7강. 함수열과 멱급수

[연 습 문 제]

1. 다음 명제들의 참, 거짓을 판별하고 이를 설명하시오.

① $\{a_n\}$이 유계 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n$ 이 존재

② $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n=\infty \vee \lim_{n\to\infty} b_n=\infty$

③ $\{a_n\}$이 수렴하는 부분수열을 가지면 $\{a_n\}$은 유계이다.

④ $\{a_n\}$이 수렴 $\Rightarrow$ $\{a_n\}$은 코시수열

⑤ $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_{n+1}-a_n| < \dfrac{1}{n} \Rightarrow \{a_n\}$은 코시수열

⑥ $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 이 수렴 $\Rightarrow a_1+b_1+a_2+b_2+\cdots$이 수렴

⑦ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha \wedge \sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\alpha\beta$

2. $a_1=1$ 이고 $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1}=\sqrt{1+a_n}$ 을 만족하는 수열 $\{a_n\}$이 수렴하는지 판별하시오.

3. L로 조건수렴하는 급수의 재배열급수의 값은 L이 아닐 수도 있음을 급수 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$와 이의 재배열급수 $\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\cdots$ 를 이용하여 보이시오.

— Index —
1. 정의
2. 점별, 균등수렴
(1) 함수열의 수렴
(2) 함수열급수의 수렴
3. 멱급수
(1) 멱급수의 수렴
(2) 멱급수의 연속
(3) 멱급수의 미분
(4) 멱급수의 적분

1. 정의

Def 1. [함수열과 함수열급수]

$\varnothing \neq D \subset \mathbb{R}$ 이고 모든 $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 $f_n : D \to \mathbb{R}$ 일 때 $\{f_n\}$을 D에서의 함수열이라 한다.

또한 $\{f_n\}$이 함수열일 때 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ 을 함수열급수라 한다.

— Index —
1. 정의
2. 점별, 균등수렴
(1) 함수열의 수렴
(2) 함수열급수의 수렴
3. 멱급수
(1) 멱급수의 수렴
(2) 멱급수의 연속
(3) 멱급수의 미분
(4) 멱급수의 적분

Def 2. [멱급수]

실수 c와 수열 $\{a_n\}$에 대하여 함수열 $\{f_n\}$이

$$f_n(x) = a_n(x-c)^n$$

과 같이 표현될 때의 함수열급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

를 멱급수라 한다.

— Index —
1. 정의
2. 점별, 균등수렴
(1) 함수열의 수렴
(2) 함수열급수의 수렴
3. 멱급수
(1) 멱급수의 수렴
(2) 멱급수의 연속
(3) 멱급수의 미분
(4) 멱급수의 적분

Def 3. [해석함수]

어떤 $\delta > 0$에 대하여 $(c-\delta,\ c+\delta)$에서 함수 f가 멱급수로 표현될 수 있으면, 즉, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ 이면 f가 $x=c$에서 해석적이라 한다.

또한 함수 f가 열린구간 I의 모든 점에서 해석적이면 f를 I에서의 해석함수라 한다.

— Index —
1. 정의
2. 점별, 균등수렴
(1) 함수열의 수렴
(2) 함수열급수의 수렴
3. 멱급수
(1) 멱급수의 수렴
(2) 멱급수의 연속
(3) 멱급수의 미분
(4) 멱급수의 적분

2. 점별, 균등수렴

(1) 함수열의 수렴

Def. [점별수렴과 균등수렴]

$\{f_n\}$ 와 f 가 각각 D 에서 정의된 함수열과 함수라 하자.

① 임의의 $x \in D$ 와 임의의 $\epsilon > 0$ 에 대해

$$n \ge N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

을 만족시키는 자연수 N 이 존재하면 $\{f_n\}$ 은 D 에서 f 로 점별수렴한다고 한다.

