6강. 복소벡터공간

[연 습 문 제]

1. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) A를 대각화하는 행렬 P를 구하고 대각행렬 $B=P^{-1}AP$ 를 구하시오.

(2) 두 행렬 A, B에 대하여 본문에 제시된 10가지 닮음 불변량을 각각 확인하시오.

2. 행렬 $M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬 $3M^5-5M^4$ 을 C-H 정리를 이용하여 구하시오.

1. 복소벡터공간

(1) 정의

복소수체 $\mathbb{C}$에 대한 가군, 즉, 적당한 집합 V에 대해 벡터공간 $(V, \mathbb{C}, +, \bullet)$을 복소벡터공간이라 한다.

또한 모든 복소 n-튜플 $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$의 집합을 복소 n-공간이라 하고 $\mathbb{C}^n$ 으로 표시한다.

(2) 복소켤레

$\mathbb{C}^n$의 임의의 벡터

$$\begin{aligned} \mathrm{v} &= (v_1, v_2, \cdots, v_n) \\ &= (a_1 + b_1 i, a_2 + b_2 i, \cdots, a_n + b_n i) \\ &= (a_1, \cdots, a_n) + i(b_1, \cdots, b_n) \\ &= \mathrm{Re}(\mathrm{v}) + i\,\mathrm{Im}(\mathrm{v}) \end{aligned}$$

에 대하여 v 의 복소켤레

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{v}} &= (\overline{v_1}, \overline{v_2}, \cdots, \overline{v_n}) \\ &= \mathrm{Re}(\mathrm{v}) - i\,\mathrm{Im}(\mathrm{v}) \end{aligned}$$

— Index —
1. 복소벡터공간
(1) 정의
(2) 복소켤레
(3) 대수적 성질
2. 복소내적공간
(1) 정의
(2) 성질
3. 고윳값과 벡터
4. 유니터리 대각화
(1) 용어의 정의
(2) 유니터리 대각화

ex 1) $\mathrm{v} = (1+i, -i, 3, 3i)$ 에 대하여

$\mathrm{Re}(\mathrm{v})$, $\mathrm{Im}(\mathrm{v})$, $\overline{\mathrm{v}}$ 를 각각 구하시오.

ex 2) $A = \begin{pmatrix} 1-i & 2i \\ -1 & 3+2i \end{pmatrix}$ 에 대하여

$\overline{A}$, $\det(\overline{A})$ 를 각각 구하시오.

— Index —
1. 복소벡터공간
(1) 정의
(2) 복소켤레
(3) 대수적 성질
2. 복소내적공간
(1) 정의
(2) 성질
3. 고윳값과 벡터
4. 유니터리 대각화
(1) 용어의 정의
(2) 유니터리 대각화

(3) 대수적 성질

① $\mathbb{C}^n$의 벡터 u, v 와 스칼라 k 에 대해

1) $\overline{\overline{\mathrm{u}}} = \mathrm{u}$

2) $\overline{k\mathrm{u}} = \overline{k}\,\overline{\mathrm{u}}$

3) $\overline{\mathrm{u} \pm \mathrm{v}} = \overline{\mathrm{u}} \pm \overline{\mathrm{v}}$ (복부호 동순)

② $m \times k$ 행렬 A와 $k \times n$ 행렬 B에 대해

1) $\overline{\overline{A}} = A$

2) $\left(\overline{A^T}\right) = \left(\overline{A}\right)^T$

3) $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$

2. 복소내적공간

(1) 정의

복소벡터공간 $(V, \mathbb{C}, +, \cdot)$ 의 두 벡터 $\mathrm{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$, $\mathrm{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ 의 내적 $\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ 은

$$\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle = \mathrm{u} \cdot \mathrm{v} = u_1 \overline{v_1} + u_2 \overline{v_2} + \cdots + u_n \overline{v_n}$$

로 정의한다. 또한 내적이 정의되어 있는 복소벡터공간을 복소내적공간이라 한다.

(2) 성질

복소내적공간의 세 벡터 u, v, w 와 스칼라 k 에 대해 다음 성질이 만족한다.

