



MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Daniel Rod

Interakce testovacích částic
s impulzními gravitačními vlnami

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Robert Švarc, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Obecná fyzika

Praha 2021

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne
Podpis autora

Poděkování.

Název práce: Interakce testovacích částic s impulzními gravitačními vlnami

Autor: Daniel Rod

Ústav: Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Robert Švarc, Ph.D., Ústav teoretické fyziky

Abstrakt: Abstrakt.

Klíčová slova: klíčová slova

Title: Interaction of test particles with impulsive gravitational waves

Author: Daniel Rod

Institute: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: RNDr. Robert Švarc, Ph.D., Institute of Theoretical Physics

Abstract: Abstract.

Keywords: key words

Obsah

Úvod	2
1 Prostoročasy konstantní křivosti	3
1.1 Minkowskeho prostoročas	3
1.2 de Sitterův prostoročas	4
1.3 Anti-de Sitterův prostoročas	6
2 Neexpandující impulzní gravitační vlny	9
2.1 Konstrukce prostoročasu	9
2.1.1 "Cut and paste" metoda	9
2.1.2 Spojitý tvar metriky	10
2.1.3 Distribuční tvar metriky	12
2.2 \mathcal{C}^1 -matching a refrakční rovnice	13
2.3 Vizualizace geodetik v prostoročasech s neexpandující impulzní vlnou	16
2.3.1 Impulzní gravitační vlna generovaná nehmotnými částicemi s multipólovou strukturou s $\Lambda = 0$	17
2.3.2 Impulzní gravitační vlna generovaná nehmotnými částicemi s multipólovou strukturou s $\Lambda \neq 0$	23
3 Neexpandující gravitační vlny s gyratonovými členy	28
3.1 Zobecnění impulzních vln na prostoročasy s gyratonovými členy .	28
3.1.1 Zobecnění spojitého tvaru metriky	28
3.1.2 Frolovův–Fursaevův gyraton	29
3.2 Refrakční rovnice pro geodetiky v impulzních gyratonových pro- storočasech	30
3.3 Vizualizace geodetik v neexpandujících impulzních gyratonových prostoročasech	31
3.3.1 Geodetický pohyb ve Frolovově–Fursaevově gyratonovém řešení	32
3.3.2 Geodetický pohyb v přítomnosti gyratona s profilem odpo- vídajícím Hottově–Tanakově řešení	37
Závěr	41
Seznam použité literatury	42
A Spinorový popis expandujících impulzních gravitačních vln	44
A.1 Expandující impulzní gravitační vlny	44
A.1.1 Schwarzova derivace	45
A.1.2 Cut and paste metoda	45
A.1.3 Odvození spojitého tvaru metriky pomocí spinorového for- malismu	46
A.1.4 Geometrie impulzní nadplochy	49

Úvod

Obecná teorie relativity

Roku 1915 publikoval Albert Einstein Obecnou teorii relativity, nejmodernější a doposud nejúspěšnější teorii gravitace. Za více jak 100 let od její formulace byly v nesčetném množství experimentů úspěšně ověřeny její předpovědi, včetně první detekce gravitačních vln v roce 2015 na interferometrech LIGO v Livingstonu a Hanfordu, která byla následována desítkami dalších detekcí k nimž nyní přispívá i evropský projekt VIRGO. **Další zajímavé experimentální ověření?**

Obecná teorie relativity je geometrická teorie popisující chování hmoty a energie v prostoročasu, který reprezentuje jako diferenciální varietu vybavenou metrickým tenzorem $g_{\mu\nu}$. Tvar metrického tenzoru, resp. jeho složek (metrických funkcí) je s fyzikální realitou gravitačního pole spojen Einsteinovými rovnicemi, které mají v geometrizovaných jednotkách tvar

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (1)$$

Jedná se o 10 nelineárních parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu, jejichž levá strana představuje geometrii na diferenciální varietě reprezentující prostoročas, $R_{\mu\nu}$ je Ricciho tenzor křivosti, R je Ricciho skalární křivost a Λ představuje tzv. kosmologickou konstantu. Tenzor energie a hybnosti $T_{\mu\nu}$ na pravé straně pak dává spojení geometrických objektů s fyzikálním modelem, představuje rozložení hmoty, energie a jejich toky a hybnosti. 10 nezávislých složek Ricciho tenzoru lze v Newman Penroseově formalismu **odkaz na příslušnou kapitolu (spinory nebo appendix, ještě uvidíme)** popsat pomocí šesti obecně komplexních skalárních funkcí, které závisí na tzv. lokální tetrádě. Tyto funkce značíme Φ_{ij} , kde indexy $i, j = 0, 1, 2$. **mám zde uvést i definici?**

Kromě metrického tenzoru je na prostoročasové varietě definovaná lineární konexe

1. Prostoročasy konstantní křivosti

V této kapitole představíme prostoročasy, které budou sloužit jako pozadí pro propagaci impulzních gravitačních vln. Jde o maximálně symetrická řešení Einsteinových polních rovnic (1) s nulovou pravou stranou a s konstantní skalární křivostí R na celém prostoročase. Celkem rozlišujeme tři takové geometrie lišící se znaménkem skalární křivosti (a tedy znaménkem kosmologické konstanty). Nulová skalární křivost odpovídá řešení s nulovou kosmologickou konstantou, kterému se říká Minkowského prostoročas, kladná křivost odpovídá takzvanému de Sitterovu prostoročasu s kladnou kosmologickou konstantou a záporná odpovídá anti-de Sitterovu prostoročasu se zápornou kosmologickou konstantou. Vztah mezi kosmologickou konstantou a skalární křivostí ve vakuových řešeních (tedy s nulovým tenzorem energie a hybnosti) dostaneme kontrakcí polních rovnic (1) jako

$$R = 4\Lambda. \quad (1.1)$$

Všechna tato řešení vykazují deset generátorů symetrie, tedy maximální počet ve čtyřrozměrném prostoročase, které se však pro jednotlivá znaménka kosmologické konstanty liší.

I přes svou jednoduchost jsou zmíněné prostoročasy na poli teoretické fyziky velmi podstatné, čtyřdimenzionální Minkowského prostoročas je arénou speciální teorie relativity a standardní kvantové teorie pole, vícedimenzionální Minkowského prostoročas pak často slouží jako vhodný prostor pro vnoření a vizualizaci složitějších prostoročasů. De-Sitterův prostoročas je pro moderní fyziku důležitý při popisu kosmologických modelů. Experimentální data ukazují, že v approximaci do prvního řádu lze vesmír právě na velkých škálách (a také v inflační epoše) popsat právě jako de Sitterův prostoročas. Anti-de Sitterův prostoročas na poli teoretické fyziky nachází uplatnění v modelech snažících se o jednotný popis všech fyzikálních interakcí (Maldacenova dualita kalibračních teorií a gravitace). Pro další komentáře a reference k těmto řešením odkazujeme na úvodní kapitolu Bičákovy práce [1], podrobný popis geometrie a parametrizací Minkowského, de Sitterova a anti-de Sitterova řešení je k nalezení v [2]. V následujících sekcích popíšeme nejpodstatnější vlastnosti a parametrizace těchto prostoročasů, používané ke zkoumání impulzních gravitačních vln.

1.1 Minkowského prostoročas

Minkowského prostoročas $\mathbb{E}^{1,3}$ je nejjednodušší řešení Einsteinových polních rovnic s nulovou pravou stranou. Jde o řešení s nulovou křivostí v celém prostoročase. Grupou symetrií Minkowského prostoročasu je Poincarého grupa, která je tvořena všemi translacemi a Lorentzovou grupou představující rotace a boosty.

Metrika Minkowského prostoročasu má v nejpřirozenějším vyjádření, v kartézských souřadnicích, tvar

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (1.2)$$

Souřadnicovými transformacemi

$$\mathcal{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}(t - z), \quad \mathcal{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + z), \quad (1.3)$$

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy), \quad \bar{\eta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - iy), \quad (1.4)$$

převedeme metriku do symetrického tvaru

$$ds^2 = -2 d\mathcal{U} d\mathcal{V} + 2 d\eta d\bar{\eta}. \quad (1.5)$$

Souřadnicím \mathcal{U}, \mathcal{V} zavedeným transformací (1.3) se říká retardovaná a advancovaná souřadnice, z důvodu symetrie se transformací (1.4) zavádí komplexní souřadnice $\eta, \bar{\eta}$ a metrika (1.5) je pak v symetrickém tvaru v takzvaných světelných (nulových) souřadnicích. Pokud zkoumáme axiálně symetrickou situaci na pozadí Minkowského prostoročasu, je vhodné zavést cylindrické souřadnice parametrizací

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad (1.6)$$

kde $\rho \in [0, \infty)$ a $\varphi \in [0, 2\pi)$. Metrika pak nabývá tvaru

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2. \quad (1.7)$$

V Minkowského prostoročase jsou složky afinní konexe v kartézských souřadnicích, kterým odpovídá metrika (1.2), identicky nulové. Řešení rovnice geodetiky pak nabývá tvaru přímek, tedy

$$\begin{aligned} t(\lambda) &= t_0 + \lambda \dot{t}_0 \\ x(\lambda) &= x_0 + \lambda \dot{x}_0 \\ y(\lambda) &= y_0 + \lambda \dot{y}_0 \\ z(\lambda) &= z_0 + \lambda \dot{z}_0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

kde veličiny s dolním indexem 0 představují počáteční polohy a rychlosti.

1.2 de Sitterův prostoročas

De Sitterův prostoročas dS_4 je maximálně symetrické vakuové řešení Einsteinových rovnic s kladnou kosmologickou konstantou Λ . Isometrie čtyřrozměrného de Sitterova prostoročasu tvoří grupu $SO(1, 4)$. De Sitterův prostoročas topologicky odpovídá $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^3$ a lze jej přirozeně reprezentovat jako vnoření hyperboloidu

$$-Z_0^2 + Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 = a^2 \quad (1.9)$$

do pětidimensionálního Minkowského prostoru $\mathbb{E}^{1,4}$ s metrikou

$$ds^2 = -dZ_0^2 + dZ_1^2 + dZ_2^2 + dZ_3^2 + dZ_4^2. \quad (1.10)$$

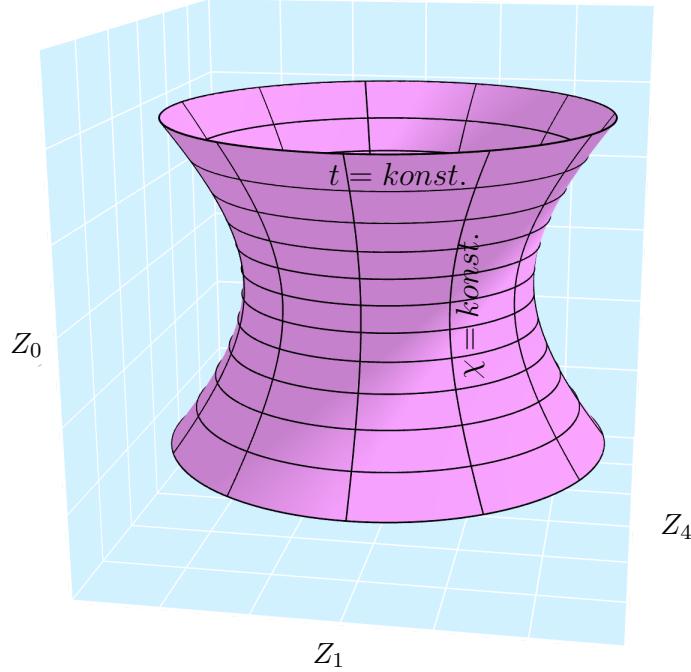
Konstanta a je daná kosmologickou konstantou jako $a = \sqrt{3/\Lambda}$.

