Chapter 1 집합 및 함수

1.1 집합

정의 1.1 전체집합 X와 X의 부분집합족 $\{A_i\}_{i\in I}$에 대하여 합집합과 교집합을 다음과 같이 정의한다.

(1) $\bigcup_{i\in I} A_i = \{x\in X \mid \text{적어도 한 } i\in I\text{에 대하여 } x\in A_i\}$

(2) $\bigcap_{i\in I} A_i = \{x\in X \mid \text{모든 } i\in I\text{에 대하여 } x\in A_i\}$

정리 1.1 (De Morgan의 법칙)
전체집합 X와 X의 부분집합족 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c,\ \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$$

『증명』

정리 1.2 $A\cap\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A\cap A_\lambda)$, $A\cup\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(A\cup A_\lambda)$

『증명』

1.2 관계

정의 1.2 집합 A에 대하여 ~가 다음 공리를 만족할 때, ~를 A상의 **동치관계(equivalence relation)**라 한다.

(1) 모든 $a \in A$에 대해서 $a \sim a$ **[반사적(reflexive)]**

(2) $a \sim b$이면 $b \sim a$ **[대칭적(symmetric)]**

(3) $a \sim b$, $b \sim c$이면 $a \sim c$ **[추이적(transitive)]**

예제 1.1

전체집합 X에 대하여 $\sim$가 동치관계인지 판정하시오.

(1) $X = 2^{\mathbb{R}}$, $A \sim B \Leftrightarrow A \subset B$

(2) $X = M_2(\mathbb{R})$, $A \sim B \Leftrightarrow B = P^{-1}AP$인 가역행렬 P가 존재한다.

(단, $M_2(\mathbb{R})$는 2×2 실계수 행렬 전체의 집합)

『풀이』

정의 1.3 ~가 A상의 동치관계일 때, $a \in A$에 대하여

$$[a] = \{x \in A \mid x \sim a\}$$

를 a의 **동치류(equivalence class)**라 하고, 동치류 전체의 집합을

$$A/\sim = \{[a] \mid a \in A\}$$

로 나타내고 **상(몫)집합(quotient set)**이라 부른다.

예제 1.2

$\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$의 두 원소 x, y에 대하여

$$\mathrm{x} \sim \mathrm{y} \Leftrightarrow \mathrm{y} = c\mathrm{x}\text{인 양의 실수 } c\text{가 존재한다.}$$

라 정의할 때, $\sim$가 동치관계임을 보이고 동치류와 상집합을 구하시오.

『풀이』

정리 1.3 ~을 A상의 동치관계, $[a]$를 $a \in A$의 동치류라 하면 다음이 성립한다.
(1) 모든 $a \in A$에 대해서 $a \in [a]$
(2) $a \sim b \Leftrightarrow [a] = [b]$
(3) $[a] \cap [b] = \varnothing$ 또는 $[a] = [b]$

『증명』

정의 1.4 집합 X의 부분집합족 $\mathscr{A} = \{A_i \mid i \in I\}$가 다음을 만족하면 $\mathscr{A}$를 집합 X의 **분할 (partition)**이라 한다.
(i) $\forall i \in I,\ A_i \neq \varnothing$
(ii) $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$
(iii) $X = \bigcup_{i \in I} A_i$

정리 1.4 $\sim$을 A상의 동치관계라 하면, 상(몫)집합 $A/\sim$은 A의 분할이다.

『증명』

정리 1.5 $\mathscr{A}$가 집합 A의 분할이면 상집합이 $\mathscr{A}$가 되는 A상의 동치관계가 존재한다.

1.3 함수

정의 1.5 함수 $f: X \to Y$에 대하여 다음과 같이 정의한다.

(1) **단사함수(injective function)**
임의의 $x_1, x_2 \in X$에 대하여 $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$가 성립한다.

(2) **전사함수(surjective function)**
임의의 $y \in Y$에 대하여 $f(x) = y$를 만족시키는 $x \in X$가 존재한다.

(3) **전단사함수(bijective function)**
전사이면서 동시에 단사인 함수.

정의 1.6 함수 $f: X \to Y$와 $A \subset X$, $B \subset Y$에 대하여 다음과 같이 정의한다.

(1) f에 의한 A의 **상(image):** $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$

(2) f에 의한 B의 **역상(inverse image):** $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$

예제 1.3

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times [0, 1]$, $f(n) = \left(2n, \dfrac{1}{n}\right)$에 대하여

$$f^{-1}(P \times (0, 1)),\ f^{-1}\left(4\mathbb{N} \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$$

을 구하시오. (단, P는 소수 전체의 집합이다.)

『풀이』

예제 1.4

주어진 함수 f와 $A \subset \mathbb{R}^2$에 대하여 $f(A)$를 구하시오.

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f((x, y)) = x^2 + y,\ A = (1, 3) \times (1, 2)$$

『풀이』

정리 1.6 함수 $f: X \to Y$와 $A_i,\ A,\ A' \subset X,\ B_i, B, B' \subset Y$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$

(2) $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$

(3)
$f(A - A') \supset f(A) - f(A')$

(1′) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

(2′) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

(3′) $f^{-1}(B - B') = f^{-1}(B) - f^{-1}(B')$

f가 단사인 경우 (2), (3)은 등호가 성립한다.

『증명』

예제 1.5

정리 1.6 (2), (3)에서 등호가 성립하지 않는 예를 구하시오.

『풀이』

정리 1.7 함수 $f : X \to Y$와 $A \subset X$, $B \subset Y$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $A \subset f^{-1}(f(A))$, f가 단사함수면 등호성립

(2) $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$, f가 전사함수면 등호성립

『증명』

예제 1.6

정리 1.7에서 등호가 성립하지 않는 예를 구하시오.

『풀이』

정의 1.7

(1) **유한집합(finite set)**: 공집합이거나, 적당한 자연수 n이 존재하여 $\{1, 2, \cdots, n\}$과 전단사 함수가 존재하는 집합

(2) **무한집합(infinite set)**: 유한집합이 아닌 집합

(3) **가부번집합(countable infinite set)**: $\mathbb{N}$와 전단사함수가 존재하는 집합

(4) **가산집합(countable set)**: 유한집합 또는 가부번집합

(5) **비가산집합(uncountable set)**: 가산집합이 아닌 집합

정리 1.8

(1) 가산집합의 부분집합은 가산집합이다.

(2) 임의의 무한집합은 가산무한집합을 부분집합으로 갖는다.

(3) 가산집합의 가산합집합은 가산집합이다.

예제 1.7

다음을 보이시오.

(1) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$는 가부번 집합이다.

(2) $\mathbb{Q}^c$, $\mathbb{R}$는 비가산 집합이다.

『풀이』

예제 1.8

다음을 보이시오.

(1) A, B가 가부번 집합이면 $A\times B$ 역시 가부번 집합이다.

(2) $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\cdots$는 비가산 집합이다.

(3) $\mathscr{A}=\{A\,|\,A$는 $\mathbb{N}$의 유한 부분집합$\}$는 가부번 집합이다.

『풀이』

Chapter 2 위상공간

2.1 위상공간

정의 2.1 집합 X에 대하여 X의 부분집합족 $\mathfrak{I}$가 다음 공리를 만족할 때 $\mathfrak{I}$를 X상의 **위상(topology)**이라 한다.

(ⅰ) X와 $\varnothing$은 $\mathfrak{I}$에 속한다.

(ⅱ) $\mathfrak{I}$에 속하는 집합의 임의의 합집합은 $\mathfrak{I}$에 속한다.

(ⅲ) $\mathfrak{I}$에 속하는 임의의 두 집합의 교집합은 $\mathfrak{I}$에 속한다.

이 때 $\mathfrak{I}$의 원소를 **$\mathfrak{I}$-열린집합($\mathfrak{I}$-open sets)**, 또는 간단히 **열린집합(open sets)**이라 하고 $(X, \mathfrak{I})$를 **위상공간(topological space)**이라 한다.

정리 2.1 위상공간 $(X, \mathfrak{I})$와 $G \subset X$에 대하여 다음이 성립한다.

$$G \in \mathfrak{I} \Leftrightarrow \forall x \in G,\ \exists H \in \mathfrak{I} \text{ s.t. } x \in H \subset G$$

『증명』

정의 2.2 임의의 집합 $X(\neq \varnothing)$에 대하여 다음과 같이 정의한다.

(1) $\{\varnothing, X\}$: **비이산위상(밀착위상, indiscrete topology)**

(2) $2^X = \{A \mid A \subset X\}$: **이산위상(discrete topology)**

정리 2.2 위상공간 $(X, \mathfrak{I})$에 대하여 $\mathfrak{I}$가 이산위상일 필요충분조건은 임의의 $x \in X$에 대하여 $\{x\} \in \mathfrak{I}$인 것이다.

『증명』

정의 2.3 임의의 집합 $X(\neq \varnothing)$에 대하여 다음과 같이 정의한다.

(1) $\mathfrak{I}_f = \{A \subset X \mid X - A$는 유한집합$\} \cup \{\varnothing\}$: **여유한위상(finite complement topology)**

(2) $\mathfrak{I}_c = \{A \subset X \mid X - A$는 가산집합$\} \cup \{\varnothing\}$: **여가산위상(cocountable topology)**

예제 2.1

정의 2.3의 (1), (2)는 X상의 위상임을 보이시오.

