# 1강. 위상공간

— Index —
1. 위상공간
(1) 도입
(2) 위상공간
2. 기저
(1) 기저
(2) 위상크기비교
3. 거리공간
(1) 거리공간
(2) 거리화 가능공간
4. 내,외부와 경계
(1) 집적점과 폐포
(2) 내,외부와 경계

## 1. 위상공간

### (1) 도입

- 위상수학의 본질은 연속에 대한 이해이며, 실수의 연속성으로부터 시작한다.

**Def 1.** [ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$ ]

$L\in\mathbb{R}$이라 할 때, $\forall\epsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$ $s.t.$ $\forall n\geq\mathbb{N}$, $|x_n-L|<\epsilon$

이때 $|x_n-L|<\epsilon \Leftrightarrow x_n\in(L-\epsilon,\ L+\epsilon)$

— Index —
1. 위상공간
(1) 도입
(2) 위상공간
2. 기저
(1) 기저
(2) 위상크기비교
3. 거리공간
(1) 거리공간
(2) 거리화 가능공간
4. 내,외부와 경계
(1) 집적점과 폐포
(2) 내,외부와 경계

**Def 2.** [근방]

$N\subset\mathbb{R}$, $L\in\mathbb{R}$이라 할 때,

$$\exists(a,\ b)\subset N\ s.t.\ L\in(a,\ b)$$

을 만족하면 $N$을 $L$의 근방이라 한다.

**Thm 1.** [근방(열린구간)의 성질]

① $L\in\mathbb{R}$의 근방들의 유한교집합은 $L$의 근방이다.

② $L\in\mathbb{R}$의 근방들의 무한합집합은 $L$의 근방이다.

— Index —
1. 위상공간
(1) 도입
(2) 위상공간
2. 기저
(1) 기저
(2) 위상크기비교
3. 거리공간
(1) 거리공간
(2) 거리화 가능공간
4. 내,외부와 경계
(1) 집적점과 폐포
(2) 내,외부와 경계

**Def 3. [열린집합]**

열린구간들의 합집합으로 표현 가능한 집합을 열린집합이라 한다.

**Thm 2. [열린집합의 성질]**

① $\varnothing$는 열린집합이다.
② 열린집합의 유한교집합은 열린집합이다
③ 열린집합의 무한합집합은 열린집합이다

— Index —
1. 위상공간
(1) 도입
(2) 위상공간
2. 기저
(1) 기저
(2) 위상크기비교
3. 거리공간
(1) 거리공간
(2) 거리화 가능공간
4. 내,외부와 경계
(1) 집적점과 폐포
(2) 내,외부와 경계

# (2) 위상공간

- 실수에서의 열린집합 성질을 바탕으로 이를 일반화하여 위상공간을 정의한다.

**Def 1. [위상과 위상공간]**

집합 $X(\neq\varnothing)$와 $X$의 부분집합의 집합족 $\mathfrak{I}$가 다음을 만족한다고 하자.

1) $\varnothing,\ X\in\mathfrak{I}$
2) $\forall\, U_i\in\mathfrak{I}\,,\ \bigcap_{i=1}^{n} U_i\in\mathfrak{I}\ \ (n<\infty)$
3) $\forall\, U_i\in\mathfrak{I}\,,\ \bigcup_{i} U_i\in\mathfrak{I}$

— Index —
1. 위상공간
(1) 도입
(2) 위상공간
2. 기저
(1) 기저
(2) 위상크기비교
3. 거리공간
(1) 거리공간
(2) 거리화 가능공간
4. 내,외부와 경계
(1) 집적점과 폐포
(2) 내,외부와 경계

이때 $\mathfrak{I}$를 $X$위의 위상, $(X,\ \mathfrak{I})$를 위상공간이라 한다.

- 1.(1).Def3 에서 정의한 열린집합들의 집합족 $\mathfrak{I}$에 대해 $(\mathbb{R},\ \mathfrak{I})$를 실수의 보통위상공간이라 한다.

- 정의에 의해 한 집합에는 다양한 위상이 존재함을 알 수 있다.

