

7강. 최적화 문제

[연 습 문 제]

1. 세 벡터 $u = (1-i, 4+2i, 3)$, $v = (2, 3i, 4-i)$,
 $w = (2+i, -2i, 4-5i)$ 에 대하여
 $\overline{\langle iu, w \rangle} + \langle \|u\|v, u \rangle$ 를 계산하시오.
2. 모든 2×2 실행렬 A 의 대각성분들의 총합을 $tr(A)$ 라
 할 때, $tr(A)^2 - 4\det(A) < 0$ 이면 A 는 두 개의
 복소켈레 고윳값을 가짐을 증명하시오.
3. 에르미트행렬 $\begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}$ 을 유니터리 대각화하시오.

— Index —

1. 곡선 적합
 - (1) 보간법
 - (2) 최소제곱법
 - (3) 두 방법의 비교
2. 이차형식의 최적화
 - (1) 이차형식
 - (2) 제약된 극값

1. 곡선 적합

(1) 보간법

① 개념

주어진 특정 점들을 포함하는 함수를
 구하는 방법.

(정리) 좌표평면에 있는 임의의 서로 다른 n 개의
 점을 지나는 k 차 다항함수는 유일하게
 존재한다. (단, k 는 $k < n$ 인 자연수)

— Index —

1. 곡선 적합

(1) 보간법

(2) 최소제곱법

(3) 두 방법의 비교

2. 이차형식의
최적화

(1) 이차형식

(2) 제약된 극값

② 사례

네 점 $(1, 3), (2, -2), (3, -5), (4, 0)$ 을
모두 지나는 3차 함수

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

를 구하자. 우선 다음의 방정식을 세운다.

$$\text{Step 1} > \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

— Index —

1. 곡선 적합

(1) 보간법

(2) 최소제곱법

(3) 두 방법의 비교

2. 이차형식의
최적화

(1) 이차형식

(2) 제약된 극값

Step 2> 네 점을 대입하고 첨가행렬을
만든다.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & -2 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & -5 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 0 \end{pmatrix}$$

Step 3> 첨가행렬을 가우스-조던
소거법을 이용하여 풀이한다.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & -2 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & -5 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

— Index —

1. 곡선 적합

(1) 보간법

(2) 최소제곱법

(3) 두 방법의 비교

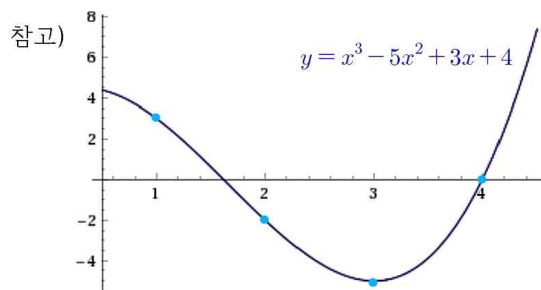
2. 이차형식의
최적화

(1) 이차형식

(2) 제약된 극값

Step 4> $a_0 = 4, a_1 = 3, a_2 = -5, a_3 = 1$

이므로 $f(x) = 4 + 3x - 5x^2 + x^3$
이다.



— Index —

1. 곡선 적합
 - (1) 보간법
 - (2) 최소제곱법
 - (3) 두 방법의 비교
2. 이차형식의 최적화
 - (1) 이차형식
 - (2) 제약된 극값

(2) 최소제곱법

① 개념

특정 점들을 포함하는 함수를 특정 지을 수 없을 때, 실제 해와의 오차 제곱 합이 최소가 되는 근사적인 해를 구하는 방법.

정리) 방정식 $Ax=B$ 을 변형한 방정식

$A^T Ax = A^T B$ (정규방정식)의 모든 해는 $Ax=B$ 의 최소제곱해이다.

— Index —

1. 곡선 적합
 - (1) 보간법
 - (2) 최소제곱법
 - (3) 두 방법의 비교
2. 이차형식의 최적화
 - (1) 이차형식
 - (2) 제약된 극값

② 사례

네 점 $(0,1), (1,3), (2,4), (3,4)$ 에 근사하는 일차함수 $f(x) = a_0 + a_1x$ 를 구하자. 우선 다음의 방정식을 세운다.