Přirozenou parametrizací celého de-Sitterova prostoročasu jakožto hyperboloidu jsou souřadnice (t, χ, θ, ϕ)

$$\begin{aligned} Z_0 &= a \sinh \frac{t}{a}, \\ Z_1 &= a \cosh \frac{t}{a} \cos \chi, \\ Z_2 &= a \cosh \frac{t}{a} \sin \chi \cos \theta, \\ Z_3 &= a \cosh \frac{t}{a} \sin \chi \sin \theta \cos \phi, \\ Z_4 &= a \cosh \frac{t}{a} \sin \chi \sin \theta \sin \phi, \end{aligned} \tag{1.11}$$

kde $t \in (-\infty, +\infty)$, $\chi \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, \pi]$ a $\phi \in [0, 2\pi]$. Souřadnicové singularity v $\chi = 0, \pi$ a $\theta = 0, \pi$ odpovídají pólům ve sférických souřadnicích. V souřadnicích (t, χ, θ, ϕ) má metrika de Sitterova prostoročasu formu FLRW metriky s křivostí prostorových řezů $k = 1$,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 \cosh^2 \frac{t}{a} \left[d\chi^2 + \sin^2 \chi \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \right]. \tag{1.12}$$



Obrázek 1.1: Vnoření dS prostoročasu do $\mathbb{E}^{1,4}$. Plocha hyperboloidu je vykreslena pro $\theta = \phi = \frac{\pi}{2}$, tedy v řezu $Z_2 = Z_3 = 0$. Dále jsou vykresleny souřadnicové čáry odpovídající konstantním hodnotám t a χ .

Hyperboloid představující de Sitterův prostoročas lze dále parametrizovat sou-

řadnicemi $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \eta, \bar{\eta})$,

$$\begin{aligned} Z_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathcal{U} + \mathcal{V}) \left[1 - \frac{1}{6} \Lambda (\mathcal{U}\mathcal{V} - \eta\bar{\eta}) \right]^{-1}, \\ Z_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathcal{V} - \mathcal{U}) \left[1 - \frac{1}{6} \Lambda (\mathcal{U}\mathcal{V} - \eta\bar{\eta}) \right]^{-1}, \\ Z_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\eta + \bar{\eta}) \left[1 - \frac{1}{6} \Lambda (\mathcal{U}\mathcal{V} - \eta\bar{\eta}) \right]^{-1}, \\ Z_3 &= \frac{-i}{\sqrt{2}} (\eta - \bar{\eta}) \left[1 - \frac{1}{6} \Lambda (\mathcal{U}\mathcal{V} - \eta\bar{\eta}) \right]^{-1}, \\ Z_4 &= a \left[1 + \frac{1}{6} \Lambda (\mathcal{U}\mathcal{V} - \eta\bar{\eta}) \right] \left[1 - \frac{1}{6} \Lambda (\mathcal{U}\mathcal{V} - \eta\bar{\eta}) \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

které pro $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in (-\infty, +\infty)$ a komplexní η pokrývají de Sitterův hyperboloid až na singularity v $\mathcal{U}, \mathcal{V} = \infty$. Inverzní transformační vztahy jsou

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \sqrt{2}a \frac{Z_0 - Z_1}{Z_4 + a}, \\ \mathcal{V} &= \sqrt{2}a \frac{Z_0 + Z_1}{Z_4 + a}, \\ \eta &= \sqrt{2}a \frac{Z_2 + iZ_3}{Z_4 + a}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Tato parametrizace indukuje metriku

$$ds^2 = \frac{-2 d\mathcal{U} d\mathcal{V} + 2 d\eta d\bar{\eta}}{\left[1 - \frac{1}{6} \Lambda (\mathcal{U}\mathcal{V} - \eta\bar{\eta}) \right]^2}. \quad (1.15)$$

Tato metrika je v takzvaném konformně plochém tvaru, tedy ve tvaru

$$ds^2 = \frac{ds_0^2}{\Omega^2}, \quad (1.16)$$

kde ds_0^2 je metrika na $\mathbb{E}^{1,3}$ a Ω je hladkou funkcí souřadnic. Jak uvidíme dále, metrika (1.15) je ve tvaru, který unifikuje všechny prostoročasy konstantní křivosti v nulových souřadnicích, pro $\Lambda = 0$ se redukuje na (1.5) a pro $\Lambda < 0$ představuje metriku na anti-de Sitterově prostoročase, viz. další odstavec.

Souřadnicové čáry $\mathcal{U} = \text{konst.}$ a $\mathcal{V} = \text{konst.}$ tvoří na de Sitterově hyperboloidu nulové přímky, resp. nadplochy.

1.3 Anti-de Sitterův prostoročas

Anti-de Sitterův prostoročas AdS_4 je maximálně symetrické vakuové řešení Einsteinových rovnic se zápornou kosmologickou konstantou Λ . Isometrie tvoří grupu $SO(2, 3)$ a topologie AdS_4 odpovídá $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^3$. Vnořením AdS_4 do $\mathbb{E}^{2,3}$, tedy do prostoru s metrikou

$$ds^2 = -dZ_0^2 + dZ_1^2 + dZ_2^2 + dZ_3^2 - dZ_4^2, \quad (1.17)$$

vzniká hyperboloid

$$-Z_0^2 + Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 - Z_4^2 = a^2, \quad (1.18)$$

kde $a = \sqrt{3/|\Lambda|}$.

Celý hyperboloid je pak pokrytý souřadnicemi (T, r, θ, ϕ)

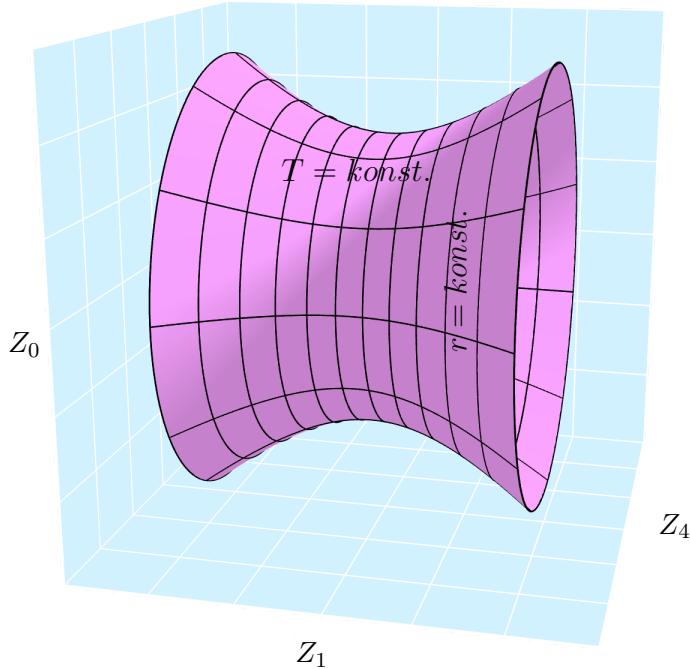
$$\begin{aligned} Z_0 &= a \cosh r \sin \frac{T}{a}, \\ Z_1 &= a \sinh r \cos \theta, \\ Z_2 &= a \sinh r \sin \theta \cos \phi, \\ Z_3 &= a \sinh r \sin \theta \sin \phi, \\ Z_4 &= a \cosh r \cos \frac{T}{a}. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Metrika anti-de Sitterova prostoročasu v těchto souřadnicích nabývá tvaru

$$ds^2 = -\cosh^2 r \, dT^2 + a^2 \left[dr^2 + \sinh^2 r \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta \, d\phi^2 \right) \right] \tag{1.20}$$

a vidíme, že každý řez $T = \text{konst.}$ odpovídá pro $r \in [0, \infty], \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi]$ prostoru konstantní negativní křivosti (hyperbolickému prostoru H^3). Singularity v $r = 0$ a $\theta = 0, \pi$ jsou pouze souřadnicové.

Parametr T představuje časovou souřadnici, která je $2\pi a$ -periodická, což odpovídá již zmíněné topologii $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^3$. Obvykle se ale uvažuje $T \in (-\infty, +\infty)$, dochází tedy k rozvinutí \mathbb{S}^1 na celé \mathbb{R}^1 , a dostáváme prostor s topologií \mathbb{R}^4 , jehož univerzálním nakrytím je AdS prostoročas.



Obrázek 1.2: Vnoření AdS prostoročasu do $\mathbb{E}^{2,3}$. Plocha hyperboloidu je vykreslena pro $\theta = \phi = \frac{\pi}{2}$, tedy v řezu $Z_2 = Z_3 = 0$. Souřadnicové čáry odpovídají konstantním hodnotám T a r .

Parametrisací (1.13) obdržíme totožný konformě plochý tvar metriky (1.15)

jako v případě de Sitterova prosotočasu, tedy

$$ds^2 = \frac{-2 d\mathcal{U} d\mathcal{V} + 2 d\eta d\bar{\eta}}{\left[1 - \frac{1}{6}\Lambda (\mathcal{U}\mathcal{V} - \eta\bar{\eta})\right]^2},$$

lišící se pouze znaménkem kosmologické konstanty (zde $\Lambda < 0$).

2. Neexpandující impulzní gravitační vlny

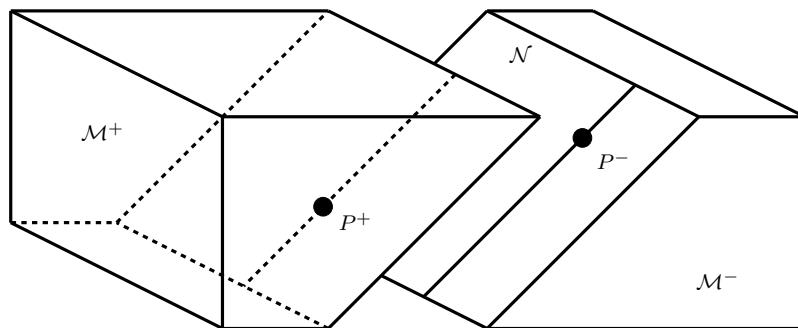
V této kapitole se budeme věnovat neexpandujícím impulzním gravitačním vlnám propagujícím se na pozadí Minkowského a (anti-)de Sitterova prostoročasu. Popíšeme matematickou konstrukci prostoročasů, která vede k takzvaným refrakčním rovnícím pro geodetiky a které dále využijeme k vizualizaci účinku impulzních řešení a k interpretaci jejich působení na různé konfigurace testovacích částic.

2.1 Konstrukce prostoročasu

Nejprve intuitivně popíšeme konstrukci prostoročasů s neexpandujícími impulzními gravitačními vlnami pomocí Penroseovy geometrické metody [3] označované jako "cut and paste". Následně zavedeme souřadnice, ve kterých je metrika spojitá, a dále se budeme věnovat přirozenému distribučnímu popisu prostoročasů s impulzními gravitačními vlnami. Tento přístup byl detailně popsán a prozkoumán v [4].

2.1.1 "Cut and paste" metoda

Geometrická metoda konstrukce "cut and paste" impulzních gravitačních vln v Minkowského prostoročase (1.2) se zakládá na rozdelení celého prostoročasu podél rovinné nadplochy \mathcal{N} , kde bude výsledná implulzní vlna lokalizována na dvě části \mathcal{M}^+ a \mathcal{M}^- . Opětovným spojením těchto částí a ztotožněním bodů na hranici řezu \mathcal{N} se specifickým posunutím dostaneme prostoročas s impulzní gravitační vlnou.