**Def 2. [열린집합 개념의 확장]**

$\mathfrak{I}$가 집합 $X$의 위상일 때 $\mathfrak{I}$의 원소를 열린집합이라 한다. 즉, 위상공간 $(X,\ \mathfrak{I})$에 대해 $O\in\mathfrak{I}$인 $O(\subset X)$

— Index —
1. 위상공간
(1) 도입
(2) 위상공간
2. 기저
(1) 기저
(2) 위상크기비교
3. 거리공간
(1) 거리공간
(2) 거리화 가능공간
4. 내,외부와 경계
(1) 집적점과 폐포
(2) 내,외부와 경계

ex) 집합 $X(\neq\varnothing)$에 대하여 다음은 모두 $X$위의 위상이다.

① $\mathfrak{I}=\{\varnothing, X\}$ : 밀착위상

② $\mathfrak{I}=P(X)$ : 이산위상

**Def 3. [닫힌집합]**

$\mathfrak{I}$가 집합 $X$의 위상일 때

$C^c = X - C \in \mathfrak{I}$ 인 $C$를 닫힌집합이라 한다.

— Index —
1. 위상공간
(1) 도입
(2) 위상공간
2. 기저
(1) 기저
(2) 위상크기비교
3. 거리공간
(1) 거리공간
(2) 거리화 가능공간
4. 내,외부와 경계
(1) 집적점과 폐포
(2) 내,외부와 경계

- 닫힌집합이라 해서 열린집합이 아닌 것은 아니다. 즉, 열린집합이면서 동시에 닫힌집합인 것도 존재할 수 있다.

ex) 실수의 보통위상공간에서 $\mathbb{R}$

— Index —
1. 위상공간
(1) 도입
(2) 위상공간
2. 기저
(1) 기저
(2) 위상크기비교
3. 거리공간
(1) 거리공간
(2) 거리화 가능공간
4. 내,외부와 경계
(1) 집적점과 폐포
(2) 내,외부와 경계

# 2. 기저

## (1) 기저

- 기저로부터 위상을 효율적으로 파악할 수 있을 뿐 아니라 새로운 위상을 만드는 것도 가능하다.

**Def. [기저]**

집합 $X$위의 위상 $\mathfrak{I}$와 $\mathfrak{I}$의 부분집합 $\mathscr{B}$에 대해, $\mathfrak{I}$의 임의의 원소가 $\mathscr{B}$의 원소의 합집합으로 표현될 수 있으면 $\mathscr{B}$를 $\mathfrak{I}$의 기저라 한다.

— Index —
1. 위상공간
(1) 도입
(2) 위상공간
2. 기저
(1) 기저
(2) 위상크기비교
3. 거리공간
(1) 거리공간
(2) 거리화 가능공간
4. 내,외부와 경계
(1) 집적점과 폐포
(2) 내,외부와 경계

- $\mathscr{B}$가 $\mathfrak{I}$의 기저일 때, $\mathscr{B} \subset C \subset \mathfrak{I}$ 인 $C$도 $\mathfrak{I}$의 기저이다.

**Thm. [기저의 또 다른 정의]**

위상공간 $(X,\ \mathfrak{I})$와 $\mathfrak{I}$의 부분집합 $\mathscr{B}$에 대하여 다음 두 명제는 동치이다.

① $\mathscr{B}$는 $\mathfrak{I}$의 기저이다.

② $\forall p \in X,\ p \in U \in \mathfrak{I}\ ,\ \exists B \in \mathscr{B}\ s.t.\ p \in B \subset U$

— Index —
1. 위상공간
(1) 도입
(2) 위상공간
2. 기저
(1) 기저
(2) 위상크기비교
3. 거리공간
(1) 거리공간
(2) 거리화 가능공간
4. 내,외부와 경계
(1) 집적점과 폐포
(2) 내,외부와 경계

**Cor. [기저의 성질]**

집합 $X$위에 정의된 위상의 기저 $\mathscr{B}$는 다음 두 조건을 만족하며, 그 역도 성립한다.

