

5강. 고윳값과 대각화

[연 습 문 제]

1. n 차 다항식의 집합 P_n 와 $(n+1)$ 차 다항식의 집합 P_{n+1} 에 대하여 사상 $L : P_n \rightarrow P_{n+1}$ 을 다음과 같이 정의했을 때, L 이 선형사상임을 보이시오.

$$p(x) \in P_n \text{ 에 대하여 } L(p(x)) = xp(x) \in P_{n+1}$$

2. 3차 다항식의 집합 P_3 과 2×2 행렬의 집합 $\mathcal{M}_{2 \times 2}(R)$ 및 R^4 에 대하여 다음 두 사상

$$L_1 : P_3 \rightarrow R^4, \quad L_2 : \mathcal{M}_{2 \times 2}(R) \rightarrow R^4$$

이 모두 동형사상임을 증명하시오.

3. 벡터공간 V 의 기저 $B_V = \{v_1, v_2, v_3\}$ 에 대하여 자기사상

$$L : V \rightarrow V \text{ 이 } [L]_{B_V}^{B_V} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ 을 만족한다. 이때}$$

V 의 기저 $B'_V = \{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$ 에 대하여

$[L]_{B'_V}^{B'_V}$ 를 구하시오.

4. 행렬 $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ 에 대하여 Rank-Nullity

정리가 성립함을 보이시오.

— Index —

1. 고윳값과 벡터

(1) 정의

(2) 고유방정식

(3) 고유공간

2. 대각화

(1) 대각화

(2) 중복도

(3) 닮음불변량

3. C-H 정리

1. 고윳값과 벡터

(1) 정의

체 F 에 대한 벡터공간 V 위의 선형사상

$L : V \rightarrow V$ 에 대하여 다음 두 조건

$$1) v \neq \vec{0}$$

$$2) L(v) = \lambda v$$

를 만족하는 $\lambda \in F$ 와 $v \in V$ 를 각각

고윳값과 고유벡터라고 한다.

— Index —

1. 고윳값과 벡터

(1) 정의

(2) 고유방정식

(3) 고유공간

2. 대각화

(1) 대각화

(2) 중복도

(3) 닮음불변량

3. C-H 정리

(2) 고유방정식

$n \times n$ 행렬 M 에 대하여 λ 가 M 의

고윳값이기 위한 필요충분조건은 다음

방정식

$$\det(\lambda I_n - M) = 0$$

을 만족하는 것이다. 이 방정식을

고유방정식이라 하며, 좌변의 식을

고유다항식이라 한다. (단, I_n 은 $n \times n$

단위행렬)

— Index —

1. 고윳값과 벡터

(1) 정의

(2) 고유방정식

(3) 고유공간

2. 대각화

(1) 대각화

(2) 중복도

(3) 닮음불변량

3. C-H 정리

(3) 고유공간

선형사상 $\lambda I_V - L$ 의 핵을 고윳값 λ 의

고유공간이라 한다. (단, I_V 는 항등사상)

따라서 고유공간의 영벡터가 아닌 벡터는

고유벡터이다.

또한 L 의 고유벡터들로 구성된 V 의

기저를 선형사상 L 의 고유기저라 한다.

— Index —

- 1. 고윳값과 벡터
 - (1) 정의
 - (2) 고유방정식
 - (3) 고유공간
- 2. 대각화
 - (1) 대각화
 - (2) 중복도
 - (3) 닮음불변량
- 3. C-H 정리

2. 대각화

(1) 대각화

① 정의

두 정사각행렬 A, B 에 대하여 방정식

$$B = P^{-1}AP$$

를 만족하는 대각행렬 B 와 가역행렬 P 가 존재하면, 행렬 A 는 **대각화 가능 행렬**이라고 한다. 또한 이 경우 행렬 P 는 A 를 **대각화한다**고 한다.

— Index —

- 1. 고윳값과 벡터
 - (1) 정의
 - (2) 고유방정식
 - (3) 고유공간
- 2. 대각화
 - (1) 대각화
 - (2) 중복도
 - (3) 닮음불변량
- 3. C-H 정리

② 정리

$n \times n$ 행렬 A 에 대하여 다음 두 명제는 동치이다.

- 1) A 은 대각화 가능 행렬이다.
- 2) A 은 n 개의 선형독립인 고유벡터를 갖는다.

