

3강. 수학적 벡터

[연 습 문 제]

- 다음 두 벡터 u, v 의 사잇각 θ 에 대하여 $\cos \theta$ 의 값을 구하시오.
 - $u = (-3, 5), v = (2, 7)$
 - $u = (2, 1, 3), v = (1, 2, -4)$
 - $u = (2, 0, 1, -2), v = (1, 5, -3, 2)$
- 다음 두 벡터 u, v 에 의해 결정되는 평행사변형의 넓이를 구하시오.
 - $u = (2, 3, 0), v = (-1, 2, -2)$
 - $u = (-3, 1, -3), v = (6, -2, 6)$
- 두 점 $(-1, -1, 0), (2, 0, 1)$ 을 지나는 직선이 세 점 $(1, -1, 0), (1, 2, 0), (0, 0, 2)$ 을 지나는 평면과 만나는 교점의 좌표를 구하시오.
- 두 벡터 $u = (2, 0), v = (1, 3)$ 를 이용하여 행렬식 $\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 의 절댓값이 2차원 공간에서 어떤 기하적인 의미를 갖는지 고찰하시오.
- 세 벡터 $u = (2, 0, 0), v = (0, 3, 0), w = (1, 1, 1)$ 를 이용하여 행렬식 $\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 의 절댓값이 3차원 공간에서 어떤 기하적인 의미를 갖는지 고찰하시오.

— Index —

1. 대수구조
 - (1) 대수구조
 - (2) 여러 대수구조
2. 벡터공간
 - (1) 벡터공간
 - (2) 선형생성
 - (3) 선형독립
3. 여러 벡터공간
 - (1) 노름공간
 - (2) 내적공간
 - (3) 유클리드공간
4. 기저와 차원

1. 대수구조

(1) 대수구조

수 뿐 아니라 수를 대신할 수 있는 모든 것을 대상으로 하는 집합과 그 집합에 부여된 연산이 여러 가지 공리로써 엮인 수학적 대상.

간단히 **일련의 연산들이 주어진 집합**을 대수구조라고 한다.

— Index —

1. 대수구조
 - (1) 대수구조
 - (2) 여러 대수구조
2. 벡터공간
 - (1) 벡터공간
 - (2) 선형생성
 - (3) 선형독립
3. 여러 벡터공간
 - (1) 노름공간
 - (2) 내적공간
 - (3) 유클리드공간
4. 기저와 차원

(2) 여러 대수구조

반군 : 집합과 그 위의 결합법칙을 따르는 하나의 이항 연산을 갖춘 대수구조.

모노이드 : 항등원을 갖는 반군.

군 : 역원을 갖는 모노이드.

아벨군(가환군) : 교환법칙이 성립하는 군.

환 : 덧셈에 대하여 아벨군, 곱셈에 대하여 반군을 이루고 분배법칙이 성립하는 대수구조.

— Index —

1. 대수구조
 - (1) 대수구조
 - (2) 여러 대수구조
2. 벡터공간
 - (1) 벡터공간
 - (2) 선형생성
 - (3) 선형독립
3. 여러 벡터공간
 - (1) 노름공간
 - (2) 내적공간
 - (3) 유클리드공간
4. 기저와 차원

가군 : 어떤 환의 원소에 대한 곱셈이 주어지며, 분배법칙이 성립하는 아벨군.

가환환 : 곱셈이 교환법칙을 만족하는 환.

나눗셈환 : 0이 아닌 모든 원소가 역원을 가지며, 원소의 개수가 둘 이상인 환.

체 : 가환환인 나눗셈환. 즉, 사칙연산이 자유로이 시행 될 수 있고 산술의 잘 알려진 규칙들을 만족하는 대수구조.

— Index —

1. 대수구조
 - (1) 대수구조
 - (2) 여러 대수구조
2. 벡터공간
 - (1) 벡터공간
 - (2) 선형생성
 - (3) 선형독립
3. 여러 벡터공간
 - (1) 노름공간
 - (2) 내적공간
 - (3) 유클리드공간
4. 기저와 차원

2. 벡터공간

(1) 벡터공간

체 F 에 대한 가군 $(V, +, \cdot)$ 을
 벡터공간, V 의 원소를 벡터라 한다.
 이때 $+$ 는 벡터의 덧셈이고, \cdot 는 벡터의
 스칼라배다.