— Index —
1. 정의
2. 점별, 균등수렴
(1) 함수열의 수렴
(2) 함수열급수의 수렴
3. 멱급수
(1) 멱급수의 수렴
(2) 멱급수의 연속
(3) 멱급수의 미분
(4) 멱급수의 적분

이때 f 를 $\{f_n\}$ 의 극한함수라 하고,

$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 로 표현한다.

② 임의의 $\epsilon > 0$ 에 대하여

$$n \ge N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

을 임의의 $x \in D$ 에 대하여 만족시키는 자연수 N 이 존재하면 $\{f_n\}$ 은 D 에서 f 로 균등수렴한다고 한다.

Thm. $\{f_n\}$ 이 D 에서 균등수렴하면 점별수렴한다.

— Index —
1. 정의
2. 점별, 균등수렴
(1) 함수열의 수렴
(2) 함수열급수의 수렴
3. 멱급수
(1) 멱급수의 수렴
(2) 멱급수의 연속
(3) 멱급수의 미분
(4) 멱급수의 적분

(2) 함수열급수의 수렴

Thm 1. [코시판정법]

$f_n : D \to \mathbb{R}$ 이라 할 때, 다음 조건을 만족하는 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ 은 D 에서 균등수렴한다.

$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ s.t\ \forall m,\ n \in \mathbb{N}\ with$

$$m > n \ge N,\ \forall x \in D,\ \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| < \epsilon$$

— Index —
1. 정의
2. 점별, 균등수렴
(1) 함수열의 수렴
(2) 함수열급수의 수렴
3. 멱급수
(1) 멱급수의 수렴
(2) 멱급수의 연속
(3) 멱급수의 미분
(4) 멱급수의 적분

Thm 2. [바이어슈트라스판정법]

$n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 $f_n : D \to \mathbb{R}$ 이라 할 때, 적당한 양의 상수 $M_n > 0$ 이 존재하여 모든 $x \in D$ 에 대하여 $|f_n(x)| \le M_n$ 이고 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ 이면 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ 은 D에서 균등수렴한다.

— Index —
1. 정의
2. 점별, 균등수렴
(1) 함수열의 수렴
(2) 함수열급수의 수렴
3. 멱급수
(1) 멱급수의 수렴
(2) 멱급수의 연속
(3) 멱급수의 미분
(4) 멱급수의 적분

3. 멱급수

(1) 멱급수의 수렴

Thm 1. [근판정법]

모든 $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 $a_n \ge 0$ 이고 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = M$ 일 때 다음이 성립한다.

① $M < 1$ 이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 수렴한다.

② $M > 1$ 이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 발산한다.

— Index —
1. 정의
2. 점별, 균등수렴
(1) 함수열의 수렴
(2) 함수열급수의 수렴
3. 멱급수
(1) 멱급수의 수렴
(2) 멱급수의 연속
(3) 멱급수의 미분
(4) 멱급수의 적분

Cor. [멱급수의 수렴]

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ 에 대하여 $\alpha = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ 일 때 $R = \frac{1}{\alpha}$ 라 하면 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ 은

① $|x-c| < R$ 에서 절대수렴한다.

② $|x-c| > R$ 에서 발산한다.

※ $\alpha = 0$ 이면 $R = \infty$ 로,
$\alpha = \infty$ 이면 $R = 0$ 으로 간주한다.

— Index —
1. 정의
2. 점별, 균등수렴
(1) 함수열의 수렴
(2) 함수열급수의 수렴
3. 멱급수
(1) 멱급수의 수렴
(2) 멱급수의 연속
(3) 멱급수의 미분
(4) 멱급수의 적분

Def. [수렴반지름과 수렴구간]

Cor 에서 구한 R을 멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ 의 수렴반지름 이라 하고, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ 이 수렴하는 점들 전체의 집합을 수렴구간이라 한다.

— Index —
1. 정의
2. 점별, 균등수렴
(1) 함수열의 수렴
(2) 함수열급수의 수렴
3. 멱급수
(1) 멱급수의 수렴
(2) 멱급수의 연속
(3) 멱급수의 미분
(4) 멱급수의 적분

Thm 1. [수렴반지름과 균등수렴]

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ 의 수렴반지름을 R이라 하고 $0<r<R$ 일 때, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ 은 $[c-r,\ c+r]$ 에서 균등수렴한다.

