# 3강. 극한과 연속

**[ 연 습 문 제 ]**

1. [베르누이 부등식] 다음 명제를 증명하시오.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ h > -1 \Rightarrow (1+h)^n \geq 1+nh$$

2. 제곱하여 2가 되는 유리수는 존재하지 않음을 증명하시오.

3. $0 < 1$ 임을 증명하시오.

4. 개구간 $(0,\ 1)$의 상한이 1임을 증명하시오.

5. $x \in \mathbb{R}$ 일 때 다음 명제를 증명하시오.

$$\forall \epsilon > 0,\ 0 \leq x < \epsilon \Rightarrow x = 0$$



# 1. 함수의 극한

## (1) 무한소와 극한

- 무한소란 "무한히 작은 수"를 일컫는 직관적인 개념으로, 고전적으로 미적분을 설명하기 위해 쓰였다.
- 실수체에는 무한소가 존재하지 않으며, $\epsilon$-$\delta$ 논법으로 정의된 극한으로써 미적분을 설명한다.
- 초실수체에서는 무한소로써 미적분을 설명 가능하다. (비표준 해석학)

# (2) 극한의 정의

**Def 1. [수렴과 극한(값)]**

$f: D \to \mathbb{R},\ a \in D,\ L \in \mathbb{R}$ 라 하자.

$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ s.t.\ \forall x \in D,$

$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \epsilon$

이 성립하면 $f$는 $x=a$에서 극한(값) $L$로 수렴한다고 하고 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ 로 표기한다.

※ 수렴하지 않는 경우엔 발산한다고 한다.

— Index —

1. 함수의 극한
(1) 무한소와 극한
(2) 극한의 정의
(3) 극한의 연산
(4) 주요 정리

2. 함수의 연속
(1) 연속의 정의
(2) 균등연속
(3) 연속함수의 연산
(4) 주요 정리

**Def 2. [우극한과 좌극한]**

$f: D \to \mathbb{R},\ a \in D,\ L \in \mathbb{R}$ 라 하자.

① $\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ s.t.\ \forall x \in D,$

$0 < x-a < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \epsilon$

이 성립하면 $f$는 $x=a$에서 우극한 $L$을 갖는다고 하고 $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a^+) = L$ 로 표기한다.

② $\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ s.t.\ \forall x \in D,$

$0 < a-x < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \epsilon$

이 성립하면 $\lim_{x \to a-} f(x) = f(a^-) = L$ (좌극한)

— Index —

1. 함수의 극한
(1) 무한소와 극한
(2) 극한의 정의
(3) 극한의 연산
(4) 주요 정리

2. 함수의 연속
(1) 연속의 정의
(2) 균등연속
(3) 연속함수의 연산
(4) 주요 정리

**Def 3.**

$a,\ L \in \mathbb{R}$ 이라 하자.

① $\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{R}\ s.t.\ x \ge N$

$\Rightarrow |f(x)-L| < \epsilon$ 일 때 $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

② $\forall M > 0,\ \exists \delta > 0\ s.t.\ 0 < |x-a| < \delta$

$\Rightarrow f(x) > M$ 일 때 $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

③ $\forall M > 0,\ \exists N \in \mathbb{R}\ s.t.\ x \ge N$

$\Rightarrow f(x) > M$ 일 때 $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

## (3) 극한의 연산

$A, B \in \mathbb{R}$ 이고 $f, g : D \to \mathbb{R}$ 이며 $a \in D$ 라 하자. $\lim_{x \to a} f(x) = A$ , $\lim_{x \to a} g(x) = B$ 이면 다음이 성립한다.

① $\lim_{x \to a} \{f(x) + g(x)\} = A + B$

② $\lim_{x \to a} \{f(x) - g(x)\} = A - B$

③ $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = AB$

④ $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ (단, $B \neq 0$)



## (4) 주요 정리

**Thm 1. [극한의 유일성]**

$f : D \to \mathbb{R}$, $a \in D$ 일 때 $\lim_{x \to a} f(x)$ 가 수렴하면 그 극한값은 유일하다.

**Thm 2. [샌드위치 정리]**

$\forall x \in D$ , $f(x) \le g(x) \le h(x)$ 이고 $L \in \mathbb{R}$ 일 때 $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$ 이면 $\lim_{x \to a} g(x) = L$ 이다.



# 2. 함수의 연속

## (1) 연속의 정의

**Def 1. [점 연속]**

$f : D \to \mathbb{R}$ 이고 $a \in D$ 라 하자.

