5강. 집합의 크기

연습문제 1. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여
X 에서 X 로의 함수, 항등함수, 상수함수,
전단사함수의 개수가 모두 몇 개씩인지
답하시오.

연습문제 2. 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 가

$$f(x)=\begin{cases} x^2-5 & x\geq 1 \\ 3-2x & x<1 \end{cases}$$

로 정의된 경우 $f(\{-5, 2, 4\})$ 와
$f^{-1}(\{-1, 3, 7\})$ 의 값을 구하시오.

연습문제 3. 함수 $f:X\to Y$ 와 $A\subseteq X$, $B\subseteq Y$ 일 때
다음이 성립되지 않는 예를 찾으시오.

(1) $B\neq\varnothing$ 이면 $f^{-1}(B)\neq\varnothing$

(2) $f(X)=Y$

(3) $f^{-1}(f(A))=A$

(4) $f(f^{-1}(B))=B$

(5) $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$

(6) $f(A)-f(B)=f(A-B)$

연습문제 4. 양의 짝수의 집합 $\mathbb{N}_e$ 와 자연수의 집합 $\mathbb{N}$
사이에 일대일 대응이 존재함을 증명하시오

1. 집합의 분류

(1) 유한, 무한집합

① 동등

두 집합 X, Y 에 대하여 전단사함수 $f: X \to Y$ 가 존재하면 X 와 Y 는 동등이다. ($X \approx Y$ 또는 $f: X \approx Y$)

── Index ──
1. 집합의 분류
(1) 유한, 무한집합
(2) 가부번, 비가부번 집합
2. 기수
(1) 기수의 개념
(2) 기수의 연산
(3) 기수의 지수

② 유한, 무한집합

집합 X의 적당한 진부분집합 Y가 X와 동등하면 X는 무한집합이다.

그리고 무한집합이 아닌 집합을 유한집합이라 한다.

ex> $(0,\ 1) \approx \mathbb{R}$
$\therefore$ $\mathbb{R}$은 무한집합이다.

── Index ──
1. 집합의 분류
(1) 유한, 무한집합
(2) 가부번, 비가부번 집합
2. 기수
(1) 기수의 개념
(2) 기수의 연산
(3) 기수의 지수

③ 여러 가지 정리

1) 공집합 $\varnothing$은 유한집합이다.
2) 무한집합을 포함하는 집합은 무한이다.
3) 유한집합의 모든 부분집합은 유한이다.
4) 전단사함수 $f: X \to Y$ 에 대하여 X 가 무한집합이면 Y 도 무한집합이고, X 가 유한집합이면 Y 도 유한집합이다.
5) 무한집합 X 의 부분집합 Y 가 유한이면 $X - Y$ 는 무한집합이다.

(2) 가부번, 비가부번집합

① 가부번집합

: 집합 X 가 $X \approx \mathbb{N}$ 일 때 X 를 가부번집합이라 한다.

② 가산집합

: 유한집합이나 가부번집합을 가산집합이라 한다.

③ 여러 가지 정리

1) 가산집합의 부분집합은 가산집합이다.
2) 가부번집합들의 합집합은 가부번이다.
3) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 은 가부번집합이다.
4) $\mathbb{Q}$는 가부번집합이다.
5) $\mathbb{R}$의 부분집합 $(0,\ 1)$ 은 비가부번이다.
6) 모든 무리수의 집합은 비가부번집합이다.
7) $\mathbb{C}$는 비가부번집합이다.

2. 기수

(1) 기수의 개념

① 기수 : 집합의 크기를 나타내는 수.

card A 또는 $\#A$

1) 각 집합 A에 대해서 $\#A$ 는 유일하다.
2) $\#A$ 에 해당하는 집합 A는 항상 있다.
3) $A = \varnothing \Leftrightarrow \#A = 0$
4) $A \sim \{1,\ \cdots,\ k\}$ 이면 $\#A = k$ $(k \in \mathbb{N})$
5) $A \sim B \Leftrightarrow \#A = \#B$

② 유한기수 : 유한집합의 기수

초한기수 : 무한집합의 기수

< 대표적인 초한기수 >

$\#\mathbb{N} = \aleph_0$ 가부번집합의 기수

$\#\mathbb{R} = \varsigma$ 연속체의 기수

③ $\#A < \#B$

: A 는 B 의 한 부분집합과 동등이고 B 는 A 의 어떠한 부분집합과도 동등이지 않다.

1) $\#A \leq \#A$

2) A 가 B 의 부분집합과 동등이고 B 도 A 의 부분집합과 동등이면 A 와 B 는 동등이다. ($\#A = \#B$)

3) $\#A \leq \#B$ 이고 $\#B \leq \#C$ 이면 $\#A \leq \#C$ 이다.

(2) 기수의 연산

① 기수 합

: 서로소인 두 집합 A, B 의 기수를 각각 a, b 라고 할 때 $a+b = \#(A \cup B)$

② 기수 곱

: 집합 A, B 의 기수를 각각 a, b 라고 할 때 $ab = \#(A \times B)$

③ 연산 법칙

임의의 기수 x, y, z 에 대하여
다음이 성립한다.

1) 교환법칙 : $x+y=y+x$
$xy=yx$

2) 결합법칙 : $(x+y)+z=x+(y+z)$
$(xy)z=x(yz)$

3) 분배법칙 : $x(y+z)=xy+xz$

— Index —
1. 집합의 분류
(1) 유한, 무한집합
(2) 가부번, 비가부번 집합
2. 기수
(1) 기수의 개념
(2) 기수의 연산
(3) 기수의 지수

④ 여러 가지 정리

1) $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$

2) $\varsigma+\varsigma=\varsigma$

3) $\aleph_0+\varsigma=\varsigma$

4) $\aleph_0\aleph_0=\aleph_0$

5) $\varsigma\varsigma=\varsigma$

6) $\aleph_0\varsigma=\varsigma$

— Index —
1. 집합의 분류
(1) 유한, 무한집합
(2) 가부번, 비가부번 집합
2. 기수
(1) 기수의 개념
(2) 기수의 연산
(3) 기수의 지수

(3) 기수의 지수

집합 A, B 에 대하여
$\#A=m$, $\#B=n$ 일 때

① $B^A=\{f \mid f:A\to B\}$

② $\#\left(B^A\right)=n^m$

※ $B=\{0,\ 1\}$ 일 때 $B^A=\{0,\ 1\}^A=2^A$

③ 여러 가지 정리

1) 집합 X 에 대하여 $\#X = x$ 일 때
$\#P(X) = 2^x$

2) 기수 x, y, z 에 대하여
❶ $x^y x^z = x^{y+z}$
❷ $(x^y)^z = x^{yz}$
❸ $(xy)^z = x^z y^z$

3) $\varsigma = \aleph_0^{\aleph_0} = \varsigma^{\aleph_0}$

4) $2^c = \aleph_0^c = \varsigma^c$

연습문제 1. $A = \{x, y, z\}$, $B = \{a, b\}$ 일 때
$\#A$, $\#B$, $\#A \times B$, $\#B^A$ 를 각각 구하시오.

연습문제 2. 세 집합 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ 는 모두 무한집합임을 보이시오.

연습문제 3. $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ 는 모두 가부번집합임을 증명하시오.

연습문제 4. $\varsigma = \#(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \#\mathbb{C}$ 임을 증명하시오.