4강. 미분

[연 습 문 제]

1. 다음을 증명하시오.

(1) $f(x)=\begin{cases} x+1\ , & x \geq 0 \\ -x\ , & x<0 \end{cases}$ 일 때, $\lim_{x \to 0^-} f(x)=0$

(2) $\lim_{x \to \infty}(2x-1)=\infty$

(3) $\lim_{x \to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$

2. 함수 $f(x)=2x-3$ 는 $x=-2$ 에서 연속임을 보이시오.

3. 함수 $f(x)=x^2$ 는 $(0,\ \infty)$ 에서 균등연속이 아님을 보이시오.

4. 다음 함수들이 $x=0$ 에서 왜 불연속인지 설명하시오.

(1) $f(x)=\begin{cases} x^2+1\ , & x \neq 0 \\ 0\ , & x=0 \end{cases}$ (2) $g(x)=\begin{cases} x+1\ , & x \geq 0 \\ 2x-1\ , & x<0 \end{cases}$

(3) $h(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}\ , & x \geq 0 \\ \sin\frac{1}{x}\ , & x<0 \end{cases}$

5. 정의역이 $[-1,\ 1]$ 이고 치역이 $(-1,\ 1)$ 인 연속함수가 존재할 수 있는지 설명하시오.

6. 함수 $f(x)=x^{10}+3x-1$ 가 $(0,\ 1)$ 에서 실근을 가짐을 증명하시오.

1. 미분계수

(1) 미분계수의 정의

Def 1. [평균변화율]

함수 $f:[a,\ b]\to\mathbb{R}$ 에 대하여

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\triangle x)-f(a)}{\triangle x}$$

를 a에서 b로 변할 때의 함수 $y=f(x)$ 의 평균변화율이라 한다.

— Index —

1. 미분계수
(1) 미분계수의 정의
(2) 미분계수의 연산
(3) 주요 정리

2. 도함수
(1) 도함수의 정의
(2) 여러 함수의 도함수

3. 평균값 정리
(1) 평균값 정리
(2) 코시 평균값 정리

Def 2. [미분계수와 미분가능]

함수 $f:(a,\ b)\to\mathbb{R}$ 와 $c\in(a,\ b)$ 에 대해

$$\begin{aligned}f'(c)&=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}\\&=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\\&=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(c+\triangle x)-f(c)}{\triangle x}\end{aligned}$$

를 $x=c$ 에서의 함수 $y=f(x)$ 의 미분계수라 하며, 미분계수가 존재하면 f가 $x=c$ 에서 미분가능하다고 한다.

— Index —

1. 미분계수
(1) 미분계수의 정의
(2) 미분계수의 연산
(3) 주요 정리

2. 도함수
(1) 도함수의 정의
(2) 여러 함수의 도함수

3. 평균값 정리
(1) 평균값 정리
(2) 코시 평균값 정리

Def 3. [우미분계수와 좌미분계수]

① 함수 $f:[a,\ b)\to\mathbb{R}$ 에 대하여 f의 $x=a$ 에서의 우미분계수

$$f'_{+}(a)=\lim_{\triangle x\to 0+}\frac{f(a+\triangle x)-f(a)}{\triangle x}$$

가 존재하면 f는 $x=a$ 에서 우미분가능하다고 한다.

② 함수 $f:(a,\ b]\to\mathbb{R}$ 에 대하여 f의 $x=b$ 에서의 좌미분계수

$$f'_{-}(b)=\lim_{\triangle x\to 0-}\frac{f(b+\triangle x)-f(b)}{\triangle x}$$

가 존재하면 f는 $x=b$에서 좌미분가능하다고 한다.

Def 4. [미분가능함수]

① 함수 $f:(a,\ b)\to\mathbb{R}$ 가 $(a,\ b)$의 모든 점에서 미분가능하면 f를 $(a,\ b)$에서의 미분가능함수라고 한다.

② 함수 $f:[a,\ b]\to\mathbb{R}$ 가 다음 조건들을 만족하면 f를 $[a,\ b]$에서의 미분가능 함수라고 한다.

- f는 $(a,\ b)$에서의 미분가능함수이다.
- f는 $x=a$에서 우미분가능하다.
- f는 $x=b$에서 좌미분가능하다.

(2) 미분계수의 연산

$f,g:D\to\mathbb{R}$ 가 $a\in D$에서 미분가능하면 $f+g,\ f-g,\ fg,\ \dfrac{f}{g}\ (g\neq 0)$ 도 미분가능하고 다음이 성립한다.

① $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$

② $(f-g)'(a)=f'(a)-g'(a)$

③ $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$

④ $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a)=\dfrac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{\{g(a)\}^2}$

(3) 주요 정리

Thm 1. [미분가능성과 연속성]

f가 $x=a$ 에서 미분가능하면 f는 $x=a$ 에서 연속이다.

