

3강. 관계와 분할

연습문제 1. $B \subseteq A$ 인 두 집합 A, B 에 대하여
 $A \star B = \{X \in P(A) \mid X \supseteq B\}$ 이라 하자.
 $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, b\}$ 일 때
 $A \star B$ 를 원소나열법으로 구하시오.

연습문제 2. 집합족 F 가
 $\{\{a, b, c, d, e\}, \{c, d, e\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c\}\}$
일 때, 다음을 구하시오.
(1) $\cup F$ (2) $\cap F$

연습문제 3. 원소가 모두 9개인 곱집합 A^2 에는
(1, 2), (2, 3)이 포함된다고 한다. 이 때
집합 A 와 A^2 를 각각 구하시오.

연습문제 4. 두 집합 A, B 에 대하여
 $A \times B = B \times A$
가 성립하기 위한 조건은 무엇인지 탐구하고
서술하시오.

— Index —

- 1. 관계
 - (1) 용어의 정의
 - (2) 관계의 성질
 - (3) 여러 가지 관계
- 2. 동치관계와 분할
 - (1) 용어의 정의
 - (2) 여러 가지 정리

1. 관계

(1) 용어의 정의

- ① 관계 : 곱집합 $A \times B$ 의 부분집합

$$\mathcal{R} = (A, B, P(x, y))$$

- ② 관계 \mathcal{R} 의 해집합

$$= \{(x, y) \mid x \in A, y \in B, P(x, y) \text{는 참}\}$$

— Index —

- 1. 관계
 - (1) 용어의 정의
 - (2) 관계의 성질
 - (3) 여러 가지 관계
- 2. 동치관계와 분할
 - (1) 용어의 정의
 - (2) 여러 가지 정리

- ③ 정의역 : 적당한 $y \in B$ 에 대하여

$$x \mathcal{R} y \text{ 인 모든 } x \in A \text{ 의 집합.}$$

$$\text{Dom}(\mathcal{R})$$

- ③ 상 : 적당한 $x \in A$ 에 대하여

$$x \mathcal{R} y \text{ 인 모든 } y \in B \text{ 의 집합.}$$

$$\text{Im}(\mathcal{R})$$

— Index —

- 1. 관계
 - (1) 용어의 정의
 - (2) 관계의 성질
 - (3) 여러 가지 관계
- 2. 동치관계와 분할
 - (1) 용어의 정의
 - (2) 여러 가지 정리

(2) 관계의 성질

집합 X 에서의 관계 \mathcal{R} 에 대하여

- ① 반사성 : $\forall x \in X, x \mathcal{R} x$

- ② 대칭성 : $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$

- ③ 반대칭성 : $x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} x \Rightarrow x = y$

- ④ 추이성 : $x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$

— Index —

- 1. 관계
 - (1) 용어의 정의
 - (2) 관계의 성질
 - (3) 여러 가지 관계
- 2. 동치관계와 분할
 - (1) 용어의 정의
 - (2) 여러 가지 정리

(3) 여러 가지 관계

① 역관계 \mathcal{R}^{-1}

: $x\mathcal{R}y$ 이면 오직 그 때에만 $y\mathcal{R}^{-1}x$

즉, $\mathcal{R}^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in \mathcal{R}\}$

② 합성관계

: 집합 X 에서의 관계 G 와 H 에

대하여 합성관계 $H \circ G$

$= \{(x, y) \mid \exists z, (x, z) \in G \wedge (z, y) \in H\}$

— Index —

- 1. 관계
 - (1) 용어의 정의
 - (2) 관계의 성질
 - (3) 여러 가지 관계
- 2. 동치관계와 분할
 - (1) 용어의 정의
 - (2) 여러 가지 정리

역관계와 합성관계에 관한 정리

: 집합 X 에서의 관계 F, G, H 에

대하여 다음이 모두 성립한다.

