

6강. 수열, 급수의 극한

[연 습 문 제]

1. 함수 $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$ 가 $f \in \mathfrak{R}[0, 1]$ 임을

보이시오.

2. 다음 명제들의 반례를 제시하시오.

(1) $f \in \mathfrak{R}[a, b]$ 이면 $[a, b]$ 에서 f 의 불연속점의 개수는 유한개이다.

(2) $f, g \in \mathfrak{R}[a, b]$ 이면 $\int_a^b (f \times g) = \int_a^b f \times \int_a^b g$ 이다.

3. 다음 적분을 구하시오.

(1) $\int_0^\pi \sin x \, dx$ (2) $\int_0^\pi x \sin x \, dx$ (3) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2) \, dx$

4. 다음 특이적분이 가능한지 판별하고, 가능하다면 그 값을 구하시오.

(1) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \, dx$ (2) $\int_2^\infty \frac{1}{x \ln x} \, dx$

5. 다음 스틸체스적분을 구하시오.

(1) $\int_0^3 x^2 de^x$ (2) $\int_2^3 (x-1) d(x^2+2)$

— Index —

- 1. 수열과 극한
 - (1) 수열의 정의
 - (2) 수열의 극한
 - (3) 코시수열
- 2. 주요 정리
 - (1) 단조수렴정리
 - (2) B-W 정리
- 3. 급수와 극한
 - (1) 급수의 정의
 - (2) 급수의 극한
 - (3) 여러 가지 정리

1. 수열과 극한

(1) 수열의 정의

Def 1. [수열]

함수 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ 를 수열 $\{a_n\}$ 이라 하고
 $f(m) = a_m$ 을 $\{a_n\}$ 의 m 번째 항이라 한다.

Def 2. [부분수열]

$\{a_n\}$ 에 대하여 자연수 수열 $\{n_k\}$ 가

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$$

이면 $\{a_{n_k}\}$ 를 $\{a_n\}$ 의 부분수열이라 한다.

— Index —

- 1. 수열과 극한
 - (1) 수열의 정의
 - (2) 수열의 극한
 - (3) 코시수열
- 2. 주요 정리
 - (1) 단조수렴정리
 - (2) B-W 정리
- 3. 급수와 극한
 - (1) 급수의 정의
 - (2) 급수의 극한
 - (3) 여러 가지 정리

Def 3. [증가(감소)수열]

① $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq a_{n+1}$ 인 $\{n_k\}$ 를

단조증가수열이라 한다.

($a_n \geq a_{n+1}$ 이면 단조감소수열)

② $\forall n \in \mathbb{N}, a_n < a_{n+1}$ 인 $\{n_k\}$ 를

순증가수열이라 한다.

($a_n > a_{n+1}$ 이면 순감소수열)

Def 4. [유계인 수열]

$\exists M > 0$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq M$

이면 $\{a_n\}$ 을 유계인 수열이라 한다.

— Index —

- 1. 수열과 극한
 - (1) 수열의 정의
 - (2) 수열의 극한
 - (3) 코시수열
- 2. 주요 정리
 - (1) 단조수렴정리
 - (2) B-W 정리
- 3. 급수와 극한
 - (1) 급수의 정의
 - (2) 급수의 극한
 - (3) 여러 가지 정리

(2) 수열의 극한

Def 1. [수열의 수렴]

$a \in \mathbb{R}$ 이라 하자. $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ s.t.

$\forall n \geq N, |a_n - a| < \epsilon$

이 성립하면 $\{a_n\}$ 은 a 로 수렴한다고

하고 이를 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 로 표현한다.

Def 2. [수열의 발산]

적당한 $\epsilon > 0$ 와 모든 $N \in \mathbb{N}$ 에 대하여

$\exists n \geq N$ s.t. $|a_n - a| \geq \epsilon$

이면 $\{a_n\}$ 은 발산한다고 한다.

— Index —

1. 수열과 극한
 - (1) 수열의 정의
 - (2) 수열의 극한
 - (3) 코시수열
2. 주요 정리
 - (1) 단조수렴정리
 - (2) B-W 정리
3. 급수와 극한
 - (1) 급수의 정의
 - (2) 급수의 극한
 - (3) 여러 가지 정리

Thm 1. [수열 극한의 유일성]

$\{a_n\}$ 이 수렴하면 그 극한은 유일하다.

Thm 2. [수열 극한의 연산]

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 이고 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ 이면 다음이

성립한다.