『풀이』

정리 2.3

(1) 유한집합 X상의 여유한위상 $\mathfrak{I}$는 이산위상이다.

(2) 가산집합 X상의 여가산위상 $\mathfrak{I}$는 이산위상이다.

『증명』

정의 2.4 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$에 대하여 다음과 같이 정의한다.

(1) $\mathfrak{I}=\{G\subset \mathbb{R} \mid \forall x\in G,\ \exists a,\ b\in \mathbb{R}\ s.t.\ x\in(a,\ b)\subset G\}$: **보통위상(usual topology)**

(2) $\mathfrak{I}_l=\{G\subset \mathbb{R} \mid \forall x\in G,\ \exists a,\ b\in \mathbb{R}\ s.t.\ x\in[a,\ b)\subset G\}$: **하한위상(lower limit topology)**

예제 2.2

정의 2.4의 (1), (2)는 $\mathbb{R}$ 상의 위상임을 보이시오.

『풀이』

예제 2.3

빈 칸에 O, X를 채워 넣으시오.

	$(a,\ b)$	$[a,\ b)$	$(a,\ b]$	$[a,\ b]$	$(-\infty,\ b)$	$(-\infty,\ b]$	$(a,\ \infty)$	$[a,\ \infty)$
보통위상의 원소								
하한위상의 원소								

『풀이』

예제 2.4

$\mathbb{R}$ 상의 보통위상에서 $\mathbb{Q}$ 를 포함하고 $\mathbb{R}$ 이 아닌 열린집합이 존재한다.
그러한 열린집합을 구하시오.

예제 2.5

$\mathbb{R}$ 상의 보통위상 $\mathfrak{I}$, 하한위상 $\mathfrak{I}_l$에 대하여 $\mathfrak{I} \subsetneq \mathfrak{I}_l$이 성립한다.

예제 2.6

열린집합의 임의의 교집합은 열린집합이 아니다. 그러한 예를 구하시오.

『풀이』

정리 2.4 집합 X와 위상공간 $(Y, \mathfrak{I}_Y)$에 대하여 함수 $f : X \to (Y, \mathfrak{I}_Y)$에 의하여 생성된

$$\mathfrak{I}_X = \{f^{-1}(G) \mid G \in \mathfrak{I}_Y\}$$

는 X상의 위상이다.

『증명』

예제 2.7

$\mathfrak{I}$를 $\mathbb{R}$ 상의 보통위상이라 하자. 함수

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \begin{cases} x\ ,\ x \in \mathbb{Q} \\ -x\ ,\ x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

에 대하여

$$\mathfrak{I}_1 = \{f^{-1}(G) \mid G \in \mathfrak{I}\}$$

라 할 때, $A = (-1, 1)$, $B = (1, 3)$이 $\mathfrak{I}_1$의 원소인지 판정하시오.

『풀이』

정리 2.5 위상공간 $(X, \mathfrak{I}_X)$와 집합 Y에 대하여 함수 $f:(X, \mathfrak{I}_X) \to Y$에 의하여 생성된

$$\mathfrak{I}_Y = \{G \subset Y \mid f^{-1}(G) \in \mathfrak{I}_X\}$$

는 Y상의 위상이다.

『증명』

예제 2.8

$\mathfrak{I}$를 $\mathbb{R}$ 상의 보통위상이라 하자. 함수

$$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x - [x]$$

에 대하여

$$\mathfrak{I}_1 = \{G \subset \mathbb{R} \mid f^{-1}(G) \in \mathfrak{I}\}$$

라 할 때, $A = (-1, 1/2)$, $B = (1/2, 2)$가 $\mathfrak{I}_1$의 원소인지 판정하시오.

『풀이』

2.2 닫힌집합, 집적점, 폐포

정의 2.5 X를 위상공간이라 하자. X의 부분집합 C의 여집합 C^c이 열린집합일 때 C를 **닫힌집합(closed set)**이라 한다.

정리 2.6 위상공간 X에 대하여 다음 성질이 성립한다.
(1) $X, \varnothing$은 닫힌집합이다.
(2) 닫힌집합의 임의의 교집합은 닫힌집합이다.
(3) 닫힌집합의 유한 합집합은 닫힌집합이다.

『증명』

예제 2.9

여유한, 여가산위상에서 닫힌집합이 될 필요충분조건을 제시하시오.

『풀이』

예제 2.10

닫힌집합의 임의의 합집합은 닫힌집합이 아니다. 예를 들어 보아라.

『풀이』

정의 2.6 위상공간 $(X, \mathfrak{I})$에 대하여 $p \in X$, $A \subset X$라 하자. p를 포함하는 임의의 열린집합 G에 대하여, $(G - \{p\}) \cap A \neq \varnothing$일 때, 점 $p \in X$를 A의 **집적점(limit point)**이라 한다. A의 모든 집적점의 집합을 **유도집합(derived set)**이라 하고 A'로 표현한다.

정의 2.7 위상공간 $(X, \mathfrak{I})$와 $x \in X$에 대하여 $\{x\} \in \mathfrak{I}$일 경우 x를 **고립점(isolated point)**이라 한다.

예제 2.11

(1) 위상공간 $(X, \mathfrak{I})$에서 x가 고립점이면 모든 $A \subset X$에 대하여 $x \notin A'$이다.

(2) $\mathbb{R}$ 위의 위상 $\mathfrak{I} = \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\varnothing, \mathbb{R}\}$에 대하여 $\mathbb{Q}'$을 구하시오.

『풀이』

정리 2.7 위상공간 X와 $F \subset X$에 대해서, F가 닫힌집합이기 위한 필요충분조건은 $F' \subset F$이다.

『증명』

정의 2.8 A를 포함하는 모든 폐집합의 교집합을 A의 **폐포**라 하고 $\overline{A}$라 표현한다.

정리 2.8

(1) $\overline{A}$는 닫힌집합이다.

(2) F가 A를 포함하는 닫힌집합이면, $A \subset \overline{A} \subset F$이 성립한다.

(3) A: 닫힌집합 $\Leftrightarrow$ $A = \overline{A}$

『증명』

예제 2.12

집합 X에 여유한 또는 여가산 위상이 주어질 경우 X의 부분집합 A에 대하여 A의 폐포를 구하시오.

『풀이』

정리 2.9 A를 위상공간 X의 부분집합이라 하자. $x \in \overline{A}$이기 위한 필요충분조건은 x를 포함하는 임의의 열린집합 G에 대하여 $G \cap A \neq \varnothing$이 되는 것이다.

『증명』

예제 2.13

$\mathbb{R}$에 하한위상이 주어질 때 $\overline{\mathbb{Q}}$를 구하시오.

『풀이』

정의 2.9 $\overline{A} = X$일 때 A는 X의 **조밀부분집합(dense subset)**이라 한다.

정리 2.10 위상공간 X와 $A \subset X$에 대하여 $\overline{A} = A \cup A'$이 성립한다.

『증명』

2.3 내부, 외부, 경계

정의 2.10 A를 위상공간 X의 부분집합이라 하자.

(1) 점 $p\in A$에 대하여 적당한 열린집합 G가 존재하여 $p\in G\subset A$ 를 만족할 때 p를 A의 **내점(interior point)**이라 한다.

(2) A의 내점 전체의 집합은 $\mathrm{Int}(A)$, A° 로 표현하고 A의 **내부(interior)**라 한다.

(3) A의 **외부(exterior)**는 $\mathrm{Ext}(A)$로 표기되고 A의 여집합의 내부이다.

(4) A의 **경계(boundary)**는 $b(A)$, ∂A로 표기되고 이것은 A의 내부에도 외부에도 속하지 않는 점의 집합이다.

정리 2.11 A를 위상공간 X의 부분집합이라 하자. $x\in b(A)$이기 위한 필요충분조건은 x를 포함하는 임의의 열린집합 G에 대하여 $G\cap A\neq\varnothing$, $G\cap A^{c}\neq\varnothing$이 되는 것이다.

『증명』

예제 2.14

$\mathbb{R}$ 위의 위상 $\mathfrak{I}=\{(a,\infty)\mid a\in\mathbb{R}\}\cup\{\varnothing,\mathbb{R}\}$에 대하여 $b(\mathbb{Q})$를 구하시오.

『풀이』

정리 2.12 집합 A의 내부는 A에 포함되는 모든 열린부분집합의 합집합이고, 다음 성질을 만족한다.

(1) $\mathrm{int}A$는 열린집합

(2) $\mathrm{int}A$는 A의 최대의 열린부분집합이다.
즉, G가 A의 열린부분집합이면 $G \subset \mathrm{int}A \subset A$이다.

(3) A는 열린집합 $\Leftrightarrow$ $A = \mathrm{int}A$

『증명』

예제 2.15

여유한 위상공간 $\mathbb{R}_f$에서 $\mathbb{Q}$의 내부, 외부, 경계를 구하시오.

『풀이』

정리 2.13 위상공간 X의 부분집합 A에 대하여 $\overline{A}=\mathrm{int}(A)\cup b(A)$이 성립한다.

