2강. 연속사상

[연 습 문 제]

1. $X=\{1,\ 2,\ 3\}$ 위의 위상들 중에 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,\ 3\}$ 을 모두 포함하는 것은 몇 개인지 구하시오.

2. 임의의 집합 $X(\neq\varnothing)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.
 (1) $\mathfrak{I}=\{U\subset X \mid n(U^c)<\infty\}\cup\{\varnothing\}$ 가 X위의 위상임을 보이시오. (유한여집합위상)
 (2) 정수집합 $\mathbb{Z}$위의 유한여집합위상에 대한 열린집합의 예를 들어보시오.

3. 집합족 $\{[a,\ b]\subset\mathbb{R} \mid a,b\in\mathbb{R},\ a<b\}$ 로부터 생성되는 집합족은 실수집합 $\mathbb{R}$위의 위상인지 아닌지 설명하시오.

4. 실수집합 $\mathbb{R}$위의 보통위상, 밀착위상, 이산위상, 위끝위상, 아래끝위상, 유한여집합위상의 크기를 각각 비교하시오.

5. 주어진 함수가 $\mathbb{R}^n$ 위의 거리함수임을 각각 보이시오.
 (1) $d(\vec{x},\vec{y})=|x_1-y_1|+\cdots+|x_n-y_n|$ (택시거리)
 (2) $d(\vec{x},\vec{y})=\mathrm{Max}\left(|x_1-y_1|,\cdots,|x_n-y_n|\right)$ (정사각거리)

6. 실수의 보통위상공간에서 정수집합 $\mathbb{Z}$가 닫힌집합임을 도집합 또는 폐포 개념을 활용하여 설명하시오.

7. 유클리드평면 $\mathbb{R}^2$의 부분집합 $A=\{(x,y)\mid xy>0\}$ 에 대하여 $\mathrm{Int}(A)$, $\mathrm{Ext}(A)$, ∂A 를 각각 구하시오.

1. 연속사상

(1) 연속사상

- 실수의 연속함수로부터 위상구조의 연속성을 보존하는 연속사상을 정의한다.

Def 1. [실변수함수의 연속]

① 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 가 $x_0\in\mathbb{R}$에서 연속이다.

$\Leftrightarrow$ $\forall\epsilon>0,\ \exists\delta>0\ s.t.$

$|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\epsilon$

즉, $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$

$\Rightarrow f(x)\in(f(x_0)-\epsilon, f(x_0)+\epsilon)$

── Index ──
1. 연속사상
(1) 연속사상
(2) 위상동형사상
2. 부분공간
(1) 부분공간
(2) 부분공간의 성질
(3) 임베딩
3. 곱공간
(1) 곱공간
(2) 사영사상

② $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 가 연속함수다.

$\Leftrightarrow$ f가 임의의 $x_0\in\mathbb{R}$에서 연속이다.

Def 2. [연속사상]

① 사상 $f:X\to Y$ 가 $x_0\in X$에서 연속이다.

$\Leftrightarrow$ $f(x_0)$를 포함하는 임의의 열린집합 $V(\subset Y)$에 대하여, x_0를 포함하는 열린집합 $U(\subset X)$ 가 존재해 $f(U)\subset V$를 만족한다.

② $f:X\to Y$ 가 연속사상이다.

$\Leftrightarrow$ f가 임의의 $x_0\in X$에서 연속이다.

── Index ──
1. 연속사상
(1) 연속사상
(2) 위상동형사상
2. 부분공간
(1) 부분공간
(2) 부분공간의 성질
(3) 임베딩
3. 곱공간
(1) 곱공간
(2) 사영사상

ex) 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$ 위의 위상

$\mathfrak{I}=\{\varnothing, X, \{1\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}\}$

에 대하여 사상 $f:X\to X$ 를

$f(1)=2,\ f(2)=3,\ f(3)=3$

이라 정의하면, f는 1과 3에서 연속이지만 2에서는 연속이 아니다.

즉 f는 연속사상이 아니다.

Thm 1. [연속사상의 또 다른 정의]

사상 $f: X \to Y$ 에 대하여 다음 두 명제는 동치이다.

① f는 연속사상이다.

② Y의 임의의 열린집합 V의 역상 $f^{-1}(V)$가 X에서 열린집합이다.

Cor. [닫힌집합과 연속사상]

$f: X \to Y$ 는 연속사상이다.

$\Leftrightarrow$ Y의 임의의 닫힌집합 C의 역상 $f^{-1}(C)$가 X에서 닫힌집합이다.