1) $\forall p \in X\ ,\ \exists B \in \mathscr{B}\ s.t.\ p \in B$

2) $\forall B_1, B_2 \in \mathscr{B},\ \forall p \in B_1 \cap B_2,$
$\exists B_3 \in \mathscr{B}\ s.t.\ p \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

ex) 다음 집합이 생성하는 집합족은 모두 $\mathbb{R}$위의 위상이다.

① $L = \{[a,\ b) \subset \mathbb{R}\ |\ a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$

② $U = \{(a,\ b] \subset \mathbb{R}\ |\ a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$

— Index —
1. 위상공간
(1) 도입
(2) 위상공간
2. 기저
(1) 기저
(2) 위상크기비교
3. 거리공간
(1) 거리공간
(2) 거리화 가능공간
4. 내,외부와 경계
(1) 집적점과 폐포
(2) 내,외부와 경계

# (2) 위상크기비교

- 같은 집합위의 서로 다른 두 위상의 크기를 비교가능한 때가 있으며, 이는 각 위상의 기저를 이용해 효율적으로도 가능하다.

**Def. [위상크기비교]**

집합 $X$위의 두 위상 $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2$ 에 대하여 $\mathfrak{I}_1 \subset \mathfrak{I}_2$ 이면 $\mathfrak{I}_1$이 $\mathfrak{I}_2$보다 작다 (또는 $\mathfrak{I}_2$가 $\mathfrak{I}_1$보다 크다)고 한다.

— Index —
1. 위상공간
(1) 도입
(2) 위상공간
2. 기저
(1) 기저
(2) 위상크기비교
3. 거리공간
(1) 거리공간
(2) 거리화 가능공간
4. 내,외부와 경계
(1) 집적점과 폐포
(2) 내,외부와 경계

**Thm. [기저를 이용한 위상크기비교]**

$\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ 가 각각 집합 $X$위의 서로 다른 두 위상 $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2$ 의 기저라 하자. 이때 다음 두 명제는 동치이다.

① $\mathfrak{I}_1$이 $\mathfrak{I}_2$보다 크다.

② $\forall p \in X,\ \forall B_2 \in \mathscr{B}_2\ \ with\ \ p \in B_2,$
$\exists B_1 \in \mathscr{B}_1\ \ s.t.\ \ p \in B_1 \subset B_2$

- 즉, $\mathscr{B}_1 \supset \mathscr{B}_2$ 이면 $\mathfrak{I}_1 \supset \mathfrak{I}_2$ 이다. 단, 역은 일반적으로 성립하지 않는다.

— Index —
1. 위상공간
(1) 도입
(2) 위상공간
2. 기저
(1) 기저
(2) 위상크기비교
3. 거리공간
(1) 거리공간
(2) 거리화 가능공간
4. 내,외부와 경계
(1) 집적점과 폐포
(2) 내,외부와 경계

# 3. 거리공간

## (1) 거리공간

- 위상공간에서 배제된 거리의 개념을 새로이 정의하고, 이를 집합에 부여한 공간을 고려해본다.

**Def. [거리]**

집합 $X$에 대해 함수 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ 가 다음 네 조건을 만족한다고 하자.

— Index —
1. 위상공간
(1) 도입
(2) 위상공간
2. 기저
(1) 기저
(2) 위상크기비교
3. 거리공간
(1) 거리공간
(2) 거리화 가능공간
4. 내,외부와 경계
(1) 집적점과 폐포
(2) 내,외부와 경계

1) $\forall x, y \in X,\ d(x, y) \geq 0$
2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3) $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = d(y, x)$
4) $\forall x, y, z \in X,\ d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

이때 $d$를 $X$위의 거리(함수), $(X,\ d)$를 거리공간이라 한다.

ex) 다음은 모두 거리공간이다.

