7강. 집합의 순서

1. 부분순서집합

(1) 정의

① 부분순서관계

: 반사적, 반대칭적, 추이적인 관계

ex 1> 두 집합 A, B 에 대하여 $A\subseteq B$
ex 2> 두 실수 x, y 에 대하여 $x\leq y$
ex 3> 두 자연수 n, m 에 대하여
n이 m의 배수인 관계

— Index —
1. 부분순서집합
(1) 정의
(2) 상한과 하한
(3) 절편과 절단
(4) 순서동형
2. 전순서집합
(1) 전순서집합
(2) 쇄
(3) 정렬집합
3. 서수
(1) 서수의 개념
(2) 서수의 순서
(3) 서수의 연산

② 부분순서집합

: 집합 A 상에 부분순서관계 $\leq$ 가 주어진 경우 A 를 부분순서집합이라 하고, 이를 $(A, \leq)$ 로 나타내기도 한다.

③ 극대원소와 극소원소

A 가 부분순서집합이라 할 때

$$\forall x\in A,\ x\geq a \Rightarrow x=a$$

를 만족하는 A 의 원소 a 를 극대원소,

$$\forall x\in A,\ x\leq b \Rightarrow x=b$$

를 만족하는 A 의 원소 b 를 극소원소

라 한다.

ex> 멱집합 $P(X)$ 에서 $\varnothing$, X

④ 최대원소와 최소원소

A 가 부분순서집합이라 할 때

$$\forall x\in A,\ x\leq a$$

를 만족하는 A 의 원소 a 를 최대원소,

$$\forall x\in A,\ x\geq b$$

를 만족하는 A 의 원소 b 를 최소원소

라 한다.

(2) 상한과 하한

① 상계와 하계

B 가 부분순서집합 A 의 부분집합이라 할 때

$$\forall x\in B,\ x\leq a$$

인 $a\in A$ 를 A 에서 B 의 상계,

$$\forall x\in B,\ x\geq b$$

인 $b\in A$ 를 A 에서 B 의 하계라 한다.

② 상한과 하한

부분순서집합 A 의 부분집합 B 에 대하여 B 의 상계(하계)들의 집합이 최소(최대)원소를 가질 때 이 원소를 A 에서 B 의 상한(하한)이라 하고, $\sup B$ ($\inf B$) 로 나타낸다.

ex> $A=[0,\ 1)\subset\mathbb{R}$에서 0, 1

(3) 절편과 절단

① 절편

부분순서집합 A 의 원소 a 에 대하여

$$S_a=\{x\in A \mid x<a\}$$

ex 1> $\mathbb{R}$의 절편 $S_0=(-\infty,\ 0)$

ex 2> $\mathbb{N}$의 절편 $S_3=\{1,\ 2\}$

② 절단

1) $B\cap C=\varnothing$, $B\cup C=A$
2) $x\in B \wedge y\le x \Rightarrow y\in B$
3) $x\in C \wedge x\le y \Rightarrow y\in C$

을 만족하는 부분순서집합 A 의 공집합이 아닌 부분집합들의 쌍 $(B,\ C)$

ex > $\mathbb{R}$의 두 부분집합 $M=(-\infty,\ 0)$, $N=[0,\ \infty)$ 에 대하여 $(M,\ N)$

(4) 순서동형

① 순서보존함수

부분순서집합 A, B 에 대하여 함수 $f : A \rightarrow B$ 가 조건

$$\forall x,\ y \in A,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

을 만족하면 f를 순서보존함수라 한다.

— Index —
1. 부분순서집합
(1) 정의
(2) 상한과 하한
(3) 절편과 절단
(4) 순서동형
2. 전순서집합
(1) 전순서집합
(2) 쇄
(3) 정렬집합
3. 서수
(1) 서수의 개념
(2) 서수의 순서
(3) 서수의 연산

② 순서동형

부분순서집합 A, B 에 대하여 함수 $f : A \rightarrow B$ 가 전단사이고

$$\forall x,\ y \in A,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

이면 f 를 순서동형사상이라 한다.
이때 A 와 B 는 순서동형이라 하고 $A \simeq B$ 로 나타낸다.

ex> 항등함수 $I_A : A \rightarrow A$

— Index —
1. 부분순서집합
(1) 정의
(2) 상한과 하한
(3) 절편과 절단
(4) 순서동형
2. 전순서집합
(1) 전순서집합
(2) 쇄
(3) 정렬집합
3. 서수
(1) 서수의 개념
(2) 서수의 순서
(3) 서수의 연산

2. 전순서집합

(1) 전순서집합

① 비교가능

부분순서집합 A 의 두 원소 x, y 가

$$x \leq y \ \vee \ y \leq x$$

이면 x 와 y 는 비교가능하다고 한다.