『증명』

2.4 수렴열

정의 2.11 위상공간 X에 속하는 점열 (a_n)과 $b \in X$를 생각하자. b를 포함하는 임의의 열린집합 G에 대해서, 양의 정수 $N \in \mathbb{N}$이 존재해서 $n > N$이면 $a_n \in G$일 때, 이 점열은 점 $b \in X$에 **수렴(converge)**한다고 한다.

예제 2.16

집합 $X = \{a, b, c\}$에 수열 $a_n = \begin{cases} a\,,\ n = \text{홀수} \\ b\,,\ n = \text{짝수} \end{cases}$이 주어져 있을 때 각각의 위상에 대하여 수렴값을 구하시오.

(1) $\mathfrak{I}_1$: 이산위상　　　(2) $\mathfrak{I}_2$: 비이산위상

『풀이』

예제 2.17

$\mathbb{R}$에 여가산위상이 주어져 있을 때 수열 a_n이 수렴할 필요충분조건은 a_n의 유한한 항 이후의 항은 모두 같은 값일 때이다.

『풀이』

2.5 기저, 부분기저, 국소기저

정의 2.12 $(X, \mathfrak{I})$를 위상공간이라 할 때, 다음 두 조건을 만족시키는 $\mathscr{B}$ 를 위상 $\mathfrak{I}$에 대한 **기저(basis)**라 한다.

(1) $\mathscr{B} \subset \mathfrak{I}$

(2) 모든 열린집합은 $\mathscr{B}$ 의 원소의 합집합으로 표현된다.

($\Leftrightarrow$ 임의의 열린집합 G와 모든 $x \in G$에 대해서, $x \in B \subset G$인 $B \in \mathscr{B}$가 존재한다.)

예제 2.18

집합 $X(\neq \varnothing)$에 이산위상이 주어져 있을 때 기저 $\mathscr{B}$를 구하시오.

『풀이』

예제 2.19

(1) $\mathscr{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, $\mathscr{B}_l = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$는 각각 보통위상, 하한위상의 기저이다.

(2) $\mathscr{B}' = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$은 보통위상의 기저이지만 $\mathscr{B}_l{}' = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$는 하한위상의 기저가 아니다.

『풀이』

예제 2.20

$\mathscr{B}_Y$가 위상공간 $(Y, \mathfrak{I}_Y)$의 기저라 하면 $\mathscr{B}=\{f^{-1}(B) \mid B \in \mathscr{B}_Y\}$는 함수 $f: X \to (Y, \mathfrak{I}_Y)$에 의하여 생성된 X상의 위상 $\mathfrak{I}_1 = \{f^{-1}(G) \mid G \in \mathfrak{I}_Y\}$에 대한 기저임을 증명하시오.

『풀이』

정리 2.14 공집합이 아닌 집합 X의 부분집합족 $\mathscr{B}$ 가 두 조건

(1) $X = \cup \mathscr{B}$

(2) 임의의 $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ 와 임의의 $x \in B_1 \cap B_2$에 대하여 $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$이 성립하는 $B_3 \in \mathscr{B}$ 가 존재한다.

을 만족하면 $\mathscr{B}$ 의 원소들의 임의의 합집합을 모아 놓은 집합족 $\mathfrak{I}$는 X상의 위상이 되고 $\mathscr{B}$ 는 $\mathfrak{I}$에 대한 기저이다.

『증명』

예제 2.21

집합 $X=\{a, b, c\}$에 대하여 $\mathscr{B}=\{\{a, b\}, \{b, c\}\}$의 원소들의 임의의 합집합을 모아 놓은 집합은 위상이 아님을 보이시오.

『풀이』

정리 2.15 위상 $\mathfrak{I}$와 $\mathfrak{I}'$에 대한 기저를 각각 $\mathscr{B}$과 $\mathscr{B}'$라 할 때 $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{I}'$이기 위한 필요충분조건은 임의의 $B \in \mathscr{B}$ 와 임의의 $x \in B$에 대하여 적당한 $B' \in \mathscr{B}'$이 존재해서 $x \in B' \subset B$가 되는 것이다.

『증명』

예제 2.22

$\mathbb{R}$ 상에 $\mathscr{B}_K = \{(a,\, b) \mid a,\, b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a,\, b) - K \mid a,\, b \in \mathbb{R}\}$를 기저로 갖는 위상을 K-위상이라 할 때, 상한위상과 K-위상의 포함관계를 설명하시오.
($K = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$이다.)

『풀이』

정의 2.13 $(X, \mathfrak{I})$를 위상공간이라 하자. 다음과 같은 두 조건을 만족하면 S를 위상 $\mathfrak{I}$의 **부분기저(subbasis)**라 한다.

(1) $S \subset \mathfrak{I}$

(2) S의 원소들의 유한교집합을 모두 모아 놓은 집합족이 $\mathfrak{I}$의 기저를 이룬다.

예제 2.23

(1) $X = \{a, b, c, d, e\}$의 위상 $\mathfrak{I} = \{\varnothing, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d, e\}\}$에 대하여 $S = \{\{a, b\}, \{a, c, d, e\}\}$는 $\mathfrak{I}$의 부분기저이다.

(2) $S = \{(a, \infty), (-\infty, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$은 보통위상공간 $\mathbb{R}$의 부분기저이다.

『풀이』

정의 2.14 집합 X의 부분집합족 $\mathscr{A}$를 포함하는 가장 작은 위상을 **$\mathscr{A}$에 의해 생성된 위상**이라 하고 $\langle \mathscr{A} \rangle$으로 표기한다.

정리 2.16 $X(\neq \varnothing)$의 부분집합족 $\mathscr{A}$에 대하여 $\mathscr{A}$는 $\langle \mathscr{A} \rangle$의 부분기저가 된다.

『증명』

예제 2.24

$X = \mathbb{Z}$이고 $\mathscr{A} = \{\{a, a+1\} \mid a \in \mathbb{Z}\}$일 때 $\mathscr{A}$에 의해 생성된 위상을 구하시오.

『풀이』

정의 2.15 위상공간 $(X, \mathfrak{I})$와 $p \in X$에 대하여 다음을 만족하는 $\mathscr{B}_p$를 p의 **국소기저** **(local basis)**라 한다.

(1) 임의의 $B \in \mathscr{B}_p$에 대하여 B는 p를 포함하는 열린집합이다.

(2) p를 포함하는 임의의 열린집합 G에 대해서 $p \in B \subset G$를 만족하는 $B \in \mathscr{B}_p$가 존재한다.

예제 2.25

$\mathbb{R}$ 위에 보통위상, 하한위상, 이산위상, 비이산위상이 주어져 있을 때 각각의 위상에 대하여 0에 대한 국소기저를 구하시오.

『풀이』

정리 2.17 위상공간 X에 대하여 $\mathscr{B}$ 는 p의 국소기저라 하자. 그러면 다음이 성립한다.

(1) $p \in A'$ $\Leftrightarrow$ 임의의 $B \in \mathscr{B}$ 에 대하여 $(B - \{p\}) \cap A \neq \varnothing$.

(2) $p \in \overline{A}$ $\Leftrightarrow$ 임의의 $B \in \mathscr{B}$ 에 대하여 $B \cap A \neq \varnothing$.

(3) $p \in b(A)$ $\Leftrightarrow$ 임의의 $B \in \mathscr{B}$ 에 대하여 $B \cap A \neq \varnothing$, $B \cap A^c \neq \varnothing$.

(4) $a_n \to p$ $\Leftrightarrow$ 임의의 $B \in \mathscr{B}$ 에 대하여 $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geq N \Rightarrow a_n \in B$.

『증명』

예제 2.26

하한위상공간에서 $a_n = -\dfrac{1}{n}$의 수렴 값을 모두 구하시오.

『풀이』

따름정리 2.18 $\mathscr{B}$를 X상의 위상의 기저라 하면 다음을 만족한다.

(1) $p \in A'$ $\Leftrightarrow$ $p \in B$인 임의의 $B \in \mathscr{B}$에 대하여 $(B - \{p\}) \cap A \neq \varnothing$.

(2) $p \in \overline{A}$ $\Leftrightarrow$ $p \in B$인 임의의 $B \in \mathscr{B}$에 대하여 $B \cap A \neq \varnothing$.

(3) $p \in b(A)$ $\Leftrightarrow$ $p \in B$인 임의의 $B \in \mathscr{B}$에 대하여 $B \cap A \neq \varnothing$, $B \cap A^c \neq \varnothing$.

(4) $a_n \to p$ $\Leftrightarrow$ $p \in B$인 임의의 $B \in \mathscr{B}$에 대하여 $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geq N \Rightarrow a_n \in B$.

『증명』

예제 2.27

예제 2.22의 K위상에서 K'를 구하시오.

『풀이』

예제 2.28

S를 X상의 위상의 부분기저라 하자.

(1) $p \in B'$ $\Leftrightarrow$ $p \in A$인 임의의 $A \in S$에 대하여 $(A - \{p\}) \cap B \neq \varnothing$.

(2) $p \in \overline{B}$ $\Leftrightarrow$ $p \in A$인 임의의 $A \in S$에 대하여 $A \cap B \neq \varnothing$.