Step 1> $Ax=B$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

— Index —

1. 곡선 적합
 - (1) 보간법
 - (2) 최소제곱법
 - (3) 두 방법의 비교
2. 이차형식의 최적화
 - (1) 이차형식
 - (2) 제약된 극값

Step 2> 네 점을 대입하고 정규방정식

$A^T Ax = A^T B$ 으로부터 방정식

$x = (A^T A)^{-1} A^T B$ 을 구성한다.

$$A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$(A^T A)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore x = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

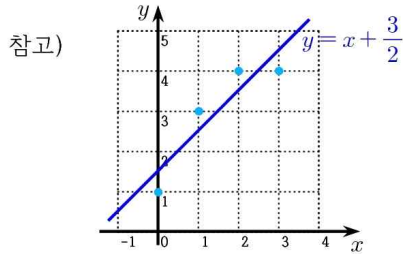
— Index —

1. 곡선 적합
 - (1) 보간법
 - (2) 최소제곱법
 - (3) 두 방법의 비교

2. 이차형식의 최적화
 - (1) 이차형식
 - (2) 제약된 극값

Step 3> $x = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ 이므로 구하고자

하는 함수는 $f(x) = \frac{3}{2} + x$ 이다.



— Index —

1. 곡선 적합
 - (1) 보간법
 - (2) 최소제곱법
 - (3) 두 방법의 비교

2. 이차형식의 최적화
 - (1) 이차형식
 - (2) 제약된 극값

③ n 차 일반화

m 개의 자료점 $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$ 에

대해 n 차 다항식 $y = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$

을 최소제곱법을 이용하여 근사하기

위해서는 $Ax = B$ 를

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & \dots & x_m^n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

로 설정하면 된다.

— Index —

1. 곡선 적합
 - (1) 보간법
 - (2) 최소제곱법
 - (3) 두 방법의 비교

2. 이차형식의 최적화
 - (1) 이차형식
 - (2) 제약된 극값

(3) 두 방법의 비교

	보간법	최소제곱법
목표	데이터를 모두 포함하는 함수	데이터의 경향을 반영하는 함수
데이터의 수	적을수록 좋음	많아도 무방함
정밀도	매우 높음	상대적으로 낮음
신축성	조절이 어려움	조절이 자유로움

— Index —

1. 곡선 적합
 - (1) 보간법
 - (2) 최소제곱법
 - (3) 두 방법의 비교

2. 이차형식의 최적화

- (1) 이차형식
- (2) 제약된 극값

2. 이차형식의 최적화

(1) 이차형식

가환환 K 위의 가군 V 에 대해 다음 세 조건을 만족시키는 함수 $Q: V \rightarrow K$

$$\forall k, l \in K, \forall u, v, w \in V,$$

- 1) $Q(kv) = k^2 Q(v)$
- 2) $Q(u+v+w) = Q(u+v) + Q(v+w) + Q(u+w) - Q(u) - Q(v) - Q(w)$
- 3) $Q(ku+lv) = k^2 Q(u) + l^2 Q(v) + klQ(u+v) - klQ(u) - klQ(v)$

— Index —

1. 곡선 적합
 - (1) 보간법
 - (2) 최소제곱법
 - (3) 두 방법의 비교

2. 이차형식의 최적화

- (1) 이차형식
- (2) 제약된 극값

ex 1> R^2 상의 일반적인 이차형식은 다음과 같다.

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + 2a_3 x_1 x_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ex 2> R^3 상의 일반적인 이차형식은 다음과 같다.

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + 2a_4 x_1 x_2 + 2a_5 x_1 x_3 + 2a_6 x_2 x_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_4 & a_5 \\ a_4 & a_2 & a_6 \\ a_5 & a_6 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

— Index —

1. 곡선 적합
 - (1) 보간법
 - (2) 최소제곱법
 - (3) 두 방법의 비교

2. 이차형식의 최적화

- (1) 이차형식
- (2) 제약된 극값

(2) 제약된 극값

① 개념

특정 제약 하에 결정되는 원하는 식의 최댓값 또는 최솟값.

