5강. 리만적분

[연 습 문 제]

1. 다음 함수가 $x=0$ 에서 미분가능한지 설명하시오.

(1) $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} &, \ x\neq 0 \\ 0 &, \ x=0 \end{cases}$ (2) $g(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} &, \ x\neq 0 \\ 0 &, \ x=0 \end{cases}$

2. $(a,\ b)$에서의 미분가능함수 f의 도함수 f'이 다음에 해당하는 불연속점 $x=c\,(\in(a,\ b))$을 가질 수 있는지 설명하시오.

① 제거 가능 불연속점 ② 비약 불연속점

3. 다음 함수의 도함수를 구하시오.

(1) $f(x)=\ln(1+\sin x)$ (2) $g(x)=e^{\cos\sqrt{x}}$

(3) $h(x)=x^{\tan x}$

4. 함수 f가 $\mathbb{R}$에서 미분가능하지만 $f'(0)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 를 만족시키는 $a,\ b$는 존재하지 않을 수 있는지 설명하시오.

5. 다음 극한을 계산하시오.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}(x-\pi)\cot x$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}\ln x$

6. 다음 극한 계산이 틀린 이유를 설명하시오.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{2x+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{2-\sin x}=\frac{2}{2-0}=1$$

1. 리만적분

(1) 리만적분의 정의

Def 1. [분할과 세분]

① $[a,\ b]$가 유계인 폐구간이고
$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$일 때

$$\wp = \{x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n\}$$

을 $[a,\ b]$의 분할이라 한다.

② $[a,\ b]$의 분할 $\wp$와 $\wp^*$에 대하여
$\wp \subset \wp^*$이면 $\wp^*$를 $\wp$의 세분이라 한다.

— Index —
1. 리만적분
(1) 리만적분의 정의
(2) 주요 정리
(3) 리만적분의 연산
2. 미적분학의 기본정리
(1) 제 1 기본정리
(2) 제 2 기본정리
(3) 따름정리
3. 리만적분의 확장
(1) 특이적분
(2) 스틸체스적분

Def 2. [상합과 하합]

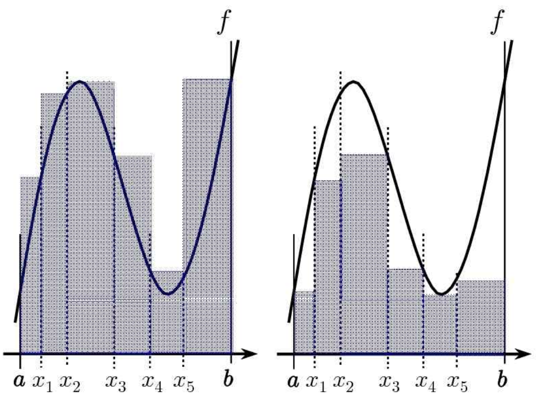
f가 $[a,\ b]$에서 유계일 때
$\wp = \{x_0,\ \cdots,\ x_n\}$에 대해 $\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$,
$M_i = \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}$,
$m_i = \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}$ 로 나타내자.

이때, ① $U(\wp,\ f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \triangle x_i$

② $L(\wp,\ f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \triangle x_i$

을 각각 $[a,\ b]$에서 f의 ① 상합과 ② 하합이라 한다.

— Index —
1. 리만적분
(1) 리만적분의 정의
(2) 주요 정리
(3) 리만적분의 연산
2. 미적분학의 기본정리
(1) 제 1 기본정리
(2) 제 2 기본정리
(3) 따름정리
3. 리만적분의 확장
(1) 특이적분
(2) 스틸체스적분



$U(\wp,\ f)$ $L(\wp,\ f)$

Def 3. [상적분과 하적분]

f가 $[a,\ b]$에서 유계일 때 $[a,\ b]$의 분할 $\wp$에 대해

① $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f = \inf\{U(\wp,\ f)\}$

② $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f = \sup\{L(\wp,\ f)\}$

을 각각 $[a,\ b]$에서 f의 ① 상적분과 ② 하적분이라 한다.

