Thm 1. $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geq 0 \ \wedge\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **이 유계** $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **은 수렴**

● Let $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Then $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$ $(\because a_n \geq 0)$

$\therefore$ $\{S_n\}$ 은 단조증가.

● $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n < \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이므로 $\{S_n\}$ 은 유계.

그러므로 단조수렴정리에 의하여 $\{S_n\}$ 은 수렴한다. ■

Thm 2. [비교판정법]
$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq a_n \leq b_n$ **일 때 다음이 성립한다.**

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **이 수렴** $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **도 수렴**

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **이 발산** $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **도 발산**

● Let $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,\ T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Then $S_n \leq T_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

(1) 증명

● $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴하므로 $\{T_n\}$ 은 단조증가하고 위로 유계.

$\therefore$ 단조수렴정리에 의해 $\{T_n\}$ 은 수렴.

● Let $\lim_{n\to\infty} T_n = T$. Then $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n \leq T_n \leq T$

$\therefore$ $\{S_n\}$ 도 단조증가하고 위로 유계 $\Rightarrow$ $\{S_n\}$ 도 수렴.

그러므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 도 수렴.

(2) 증명

● $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴한다고 가정하자. 그러면 (1)에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 도 수렴한다.

이는 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 발산한다는 가정에 모순!

그러므로 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 도 발산. ■

Thm 3. [근판정법 - $M>1$ 인 경우]

모든 $n\in\mathbb{N}$ 에 대하여 $a_n\geq 0$ 이고 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=M$ 일 때 $M>1$ 이면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 은 발산한다.

● $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=M \Rightarrow$ For $\epsilon=\frac{1}{2}(M-1)>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$ $s.t.$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $with$ $n\geq N$,

$\left|\sqrt[n]{a_n}-M\right|<\epsilon$

즉, $\forall n\in\mathbb{N}$ $with$ $n\geq N$, $1<\frac{1}{2}M+\frac{1}{2}=M-\epsilon<\sqrt[n]{a_n}$

$\therefore$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $with$ $n\geq N$, $1\leq a_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n\neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 은 발산. ■