— Index —
1. 연속사상
(1) 연속사상
(2) 위상동형사상
2. 부분공간
(1) 부분공간
(2) 부분공간의 성질
(3) 임베딩
3. 곱공간
(1) 곱공간
(2) 사영사상

ex) 실수의 보통위상공간사이의 사상

$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ 은 연속사상이지만, 사상

$g(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ 은 연속사상이 아니다.

- 정의역이 이산위상공간이면 공역이 무엇이든지 항상 연속사상이 정의된다.

- 정의역과 공역이 같을 때 항등사상과 상수사상은 항상 연속사상이다.

— Index —
1. 연속사상
(1) 연속사상
(2) 위상동형사상
2. 부분공간
(1) 부분공간
(2) 부분공간의 성질
(3) 임베딩
3. 곱공간
(1) 곱공간
(2) 사영사상

Thm 2. [기저와 연속사상]

위상공간 사이의 사상 $f: X \to Y$ 과 Y의 기저 $\mathscr{B}$에 대해 다음 두 명제는 동치이다.

① f는 연속사상이다.

② $\mathscr{B}$의 임의의 원소 B의 역상 $f^{-1}(B)$는 X에서 열린집합이다.

ex) 실수의 아래끝위상공간사이의 사상

$f(x) = x+1$ 은 연속사상이지만, 사상

$g(x) = -x$ 은 연속사상이 아니다.

Thm 3. [연속사상의 합성]

연속사상의 합성사상은 연속사상이다.

(2) 위상동형사상

• 위상수학의 주요 목표 중 하나는 주어진 두 위상공간이 서로 위상동형인지 아닌지를 밝히는 것이다.

Def. [위상동형사상]

두 위상공간 X, Y사이의 사상 f가 다음 세 조건을 만족한다고 하자.

1) f는 전단사이다.
2) f는 연속이다.
3) f^{-1}는 연속이다.

— Index —
1. 연속사상
(1) 연속사상
(2) 위상동형사상
2. 부분공간
(1) 부분공간
(2) 부분공간의 성질
(3) 임베딩
3. 곱공간
(1) 곱공간
(2) 사영사상

이때 f를 위상동형사상이라 하며, X와 Y를 위상동형이라 하고 $X \simeq Y$라 표기한다.

• 위상동형인 X, Y는 1)에 의해 집합적으로 구별되지 않으며 2),3)에 의해 위상적으로 구별되지 않는다.

• 위상동형인 위상공간들이 공통적으로 갖는 성질을 불변량이라 한다.

• 위상동형은 동치관계이다.

— Index —
1. 연속사상
(1) 연속사상
(2) 위상동형사상
2. 부분공간
(1) 부분공간
(2) 부분공간의 성질
(3) 임베딩
3. 곱공간
(1) 곱공간
(2) 사영사상

2. 부분공간

(1) 부분공간

• 주어진 하나의 위상공간으로부터 새로운 위상공간을 만든다.

Thm. [부분위상]

위상공간 $(X, \mathfrak{I})$와 $A \subset X$에 대하여 $\mathfrak{I}_A$를 다음과 같이 정의하면 $\mathfrak{I}_A$는 A위의 위상이 된다.

$$\mathfrak{I}_A = \{A \cap U \mid U \in \mathfrak{I}\}$$

Def. [부분공간]

Thm.에서 설정한 $\mathfrak{I}_A$를 부분위상이라 하고, 위상공간 $(A,\ \mathfrak{I}_A)$은 $(X,\ \mathfrak{I})$의 부분공간이라 한다.

- 전체공간에서는 열린집합이 아니었던 집합이 부분공간에서는 열린집합일수 있다.

ex) 실수의 보통위상공간 $(\mathbb{R},\ \mathfrak{I})$ 의 부분공간 $(\mathbb{Z},\ \mathfrak{I}_Z)$에서 임의의 한 점 집합 $\{z\}$ $(z \in \mathbb{Z})$

— Index —
1. 연속사상
(1) 연속사상
(2) 위상동형사상
2. 부분공간
(1) 부분공간
(2) 부분공간의 성질
(3) 임베딩
3. 곱공간
(1) 곱공간
(2) 사영사상

(2) 부분공간의 성질

① 위상공간 $(X,\ \mathfrak{I})$와 $\mathfrak{I}$의 기저 $\mathscr{B}$, 그리고 부분위상공간 $(A,\ \mathfrak{I}_A)$에 대하여

$$\mathscr{B}_A = \{A \cap B \mid B \in \mathscr{B}\}$$

는 $\mathfrak{I}_A$의 기저가 된다.