— Index —
1. 리만적분
(1) 리만적분의 정의
(2) 주요 정리
(3) 리만적분의 연산
2. 미적분학의 기본정리
(1) 제 1 기본정리
(2) 제 2 기본정리
(3) 따름정리
3. 리만적분의 확장
(1) 특이적분
(2) 스틸체스적분

Thm.

다음 명제들이 성립한다.

① $\wp^*$가 $[a,\ b]$의 분할 $\wp$의 세분이면

$$L(\wp,\ f) \le L(\wp^*,\ f) \le U(\wp^*,\ f) \le U(\wp,\ f)$$

② $[a,\ b]$의 임의의 두 분할 $\wp_1,\ \wp_2$에 대하여 $L(\wp_1,\ f) \le U(\wp_2,\ f)$ 이다.

③ f가 $[a,\ b]$에서 유계이면

$$\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$$

— Index —
1. 리만적분
(1) 리만적분의 정의
(2) 주요 정리
(3) 리만적분의 연산
2. 미적분학의 기본정리
(1) 제 1 기본정리
(2) 제 2 기본정리
(3) 따름정리
3. 리만적분의 확장
(1) 특이적분
(2) 스틸체스적분

Def 4. [리만적분가능성]

f가 $[a,\ b]$에서 유계일 때

$$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$$

이면 f가 $[a,\ b]$에서 리만적분가능하다고 하며

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f = \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$$

로 표현한다. 또한 $[a,\ b]$에서 유계인 리만적분가능한 함수 f들의 집합을 $\Re[a,\ b]$ 로 나타낸다. ($f \in \Re[a,\ b]$)

(2) 주요 정리

Thm 1. [리만적분 판별법]

f가 $[a,\ b]$에서 유계일 때 다음이 성립한다. ($\wp$는 $[a,\ b]$의 분할)

$$f \in \Re[a,\ b]$$
$$\iff \forall \epsilon > 0,\ \exists \wp\ \ s.t.\ \ U(\wp,\ f) - L(\wp,\ f) < \epsilon$$

— Index —
1. 리만적분
(1) 리만적분의 정의
(2) 주요 정리
(3) 리만적분의 연산
2. 미적분학의 기본정리
(1) 제 1 기본정리
(2) 제 2 기본정리
(3) 따름정리
3. 리만적분의 확장
(1) 특이적분
(2) 스틸체스적분

Thm 2. [연속성과 리만적분가능성]

f가 $[a,\ b]$에서 연속이면 $f \in \Re[a,\ b]$이다.

Thm 3. [적분의 평균값 정리]

f가 $[a,\ b]$에서 연속이면

$\int_a^b f = f(c)(b-a)$ 인 $c \in (a,\ b)$가

존재한다.

— Index —
1. 리만적분
(1) 리만적분의 정의
(2) 주요 정리
(3) 리만적분의 연산
2. 미적분학의 기본정리
(1) 제 1 기본정리
(2) 제 2 기본정리
(3) 따름정리
3. 리만적분의 확장
(1) 특이적분
(2) 스틸체스적분

(3) 리만적분의 연산

① $f, g \in \Re[a,\ b]$ 이면 다음이 성립한다.

$$\int_a^b (f \pm g) = \int_a^b f \pm \int_a^b g \text{ (복부호동순)}$$

② $f \in \Re[a,\ b]$

$$\iff \forall c \in (a,\ b),$$
$$f \in \Re[a,\ c] \ \wedge\ f \in \Re[c,\ b]$$
$$with\ \ \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

2. 미적분학의 기본정리

(1) 제 1 기본정리

Def. [부정적분]

$f \in \Re[a,\ b]$ 일 때 $x \in [a,\ b]$ 에 대하여

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

로 정의한 함수 F를 $[a,\ b]$에서 f의 부정적분이라 한다.

— Index —

1. 리만적분
(1) 리만적분의 정의
(2) 주요 정리
(3) 리만적분의 연산

2. 미적분학의 기본정리
(1) 제 1 기본정리
(2) 제 2 기본정리
(3) 따름정리

3. 리만적분의 확장
(1) 특이적분
(2) 스틸체스적분

Thm. [미적분학의 제 1 기본정리]

$f \in \Re[a,\ b]$이면 f와 $[a,\ b]$에서 f의 부정적분 F에 대하여 다음이 성립한다.

