3강. 분리공리

[연 습 문 제]

1. 1.(1).Def2 의 ex)에서 왜 f가 2에서 연속이 아닌지 설명하시오.

2. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$ 에 위상 $\mathfrak{I}=\{\varnothing,\ X,\ \{2\},\ \{1,\ 2\},\ \{2,\ 3\}\}$ 가 주어질 때, X에서 X로의 모든 위상동형사상을 구하시오.

3. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$과 X위의 위상 $\mathfrak{I}=\{\varnothing,\ X,\ \{1\},\ \{2\},\ \{1,\ 2\},\ \{2,\ 3\},\ \{1,\ 2,\ 3\}\}$ 에 대해 위상공간 $(X,\ \mathfrak{I})$에서는 열린집합이 아니지만, 그 부분공간 $(A=\{1,\ 3,\ 4\},\ \mathfrak{I}_A)$에서는 열린집합인 것을 모두 구하시오.

4. 다음과 같이 정의된 두 위상공간 $(X,\ \mathfrak{I}_X)$, $(Y,\ \mathfrak{I}_Y)$

$$X=\{1,\ 2,\ 3\},\ \mathfrak{I}_X=\{\varnothing,\ X,\ \{1\},\ \{2,\ 3\}\}$$

$$Y=\{a,\ b\},\ \mathfrak{I}_Y=\{\varnothing,\ Y,\ \{a\}\}$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) $f: X\rightarrow Y$, $f(1)=a,\ f(2)=b,\ f(3)=a$ 와 같이 정의된 f가 ①연속 ②열린 ③닫힌 사상인지 각각 설명하시오.

(2) $X\times Y$위의 곱위상의 기저 $\mathscr{B}$는 $X\times Y$위의 위상은 아님을 보이시오.

1. T_0, T_1, T_2 공간

(1) 정의

- 대표적인 위상적불변량인 분리공리들을 알아본다.

Def 1. [T_0]

$(X,\ \mathfrak{I})$가 위상공간이라 하자.

$$\forall x, y \in X,\ \exists\, U \in \mathfrak{I}\ s.t.$$

$$(x \in U \wedge y \notin U)\ \vee\ (x \notin U \wedge y \in U)$$

을 만족하면 X가 T_0라 한다. (단, $x \neq y$)

— Index —

1. T_0, T_1, T_2 공간

(1) 정의

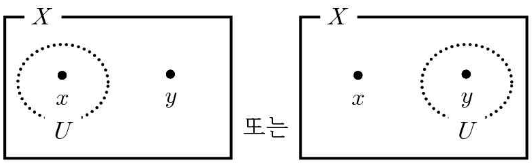
(2) 여러 가지 정리

2. T_3, T_4 공간

(1) 정의

(2) 여러 가지 정리

- T_0 를 도식화하면 다음과 같다.



Def 2. [T_1]

$(X,\ \mathfrak{I})$가 위상공간이라 하자.

$$\forall x, y \in X,\ \exists\, U, V \in \mathfrak{I}\ s.t.$$

$$(x \in U \wedge y \notin U)\ \wedge\ (x \notin V \wedge y \in V)$$

을 만족하면 X가 T_0라 한다. (단, $x \neq y$)

— Index —

1. T_0, T_1, T_2 공간

(1) 정의

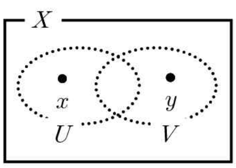
(2) 여러 가지 정리

2. T_3, T_4 공간

(1) 정의

(2) 여러 가지 정리

- T_1 를 도식화하면 다음과 같다.



Def 3. [T_2 (하우스도르프)]

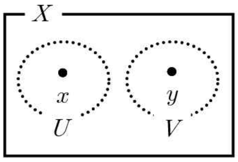
$(X,\ \mathfrak{I})$가 위상공간이라 하자.

$$\forall x, y \in X,\ \exists\, U, V \in \mathfrak{I}\ s.t.$$

$$x \in U\ \wedge\ y \in V\ \wedge\ U \cap V = \varnothing$$

을 만족하면 X가 T_2라 한다. (단, $x \neq y$)

- T_2 를 도식화하면 다음과 같다.



- T_0, T_1, 하우스도르프(T_2)인 위상공간을 각각 간단히 T_0-공간, T_1-공간, 하우스도르프공간(T_2-공간)이라 한다.

