

## 6강. 수열, 급수의 극한

### [연습문제]

1. 함수  $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$  가  $f \in \mathfrak{R}[0, 1]$  임을 보이시오.

2. 다음 명제들의 반례를 제시하시오.

(1)  $f \in \mathfrak{R}[a, b]$  이면  $[a, b]$ 에서  $f$ 의 불연속점의 개수는 유한개이다.

(2)  $f, g \in \mathfrak{R}[a, b]$  이면  $\int_a^b (f \times g) = \int_a^b f \times \int_a^b g$  이다.

3. 다음 적분을 구하시오.

(1)  $\int_0^\pi \sin x dx$     (2)  $\int_0^\pi x \sin x dx$     (3)  $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2) dx$

4. 다음 특이적분이 가능한지 판별하고, 가능하다면 그 값을 구하시오.

(1)  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$                           (2)  $\int_2^\infty \frac{1}{x \ln x} dx$

5. 다음 스틸체스적분을 구하시오.

(1)  $\int_0^3 x^2 de^x$                                   (2)  $\int_2^3 (x-1) d(x^2 + 2)$

**— Index —****1. 수열과 극한****(1) 수열의 정의****(2) 수열의 극한****(3) 코시수열****2. 주요 정리****(1) 단조수렴정리****(2) B-W 정리****3. 급수와 극한****(1) 급수의 정의****(2) 급수의 극한****(3) 여러 가지 정리**

# 1. 수열과 극한

## (1) 수열의 정의

**Def 1. [수열]**

함수  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ 를 수열  $\{a_n\}$ 이라 하고

$f(m) = a_m$  을  $\{a_n\}$ 의  $m$ 번째 항이라 한다.

**Def 2. [부분수열]**

$\{a_n\}$ 에 대하여 자연수 수열  $\{n_k\}$ 가

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$$

이면  $\{a_{n_k}\}$ 를  $\{a_n\}$ 의 부분수열이라 한다.

**— Index —****1. 수열과 극한****(1) 수열의 정의****(2) 수열의 극한****(3) 코시수열****2. 주요 정리****(1) 단조수렴정리****(2) B-W 정리****3. 급수와 극한****(1) 급수의 정의****(2) 급수의 극한****(3) 여러 가지 정리****Def 3. [증가(감소)수열]**

①  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq a_{n+1}$  인  $\{n_k\}$ 를

단조증가수열이라 한다.

$(a_n \geq a_{n+1})$ 이면 단조감소수열)

②  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n < a_{n+1}$  인  $\{n_k\}$ 를

순증가수열이라 한다.

$(a_n > a_{n+1})$ 이면 순감소수열)

**Def 4. [유계인 수열]**

$\exists M > 0$  s.t.  $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq M$

이면  $\{a_n\}$ 을 유계인 수열이라 한다.

**— Index —****1. 수열과 극한****(1) 수열의 정의****(2) 수열의 극한****(3) 코시수열****2. 주요 정리****(1) 단조수렴정리****(2) B-W 정리****3. 급수와 극한****(1) 급수의 정의****(2) 급수의 극한****(3) 여러 가지 정리**

## (2) 수열의 극한

**Def 1. [수열의 수렴]**

$a \in \mathbb{R}$ 이라 하자.  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$  s.t.

$\forall n \geq N, |a_n - a| < \epsilon$

이 성립하면  $\{a_n\}$ 은  $a$ 로 수렴한다고

하고 이를  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  로 표현한다.

**Def 2. [수열의 발산]**

적당한  $\epsilon > 0$  와 모든  $N \in \mathbb{N}$ 에 대하여

$\exists n \geq N$  s.t.  $|a_n - a| \geq \epsilon$

이면  $\{a_n\}$ 은 발산한다고 한다.

