2.(2).Thm.

(⇒) Let $p \in X$, $p \in B_2 \in \mathscr{B}_2$. Then $p \in B_2 \in \mathscr{B}_2 \subset \mathfrak{I}_2 \subset \mathfrak{I}_1$ (∵①)

$\therefore$ $B_2 \in \mathfrak{I}_1 \Rightarrow \exists B_1 \in \mathscr{B}_1 \;\; s.t. \;\; p \in B_1 \subset B_2$ (∵2.(1).Thm)

(⇐) Let $U \in \mathfrak{I}_2$

Claim : $U \in \mathfrak{I}_1 \Rightarrow \mathfrak{I}_2 \subset \mathfrak{I}_1$

- $\forall p \in U$, $\exists B_2 \in \mathscr{B}_2 \;\; s.t. \;\; p \in B_2 \subset U$ (∵2.(1).Thm)
- ②에 의해 $\exists B_1 \in \mathscr{B}_1 \;\; s.t. \;\; p \in B_1 (\subset B_2 \subset U)$

$\therefore$ $p \in B_1 \in \mathscr{B}_1 \subset \mathfrak{I}_1 \Rightarrow U \in \mathfrak{I}_1$ ∎

3.(2).Thm.

1) $\forall p \in X$, $\exists B \in \mathscr{B} \;\; s.t. \;\; p \in B \;\; \Rightarrow$ 자명. (∵Def // $\forall x_0 \in X$, $x_0 \in B_r(x_0)$)

2) $\forall B_1 . B_2 \in \mathscr{B}$, $\forall p \in B_1 \cap B_2$, $\exists \;\; B_3 \in \mathscr{B} \;\; s.t. \;\; p \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

- For $B_1 = B_{r_1}(x_1)$, $B_2 = B_{r_2}(x_2)$, $p = x$, let $r = \min\left[r_1 - d(x_1, x),\; r_2 - d(x_2, x)\right]$

  Then $r > 0$

Claim : $B_r(x) \subset B_{r_1}(x_1) \cap B_{r_2}(x_2)$

① $r = r_1 - d(x_1, x)$ 인 경우.

$$\begin{aligned} \forall x_0 \in B_r(x),\; d(x_0, x_1) &\le d(x_0, x) + d(x, x_1) \quad (\because \text{Def.}) \\ &< r + d(x, x_1) \\ &= r_1 - d(x_1, x) + d(x, x_1) \\ &= r_1 \end{aligned}$$

$\therefore$ $x_0 \in B_{r_1}(x_1)$

② $r = r_2 - d(x_2, x)$ 인 경우.

마찬가지로, $d(x_0, x_2) < r_2 \quad \therefore \;\; x_0 \in B_{r_2}(x_2)$

$\therefore$ ①, ②에 의해 $x_0 \in B_{r_1}(x_1) \cap B_{r_2}(x_2) \Rightarrow B_r(x) \subset B_{r_1}(x_1) \cap B_{r_2}(x_2)$

그러므로 2.(1).Cor. 에 의해 $\mathscr{B}$는 기저다. ∎

3.(2).거리공간으로 유도 불가능한 위상공간의 예.

$X = \{1,\; 2\}$ 에 대한 밀착위상공간.

- Let $d(1,2) = r > 0$. Then $\mathscr{B} = \{\{1\},\; \{1,2\},\; \{2\}\}$

  $\{1\}$은 1을 중심으로 거리가 r보다 작은 열린구.

  $\{1,2\}$는 1(또는 2)를 중심으로 거리가 r보다 큰 열린구.

  $\{2\}$는 2을 중심으로 거리가 r보다 작은 열린구.
- $\mathscr{B}$로부터 $\mathfrak{I} = \{\varnothing,\; X,\; \{1\},\; \{2\}\}$: 이산위상

즉, 밀착위상은 유도되지 않는다.