① $\mathbb{R}$과 $d(x, y) = |x - y|$ 에 대해 $(\mathbb{R},\ d)$

② $\mathbb{R}^n = \{\vec{x} = (x_1,\ \cdots, x_n) \mid x_1,\ \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}$
과 $d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$
에 대해 $(\mathbb{R}^n,\ d)$

— Index —
1. 위상공간
(1) 도입
(2) 위상공간
2. 기저
(1) 기저
(2) 위상크기비교
3. 거리공간
(1) 거리공간
(2) 거리화 가능공간
4. 내,외부와 경계
(1) 집적점과 폐포
(2) 내,외부와 경계

③ 임의의 집합 $X$와 $d(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y\\ 0, & x=y\end{cases}$ 에 대해 $(X,\ d)$

- 주어진 두 거리공간 $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ 으로부터 다음과 같은 곱거리함수 $d_1\times d_2$ 를 이용해 새로운 거리공간 $(X_1\times X_2,\ d_1\times d_2)$ 을 만들 수 있다.

$$(d_1\times d_2)((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \sqrt{(d_1(x_1,y_1))^2+(d_2(x_2,y_2))^2}$$

(단, $X_1\times X_2=\{(x_1,x_2)\mid x_1\in X_1, x_2\in X_2\}$)

— Index —
1. 위상공간
(1) 도입
(2) 위상공간
2. 기저
(1) 기저
(2) 위상크기비교
3. 거리공간
(1) 거리공간
(2) 거리화 가능공간
4. 내,외부와 경계
(1) 집적점과 폐포
(2) 내,외부와 경계

# (2) 거리화 가능 공간

- 모든 거리공간은 위상공간화 가능하다.

**Def. [열린구]**

거리공간 $(X,\ d)$ 과 임의의 점 $x_0\in X$ , 양의실수 $r$에 대하여 $X$의 부분집합

$$B_d(x_0,r)=\{x\in X \mid d(x_0,x)<r\}$$

을 중심이 $x_0$이고 반지름이 $r$인 열린구라 하며, 간략히 $B_r(x_0)$로 표기하기도 한다.

— Index —
1. 위상공간
(1) 도입
(2) 위상공간
2. 기저
(1) 기저
(2) 위상크기비교
3. 거리공간
(1) 거리공간
(2) 거리화 가능공간
4. 내,외부와 경계
(1) 집적점과 폐포
(2) 내,외부와 경계

- $\overline{B_r}(x_0)=\{x\in X \mid d(x_0,x)\le r\}$ : 닫힌구
  $S_r(x_0)=\{x\in X \mid d(x_0,x)=r\}$ : 구면

**Thm. [거리공간의 위상공간 유도]**

거리공간 $(X,\ d)$ 에 대하여 모든 열린구들의 집합

$$\mathscr{B}=\{B_r(x_0) \mid x_0\in X,\ r>0\}$$

는 항상 집합 $X$위의 어떤 위상의 기저가 된다. $\mathscr{B}$로부터 생성된 위상을 거리위상, 위상공간을 유도공간이라 한다.

— Index —
1. 위상공간
(1) 도입
(2) 위상공간
2. 기저
(1) 기저
(2) 위상크기비교
3. 거리공간
(1) 거리공간
(2) 거리화 가능공간
4. 내,외부와 경계
(1) 집적점과 폐포
(2) 내,외부와 경계

- 어떠한 거리공간으로부터도 유도될 수 없는 위상공간이 존재한다.

ex) $X=\{1,\ 2\}$ 에 대한 밀착위상공간

- 서로 다른 두 거리공간으로부터 동일한 위상공간이 유도되기도 한다.

ex) $\vec{x}=(x_1,\ x_2),\ \vec{y}=(y_1,\ y_2)\ (\in\mathbb{R}^2)$

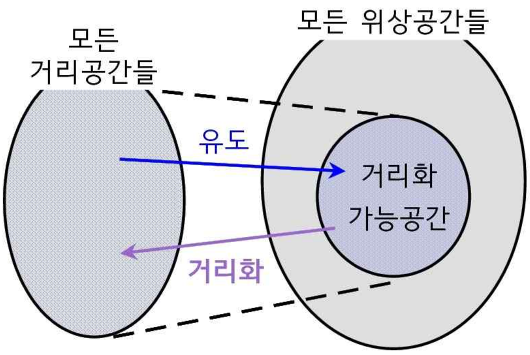
$d_E(\vec{x},\vec{y})=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$

