# 4강. 선형사상

**[ 연 습 문 제 ]**

1. 지난 강의에서 배운 대수구조들의 관계도를 작성하시오.

2. 다음의 연산이 부여된 집합이 벡터공간인지 아닌지 판별하고, 아니라면 그 이유를 설명하시오.
   (1) 표준적인 벡터덧셈과 아래의 스칼라배가 부여된 모든 실수 3-튜플 $(x,\ y,\ z)$ 의 집합.
   $$k(x,\ y,\ z) = (k^2x,\ k^2y,\ k^2z)$$
   (2) 표준적인 행렬덧셈과 스칼라배가 부여된 모든 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ 꼴의 $2\times 2$ 대각행렬 집합.

3. 세 벡터 $\mathrm{u} = (-1, 0, 1, 2)$, $\mathrm{v} = (2, 1, 3, 0)$, $w = (3, -1, 2, 5)$ 에 대하여 다음 중 $span\{\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}\}$ 의 벡터인 것을 모두 고르시오.
   ① $(0, 0, 0, 0)$　　② $(2, 2, 2, 2)$
   ③ $(3, 6, 7, -12)$　　④ $(9, 0, 11, 12)$

4. $R^4$ 의 부분집합 $\{(2, 2, -6, -2), (2, 0, -2, 1), (3, 1, -5, 0)\}$ 가 선형독립인지 아닌지 판별하고, 아니라면 각 벡터를 나머지 두 벡터의 선형결합으로 표현하시오.

5. $R^3$ 에 대해서 ① 정규지만 직교아닌, ② 직교지만 정규아닌, ③ 정규직교인 기저의 예를 드시오.

# 1. 선형사상

## (1) 선형사상

### ① 정의

$F$-벡터공간 $V$, $W$ 에 대하여 $V$의 성질을 보존하는, 다음 두 조건을 만족하는 사상 $L : V \to W$

1) $L(u+v) = L(u) + L(v)$ $(u,\ v \in V)$
2) $L(kv) = kL(v)$ $(k \in F,\ v \in V)$

— Index —
1. 선형사상
(1) 선형사상
(2) 여러 선형사상
2. 선형대수학의 기본정리
3. 차원정리
(1) 차원정리
(2) 비둘기집 원리
4. 계수정리
(1) 관련 용어
(2) 계수정리

### ② 관련 용어

$L : V \to W$ 가 선형사상일 때,

* 핵 : $\ker L = L^{-1}(\vec{0}) = \{v \in V \mid L(v) = \vec{0}\}$
* 상 : $\mathrm{im}\, L = L(V) = \{L(v) \in W \mid v \in V\}$
* 자기사상 : $V = W$ 인 $L$
* 단사사상 : $L(u) = L(v) \Rightarrow u = v$ 인 $L$
* 전사사상 : $L(V) = W$ 인 $L$
* 동형사상 : 단사사상인 전사사상
* 자기동형사상 : 자기사상인 동형사상

— Index —
1. 선형사상
(1) 선형사상
(2) 여러 선형사상
2. 선형대수학의 기본정리
3. 차원정리
(1) 차원정리
(2) 비둘기집 원리
4. 계수정리
(1) 관련 용어
(2) 계수정리

* 항등사상 : $L(v) = v$ 인 $L\ (= I_V)$
* 사상의 합성

: 두 선형사상 $L_1 : V \to U$, $L_2 : U \to W$ 의 합성은 $L_2 \circ L_1 : V \to W$ 로 쓴다.

* 역사상

1) $L_2 \circ L_1 = I_V$ 일 때, $L_2$를 $L_1$의 왼쪽 역사상, $L_1$를 $L_2$의 오른쪽 역사상이라 한다.
2) 왼쪽 역사상이자 오른쪽 역사상을 양쪽 역사상 또는 역사상이라 한다.

## (2) 여러 선형사상

$L: V \to W$ 가 선형사상이고 $v \in V$ 일 때,

① $L(v)=\vec{0}$ : 영사상

② $L(v)=v$ : 항등사상

③ $L(v)=kv$ (단, $k$는 스칼라)

④ $L(v)=Mv^{(T)}$
(단, $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$, $V=F^n$, $W=F^m$)

⑤ $L(v)=\langle v, v_0 \rangle$ (단, $v_0 \in V$)

…

— Index —
1. 선형사상
(1) 선형사상
(2) 여러 선형사상
2. 선형대수학의 기본정리
3. 차원정리
(1) 차원정리
(2) 비둘기집 원리
4. 계수정리
(1) 관련 용어
(2) 계수정리

# 2. 선형대수학의 기본정리

$F$-벡터공간 $V$, $W$ 에 대해 $V$에서 $W$로의 선형사상들의 집합을 $\mathcal{L}(V, W)$라 하고, 다음과 같이 $\mathcal{L}(V, W)$ 위에 합과 스칼라배를 정의한다. ($v \in V$, $k \in F$)

1) $(L_1+L_2)(v)=L_1(v)+L_2(v)$

2) $(kL)(v)=kL(v)$

이제 $F$위의 $m\times n$ 행렬들의 집합을 $\mathcal{M}_{m\times n}(F)$ 라 하고, 두 사상 $f$, $g$ 를

— Index —
1. 선형사상
(1) 선형사상
(2) 여러 선형사상
2. 선형대수학의 기본정리
3. 차원정리
(1) 차원정리
(2) 비둘기집 원리
4. 계수정리
(1) 관련 용어
(2) 계수정리

다음과 같이 정의한다.