**— Index —****1. 수열과 극한**

(1) 수열의 정의

**(2) 수열의 극한**

(3) 코시수열

**2. 주요 정리**

(1) 단조수렴정리

(2) B-W 정리

**3. 급수와 극한**

(1) 급수의 정의

**(2) 급수의 극한**

(3) 여러 가지 정리

**Thm 1. [수열 극한의 유일성]** $\{a_n\}$ 이 수렴하면 그 극한은 유일하다.**Thm 2. [수열 극한의 연산]** $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 이고  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ 이면 다음이

성립한다.

$$\textcircled{1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b \quad (\text{복부호 동순})$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad (\text{단 } b \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}, b_n \neq 0)$$

**— Index —****(3) 코시수열****1. 수열과 극한**

(1) 수열의 정의

**(2) 수열의 극한****(3) 코시수열****2. 주요 정리**

(1) 단조수렴정리

(2) B-W 정리

**3. 급수와 극한**

(1) 급수의 정의

**(2) 급수의 극한**

(3) 여러 가지 정리

**Def 1. [코시수열의 정의]** $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall m, n \in \mathbb{N} \text{ with}$ 

$$m \geq n > N, |a_m - a_n| < \epsilon$$

가 성립하면  $\{a_n\}$ 을 코시수열이라 한다.**Thm 1. [코시수열과 수렴판정]** $\{a_n\}$ 이 코시수열이면  $\{a_n\}$ 은 수렴한다.**— Index —****Def 2. [실수의 구성적 정의]****① 유리수 코시수열의 집합  $\mathbb{R}^*$ 에 대하여** $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ 의 동치관계

$$E : \{a_n\} E \{b_n\} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$$

의 동치류  $[\{a_n\}]$ 을 실수라 하고, 이들의 집합을  $\mathbb{R}$ 이라 표현한다.

$$\textcircled{2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \text{ 이면 } [\{a_n\}] = \alpha \text{ 라 한다.}$$

**Thm 2. [실수의 완비성]** $\mathbb{R}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이 위로 유계이면 그 부분집합은 상한을 갖는다.

**— Index —****1. 수열과 극한**

(1) 수열의 정의

(2) 수열의 극한

(3) 코시수열

**2. 주요 정리****(1) 단조수렴정리****Thm 1. [단조수렴정리]** $\{a_n\}$ 이 단조증가(감소)하고 위(아래)로유계이면  $\{a_n\}$ 은 수렴한다.**3. 급수와 극한**

(1) 급수의 정의

(2) 급수의 극한

(3) 여러 가지 정리

**— Index —****Thm 2. [축소구간정리]**모든  $n \in \mathbb{N}$  과  $I_n = [a_n, b_n]$ 에 대하여①  $I_n = [a_n, b_n]$  이 유계인 폐구간이고②  $I_{n+1} \subset I_n$ 이며③  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$  이면 $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{\alpha\}$  인  $\alpha \in \mathbb{R}$  가 존재한다.**2. 주요 정리**

(1) 단조수렴정리

(2) B-W 정리

**3. 급수와 극한**

(1) 급수의 정의

(2) 급수의 극한

(3) 여러 가지 정리

**— Index —****(2) B-W 정리****Thm 1. [샌드위치 정리]** $L \in \mathbb{R}$  일 때 모든  $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 $a_n \leq b_n \leq c_n$  이고  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$  이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$  이다.**Thm 2. [볼차노-바이어슈트라스 정리]** $\{a_n\}$ 이 유계인 수열이면  $\{a_n\}$ 은 수렴하는

부분수열을 갖는다.

**— Index —****Cor. [최대 최소정리]****1. 수열과 극한**

(1) 수열의 정의

(2) 수열의 극한

(3) 코시수열

**2. 주요 정리**

(1) 단조수렴정리

(2) B-W 정리

**3. 급수와 극한**

(1) 급수의 정의

(2) 급수의 극한

(3) 여러 가지 정리

 $f가 [a, b]에서 연속 \Rightarrow \exists a_0, b_0 \in [a, b]$  $s.t. \forall x \in [a, b], f(a_0) \leq f(x) \leq f(b_0)$ **— Index —****3. 급수와 극한****(1) 급수의 정의****Def 1. [급수]**수열  $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

을 (무한)급수라 한다.