$d_M(\vec{x},\vec{y})=\mathrm{Max}(|x_1-y_1|,|x_2-y_2|)$

일 때 $(\mathbb{R}^n,\ d_E)$, $(\mathbb{R}^n,\ d_M)$

— Index —
1. 위상공간
(1) 도입
(2) 위상공간
2. 기저
(1) 기저
(2) 위상크기비교
3. 거리공간
(1) 거리공간
(2) 거리화 가능공간
4. 내,외부와 경계
(1) 집적점과 폐포
(2) 내,외부와 경계

- 관계를 다음과 같이 도식해볼 수 있다.




— Index —
1. 위상공간
(1) 도입
(2) 위상공간
2. 기저
(1) 기저
(2) 위상크기비교
3. 거리공간
(1) 거리공간
(2) 거리화 가능공간
4. 내,외부와 경계
(1) 집적점과 폐포
(2) 내,외부와 경계

# 4. 내, 외부와 경계

## (1) 집적점과 폐포

- 실수의 극한에 대응하는 위상공간의 개념을 알아본다.

**Def 1. [집적점]**

위상공간 $(X,\ \mathfrak{I})$에 대해 $A$를 $X$의 부분집합이라 하자. 점 $x\in X$가 $x$를 포함하는 임의의 열린집합 $U$에 대하여

$$(U\setminus\{x\})\cap A\neq\varnothing$$

를 만족하면 $x$를 $A$의 집적점이라 한다.

— Index —
1. 위상공간
(1) 도입
(2) 위상공간
2. 기저
(1) 기저
(2) 위상크기비교
3. 거리공간
(1) 거리공간
(2) 거리화 가능공간
4. 내,외부와 경계
(1) 집적점과 폐포
(2) 내,외부와 경계

- 즉 집합 $A$의 집적점이란 $A$의 원소들이 한없이 가까이 분포하고 있는 점이다.

- 실수의 보통위상공간과 유리수집합 $\mathbb{Q}$에 대해, 모든 실수는 $\mathbb{Q}$의 집적점이 될 수 있다.
 이처럼 위상공간의 모든 원소를 집적점으로 갖는 집합의 성질을 조밀성이라 한다.
 또한 조밀한 가산부분집합이 존재하는 위상공간은 분해가능공간이라 한다.

— Index —
1. 위상공간
(1) 도입
(2) 위상공간
2. 기저
(1) 기저
(2) 위상크기비교
3. 거리공간
(1) 거리공간
(2) 거리화 가능공간
4. 내,외부와 경계
(1) 집적점과 폐포
(2) 내,외부와 경계

**Thm 1. [닫힌집합의 의미 1]**
위상공간 $(X, \mathfrak{I})$의 부분집합 $A$에 대해 다음 두 명제는 동치이다.
① $A$는 닫힌집합이다.
② $A$의 모든 집적점들은 $A$에 포함된다.

**Def 2. [도집합과 폐포]**
위상공간 $(X, \mathfrak{I})$의 부분집합 $A$에 대해 $A$의 모든 집적점들의 집합을 $A$의 도집합 $A'$라 하고, $A \cup A'$을 $A$의 폐포 $\overline{A}$라 한다.

— Index —
1. 위상공간
(1) 도입
(2) 위상공간
2. 기저
(1) 기저
(2) 위상크기비교
3. 거리공간
(1) 거리공간
(2) 거리화 가능공간
4. 내,외부와 경계
(1) 집적점과 폐포
(2) 내,외부와 경계

**Cor. [닫힌집합의 의미 2]**
위상공간 $(X, \mathfrak{I})$ 의 부분집합 $A$에 대해 다음 세 명제는 동치이다.
① $A$는 닫힌집합이다.
② $A' \subset A$ ③ $\overline{A} = A$