$f: \mathcal{L}(V, W) \to \mathcal{M}_{m\times n}(F)$
, $f(L)=[L]_{B_W}^{B_V}=M$

$g: \mathcal{M}_{m\times n}(F) \to \mathcal{L}(V, W)$
, $g(M)=L_M$ $\left([L_M(\mathrm{v})]_{B_W}=M[\mathrm{v}]_{B_V}\right)$

———— 기호 정의 ————

1) $B_V$는 $V$의, $B_W$는 $W$의 순서기저. 즉, 기저의 원소들은 순서가 정해져 있고 바뀌지 않는다.

2) $\mathrm{v} \in V$, $\mathrm{v} = k_1 \mathrm{v}_1 + \cdots + k_n \mathrm{v}_\mathrm{n}$ 에 대해

$[\mathrm{v}]_{B_V} = (k_1, \cdots, k_n)^T$

3) $[L]_{B_W}^{B_V} = \left( [L(\mathrm{v}_1)]_{B_W} \cdots [L(\mathrm{v}_\mathrm{n})]_{B_W} \right)$

---

그러면 $f$와 $g$는 모두 동형사상이다. 또한 두 사상 $f$와 $g$는 서로 역사상 관계이다.

—— Index ——
1. 선형사상
(1) 선형사상
(2) 여러 선형사상
2. 선형대수학의 기본정리
3. 차원정리
(1) 차원정리
(2) 비둘기집 원리
4. 계수정리
(1) 관련 용어
(2) 계수정리

# 3. 차원정리

## (1) 차원정리

유한차원 벡터공간 $V$와 선형사상 $L : V \to W$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\dim(V) = \dim(\ker L) + \dim(\mathrm{im} L)$$

—— Index ——
1. 선형사상
(1) 선형사상
(2) 여러 선형사상
2. 선형대수학의 기본정리
3. 차원정리
(1) 차원정리
(2) 비둘기집 원리
4. 계수정리
(1) 관련 용어
(2) 계수정리

## (2) 비둘기집 원리

### ① 따름정리

차원이 같은 두 유한 차원 벡터공간 $V$, $W$사이에 선형사상 $L$이 정의되어 있으면 다음이 성립한다.

$L$은 전사 $\Leftrightarrow$ $L$은 단사 $\Leftrightarrow$ $L$은 전단사

## ② 비둘기집 원리

공집합이 아닌 두 유한집합 $A$, $B$ 의 크기가 서로 같을 때, 함수 $f : A \to B$ 는 다음을 만족한다.

$f$는 전사 $\Leftrightarrow$ $f$는 단사 $\Leftrightarrow$ $f$는 전단사

— Index —
1. 선형사상
(1) 선형사상
(2) 여러 선형사상
2. 선형대수학의 기본정리
3. 차원정리
(1) 차원정리
(2) 비둘기집 원리
4. 계수정리
(1) 관련 용어
(2) 계수정리

# 4. 계수정리

## (1) 관련 용어

행렬 $M \in \mathcal{M}_{m \times n}(F)$ 에 대하여

* 열공간 : $M$의 열벡터들로 생성된 공간
  열계수 : 열공간의 차원. col-rank$M$
* 행공간 : $M$의 행벡터들로 생성된 공간
  행계수 : 행공간의 차원. row-rank$M$
* 영공간 : 연립방정식 $MX = 0$ 의 해공간
  nullity$M$ : $M$의 영공간의 차원

— Index —
1. 선형사상
(1) 선형사상
(2) 여러 선형사상
2. 선형대수학의 기본정리
3. 차원정리
(1) 차원정리
(2) 비둘기집 원리
4. 계수정리
(1) 관련 용어
(2) 계수정리

## (2) 계수정리

### ① 계수정리

행렬 $M \in \mathcal{M}_{m \times n}(F)$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\text{col-rank}M = \text{row-rank}M$$

이때 행렬 $M$의 행공간 및 열공간의 공통차원을 $M$의 계수 rank$M$ 이라 한다.

## ② Rank-Nullity 정리

행렬 $M \in \mathscr{M}_{m\times n}(F)$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$n = \mathrm{rank}M + \mathrm{nullity}M$$

**[ 연 습 문 제 ]**

1. $n$차 다항식의 집합 $P_n$와 $(n+1)$차 다항식의 집합 $P_{n+1}$에 대하여 사상 $L : P_n \to P_{n+1}$ 을 다음과 같이 정의했을 때, $L$이 선형사상임을 보이시오.

$$p(x) \in P_n \text{ 에 대하여 } L(p(x)) = x\,p(x) \in P_{n+1}$$

2. 3차 다항식의 집합 $P_3$과 $2\times 2$ 행렬의 집합 $\mathscr{M}_{2\times 2}(R)$ 및 $R^4$ 에 대하여 다음 두 사상

$$L_1 : P_3 \to R^4 \ ,\ L_2 : \mathscr{M}_{2\times 2}(R) \to R^4$$

이 모두 동형사상임을 증명하시오.

3. 벡터공간 $V$의 기저 $B_V = \{v_1, v_2, v_3\}$ 에 대하여 자기사상 $L : V \to V$이 $[L]_{B_V}^{B_V} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 을 만족한다. 이때 $V$의 기저 $B'_V = \{v_1 , v_1 + v_2 , v_1 + v_2 + v_3\}$ 에 대하여 $[L]_{B'_V}^{B'_V}$ 를 구하시오.

4. 행렬 $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ 에 대하여 Rank-Nullity 정리가 성립함을 보이시오.