참고 $> + : V \times V \rightarrow V$ 인 함수
 $\cdot : F \times V \rightarrow V$ 인 함수

— Index —

1. 대수구조
 - (1) 대수구조
 - (2) 여러 대수구조
2. 벡터공간
 - (1) 벡터공간
 - (2) 선형생성
 - (3) 선형독립
3. 여러 벡터공간
 - (1) 노름공간
 - (2) 내적공간
 - (3) 유클리드공간
4. 기저와 차원

① $(V, +)$ 는 아벨군이다. ($u, v, w \in V$)

$$1) (u+v)+w=u+(v+w)$$

$$2) u+v=v+u$$

$$3) u+\vec{0}=u \text{ 인 } \vec{0} \text{가 } V \text{에 존재한다.}$$

$$4) u+(-u)=\vec{0} \text{ 인 } -u \text{가 } V \text{에 존재한다.}$$

② $(V, +, \cdot)$ 는 F 의 가군이다. ($k, m \in F$)

$$1) k \cdot (m \cdot u) = (km) \cdot u$$

$$2) F \text{의 곱셈 항등원 } 1 \text{에 대해 } 1 \cdot u = u$$

$$3) (k+m) \cdot (u+v) = k \cdot u + m \cdot u + k \cdot v + m \cdot v$$

— Index —

1. 대수구조
 - (1) 대수구조
 - (2) 여러 대수구조
2. 벡터공간
 - (1) 벡터공간
 - (2) 선형생성
 - (3) 선형독립
3. 여러 벡터공간
 - (1) 노름공간
 - (2) 내적공간
 - (3) 유클리드공간
4. 기저와 차원

(2) 선형생성

① 부분벡터공간

벡터공간 V 상에서 정의된 덧셈과
 스칼라배에 대하여 그 자체로서 벡터공간
 이 되는 V 의 부분집합 W 를 V 의
 부분벡터공간 또는 부분공간이라 한다.

— Index —

1. 대수구조
 - (1) 대수구조
 - (2) 여러 대수구조
2. 벡터공간
 - (1) 벡터공간
 - (2) 선형생성
 - (3) 선형독립
3. 여러 벡터공간
 - (1) 노름공간
 - (2) 내적공간
 - (3) 유클리드공간
4. 기저와 차원

② 선형생성

벡터공간 V 의 공집합이 아닌 부분집합 $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 내의 벡터들의 가능한 모든 선형결합으로 이루어진, V 의 부분벡터공간을 S 의 (선형)생성 $\text{span}(S)$ 이라 한다. 즉,

$$\text{span}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^n k_i v_i \mid k_i \in F, v_i \in S \right\}$$

이때 S 가 $\text{span}(S)$ 을 (선형)생성한다고 한다.

— Index —

1. 대수구조
 - (1) 대수구조
 - (2) 여러 대수구조
2. 벡터공간
 - (1) 벡터공간
 - (2) 선형생성
 - (3) 선형독립
3. 여러 벡터공간
 - (1) 노름공간
 - (2) 내적공간
 - (3) 유클리드공간
4. 기저와 차원

(3) 선형독립

벡터공간 V 의 공집합이 아닌 부분집합 $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 에 대하여

$$\begin{aligned} k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n &= \vec{0} \\ \Rightarrow k_1 = k_2 = \dots = k_n &= 0 \end{aligned}$$

이면 S 가 선형독립이라고 한다. 만약 $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ 외의 다른 해가 존재하면 S 가 선형종속이라고 한다.

— Index —

1. 대수구조
 - (1) 대수구조
 - (2) 여러 대수구조
2. 벡터공간
 - (1) 벡터공간
 - (2) 선형생성
 - (3) 선형독립
3. 여러 벡터공간
 - (1) 노름공간
 - (2) 내적공간
 - (3) 유클리드공간
4. 기저와 차원

3. 여러 벡터공간

(1) 노름공간

노름이 부여된 K -벡터공간 $(V, \|\cdot\|)$ 노름이란 $\forall u, v \in V, \forall k \in K$ 에 대해 아래 세 조건을 만족시키는 함수 $\|\cdot\|: V \rightarrow [0, \infty)$ 이다. ($K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$)

- 1) $\|kv\| = |k| \|v\|$
- 2) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$
- 3) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \vec{0}$

— Index —

1. 대수구조
 - (1) 대수구조
 - (2) 여러 대수구조
2. 벡터공간
 - (1) 벡터공간
 - (2) 선형생성
 - (3) 선형독립
3. 여러 벡터공간
 - (1) 노름공간
 - (2) 내적공간
 - (3) 유클리드공간
4. 기저와 차원