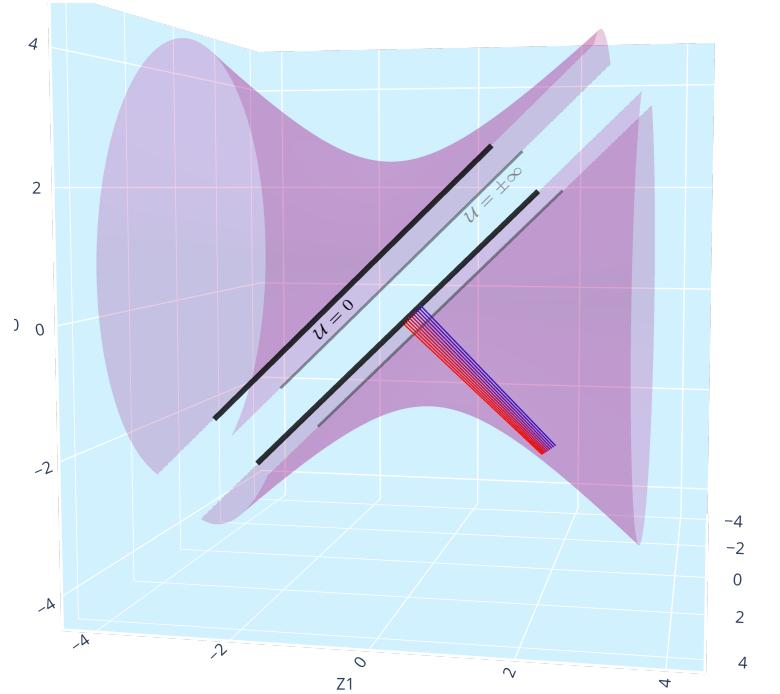
Obrázek 2.1: Princip geometrické konstrukce neexpandující impulzní gravitační vlny pomocí metody "cut and paste", podél nadplochy \mathcal{N} dojde k rozdelení prostoročasu na dvě části \mathcal{M}^+ a \mathcal{M}^- a opětovnému ztotožnění bodů na hranici obou částí se specifickým posunem.

Pro světelnou nadplochu \mathcal{N} danou podmínkou $\mathcal{U} = 0$ v adaptovaných souřadnicích pak tato konstrukce odpovídá Penroseovým napojovacím (lepícím) pod-

mínkám

$$[\eta, \bar{\eta}, \mathcal{V}, \mathcal{U} = 0_-]_{\mathcal{M}^-} \equiv [\eta, \bar{\eta}, \mathcal{V} - H(\eta, \bar{\eta}), \mathcal{U} = 0_+]_{\mathcal{M}^+}, \quad (2.1)$$

kde $H(\eta, \bar{\eta})$ je holomorfní funkcií souřadnic příčného prostoru. Penrose [3] ukázal, že impulzní gravitační vlny jsou v tenzoru křivosti reprezentovány členy proporcionalními Diracově delta distribuci $\delta(\mathcal{U})$. V Minkowského pozadí je nadplocha $\mathcal{U} = 0$ rovina a řešení spadá do rodiny takzvaných impulzních pp -vln, tedy rovnoběžně se propagujících rovinných vln (viz například [2]). Obecně na pozadích konstantní křivosti platí stejné napojovací podmínky (2.1), viz [4], a nadplocha $\mathcal{U} = 0$ +dstatuje plochu konstantní Gaussovské křivosti $K = \frac{1}{3}\Lambda$, která je popsána metrikou $d\sigma^2 = 2(1 + \frac{1}{6}\Lambda\eta\bar{\eta})^{-2}d\eta d\bar{\eta}$. V případě $\Lambda \neq 0$ se tedy jedná buďto o sféru ($\Lambda > 0$), nebo o hyperbolickou plochu ($\Lambda < 0$). Popis těchto nadploch konstatní křivostí v (A)dS prostoročasech a jejich geometrické vlastnosti jsou shrnutý v [5], kde je také ukázáno, že se jedná o neexpandující nadplochy.



Obrázek 2.2: Nulové geodetiky procházející impulzem nacházejícím se v $\mathcal{U} = 0$ (černá čára) v AdS prostoročase jsou podle "cut and paste" konstrukce posunuty v souřadnici \mathcal{V} a dochází k refrakci. Ve spodní polovině jsou vykresleny nulové generátory anti-de Sitterova hyperboloidu.

2.1.2 Spojitý tvar metriky

Metoda "cut and paste" nám dává identifikaci bodů prostoročasu na obou stranách impulzní vlny, a tedy část¹ napojovacích podmínek pro geodetiky, nic ale neríká o podobě metriky kompletního prostoročasu s impulzní vlnou. Potřebujeme

¹Jedná se pouze o podmínky napojení poloh, napojení rychlostí je potřeba diskutovat detailněji, viz [4].

tedy najít vhodný souřadnicový systém, ve kterém bude metrika spojitá přes rozhraní $\mathcal{U} = 0$. Toho dosáhneme postupem použitým např. v [4], kde z metriky prostoročasu pozadí (1.15), tedy

$$ds_0^2 = \frac{2 d\eta d\bar{\eta} - 2 d\mathcal{U} d\mathcal{V}}{\left[1 + \frac{1}{6}\Lambda(\eta\bar{\eta} - \mathcal{U}\mathcal{V})\right]^2}, \quad (2.2)$$

souřadnicovou transformací

$$\mathcal{U} = U, \quad \mathcal{V} = V + H + U H_{,Z} H_{,\bar{Z}}, \quad \eta = Z + U H_{,\bar{Z}}, \quad (2.3)$$

kde uvažujeme libovolnou reálnou funkci $H(Z, \bar{Z})$, obdržíme metriku

$$ds^2 = \frac{2 \left| dZ - U (H_{,Z\bar{Z}} dZ + H_{,\bar{Z}\bar{Z}} d\bar{Z}) \right|^2 - 2dU dV}{\left[1 + \frac{1}{6}\Lambda(Z\bar{Z} - UV - UG)\right]^2}, \quad (2.4)$$

kde $G(Z, \bar{Z}) \equiv H - Z H_{,Z} - \bar{Z} H_{,\bar{Z}}$. Metriku (2.4) pak uvažujeme pouze pro $U > 0$, zatímco na $U < 0$ provedeme ztotožnení souřadnic

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= U \\ \mathcal{V} &= V \\ \eta &= Z \end{aligned} \quad (2.5)$$

a uvažujeme metriku vzniklou právě touto transformací. Definováním takzvané kink funkce jako

$$U_+ \equiv U_+(U) = \begin{cases} 0 & \text{pro } U \leq 0 \\ U & \text{pro } U \geq 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

můžeme výslednou metriku zapsat jako

$$ds^2 = \frac{2 \left| dZ + U_+ (H_{,Z\bar{Z}} dZ + H_{,\bar{Z}\bar{Z}} d\bar{Z}) \right|^2 - 2dU dV}{\left[1 + \frac{1}{6}\Lambda(Z\bar{Z} - UV - U_+ G)\right]^2}. \quad (2.7)$$

Transformace (2.3) a (2.5) spojující separátně pro $\mathcal{U} > 0$ a $\mathcal{U} < 0$ metriku (2.2) s metrikou (2.7) lze pomocí Heavisideovy skokové funkce $\Theta(U)$ přepsat do tvaru

$$\mathcal{U} = U, \quad \mathcal{V} = V + \Theta(U)H + U_+ H_{,Z} H_{,\bar{Z}}, \quad \eta = Z + U_+ H_{,\bar{Z}}. \quad (2.8)$$

Stále je ale nutné provádět transformaci separátně pro $\mathcal{U} > 0$ a $\mathcal{U} < 0$, Heavisideova funkce má při transformaci metriky (2.2) pro všechna \mathcal{U} za následek vznik členů proporcionálních delta funkci – formálně tak generuje impulzní tvar metriky. Je také nutné podotknout, že toto vyjádření je pak ve smyslu distribucí. Tato transformace spojuje distribuční vyjádření metriky (2.12), které bude zavedeno dále, se spojitým tvarem metriky (2.7), ve kterém se distribuční členy metriky a členy vzniklé transformací kompenzují. Transformace (2.8) zároveň obsahuje Penroseovy spojovací podmínky (2.1) v $U = 0$, kde vzniká nespojitost v souřadnici \mathcal{V} . Tato metoda konstrukce, ve smyslu distribucí, tedy představuje explicitní realizaci "cut and paste" přístupu.

2.1.3 Distribuční tvar metriky

Dalším způsobem konstrukce impulzní gravitační vlny je přechod od příslušných rodin takzvaných "sandwichových" gravitačních vln s hladkým profilem vlnoplochy k limitnímu distribučnímu vyjádření impulzní vlny. Pro případ neexpandujících vln propagujících se na $\mathbb{E}^{1,3}$ byl tento limitní přechod uvažován např. v [6], [7], [8]. Výsledná metrika nabývá tvaru

$$ds^2 = 2 d\xi d\bar{\xi} - 2du dv + H(\xi, \bar{\xi})\delta(u) du^2, \quad (2.9)$$

přičemž $\delta(\mathcal{U})$ nahrazuje obecný sandwichový profil vlny. Distribuční tvar metriky také dostaneme dosazením invezní transformace k (2.8) do spojité metriky (2.7). Vzhledem k nespojitosti v transformaci toto dosazení nemůže být provedeno v rámci klasické teorie distribucí, kde nelze konzistentně definovat násobení dvou distribucí. S využitím regularizačních metod teorie nelineárních zobecněných funkcí, které zakládají na Colombeaových algebrách, je ale možné odvodit pravidla pro násobení jisté třídy distribucí, která dostačují pro toto odvození. Přehled teorie zobecněných distribucí lze nalézt například v [9]. Konkrétně potřebujeme mít zavedené násobení distribucí

$$\Theta^2 = \Theta, \quad \Theta U_+ = U_+. \quad (2.10)$$

Kromě pravidel pro násobení ještě využijeme identity z klasické teorie distribucí

$$\Theta' = \delta, \quad U'_+ = \Theta. \quad (2.11)$$

Takto dostáváme pro libovolnou hodnotu Λ metriku ve tvaru

$$ds^2 = \frac{2d\eta d\bar{\eta} - 2d\mathcal{U} d\mathcal{V} + 2H(\eta, \bar{\eta})\delta(\mathcal{U}) d\mathcal{U}^2}{\left[1 + \frac{1}{6}\Lambda(\eta\bar{\eta} - \mathcal{U}\mathcal{V})\right]^2}. \quad (2.12)$$

V případě nenulové kosmologické konstanty můžeme také využít vnoření do $\mathbb{E}^{1,4}$, případně $\mathbb{E}^{2,4}$ (podle znaménka kosmologické konstanty, jak je popsáno v kapitole 1) s dodatečným neexpandujícím impulzem

$$ds^2 = dZ_2^2 + dZ_3^2 + \epsilon dZ_4^2 - 2d\tilde{U}d\tilde{V} + \mathcal{H}(Z_2, Z_3, Z_4)\delta(\tilde{U})d\tilde{U}^2, \quad (2.13)$$

kde $\epsilon = \text{sign}(\Lambda)$, $\tilde{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}(Z_0 - Z_1)$, $\tilde{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}(Z_0 + Z_1)$. S podmínkou analogickou k (1.9) a (1.18),

$$Z_2^2 + Z_3^2 + \epsilon Z_4^2 - 2\tilde{U}\tilde{V} = \epsilon a^2, \quad (2.14)$$

dostáváme reprezentaci impulzních vln propagujících se na (A)dS prostoročasu s impulzem na $\tilde{U} = 0$. Funkce H a \mathcal{H} v metrikách (2.12) a (2.13) jsou svázány vztahem

$$\mathcal{H} = \frac{2H}{1 + \frac{1}{6}\Lambda\eta\bar{\eta}}. \quad (2.15)$$

impulzní plocha má v těchto souřadnicích tvar $Z_2^2 + Z_3^2 + \epsilon Z_4^2 = \epsilon a^2$, a odpovídá tedy, jak již bylo zmíněno, 2-sféře pro $\epsilon = 1$ a 2-hyperboloidu pro $\epsilon = -1$.