$\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ $s.t.$ $\forall x \in D$,

$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$

이 성립하면 $f$는 $x = a$에서 연속이라 한다.

**Def 2. [우연속과 좌연속]**

$f : D \to \mathbb{R}$ 이고 $a \in D$ 라 하자.

① $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ s.t. $\forall x \in D$,

$0 \le x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$

이 성립하면 $f$는 $x = a$에서 우연속이라 한다.

② $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ s.t. $\forall x \in D$,

$0 \le a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$

이 성립하면 $f$는 $x = a$에서 좌연속이라 한다.



**Def 3. [연속함수]**

$f : D \to \mathbb{R}$ 이고 $X \subseteq D$라 하자.

① 만약 $f$가 $X$의 모든 점에서 연속이면 $f$는 $X$에서 연속이라 한다.

② 만약 $f$가 $D$의 모든 점에서 연속이면 $f$는 연속함수라 한다.



**Def 4. [불연속점의 종류]**

$f : D \to \mathbb{R}$ 이고 $a \in D$ 라 하자.

① [제 1종 불연속점]

1) $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) \ne f(a)$ 인 $x = a$ 를 제거 가능 불연속점이라 한다.

2) $\lim_{x \to a+} f(x) \ne \lim_{x \to a-} f(x)$ 인 $x = a$ 를 비약 불연속점이라 한다.

② [제 2종 불연속점]

$\lim_{x \to a+} f(x)$와 $\lim_{x \to a-} f(x)$ 중에 적어도 하나가 존재하지 않는다.

# (2) 균등연속

**Def. [균등연속]**

$f : D \to \mathbb{R}$ 이라 하자.

$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ s.t.\ \forall x, y \in D,$

$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \epsilon$

이 성립하면 $f$는 $D$에서 균등연속이라 한다.

**Thm.** $f$가 $D$에서 균등연속이면 연속이다.



# (3) 연속함수의 연산

$a \in D$ 이고 $f, g : D \to \mathbb{R}$가 $x=a$ 에서 연속일 때 다음이 성립한다.

① $f+g$ 는 $x=a$ 에서 연속이다.

② $f-g$ 는 $x=a$ 에서 연속이다.

③ $fg$ 는 $x=a$ 에서 연속이다.

④ $g(a) \neq 0$ 이면 $\dfrac{f}{g}$ 는 $x=a$ 에서 연속이다.



# (4) 주요 정리

**Thm 1. [최대 최소정리]**

$f$가 $[a,\ b]$에서 연속 $\Rightarrow \exists a_0, b_0 \in [a,\ b]$

$s.t.\ \forall x \in [a,\ b],\ f(a_0) \le f(x) \le f(b_0)$

**Thm 2. [사잇값(중간값) 정리]**

$f$가 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a) < f(b) \Rightarrow$

$\exists c \in (a,\ b)\ s.t.\ f(a) < p < f(b),\ f(c) = p$

※ $f(b) < f(a)$ 이면 $f(b) < p < f(a)$

## [ 연 습 문 제 ]

1. 다음을 증명하시오.

(1) $f(x)=\begin{cases} x+1\ , & x \geq 0 \\ -x\ , & x < 0 \end{cases}$ 일 때, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$

(2) $\lim_{x \to \infty} (2x-1) = \infty$

(3) $\lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$

2. 함수 $f(x)=2x-3$ 는 $x=-2$ 에서 연속임을 보이시오.

3. 함수 $f(x)=x^2$ 는 $(0,\ \infty)$ 에서 균등연속이 아님을 보이시오.

4. 다음 함수들이 $x=0$ 에서 왜 불연속인지 설명하시오.

(1) $f(x)=\begin{cases} x^2+1\ , & x \neq 0 \\ 0\ , & x = 0 \end{cases}$ (2) $g(x)=\begin{cases} x+1\ , & x \geq 0 \\ 2x-1\ , & x < 0 \end{cases}$

(3) $h(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}\ , & x \geq 0 \\ \sin\dfrac{1}{x}\ , & x < 0 \end{cases}$

5. 정의역이 $[-1,\ 1]$ 이고 치역이 $(-1,\ 1)$ 인 연속함수가 존재할 수 있는지 설명하시오.

6. 함수 $f(x)=x^{10}+3x-1$ 가 $(0,\ 1)$ 에서 실근을 가짐을 증명하시오.