① 외연 공리

$$(\forall x \in A,\ x \in B) \wedge (\forall x \in B,\ x \in A)$$
$$\Leftrightarrow \quad A = B$$

- 어떤 집합을 규정하는 것은 그 집합이 갖는 성질(내포)이 아니라 포함된 원소(외연)라는 공리.
- 외연 공리로써 집합의 유일성을 증명한다.

참고) 외연공리에 의해 $\{A,\ A\} = \{A\}$

② 짝 공리

$$\forall A, B\ ,\ \exists C \quad s.t.\ C = \{A,\ B\}$$

- 짝공리는 곱집합을 정의하는 근거로 작용한다.

③ 공집합 공리

$$\exists A\ s.t.\ \forall x,\ x \notin A$$

- 공집합 공리의 A는 곧 $\varnothing$를 일컫는다.

④ 정칙성 공리

$$\forall A,\ A \neq \varnothing \Rightarrow \exists B \in A\ s.t.\ A \cap B = \varnothing$$

- 정칙공리에 의해 $\nexists A\ s.t.\ A \in A$

⑤ 합집합 공리

$$\forall A,\ \exists B\ s.t.\ B = \cup A$$

- 합집합 공리는 $A \cup B$를 정의하는 근거로 작용한다.

⑥ 멱집합 공리

$$\forall A,\ \exists P\ s.t.\ \forall B \subset A,\ B \in P$$

- 멱집합 공리로부터 임의의 집합 A에 대한 멱집합 $P(A)$가 정의된다.

⑦ 무한 공리

$$\exists A\ s.t.\ \varnothing \in A \wedge (\forall x \in A, x \cup \{x\} \in A)$$

- 무한 공리는 무한집합의 존재성을 보장한다.

⑧ 치환 공리꼴

$$\forall x,\ \exists ! y\ s.t.\ xRy \Rightarrow \forall A,\ \exists B\ s.t.$$
$$(\forall x \in A,\ \exists y \in B\ s.t.\ xRy)$$

- 치환 공리꼴로써 모든 정렬 가능한 집합에 대해 그 집합과 크기가 같은 서수가 (유일하게)존재함이 증명된다.
- 관계 R에 따라 무수히 많은 공리가 만들어진다.

⑨ 분류 공리꼴

$$\forall A,\ \exists B\ s.t.\ B = \{x \in A \mid p(x)\}$$

- 분류 공리꼴은 임의의 집합에 대한 부분집합의 존재성을 보장한다.
- 분류 공리꼴로써 임의의 두 집합에 대한 교집합을 만들 수 있다. 즉,
  $$\forall A, B,\ A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\}$$
- 내포원리의 진화형태로, 러셀의 역설을 피한다.
- 명제함수 $p(x)$에 따라 무수히 많은 공리가 만들어진다.

⑩ 선택 공리

$$\forall A,\ \varnothing \notin A \Rightarrow \exists f : A \rightarrow \cup A$$
$$s.t.\ \forall B \in A,\ f(B) \in B$$

- f는 각각의 B에 대한 A내의 원소를 하나씩 선택하는 역할을 한다.
- 선택 공리로부터 정렬원리, 조른의 보조정리 등이 증명된다.