— Index —
1. 정의
2. 점별, 균등수렴
(1) 함수열의 수렴
(2) 함수열급수의 수렴
3. 멱급수
(1) 멱급수의 수렴
(2) 멱급수의 연속
(3) 멱급수의 미분
(4) 멱급수의 적분

(2) 멱급수의 연속

Thm 1. [함수열의 연속]

구간 I에서 연속인 함수열 $\{f_n\}$이 f로 균등수렴하면 f는 I에서 연속이다.

Cor. [함수열급수의 연속]

구간 I에서 연속인 함수열 $\{f_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ 이 f로 균등수렴하면 f도 I에서 연속이다.

— Index —
1. 정의
2. 점별, 균등수렴
(1) 함수열의 수렴
(2) 함수열급수의 수렴
3. 멱급수
(1) 멱급수의 수렴
(2) 멱급수의 연속
(3) 멱급수의 미분
(4) 멱급수의 적분

Lemma. [아벨의 공식]

수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$과 임의의 자연수 n, m $(n>m)$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = a_n \sum_{k=m}^{n} b_k + \sum_{j=m}^{n-1} (a_j - a_{j+1}) \sum_{k=m}^{j} b_k$$

Thm 2. [아벨정리]

수렴반지름이 R인 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ 가 $x=c+R$에서 수렴하면 $(c-R,\ c+R]$ 의 임의의 폐부분집합에서 균등수렴한다.

— Index —
1. 정의
2. 점별, 균등수렴
(1) 함수열의 수렴
(2) 함수열급수의 수렴
3. 멱급수
(1) 멱급수의 수렴
(2) 멱급수의 연속
(3) 멱급수의 미분
(4) 멱급수의 적분

Thm 3. [멱급수의 연속]

함수 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ 은 수렴구간에서 연속이다.

— Index —
1. 정의
2. 점별, 균등수렴
(1) 함수열의 수렴
(2) 함수열급수의 수렴
3. 멱급수
(1) 멱급수의 수렴
(2) 멱급수의 연속
(3) 멱급수의 미분
(4) 멱급수의 적분

(3) 멱급수의 미분

Thm 1. [함수열의 미분]

다음을 만족하는 함수열 $\{f_n\}$은 유계구간 I에서 균등수렴한다.

① 임의의 $x_0 \in I$에 대하여 $\{f_n(x_0)\}$가 수렴한다.

② $\{f_n\}$이 I에서 미분가능하며, I에서 $\{f_n'\}$은 균등수렴한다.

— Index —
1. 정의
2. 점별, 균등수렴
(1) 함수열의 수렴
(2) 함수열급수의 수렴
3. 멱급수
(1) 멱급수의 수렴
(2) 멱급수의 연속
(3) 멱급수의 미분
(4) 멱급수의 적분

또한, 이때 $\{f_n\}$ 의 극한함수를 f라 하면 f는 I에서 미분가능하고 임의의 $x \in I$에 대하여 $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ 이다.

Cor. [함수열급수의 미분]

다음이 만족하면 함수열급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ 은 유계구간 I 에서 균등수렴한다.

— Index —
1. 정의
2. 점별, 균등수렴
(1) 함수열의 수렴
(2) 함수열급수의 수렴
3. 멱급수
(1) 멱급수의 수렴
(2) 멱급수의 연속
(3) 멱급수의 미분
(4) 멱급수의 적분

① 임의의 $x_0 \in I$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ 가 수렴한다.

② $\{f_n\}$ 이 I에서 미분가능하며, I에서 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ 은 균등수렴한다.

이때 $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ 이라 하면 f는 I에서 미분가능하고 임의의 $x \in I$에 대하여 $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ 이다.

