Thm. $\{a_n\}$이 코시수열이면 $\{a_n\}$은 수렴한다.

Lemma. $\{a_n\}$이 코시수열이면 $\{a_n\}$은 유계이다.

●For $\epsilon = 1(>0)$, $\exists N \in \mathbb{N}$ $s.t.$ $\forall m, n \ge N$, $|a_n - a_m| < 1$ ($\because \{a_n\}$이 코시수열)

$\Rightarrow$ $\forall n \ge N$, $|a_n - a_N| < 1$

$\Rightarrow$ $|a_n| - |a_N| < 1$ (삼각부등식)

$\Rightarrow$ $|a_n| < 1 + |a_N|$

●Let $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{N-1}|, 1 + |a_1|\}$

Then $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \le M$ ■

●$\forall \epsilon > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ $s.t.$ $\forall k, m \ge N_1$, $|a_k - a_m| < \dfrac{\epsilon}{2}$ ($\because \{a_n\}$이 코시수열)

●$\{a_n\}$이 코시수열 $\Rightarrow$ $\{a_n\}$은 유계 (Lemma)

$\Rightarrow$ $\{a_n\}$은 수렴하는 부분수열 $\{a_{n_k}\}$를 갖는다. (B-W정리)

$\therefore$ $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha$ 라 하면, $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ $s.t.$ $\forall k \in \mathbb{N}$ $with$ $k \ge N_2$, $|a_{n_k} - a| < \dfrac{\epsilon}{2}$

●Let $N = \max\{N_1, N_2\}$. Then $\forall k \in \mathbb{N}$, $n_k \ge k$ $\wedge$ $\forall k \in \mathbb{N}$ $with$ $k \ge N$,

$$|a_k - a| \le |a_k - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \ ■$$

Thm. [사잇값(중간값) 정리]

f가 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a) < f(b)$

$\Rightarrow$ $\exists c \in [a, b]$ $s.t.$ $f(a) < p < f(b)$, $f(c) = p$

● $A = \{x \in [a, b] \mid f(x) \le p\}$ 라 하자.

● $a \in A$ 이므로 $A \ne \varnothing$ 이고, b는 A의 상계 $\Rightarrow$ $\exists c \in \mathbb{R}$ $s.t.$ $\sup A = c$ $with$ $c \le b$ ($\because$완비성 공리)

$\therefore$ $\exists \{x_n\} \subset A$ $s.t.$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$

● $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 $x_n \in A$ 이므로 $f(x_n) \le p$

● f가 $x = c$ 에서 연속이므로 $f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \le p$

● $f(c) < p$ 라 가정하자. 그러면 $\epsilon = \dfrac{p - f(c)}{2} (>0)$ 에 대하여 f는 $x = c$ 에서 연속이므로

$\exists \delta > 0$ $s.t$ $\forall x \in [a, b]$ $with$ $|x - c| < \delta$, $|f(x) - f(c)| < \epsilon$

$\therefore$ $\forall x \in [a, b]$ $with$ $c < x < c + \delta$, $f(x) < f(c) + \epsilon = f(c) + \dfrac{p - f(c)}{2} = \dfrac{f(c) + p}{2} < p$

: $\sup A = c$ 임에 모순!

그러므로 $f(c) = p$ ■

Thm. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 이고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$ 이면 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$ 이다.

●Let $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

Then $\lim_{n\to\infty} S_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} T_n = \beta$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty}(S_n + T_n) = \alpha + \beta$

$\therefore$ $S_n + T_n = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)$

$\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty}(S_n + T_n) = \alpha + \beta$ ■