1) $\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle = \overline{\langle \mathrm{v}, \mathrm{u} \rangle}$

2) $\langle \mathrm{u} + \mathrm{v}, \mathrm{w} \rangle = \langle \mathrm{u}, \mathrm{w} \rangle + \langle \mathrm{v}, \mathrm{w} \rangle$
   $\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} + \mathrm{w} \rangle = \langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle + \langle \mathrm{u}, \mathrm{w} \rangle$

3) $\langle k\mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle = k \langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle$
   $\langle u, k\mathrm{v} \rangle = \overline{k} \langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle$

4) $\mathrm{v} \neq \vec{0}$ 일 때 $\langle \mathrm{v}, \mathrm{v} \rangle > 0$

3. 고윳값과 벡터

① 정의

복소정사각행렬 A에 대하여 고유방정식 $\det(\lambda I - A) = 0$ 의 복소해 λ를 A의 복소고윳값이라 한다.

또한 $A\mathrm{v} = \lambda \mathrm{v}$ 를 만족시키는 모든 벡터 v의 집합을 A의 고유공간, 고유공간의 영벡터가 아닌 벡터를 A의 복소고유벡터라고 한다.

② 정리

λ가 실 정사각행렬 A의 고윳값이고 v는 이에 대응하는 고유벡터이면, $\overline{\lambda}$또한 A의 고윳값이며 $\overline{\mathrm{v}}$는 이에 대응하는 고유벡터이다.

4. 유니터리 대각화

(1) 용어의 정의

① 켤레전치행렬

복소행렬 A의 전치행렬을 구한 다음 각 성분을 켤레인 복소수로 바꾼 행렬 A^H를 A의 켤레전치행렬 또는 에르미트 전치행렬이라 한다.

※ 스칼라 k와 $m\times r$ 행렬 A, $r\times n$ 행렬 B에 대해 대하여 다음이 성립한다.

1) $(A^H)^H = A$

2) $(A\pm B)^H = A^H \pm B^H$ (복부호 동순)

3) $(kA)^H = \overline{k}A^H$

4) $(AB)^H = B^H A^H$

② 에르미트행렬

$A = A^H$ 가 성립하는 복소정사각행렬 A를 에르미트행렬이라 한다.

③ 유니터리행렬

복소정사각행렬 A의 역행렬 A^{-1} 에 대하여 $A^{-1} = A^H$ 가 성립하는 행렬 A를 유니터리행렬이라 한다.

④ 정규행렬

$AA^H = A^H A$ 가 성립하는 복소정사각행렬 A를 정규행렬이라 한다.

에르미트행렬, 유니터리행렬 등이 이에 해당한다.

(2) 유니터리 대각화

① 정의

$P^H A P = D$ 가 복소대각행렬이 되는 유니터리행렬 P가 존재하면 복소정사각행렬 A는 유니터리 대각화가능하다고 한다.

또한 이러한 임의의 행렬 P는 A를 유니터리 대각화한다고 한다.

② 정리

유니터리 대각화 가능한 행렬은 정규행렬이며, 그 역도 성립한다.
즉 정규행렬은 유니터리 대각화 가능하다.

③ 에르미트행렬 A의 유니터리 대각화 과정

Step 1.
A의 모든 고유공간의 기저를 구한다.

Step 2.
고유공간의 정규직교기저를 구한다.

Step 3.
기저벡터를 열벡터로 하는 행렬 P는 유니터리행렬이고, A를 대각화한다.

[연 습 문 제]

1. 세 벡터 $\mathrm{u}=(1-i,4+2i,3)$, $\mathrm{v}=(2,3i,4-i)$, $\mathrm{w}=(2+i,-2i,4-5i)$ 에 대하여 $\overline{\langle i\mathrm{u},\mathrm{w}\rangle+\langle \|\mathrm{u}\|\mathrm{v},\mathrm{u}\rangle}$ 를 계산하시오.

2. 모든 2×2 실행렬 A의 대각성분들의 총합을 $tr(A)$라 할 때, $tr(A)^2-4\det(A)<0$ 이면 A는 두 개의 복소켤레 고윳값을 가짐을 증명하시오.

3. 에르미트행렬 $\begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}$ 을 유니터리 대각화하시오.