$$1) (F^{-1})^{-1} = F$$

$$2) (H \circ G) \circ F = H \circ (G \circ F)$$

$$3) (G \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}$$

— Index —

- 1. 관계
 - (1) 용어의 정의
 - (2) 관계의 성질
 - (3) 여러 가지 관계
- 2. 동치관계와 분할
 - (1) 용어의 정의
 - (2) 여러 가지 정리

③ 동치관계

: 반사적, 대칭적, 추이적인 관계

④ 순서관계

: 반사적, 반대칭적, 추이적인 관계

— Index —

- 1. 관계
 - (1) 용어의 정의
 - (2) 관계의 성질
 - (3) 여러 가지 관계

2. 동치관계와 분할

- (1) 용어의 정의
- (2) 여러 가지 정리

2. 동치관계와 분할

(1) 용어의 정의

- ① 분할 : 집합 X 에 대하여 다음 세 조건을 만족하는 집합족
- 1) 공집합을 원소로 하지 않는다.
 - 2) X 를 덮는다.
 - 3) 서로소 집합족이다.

— Index —

- 1. 관계
 - (1) 용어의 정의
 - (2) 관계의 성질
 - (3) 여러 가지 관계

2. 동치관계와 분할

- (1) 용어의 정의
- (2) 여러 가지 정리

- ② 동치류 : 집합 X 상의 하나의 동치관계를 E 라고 할 때, $E_x = \{y \in X \mid xEy\}$
- ③ 상집합 : 집합 X 에서의 모든 동치류의 집합.
즉, $X/E = \{E_x \mid x \in X\}$
- ④ $\mathcal{R}_p (= X/P)$: $\{(x, y) \mid \exists A \in P, x, y \in A\}$

— Index —

- 1. 관계
 - (1) 용어의 정의
 - (2) 관계의 성질
 - (3) 여러 가지 관계

2. 동치관계와 분할

- (1) 용어의 정의
- (2) 여러 가지 정리

(2) 여러 가지 정리

- ① 공집합이 아닌 집합 X 위의 동치관계 E 에 대하여 다음이 모두 성립한다.
- 1) $E_x \neq \emptyset$
 - 2) $E_x = E_y \Leftrightarrow xEy$
 - 3) $E_x \cap E_y \neq \emptyset \Leftrightarrow xEy$
 - 4) X/E 는 X 의 분할이다.

— Index —

1. 관계

- (1) 용어의 정의
- (2) 관계의 성질
- (3) 여러 가지 관계

2. 동치관계와 분할

- (1) 용어의 정의
- (2) 여러 가지 정리

② 공집합이 아닌 집합 X 의 분할 P 에 대하여 다음이 모두 성립한다.

1) \mathcal{R}_p 는 X 상의 동치관계다.

2) $X/\mathcal{R}_p = P$

연습문제 1. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 상의 관계
 $G = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3)\}$ 와
 $H = \{(1, 4), (2, 1), (3, 4)\}$ 에 대하여
 다음을 구하시오.

- (1) G^{-1} (2) $G \circ H$ (3) $(G \cup H)^{-1}$

연습문제 2. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 일 때 다음 관계들의
 반사성, 대칭성, 추이성을 조사하시오.

- (1) $\mathcal{R}_1 = \{(1, 2), (3, 2), (2, 2), (2, 3)\}$
 (2) $\mathcal{R}_2 = A \times A$

연습문제 3. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 분할
 $P = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\}$ 에 대하여
 다음에 답하시오.

- (1) 집합 X 위의 동치관계 \mathcal{R}_p 를 나타내는
 순서쌍의 집합을 원소나열법으로 쓰시오.
 (2) $E = \mathcal{R}_p$ 라 할 때, E_1, E_2, E_3, E_4, E_5
 를 각각 구하시오.

연습문제 4. 집합 $X (\neq \emptyset)$ 상의 동치관계 E 에 대하여
 $X/(X/E) = E$ 임을 증명하시오.