# 2강. 실수체계



## 1. 자연수

### (1) 페아노 공리계

자연수는 다음의 다섯 공리로 이루어진 페아노 공리계를 만족하는 수체계이다.

① $1 \in \mathbb{N}$

② $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \in \mathbb{N}$ ( $'$는 그 다음 수)

③ $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \neq n'$

④ $\forall n,\ m \in \mathbb{N},\ n' = m' \Rightarrow n = m$

── Index ──
1. 자연수
(1) 페아노 공리계
(2) 자연수의 성질
2. 유리수와 무리수
(1) 집합의 구성
(2) 조밀성
3. 실수
(1) 체 공리
(2) 순서 공리
(3) 완비성 공리

⑤ $1 \in S \wedge (\forall n \in S,\ n' \in S) \Rightarrow \mathbb{N} \subseteq S$

(‘1’과 ‘그 다음 수’는 무정의 용어이다.)

**Thm. [수학적 귀납법]**

$n' = n + 1$ 이라 정의할 때, 명제 $P(n)$에 대하여 두 조건

① $P(1)$이 참

② $P(n)$이 참 $\Rightarrow$ $P(n+1)$이 참

이 성립하면 $P(n)$은 모든 자연수 $n$에 대하여 참이다.

## (2) 자연수의 성질

**① 정렬성**

자연수집합 $\mathbb{N}$의 공집합이 아닌 부분집합은 항상 최소원소를 갖는다.

② 자연수집합 $\mathbb{N}$은 위로유계가 아니다.

**③ 아르키메데스 성질**

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N}\ \ s.t.\ \frac{1}{n} < \epsilon$$

— Index —
1. 자연수
(1) 페아노 공리계
(2) 자연수의 성질
2. 유리수와 무리수
(1) 집합의 구성
(2) 조밀성
3. 실수
(1) 체 공리
(2) 순서 공리
(3) 완비성 공리

# 2. 유리수와 무리수

## (1) 집합의 구성

① 정수집합 : $\mathbb{Z} = (-\mathbb{N}) \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$

② 유리수집합

: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \right\}$

③ 무리수집합 : $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

— Index —
1. 자연수
(1) 페아노 공리계
(2) 자연수의 성질
2. 유리수와 무리수
(1) 집합의 구성
(2) 조밀성
3. 실수
(1) 체 공리
(2) 순서 공리
(3) 완비성 공리

## (2) 조밀성

**Thm 1. [유리수의 조밀성]**

$\forall a, b \in \mathbb{R},\ a < b \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q}\ \ s.t.\ a < r < b$

**Thm 2. [무리수의 조밀성]**

$\forall a, b \in \mathbb{R},\ a < b \Rightarrow \exists s \in \mathbb{I}\ \ s.t.\ a < s < b$

# 3. 실수

## (1) 체 공리

집합 $S$와 $S$에 부여된 두 이항연산 $+$, $\cdot$ 가 다음 9개의 공리를 만족하면, 대수구조 $(S, +, \cdot)$ 를 체라 한다.

① $x, y \in S \Rightarrow x+y=y+x$

② $x, y, z \in S \Rightarrow x+(y+z)=(x+y)+z$

③ $\forall x \in S$, $\exists 0 \in S$ s.t. $0+x=x$

④ $\forall x \in S$, $\exists -x \in S$ s.t. $x+(-x)=0$



⑤ $x, y \in S \Rightarrow x \cdot y = y \cdot x$

⑥ $x, y, z \in S \Rightarrow x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

⑦ $\forall x \in S$, $\exists 1(\neq 0) \in S$ s.t. $1 \cdot x = x$

⑧ $\forall x(\neq 0) \in S$, $\exists x^{-1} \in S$ s.t.
$x \cdot (x^{-1}) = 1$

⑨ $x, y, z \in S \Rightarrow x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

※ $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ 와 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ 은 모두 체다.