2.2 \mathcal{C}^1 -matching a refrakční rovnice

Dále budeme explicitně modelovat geodetiky na prostoročasech s neexpandujícími impulzními vlnami v souřadnicích (2.12). V těchto souřadnicích není řešení rovnice geodetiky dobře definované v klasické teorii distribucí. Pro neexpandující impulzní vlny na Minkowského prostoročasu byla rovnice geodetiky a její řešení zkoumána v rámci teorie zobecněných funkcí ve smyslu Colombeaových algeber v článích [10] a [11], přičemž byla ukázána existence a jednoznačnost řešení v prostoru těchto funkcí a bylo ověřeno, že geodetiky na \mathcal{M}^- a \mathcal{M}^+ odpovídají geodetikám na Minkowského pozadí se skokem v souřadnici \mathcal{V} při přechodu přes nadplochu $\mathcal{U} = 0$. V prostoročasech s nenulovou kosmologickou konstantou lze využít přístup vnoření do pětidimenzionálního Minkowského prostoru, kde se v rovnici geodetiky nachází pouze výrazy jednoznačně definované v klasické teorii distribucí. Řešení rovnice geodetiky pro (anti-)de Sitterův prostoročas s impulzními neexpandujícími vlnami byly tímto způsobem odvozeny v [12]. V článku [4] byla odvoena rovnice geodetiky ve spojitéch souřadnicích (2.7). Odvozený tvar je v tomto případě analyzován ve smyslu Filippovových řešení (diferenciálních inkluze) [13], což je zobecnění teorie obyčejných diferenciálních rovnic. V článku je ukázána existence a jednoznačnost takových řešení, dále autoři využívají metodou \mathcal{C}^1 -matchingu, kde při splnění lokální lipschitzovskosti metriky lze řešení ve smyslu Filippovova přiřadit řešením rovnice geodetiky na jednotlivých částech prostoročasu ("před" a "za" impulzem), bez nutné znalosti detailů teorie za Filippovovými řešeními. Prakticky pak pouze přecházíme od spojitého C^1 řešení k souřadnicím explicitně vyjadřujícím impulzní povahu vlny.

Výsledkem \mathcal{C}^1 -matchingu je sada refrakčních rovnic, které udávají jak skok v souřadnici \mathcal{V} , tak i změnu v rychlostech před a za impulzem. Geodetiku procházející impulzní plochou ve spojitéch souřadnicích tedy ztotožníme transformací (2.8) (a její derivací), v oblastech $U > 0$ a $U < 0$ separátně, s geodetikami v souřadnicích prostoročasu na pozadí. Pro polohy dostaváme limitou $U \rightarrow 0^+$ a $U \rightarrow 0^-$ rovnice

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_i^+ &= \mathcal{U}_i^- = 0, \\ \mathcal{V}_i^+ &= \mathcal{V}_i^- + H_i, \\ \eta_i^+ &= \eta_i^-,\end{aligned}\tag{2.16}$$

což přesně odpovídá Penroseovým spojovacím podmínkám (2.1) - geodetika je spojita v \mathcal{U} a η a dochází ke skoku ve \mathcal{V} . Pro rychlosti obdržíme stejnou limitou rovnice

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{U}}_i^+ &= \dot{\mathcal{U}}_i^-, \\ \dot{\mathcal{V}}_i^+ &= \dot{\mathcal{V}}_i^- + H_{i,Z}\dot{\eta}_i^- + H_{i,\bar{Z}}\dot{\eta}_i^- + H_{i,Z}H_{i,\bar{Z}}\dot{\mathcal{U}}_i^-, \\ \dot{\eta}_i^+ &= \dot{\eta}_i^- + H_{i,\bar{Z}}\dot{\mathcal{U}}_i^-. \end{aligned}\tag{2.17}$$

Index i zde znamená hodnotu na impulzní nadploše $\mathcal{U} = 0$, složky označené znakem + jsou za impulzem ($\mathcal{U} > 0$), složky označené znakem - jsou před impulzem ($\mathcal{U} < 0$).

Všimněme si, že při přechodu přes impulzní plochu platí $\eta_i = Z_i$, a tedy $H_{i,Z} = \frac{\partial}{\partial \eta} H(\eta, \bar{\eta})|_{\mathcal{U}=0}$.

Bližším pohledem na refrakční rovnice také vidíme, že zachovávají kauzální charakter. Složka rychlosti $\dot{\mathcal{U}}$ se nemění, ve složkách $\dot{\mathcal{V}}$ a $\dot{\eta}$ dojde k refrakci tak, že nedochází ke změně normy čtyřrychlosti.

Dále uvedeme refrakční rovnice v reálných polárních prostorových souřadnicích, které vychází z transformace spojitých souřadnic

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{2} |Z + U_+ H_{,\bar{Z}}|, \\ \varphi &= \frac{1}{2i} \log \frac{Z + U_+ H_{,\bar{Z}}}{\bar{Z} + U_+ H_{,Z}}\end{aligned}\quad (2.18)$$

Limitou $U \rightarrow 0^+$ a $U \rightarrow 0^-$ dostáváme

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_i^+ &= \mathcal{V}_i^- + H_i, \\ \rho_i^+ &= \rho_i^-, \\ \varphi_i^+ &= \varphi_i^-,\end{aligned}\quad (2.19)$$

tedy radiální i úhlová složka jsou spojité. Pro složky rychlosti pak provedeme stejnou limitu na derivaci souřadnic,

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{V}}_i^+ &= \dot{\mathcal{V}}_i^- + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i\varphi_i^-} H_{i,Z} + e^{-i\varphi_i^-} H_{i,\bar{Z}} \right) \dot{\rho}_i^- + \frac{i}{\sqrt{2}} \left(e^{i\varphi_i^-} H_{i,Z} - e^{-i\varphi_i^-} H_{i,\bar{Z}} \right) \rho_i^- \dot{\varphi}_i^- \\ &\quad + (H_{i,Z} H_{i,\bar{Z}}) \dot{\mathcal{U}}_i^-, \\ \dot{\rho}_i^+ &= \dot{\rho}_i^- + \frac{1}{2} \left(e^{i\varphi_i^-} H_{i,Z} + e^{-i\varphi_i^-} H_{i,\bar{Z}} \right) \dot{\mathcal{U}}_i^-, \\ \dot{\varphi}_i^+ &= \dot{\varphi}_i^- + \frac{i}{\sqrt{2} \rho_i^-} \left(e^{i\varphi_i^-} H_{i,Z} - e^{-i\varphi_i^-} H_{i,\bar{Z}} \right) \dot{\mathcal{U}}_i^-.\\ (2.20)\end{aligned}$$

Transformací

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}} (X + iY) \quad \bar{Z} = \frac{1}{\sqrt{2}} (X - iY) \quad (2.21)$$

můžeme odvodit refrakční rovnice v reálných souřadnicích $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, x, y)$

$$\mathcal{U}_i^+ = \mathcal{U}_i^- = 0, \quad \mathcal{V}_i^+ = \mathcal{V}_i^- + H_i, \quad x_i^+ = x_i^-, \quad y_i^+ = y_i^-, \quad (2.22)$$

a pro čtyřrychlosti

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{U}}_i^+ &= \dot{\mathcal{U}}_i^-, \\ \dot{\mathcal{V}}_i^+ &= \dot{\mathcal{V}}_i^- + H_{i,X} \dot{x}_i^- + H_{i,Y} \dot{y}_i^- + \frac{1}{2} \left((H_{i,X})^2 + (H_{i,Y})^2 \right) \dot{\mathcal{U}}_i^-, \\ \dot{x}_i^+ &= \dot{x}_i^- + H_{i,X} \dot{\mathcal{U}}_i^-, \\ \dot{y}_i^+ &= \dot{y}_i^- + H_{i,Y} \dot{\mathcal{U}}_i^-.\\ (2.23)\end{aligned}$$

Hodnoty $H_{i,X}$ a $H_{i,Y}$ odpovídají derivacím funkce H ve směru X a Y vyčísleným v bodě impulzu, díky spojitosti tedy platí $H_{i,X} = \frac{\partial}{\partial x} H|_{\mathcal{U}=0}$, $H_{i,Y} = \frac{\partial}{\partial y} H|_{\mathcal{U}=0}$.

Díky tomu, že odvození rovnic (2.16) a (2.17) bylo provedeno v konformně plochých souřadnicích, jejich tvar nezávisí na hodnotě kosmologické konstanty Λ

a jedná se o jednotné rovnice pro refrakci geodetik způsobenou impulzními vlnami propagujícími se v Minkowského, de Sitterově a anti-de Sitterově prostoročase.

V de Sitterově a anti-de Sitterově prostoročase můžeme také využít pěti-dimenzionálního formalismu a odvodit refrakční rovnice v souřadnicích (2.13). Konformní faktor je na jednotlivých částech prostoročasu při "cut and paste" konstrukci daný jako $\Omega_i^\pm = 1 + \frac{1}{6}\Lambda\eta^\pm\bar{\eta}^\pm$, ze spojitosti $\eta, \bar{\eta}$ při přechodu přes $\mathcal{U} = 0$ však plyne, že pro konformní faktor stačí psát Ω_i , jelikož při přechodu přes impulzní nadplochu nedochází k jeho změně.

