

부록. 실수의 구성

— Index —

- 1. 유리수체계
 - (1) 자연수의 구성
 - (2) 정수의 구성
 - (3) 유리수의 구성

- 2. 실수체계
 - (1) 실수의 구성
 - (2) 실수의 덧셈
 - (3) 실수의 곱셈

- 3. 실수체계의 성질

1. 유리수체계

(1) 자연수의 구성

Def 1. [자연수의 구성적 정의]

자연수집합 \mathbb{N} 의 원소를 다음과 같이 정의한다.

$$1 = \{\emptyset\}$$

$$2 = 1 \cup \{1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$3 = 2 \cup \{2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

...

$$n' = n \cup \{n\} \quad ('은 그 다음 수)$$

— Index —

- 1. 유리수체계
 - (1) 자연수의 구성
 - (2) 정수의 구성
 - (3) 유리수의 구성

- 2. 실수체계
 - (1) 실수의 구성
 - (2) 실수의 덧셈
 - (3) 실수의 곱셈

- 3. 실수체계의 성질

Def 2. [자연수의 순서]

임의의 $n, m \in \mathbb{N}$ 에 대하여

$$\textcircled{1} \quad n \subset m \text{ 이면 } n < m$$

$$\textcircled{2} \quad n \subseteq m \wedge n \supseteq m \text{ 이면 } n = m$$

Def 3. [자연수의 연산]

임의의 $n, m \in \mathbb{N}$ 에 대하여

$$\textcircled{1} \quad n + 1 = n', \quad n + m' = (n + m)'$$

$$\textcircled{2} \quad (n + m)' - n = m$$

$$\textcircled{3} \quad n \times 1 = n, \quad n \times m' = n \times m + n$$

Thm. \mathbb{N} 은 전순서집합이다.

— Index —**1. 유리수체계**

(1) 자연수의 구성

(2) 정수의 구성

(3) 유리수의 구성

2. 실수체계

(1) 실수의 구성

(2) 실수의 덧셈

(3) 실수의 곱셈

3. 실수체계의 성질**(2) 정수의 구성****Def 1. [정수의 구성적 정의]** $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 의 동치관계

$$E : (m, n)E(m^*, n^*) \Leftrightarrow m + n^* = m^* + n$$

$$\text{의 동치류 } [(m, n)] = \begin{cases} n - m & , m < n \\ 0 & , m = n \\ -(m - n) & , m > n \end{cases}$$

를 정수라 하며, 이들의 집합을 \mathbb{Z} 로 표현한다.

— Index —**1. 유리수체계**

(1) 자연수의 구성

(2) 정수의 구성

(3) 유리수의 구성

2. 실수체계

(1) 실수의 구성

(2) 실수의 덧셈

(3) 실수의 곱셈

3. 실수체계의 성질**Def 2. [정수의 연산]**두 정수 $a = [(a_1, a_2)]$, $b = [(b_1, b_2)]$ 에 대하여 a , b 의 연산을 다음과 같이 정의한다.

$$\textcircled{1} \quad a + b = [(a_1 + b_1, a_2 + b_2)]$$

$$\textcircled{2} \quad a - b = [(a_1 + b_2, a_2 + b_1)]$$

$$\textcircled{3} \quad a \times b = [(a_1 b_2 + a_2 b_1, a_1 b_1 + a_2 b_2)]$$

Thm. \mathbb{Z} 는 환이다.**— Index —****(3) 유리수의 구성****1. 유리수체계**

(1) 자연수의 구성

(2) 정수의 구성**(3) 유리수의 구성****2. 실수체계**

(1) 실수의 구성

(2) 실수의 덧셈

(3) 실수의 곱셈

3. 실수체계의 성질**Def 1. [유리수의 구성적 정의]** $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ 의 동치관계

$$E : (a, b)E(a^*, b^*) \Leftrightarrow ab^* = a^*b$$

의 동치류 $[(a, b)]$ 를 유리수라 하며, 이들의 집합을 \mathbb{Q} 로 표현한다.

— Index —**1. 유리수체계**

(1) 자연수의 구성

(2) 정수의 구성

(3) 유리수의 구성**2. 실수체계**

(1) 실수의 구성

(2) 실수의 덧셈

(3) 실수의 곱셈

3. 실수체계의 성질**Def 2. [유리수의 연산]**두 유리수 $a = [(a_1, a_2)]$, $b = [(b_1, b_2)]$ 에 대하여 a , b 의 연산을 다음과 같이

정의한다.

$$\textcircled{1} \quad a + b = [(a_1b_2 + a_2b_1, a_2b_2)]$$

$$\textcircled{2} \quad a \times b = ab = [(a_1b_1, a_2b_2)]$$

$$\textcircled{3} \quad a \div b = \frac{a}{b} = [(a_1b_2, a_2b_1)] \quad (\text{단, } b \neq 0)$$

Thm 1. \mathbb{Q} 는 체이다.**— Index —****1. 유리수체계**

(1) 자연수의 구성

(2) 정수의 구성

(3) 유리수의 구성**2. 실수체계**

(1) 실수의 구성

(2) 실수의 덧셈

(3) 실수의 곱셈

3. 실수체계의 성질**Def 2. [순서체의 정의]**다음 성질을 만족하는 체 F 를 순서체라 한다.