## (2) 순서 공리

### 1) 순서 공리

$\mathbb{R}$에는 다음 두 조건을 만족하는 공집합이 아닌 부분집합 $P$가 존재한다.

① $\forall x, y \in P$, $x+y \in P \wedge xy \in P$

② 임의의 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 다음 중 단 하나만 성립한다.
ⅰ) $x \in P$  ⅱ) $x=0$  ⅲ) $-x \in P$

## 2) 삼분성질

Def. [부등식의 정의]

임의의 $a, b \in \mathbb{R}$ 에 대하여

① $a-b \in P \Rightarrow a > b \ \vee \ b < a$

② $a-b \in P \cup \{0\} \Rightarrow a \geq b \ \vee \ b \leq a$

**Thm. [삼분성질]**

임의의 $a, b \in \mathbb{R}$ 에 대하여 다음 중 단 하나만 성립한다.

ⅰ) $a > b$ ⅱ) $a = b$ ⅲ) $a < b$

— Index —
1. 자연수
(1) 페아노 공리계
(2) 자연수의 성질
2. 유리수와 무리수
(1) 집합의 구성
(2) 조밀성
3. 실수
(1) 체 공리
(2) 순서 공리
(3) 완비성 공리

# (3) 완비성 공리

## 1) 완비성 공리

$\mathbb{R}$의 공집합이 아닌 부분집합이 위로 유계이면 그 부분집합은 상한을 갖는다.

Def. [상한] 부분순서집합 $A$의 부분집합 $B$의 상계들의 집합이 최소원소를 가질 때 그 최소원소를 $B$의 상한이라 하고, $\sup B$ 로 나타낸다.

— Index —
1. 자연수
(1) 페아노 공리계
(2) 자연수의 성질
2. 유리수와 무리수
(1) 집합의 구성
(2) 조밀성
3. 실수
(1) 체 공리
(2) 순서 공리
(3) 완비성 공리

## 2) 주요 정리

Thm 1. 상한은 유일하다.

Thm 2. $s \in \mathbb{R}$가 집합 $S$의 상계일 때 다음 세 명제는 동치이다.

① $s = \sup S$

② $\forall \epsilon > 0, \ \exists x \in S \ s.t. \ s - \epsilon < x \leq s$

③ $\forall \epsilon > 0, \ S \cap (s-\epsilon, \ s] \neq \varnothing$

Thm 3. $\mathbb{Q}$는 완비성을 갖지 않는다.

※ 완비성 공리로부터 『 1. 자연수 > (2) 자연수의 성질 > ② 』도 증명가능하다.

## 3) 완비성의 예 - 무한소수

위로 유계인 임의의 무한소수 부분집합을 $A$라 하자. 이제

$$a_0 = \max\{x_0 \mid x_0 . x_1 x_2 x_3 \cdots \in A\}$$
$$a_1 = \max\{x_1 \mid a_0 . x_1 x_2 x_3 \cdots \in A\}$$
$$\cdots$$
$$a_k = \max\{x_k \mid a_0 . a_1 \cdots a_{k-1} x_k x_{k+1} \cdots \in A\}$$

라 하면, 무한소수 $a_0 . a_1 a_2 a_3 \cdots$은 집합 $A$의 상한이다. 즉, 무한소수의 집합은 완비성 공리를 만족한다.

**[ 연 습 문 제 ]**

1. [베르누이 부등식] 다음 명제를 증명하시오.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ h > -1 \Rightarrow (1+h)^n \geq 1 + nh$$

2. 제곱하여 2가 되는 유리수는 존재하지 않음을 증명하시오.

3. $0 < 1$ 임을 증명하시오.

4. 개구간 $(0,\ 1)$의 상한이 1임을 증명하시오.

5. $x \in \mathbb{R}$ 일 때 다음 명제를 증명하시오.

$$\forall \epsilon > 0,\ 0 \leq x < \epsilon \Rightarrow x = 0$$