(3) $p \in b(B)$ $\Leftrightarrow$ $p \in A$인 임의의 $A \in S$에 대하여 $A \cap B \neq \varnothing$, $A \cap B^c \neq \varnothing$.

(4) $a_n \to p$ $\Leftrightarrow$ $p \in A$인 임의의 $A \in S$에 대하여 $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geq N \Rightarrow a_n \in A$.

위의 (1)~(4)에 대하여 맞으면 증명하고, 틀리면 반례를 제시하시오.

『풀이』

2.6 적공간

정의 2.16 두 위상공간 X와 Y에 대하여

$$\mathscr{B}=\{U\times V \mid U\in\mathfrak{I}_X,\ V\in\mathfrak{I}_Y\}$$

을 기저로 갖는 위상을 $X\times Y$ 위에서의 **적위상(product topology)**이라 한다.

※ 정의 2.16에서의 $\mathscr{B}$는 정리 2.14의 (1), (2)를 만족한다.

예제 2.29

두 위상공간 X와 Y에 대해 $\mathscr{B}=\{U\times V \mid U\in\mathfrak{I}_X,\ V\in\mathfrak{I}_Y\}$는 일반적으로 $X\times Y$ 위에서의 위상이 아님을 보이시오.

『풀이』

정리 2.19 $\mathscr{B}_X$는 X에 대한 기저, $\mathscr{B}_Y$는 Y에 대한 기저라고 할 때

$$\mathscr{B}_p=\{B\times C \mid B\in\mathscr{B}_X,\ C\in\mathscr{B}_Y\}$$

는 $X\times Y$ 상의 적공간에 대한 기저가 된다.

『증명』

정리 2.20 $A \subset X$, $B \subset Y$에 대하여 $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$이다.
따라서 C가 X-폐집합, D가 Y-폐집합이면 $C \times D$는 $X \times Y$-폐집합이다.

『증명』

정리 2.21 $A \subset X$, $B \subset Y$에 대하여 $\mathrm{int}(A \times B) = \mathrm{int}A \times \mathrm{int}B$이다.

『증명』

예제 2.30

외부, 집적점, 경계는 **정리 2.20, 2.21**과 같은 성질을 갖지 않는다.
그러한 예를 구하시오.

예제 2.31

하한위상공간과 이산위상공간의 적공간 $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_d$의 부분집합 $A=[1,\,3)\times(2,\,4]$에 대하여 내부, 외부, 경계, 유도집합, 폐포를 구하시오.

『풀이』

2.7 부분공간

정의 2.17 위상공간 $(X, \mathfrak{I})$와 X의 부분집합 $A(\neq \varnothing)$에 대하여

$$\mathfrak{I}_A = \{A \cap U \mid U \in \mathfrak{I}\}$$

를 A의 **상대위상(relative topology)**라 하고, 위상공간 $(A, \mathfrak{I}_A)$를 $(X, \mathfrak{I})$의 **부분공간(subspace)**이라 한다.

※ 정의 2.17에서의 $\mathfrak{I}_A = \{A \cap U \mid U \in \mathfrak{I}\}$는 A 상의 위상이 된다.

예제 2.32

보통위상공간 $\mathbb{R}$의 부분집합 $A = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$의 상대위상을 구하시오.

『풀이』

예제 2.33

X에 여유한(여가산) 위상이 주어져 있을 때, X의 유한(가산) 부분집합 A에 대하여 A에서의 상대위상을 구하시오.

『풀이』

정리 2.22 위상공간 $(X, \mathfrak{I})$에 대하여 $C \subset A \subset X$라 하자. C가 A에서 폐집합일 필요충분조건은 X-폐집합인 F가 존재하여 $C = A \cap F$인 것이다.

『증명』

정리 2.23 $\mathscr{B}$ 가 $(X, \mathfrak{I})$에 대한 기저이고 $Y \subset X$일 때,

$$\mathscr{B}_Y = \{B \cap Y \mid B \in \mathscr{B}\}$$

는 부분공간 Y에 대한 기저이다.

『증명』

정리 2.24 위상공간 $(X, \mathfrak{I})$에 대하여 $A \subset Y \subset X$라 하자. X의 부분공간 Y에 대해, A가 Y에서 열린집합이고 Y가 X에서 열린집합이면 A는 X에서 열린집합이다.

『증명』

정리 2.25 위상공간 $(X, \mathfrak{I})$에 대하여 $A \subset Y \subset X$라 하자. X의 부분공간 Y에 대해, A가 Y에서 닫힌집합이고 Y가 X에서 닫힌집합이면 A는 X에서 닫힌집합이다.

『증명』

예제 2.34

정리 2.24(정리 2.25)에서 Y가 열린집합(닫힌집합)이라는 조건이 빠지면 정리가 성립하지 않는다. 그러한 예를 구하시오.

『풀이』

Chapter 3 연속함수

3.1 연속성과 위상동형

정의 3.1 $(X, \mathfrak{I}_X)$와 $(Y, \mathfrak{I}_Y)$를 위상공간이라 하자. 함수 $f: X \to Y$에 대하여
$\forall G \in \mathfrak{I}_Y$, $f^{-1}(G) \in \mathfrak{I}_X$일 때, f는 **연속(continuous)**이라 한다.

예제 3.1

함수 $f: X \to Y$에 대하여 다음이 성립한다.
(1) X에 이산위상이 주어져 있으면 Y에 어떤 위상이 주어지더라도 연속이다.
(2) Y에 비이산위상이 주어져 있으면 X에 어떤 위상이 주어지더라도 연속이다.

『풀이』

정리 3.1 함수 $f: X \to Y$에 대하여 다음은 동치이다.
(1) $f: X \to Y$는 연속함수이다.
(2) Y의 기저 $\mathscr{B}$의 각 원소의 역상이 X의 열린부분집합이 되는 것이다.
(3) Y의 부분기저 S의 각 원소의 역상이 X의 열린부분집합이 되는 것이다.

『증명』

예제 3.2

보통위상공간 $\mathbb{R}$, 하한위상공간 $\mathbb{R}_l$에 대하여 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_l$, $f(x)=x$의 연속성을 조사하시오.

『풀이』

정리 3.2 위상공간 X, Y, Z에 대하여 다음이 성립한다.

(1) 상수함수는 연속이다.

(2) $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$가 연속이면 합성함수 $g\circ f$도 연속이다.

(3) 함수 $f:X\to Y$가 연속일 때 $A\subset X$에 대하여 $f|_A$도 연속이다.

(4) A가 X의 부분공간일 때 포함사상 $j:A\to X$는 연속이다.

(5) $f:X\to Y$가 연속일 때 공역을 $f(X)$로 제한한 사상 $g:X\to f(X)$도 연속이다.

『증명』

정리 3.3 함수 $f: X \to Y$에 대하여 다음은 서로 동치이다.
(1) f는 연속함수이다.
(2) 임의의 $A \subset X$에 대해서 $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$가 성립한다.
(3) B가 Y에서 닫힌집합이면 $f^{-1}(B)$는 X에서 닫힌집합이다.

『증명』

정의 3.2 함수 $f: X \to Y$가 $p \in X$에서 연속이란 $f(p)$를 포함하는 각각의 열린집합 $V \subset Y$에 대하여 p를 포함하는 X-열린집합 G가 존재하여 $f(G) \subset V$가 되는 것을 의미한다.

예제 3.3

함수 $f: X \to Y$와 $x \in X$에 대하여 x가 고립점이면 f는 x에서 연속이다.

『풀이』

예제 3.4

집합 $X=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{a, b, c\}$에 위상

$$\mathfrak{I}_X=\{\varnothing, X, \{1\}\}, \mathfrak{I}_Y=\{\varnothing, Y, \{a, b\}\}$$

이 주어질 때, 함수를 $f(1)=f(2)=a$, $f(3)=c$라 정의하자.

$G=\{a, b\}$라 하면 $G\in\mathfrak{I}_Y$이다. $f(1)=a\in G$에 대하여 $f^{-1}(G)=\{1, 2\}\not\in\mathfrak{I}_X$이므로 f는 1에서 불연속이다.

이는 잘못된 내용이다. 1은 고립점이므로 f는 1에서 연속이다.

『풀이』

정리 3.4 함수 $f:X\to Y$와 $p\in X$를 생각하자. f가 p에서 연속일 필요충분조건은 $f(p)$를 포함하는 각각의 기저의 원소 B에 대하여 p를 포함하는 X-열린집합 G가 존재하여 $f(G)\subset B$가 되는 것이다.

『증명』

예제 3.5

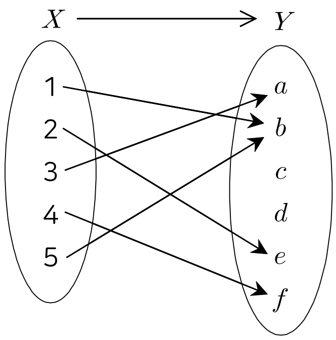
집합 $X=\{1,\,2,\,3,\,4,\,5\}$에 위상

$$\mathfrak{I}=\{\varnothing,\,X,\,\{1\},\,\{1,\,2,\,3\},\,\{1,\,4,\,5\},\,\{2,\,3\},\,\{2,\,3,\,4,\,5\},\,\{4,\,5\}\}$$

를 정의하고 집합 $Y=\{a,\,b,\,c,\,d,\,e,\,f\}$에 기저

$$\mathscr{B}=\{\{c\},\{d\},\{b,\,c\},\{b,\,c,\,d,\,f\},\{a,\,c,\,d,\,e\}\}$$

를 정의할 때 함수가 다음과 같이 정의되어 있다.