— Index —
1. 정의
2. 점별, 균등수렴
(1) 함수열의 수렴
(2) 함수열급수의 수렴
3. 멱급수
(1) 멱급수의 수렴
(2) 멱급수의 연속
(3) 멱급수의 미분
(4) 멱급수의 적분

Lemma.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ 의 수렴반지름이 R이면 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}$ 의 수렴반지름도 R이다.

— Index —
1. 정의
2. 점별, 균등수렴
(1) 함수열의 수렴
(2) 함수열급수의 수렴
3. 멱급수
(1) 멱급수의 수렴
(2) 멱급수의 연속
(3) 멱급수의 미분
(4) 멱급수의 적분

Thm 3. [멱급수의 미분]

함수 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n$ 의 수렴반지름이 R이면 f는 $(c-R,\ c+R)$에서 미분가능하며, 이때 f의 도함수는

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-c)^{n-1}$$

이다.

— Index —
1. 정의
2. 점별, 균등수렴
(1) 함수열의 수렴
(2) 함수열급수의 수렴
3. 멱급수
(1) 멱급수의 수렴
(2) 멱급수의 연속
(3) 멱급수의 미분
(4) 멱급수의 적분

(4) 멱급수의 적분

Thm 1. [균등수렴과 적분]

$\{f_n\}$이 $[a,b]$ 에서 f로 균등수렴하고 $f_n\in\Re[a,b]$ 이면 $f\in\Re[a,b]$ 이고

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n=\int_a^b f$$

이다.

— Index —
1. 정의
2. 점별, 균등수렴
(1) 함수열의 수렴
(2) 함수열급수의 수렴
3. 멱급수
(1) 멱급수의 수렴
(2) 멱급수의 연속
(3) 멱급수의 미분
(4) 멱급수의 적분

Thm 2. [항별적분]

$f_n\in\Re[a,b]$ 인 $\{f_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ 이 $[a,b]$ 에서 f로 균등수렴하면 $f\in\Re[a,b]$ 이고

$$\int_a^b f=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n$$

이다.

— Index —

1. 정의

2. 점별, 균등수렴
(1) 함수열의 수렴
(2) 함수열급수의 수렴

3. 멱급수
(1) 멱급수의 수렴
(2) 멱급수의 연속
(3) 멱급수의 미분
(4) 멱급수의 적분

Thm 3. [멱급수의 적분]

함수 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ 이 $[a,b]$ 에서 수렴하면 $f\in\Re[a,b]$ 이고

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\int_a^b (x-c)^n\,dx$$

이다.

— Index —

1. 정의

2. 점별, 균등수렴
(1) 함수열의 수렴
(2) 함수열급수의 수렴

3. 멱급수
(1) 멱급수의 수렴
(2) 멱급수의 연속
(3) 멱급수의 미분
(4) 멱급수의 적분

Thm 4. [멱급수의 특이적분]

함수 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ 이 $[a,b)$ 에서 수렴하고 멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(b-c)^{n+1}$ 이 수렴하면 f는 $[a,b)$ 에서 특이적분가능하고

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\int_a^b (x-c)^n\,dx$$

이다.

[연 습 문 제]

1. 다음 $\{f_n\}$ 이 구간 $[0,\ 1]$에서 ①점별수렴 ②균등수렴 하는지 각각 보이시오.

(1) $f_n(x)=x^n$　　　(2) $f_n(x)=\frac{x^n}{n}$

2. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}(x-1)^n$ 의 수렴반지름과 수렴구간을 구하시오.

3. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ 이 (-∞, ∞) 에서 연속임을 보이시오.

4. $f_n(x) = |x|^{1+\frac{1}{n}}$ 와 극한함수 f가 구간 $(-1,\ 1)$ 에서 미분가능하지 않은 이유를 설명하시오.

5. 다음을 각각 구하시오.

(1) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n(2n+1)}$ 의 적분 $\int_0^1 f(x)\,dx$

(2) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x-1)^n}{n}$ 의 적분 $\int_1^2 f(x)\,dx$