

# 부록. 실수의 구성

— Index —

- 1. 유리수체계
  - (1) 자연수의 구성
  - (2) 정수의 구성
  - (3) 유리수의 구성
- 2. 실수체계
  - (1) 실수의 구성
  - (2) 실수의 덧셈
  - (3) 실수의 곱셈
- 3. 실수체계의 성질

## 1. 유리수체계

### (1) 자연수의 구성

Def 1. [자연수의 구성적 정의]

자연수집합  $\mathbb{N}$ 의 원소를 다음과 같이 정의한다.

$$1 = \{\emptyset\}$$

$$2 = 1 \cup \{1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$3 = 2 \cup \{2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

...

$$n' = n \cup \{n\} \quad ( ' \text{은 그 다음 수})$$

— Index —

- 1. 유리수체계
  - (1) 자연수의 구성
  - (2) 정수의 구성
  - (3) 유리수의 구성
- 2. 실수체계
  - (1) 실수의 구성
  - (2) 실수의 덧셈
  - (3) 실수의 곱셈
- 3. 실수체계의 성질

Def 2. [자연수의 순서]

임의의  $n, m \in \mathbb{N}$ 에 대하여

$$\textcircled{1} \quad n \subset m \text{ 이면 } n < m$$

$$\textcircled{2} \quad n \subseteq m \wedge n \supseteq m \text{ 이면 } n = m$$

Def 3. [자연수의 연산]

임의의  $n, m \in \mathbb{N}$ 에 대하여

$$\textcircled{1} \quad n + 1 = n', \quad n + m' = (n + m)'$$

$$\textcircled{2} \quad (n + m) - n = m$$

$$\textcircled{3} \quad n \times 1 = n, \quad n \times m' = n \times m + n$$

Thm.  $\mathbb{N}$ 은 전순서집합이다.

— Index —

1. 유리수체계
  - (1) 자연수의 구성
  - (2) 정수의 구성
  - (3) 유리수의 구성
2. 실수체계
  - (1) 실수의 구성
  - (2) 실수의 덧셈
  - (3) 실수의 곱셈
3. 실수체계의 성질

## (2) 정수의 구성

Def 1. [정수의 구성적 정의]

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 의 동치관계

$$E : (m, n) E (m^*, n^*) \Leftrightarrow m + n^* = m^* + n$$

$$\text{의 동치류 } [(m, n)] = \begin{cases} n - m & , m < n \\ 0 & , m = n \\ -(m - n) & , m > n \end{cases}$$

를 정수라 하며, 이들의 집합을  $\mathbb{Z}$ 로 표현한다.

— Index —

1. 유리수체계
  - (1) 자연수의 구성
  - (2) 정수의 구성
  - (3) 유리수의 구성
2. 실수체계
  - (1) 실수의 구성
  - (2) 실수의 덧셈
  - (3) 실수의 곱셈
3. 실수체계의 성질

Def 2. [정수의 연산]

두 정수  $a = [(a_1, a_2)]$ ,  $b = [(b_1, b_2)]$ 에 대하여  $a, b$ 의 연산을 다음과 같이 정의한다.

$$\textcircled{1} \quad a + b = [(a_1 + b_1, a_2 + b_2)]$$

$$\textcircled{2} \quad a - b = [(a_1 + b_2, a_2 + b_1)]$$

$$\textcircled{3} \quad a \times b = [(a_1 b_2 + a_2 b_1, a_1 b_1 + a_2 b_2)]$$

Thm.  $\mathbb{Z}$ 는 환이다.

— Index —

1. 유리수체계
  - (1) 자연수의 구성
  - (2) 정수의 구성
  - (3) 유리수의 구성
2. 실수체계
  - (1) 실수의 구성
  - (2) 실수의 덧셈
  - (3) 실수의 곱셈
3. 실수체계의 성질

## (3) 유리수의 구성

Def 1. [유리수의 구성적 정의]

$\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ 의 동치관계

$$E : (a, b) E (a^*, b^*) \Leftrightarrow ab^* = a^*b$$

의 동치류  $[(a, b)]$ 를 유리수라 하며, 이들의 집합을  $\mathbb{Q}$ 로 표현한다.

## — Index —

1. 유리수체계
  - (1) 자연수의 구성
  - (2) 정수의 구성
  - (3) 유리수의 구성
2. 실수체계
  - (1) 실수의 구성
  - (2) 실수의 덧셈
  - (3) 실수의 곱셈
3. 실수체계의 성질

## Def 2. [유리수의 연산]

두 유리수  $a = [(a_1, a_2)]$ ,  $b = [(b_1, b_2)]$ 에 대하여  $a, b$  의 연산을 다음과 같이 정의한다.

- ①  $a + b = [(a_1b_2 + a_2b_1, a_2b_2)]$
- ②  $a \times b = ab = [(a_1b_1, a_2b_2)]$
- ③  $a \div b = \frac{a}{b} = [(a_1b_2, a_2b_1)]$  (단,  $b \neq 0$ )

Thm 1.  $\mathbb{Q}$ 는 체이다.

## — Index —

1. 유리수체계
  - (1) 자연수의 구성
  - (2) 정수의 구성
  - (3) 유리수의 구성
2. 실수체계
  - (1) 실수의 구성
  - (2) 실수의 덧셈
  - (3) 실수의 곱셈
3. 실수체계의 성질

## Def 2. [순서체의 정의]

다음 성질을 만족하는 체  $F$  를 순서체라 한다.