Thm 2. [극점과 미분계수]

$f:D\to\mathbb{R}$ 일 때 f가 D의 내부점 $x=a$ 에서 극값을 갖고 미분가능하면 $f'(a)=0$ 이다.

Thm 3. [연쇄법칙]

함수 f가 $x=a$ 에서 미분가능하고 g가 $f(a)$에서 미분가능하면 합성함수 $g \circ f$ 는 $x=a$ 에서 미분가능하고 다음이 성립한다.

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

2. 도함수

(1) 도함수의 정의

함수 $f : D \to \mathbb{R}$ 가 임의의 점 $x \in D$ 에서 미분 가능할 때, 함수

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

를 함수 f의 도함수라 한다.

(2) 여러 함수의 도함수

- $c' = 0 \quad (c \in \mathbb{R})$
- $(x^c)' = cx^{c-1} \quad (c \in \mathbb{R})$
- $(e^x)' = e^x$, $(a^x)' = a^x \ln a$
- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
- $(\sin x)' = \cos x$, $(\csc x)' = -\csc x \cot x$
- $(\cos x)' = -\sin x$, $(\sec x)' = \sec x \tan x$
- $(\tan x)' = \sec^2 x$, $(\cot x)' = -\csc^2 x$

3. 평균값 정리

(1) 평균값 정리

Thm 1. [롤의 정리]

$f:[a,\ b]\to\mathbb{R}$ 가 $[a,\ b]$ 에서 연속이고 $(a,\ b)$ 에서 미분가능하다고 할 때, 다음 명제는 참이다.

$f(a)=f(b)\ \Rightarrow\ \exists c\in(a,\ b)\ s.t.\ f'(c)=0$

— Index —
1. 미분계수
(1) 미분계수의 정의
(2) 미분계수의 연산
(3) 주요 정리
2. 도함수
(1) 도함수의 정의
(2) 여러 함수의 도함수
3. 평균값 정리
(1) 평균값 정리
(2) 코시 평균값 정리

Thm 2. [평균값 정리]

$f:[a,\ b]\to\mathbb{R}$ 가 $[a,\ b]$ 에서 연속이고 $(a,\ b)$에서 미분가능하면 다음이 성립하는 c가 $(a,\ b)$에 존재한다.

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

— Index —
1. 미분계수
(1) 미분계수의 정의
(2) 미분계수의 연산
(3) 주요 정리
2. 도함수
(1) 도함수의 정의
(2) 여러 함수의 도함수
3. 평균값 정리
(1) 평균값 정리
(2) 코시 평균값 정리

(2) 코시 평균값 정리

Thm 1. [코시 평균값 정리]

$f,g:[a,\ b]\to\mathbb{R}$ 가 $[a,\ b]$ 에서 연속이고 $(a,\ b)$에서 미분가능하면 다음이 성립하는 c가 $(a,\ b)$에 존재한다.

$$\{f(b)-f(a)\}g'(c)=\{g(b)-g(a)\}f'(c)$$

Thm 2. [로피탈의 정리]

$f,\ g : D \to \mathbb{R}$ 가 다음을 만족한다.

① D 에서 연속함수이고 $D-\{a\}$ 에서 미분가능함수이다.

② 다음 두 명제 중에 하나가 성립한다.

1) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$

2) $\lim_{x\to a} |f(x)| = \lim_{x\to a} |g(x)| = \infty$

그러면 $a,\ L \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,\ \infty\}$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = L$$

[연 습 문 제]

1. 다음 함수가 $x=0$ 에서 미분가능한지 설명하시오.

(1) $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ (2) $g(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

2. $(a,\ b)$ 에서의 미분가능함수 f의 도함수 f'이 다음에 해당하는 불연속점 $x = c\,(\in(a,\ b))$을 가질 수 있는지 설명하시오.

① 제거 가능 불연속점 ② 비약 불연속점

3. 다음 함수의 도함수를 구하시오.

(1) $f(x) = \ln(1+\sin x)$ (2) $g(x) = e^{\cos\sqrt{x}}$

(3) $h(x) = x^{\tan x}$

4. 함수 f가 $\mathbb{R}$에서 미분가능하지만 $f'(0) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 를 만족시키는 $a,\ b$는 존재하지 않을 수 있는지 설명하시오.

5. 다음 극한을 계산하시오.

(1) $\lim_{x\to\pi}(x-\pi)\cot x$ (2) $\lim_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x}\ln x$

6. 다음 극한 계산이 틀린 이유를 설명하시오.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{2x+\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{2-\sin x} = \frac{2}{2-0} = 1$$