① F는 $[a,\ b]$에서 균등연속이다.

② f가 $[a,\ b]$에서 연속이면 F는 $[a,\ b]$에서 미분가능하고 $\forall x \in [a,\ b]$, $F'(x) = f(x)$ 이다.

— Index —

1. 리만적분
(1) 리만적분의 정의
(2) 주요 정리
(3) 리만적분의 연산

2. 미적분학의 기본정리
(1) 제 1 기본정리
(2) 제 2 기본정리
(3) 따름정리

3. 리만적분의 확장
(1) 특이적분
(2) 스틸체스적분

(2) 제 2 기본정리

Def. [역도함수]

D가 구간이고 $f, F : D \to \mathbb{R}$ 가 모든 $x \in D$ 에 대하여 $F'(x) = f(x)$ 이면 F를 f의 역도함수라 한다.

Thm. [미적분학의 제 2 기본정리]

$f \in \Re[a,\ b]$ 이고 $F : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ 가 $[a,\ b]$에서 연속이고 $(a,\ b)$에서 미분가능하다고 하자. 이때 F가 f의 역도함수이면 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

(3) 따름정리

Thm 1. [치환적분법]

g가 $[a,\ b]$에서 미분가능하고 $g' \in \Re[a,\ b]$ 이며 f가 $g([a,\ b])$에서 연속이면 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx$$

Thm 2. [부분적분법]

$f, g : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ 가 $[a,\ b]$에서 연속이고 $(a,\ b)$에서 미분가능하며 $f', g' \in \Re[a,\ b]$ 이면 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f'g = \{f(b)g(b) - f(a)g(a)\} - \int_a^b fg'$$

3. 리만적분의 확장

(1) 특이적분

Def 1. [$(a, b]$ 또는 $[a, b)$ 의 경우]

① $f:(a, b]\to\mathbb{R}$가 임의의 $c\in(a, b)$에 대하여 $f\in\Re[c, b]$이면 $(a, b]$에서 f의 특이적분은 $\int_a^b f=\lim_{c\to a+}\int_c^b f$ 로 정의한다.

* $f:[a, b)\to\mathbb{R}$의 경우 $\int_a^b f=\lim_{c\to b-}\int_a^c f$

— Index —
1. 리만적분
(1) 리만적분의 정의
(2) 주요 정리
(3) 리만적분의 연산
2. 미적분학의 기본정리
(1) 제 1 기본정리
(2) 제 2 기본정리
(3) 따름정리
3. 리만적분의 확장
(1) 특이적분
(2) 스틸체스적분

② ①에서 우변의 극한이 존재하면 각 구간에 대해 f는 특이적분가능하다고 한다.

③ $f:[a, b]-\{c\}\to\mathbb{R}$ 가 $[a, c)$와 $(c, b]$에서 특이적분가능하면 f는 $[a, b]$에서 특이적분가능하다고 하고

$$\int_a^b f=\lim_{p\to c-}\int_a^p f+\lim_{q\to c+}\int_q^b f$$

로 정의한다.

— Index —
1. 리만적분
(1) 리만적분의 정의
(2) 주요 정리
(3) 리만적분의 연산
2. 미적분학의 기본정리
(1) 제 1 기본정리
(2) 제 2 기본정리
(3) 따름정리
3. 리만적분의 확장
(1) 특이적분
(2) 스틸체스적분

Def 2. [$[a, \infty)$ 또는 $(-\infty, b]$ 의 경우]

① $f:[a, \infty)\to\mathbb{R}$가 $a<c$ 인 임의의 $c\in\mathbb{R}$에 대하여 $f\in\Re[a, c]$이면 $[a, \infty)$에서 f의 특이적분은

$$\int_a^\infty f=\lim_{c\to\infty}\int_a^c f$$ 로 정의한다.

* $f:(-\infty, b]\to\mathbb{R}$의 경우

$$\int_{-\infty}^b f=\lim_{c\to-\infty}\int_c^b f$$

② ①에서 우변의 극한이 존재하면 각 구간에 대해 f는 특이적분가능하다고 한다.

