6강. 연속체 가설

연습문제 1. $A=\{x,\ y,\ z\},\ B=\{a,\ b\}$ 일 때
$\#A,\ \#B,\ \#A\times B,\ \#B^{A}$ 를 각각 구하시오.

연습문제 2. 세 집합 $\mathbb{Z},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{R}$ 는 모두 무한집합임을 보이시오.

연습문제 3. $\mathbb{Z}\times\mathbb{N},\ \mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\ \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ 는 모두 가부번집합임을 증명하시오.

연습문제 4. $\varsigma=\#(\mathbb{R}-\mathbb{Q})=\#\mathbb{C}$ 임을 증명하시오.

— Index —

1. 집합론의 역설

(1) 칸토어의 역설

① 칸토어의 정리

: 임의의 집합 X 에 대하여
$\#X<\#P(X)$ 이다.

② 칸토어의 역설

모든 집합들의 집합을 U, 그 기수를 $\#\mathrm{U}=\kappa$ 라 하자.

그러면 칸토어의 정리에 따라서 U의 멱집합의 기수 $\#P(\mathrm{U})$ 는 $\#P(\mathrm{U})=2^{\kappa}>\kappa=\#\mathrm{U}$ 이지만, 이는 $\#\mathrm{U}\geq\#P(\mathrm{U})$ 이어야 하는 가정에 모순된다.

(2) 러셀의 역설

모든 집합들의 집합을 U 라고 하자.

그러면 $S=\{\mathrm{A}\in\mathrm{U}\mid\mathrm{A}\notin\mathrm{A}\}$ 은 하나의 집합이 된다.

만약 $S\in S$ 라고 하자. 그러면 S 의 정의에 의해 $S\notin S$ 이다.

만약 $S\notin S$ 라고 하자. 그러면 S 의 정의에 의해 $S\in S$ 이다.

따라서 U 는 존재하지 않는다.

2. 공리적 집합론

(1) ZFC

현대 수학의 표준적인 수학기초론으로, 다음 10가지 공리 및 공리꼴을 가지고 집합론을 구성한다.

확장공리, 짝공리, 공집합공리, 무한공리,
합집합공리, 멱집합공리, 분류공리꼴 /
정칙성공리, 치환공리꼴 / 선택공리

(2) 그 외의 집합론

① NBG

ZFC 의 보존적 확장 형태로, 고유 모임을 포함하는 집합론

② MK

NBG에서 재귀적 정의를 허용한 집합론

— Index —
1. 집합론의 역설
(1) 칸토어의 역설
(2) 러셀의 역설
2. 공리적 집합론
(1) ZFC
(2) 그 외의 집합론
3. 연속체 가설
(1) 정의
(2) ZFC 와의 관계
(3) 다른 공리와의 관계

3. 연속체 가설

(1) 정의

① 칸토어의 연속체 가설

두 초한기수 $\aleph_0$ 와 ς 에 대하여 $\aleph_0 < x < \varsigma$를 만족하는 기수 x 는 존재하지 않는다.

— Index —
1. 집합론의 역설
(1) 칸토어의 역설
(2) 러셀의 역설
2. 공리적 집합론
(1) ZFC
(2) 그 외의 집합론
3. 연속체 가설
(1) 정의
(2) ZFC 와의 관계
(3) 다른 공리와의 관계

② 일반화 연속체 가설

임의의 초한기수 κ 에 대하여, $\kappa < x < 2^{\kappa}$ 를 만족하는 기수 x는 존재하지 않는다.

(2) ZFC 와의 관계

연속체 가설은 ZFC 와 독립적이다.
즉, ZFC 에서는 연속체 가설을 증명할 수도, 반증할 수도 없다.

(3) 다른 공리와의 관계

① 구성 가능성 공리

ZFC 에 구성 가능성 공리를 추가하면
일반화 연속체 가설이 참이다.

② 고유 강제법 공리

고유 강제법 공리를 가정하면,
칸토어의 연속체 가설은 거짓이다.