- $x, y, z \in F$, $y < z \Rightarrow x + y < x + z$
- $x, y \in F$, $x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow xy > 0$

Thm 2. \mathbb{Q} 은 순서체이다.**2. 실수체계****(1) 실수의 구성****Def 1. [실수의 구성적 정의]**다음을 만족하는 \mathbb{Q} 의 부분집합 C 를실수라 하고, C 들의 집합을 \mathbb{R} 로

표현한다.

- ① $C \neq \emptyset$
- ② $s \in C \wedge t < s \Rightarrow t \in C$
- ③ $s \in C \Rightarrow \exists u \in C \text{ s.t. } u > s$
- ④ $\forall c \in C, \exists x \in \mathbb{Q} \text{ s.t. } c < x$

— Index —

참고)

1. 유리수체계

(1) 자연수의 구성

(2) 정수의 구성

(3) 유리수의 구성

2. 실수체계

(1) 실수의 구성

(2) 실수의 덧셈

(3) 실수의 곱셈

3. 실수체계의 성질

Def 2. [실수의 순서] $C, D \in \mathbb{R}$ 에 대하여① $C \subset D$ 이면 $C < D$ ② $C \subseteq D \wedge C \supseteq D$ 이면 $C = D$

로 표현한다.

— Index —**(2) 실수의 덧셈**

1. 유리수체계

(1) 자연수의 구성

(2) 정수의 구성

(3) 유리수의 구성

2. 실수체계

(1) 실수의 구성

(2) 실수의 덧셈

(3) 실수의 곱셈

3. 실수체계의 성질

① $C, D \in \mathbb{R}$ 에 대해 C 와 D 의 합을 다음과 같이 정의한다.

$$C + D = \{c + d \mid c \in C, d \in D\}$$

② 실수 $0^* = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$ 라 정의한다.③ $C \in \mathbb{R}$ 에 대해

$$-C = \{d \in \mathbb{Q} \mid \forall c \in C, \exists d \text{ s.t. } d < d' \text{ with } c + d' < 0\}$$

라 정의한다.

— Index —**(3) 실수의 곱셈**

1. 유리수체계

(1) 자연수의 구성

(2) 정수의 구성

(3) 유리수의 구성

2. 실수체계

(1) 실수의 구성

(2) 실수의 덧셈

(3) 실수의 곱셈

3. 실수체계의 성질

① $C, D \in \mathbb{R}$ 에 대해 C 와 D 의 곱 $CD (= C \times D)$ 를 다음과 같이 정의한다.(단, $c \in C, d \in D$)1) $C, D > 0^*$ 이면 $CD = \{q \in Q \mid q < cd\}$ 2) $C > 0^*, D < 0^*$ 이면 $CD = -(C(-D))$ 3) $C < 0^*, D > 0^*$ 이면 $CD = -((-C)D)$ 4) $C, D < 0^*$ 이면 $CD = (-C)(-D)$ 5) $C = 0^*$ 이거나 $D = 0^*$ 이면 $CD = 0^*$

— Index —**1. 유리수체계**

(1) 자연수의 구성

(2) 정수의 구성

(3) 유리수의 구성

2. 실수체계

(1) 실수의 구성

(2) 실수의 덧셈

(3) 실수의 곱셈

3. 실수체계의 성질

② 실수 $1^* = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 1\}$ 라 정의한다.

③ $C \in \mathbb{R}$ 에 대해

$$\frac{1}{C} = \{d \in \mathbb{Q} \mid \forall c \in C, \exists d \text{ s.t. } d < d' \text{ with } cd' < 1\}$$

라 정의한다.

— Index —**1. 유리수체계**

(1) 자연수의 구성

(2) 정수의 구성

(3) 유리수의 구성

2. 실수체계

(1) 실수의 구성

(2) 실수의 덧셈

(3) 실수의 곱셈

3. 실수체계의 성질

3. 실수체계의 성질

Thm 1. \mathbb{R} 은 순서체이다.

Thm 2. [실수의 완비성]

\mathbb{R} 의 공집합이 아닌 부분집합이 위로 유계이면 그 부분집합은 상한을 갖는다.

Thm 3. [실수의 조밀성]

$$\begin{aligned} \forall A, B \in \mathbb{R}, A < B \\ \Rightarrow \exists C \in \mathbb{R} \text{ s.t. } A < C < B \end{aligned}$$