1.(1).Thm1. 사상 $f : X \to Y$ 에 대하여 다음 두 명제는 동치이다.

① f 는 연속사상이다

② Y 의 임의의 열린집합 V 의 역상 $f^{-1}(V)$가 X 에서 열린집합이다.

증명>

두 위상공간을 $(X,\ \mathfrak{I}_X)$, $(Y,\ \mathfrak{I}_Y)$라 하자.

① → ②

1) $f^{-1}(V) = \varnothing$ 인 경우. : $f^{-1}(V) \in \mathfrak{I}_X$ ($\because \varnothing \in \mathfrak{I}_X$)

2) $f^{-1}(V) \neq \varnothing$ 인 경우.

- $\forall x \in f^{-1}(V)$, $\exists\, U_x \in \mathfrak{I}_X$ $s.t.$ $(x \in U_x) \wedge (f(U_x) \subset V)$ ($\because$연속의 정의)
  $\therefore$ $f^{-1}(V) \subset U_x$
- $f(U_x) \subset V \Rightarrow U_x \subset f^{-1}(V)$

그러므로 $f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U_x \in \mathfrak{I}_X$

② → ①

- For $x \in X$, let $f(x) \in \mathfrak{I}_Y$
  Then $f^{-1}(V) \in \mathfrak{I}_X$ ($\because$가정②에 의해)
- let $f^{-1}(V) = U$
  Then $f(U) = V \Rightarrow f(U) \subset V$ ∎

1.(1).Cor. $f : X \to Y$ 는 연속사상이다.

$\Leftrightarrow$ Y 의 임의의 닫힌집합 C 의 역상 $f^{-1}(C)$가 X 에서 닫힌집합이다.

증명>

두 위상공간을 $(X,\ \mathfrak{I}_X)$, $(Y,\ \mathfrak{I}_Y)$라 하자.

($\Rightarrow$) Pick 닫힌집합 $C \subset Y \Rightarrow C^c \in \mathfrak{I}_Y$

$\Rightarrow f^{-1}(C^c) \in \mathfrak{I}_X$ ($\because f$가 연속)

$\Rightarrow (f^{-1}(C^c))^c = f^{-1}(C)$: closed in X

($\Leftarrow$) 가정에 의해 $\forall$closed $C \subset Y$, $f^{-1}(C)$ is closed in X

$\therefore$ $C^c \in \mathfrak{I}_Y \wedge (f^{-1}(C))^c = f^{-1}(C^c) \in \mathfrak{I}_Y$

그러므로 1.(1).Thm1. 에 의해 f 는 연속사상이다. ∎

3.(1).Thm. 두 위상공간 $(X,\ \mathfrak{I}_X)$, $(Y,\ \mathfrak{I}_Y)$의 기저를 각각 $\mathscr{B}_X$, $\mathscr{B}_Y$ 라 할 때 집합족

$$\mathfrak{C} = \{U \times V \mid U \in \mathscr{B}_X,\ V \in \mathscr{B}_Y\}$$

는 $X \times Y$ 의 기저이다. [참고) $\mathfrak{C}$ 는 C의 흘림체]

증명>

- $\forall (x,\ y) \in X \times Y$, $\exists\, U \in \mathscr{B}_X,\ V \in \mathscr{B}_Y$ $s.t.$ $x \in U,\ y \in V$
  $\therefore$ $\exists\, U \times V \in \mathfrak{C}$ $s.t.$ $(x,\ y) \in U \times V$
- $\forall\, U_1 \times V_1,\ U_2 \times V_2 \in \mathfrak{C}$, $\forall (x,\ y) \in (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)$,
  $(x,\ y) \in (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$
  $\therefore$ $x \in U_1 \cap U_2,\ y \in V_1 \cap V_2$
- $\mathscr{B}_X$와 $\mathscr{B}_Y$가 기저이므로, $\exists\, U_3 \in \mathscr{B}_X,\ V_3 \in \mathscr{B}_Y$ $s.t.$
  $x \in U_3 \subset U_1 \cap U_2,\ y \in V_3 \subset V_1 \cap V_2$
  $\therefore$ $\exists\, U_3 \times V_3 \in \mathfrak{C}$ $s.t.$ $(x,\ y) \in U_3 \times V_3 \subset (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)$ ∎