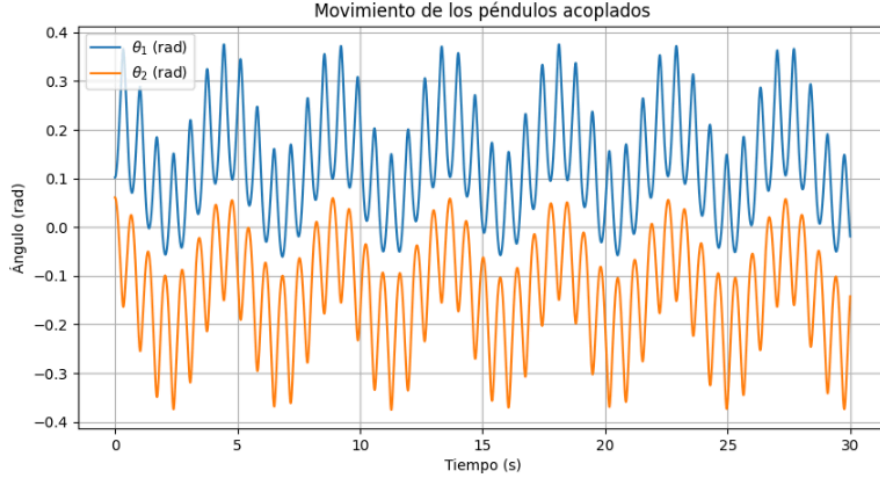


Figure 1: Valores de las coordenadas generalizadas en radianes con respecto al tiempo en segundos para aproximaciones de ángulos pequeños con una variación de $+0.01$ [Rad] a θ_1 .

Comparando las dos gráficas se puede observar claramente como no hay caos en este pequeño dominio.

A continuación se hará un pequeño repaso de las mismas variaciones de parámetros hechas al inicio pero ahora usando nuestra nueva aproximación.

Para una relación entre las masas de $m_2 = c_1 m$ podemos ver que

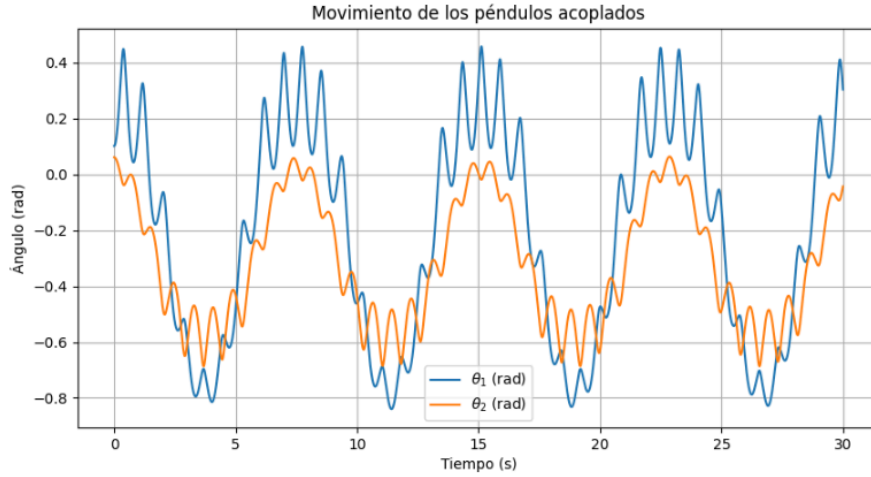


Figure 2: Ángulos en función del tiempo para el sistema con aproximación de ángulos pequeños usando un $c_1 = 3$.

Aquí de nuevo podemos ver como el nuevo sistema es bien comportado en estas aproximaciones.

Siguiendo con la relación de longitud tal que $l_2 = c_2 l$ tenemos

Por ultimo tenemos que comparar tambien el caso en que los pendulos estan acoplados por el resorte en medio de las varillas pero ahora analizandolo para esta aproximacion de angulos pequeños, usando los paraemtros de igual masa e igual longitud y con las condiciones iniciales de $\theta_1 = \pi/4$, $\theta_2 = \pi/6$, $\dot{\theta}_1 = 0$ y $\dot{\theta}_2 = 0$ tenemos que el movimiento de las masas se ve de la forma:

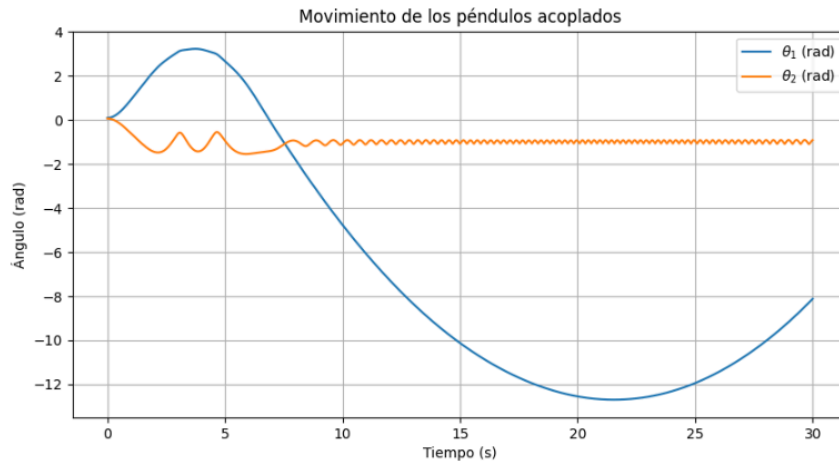


Figure 3: Ángulos en función del tiempo para el sistema con aproximación de ángulos pequeños cuando el resorte está conectado a mitad de las varillas.

Aquí podemos ver como incluso a pequeñas a aproximaciones, cambiar de esa forma el sistema genera grandes cambios en la dinámica y comportamiento de la masa.

4. Conclusiones y Recomendaciones

Del análisis de este sistema podemos extraer lo común que es encontrar sistemas caóticos en física debido al grado de dificultad que normalmente pueden llegar a tener las ecuaciones de movimiento, por lo que el uso de métodos numéricos es indispensable tanto para este como para la mayoría de sistemas, además se pudo ver como el caos se ve relajado no solo en las condiciones iniciales, sino también se ve muy reflejado en cualquier tipo de parámetros que pueda tener el

sistema. Por otro lado, se pudo ver como haciendo una serie de correctas aproximaciones, estos sistemas caóticos pueden recordar el orden, el orden por completo o por lo menos a nivel local para los primeros momentos del movimiento.

Referencias

- [1] C. Mario, *Mecánica Clásica*, Versión A-2016.