이 때 연속인 점을 모두 구하시오. **['08 공청회]**

『풀이』

정리 3.5 함수 $f:X\to Y$에 대하여 f가 연속일 필요충분조건은 f가 X의 모든 점에서 연속인 것이다.

『증명』

정의 3.3 두 위상공간 X와 Y에 대해서 f와 f^{-1}가 연속인 전단사 $f:X\to Y$가 존재하면 X와 Y는 **위상동형(homeomorphic)**이라 하고, 함수 f를 **위상동형사상(homeomorphism)**이라 한다.

정의 3.4 위상동형사상 $f:X\to Y$에 대하여 X가 갖는 성질이 Y에서도 성립할 때, 그 성질을 위상적 성질이라 한다.

예제 3.6

(1) 컴팩트, 연결, 분리공리, 가산공리, 거리화가능 등은 위상적 성질이다.
(2) 유계성은 위상적 성질이 아니다.

『풀이』

정의 3.5 열린집합의 상이 열린집합인 함수를 **열린사상(open map)**이라 한다.
닫힌집합의 상이 닫힌집합인 함수를 **닫힌사상(closed map)**이라 한다.

예제 3.7

$S=\{\{a,a+1\}\mid a\in\mathbb{Z}\}$는 $(\mathbb{Z},\mathfrak{I})$: 이산위상공간의 부분기저이다.
비이산위상공간 $(\{1,2\},\tau)$에 대하여

$$f:(\mathbb{Z},\mathfrak{I})\to(\{1,2\},\tau),\ f(a)=\begin{cases}1,\ a:\text{홀수}\\2,\ a:\text{짝수}\end{cases}$$

라 하면 임의의 $G\in S$에 대하여 $f(G)\in\tau$이지만 열린사상이 아니다.

『풀이』

예제 3.8

빈칸에 ○, ×를 채워 넣으시오. ($\mathbb{R}$ 은 보통위상공간이다.)

예	연속	열린사상	닫힌사상
$id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$			
$\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$			
$f : \mathbb{R}_{ind} \to \mathbb{R}$, 상수함수			
$id : \mathbb{R}_{ind} \to \mathbb{R}$			
$id : \mathbb{R}_l \to \mathbb{R}$			
$f : \mathbb{R}_{ind} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \tan^{-1}x$			
$f : \mathbb{R}_{ind} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 2, & otherwise \end{cases}$			
$f : \mathbb{R}_{ind} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 2, & otherwise \end{cases}$			

『풀이』

3.2 상공간

정의 3.6 위상공간 $(X, \mathfrak{I}_X)$와 집합 Y에 대해 $f: X \rightarrow Y$를 전사함수라 하자. 이 때

$$\mathfrak{I} = \left\{ G \subset Y \mid f^{-1}(G) \in \mathfrak{I}_X \right\}$$

를 f에 의한 Y의 **상위상(quotient topology)**, 위상공간 $(Y, \mathfrak{I})$를 f에 의한 Y의 **상공간(quotient space)**이라 한다.

예제 3.9

보통위상공간 $\mathbb{R}$에 대하여 함수 $f: \mathbb{R} \rightarrow \{a, b, c\}$를 $f(x) = \begin{cases} a, & x > 0 \\ b, & x = 0 \\ c, & x < 0 \end{cases}$라

정의할 때 $\{a, b, c\}$상의 상위상을 구하시오.

『풀이』

정리 3.6 위상공간 $(X, \mathfrak{I}_X)$와 $(Y, \mathfrak{I}_Y)$에 대하여 함수 $f: X \rightarrow Y$를 생각하자.
그러면 다음은 동치이다.
(1) $\mathfrak{I}_Y$는 f가 연속이 되도록 하는 Y상의 가장 강한 위상이다.
(2) $\mathfrak{I}_Y = \left\{ G \subset Y \mid f^{-1}(G) \in \mathfrak{I}_X \right\}$
(3) $f^{-1}(G) \in \mathfrak{I}_X \Leftrightarrow G \in \mathfrak{I}_Y$

『증명』

정의 3.7 **정리 3.6** 중 하나를 만족하고 전사인 함수를 상함수라 한다.

예제 3.10

집합 $X=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{a, b\}$에 위상 $\mathfrak{I}_X=\{\varnothing, \{1\}, X\}$, $\mathfrak{I}_Y=\{\varnothing, Y\}$이 주어질 때, 함수를 $f(1)=f(2)=a$, $f(3)=b$라 정의하면 **정리 3.6 (3)**을 만족하지만 열린사상이 아니다.

『풀이』

정리 3.7 (1) $f:(X, \mathfrak{I}_X)\to(Y, \mathfrak{I}_Y)$ 가 전사, 연속, 열린사상이면 f는 상함수이다.
(2) $f:(X, \mathfrak{I}_X)\to(Y, \mathfrak{I}_Y)$ 가 전사, 연속, 닫힌사상이면 f는 상함수이다.

『증명』

예제 3.11

사영함수 $\pi_1 : X\times Y\to X$는 상함수임을 보이시오.

『풀이』

정의 3.8 $\sim$을 위상공간 X 상의 동치관계라 하자. 함수 q를

$$q : X \to X/\sim,\ q(x) = [x]$$

로 정의할 때 q를 **자연사상(natural map)** 혹은 **표준사상(canonical map)**이라 부른다. 이 때 $X/\sim$에 상위상을 도입할 수 있고 이 위상을 동치관계 $\sim$에 의한 상위상이라고 한다.

예제 3.12

집합 $X = \{1, 2, 3\}$에 위상 $\mathfrak{I} = \{\varnothing, X, \{1, 2\}, \{3\}\}$을 준 위상공간 $(X, \mathfrak{I})$상의 동치관계 $x \sim y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod 2$에 의한 상위상을 구하시오.

『풀이』

정리 3.8 함수 $f : X \to Y$를 상함수라 하자. 임의의 사상 $g : Y \to Z$가 연속이기 위한 필요충분조건은 $g \circ f$가 연속이 되는 것이다.

『증명』

정리 3.9 $f : X \to Y$를 상함수라 하고 $f(x) = f(y)$일 때 $x \sim y$라 하면 $\sim$는 X상의 동치관계가 되고, 자연사상 $q : X \to X/\sim$에 의한 상공간 $X/\sim$은 Y와 위상동형이다.

『증명』

예제 3.13

보통위상공간 $\mathbb{R}$의 적공간 $\mathbb{R}^2$에 다음과 같은 동치관계가 주어지면 상공간 $\mathbb{R}^2/\sim$는 보통위상공간 $\mathbb{R}$과 위상동형임을 보이시오.

$$(x_{1,}\ y_1) \sim (x_2,\ y_2) \ \Leftrightarrow\ x_1^2 + y_1 = x_2^2 + y_2$$

『풀이』

Chapter 4 거리공간

4.1 거리공간

정의 4.1 X를 공집합이 아닌 집합이라 하자. 함수

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

가 임의의 $a, b, c \in X$에 대하여

(1) $d(a, b) \geq 0$

(2) $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$

(3) $d(a, b) = d(b, a)$

(4) $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$ 　　삼각부등식(triangle inequality)

를 만족할 때 d를 집합 X상의 **거리함수(distance function)**라 한다.

예제 4.1

$\mathbb{R}^n$의 원소 $p = (a_1, \cdots, a_n)$, $q = (b_1, \cdots, b_n)$에 대하여 다음과 같이 정의된 함수들은 모두 $\mathbb{R}^n$상의 거리임을 보이시오.

(1) $d_1(p, q) = \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k|$

(2) $d_2(p, q) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)^2}$

(3) $d_\infty(p, q) = \max\{|a_k - b_k| \mid k = 1, \cdots, n\}$

『풀이』

예제 4.2

집합 X와 $a,\, b\in X$에 대하여 $d(a,\, b)=\begin{cases}1\ ,\ a\neq b\\ 0\ ,\ a=b\end{cases}$라 정의하면 d는 거리함수가 되고 이 때 d를 **이산거리(discrete metric)**함수라 한다.

『풀이』

예제 4.3

$C[0,\, 1]=\{f\,|\,f:[0,\, 1]\to\mathbb{R}$ 은 연속함수$\}$와 $f,\, g\in C[0,\, 1]$에 대하여 다음과 같이 정의된 함수들은 모두 $C[0,\, 1]$상의 거리임을 보이시오.

(1) $d(f,\, g)=\displaystyle\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx$

(2) $e(f,\, g)=\sup\{|f(x)-g(x)|\,|\,x\in[0,\, 1]\}$

『풀이』

정의 4.2 d를 집합 X상의 거리함수라 하자. 한 점 $a \in X$와 $\epsilon > 0$에 대하여

$$B_d(a, \epsilon) = \{x \in X \mid d(a, x) < \epsilon\}$$

을 a의 $\epsilon-$**열린근방**($\epsilon-$**open neighborhood**)이라 한다.