- $x, y, z \in F, y < z \Rightarrow x + y < x + z$
- $x, y \in F, x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow xy > 0$

Thm 2.  $\mathbb{Q}$ 은 순서체이다.

## — Index —

1. 유리수체계
  - (1) 자연수의 구성
  - (2) 정수의 구성
  - (3) 유리수의 구성
2. 실수체계
  - (1) 실수의 구성
  - (2) 실수의 덧셈
  - (3) 실수의 곱셈
3. 실수체계의 성질

## 2. 실수체계

## (1) 실수의 구성

## Def 1. [실수의 구성적 정의]

다음을 만족하는  $\mathbb{Q}$ 의 부분집합  $C$ 를 실수라 하고,  $C$ 들의 집합을  $\mathbb{R}$ 로 표현한다.

- ①  $C \neq \emptyset$
- ②  $s \in C \wedge t < s \Rightarrow t \in C$
- ③  $s \in C \Rightarrow \exists u \in C \text{ s.t. } u > s$
- ④  $\forall c \in C, \exists x \in \mathbb{Q} \text{ s.t. } c < x$

## — Index —

1. 유리수체계
  - (1) 자연수의 구성
  - (2) 정수의 구성
  - (3) 유리수의 구성
2. 실수체계
  - (1) 실수의 구성
  - (2) 실수의 덧셈
  - (3) 실수의 곱셈
3. 실수체계의 성질

참고)

- $s \notin C \Rightarrow \nexists t \in C \text{ s.t. } t > s$
- $r \in C \wedge s \notin C \Rightarrow r < s$

Def 2. [실수의 순서]

 $C, D \in \mathbb{R}$  에 대하여

- ①  $C \subset D$  이면  $C < D$
- ②  $C \subseteq D \wedge C \supseteq D$  이면  $C = D$

로 표현한다.

## — Index —

1. 유리수체계
  - (1) 자연수의 구성
  - (2) 정수의 구성
  - (3) 유리수의 구성
2. 실수체계
  - (1) 실수의 구성
  - (2) 실수의 덧셈
  - (3) 실수의 곱셈
3. 실수체계의 성질

## (2) 실수의 덧셈

- ①  $C, D \in \mathbb{R}$  에 대해  $C$ 와  $D$ 의 합을 다음과 같이 정의한다.
 
$$C + D = \{c + d \mid c \in C, d \in D\}$$
- ② 실수  $0^* = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$  라 정의한다.
- ③  $C \in \mathbb{R}$  에 대해
 
$$-C = \{d \in \mathbb{Q} \mid \forall c \in C, \exists d \text{ s.t. } d < d' \text{ with } c + d' < 0\}$$
 라 정의한다.

## — Index —

1. 유리수체계
  - (1) 자연수의 구성
  - (2) 정수의 구성
  - (3) 유리수의 구성
2. 실수체계
  - (1) 실수의 구성
  - (2) 실수의 덧셈
  - (3) 실수의 곱셈
3. 실수체계의 성질

## (3) 실수의 곱셈

- ①  $C, D \in \mathbb{R}$  에 대해  $C$ 와  $D$ 의 곱  $CD (= C \times D)$ 를 다음과 같이 정의한다. (단,  $c \in C, d \in D$ )
  - 1)  $C, D > 0^*$ 이면  $CD = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < cd\}$
  - 2)  $C > 0^*, D < 0^*$ 이면  $CD = -(C(-D))$
  - 3)  $C < 0^*, D > 0^*$ 이면  $CD = -((-C)D)$
  - 4)  $C, D < 0^*$ 이면  $CD = (-C)(-D)$
  - 5)  $C = 0^*$  이거나  $D = 0^*$  이면  $CD = 0^*$

— Index —

- 1. 유리수체계
  - (1) 자연수의 구성
  - (2) 정수의 구성
  - (3) 유리수의 구성
- 2. 실수체계
  - (1) 실수의 구성
  - (2) 실수의 덧셈
  - (3) 실수의 곱셈
- 3. 실수체계의 성질

② 실수  $1^* = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 1\}$  라 정의한다.

③  $C \in \mathbb{R}$  에 대해

$$\frac{1}{C} = \{d \in \mathbb{Q} \mid \forall c \in C,$$

$$\exists d \text{ s.t. } d < d' \text{ with } cd' < 1\}$$

라 정의한다.

— Index —

- 1. 유리수체계
  - (1) 자연수의 구성
  - (2) 정수의 구성
  - (3) 유리수의 구성
- 2. 실수체계
  - (1) 실수의 구성
  - (2) 실수의 덧셈
  - (3) 실수의 곱셈
- 3. 실수체계의 성질

### 3. 실수체계의 성질

Thm 1.  $\mathbb{R}$  은 순서체이다.

Thm 2. [실수의 완비성]

$\mathbb{R}$  의 공집합이 아닌 부분집합이 위로 유계이면 그 부분집합은 상한을 갖는다.

Thm 3. [실수의 조밀성]

$$\forall A, B \in \mathbb{R}, A < B$$

$$\Rightarrow \exists C \in \mathbb{R} \text{ s.t. } A < C < B$$