- 정의에 의해 자명하게 다음이 성립한다.
  하우스도르프공간 $\Rightarrow$ T_1-공간 $\Rightarrow$ T_0-공간

— Index —
1. T_0, T_1, T_2 공간
(1) 정의
(2) 여러 가지 정리
2. T_3, T_4 공간
(1) 정의
(2) 여러 가지 정리

ex1) 임의의 집합 X에 대한 밀착위상공간은 T_0-공간이 아니다.

ex2) 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$ 위의 위상
$\mathfrak{I}=\{\varnothing,\ X,\ \{1\},\ \{2\},\ \{1,2\}\}$
에 대하여 위상공간 $(X,\ \mathfrak{I})$는
T_0-공간이지만 T_1-공간은 아니다.

ex3) 무한집합 X에 대한 유한여집합위상공간은 T_1-공간이지만 하우스도르프공간은 아니다.

ex4) 모든 거리공간은 하우스도르프공간이다.

— Index —
1. T_0, T_1, T_2 공간
(1) 정의
(2) 여러 가지 정리
2. T_3, T_4 공간
(1) 정의
(2) 여러 가지 정리

(2) 여러 가지 정리

- 분리공리와 관련한 몇 가지 중요한 정리들을 알아보자.

Thm 1. [위상적불변량]
두 위상공간 X, Y가 위상동형이면 다음이 성립한다.
① X가 T_0이다. $\Leftrightarrow$ Y가 T_0이다.
② X가 T_1이다. $\Leftrightarrow$ Y가 T_1이다.
③ X가 T_2이다. $\Leftrightarrow$ Y가 T_2이다.

Thm 2. [부분공간]

① T_0-공간의 부분공간은 T_0이다.

② T_1-공간의 부분공간은 T_1이다.

③ T_2-공간의 부분공간은 T_2이다.

Thm 3. [곱공간]

① 모든 X_α가 T_0-공간이면 $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$도 T_0이다.

② 모든 X_α가 T_1-공간이면 $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$도 T_1이다.

③ 모든 X_α가 T_2-공간이면 $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$도 T_2이다.

— Index —
1. T_0, T_1, T_2 공간
(1) 정의
(2) 여러 가지 정리
2. T_3, T_4 공간
(1) 정의
(2) 여러 가지 정리

Thm 4. [T_0-공간의 성질]

위상공간 X에 대하여 다음은 동치이다.

① X가 T_0이다.

② $\forall x, y \in X$, $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ (단, $x \neq y$)

Thm 5. [T_1-공간의 성질]

위상공간 $(X, \mathfrak{I})$에 대해 다음 두 명제는 동치이다.

① X가 T_1이다.

② $\forall x \in X$, $X - \{x\} \in \mathfrak{I}$

— Index —
1. T_0, T_1, T_2 공간
(1) 정의
(2) 여러 가지 정리
2. T_3, T_4 공간
(1) 정의
(2) 여러 가지 정리

Def. [위상공간상의 수렴]

다음을 만족하면 위상공간 $(X, \mathfrak{I})$상의 수열 $\{x_n\}$이 점 $x \in X$로 수렴한다고 한다.

$$\forall U \in \mathfrak{I},\ x \in U,\ \exists N \in \mathbb{N}\ s.t.$$
$$n \geq N \Rightarrow x_n \in U$$

Thm 6. [하우스도르프공간의 성질]

하우스도르프공간상의 수렴하는 수열은 유일한 극한을 갖는다.

ex) $X = \{1, 2, 3\}$, $\mathfrak{I} = \{\varnothing, X, \{1, 3\}\}$

일 때 다음 수열은 여러 극한을 갖는다.

$$\{x_n\} : 1, 3, 1, 3, 1, 3, \cdots$$

2. T_3 , T_4 공간

(1) 정의

- 점의 분리성에서 더 나아가 점을 포함한 집합의 분리성을 등급화한다.

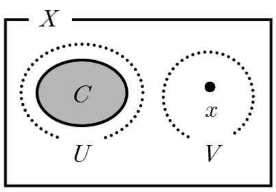
- 점을 포함하는 최소 크기의 집합(한점집합)은 1.(2).Thm 5. 에 의해 T_1-공간에서 닫힌집합임을 기억하자.

— Index —
1. T_0, T_1, T_2 공간
(1) 정의
(2) 여러 가지 정리
2. T_3, T_4 공간
(1) 정의
(2) 여러 가지 정리

Def 1. [T_3 (정칙)]

T_1-공간인 $(X, \mathfrak{I})$의 임의의 닫힌집합 C와 점 $x \in X - C$에 대하여, $\exists\, U, V \in \mathfrak{I}$
$s.t.$ $C \subset U \ \wedge \ x \in V \ \wedge \ U \cap V = \varnothing$
을 만족하면 X가 T_3라 한다.

- T_3 를 도식화하면 다음과 같다.

