※ 과제풀이 1-(1) 에서 $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$ 에 대한 해법은 야매에 가깝습니다. 보다 좋은 유도법은 로피탈의 정리를 이용한 방법으로, $\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+x}\frac{-x}{n^2}(-n^2)=x$ 임을 이용하여 $x=-1$ 일 때 e^{-1} 임을 유도할 수 있습니다.

Lemma. 함수 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n$ 의 수렴반지름이 R 이면 함수 f는 구간 $(c-R,\ c+R)$ 에서 무한번 미분가능하다.

- 7강 3.(3).Thm3 에 의해 $k=1$ 일 때 명제는 참이다.
- k일 때 명제가 참이라 가정하자. 즉, $f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!}a_n(x-c)^{n-k}$
- $\forall x\in(c-R,\ c+R)$, $f^{(k+1)}(x)=\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!}a_n(x-c)^{n-k}\right)$

$$= \sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{n!}{(n-k-1)!}a_n(x-c)^{n-k-1}$$

이므로 $k+1$일 때도 명제는 참이다. ■ (수학적 귀납법)

Thm. 함수 f가 구간 I에서 해석적이면 무한번 미분가능하다.

- $c\in I$라 하자.

함수 f가 구간 I에서 해석적 $\Rightarrow$ $\exists\,\delta>0$ $s.t.$ $\forall x\in(c-\delta,\ c+\delta)$, $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n$

- Lemma 에 의해 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n$ 는 수렴구간에서 무한번 미분가능하므로 f도 $x=c$에서 무한번 미분가능하다.
- c는 I의 임의의 점이므로 f는 I에서 무한번 미분가능하다. ■

참고) 무한번 미분가능하지만 해석적이지 않은 함수.

함수 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$ 는 $(-\infty,\ \infty)$에서 무한번 미분가능하지만 $x=0$에서 해석적이지 않음. 증명은 여러분의 몫 ^^