(2) 내적공간

내적이 부여된 K -벡터공간 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

내적이란 $\forall u, v, w \in V, \forall k \in K$ 에 대해

아래 네 조건을 만족시키는 함수

$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow K$ 이다. ($K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$)

$$1) \langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$

$$2) \langle ku, v \rangle = k \langle u, v \rangle$$

$$3) \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$$

$$4) v \neq 0 \Rightarrow \langle v, v \rangle > 0$$

— Index —

1. 대수구조
 - (1) 대수구조
 - (2) 여러 대수구조
2. 벡터공간
 - (1) 벡터공간
 - (2) 선형생성
 - (3) 선형독립
3. 여러 벡터공간
 - (1) 노름공간
 - (2) 내적공간
 - (3) 유클리드공간
4. 기저와 차원

(3) 유클리드공간

음이 아닌 정수 n 에 대하여 n 차원

유클리드공간 R^n 은 실수집합 R 의 n 번

곱집합이며, 이를 n 차원 실수 벡터공간

으로써 정의하기도 한다.

이 위에 내적 $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i = u \cdot v$ 을

정의하면 점곱, 스칼라곱 이라고도 한다.

— Index —

1. 대수구조
 - (1) 대수구조
 - (2) 여러 대수구조
2. 벡터공간
 - (1) 벡터공간
 - (2) 선형생성
 - (3) 선형독립
3. 여러 벡터공간
 - (1) 노름공간
 - (2) 내적공간
 - (3) 유클리드공간
4. 기저와 차원

4. 기저와 차원

① 기저

벡터공간 V 의 부분집합 B 가

선형독립이고 V 를 생성할 때, B 를 V 의

기저라 한다.

② 차원

B 가 벡터공간 V 의 기저일 때 B 의

원소의 개수를 V 의 차원 $\dim(V)$ 라 한다.

— Index —

1. 대수구조
 - (1) 대수구조
 - (2) 여러 대수구조
2. 벡터공간
 - (1) 벡터공간
 - (2) 선형생성
 - (3) 선형독립
3. 여러 벡터공간
 - (1) 노름공간
 - (2) 내적공간
 - (3) 유클리드공간
4. 기저와 차원

③ 정규기저

다음 조건을 만족하는 노름공간 V 의 기저 B 를 정규기저라 한다.

$$\forall b \in B, \|b\| = 1$$

④ 직교기저

다음 조건을 만족하는 내적공간 V 의 기저 B 를 직교기저라 한다.

$$\forall b_1, b_2 \in B, \langle b_1, b_2 \rangle = 0$$

— Index —

1. 대수구조
 - (1) 대수구조
 - (2) 여러 대수구조
2. 벡터공간
 - (1) 벡터공간
 - (2) 선형생성
 - (3) 선형독립
3. 여러 벡터공간
 - (1) 노름공간
 - (2) 내적공간
 - (3) 유클리드공간
4. 기저와 차원

⑤ 정규직교기저

정규기저이자 직교기저인 내적공간의 기저를 정규직교기저라 한다.

특히 R^n 의 정규직교기저 $\{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)\}$ 를 표준기저라 한다.

[연 습 문 제]

1. 이번 강의에서 배운 대수구조들의 관계도를 작성하시오.
2. 다음의 연산이 부여된 집합이 벡터공간인지 아닌지 판별하고, 아니라면 그 이유를 설명하시오.
 - (1) 표준적인 벡터덧셈과 아래의 스칼라배가 부여된 모든 실수 3-튜플 (x, y, z) 의 집합.

$$k(x, y, z) = (k^2x, k^2y, k^2z)$$
 - (2) 표준적인 행렬덧셈과 스칼라배가 부여된 모든 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ 꼴의 2×2 대각행렬 집합.

3. 세 벡터 $u = (-1, 0, 1, 2)$, $v = (2, 1, 3, 0)$,
 $w = (3, -1, 2, 5)$ 에 대하여 다음 중 $\text{span}\{u, v, w\}$ 의
벡터인 것을 모두 고르시오.
- ① $(0, 0, 0, 0)$ ② $(2, 2, 2, 2)$
③ $(3, 6, 7, -12)$ ④ $(9, 0, 11, 12)$
4. R^4 의 부분집합
 $\{(2, 2, -6, -2), (2, 0, -2, 1), (3, 1, -5, 0)\}$ 가 선형독립
인지 아닌지 판별하고, 아니라면 각 벡터를 나머지 두
벡터의 선형결합으로 표현하시오.
5. R^3 에 대해서 ① 정규지만 직교아닌, ② 직교지만 정교
아닌, ③ 정규직교인 기저의 예를 드시오.