② 전순서집합

부분순서집합 A 의 임의의 두 원소가 비교가능하면 A 를 전순서집합이라고 한다.

(2) 쇄

부분순서집합의 A 의 전순서 부분집합 B 를 A 에서의 쇄라고 한다.

(3) 정렬집합

부분순서집합 A 의 공집합이 아닌 모든 부분집합 B 가 최소원소를 가지면, 그리고 그 때에만 집합 A 를 정렬집합이라 한다.

3. 서수

(1) 서수의 개념

① 서수 : 집합의 길이를 나타내는 수.

1) 모든 정렬집합 A 에 대하여 서수가 존재하며, 모든 순서수 α 에 대하여 $o(A)=\alpha$ 인 정렬집합 A 가 존재한다.
2) $A \approx B \Leftrightarrow o(A)=o(B)$
3) $A=\varnothing \Leftrightarrow o(A)=0$
4) $A \approx \{1,\ 2,\ \cdots,\ k\} \Leftrightarrow o(A)=k$

② 유한서수 : 유한정렬집합의 기수

초한서수 : 무한정렬집합의 서수

< 대표적인 초한서수 >

$\omega = o(\mathbb{N})$ 자연수집합의 서수

(2) 서수의 순서

정렬집합 A, B 에 대하여 $o(A)=\alpha$, $o(B)=\beta$ 일 때 A 가 B 의 절편과 순서동형이면 α는 β보다 작거나 같다고 하며 $\alpha \leqslant \beta$ 로 나타내고 이때 특히 $\alpha \neq \beta$ 이면 $\alpha < \beta$ 로 나타낸다.

ex> $A=\{1\}$, $B=\{3, 4, 5\}$ 일 때

$o(A)=1 < o(B)=3$

(2) 서수의 연산

① 서수 합

: 서로소인 두 집합 A, B 의 서수를 각각 α, β 라고 할 때 $\alpha+\beta=o(A\cup B)$

② 서수 곱

: 집합 A, B 의 서수를 각각 α, β 라고 할 때 $\alpha\beta=o(B\times A)$

③ 연산 법칙

임의의 서수 α, β, γ 에 대하여
다음이 성립한다.

1) 결합법칙 : $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$
$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$

2) 분배법칙 : $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$
<주의!!> $(\alpha+\beta)\gamma\neq\alpha\gamma+\beta\gamma$

※ 일반적으로 서수는 합과 곱에 대하여
교환법칙이 성립하지 않는다.

연습문제 1. 실수집합 $\mathbb{R}$에서 $\left\{\frac{1}{n} \mid n\in N\right\}$ 의 최대원소,
최소원소, 상계, 상한, 하계, 하한을 구하시오.

연습문제 2. 전순서집합 $([0,\ 1],\ \leq)$ 은 정렬집합이
아님을 설명하시오.

연습문제 3. 임의의 서수 α, β, γ 에 대하여 다음 두
명제가 성립하지 않음을 각각 보이시오.
(1) $\beta+\alpha=\gamma+\alpha \ \rightarrow \ \beta=\gamma$
(2) $\alpha\gamma=\beta\gamma \ \rightarrow \ \alpha=\beta$

연습문제 4. 다음 네 명제들 중에서 거짓인 것을 고르고,
그 이유를 설명하시오.

① $\alpha<\beta \ \rightarrow \ \gamma+\alpha<\gamma+\beta$
② $\alpha<\beta \ \rightarrow \ \alpha+\gamma<\beta+\gamma$
③ $\alpha<\beta \ \rightarrow \ \gamma\alpha<\gamma\beta$
④ $\alpha<\beta \ \rightarrow \ \alpha\gamma<\beta\gamma$