

2강. 물리적 벡터

[연 습 문 제]

1. 다음 연립일차방정식을 가우스 조던 소거법 또는 역행렬을 이용하여 풀이하고, 해에 대해 탐구하시오.

$$(1) \begin{cases} 2x + 4y - 3z = 1 \\ x + y + 2z = 9 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ 2x - 3y + z = -10 \\ 3x - 3y + 6z = 15 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 2x + 4y - 2z = 6 \\ x + y + 2z = 9 \\ x + 2y - z = 4 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x + y + 2z + 4w + v = 0 \\ z + w + 2v = 0 \\ 2x + 2y - z + 3w = 0 \end{cases}$$

2. 역행렬이 존재하는 두 정사각행렬 A, B 에 대하여 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ 임을 보이시오.

3. 다음 행렬의 역행렬을 구하시오.

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

4. 정사각행렬 A 와 A 의 역행렬 A^{-1} 에 대하여

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \text{ 임을 증명하시오.}$$

5. 크래머 공식을 이용하여 다음 연립일차방정식의 해를 구하시오.

$$(1) \begin{cases} 5x + 3y + 2 = 0 \\ 4x - y + 5 = 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x + 2z = 6 \\ -x - 2y + 3z = 8 \\ -3x + 4y + 6z = 30 \end{cases}$$

— Index —

1. 벡터와 좌표계

- (1) 평면벡터
- (2) 공간벡터
- (3) n차원 벡터

2. 벡터의 연산

- (1) 노름
- (2) 선형결합
- (3) 스칼라 곱
- (4) 벡터 곱

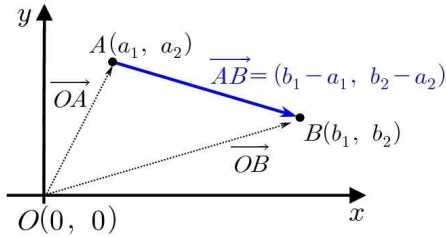
3. 벡터의 응용

- (1) 직선의 표현
- (2) 평면의 표현

1. 벡터와 좌표계

(1) 평면벡터

R^2 에서 크기(스칼라)와 방향의 의미를 모두 포함하는 표현 도구.



— Index —

1. 벡터와 좌표계

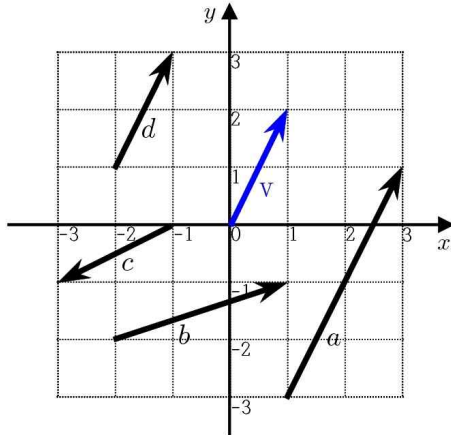
- (1) 평면벡터
- (2) 공간벡터
- (3) n차원 벡터

2. 벡터의 연산

- (1) 노름
- (2) 선형결합
- (3) 스칼라 곱
- (4) 벡터 곱

3. 벡터의 응용

- (1) 직선의 표현
- (2) 평면의 표현



Q. 벡터 v와 같은 벡터는? A. d

— Index —

1. 벡터와 좌표계

- (1) 평면벡터
- (2) 공간벡터
- (3) n차원 벡터

2. 벡터의 연산

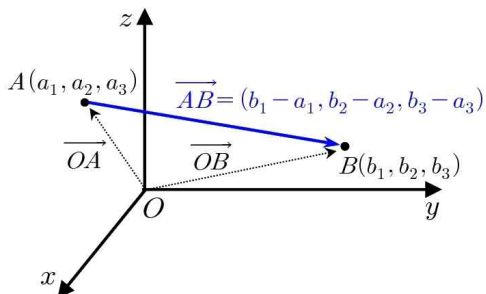
- (1) 노름
- (2) 선형결합
- (3) 스칼라 곱
- (4) 벡터 곱

3. 벡터의 응용

- (1) 직선의 표현
- (2) 평면의 표현

(2) 공간벡터

R^3 에서 크기와 방향의 의미를 모두 포함하는 표현 도구.