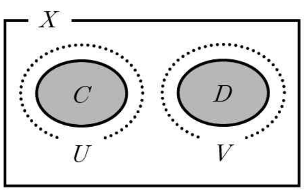


— Index —
1. T_0, T_1, T_2 공간
(1) 정의
(2) 여러 가지 정리
2. T_3, T_4 공간
(1) 정의
(2) 여러 가지 정리

Def 2. [T_4 (정규)]

T_1-공간인 $(X, \mathfrak{I})$의 임의의 서로소인 닫힌집합 C, D 에 대하여, $\exists\, U, V \in \mathfrak{I}$
$s.t.$ $C \subset U \ \wedge \ D \subset V \ \wedge \ U \cap V = \varnothing$
을 만족하면 X가 T_4라 한다.

- T_4 를 도식화하면 다음과 같다.



- 정칙(T_3), 정규(T_4)인 위상공간을 각각 간단히 정칙공간, 정규공간이라 한다.

- 위상공간 $(X,\ \mathfrak{I})$가 T_1이라는 조건을 놓치지 않도록 유의하자.

ex1) 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$에 위상 $\mathfrak{I}=\{\varnothing, X, \{1\}, \{2,3\}\}$을 준 위상공간

ex2) 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$에 위상 $\mathfrak{I}=\{\varnothing, X, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$을 준 위상공간

── Index ──
1. T_0, T_1, T_2 공간
(1) 정의
(2) 여러 가지 정리
2. T_3, T_4 공간
(1) 정의
(2) 여러 가지 정리

(2) 여러 가지 정리

Thm 1. [T_3-공간 ⇒ T_2-공간]
모든 정칙공간은 하우스도르프이다.

Thm 2. [T_4-공간 ⇒ T_3-공간]
모든 정규공간은 정칙이다.

Thm 3. [거리공간 ⇒ T_4-공간]
모든 거리공간은 정규이다.

── Index ──
1. T_0, T_1, T_2 공간
(1) 정의
(2) 여러 가지 정리
2. T_3, T_4 공간
(1) 정의
(2) 여러 가지 정리

참고) 위상공간들 사이의 관계

Lemma 1. [전단사사상의 성질]

두 위상공간 X, Y사이의 전단사사상 $f : X \to Y$가 열린사상이면 f는 닫힌사상이기도 하다.

Thm 4. [위상적불변량]

두 위상공간 X, Y가 위상동형이면 다음이 성립한다.

① X는 정칙공간 $\Leftrightarrow$ Y는 정칙공간

② X는 정규공간 $\Leftrightarrow$ Y는 정규공간

Lemma 2. [부분공간의 닫힌집합]

위상공간 X의 부분공간 A에 대하여 다음 두 명제는 동치이다.

① $C \subset A$가 A의 닫힌집합이다.

② $C = A \cap D$를 만족하는 X의 닫힌집합 D가 존재한다.

Lemma 3. [닫힌부분공간의 성질]

위상공간 X와 $B \subset A \subset X$에 대하여 B가 부분공간 A의 닫힌집합이고 A가 X의 닫힌집합이면 B는 X의 닫힌집합이다.

Thm 5. [부분공간]

① 정칙공간의 부분공간은 정칙이다.

② 정규공간의 닫힌부분공간은 정규이다.

- 정규공간의 부분공간이 항상 정규가 되는 것은 아니다.

Lemma 4. [T_3-공간의 또 다른 정의]

다음 조건은 T_1-공간 $(X, \mathfrak{I})$가 정칙공간이기 위한 필요충분조건이다.

$$\forall x \in X,\ x \in \forall U \in \mathfrak{I},\ \exists V \in \mathfrak{I}$$
$$s.t.\ x \in V \subset \overline{V} \subset U$$

Thm 6. [정칙공간들의 곱공간]

정칙공간들의 곱공간은 정칙이다.

- 정규공간들의 곱공간이 항상 정규가 되는 것은 아니다.

[연 습 문 제]

1. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대한 위상공간 중에 T_0-공간이 아닌 사례를 드시오. (단, 밀착위상공간은 제외)

2. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대한 위상공간 중에 T_0-공간이지만 T_1-공간은 아닌 사례를 드시오.
(단, 위상 $\mathfrak{I}=\{\varnothing,\ X,\ \{1\},\ \{2\},\ \{1,2\}\}$ 는 제외)

3. 모든 이산위상공간은 하우스도르프공간임을 보이시오.

4. 2.(1).Def2.ex2) 에서 정의된 위상공간 $(X,\ \mathfrak{I})$가 정규공간이 아닌 이유를 설명하시오.