- ① $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$ (복부호 동순)
- ② $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab$
- ③ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ (단 $b \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}, b_n \neq 0$)

— Index —

1. 수열과 극한
 - (1) 수열의 정의
 - (2) 수열의 극한
 - (3) 코시수열
2. 주요 정리
 - (1) 단조수렴정리
 - (2) B-W 정리
3. 급수와 극한
 - (1) 급수의 정의
 - (2) 급수의 극한
 - (3) 여러 가지 정리

(3) 코시수열

Def 1. [코시수열의 정의]

$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall m, n \in \mathbb{N}$ with $m \geq n > N, |a_m - a_n| < \epsilon$

가 성립하면 $\{a_n\}$ 을 코시수열이라 한다.

Thm 1. [코시수열과 수렴판정]

$\{a_n\}$ 이 코시수열이면 $\{a_n\}$ 은 수렴한다.

— Index —

1. 수열과 극한
 - (1) 수열의 정의
 - (2) 수열의 극한
 - (3) 코시수열
2. 주요 정리
 - (1) 단조수렴정리
 - (2) B-W 정리
3. 급수와 극한
 - (1) 급수의 정의
 - (2) 급수의 극한
 - (3) 여러 가지 정리

Def 2. [실수의 구성적 정의]

① 유리수 코시수열의 집합 \mathbb{R}^* 에 대하여 $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ 의 동치관계

$$E : \{a_n\} E \{b_n\} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$$

의 동치류 $[\{a_n\}]$ 을 실수라 하고, 이들의 집합을 \mathbb{R} 이라 표현한다.

② $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ 이면 $[\{a_n\}] = \alpha$ 라 한다.

Thm 2. [실수의 완비성]

\mathbb{R} 의 공집합이 아닌 부분집합이 위로 유계이면 그 부분집합은 상한을 갖는다.

— Index —

1. 수열과 극한
 - (1) 수열의 정의
 - (2) 수열의 극한
 - (3) 코시수열
2. 주요 정리
 - (1) 단조수렴정리
 - (2) B-W 정리
3. 급수와 극한
 - (1) 급수의 정의
 - (2) 급수의 극한
 - (3) 여러 가지 정리

2. 주요 정리

(1) 단조수렴정리

Thm 1. [단조수렴정리]

$\{a_n\}$ 이 단조증가(감소)하고 위(아래)로 유계이면 $\{a_n\}$ 은 수렴한다.

— Index —

1. 수열과 극한
 - (1) 수열의 정의
 - (2) 수열의 극한
 - (3) 코시수열
2. 주요 정리
 - (1) 단조수렴정리
 - (2) B-W 정리
3. 급수와 극한
 - (1) 급수의 정의
 - (2) 급수의 극한
 - (3) 여러 가지 정리

Thm 2. [축소구간정리]

모든 $n \in \mathbb{N}$ 과 $I_n = [a_n, b_n]$ 에 대하여

- ① $I_n = [a_n, b_n]$ 이 유계인 폐구간이고
 - ② $I_{n+1} \subset I_n$ 이며
 - ③ $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ 이면
- $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{\alpha\}$ 인 $\alpha \in \mathbb{R}$ 가 존재한다.

— Index —

1. 수열과 극한
 - (1) 수열의 정의
 - (2) 수열의 극한
 - (3) 코시수열
2. 주요 정리
 - (1) 단조수렴정리
 - (2) B-W 정리
3. 급수와 극한
 - (1) 급수의 정의
 - (2) 급수의 극한
 - (3) 여러 가지 정리

(2) B-W 정리

Thm 1. [샌드위치 정리]

$L \in \mathbb{R}$ 일 때 모든 $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 $a_n \leq b_n \leq c_n$ 이고 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$ 이다.

Thm 2. [볼차노-바이어슈트라스 정리]

$\{a_n\}$ 이 유계인 수열이면 $\{a_n\}$ 은 수렴하는 부분수열을 갖는다.