③ f가 적당한 $p \in \mathbb{R}$ 에 대하여 $(-\infty,\ p]$와 $[p,\ \infty)$에서 특이적분가능하면 f는 $\mathbb{R}$에서 특이적분가능하다고 하고

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^{p} f + \int_{p}^{\infty} f$$

로 정의한다.

— Index —
1. 리만적분
(1) 리만적분의 정의
(2) 주요 정리
(3) 리만적분의 연산
2. 미적분학의 기본정리
(1) 제 1 기본정리
(2) 제 2 기본정리
(3) 따름정리
3. 리만적분의 확장
(1) 특이적분
(2) 스틸체스적분

(2) 스틸체스적분

Def 1. [스틸체스상합과 하합]

$[a,\ b]$ 에서 유계인 함수 f와 증가함수 α, $[a,\ b]$ 의 분할 $\wp = \{x_0,\ \cdots,\ x_n\}$ 과 $\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$ 에 대하여

① $U(\wp,\ f,\ \alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i$

② $L(\wp,\ f,\ \alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\alpha_i$

을 각각 α에 관한 f의 ① 스틸체스상합, ② 스틸체스하합이라 한다. $(i = 1,\ \cdots,\ n)$

— Index —
1. 리만적분
(1) 리만적분의 정의
(2) 주요 정리
(3) 리만적분의 연산
2. 미적분학의 기본정리
(1) 제 1 기본정리
(2) 제 2 기본정리
(3) 따름정리
3. 리만적분의 확장
(1) 특이적분
(2) 스틸체스적분

Def 2. [스틸체스 상적분과 하적분]

$[a,\ b]$ 에서 유계인 함수 f와 증가함수 α, $[a,\ b]$ 의 분할 $\wp$에 대하여

① $\overline{\int_a^b} f\, d\alpha = \inf\{U(\wp,\ f,\ \alpha)\}$

② $\underline{\int_a^b} f\, d\alpha = \sup\{L(\wp,\ f,\ \alpha)\}$

을 각각 α에 관한 f의 ① 스틸체스 상적분과 ② 스틸체스 하적분이라 한다.

Def 3. [스틸체스적분가능성]

f가 $[a, b]$에서 유계이고 α가 $[a, b]$에서 증가함수일 때

$$\overline{\int_a^b} f\,d\alpha = \underline{\int_a^b} f\,d\alpha$$

이면 f는 $[a, b]$에서 α에 관하여 스틸체스적분가능하다고 하며

$$\int_a^b f\,d\alpha = \overline{\int_a^b} f\,d\alpha = \underline{\int_a^b} f\,d\alpha$$

로 표현하고 이를 α에 관한 f의 스틸체스적분이라 한다. ($f \in \mathfrak{R}_\alpha[a, b]$)

Thm.

$f \in \mathfrak{R}[a, b]$이고 α가 $[a, b]$에서 증가하고 미분가능한 함수이며 $\alpha' \in \mathfrak{R}_\alpha[a, b]$이면 $f \in \mathfrak{R}_\alpha[a, b]$이고 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f\,d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)\,dx$$

[연 습 문 제]

1. 함수 $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ x, & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$ 가 $f \in \mathfrak{R}[0, 1]$ 임을 보이시오.

2. 다음 명제들의 반례를 제시하시오.

(1) $f \in \mathfrak{R}[a, b]$ 이면 $[a, b]$에서 f의 불연속점의 개수는 유한개이다.

(2) $f, g \in \mathfrak{R}[a, b]$ 이면 $\int_a^b (f \times g) = \int_a^b f \times \int_a^b g$ 이다.

3. 다음 적분을 구하시오.

(1) $\int_0^{\pi} \sin x\, dx$ (2) $\int_0^{\pi} x \sin x\, dx$ (3) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2)\, dx$

4. 다음 특이적분이 가능한지 판별하고, 가능하다면 그 값을 구하시오.

(1) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx$ (2) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\, dx$

5. 다음 스틸체스적분을 구하시오.

(1) $\int_0^3 x^2\, de^x$ (2) $\int_2^3 (x-1)\, d(x^2+2)$