예제 4.4

$\mathbb{R}^2$상의 d_1, d_2, d_∞에 대하여 $B_{d_1}(\mathbf{0}, 1)$, $B_{d_2}(\mathbf{0}, 1)$, $B_{d_\infty}(\mathbf{0}, 1)$를 좌표평면에 도시하시오. (단, $\mathbf{0} = (0, 0)$을 나타낸다.)

『풀이』

정리 4.1 d를 집합 X상의 거리함수라 하면

$$\mathscr{B} = \{B_d(a, \epsilon) \mid a \in X, \epsilon > 0\}$$

는 **정리 2.14를** 만족한다.

『증명』

정의 4.3 d를 집합 X상의 거리함수라 하자. $\mathscr{B} = \{B_d(a,\epsilon) \mid a \in X, \epsilon > 0\}$을 기저로 갖는 X상의 위상을 $\mathfrak{I}_d$로 나타내고 $\mathfrak{I}_d$을 **d에 의하여 유도된 X상의 거리위상 (metric topology on X induced by metric d)** 또는 간단히 **거리위상(metric topology)**이라 한다. 거리함수 d와 거리위상 $\mathfrak{I}_d$가 주어진 위상공간 X를 (X, d)로 나타내고 **거리공간(metric space)**이라 부른다.

예제 4.5

집합 X에 이산거리함수 d가 주어져 있을 때 $\mathfrak{I}_d$는 이산위상임을 보이시오.

『풀이』

정리 4.2 (X, d)를 거리공간이라 하자. $G \in \mathfrak{I}_d$이기 위한 필요충분조건은 임의의 $x \in G$에 대하여 적당한 $\epsilon > 0$이 존재하여 $B_d(x,\epsilon) \subset G$을 만족하는 것이다.

『증명』

정리 4.3 X상의 거리 d, e에 대하여 $\mathfrak{I}_d \subset \mathfrak{I}_e$일 필요충분조건은 임의의 $x \in X$와 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 $B_e(x, \delta) \subset B_d(x, \epsilon)$인 $\delta > 0$가 존재하는 것이다.

『증명』

예제 4.6

d, e는 X상의 거리이다. 적당한 양수 k가 존재하여 임의의 $x, y \in X$에 대하여 $d(x, y) \leq ke(x, y)$이면 $\mathfrak{I}_d \subset \mathfrak{I}_e$가 성립한다.

『풀이』

정의 4.4 집합 X상에 두 개의 거리함수 d, d'이 주어졌을 때 $\mathfrak{I}_d = \mathfrak{I}_{d'}$이면 d와 d'을 **동치거리(equivalent metric)**함수라 한다.

예제 4.7

$\mathbb{R}^n$상에서 d_1, d_2, d_∞는 동치거리이다.

『풀이』

4.2 거리공간의 성질

정의 4.5

(1) 점 $x \in X$와 집합 A사이의 거리 : $d(x, A) = inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$

(2) 두 집합 A, B 사이의 거리 : $d(A, B) = inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

(3) 집합 A의 **지름(diameter)** : $d(A) = sup\{d(a, a') \mid a, a' \in A\}$

$d(A) < \infty$일 경우 A를 **유계집합(bounded set)**이라 한다.

예제 4.8

(1) $C[0, 1] = \{f \mid f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ 은 연속함수$\}$에 예제 4.3의 d에 대하여 $d(f, A)$의 값을 구하여라. (단, $f(x) = x$, A는 모든 상수함수들의 집합)

(2) $\mathbb{R}^2$에 예제 4.1의 거리 d_2가 주어질 때, $d(A, B)$의 값을 구하여라.

$$A = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\},\ B = \{(x, 1/x) \mid x \in (0, \infty)\}$$

(3) $\mathbb{Q}$에 이산거리 d가 주어질 때, $d(\mathbb{Z})$의 값을 구하여라.

『풀이』

예제 4.9

거리공간 (X,d)에서 임의의 $x,y \in X$에 대하여, 다음과 같이 e가 정의되어 있다.
이때, (X,e)는 유계인 거리공간이 됨을 증명하시오.

$$e(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$$

『풀이』

정리 4.5 거리공간 (X,d)와 $x \in X$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\{B_d(x, 1/n) \mid n \in \mathbb{N}\}$은 x의 가산국소기저이다.

(2) $\overline{A} = \{x \in X \mid d(x,A) = 0\}$.

(3) 유한부분집합은 폐집합이다.

『증명』

정리 4.6 A와 B를 거리공간 (X, d)에서 서로소인 폐부분집합들이라 하면 서로소인 열린집합 G, H가 존재해서 $A \subset G, B \subset H$가 성립한다.

『증명』

정의 4.6 $(X, \mathfrak{I})$를 위상공간이라 하자. 집합 X상에 거리함수 d가 존재해서 $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_d$ 일 때 $(X, \mathfrak{I})$를 **거리화가능(metrizable)**공간이라 한다.

예제 4.10

다음 위상공간의 거리화가능 여부를 판정하시오.

(1) 이산위상공간 (X, D)

(2) 보통위상공간 $(\mathbb{R}, \mathscr{U})$

(3) $(X, \mathfrak{I})$, $(X = \{a, b, c\}$, $\mathfrak{I} = \{\varnothing, X, \{a\}, \{a, b\}\})$

『풀이』

Chapter 5 가산성

5.1 제 1 가산공간

정의 5.1 위상공간 X상의 임의의 점 x에 대하여 x점에서의 **가산국소기저(countable local basis)**가 항상 존재할 때 X를 **제 1 가산공간(first countable space)**이라 한다.

예제 5.1

(1) 거리공간, 이산위상공간, 보통위상공간 $\mathbb{R}$, 하한위상공간 $\mathbb{R}_l$은 제 1 가산공간임을 보이시오.
(2) 여유한위상공간 $\mathbb{R}_f$과 여가산공간 $\mathbb{R}_c$는 제 1 가산공간이 아님을 보이시오.

『풀이』

예제 5.2

연속함수 $f : X \to Y$에 대하여 X가 제1가산공간이지만 $f(X)$는 제1가산공간이 되지 않는 예를 구하시오.

『풀이』

정리 5.1 제1가산은 위상적 성질이다.

『증명』

정리 5.2
(1) X가 제 1 가산공간이면 부분공간 A는 제 1 가산공간이다.
(2) X, Y가 제 1 가산공간일 필요충분조건은 $X \times Y$가 제 1 가산공간인 것이다.

『증명』

정리 5.3 위상공간 X가 제 1 가산공간이면 축소가산국소기저가 존재한다.

『증명』

정리 5.4 위상공간 X를 제 1 가산공간이라 하고, $x \in X$, $A \subset X$라 하자. $x \in \overline{A}$이기 위한 필요충분조건은 x에 수렴하는 점열이 A에 존재하는 것이다.

『증명』

예제 5.3

제 1 가산공간이라는 조건이 빠졌을 때 위의 정리가 성립하지 않는 예를 구하시오.

『풀이』

정의 5.2 함수 $f:X \to Y$에 대하여 $x \in X$라 하자. x로 수렴하는 X에서 임의의 점열 $\{x_n\}$에 대하여 $\{f(x_n)\}$이 $f(x)$로 수렴할 때, f는 x에서 점열연속이라 한다. 또한 f가 X의 모든 점에서 점열연속일 때, f는 X에서 점열연속이라 한다.

정리 5.5 위상공간 X를 제 1 가산공간이라 하자. 사상 $f:X \to Y$가 연속이기 위한 필요충분조건은 f가 점열연속이 되는 것이다.

『증명』

예제 5.4

제 1 가산공간이라는 조건이 빠졌을 때 위의 정리가 성립하지 않는 예를 구하시오.

『풀이』

5.2 제 2 가산공간

정의 5.3 위상공간 $(X, \mathfrak{I})$의 위상 $\mathfrak{I}$에 대한 **가산기저(countable basis)**가 존재할 때 $(X, \mathfrak{I})$를 **제 2 가산공간(second countable space)**이라 한다.

정리 5.6 X가 제 2 가산공간이면 X는 제 1 가산공간이다.

『증명』

예제 5.5

보통위상공간 $\mathbb{R}$, 이산위상공간 $\mathbb{R}_D$, 하한위상공간 $\mathbb{R}_l$, 여유한위상공간 $\mathbb{R}_f$, 여가산위상공간 $\mathbb{R}_c$의 제 2 가산성을 조사하시오.

『풀이』

정의 5.4 집합 X와 $A \subset X$에 대하여 X의 부분집합족 $\mathscr{C}$가 $A \subset \cup\mathscr{C}$ 일 때 $\mathscr{C}$를 A의 **피복(cover)**이라 한다. 특별히 $\mathscr{C} \subset \mathfrak{I}$일 때 $\mathscr{C}$를 A의 **열린피복(open cover)**이라 한다. $\mathscr{C}$의 유한(가산)부분집합 $\mathscr{C}_0$가 존재하여 $A \subset \cup\mathscr{C}_0$일 때 $\mathscr{C}$는 **유한(가산)부분피복을 포함하고 있다**고 한다.

정의 5.5 위상공간 X의 임의의 열린피복이 가산부분피복을 포함할 때 X를 **린델래프 공간(Lindelöf space)**이라 한다.