— Index —

- 1. 수열과 극한
 - (1) 수열의 정의
 - (2) 수열의 극한
 - (3) 코시수열
- 2. 주요 정리
 - (1) 단조수렴정리
 - (2) B-W 정리
- 3. 급수와 극한
 - (1) 급수의 정의
 - (2) 급수의 극한
 - (3) 여러 가지 정리

Cor. [최대 최소정리]

f 가 $[a, b]$ 에서 연속 $\Rightarrow \exists a_0, b_0 \in [a, b]$
 $s.t. \forall x \in [a, b], f(a_0) \leq f(x) \leq f(b_0)$

— Index —

- 1. 수열과 극한
 - (1) 수열의 정의
 - (2) 수열의 극한
 - (3) 코시수열
- 2. 주요 정리
 - (1) 단조수렴정리
 - (2) B-W 정리
- 3. 급수와 극한
 - (1) 급수의 정의
 - (2) 급수의 극한
 - (3) 여러 가지 정리

3. 급수와 극한
(1) 급수의 정의

Def 1. [급수]

수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

을 (무한)급수라 한다.

— Index —

- 1. 수열과 극한
 - (1) 수열의 정의
 - (2) 수열의 극한
 - (3) 코시수열
- 2. 주요 정리
 - (1) 단조수렴정리
 - (2) B-W 정리
- 3. 급수와 극한
 - (1) 급수의 정의
 - (2) 급수의 극한
 - (3) 여러 가지 정리

이때 a_n 을 급수의 n 번째 항이라 하며

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

을 급수의 부분합이라 한다.

Def 2. [재배열급수]

$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 가 전단사 함수일 때

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$$
을 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 재배열급수라 한다.

— Index —

1. 수열과 극한
 - (1) 수열의 정의
 - (2) 수열의 극한
 - (3) 코시수열
2. 주요 정리
 - (1) 단조수렴정리
 - (2) B-W 정리
3. 급수와 극한
 - (1) 급수의 정의
 - (2) 급수의 극한
 - (3) 여러 가지 정리

(2) 급수의 극한

Def 1. [급수의 수렴과 발산]

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 에 대한 부분합의 수열 $\{S_n\}$ 이

$S \in \mathbb{R}$ 로 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 S 로

수렴한다고 하고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ 로 표현한다.

만약 $\{S_n\}$ 이 어떤 실수 값으로 수렴하지 않으면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 발산한다고 한다.

— Index —

1. 수열과 극한
 - (1) 수열의 정의
 - (2) 수열의 극한
 - (3) 코시수열
2. 주요 정리
 - (1) 단조수렴정리
 - (2) B-W 정리
3. 급수와 극한
 - (1) 급수의 정의
 - (2) 급수의 극한
 - (3) 여러 가지 정리

Def 2. [절대수렴과 조건수렴]

$n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 $a_n \in \mathbb{R}$ 이라 하자.

① $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은

절대수렴한다고 한다.

② $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 은 발산하지만 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은

수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 조건수렴한다고 한다.

— Index —

1. 수열과 극한
 - (1) 수열의 정의
 - (2) 수열의 극한
 - (3) 코시수열
2. 주요 정리
 - (1) 단조수렴정리
 - (2) B-W 정리
3. 급수와 극한
 - (1) 급수의 정의
 - (2) 급수의 극한
 - (3) 여러 가지 정리

(3) 여러 가지 정리

Thm 1.

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 이고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$ 이면

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$ 이다. (복부호 동순)

Thm 2.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 이다.

— Index —

1. 수열과 극한
 - (1) 수열의 정의
 - (2) 수열의 극한
 - (3) 코시수열
2. 주요 정리
 - (1) 단조수렴정리
 - (2) B-W 정리
3. 급수와 극한
 - (1) 급수의 정의
 - (2) 급수의 극한
 - (3) 여러 가지 정리

Thm 3.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 와 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 임의의 재배열 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 절대수렴
 하고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$ 이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = L$ 이다.

[연 습 문 제]

1. 다음 명제들의 참, 거짓을 판별하고 이를 설명하시오.

- ① $\{a_n\}$ 이 유계 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 이 존재
- ② $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \vee \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$
- ③ $\{a_n\}$ 이 수렴하는 부분수열을 가지면 $\{a_n\}$ 은 유계이다.
- ④ $\{a_n\}$ 이 수렴 $\Rightarrow \{a_n\}$ 은 코시수열
- ⑤ $\forall n \in \mathbb{N}, |a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{n} \Rightarrow \{a_n\}$ 은 코시수열

- ⑥ $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 이 수렴 $\Rightarrow a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \dots$ 이 수렴
- ⑦ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha \wedge \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \alpha \beta$

2. $a_1 = 1$ 이고 $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$ 을 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하는지 판별하시오.

3. L 로 조건수렴하는 급수의 재배열급수의 값은 L 이 아닐 수도 있음을 급수 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ 와 이의 재배열급수 $(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}) + \dots$ 를 이용하여 보여시오.