Z rovnic pro polohy (2.22) dostaváme Penroseovu napojovací podmínu v 5-dimenzionálním formalismu

$$\begin{aligned}\tilde{U}_i^+ &= 0 = \tilde{U}_i^-, & \tilde{V}_i^+ &= \tilde{V}_i^- + \frac{H_i}{\Omega_i}, \\ Z_{2i}^+ &= Z_{2i}^-, & Z_{3i}^+ &= Z_{3i}^-, & Z_{4i}^+ &= Z_{4i}^-. \end{aligned}\quad (2.24)$$

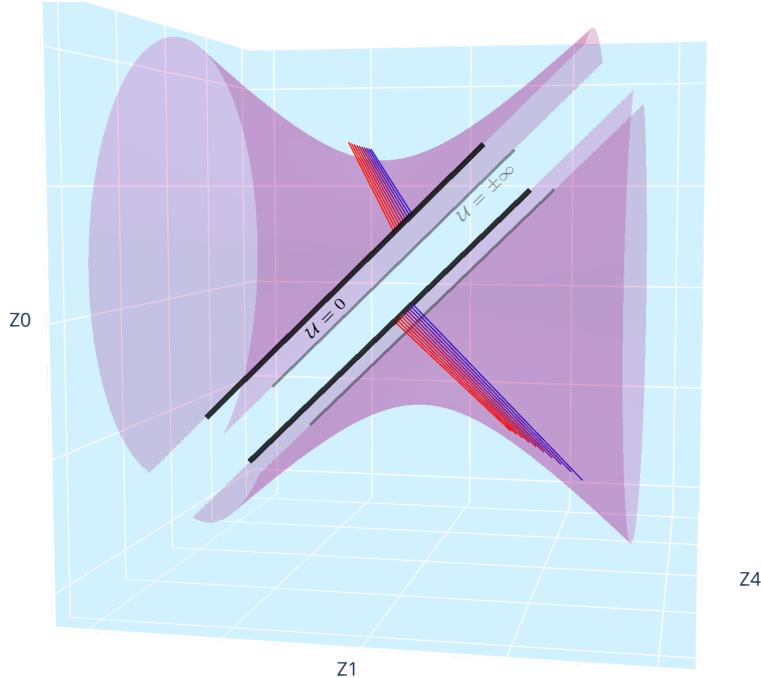
Pro derivaci konformního faktoru podle afinního parametru máme $\dot{\Omega}_i^+ = \dot{\Omega}_i^- - \frac{1}{2\epsilon a^2}G_i\Omega_i\dot{\tilde{U}}_i^-$, kde (díky spojitosti) $G_i = G_i^\pm = H_i - \Omega_i(H_{i,X}Z_{2i}^\pm + H_{i,Y}Z_{3i}^\pm)$. Refrakční rovnice složek rychlostí pak mají tvar

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{U}}_i^- &= \dot{\tilde{U}}_i^+, \\ \dot{\tilde{V}}_i^- &= \dot{\tilde{V}}_i^+ + 2p\dot{\tilde{U}}_i^+ - H_{i,X}\dot{Z}_{2i}^+ - H_{i,Y}\dot{Z}_{3i}^+ - \frac{G_i}{2a}\dot{Z}_{4i}^+, \\ \dot{Z}_{2i}^- &= \dot{Z}_{2i}^+ - \dot{\tilde{U}}_i^+\left(H_{i,X} + \frac{G_i}{2\epsilon a^2}Z_{2i}^+\right), \\ \dot{Z}_{3i}^- &= \dot{Z}_{3i}^+ - \dot{\tilde{U}}_i^+\left(H_{i,Y} + \frac{G_i}{2\epsilon a^2}Z_{3i}^+\right), \\ \dot{Z}_{4i}^- &= \dot{Z}_{4i}^+ - \dot{\tilde{U}}_i^+\frac{G_i}{\epsilon a\Omega_i}, \end{aligned}\quad (2.25)$$

kde

$$p = \frac{1}{4}\left[(H_{i,X})^2 + (H_{i,Y})^2 - \frac{G_i}{\epsilon a^2}\left(\tilde{V}_i^+ - \frac{H_i}{\Omega_i}\right)\right]. \quad (2.26)$$

Vidíme, že i v 5-dimenzionálním formalismu dochází ke skoku na vlnoploše v souřadnici \tilde{V} a refrakce je ve všech směrech, kromě normály na vlnoplochu (tedy kromě směru \tilde{U}). To má za následek, že se nulové generátory (A)-dS hyperboloidu po refrakci stávají generátory jiné nadplochy hyperboloidu (viz obrázek 2.3).



Obrázek 2.3: Nulové geodetiky procházející impulzem nacházejícím se v $\mathcal{U} = 0$ (černá čára) v AdS prostoročase s impulzní vlnou. Geodetiky jsou po refrakci opět nulovými generátory AdS na $\mathcal{U} > 0$, neleží už ale v $\eta = 0$, a proto neleží na ploše vykresleného hyperboloidu – jsou generátory jiné nadplochy (A–)dS hyperboloidu.

2.3 Vizualizace geodetik v prostoročasech s ne-expandující impulzní vlnou

Refrakční rovnice jsou vhodným nástrojem k vizualizaci geodetik v souřadnicích prostoročasů na pozadí impulzní vlny. Pro vybrané funkce H , resp. \mathcal{H} v prostoročasech s $\Lambda \neq 0$, byly jejich užitím zvolené geodetiky (respektive odpovídající počáteční data) před impulzem ztotožněny s geodetikami (daty) za impulzem. Integrací rovnice geodetiky na oblastech před a za impulzem zvlášť pak obdržíme celé geodetiky v prostoročasu s impulzní vlnou. Řešení rovnice geodetiky v maximálně symetrických prostoročasech je známé v analytické podobě, viz například [12], my jsme se však rozhodli využít numerické řešení, sloužící jako základ pro diskuzi netriviálních gyratonicích případů, kterým se věnuje kapitola 3. Pro účel vizualizace geodetik v těchto prostoročasech autor této práce vytvořil balíček GRImpulsiveWaves pro jazyk Python, tento open-source balíček je volně dostupný na platformě GitHub (<https://github.com/DSroD/GRImpulsiveWaves>) a na Python Package Index pod názvem GRImpulsiveWaves. Instalaci tedy lze provést přímo přes balíčkovací instalátor pip, příkazem `pip install GRImpulsiveWaves`. V následujících podsekcích představíme vizualizace pro tato vybraná řešení, pro různé parametry a počáteční podmínky geodetik. Všechny zde představené vizualizace lze jednoduše reprodukovat pomocí kódu uveřejněného v repozitáři

na výše zmíněné platformě, kde se kromě statických obrázků generují i interaktivní grafy, kde lze měnit úhel pohledu a přesně odečítat hodnoty souřadnic na geodetikách, včetně vlastního času od průchodu vlnoplochou.

2.3.1 Impulzní gravitační vlna generovaná nehmotnými částicemi s multipólovou strukturou s $\Lambda = 0$

Řešení impulzní vlny generované nulovými částicemi s multipólovou strukturou v Minkowského prostoročase odvodili Griffiths a Podolský v [14]. Polní rovnice se pro tento případ redukují na

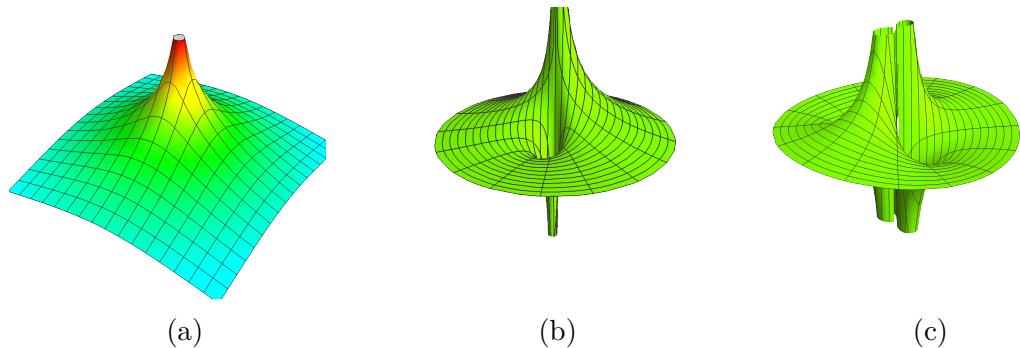
$$\Delta H = 2H_{,\eta\bar{\eta}} = 8\pi T_{\mathcal{U}\mathcal{U}}, \quad (2.27)$$

kde $T_{\mathcal{U}\mathcal{U}} = f(\eta, \bar{\eta})\delta(\mathcal{U})$. Řešení částice s multipólovou strukturou pak odpovídá funkci H v cylindrických prostorových souřadnicích ve tvaru

$$H = -b_0 \log(\rho) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \rho^{-m} \cos[m(\phi - \phi_m)], \quad (2.28)$$

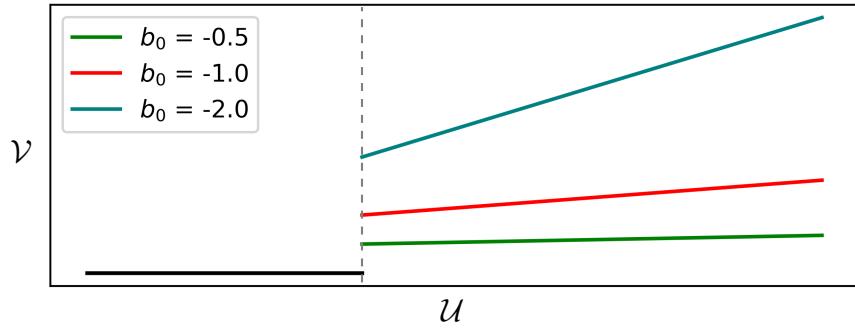
kde b_m, ϕ_m jsou konstanty. Monopólový, dipólový a kvadrupólový příspěvek k této funkci je vykreslen na obrázku 2.4.

Řešení s jedinou monopólovou částicí, tedy $b_m = 0$ pro všechna $m \geq 1$, odpovídá Aichelburg–Sexlovu řešení (zkráceně jako AS) – prostoročasu zkonstruovanému ultraboostem Schwarzschildova řešení [15].

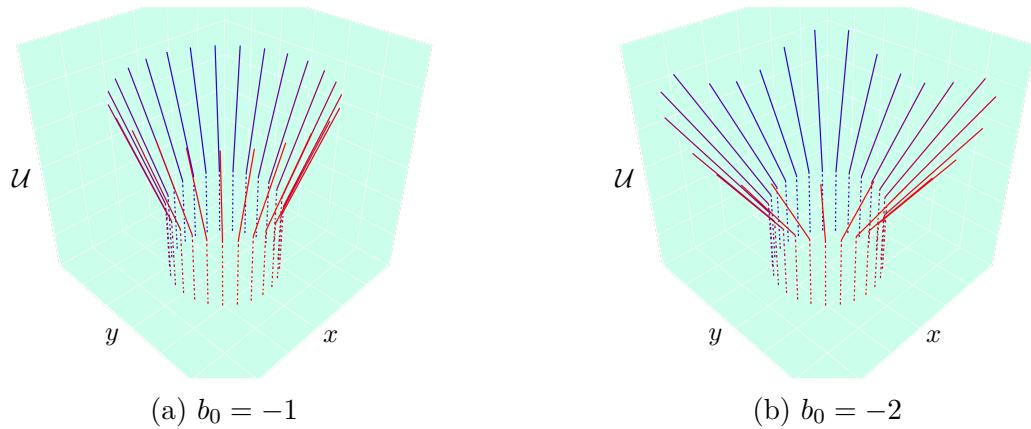


Obrázek 2.4: Funkce H v případě (a) AS řešení, impulzní vlny generované nulovou částicí s (b) dipólovou strukturou a s (c) kvadrupólovou strukturou.

Na obrázku 2.5 je vyobrazena refrakce v AS řešení pro různé parametry b_0 . Dochází ke skoku v souřadnici \mathcal{V} , jak plyne z Penroseových napojovacích podmínek, a k refrakci. S rostoucí absolutní hodnotou parametru b_0 dochází k větší změně ve složce rychlosti $\dot{\mathcal{V}}$. Skok ve složce $\dot{\mathcal{V}}$ doprovází změnu ve složce $\dot{\eta}$, pro kterou opět platí, že spolu s rostoucí absolutní hodnotou b_0 dochází k větší změně. To intuitivně odpovídá zachování 4-rychlosti. Tato závislost je také vidět na obrázku 2.6, kde vidíme geodetický pohyb v prostoru v závislosti na retardované souřadnici \mathcal{U} , kterou v případě neexpandujících vln v Minkowského prostoročase můžeme použít jako afinní parametr. Geodetiky vykreslené přerušovanou čarou jsou v oblasti $\mathcal{U} < 0$, zatímco geodetiky vykreslené plnou čarou jsou v oblasti $\mathcal{U} > 0$ a po refrakci.