② 위상공간 $(X,\ \mathfrak{I})$와 그 부분위상공간 $(A,\ \mathfrak{I}_A)$ 사이에는 항상 위상동형사상을 정의할 수 있다. 즉, $(X,\ \mathfrak{I})$와 $(A,\ \mathfrak{I}_A)$는 위상동형이다.

— Index —
1. 연속사상
(1) 연속사상
(2) 위상동형사상
2. 부분공간
(1) 부분공간
(2) 부분공간의 성질
(3) 임베딩
3. 곱공간
(1) 곱공간
(2) 사영사상

ex) 실수의 보통위상공간 $(\mathbb{R},\ \mathfrak{I})$ 와 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right) \subset \mathbb{R}$ 에 대해 사상 $f : \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$를 $f(x) = \tan x$ 라 정의하면 f는 위상동형사상이다.

③ 위상공간 $(X,\ \mathfrak{I})$과 그 부분위상공간 $(A,\ \mathfrak{I}_A)$에 대해, A가 $(X,\ \mathfrak{I})$의 열린집합이면 $(A,\ \mathfrak{I}_A)$의 모든 열린집합들은 동시에 $(X,\ \mathfrak{I})$의 열린집합이기도 하다.

(3) 임베딩(Embedding)

- 공역의 부분공간으로의 사상이 집합적으로도 위상적으로도 겹침이 발생하지 않는 연속사상인 경우를 정의한다.

Def. [임베딩]

X에서 Y로의 연속사상 f가 다음 두 조건을 만족하면 임베딩이라 한다.

1) f는 단사이다.

2) $\tilde{f}\ :\ X \to f(X)$ 가 위상동형사상이다.

— Index —
1. 연속사상
(1) 연속사상
(2) 위상동형사상
2. 부분공간
(1) 부분공간
(2) 부분공간의 성질
(3) 임베딩
3. 곱공간
(1) 곱공간
(2) 사영사상

ex) $X = \{0, 1, 2, \cdots\}$ 위의 이산위상 D와 실수의 보통위상 $\mathfrak{I}$에 대하여 두 위상공간 $(X,\ D)$, $(\mathbb{R},\ \mathfrak{I})$ 사이의 사상 $f : X \to Y$ 를

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\ ,\ x \neq 0 \\ 0\ \ ,\ x = 0 \end{cases}$$

라 정의하면 f는 임베딩이 아니다.

— Index —
1. 연속사상
(1) 연속사상
(2) 위상동형사상
2. 부분공간
(1) 부분공간
(2) 부분공간의 성질
(3) 임베딩
3. 곱공간
(1) 곱공간
(2) 사영사상

3. 곱공간

(1) 곱공간

- 주어진 두 위상공간으로부터 새로운 위상공간을 만든다.

Thm 1. [곱위상의 기저]

두 위상공간 $(X,\ \mathfrak{I}_X)$, $(Y,\ \mathfrak{I}_Y)$ 에 대하여 $\mathscr{B}$를 다음과 같이 정의하면 $\mathscr{B}$는 곱집합 $X \times Y$상의 위상의 기저가 된다.

$$\mathscr{B} = \{U \times V \mid U \in \mathfrak{I}_X,\ V \in \mathfrak{I}_Y\}$$

Def. [곱공간]

Thm 1.에서 설정한 $\mathscr{B}$가 생성하는 위상 $\mathfrak{I}$를 $X \times Y$위의 곱위상이라 하고, 위상공간 $(X \times Y,\ \mathfrak{I})$를 X와 Y의 곱공간이라 한다.

- 두 거리공간 $(X,\ d_X)$, $(Y,\ d_Y)$ 로부터 유도되는 위상공간을 각각 $(X,\ \mathfrak{I}_X)$, $(Y,\ \mathfrak{I}_Y)$라 할 때 곱거리공간 $(X \times Y,\ d_X \times d_Y)$로부터 유도되는 위상공간 $(X \times Y,\ \mathfrak{I})$은 $(X,\ \mathfrak{I}_X)$와 $(Y,\ \mathfrak{I}_Y)$의 곱공간과 일치한다.