정리) $n \times n$ 행렬 A 의 고윳값을 큰 순서대로

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 이라 하자. 이때 $\|v\| = 1$ 제약

하에 $v^T A v$ 의 최댓(솟)값은 λ_1 (λ_n)에

대응하는 단위고유벡터에서 존재한다.

— Index —

1. 곡선 적합
 - (1) 보간법
 - (2) 최소제곱법
 - (3) 두 방법의 비교
2. 이차형식의 최적화
 - (1) 이차형식
 - (2) 제약된 극값

② 사례

제약 $x^2 + y^2 = 1$ 하에서

$$z = 5x^2 + 5y^2 + 4xy$$

의 최댓값과 최솟값을 구하자. 우선 z 를 이차형식 $v^T A v$ 형태로 변환한다.

Step 1> $a_1 x^2 + a_2 y^2 + 2a_3 xy$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = v^T A v$$

$$\text{즉, } z = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

— Index —

1. 곡선 적합
 - (1) 보간법
 - (2) 최소제곱법
 - (3) 두 방법의 비교
2. 이차형식의 최적화
 - (1) 이차형식
 - (2) 제약된 극값

Step 2> 행렬 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ 의 고윳값과

고유벡터를 구한다.

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 7 & v_1 = (1, 1) \\ \lambda_2 = 3 & v_2 = (-1, 1) \end{cases}$$

Step 3> 고유벡터를 정규화한다.

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 7 & v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ \lambda_2 = 3 & v_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \end{cases}$$

— Index —

1. 곡선 적합
 - (1) 보간법
 - (2) 최소제곱법
 - (3) 두 방법의 비교
2. 이차형식의 최적화
 - (1) 이차형식
 - (2) 제약된 극값

Step 4> 따라서 $(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

일 때 z 는 최댓값 7을 갖고,

$(x, y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ 일 때

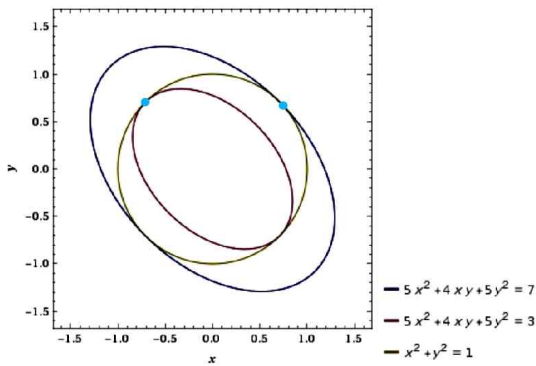
z 는 최솟값 3을 갖는다.

※ 물론 $v_1 = (-1, -1)$, $v_2 = (1, -1)$ 등으로 설정해도 무방하며, 최댓(솟)값은 변하지 않는다.

— Index —

1. 곡선 적합
 - (1) 보간법
 - (2) 최소제곱법
 - (3) 두 방법의 비교
2. 이차형식의 최적화
 - (1) 이차형식
 - (2) 제약된 극값

참고)



[연 습 문 제]

1. 다음 물음에 답하시오.
 - (1) 세 점 $(0, -1)$, $(1, 2)$, $(-1, 0)$ 을 지나는 이차함수를 구하시오.
 - (2) 네 점 $(-1, -2)$, $(0, -4)$, $(1, 0)$, $(2, 16)$ 을 지나는 삼차함수를 구하시오.
2. 최소제곱법을 이용하여 다음 물음에 답하시오.
 - (1) 세 점 $(0, 0)$, $(2, -1)$, $(3, 4)$ 에 근사한 일차함수를 구하시오.
 - (2) 네 점 $(1, 6)$, $(2, 1)$, $(-1, 5)$, $(-2, 2)$ 에 근사한 이차함수를 구하시오.
3. 제약조건 $x^2 + y^2 = 1$ 하에서 $4x^2 + 2y^2$ 의 최댓값과 최솟값을 구하고, 그 때의 x 와 y 의 값을 각각 구하시오.
4. 제약조건 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 하에서 $x^2 - 3y^2 + 8z^2$ 의 최댓값과 최솟값을 구하고, 그때의 x 와 y 의 값을 각각 구하시오.