Obrázek 2.5: Nulové geodetiky ($\dot{\mathcal{U}}^- = 1$, $\dot{\mathcal{V}}^- = 0$, $\dot{\eta}^- = 0$) procházející impulzem AS řešení v $\rho = 2$ pro různé parametry b_0 .



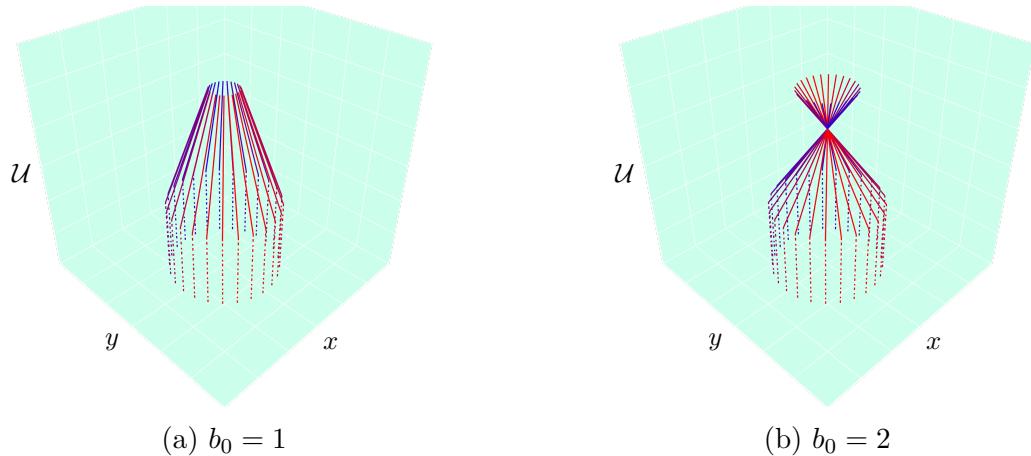
Obrázek 2.6: Nulové geodetiky ($\dot{\mathcal{U}}^- = 1$, $\dot{\mathcal{V}}^- = 0$, $\dot{\eta}^- = 0$) procházející impulzní vlnou Aichelburg–Sexlova řešení. Prstenec testovacích částic je před průchodem impulzem v $\rho = 2$.

Záporné hodnoty parametru b_0 , použité na obrázcích 2.5 a 2.6, byly vhodné pro přehlednější vizualizaci efektu impulzní vlny, nemají ale v originální konstrukci Aichelburg-Sexlova ultraboostu fyzikální význam. Parametr b_0 představuje v ultraboostové limitě $v \rightarrow 1, m \rightarrow 0$ konstantu, která splňuje $8m = b_0\sqrt{1-v^2}$, pro fyzikální systémy konstruované touto metodou tedy nabývá kladných hodnot. Příklady nulových geodetiky pro kladné hodnoty jsou na obrázku 2.7, kde vidíme, že geodetiky jsou refraktovány směrem k $\rho = 0$ – jde tedy o přitažlivý efekt nulové částice generující impulzní vlnu.

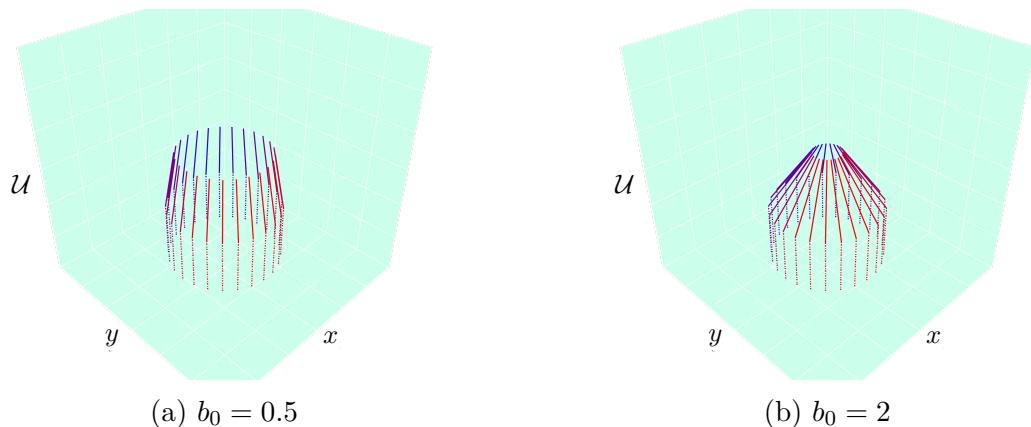
Testovací částice s časupodobnými geodetikami se chovají stejným způsobem, na obrázku 2.8 je vyobrazeno šíření testovacích částic paralelně s osou z . Při průchodu $\mathcal{U} = 0$ dochází k refrakci a částice po průchodu letí směrem k ose z .

Refrakce je slabší s rostoucí vzdáleností od částice generující impulz. Na obrázku 2.9 jsou znázorněny už refruktované časupodobné geodetiky pro různé vzdálenosti od osy symetrie. Před refrakcí se jedná o pohyb testovacích částic ve směru osy z . Takové chování odpovídá intuitivnímu očekávání při uvážení fyzikální podstaty zdroje v AS řešení.

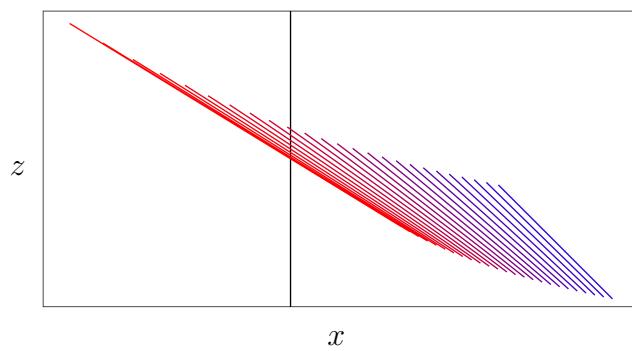
Pro potěšení oka čtenáře jsou přiloženy další vizualizace geodetického pohybu v Aichelburg-Sexlově řešení. Na obrázku 2.10 je systém časupodobných geodetik, které se před průchodem impulzní vlnou šíří směrem od osy symetrie z . V (b)



Obrázek 2.7: Nulové geodetiky ($\dot{U}^- = 1$, $\dot{\mathcal{V}}^- = 0$, $\dot{\eta}^- = 0$) procházející impulzem v $\rho = 2$ pro kladné, tedy fyzikální hodnoty parametru b_0 .

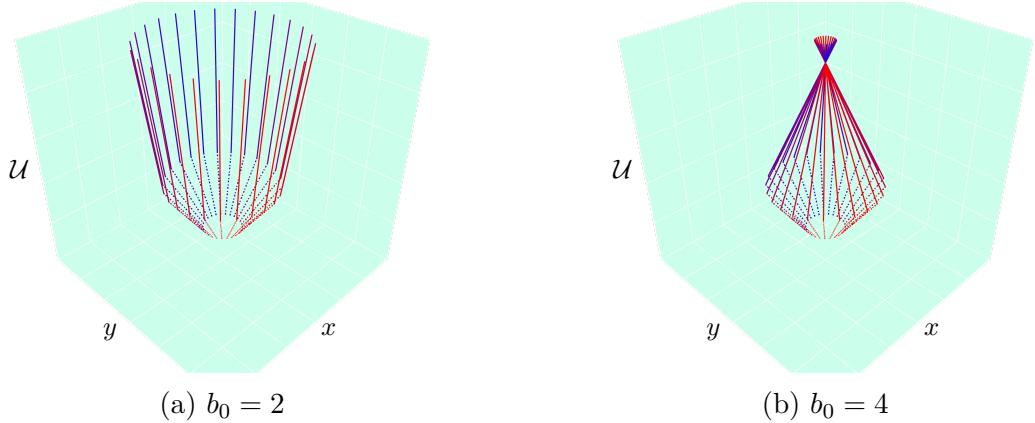


Obrázek 2.8: Časupodobné geodetiky ($\dot{\mathcal{U}}^- = \frac{1}{2}$, $\dot{\mathcal{V}}^- = 1$, $\dot{\eta}^- = 0$) procházející impulzní vlnou AS řešení. Prstenec testovacích částic je před průchodem impulzem lokalizován v $\rho = 2$.



Obrázek 2.9: Refraktované časupodobné geodetiky po průchodu impulzem v různých vzdálenostech ρ pro $b_0 = \frac{1}{2}$. Červená barva odpovídá částici refruktované nejblíže ($\rho = \frac{1}{2}$), modrá nejdále ($\rho = 2$). Černá přímka odpovídá ose $x = 0$.

dochází k refrakci, která otáčí směr šíření směrem zpět k ose z . Na obrázku 2.11 je pak zobrazení průchodu geodetik, které nejsou uspořádány axiálně symetricky.



Obrázek 2.10: Časupodobné geodetiky ($\dot{\mathcal{U}}^- = 1$, $\dot{\mathcal{V}}^- = 2$, $\dot{\eta}^- = \sqrt{\frac{3}{2}}e^{i\phi}$), kde ϕ odpovídá úhlu v cylindrických souřadnicích, ve kterém částice leží, procházející impulzní vlnou AS řešení v $\rho = 2$.

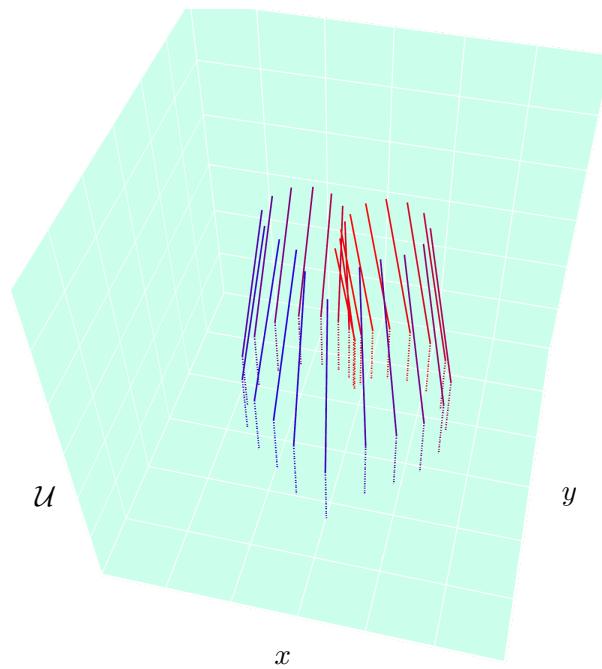
Pro $m > 0$ závisí změna geodetického pohybu na prostorovém úhlu. Derivace profilové funkce $H_{i,Z}$, která vystupuje v refrakčních rovnicích, je pro jednotlivá m

$$H_{i,Z}^{(m)}(\eta, \bar{\eta}) = -\frac{(\sqrt{2})^m b_m m}{\eta^{m+1}}. \quad (2.29)$$