— Index —

1. 벡터와 좌표계

- (1) 평면벡터
- (2) 공간벡터
- (3) n차원 벡터

2. 벡터의 연산

- (1) 노름
- (2) 선형결합
- (3) 스칼라 곱
- (4) 벡터 곱

3. 벡터의 응용

- (1) 직선의 표현
- (2) 평면의 표현

(3) n차원 벡터

$$R^n \text{ 상의 벡터 } v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \\ = \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n)$$

- 영벡터 $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$
- 두 벡터 $v = (v_1, \dots, v_n), w = (w_1, \dots, w_n)$ 가 같다. $\Leftrightarrow v_1 = w_1, \dots, v_n = w_n$

— Index —

1. 벡터와 좌표계

- (1) 평면벡터
- (2) 공간벡터
- (3) n차원 벡터

2. 벡터의 연산

- (1) 노름
- (2) 선형결합
- (3) 스칼라 곱
- (4) 벡터 곱

3. 벡터의 응용

- (1) 직선의 표현
- (2) 평면의 표현

2. 벡터의 연산

(1) 노름

- 벡터의 크기 (또는 길이) 라고도 하며,

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

- 노름이 1인 벡터를 단위벡터라고 한다.

$$\text{※ 정규화 : } \frac{v}{\|v\|}$$

- $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0)$ 등을 표준단위벡터라고 한다.

— Index —

1. 벡터와 좌표계

- (1) 평면벡터
- (2) 공간벡터
- (3) n차원 벡터

2. 벡터의 연산

- (1) 노름
- (2) 선형결합
- (3) 스칼라 곱
- (4) 벡터 곱

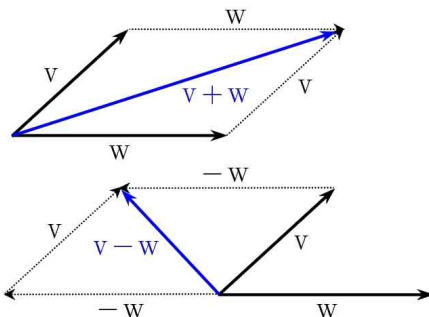
3. 벡터의 응용

- (1) 직선의 표현
- (2) 평면의 표현

(2) 선형결합

① 벡터의 덧셈과 뺄셈

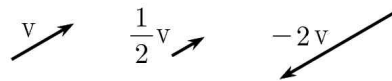
$$v \pm w = (v_1 \pm w_1, \dots, v_n \pm w_n)$$



— Index —

1. 벡터와 좌표계
 - (1) 평면벡터
 - (2) 공간벡터
 - (3) n차원 벡터
2. 벡터의 연산
 - (1) 노름
 - (2) 선형결합
 - (3) 스칼라 곱
 - (4) 벡터 곱
3. 벡터의 응용
 - (1) 직선의 표현
 - (2) 평면의 표현

② 벡터의 실수배

$$k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2, \dots, kv_n)$$


③ 선형(일차)결합

R^n 의 벡터 w 가 임의의 실수 k_1, k_2, \dots, k_r 에 대하여

$$w = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_r v_r$$

의 형태로 쓰여지면, w 를 v_1, \dots, v_r 의 선형(일차)결합이라 한다.

— Index —

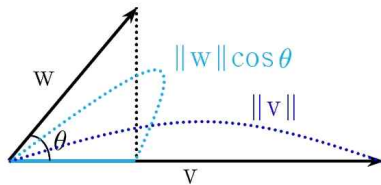
1. 벡터와 좌표계
 - (1) 평면벡터
 - (2) 공간벡터
 - (3) n차원 벡터
2. 벡터의 연산
 - (1) 노름
 - (2) 선형결합
 - (3) 스칼라 곱
 - (4) 벡터 곱
3. 벡터의 응용
 - (1) 직선의 표현
 - (2) 평면의 표현

(3) 스칼라 곱

한 벡터가 다른 벡터의 방향에 대해 가한 힘에 의해 변화된 스칼라(크기).
점곱 또는 내적.

