4강. 함수

연습문제 1. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 상의 관계
$G=\{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 2),\ (2,\ 3)\}$ 와
$H=\{(1,\ 4),\ (2,\ 1),\ (3,\ 4)\}$ 에 대하여
다음을 구하시오.
(1) G^{-1} (2) $G\circ H$ (3) $(G\cup K)^{-1}$

연습문제 2. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$ 일 때 다음 관계들의
반사성, 대칭성, 추이성을 조사하시오.
(1) $\mathscr{R}_1=\{(1,\ 2),\ (3,\ 2),\ (2,\ 2),\ (2,\ 3)\}$
(2) $\mathscr{R}_2=A\times A$

연습문제 3. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 의 분할
$P=\{\{1,\ 2\},\ \{3\},\ \{4,\ 5\}\}$ 에 대하여
다음에 답하시오.
(1) 집합 X 위의 동치관계 $\mathscr{R}_p$ 를 나타내는
순서쌍의 집합을 원소나열법으로 쓰시오.
(2) $E=\mathscr{R}_p$ 라 할 때, $E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4,\ E_5$
를 각각 구하시오.

연습문제 4. 집합 $X\ (\neq\varnothing)$ 상의 동치관계 E 에 대하여
$X/(X/E)=E$ 임을 증명하시오.

1. 함수

(1) 함수의 정의

① 함수 : 다음을 만족하는 X 에서 Y 로의 관계 $f : X \to Y$

❶ $\forall x \in X,\ \exists y \in Y,$ s.t. $(x,\ y) \in f$

❷ $(x,\ y_1) \in f \wedge (x,\ y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$

※ $(x,\ y) \in f$ 는 $y = f(x)$ 로도 쓴다.

── Index ──
1. 함수
(1) 함수의 정의
(2) 함수의 성질
(3) 여러 가지 함수
(4) 여러 가지 정리

2. 집합의 함수
(1) 개념과 정의
(2) 여러 가지 정리

함수 $f : X \to Y$ 에서 $y = f(x)$ 일 때

1) y를 f에 의한 x의 상
2) x를 f에 의한 y의 원상
3) X를 f의 정의역 Dom(f)
4) Y를 f의 공역
5) $\{f(x) \mid x \in X\} = f(X)$ 를 f의 치역 Rng(f)

라 한다.

── Index ──
1. 함수
(1) 함수의 정의
(2) 함수의 성질
(3) 여러 가지 함수
(4) 여러 가지 정리

2. 집합의 함수
(1) 개념과 정의
(2) 여러 가지 정리

함수 $f : X \to Y$ 에 대하여 $A \subset X$일 때,

② $f|_A$ 는 X를 A로 축소한 함수

$\{(x,\ y) \in f \mid x \in A\}$

③ $g = f|_A$ 이면 f는 g의 A에서의 확대함수

(2) 함수의 성질

함수 $f\,:\,X \to Y$ 에 대하여

① 전사 : $\mathrm{Rng}(f) = Y$

② 단사 : $x_1 \neq x_2 \in X \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

③ 전단사 : 전사이고 단사인 함수

일대일대응

(3) 여러 가지 함수

① 고등학교 교육과정 내

1) 항등함수 : $\forall x \in X,\ I_X(x) = x$

2) 상수함수 : $\exists y_0 \in Y,\ f(X) = y_0$

3) 역함수 : 전단사인 $f\,:\,X \to Y$ 에

대해 $f^{-1}\,:\,Y \to X$

4) 합성함수

: 두 함수 $f\,:\,X \to Y,\ \ g\,:\,Y \to Z$

와 $\forall x \in X,\ \ (g \circ f)(x) = g(f(x))$

② 고등학교 교육과정 외

집합 $A(\neq \varnothing)$ 가 $A \subset X$ 일 때

1) 포함함수

: $\forall x \in A,\ i : A \to X$ 가

$i(x) = x\ \ (\in A)$

2) 특성함수

: $\forall x \in X,\ \chi_A : X \to \{0,\ 1\}$ 가

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

3) 선택함수

: 집합 $X\ (\neq\varnothing)$ 의 부분집합들의 집합족을 $\{A_i\}$ 이라할 때 모든 $i\in I$ 에 대하여 $f(A_i)\in A_i$ 로 정의되는 함수 $f:\{A_i\}\to X$

(4) 여러 가지 정리

1) 함수 f 에 대하여 역함수 f^{-1} 가 존재하면 f는 전단사이다.

2) 합성함수 $g\circ f$ 가 단사이면 f는 단사이고, $g\circ f$ 가 전사이면 g는 전사이다.

3) 정수집합 $\mathbb{Z}$과 자연수집합 $\mathbb{N}$사이에는 일대일 대응이 존재한다.

2. 집합의 함수

(1) 개념과 정의

함수 $f:X\to Y$ 에서 $A\subset X$ 이고 $B\subset Y$ 일 때 다음이 성립한다.

1) f에 대한 A 의 상

$f(A)=\{f(x)\in Y\mid x\in A\}$

2) f에 의한 B 의 역상

$f^{-1}(B)=\{x\in X\mid f(x)\in B\}\subset X$

(2) 여러 가지 정리

함수 $f : X \to Y$ 에서 $A \subset X$ 이고 $B \subset Y$ 일 때 다음이 성립한다.

1) $f(\varnothing) = \varnothing$

2) $\forall x \in X,\ f(\{x\}) = \{f(x)\}$

3) $f^{-1}(f(A)) = A \Leftrightarrow f$는 단사

4) $f(f^{-1}(B)) = B \Leftrightarrow f$는 전사

── Index ──
1. 함수
(1) 함수의 정의
(2) 함수의 성질
(3) 여러 가지 함수
(4) 여러 가지 정리

2. 집합의 함수
(1) 개념과 정의
(2) 여러 가지 정리

함수 $f : X \to Y$ 에 대하여 $\{A_\alpha |\ \alpha \in I\}$ 를 X 의 부분집합족이라 하면 다음이 성립한다.

1) $f(\cup_{\alpha \in I} A_\alpha) = \cup_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$

2) $f(\cap_{\alpha \in I} A_\alpha) \subseteq \cap_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$

3) f가 단사이면

$f(\cap_{\alpha \in I} A_\alpha) = \cap_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$

연습문제 1. 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수, 항등함수, 상수함수, 전단사함수의 개수가 모두 몇 개씩인지 답하시오.

연습문제 2. 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 가

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & x \ge 1 \\ 3 - 2x & x < 1 \end{cases}$$

로 정의된 경우 $f(\{-5,\ 2,\ 4\})$ 와 $f^{-1}(\{-1,\ 3,\ 7\})$ 의 값을 구하시오.

연습문제 3. 함수 $f: X \to Y$ 와 $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ 일 때
다음이 성립되지 않는 예를 찾으시오.

(1) $B \neq \varnothing$ 이면 $f^{-1}(B) \neq \varnothing$

(2) $f(X) = Y$

(3) $f^{-1}(f(A)) = A$

(4) $f(f^{-1}(B)) = B$

(5) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

(6) $f(A) - f(B) = f(A - B)$

연습문제 4. 양의 짝수의 집합 $\mathbb{N}_e$ 와 자연수의 집합 $\mathbb{N}$
사이에 일대일 대응이 존재함을 증명하시오.