8강. 해석함수

[연 습 문 제]

1. 다음 $\{f_n\}$ 이 구간 $[0,\ 1]$에서 ①점별수렴 ②균등수렴 하는지 각각 보이시오.

   (1) $f_n(x) = x^n$ (2) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}(x-1)^n$ 의 수렴반지름과 수렴구간을 구하시오.

3. $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ 이 $(-\infty,\ \infty)$ 에서 연속임을 보이시오.

4. $f_n(x) = |x|^{1+\frac{1}{n}}$ 와 극한함수 f가 구간 $(-1,\ 1)$ 에서 미분가능하지 않은 이유를 설명하시오.

5. 다음을 각각 구하시오.

   (1) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n(2n+1)}$ 의 적분 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

   (2) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x-1)^n}{n}$ 의 적분 $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$

1. 테일러급수 전개

Def. [해석함수]

어떤 $\delta > 0$ 에 대하여 $(c-\delta,\ c+\delta)$ 에서 함수 f가 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ 이면 f는 $x=c$ 에서 해석적이라 한다.

또한 함수 f가 열린구간 I의 모든 점에서 해석적이면 f를 I에서의 해석함수라 한다.

Thm. [테일러급수 전개]

함수 f가 구간 I에서 해석함수이면 무한번 미분가능하고, 임의의 $c \in I$ 에 대하여 구간 $(c-\delta,\ c+\delta)$ 에서

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

을 만족시키는 $\delta > 0$ 이 존재한다. 이때 우변의 멱급수를 해석함수 f의 테일러급수라 하고, 특히 $c=0$ 인 경우에는 매클로린급수라 한다.

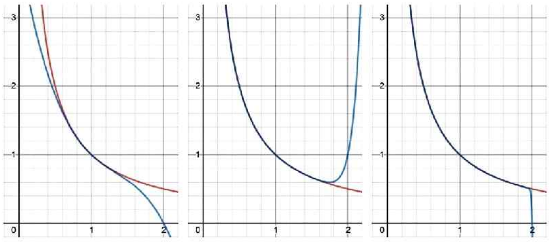
2. 해석함수와 연산

(1) 여러 가지 해석함수

$$\frac{1}{x} = 1 + (1-x) + (1-x)^2 + (1-x)^3 + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n \quad (\text{단},\ 0 < x < 2)$$

$$\sqrt{x} = 1 - \frac{1-x}{2} - \frac{(1-x)^2}{8} - \frac{(1-x)^3}{16} - \cdots$$
$$(\text{단},\ 0 < x < 2)$$

참고) $y=\dfrac{1}{x}$ 와 $y=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(1-x)^k$ 의 그래프 비교



$n=3$ $n=10$ $n=99$

— Index —
1. 테일러급수 전개
2. 해석함수와 연산
(1) 여러 가지 해석함수
(2) 해석함수의 연산

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

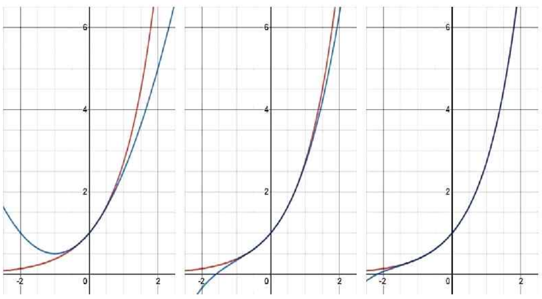
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad , \ -\infty < x < \infty$$

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n \quad , \ 0 < x \le 2$$

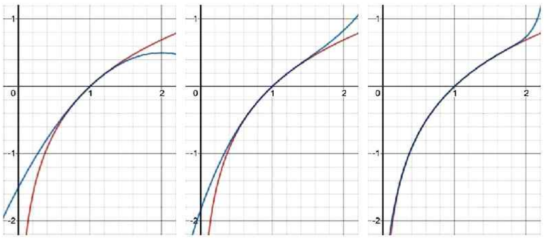
— Index —
1. 테일러급수 전개
2. 해석함수와 연산
(1) 여러 가지 해석함수
(2) 해석함수의 연산

참고 1) $y=e^x$ 와 $y=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ 의 그래프 비교



$n=2$ $n=3$ $n=5$

참고 1) $y = \ln x$ 와 $y = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ 의 그래프 비교



$n=2$ $\quad$ $n=3$ $\quad$ $n=11$

— Index —

1. 테일러급수 전개

2. 해석함수와 연산

(1) 여러 가지 해석함수

(2) 해석함수의 연산

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

ex> 다음의 근삿값을 구하시오.

(1) $\sqrt{e}$ $\quad$ (2) $\ln 2$ $\quad$ (3) $\sin 2$

— Index —

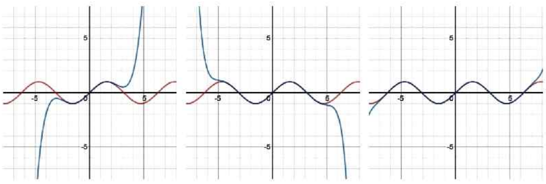
1. 테일러급수 전개

2. 해석함수와 연산

(1) 여러 가지 해석함수

(2) 해석함수의 연산

참고) $y = \sin x$ 와 $y = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ 의 그래프 비교



$n=2$ $\quad$ $n=5$ $\quad$ $n=8$

(2) 해석함수의 연산

Thm 1. [해석함수의 사칙연산]

함수 f는 개구간 I에서 해석적이고 g는 개구간 J에서 해석적이면 다음이 성립한다.

① cf, $f \pm g$, fg 는 $I \cap J$에서 해석적이다. (단 c는 상수)

② $g(x_0) \neq 0$ 인 $x_0 \in I \cap J$에 대해 $\dfrac{f}{g}$ 도 $x = x_0$의 근방에서 해석적이다.

Thm 2. [해석함수의 합성]

함수 f는 개구간 I에서 해석적이고 g는 개구간 J에서 해석적일 때, $f(I) \subset J$ 이면 합성함수 $g \circ f$ 도 I에서 해석적이다.

ex> 다음 함수의 매클로린급수를 세 번째 항까지 구하시오.

(1) $f(x) = x^2 e^{4x} \sqrt{1+x}$

(2) $g(x) = e^{-x^2} \sin^2 x$