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} &= \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \cos \theta \\ &= v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n \end{aligned}$$

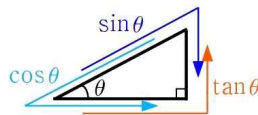
(θ 는 두 벡터 \mathbf{v}, \mathbf{w} 가 이루는 각)



— Index —

1. 벡터와 좌표계
 - (1) 평면벡터
 - (2) 공간벡터
 - (3) n차원 벡터
2. 벡터의 연산
 - (1) 노름
 - (2) 선형결합
 - (3) 스칼라 곱
 - (4) 벡터 곱
3. 벡터의 응용
 - (1) 직선의 표현
 - (2) 평면의 표현

※ 삼각함수 표



θ	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

— Index —

1. 벡터와 좌표계

- (1) 평면벡터
- (2) 공간벡터
- (3) n차원 벡터

2. 벡터의 연산

- (1) 노름
- (2) 선형결합
- (3) 스칼라 곱
- (4) 벡터 곱

3. 벡터의 응용

- (1) 직선의 표현
- (2) 평면의 표현

※ 벡터의 연산 성질

R^n 상의 벡터 u, v, w 와 스칼라 k, m 에 대하여 다음이 성립한다.

- | | |
|----------------------------------|---|
| Ⓐ $u+v=v+u$ | ㉠ $u \cdot v = v \cdot u$ |
| Ⓑ $(u+v)+w=v+(u+w)$ | ㉡ $\vec{0} \cdot u = u \cdot \vec{0} = 0$ |
| Ⓒ $u+\vec{0}=\vec{0}+u=u$ | ㉢ $u \cdot (v+w)$ |
| Ⓓ $u+(-u)=\vec{0}$ | $=u \cdot v+u \cdot w$ |
| Ⓔ $k(u+v)=ku+kv$ | ㉣ $(u+v) \cdot w$ |
| ㉠ $(k+m)u=ku+mu$ | $=u \cdot w+v \cdot w$ |
| ㉡ $k(mu)=(km)u$ | ㉤ $k(u \cdot v)=(ku) \cdot v$ |
| ㉢ $1u=u$ | $=u \cdot (kv)$ |
| ㉣ $0u=\vec{0}, k\vec{0}=\vec{0}$ | |

— Index —

1. 벡터와 좌표계

- (1) 평면벡터
- (2) 공간벡터
- (3) n차원 벡터

2. 벡터의 연산

- (1) 노름
- (2) 선형결합
- (3) 스칼라 곱
- (4) 벡터 곱

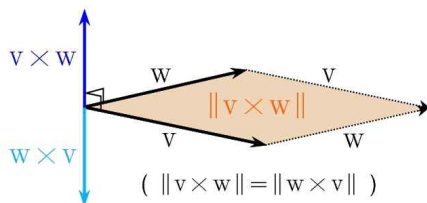
3. 벡터의 응용

- (1) 직선의 표현
- (2) 평면의 표현

(4) 벡터 곱

방향은 두 벡터에 동시에 수직이고,
크기는 두 벡터의 평행사변형의 면적인
 R^3 상의 벡터. 가위곱 또는 외적.

$$v \times w = \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right)$$



— Index —

1. 벡터와 좌표계

- (1) 평면벡터
- (2) 공간벡터
- (3) n차원 벡터

2. 벡터의 연산

- (1) 노름
- (2) 선형결합
- (3) 스칼라 곱
- (4) 벡터 곱

3. 벡터의 응용

- (1) 직선의 표현
- (2) 평면의 표현

※ 벡터 곱의 성질

R^3 상의 벡터 u, v, w 와 스칼라 k 에 대하여 다음이 성립한다.

- Ⓐ $u \times v = -(v \times u)$
- Ⓑ $u \times (v+w) = (u \times v) + (u \times w)$
- Ⓒ $(u+v) \times w = (u \times w) + (v \times w)$
- Ⓓ $k(u \times v) = (ku) \times v = u \times (kv)$
- ㉠ $u \times \vec{0} = \vec{0} \times u = \vec{0}$
- ㉡ $u \times u = \vec{0}$

— Index —

1. 벡터와 좌표계
 - (1) 평면벡터
 - (2) 공간벡터
 - (3) n차원 벡터
2. 벡터의 연산
 - (1) 노름
 - (2) 선형결합
 - (3) 스칼라 곱
 - (4) 벡터 곱
3. 벡터의 응용
 - (1) 직선의 표현
 - (2) 평면의 표현