정리 5.7 X가 제 2 가산공간이면 X는 린델래프 공간이다.

『증명』

예제 5.6

정리 5.7의 역이 성립하지 않는 예를 구하시오.

『풀이』

정의 5.6 위상공간 X에 **가산조밀부분집합(countable dense subset)**이 존재할 때 X를 **가분공간(separable space)**이라 한다.

예제 5.7

$\mathbb{R}$ 위에 보통위상, 하한위상, 여유한위상, 여가산위상, 이산위상이 주어져 있을 때 각각의 경우에 가분공간이 되는지 조사하시오.

『풀이』

정리 5.8 X가 제 2 가산공간이면 X는 가분공간이다.

『증명』

예제 5.8

정리 5.8의 역이 성립하지 않는 예를 구하시오.

『풀이』

정리 5.9 위상공간 $(X, \mathfrak{I})$이 거리화 가능이면 다음은 동치이다.
(1) $(X, \mathfrak{I})$는 제 2 가산공간이다.
(2) $(X, \mathfrak{I})$는 린델래프공간이다.
(3) $(X, \mathfrak{I})$는 가분공간이다.

『증명』

Chapter 6 분리공리

정의 6.1 위상공간 X에서 임의의 서로 다른 두 점에 대하여 적어도 한 점을 포함하면서 다른 한 점을 포함하지 않는 열린집합이 존재할 때 X를 T_0**-공간**이라 한다.

예제 6.1

$X=\{a,b\}$, $\mathfrak{I}=\{\varnothing, X, \{a\}\}$는 T_0공간이다.

『풀이』

정의 6.2 위상공간 X의 임의의 서로 다른 두 점 $a, b\in X$에 대하여 적당한 열린집합 G와 H가 존재하여 $a\in G$, $b\in H$이고 $a\notin H$, $b\notin G$일 때 X를 T_1**-공간**이라 한다.

정리 6.1 위상공간 X에 대하여 다음은 동치이다.

(1) X는 T_1-공간이다.

(2) X의 임의의 한 점 부분집합은 폐집합이다.

(3) X의 임의의 유한 부분집합은 폐집합이다.

『증명』

정리 6.2 (1) X가 T_1-공간이면 부분공간 A는 T_1-공간이다.
(2) $X \times Y$가 T_1-공간일 필요충분조건은 X, Y 모두 T_1-공간인 것이다.

『증명』

정의 6.3 위상공간 X의 임의의 서로 다른 두 점 a, b에 대하여 두 열린집합 G와 H가 존재하여 $a \in G$, $b \in H$, $G \cap H = \varnothing$ 일 때 X를 **T_2-공간(Hausdorff space)**이라 한다.

정리 6.3 T_2-공간에서 수렴하는 점열은 유일한 극한점을 갖는다.

『증명』

정리 6.4 다음 두 명제는 동치이다.
(1) X는 T_2-공간이다.
(2) $\triangle = \{(x,\, x) \mid x \in X\}$는 $X \times X$에서 폐집합이다.

『증명』

정리 6.5 (1) X가 T_2-공간이면 부분공간 A는 T_2-공간이다.
(2) $X \times Y$가 T_2-공간일 필요충분조건은 $X,\ Y$ 모두 T_2-공간인 것이다.

『증명』

정리 6.6 위상공간 X와 T_2-공간 Y에 대하여 $f, g : X \to Y$가 연속함수이면 다음이 성립한다.

(1) $A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$는 X에서 폐집합이다.

(2) D가 X의 조밀부분집합이고 모든 $x \in D$에 대하여 $f(x) = g(x)$이면 $f = g$이다.

『증명』

정의 6.4 위상공간 X의 임의의 폐집합 F와 임의의 점 $p \notin F$에 대하여 서로소인 열린 집합 G와 H가 존재하여 $p \in G$, $F \subset H$ 이면 X를 **정칙공간(regular space)**이라 부른다. 또한 정칙이면서 T_1인 공간을 **T_3-공간**이라 한다.

예제 6.2

$K = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$에 대하여 $\mathscr{B}_K = \{(a, b), (a, b) - K \mid a, b \in \mathbb{R}\}$를 기저로 갖는 실수상의 위상을 $\mathbb{R}_K$라 하면 $\mathbb{R}_K$는 T_2-공간이지만 T_3-공간은 아니다.

『풀이』

정리 6.7 다음은 동치이다.
(1) X가 정칙공간이다.
(2) 임의의 열린집합 U와 임의의 $x \in U$에 대하여 $x \in G \subset \overline{G} \subset U$를 만족하는 열린 집합 G가 존재한다.

『증명』

정리 6.8 (1) X가 정칙공간(T_3-공간)이면 부분공간 A는 정칙공간(T_3-공간)이다.
(2) $X \times Y$가 정칙공간(T_3-공간)일 필요충분조건은 X, Y 모두 정칙공간(T_3-공간)인 것이다.

『증명』

정의 6.5 위상공간 X에서 임의의 서로소인 두 폐집합 A, B에 대하여 서로소인 열린집합 G와 H가 존재하여 $A \subset G$, $B \subset H$ 일 때 X를 **정규공간(normal space)**이라 부른다. 또한 정규이면서 T_1인 공간을 **T_4-공간**이라 한다.

예제 6.3

(1) 하한위상공간 $\mathbb{R}_l$은 T_4-공간이다.

(2) 정규공간이지만 정칙공간이 아닌 예를 구하시오.

『풀이』

정리 6.9

(1) X가 정규공간이고 Y가 닫힌 부분집합이면 Y는 정규공간이다.

(2) X가 T_4-공간이고 Y가 닫힌 부분집합이면 Y는 T_4-공간이다.

『증명』

정리 6.10 거리공간 $\Rightarrow T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$이 성립하고 역은 성립하지 않는다.

『증명』

예제 6.4

빈칸에 ○, ×를 채워 넣으시오. ($\mathbb{R}$ 은 보통위상공간이다.)

	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	거리공간
$X=\{a, b\}$, $\mathfrak{I}=\{\varnothing, X, \{a\}\}$						
$\mathbb{R}_f$, $\mathbb{R}_c$						
$\mathbb{R}_K$						
$\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$						
$\mathbb{R}_l$						
$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_d$						

『풀이』

Chapter 7 컴팩트공간

정의 7.1 위상공간 X의 임의의 열린피복이 유한부분피복을 포함할 때 X를 **컴팩트 공간(compact space)**이라 한다.

예제 7.1

보통위상공간 $\mathbb{R}$, 이산위상공간 $\mathbb{R}_{\mathrm{D}}$, 하한위상공간 $\mathbb{R}_{l}$, 여유한위상공간 $\mathbb{R}_{f}$, 여가산위상공간 $\mathbb{R}_{c}$의 컴팩트 여부를 조사하시오.

『풀이』

정리 7.1 A를 위상공간 $(X, \mathfrak{I})$의 부분집합이라 하자. 그러면 다음은 동치이다.
(1) X의 열린집합으로 이루어진 A의 임의의 열린피복이 유한 부분피복을 가진다.
(2) A의 열린집합으로 이루어진 A의 임의의 열린피복이 유한 부분피복을 가진다.

『증명』

정리 7.2 연속함수 $f: X \to Y$에 대하여 A가 X의 컴팩트 부분집합이면 $f(A)$는 컴팩트이다.

『증명』

정리 7.3 X가 컴팩트공간이고 A가 닫힌 부분집합이면 A는 컴팩트이다.

『증명』

정리 7.4 X가 T_2공간이고 A가 컴팩트 부분집합이면 A는 폐집합이다.

『증명』

정리 7.5 X가 컴팩트, T_2공간이면 X는 T_4공간이다.

『증명』

정리 7.6 (Tychonoff 정리) 컴팩트공간의 적공간은 컴팩트공간이다.

정리 7.7 Heine-Borel 정리
보통위상공간 $\mathbb{R}$의 부분공간 A에 대하여 A가 컴팩트일 필요충분조건은 A가 유계, 폐집합인 것이다.

『증명』

Chapter 8 연결공간

8.1 연결공간

정의 8.1 위상공간 X가 공집합이 아니면서 서로소인 두 개의 열린집합들의 합집합일 때 X를 **비연결공간(disconnected space)**이라 하고 위상공간 X의 부분집합 A가 X의 **부분공간**으로서 비연결 공간일 때 A를 비연결집합이라 한다.
위상공간 X가 비연결공간이 아닌 경우 **연결공간(connected space)**이라 하고 위상공간 X의 한 부분집합 A가 X의 부분공간으로서 연결공간일 때 A를 연결집합 이라 한다.

※ $\varnothing$과 임의의 한 점 집합은 항상 연결 부분집합이다.

예제 8.1

$X=\{a, b, c\}$에 대하여 $\mathfrak{I}_i$, $i=1, 2, 3$이 다음과 같이 주어져 있을 때

$\mathfrak{I}_1=\{\varnothing, X, \{a\}, \{b, c\}\}$, $\mathfrak{I}_2=\{\varnothing, X, \{a\}, \{a, b\}\}$, $\mathfrak{I}_3=2^X$

$(X, \mathfrak{I}_i)$의 연결성을 확인 하시오.