── Index ──
1. 연속사상
(1) 연속사상
(2) 위상동형사상
2. 부분공간
(1) 부분공간
(2) 부분공간의 성질
(3) 임베딩
3. 곱공간
(1) 곱공간
(2) 사영사상

Thm 2. [기저와 곱공간]

두 위상공간 $(X,\ \mathfrak{I}_X)$, $(Y,\ \mathfrak{I}_Y)$의 기저를 각각 $\mathscr{B}_X$, $\mathscr{B}_Y$ 라 할 때 집합족

$$\mathfrak{C} = \{U \times V \mid U \in \mathscr{B}_X,\ V \in \mathscr{B}_Y\}$$

은 $X \times Y$의 기저이다.

ex) 네 실수 a, b, c, d 에 대해

$$\mathfrak{C} = \{(a,b) \times (c,d) \mid a < b,\ c < d\}$$

는 $\mathbb{R}^2$ 의 기저이다.

── Index ──
1. 연속사상
(1) 연속사상
(2) 위상동형사상
2. 부분공간
(1) 부분공간
(2) 부분공간의 성질
(3) 임베딩
3. 곱공간
(1) 곱공간
(2) 사영사상

(2) 사영사상

Def 1. [열린사상과 닫힌사상]

두 위상공간 $(X,\ \mathfrak{I}_X)$, $(Y,\ \mathfrak{I}_Y)$ 사이의 사상을 $f : X \to Y$ 라 하자.

① X의 임의의 열린집합 U에 대하여 $f(U)$가 Y의 열린집합이면 f를 열린사상이라 한다.

② X의 임의의 닫힌집합 C에 대하여 $f(C)$가 Y의 닫힌집합이면 f를 닫힌사상이라 한다.

- 1)전단사이고 2)연속인 3)열린사상은 위상동형사상이다.

Def 2. [사영사상]

두 위상공간 $(X,\ \mathfrak{I}_X)$, $(Y,\ \mathfrak{I}_Y)$과 곱공간 $(X\times Y,\ \mathfrak{I})$ 에 대하여 $p_1(x,y)=x$, $p_2(x,y)=y$ 로 정의한 사상

$$p_1 : X\times Y\rightarrow X\ ,\ p_2 : X\times Y\rightarrow Y$$

를 사영사상이라 한다.

— Index —

1. 연속사상
(1) 연속사상
(2) 위상동형사상

2. 부분공간
(1) 부분공간
(2) 부분공간의 성질
(3) 임베딩

3. 곱공간
(1) 곱공간
(2) 사영사상

Thm 1. [사영사상의 성질]

사영사상 $p_1 : X\times Y\rightarrow X$, $p_2 : X\times Y\rightarrow Y$ 에 대하여 다음이 성립한다.

① p_1, p_2 는 연속사상이다.

② p_1, p_2 는 열린사상이다.

Thm 2.

세 위상공간 X, Y, Z 에 대하여 다음 두 명제는 동치이다.

① $f : Z\rightarrow X\times Y$ 가 연속이다.

② $p_1\circ f\ :\ Z\rightarrow X$ 와 $p_2\circ f\ :\ Z\rightarrow Y$ 가 모두 연속이다.

[연 습 문 제]

1. 1.(1).Def2 의 ex)에서 왜 f가 왜 2에서 연속이 아닌지 설명하시오.

2. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$ 에 위상 $\mathfrak{I}=\{\varnothing,\ X,\ \{2\},\ \{1,\ 2\},\ \{2,\ 3\}\}$ 가 주어질 때, X에서 X로의 모든 위상동형사상을 구하시오.

3. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$과 X위의 위상 $\mathfrak{I}=\{\varnothing,\ X,\ \{1\},\ \{2\},\ \{1,\ 2\},\ \{2,\ 3\},\ \{1,\ 2,\ 3\}\}$ 에 대해 위상공간 $(X,\ \mathfrak{I})$에서는 열린집합이 아니지만, 그 부분공간 $(A=\{1,\ 3,\ 4\},\ \mathfrak{I}_A)$에서는 열린집합인 것을 모두 구하시오.

4. 다음과 같이 정의된 두 위상공간 $(X,\ \mathfrak{I}_X)$, $(Y,\ \mathfrak{I}_Y)$

$$X=\{1,\ 2,\ 3\},\ \mathfrak{I}_X=\{\varnothing,\ X,\ \{1\},\ \{2,\ 3\}\}$$

$$Y=\{a,\ b\},\ \mathfrak{I}_Y=\{\varnothing,\ Y,\ \{a\}\}$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) $f: X \to Y$, $f(1)=a,\ f(2)=b,\ f(3)=a$ 와 같이 정의된 f가 ①연속 ②열린 ③닫힌 사상인지 각각 설명하시오.

(2) $X \times Y$위의 곱위상의 기저 $\mathscr{B}$는 $X \times Y$위의 위상은 아님을 보이시오.