— Index —

- 1. 고윳값과 벡터
 - (1) 정의
 - (2) 고유방정식
 - (3) 고유공간
- 2. 대각화
 - (1) 대각화
 - (2) 중복도
 - (3) 닮음불변량
- 3. C-H 정리

③ 대각화하는 방법

$n \times n$ 행렬 A 에 대하여

Step 1.

n 개의 선형독립인 고유벡터를 찾아 대각화 가능 행렬인지 확인한다.

Step 2.

n 개의 고유벡터 v_1, \dots, v_n 로부터 행렬 $P = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)$ 을 만든다.

Step 3.

$P^{-1}AP$ 은 대각행렬이 된다.

— Index —

1. 고윳값과 벡터
 - (1) 정의
 - (2) 고유방정식
 - (3) 고유공간
2. 대각화
 - (1) 대각화
 - (2) 중복도
 - (3) 닮음불변량
3. C-H 정리

(2) 중복도

① 정의

λ_0 가 $n \times n$ 행렬 A 의 고윳값이면 이에 대응하는 고유공간의 차원을 λ_0 의 **기하적 중복도**라 한다.

또한 A 의 고유다항식에서 $\lambda - \lambda_0$ 가 인수로 나타나는 횟수를 λ_0 의 **대수적 중복도**라 한다.

— Index —

1. 고윳값과 벡터
 - (1) 정의
 - (2) 고유방정식
 - (3) 고유공간
2. 대각화
 - (1) 대각화
 - (2) 중복도
 - (3) 닮음불변량
3. C-H 정리

② 정리

정사각행렬 A 에 대하여 다음 두 명제는 동치이다.

- 1) A 은 대각화 가능 행렬이다.
- 2) A 의 모든 고윳값에 대해서 기하적 중복도와 대수적 중복도는 같다.

— Index —

1. 고윳값과 벡터
 - (1) 정의
 - (2) 고유방정식
 - (3) 고유공간
2. 대각화
 - (1) 대각화
 - (2) 중복도
 - (3) 닮음불변량
3. C-H 정리

(3) 닮음 불변량

① 정의

두 정사각행렬 A, B 에 대하여

$$B = P^{-1}AP$$

를 만족하는 가역행렬 P 가 존재하면 A, B 는 서로 **닮은 행렬**이라 하고, 기호로 $A \sim B$ 라 표현한다.

— Index —

- 1. 고윳값과 벡터
 - (1) 정의
 - (2) 고유방정식
 - (3) 고유공간
- 2. 대각화
 - (1) 대각화
 - (2) 중복도
 - (3) **닮음불변량**
- 3. C-H 정리

② 닮음 불변량

서로 닮은 두 행렬의 다음과 같은 성질들은 서로 일치한다.

- | | |
|------------|-------------|
| 1) 행렬식 | 7) 고유공간의 차원 |
| 2) 가역성 | 8) 대각성분들의 합 |
| 3) rank | 9) 대수적 중복도 |
| 4) nullity | 10) 기하적 중복도 |
| 5) 고유다항식 | |
| 6) 고윳값 | ... |

— Index —

- 1. 고윳값과 벡터
 - (1) 정의
 - (2) 고유방정식
 - (3) 고유공간
- 2. 대각화
 - (1) 대각화
 - (2) 중복도
 - (3) **닮음불변량**
- 3. **C-H 정리**

3. C-H 정리

임의의 정사각행렬 A 과 그 고유다항식

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \sum_{i=0}^n a_i \lambda^i$$

에 대하여 $f(A) = O$ 이 성립하며, 이를 **케일리-해밀턴 정리**라고 한다. (단, O 는 영행렬)

— Index —

- 1. 고윳값과 벡터
 - (1) 정의
 - (2) 고유방정식
 - (3) 고유공간
- 2. 대각화
 - (1) 대각화
 - (2) 중복도
 - (3) **닮음불변량**
- 3. **C-H 정리**

ex 1) 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 에 대하여 C-H 정리가 성립함을 확인하시오.

ex 2) 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 에 대하여 A^3 를 C-H 정리를 이용하여 A 와 단위행렬 I_2 로써 표현하시오.

[연 습 문 제]

1. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) A 를 대각화하는 행렬 P 를 구하고 대각행렬

$B = P^{-1}AP$ 를 구하시오.

(2) 두 행렬 A, B 에 대하여 본문에 제시된 10가지
답음 불변량을 각각 확인하시오.

2. 행렬 $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬 $3M^5 - 5M^4$ 을

C-H 정리를 이용하여 구하시오.