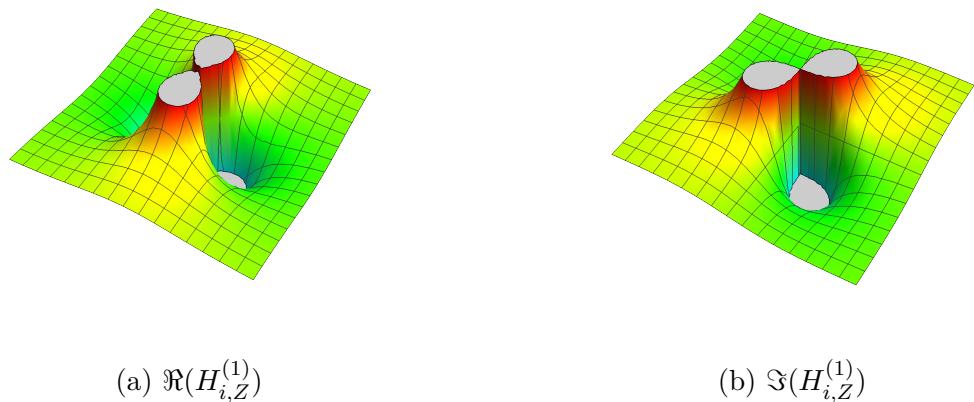
Speciálně pro $m = 1$, tedy impulz generovaný částicí s dipólovou strukturou, je $H_{i,Z}^{(1)}$ vykreslena na obrázku 2.12. Reálná část a imaginární část odpovídá derivacím ve směru X a Y vystupujícím v refrakčních rovnicích (2.23) - přímo tedy ukazují závislost změny čtyřrychlosti v těchto směrech na místě průchodu geodetiky vlnoplochou,

$$\begin{aligned} Re(H_{i,Z}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} H_{i,X}, \\ Im(H_{i,Z}) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} H_{i,Y}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

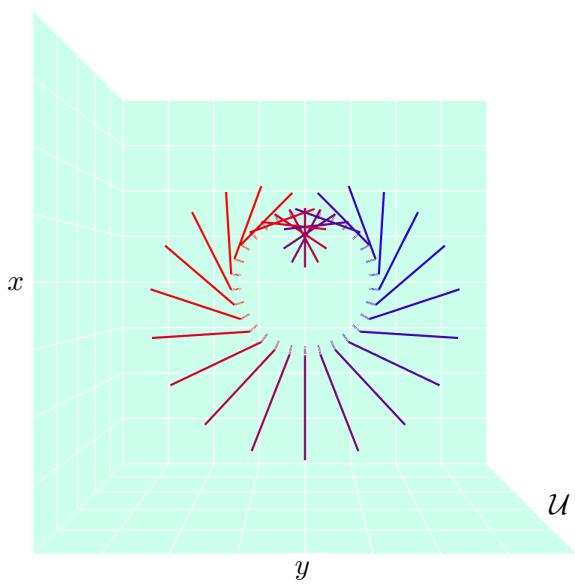
Příklad nulových geodetik procházejících impulzem s jediným nenulovým členem pro $m = 1$ je na obrázku 2.13, pro časupodobné geodetiky dostáváme totožné chování (viz obrázek 2.14)



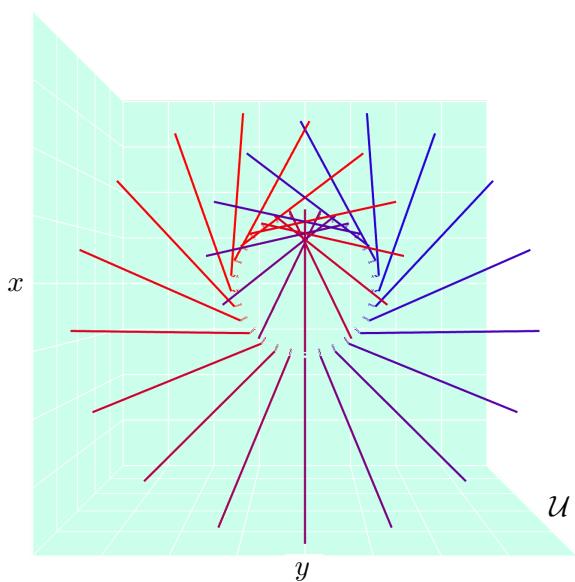
Obrázek 2.11: Časupodobné geodetiky ($\dot{\mathcal{U}}^- = \frac{1}{2}$, $\dot{\mathcal{V}}^- = 1$, $\dot{\eta}^- = 0$) ve vybraném uspořádání procházející nadplochou $\mathcal{U} = 0$.



Obrázek 2.12: Reálná a imaginární část funkce profilu vlny $H_{i,Z}^{(1)}(x, y)$.



Obrázek 2.13: Nulové geodetiky ($\dot{\mathcal{U}}^- = 1$, $\dot{\mathcal{V}}^- = 0$, $\dot{\eta}^- = 0$) v axiálně symetrickém uspořádání ($\rho = 1$) na \mathcal{M}^- procházející impulzní nadplochou vlny generované částicí s dipólovou strukturou s parametrem $b_1 = 0.2$.



Obrázek 2.14: Časupodobné geodetiky ($\dot{\mathcal{U}}^- = 0.5$, $\dot{\mathcal{V}}^- = 1$, $\dot{\eta}^- = 0$) v axiálně symetrickém uspořádání ($\rho = 1$) na \mathcal{M}^- procházející impulzní nadplochou vlny generované částicí s dipólovou strukturou, s parametrem $b_1 = 0.4$.

2.3.2 Impulzní gravitační vlna generovaná nehmotnými částicemi s multipólovou strukturou s $\Lambda \neq 0$

V prostoročasech s nenulovou konstantou odvodili Griffiths a Podolský [16] tvar řešení obdobný (2.28), tedy případ impulzních vln generovaných nulovými částicemi s multipólovou strukturou. Vyšli z redukce Einsteinových rovnic pro distribuční metriku (2.13). V případě ryze gravitačních vln dostaváme podmínu

$$\left(\Delta + \frac{2}{3} \Lambda \right) \mathcal{H} = 0, \quad (2.31)$$

kde Δ je Laplaceův operátor působící na impulzní nadploše. Při parametrizaci

$$\begin{aligned} Z_2 &= a\sqrt{\epsilon(1-z^2)} \cos \phi, \\ Z_3 &= a\sqrt{\epsilon(1-z^2)} \sin \phi, \\ Z_4 &= a z, \end{aligned} \quad (2.32)$$

kde pro $\Lambda > 0$ je $|z| \leq 1$ a pro $\Lambda < 0$ je $|z| \geq 1$, nabývá funkce $\mathcal{H}(z, \phi)$ tvaru

$$\mathcal{H}(z, \phi) = b_0 Q_1(z) + \sum_{m=1}^{\infty} b_0 Q_1^m(z) \cos[m(\phi - \phi_m)], \quad (2.33)$$

kde $Q_1^m(z)$ jsou přidružené Legendrovy funkce druhého druhu, tedy

$$Q_1^m(z) = -(\epsilon)^m |1-z^2|^{m/2} \frac{d^m}{dz^m} Q_1(z). \quad (2.34)$$

První člen

$$b_0 Q_1(z) = b_0 \left(\frac{z}{2} \log \left| \frac{1+z}{1-z} \right| - 1 \right) \quad (2.35)$$

představuje axiálně symetrické Hottovo–Tanakovo řešení [17], které odpovídá bohostu Schwarzschildova–(anti–)de Sitterova prostoročasu. Toto řešení je analogií Aichelburg–Sexlova řešení v (anti–)de Sitterově prostoročasu se singulární hmotou generující vlnu v $z = 1$. V případě de Sitterova prostoročasu je impulzní nadplocha neexpandující sféra generovaná dvěma nehmotnými částicemi, které letí v opačném směru. V anti–de Sitterově prostoročasu je impulzní nadplocha hyperboloidální plochou generovaná částicí, která se (díky tomu, že se jedná o nakrytí \mathbb{R}^4 s topologií $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^3$) periodicky pohybuje mezi prostorovými nekonečny, z jedné strany na druhou.

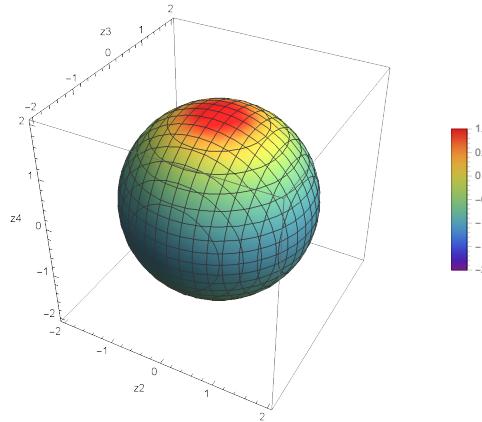
Na obrázku 2.15 vidíme hodnoty funkce $\mathcal{H}(Z_2, Z_3, Z_4)$ Hottova–Tanakova řešení na vlnoploše v (A–)dS prostoročasu (s $|\Lambda| = 1$).

Geodetický pohyb nulových částic je v konformně plochých souřadnicích nezávislý na hodnotě kosmologické konstanty, chování na impulzní ploše se pak liší pouze ve tvaru příslušné funkce $H(\eta, \bar{\eta})$, která má v případě Hottova–Tanakova řešení v konformně plochých souřadnicích tvar

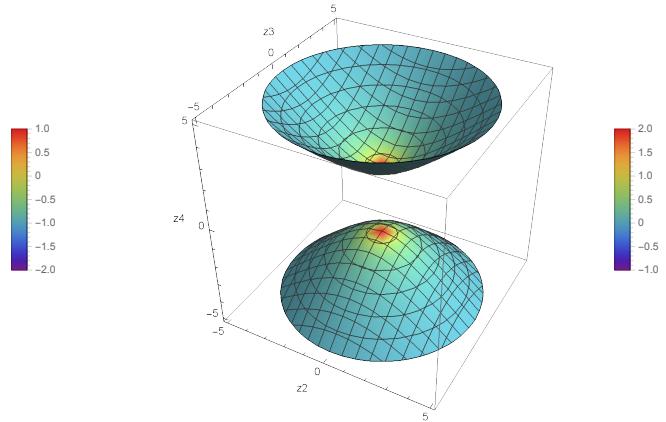
$$H(\eta, \bar{\eta}) = \frac{1}{24} b_0 \left((\Lambda \eta \bar{\eta} + 6) \log \left(\left| \frac{6}{\Lambda \eta \bar{\eta}} \right| \right) + 2(\Lambda \eta \bar{\eta} - 6) \right), \quad (2.36)$$

a v derivacích H ve směru η , respektive $\bar{\eta}$.