**1. 수열과 극한**

(1) 수열의 정의

(2) 수열의 극한

(3) 코시수열

**2. 주요 정리**

(1) 단조수렴정리

(2) B-W 정리

**3. 급수와 극한**

(1) 급수의 정의

(2) 급수의 극한

(3) 여러 가지 정리

이때  $a_n$ 을 급수의  $n$ 번째 항이라 하며

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n \text{ 을}$$

급수의 부분합이라 한다.

**— Index —****1. 수열과 극한**

(1) 수열의 정의

(2) 수열의 극한

(3) 코시수열

**2. 주요 정리**

(1) 단조수렴정리

(2) B-W 정리

**3. 급수와 극한**

(1) 급수의 정의

(2) 급수의 극한

(3) 여러 가지 정리

**Def 2. [재배열급수]** $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  가 전단사 함수일 때을  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$  의 재배열급수라 한다.

**— Index —****1. 수열과 극한**

(1) 수열의 정의

(2) 수열의 극한

(3) 코시수열

**2. 주요 정리**

(1) 단조수렴정리

(2) B-W 정리

**3. 급수와 극한**

(1) 급수의 정의

**(2) 급수의 극한**

(3) 여러 가지 정리

**(2) 급수의 극한****Def 1. [급수의 수렴과 발산]**

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  에 대한 부분합의 수열  $\{S_n\}$  이

$S \in \mathbb{R}$  로 수렴하면  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  은  $S$ 로

수렴한다고 하고  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$  로 표현한다.

만약  $\{S_n\}$  이 어떤 실수 값으로 수렴하지

않으면  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  은 발산한다고 한다.

**— Index —****1. 수열과 극한**

(1) 수열의 정의

(2) 수열의 극한

(3) 코시수열

**2. 주요 정리**

(1) 단조수렴정리

(2) B-W 정리

**3. 급수와 극한**

(1) 급수의 정의

**(2) 급수의 극한**

(3) 여러 가지 정리

**Def 2. [절대수렴과 조건수렴]**

$n \in \mathbb{N}$  에 대하여  $a_n \in \mathbb{R}$  이라 하자.

①  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  이 수렴하면  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  은

절대수렴한다고 한다.

②  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  은 발산하지만  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  은

수렴하면  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 조건수렴한다고

한다.

**— Index —****(3) 여러 가지 정리****Thm 1.**

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  이고  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$  이면

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$  이다. (복부호 동순)

**Thm 2.**

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  이 수렴하면  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  이다.

**— Index —****1. 수열과 극한**

(1) 수열의 정의

(2) 수열의 극한

(3) 코시수열

**2. 주요 정리**

(1) 단조수렴정리

(2) B-W 정리

**3. 급수와 극한**

(1) 급수의 정의

(2) 급수의 극한

(3) 여러 가지 정리

**Thm 3.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
 와  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  의 임의의 재배열 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$$
 에 대하여  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  이 절대수렴

 하고  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$  이면  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = L$  이다.
**[ 연습문제 ]**

1. 다음 명제들의 참, 거짓을 판별하고 이를 설명하시오.

$$\textcircled{1} \quad \{a_n\} \text{이 유계} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{이 존재}$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \vee \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$$

$$\textcircled{3} \quad \{a_n\} \text{이 수렴하는 부분수열을 가지면 } \{a_n\} \text{은 유계이다.}$$

$$\textcircled{4} \quad \{a_n\} \text{이 수렴} \Rightarrow \{a_n\} \text{은 코시수열}$$

$$\textcircled{5} \quad \forall n \in \mathbb{N}, |a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{n} \Rightarrow \{a_n\} \text{은 코시수열}$$

$$\textcircled{6} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \text{이 수렴} \Rightarrow a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \dots \text{이 수렴}$$

$$\textcircled{7} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha \wedge \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \alpha \beta$$

2.  $a_1 = 1$ 이고  $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$  을 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하는지 판별하시오.3.  $L$ 로 조건수렴하는 급수의 재배열급수의 값은  $L$ 이 아닐수도 있음을 급수  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ 와 이의 재배열급수

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \dots$$

하여 보이시오.