2.(2).Thm1. 증명>

- 위상공간 X가 정칙이라 하자.
- X가 T_1이므로 1.(2).Thm5. 에 의하여
  $\forall x, y \in X,\ x \neq y,\ \{x\}$는 닫힌집합 $\wedge\ y \notin \{x\}$
- X가 정칙이므로 $\exists\, U, V \in \mathfrak{I}_X\ s.t.\ \{x\} \subset U\ \wedge\ y \in V\ \wedge\ U \cap V = \varnothing$
  $\Rightarrow x \in U\ \wedge\ y \in V\ \wedge\ U \cap V = \varnothing$
  $\therefore$ X는 하우스도르프. ■

2.(2).Thm2. 증명>

- 위상공간 X가 정규라 하자.
- X가 T_1이므로 닫힌집합 C와 점 $x \notin C$에 대해 $\{x\}$는 닫힌집합 $\wedge$ $\{x\} \cap C = \varnothing$
- X가 정규이므로 $\exists\, U, V \in \mathfrak{I}_X\ s.t.\ \{x\} \subset U\ \wedge\ C \subset V\ \wedge\ U \cap V = \varnothing$
  $\Rightarrow x \in U\ \wedge\ C \subset V\ \wedge\ U \cap V = \varnothing$
  $\therefore$ X는 정칙. ■

2.(2).Lemma1. 증명>

- X의 임의의 닫힌집합 C에 대해 $C^c \in \mathfrak{I}_X$
  $\therefore$ $f(C^c) \in \mathfrak{I}_Y$ ($\because$ f는 열린사상)
- f가 전단사이므로 $f(C^c) = f(C)^c$
  $\therefore$ $f(C)$는 Y의 닫힌집합. ■

2.(2).Lemma2. 증명>

① $\Rightarrow$ ②

- $C \subset A$가 A의 닫힌집합
  $\Rightarrow A - C \in \mathfrak{I}_A$
  $\Rightarrow \exists\, U \in \mathfrak{I}_X\ s.t.\ A - C = A \cap U$ ($\because$부분위상의 정의)
- $D := X - U$는 X의 닫힌집합.
- $A \cap D = A \cap (X - U) = A - (A \cap U) = A - (A - C) = C$

② $\Rightarrow$ ①

- X의 닫힌집합 D에 대해 $C := A \cap D$
- $X - D \in \mathfrak{I}_X$
  $\Rightarrow A \cap (X - D) \in \mathfrak{I}_A$ ($\because$ 부분위상의 정의)
  $\Rightarrow A - (A \cap D) \in \mathfrak{I}_A$
  $\therefore$ $A \cap D = C$는 A의 닫힌집합. ■

2.(2).Lemma3. 증명>

- B가 부분공간 A의 닫힌집합
  $\Rightarrow$ $\exists$닫힌집합 $C \subset X\ s.t.\ B = A \cap C$ ($\because$ Lemma 2.)
- 가정에 의해 A가 X의 닫힌집합이므로
  $B = A \cap C$는 닫힌집합. ■

2.(2).Thm6. 증명>

- $X_\alpha\,(\alpha\in\Lambda)$를 정칙공간들이라 하자. Then
  $\prod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$는 T_1이다. ($\because$ 1.(2).Thm3.)
- $\forall\,(x_\alpha)\in\prod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$, $(x_\alpha)\in\forall\,U\in\mathfrak{I}$(곱위상), $\exists\prod_{\alpha\in\Lambda}U_\alpha\in\mathscr{B}$(곱위상의 기저) $s.t.$
  $(x_\alpha)\in\prod_{\alpha\in\Lambda}U_\alpha\subset U$
- $U_\alpha=X_\alpha$인 경우 $V_\alpha=X_\alpha$라 하자. 그리고
  $U_\alpha\neq X_\alpha$인 경우 $x_\alpha\in U_\alpha\in\mathfrak{I}_\alpha$($X_\alpha$의 위상) 이고 X_α가 정칙이므로
  $x_\alpha\in V_\alpha\subset\overline{V_\alpha}\subset U_\alpha$ 를 만족하는 $V_\alpha\in\mathfrak{I}_\alpha$를 택하자.
  Then $V=\prod_{\alpha\in\Lambda}V_\alpha\in\mathfrak{I}$

  $\therefore$ $(x_\alpha)\in V\subset\overline{V}=\overline{\prod_{\alpha\in\Lambda}V_\alpha}=\prod_{\alpha\in\Lambda}\overline{V_\alpha}\subset\prod_{\alpha\in\Lambda}U_\alpha\subset U$ (아래 [참고]를 참고바람.)

  그러므로 Lemma4. 에 의해 $\prod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$는 정칙. ∎

[참고] $\forall\,\alpha\in\Lambda$, ($X_\alpha$는 위상공간) $\wedge$ ($A_\alpha\subset X_\alpha$)

$\Rightarrow$ $\prod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$의 부분집합 $\prod_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$에 대해 $\overline{\prod A_\alpha}=\prod\overline{A_\alpha}$

증명>

① $\overline{\prod A_\alpha}\subset\prod\overline{A_\alpha}$

- $x=(x_\alpha)\in\overline{\prod A_\alpha}$ 라 하자.

Claim : $\forall\,\alpha\in\Lambda$, $x_\alpha\in\overline{A_\alpha}$

- x_α를 포함하는 임의의 열린집합 $V_\alpha\subset X_\alpha$에 대하여 $p_\alpha^{-1}(V_\alpha)$는
  $x\in p_\alpha^{-1}(V_\alpha)$를 만족하는 $\prod X_\alpha$의 열린집합이다.
- $x\in\overline{\prod A_\alpha}$ $\Rightarrow$ $p_\alpha^{-1}(V_\alpha)\cap\prod A_\alpha\neq\varnothing$
  $\therefore$ $\exists\,y=(y_\alpha)\in p_\alpha^{-1}(V_\alpha)\cap\prod A_\alpha$ $s.t.$ $y_\alpha\in V_\alpha\cap A_\alpha$ $\Rightarrow$ $V_\alpha\cap A_\alpha\neq\varnothing$
  그러므로 $x_\alpha\in\overline{A_\alpha}$
  따라서 $x=(x_\alpha)\in\prod\overline{A_\alpha}$

② $\overline{\prod A_\alpha}\supset\prod\overline{A_\alpha}$

- $x=(x_\alpha)\in\prod\overline{A_\alpha}$ 라 하자.
  $\Rightarrow$ x를 포함하는 임의의 열린집합 $W\subset\prod X_\alpha$에 대하여
  $x\in\prod U_\alpha\subset W$를 만족하는 $\prod X_\alpha$상의 기저의 원소 $\prod U_\alpha$가 존재한다.
- $\forall\,\alpha\in\Lambda$, $x_\alpha\in\overline{A_\alpha}$ $\wedge$ $x_\alpha\in U_\alpha$ 이므로 $U_\alpha\cap A_\alpha\neq\varnothing$
  $\therefore$ $\exists\,y_\alpha\in U_\alpha\cap A_\alpha$ $s.t.$ $y=(y_\alpha)\in\prod U_\alpha\cap\prod A_\alpha\subset W\cap\prod A_\alpha$
  $\Rightarrow$ $W\cap\prod A_\alpha\neq\varnothing$
  $\Rightarrow$ $x=(x_\alpha)\in\overline{\prod A_\alpha}$ ∎