『풀이』

예제 8.2

$X=\{a, b, c\}$, $\mathfrak{I}=\{\varnothing, X, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c\}\}$이고 $A=\{a, b\}$일 때 A의 연결성을 확인 하시오.

『풀이』

정리 8.1 $\mathbb{R}$에 보통위상이 주어질 때, $\mathbb{R}$의 부분집합 A에 대하여 다음은 동치이다.
(1) A는 $\mathbb{R}$의 연결 부분집합이다.
(2) $x, y \in A$이고 $x < z < y$이면 $z \in A$가 성립한다.
따라서 A가 연결일 필요충분조건은 A는 구간인 것이다.

『증명』

정리 8.2 다음 명제는 동치이다.
(1) 위상공간 X는 연결공간이다.
(2) 위상공간 X에서 개폐집합은 $\varnothing$, X밖에 없다.

『증명』

정리 8.3 연속함수 $f: X \to Y$에 대하여 A가 X의 연결 부분집합이면 $f(A)$는 연결집합이다.

『증명』

정리 8.4 A가 위상공간 X에서 연결집합이면 $A \subset B \subset \overline{A}$인 B도 연결집합이다.

『증명』

정리 8.5 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$는 X의 연결부분공간들의 집합족이고 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \neq \varnothing$ 이면 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$는 연결집합이다.

『증명』

정리 8.6 위상공간 X와 Y가 연결공간이면 $X \times Y$도 연결공간이다.

『증명』

8.2 연결성분

정의 8.2 위상공간 X와 $x, y \in X$에 대하여 x, y를 모두 포함하는 연결부분집합이 존재할 때 $x \sim y$라고 정의 하면 $\sim$는 X상의 동치관계이다. 그리고 이 때 각각의 동치류를 **성분(component)**이라고 한다.

정리 8.7 위상공간 X와 $x, y \in X$에 대하여 x, y를 모두 포함하는 연결부분집합이 존재할 때 $x \sim y$라고 정의 하면 $\sim$는 X상의 동치관계이다.

『증명』

정리 8.8 위상공간 X와 $x \in X$에 대하여 A가 x를 포함하는 성분일 필요충분조건은 A는 x를 포함하는 가장 큰 X의 연결 부분집합인 것이다.

『증명』

예제 8.3

유클리드 공간의 부분공간 $\mathbb{Q}$에 대하여 모든 성분을 구하시오.

『풀이』

8.3 호상연결

정의 8.3 위상공간 X에 대하여 $a, b \in X$라 하자. 연속사상 $f : [0, 1] \to X$가 $f(0) = a$, $f(1) = b$이면 f를 a에서 b로의 **호(path)** 라 한다.

정의 8.4 위상공간 X의 임의의 두 점 $a, b \in X$에 대하여 a로부터 b로의 호가 존재할 때, X를 **호상연결 공간(pathwise connected space)**이라 한다.

예제 8.4

X가 밀착위상공간이면 X는 호상연결공간이다.

『풀이』

정리 8.9 X가 호상연결공간이면 X는 연결공간이다.

『증명』

예제 8.5

여가산위상공간 $\mathbb{R}_c$는 연결이지만 호상연결은 아님을 보이시오.

(hint: $\mathbb{R}_c$의 부분공간 A가 컴팩트일 필요충분조건은 A가 유한집합인 것이다.)

『풀이』

가산성 보충자료

	제 1 가산	제 2 가산	Lindelöf	가분공간	거리공간
연 속 상	×	×	○	○	×
부분공간	○	○	×	×	○
적 공 간	○	○	×	○	○

※ 위의 표에서 적공간은 $X \times Y$ 을 의미한다.

		제 1 가산	제 2 가산	Lindelöf	가분공간	거리공간
$(\mathbb{R}, \mathrm{U})$		○	○	○	○	○
$\mathbb{R}_l$		○	×	○	○	×
$\mathbb{R}_f$		×	×	○	○	×
$\mathbb{R}_c$		×	×	○	×	×
$\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$		○	×	×	○	×
여유한위상	X 비가산	×	×	○	○	×
	X 가부번	○	○	○	○	×
	X 유한	○	○	○	○	○
여가산위상	X 비가산	×	×	○	×	×
	X 가산	○	○	○	○	○
이산위상	X 비가산	○	×	×	×	○
	X 가산	○	○	○	○	○
비이산위상 ($\lvert X \rvert \geq 2$)		○	○	○	○	×

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_f$, $f(x) = x$ 거리공간의 연속상이 거리공간이 되지 않는 예.

분리공리 보충자료

	T_0	T_1	T_2	T_3	$T_{3\frac{1}{2}}$	T_4
연 속 상	×	×	×	×	×	×
부분공간	○	○	○	○	○	×
적 공 간	○	○	○	○	○	×

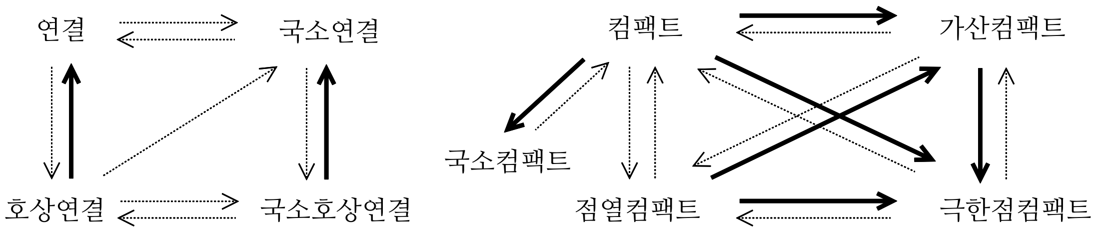
※ 위의 표에서 적공간은 $X\times Y$ 을 의미한다.

		T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	거리공간
$(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$		○	○	○	○	○	○
$\mathbb{R}_l$		○	○	○	○	○	×
$\mathbb{R}_K$		○	○	○	×	×	×
$\mathbb{R}_f$		○	○	×	×	×	×
$\mathbb{R}_c$		○	○	×	×	×	×
$\mathbb{R}_l\times\mathbb{R}_l$		○	○	○	○	×	×
여유한위상	X무한	○	○	×	×	×	×
	X유한	○	○	○	○	○	○
여가산위상	X비가산	○	○	×	×	×	×
	X가산	○	○	○	○	○	○
이산위상		○	○	○	○	○	○
비이산위상 $(\lvert X\rvert\geq 2)$		×	×	×	×	×	×

컴팩트, 연결 보충자료

		연결	호상연결	cpt	가산cpt	점열cpt	극한점cpt	국소cpt
$\mathbb{R}$		○	○	×	×	×	×	○
$\mathbb{R}_l$		×	×	×	×	×	×	×
$\mathbb{R}_f$		○	○	○	○	○	○	○
$\mathbb{R}_c$		○	×	×	×	×	×	×
$\mathbb{R}_D$		×	×	×	×	×	×	○
$\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$		×	×	×	×	×	×	×
여유한위상	X비가산	○	○	○	○	○	○	○
	X가부번	○	×	○	○	○	○	○
	$\lvert X \rvert \geq 2$ 유한	×	×	○	○	○	○	○
여가산위상	X비가산	○	×	×	×	×	×	×
	X가산	×	×	×	×	×	×	○
이산위상	X비가산	×	×	×	×	×	×	○
	X가산	×	×	×	×	×	×	○
	$\lvert X \rvert \geq 2$ 유한	×	×	○	○	○	○	○
비이산위상		○	○	○	○	○	○	○

※ 거리공간에서 컴팩트, 극한점컴팩트, 점열컴팩트, 가산컴팩트는 동치이다.



가산성, 분리공리, 연결, 컴팩트

		제 1 가산	제 2 가산	Lindelöf	가분공간	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	거리공간	연결	호상연결	컴팩트
$\mathbb{R}$		○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	×
$\mathbb{R}_l$		○	×	○	○	○	○	○	○	○	×	×	×	×
$\mathbb{R}_{\mathrm{K}}$		○	○	○	○	○	○	○	×	×	×	○	×	×
$\mathbb{R}_f$		×	×	○	○	○	○	×	×	×	×	○	○	○
$\mathbb{R}_c$		×	×	○	×	○	○	×	×	×	×	○	×	×
$\mathbb{R}_{\mathrm{D}}$		○	×	×	×	○	○	○	○	○	○	×	×	×
$\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$		○	×	×	○	○	○	○	○	×	×	×	×	×
$\mathbb{Q}$		○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	×	×	×
여유한 위상	X 비가산	×	×	○	○	○	○	×	×	×	×	○	○	○
	X 가부번	○	○	○	○	○	○	×	×	×	×	○	×	○
	X 유한	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	×	×	○
여가산 위상	X 비가산	×	×	○	×	○	○	×	×	×	×	○	×	×
	X 가산	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	×	×	×
이산 위상	X 비가산	○	×	×	×	○	○	○	○	○	○	×	×	×
	X 가부번	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	×	×	×
	X 유한	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	×	×	○
비이산위상 ($\lvert X \rvert \geq 2$)		○	○	○	○	×	×	×	×	×	×	○	○	○

: $\lvert X \rvert \geq 2$일 때 성립