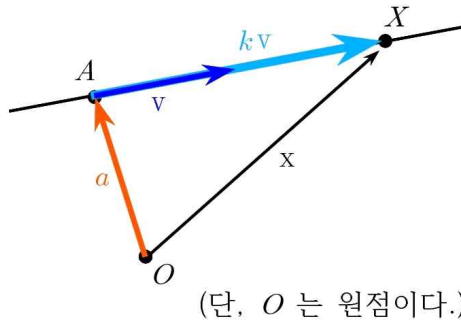
3. 벡터의 응용

(1) 직선의 표현

R^2 또는 R^3 에서 위치벡터가 a 인 점 A 를 지나며 방향벡터가 v 인 직선상의 임의의 점 X 의 위치벡터 x 는

$$x = a + kv$$

을 만족한다. (단, k 는 임의의 실수)



(단, O 는 원점이다.)

— Index —

1. 벡터와 좌표계
 - (1) 평면벡터
 - (2) 공간벡터
 - (3) n차원 벡터
2. 벡터의 연산
 - (1) 노름
 - (2) 선형결합
 - (3) 스칼라 곱
 - (4) 벡터 곱
3. 벡터의 응용
 - (1) 직선의 표현
 - (2) 평면의 표현

— Index —

1. 벡터와 좌표계
 - (1) 평면벡터
 - (2) 공간벡터
 - (3) n차원 벡터
2. 벡터의 연산
 - (1) 노름
 - (2) 선형결합
 - (3) 스칼라 곱
 - (4) 벡터 곱
3. 벡터의 응용
 - (1) 직선의 표현
 - (2) 평면의 표현

(2) 평면의 표현

R^3 에서 위치벡터가 a 인 점 A 를 지나며 법선벡터가 v 인 평면상의 임의의 점 X 의 위치벡터 x 는

$$(x - a) \cdot v = 0$$

을 만족한다.

※ 법선벡터는 평면상의 서로 다른 두 직선의 방향벡터들의 벡터 곱으로써 구하면 용이하다.

— Index —

1. 벡터와 좌표계

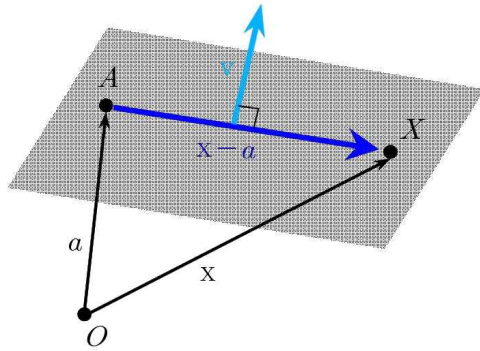
- (1) 평면벡터
- (2) 공간벡터
- (3) n차원 벡터

2. 벡터의 연산

- (1) 노름
- (2) 선형결합
- (3) 스칼라 곱
- (4) 벡터 곱

3. 벡터의 응용

- (1) 직선의 표현
- (2) 평면의 표현



(단, O 는 원점이다.)

[연 습 문 제]

1. 다음 두 벡터 u, v 의 사잇각 θ 에 대하여 $\cos \theta$ 의 값을 구하시오.
 - (1) $u = (-3, 5), v = (2, 7)$
 - (2) $u = (2, 1, 3), v = (1, 2, -4)$
 - (3) $u = (2, 0, 1, -2), v = (1, 5, -3, 2)$
2. 다음 두 벡터 u, v 에 의해 결정되는 평행사변형의 넓이를 구하시오.
 - (1) $u = (2, 3, 0), v = (-1, 2, -2)$
 - (2) $u = (-3, 1, -3), v = (6, -2, 6)$
3. 두 점 $(-1, -1, 0), (2, 0, 1)$ 을 지나는 직선이 세 점 $(1, -1, 0), (1, 2, 0), (0, 0, 2)$ 을 지나는 평면과 만나는 교점의 좌표를 구하시오.
4. 두 벡터 $u = (2, 0), v = (1, 3)$ 를 이용하여 행렬식 $\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 의 절댓값이 2차원 공간에서 어떤 기하적인 의미를 갖는지 고찰하시오.
5. 세 벡터 $u = (2, 0, 0), v = (0, 3, 0), w = (1, 1, 1)$ 를 이용하여 행렬식 $\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 의 절댓값이 3차원 공간에서 어떤 기하적인 의미를 갖는지 고찰하시오.