**Thm 2. [폐포의 의미]**
위상공간 $(X, \mathfrak{I})$ 의 부분집합 $A$에 대해 다음 두 명제는 동치이다.
① $x \in \overline{A}$
② $\forall$열린집합 $U \ni x$, $U \cap A \neq \varnothing$

— Index —
1. 위상공간
(1) 도입
(2) 위상공간
2. 기저
(1) 기저
(2) 위상크기비교
3. 거리공간
(1) 거리공간
(2) 거리화 가능공간
4. 내,외부와 경계
(1) 집적점과 폐포
(2) 내,외부와 경계

# (2) 내, 외부와 경계

**Def. [내부, 외부, 경계]**

위상공간 $(X, \mathfrak{I})$ 의 부분집합 $A$에 대해

① $A$에 포함되는 모든 열린집합의 합집합을 $A$의 내부 $\mathrm{Int}(A)$ 라 한다.

② $A^c (= X \setminus A)$의 내부를 $A$의 외부 $\mathrm{Ext}(A)$ 라 한다.

③ $\overline{A} \cap \overline{A^c}$ 를 $A$의 경계 $\partial A$ 라 한다.

— Index —
1. 위상공간
(1) 도입
(2) 위상공간
2. 기저
(1) 기저
(2) 위상크기비교
3. 거리공간
(1) 거리공간
(2) 거리화 가능공간
4. 내,외부와 경계
(1) 집적점과 폐포
(2) 내,외부와 경계

**Thm. [내부, 외부, 경계의 의미]**

위상공간 $(X, \mathfrak{I})$ 의 부분집합 $A$에 대해 다음이 성립한다.

① $\exists$열린집합$U$ $s.t.$ $x \in U \subset A$
$\Leftrightarrow$ $x \in \mathrm{Int}(A)$

② $\exists$열린집합$U$ $s.t.$ $x \in U \subset A^c$
$\Leftrightarrow$ $x \in \mathrm{Ext}(A)$

③ $\forall$열린집합$U \ni x$,
$(U \cap A \neq \varnothing) \wedge (U \cap A^c \neq \varnothing)$ $\Leftrightarrow$ $x \in \partial A$

**Cor.** $\mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Ext}(A) \cup \partial A = X$

**[ 연 습 문 제 ]**

1. $X=\{1,\ 2,\ 3\}$ 위의 위상들 중에 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,\ 3\}$ 을 모두 포함하는 것은 몇 개인지 구하시오.

2. 임의의 집합 $X(\neq\varnothing)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.
 (1) $\mathfrak{I}=\{U\subset X \mid n(U^c)<\infty\}\cup\{\varnothing\}$ 가 $X$위의 위상임을 보이시오. (유한여집합위상)
 (2) 정수집합 $\mathbb{Z}$위의 유한여집합위상에 대한 열린집합의 예를 들어보시오.

3. 집합족 $\{[a,\ b]\subset\mathbb{R} \mid a,b\in\mathbb{R},\ a<b\}$ 로부터 생성되는 집합족은 실수집합 $\mathbb{R}$위의 위상인지 아닌지 설명하시오.

4. 실수집합 $\mathbb{R}$위의 보통위상, 밀착위상, 이산위상, 하한위상, 상한위상, 유한여집합위상의 크기를 각각 비교하시오.

5. 주어진 함수가 $\mathbb{R}^n$ 위의 거리함수임을 각각 보이시오.
 (1) $d(\vec{x},\vec{y})=|x_1-y_1|+\cdots+|x_n-y_n|$ (택시거리)
 (2) $d(\vec{x},\vec{y})=\mathrm{Max}(|x_1-y_1|,\cdots,|x_n-y_n|)$ (정사각거리)

6. 실수의 보통위상공간에서 정수집합 $\mathbb{Z}$가 닫힌집합임을 도집합 또는 폐포 개념을 활용하여 설명하시오.

7. 유클리드평면 $\mathbb{R}^2$의 부분집합 $A=\{(x,y) \mid xy>0\}$ 에 대하여 $\mathrm{Int}(A)$, $\mathrm{Ext}(A)$, $\partial A$ 를 각각 구하시오.