Jako první ukážeme pohyb nulových částic v nadploše $y = 0$ (to znamená, že souřadnice η je reálná). Díky axiální symetrii tak zároveň prozkoumáme vlastnosti



(a) de Sitteruv prostoročas



(b) anti-de Sitteruv prostoročas

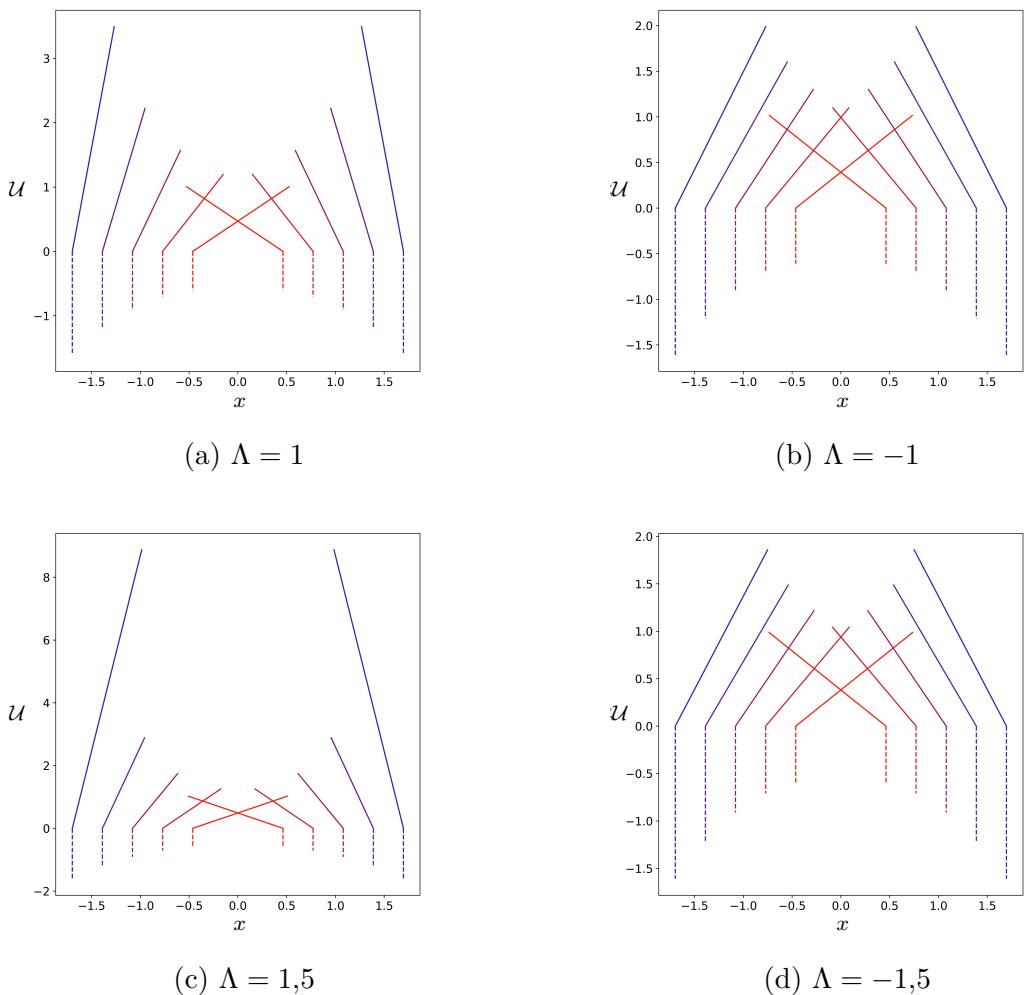
Obrázek 2.15: Funkce \mathcal{H} má v de Sitterově prostoročasu singulární body na pólech sféry odpovídající vlnoploše ($Z_4 = \pm a$), v anti-de Sitterově prostoročase singularity leží na vrcholech hyperboloidálních vlnoploch.

nulových geodetik ve všech nadplochách obsahujících osu této symetrie. Tento pohyb je pro řešení s $b_0 = 1$ zobrazen v konformně plochých souřadnicích na obrázku 2.16.

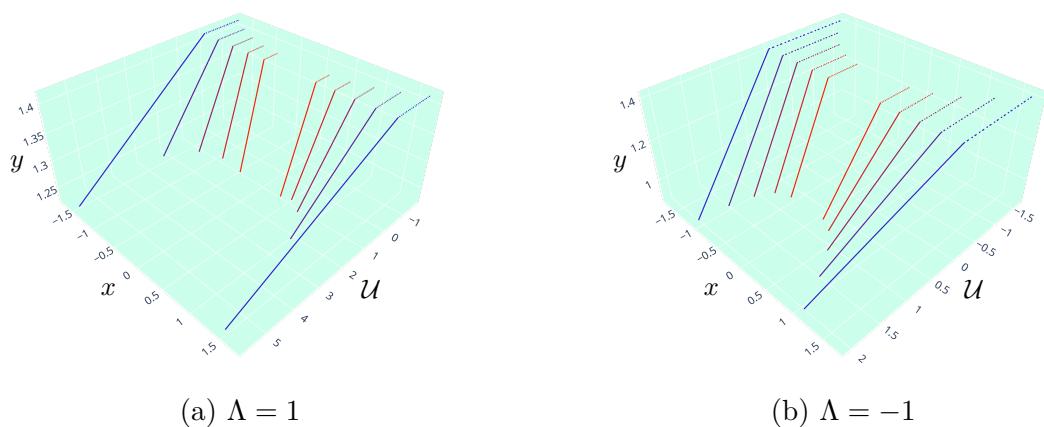
Pro nulové částice nenacházející se na nadploše obsahující osu symetrie dostáváme očekávané strhnutí k ose symetrie Hottova–Tanakova řešení, k $\eta = 0$ (viz obrázek 2.17).

Pro porovnání efektu impulzní vlny na časupodobné testovací částice v konformně plochých souřadnicích byly vykresleny případy geodetického pohybu v prostoročasu bez vlny a v prostoročasu s impulzní vlnou s parametrem $b_0 = 3$.

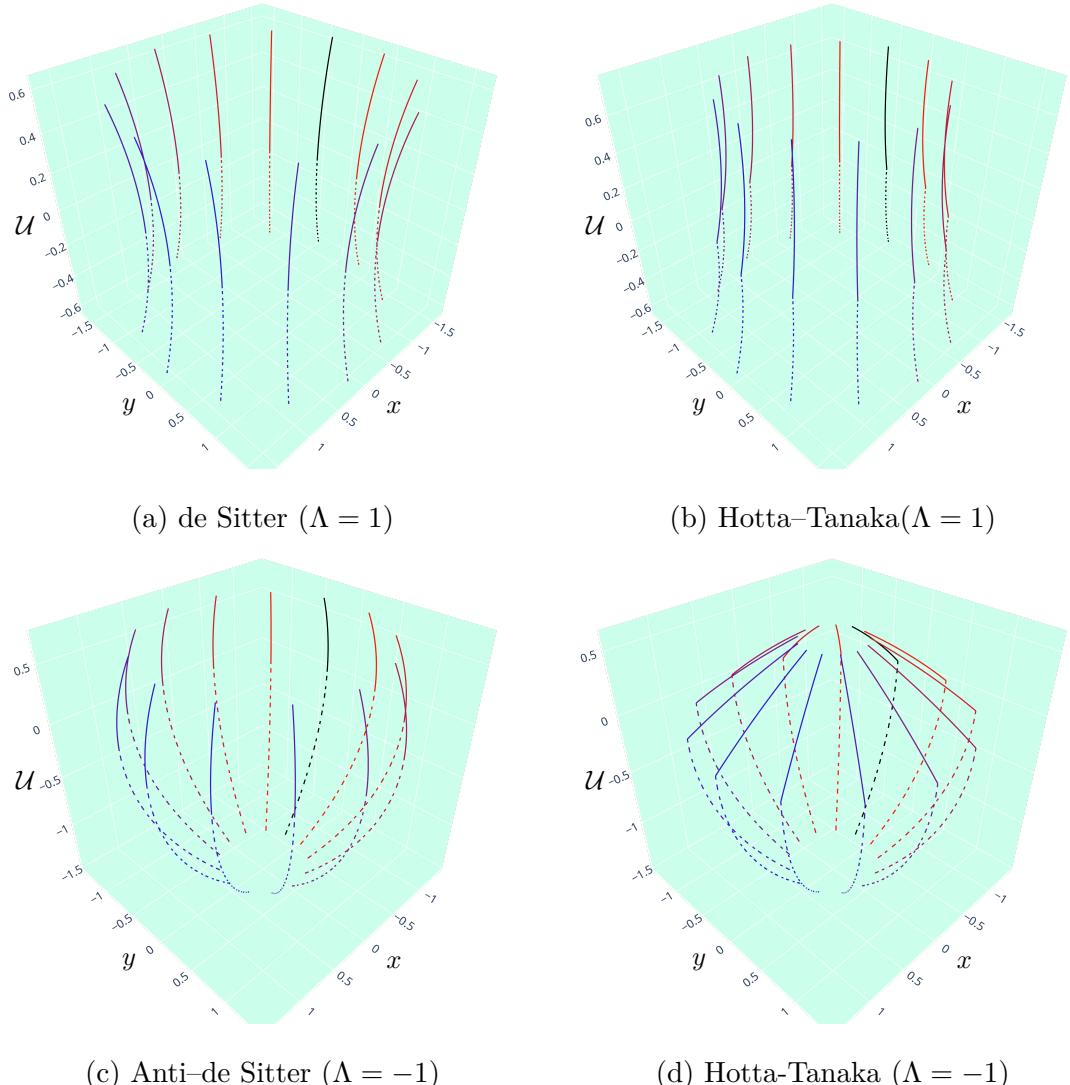
Dále vizualizujeme efekt refrakce geodetik v 5-dimensionálním formalismu. Nulové geodetiky tvoří generátory (A)–dS hyperboloidu, protože při refrakci nedochází ke změně kauzálního charakteru, po refrakci zůstává geodetika generátorem hyperboloidu, ale, jak vyplývá z refrakčních rovnic (2.23), v jiné nadploše – dochází k refrakci ve všech směrech, kromě směru normály na vlnoplochu. Případ refrakce nulových částic na de Sitterově prostoročasu je na vizualizován na obrázku 2.19.



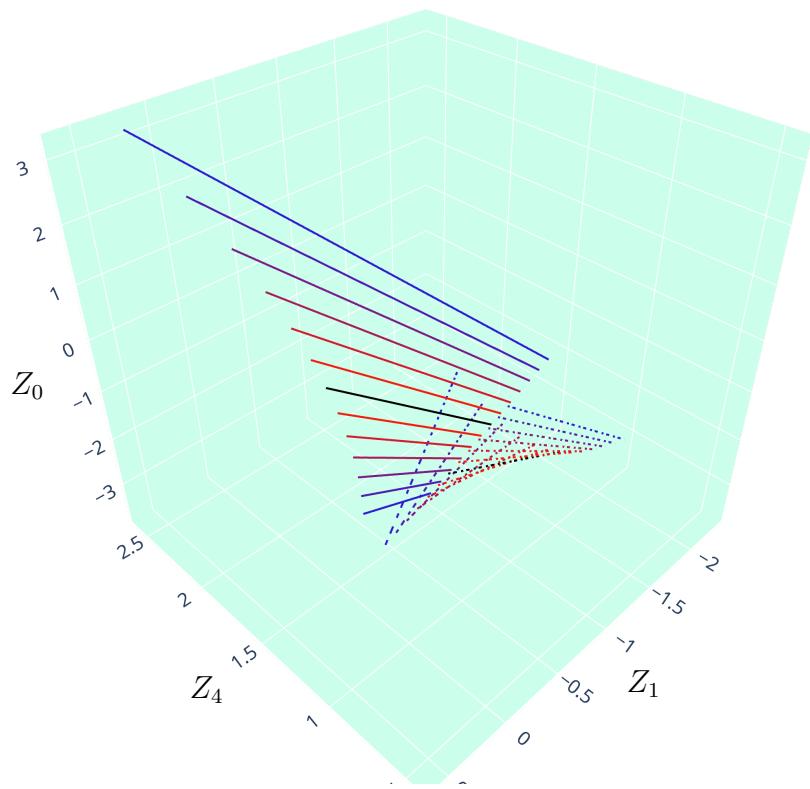
Obrázek 2.16: Geodetický pohyb nulové částice ($\dot{U}^- = 1$, $\dot{V}^- = 0$, $\dot{\eta}^- = 0$) v nadploše $y = 0$ v Hottově–Tanakově řešení s parametrem $b_0 = 1$.



Obrázek 2.17: Geodetický pohyb nulových částic ($\dot{U}^- = 1$, $\dot{V}^- = 0$, $\dot{\eta}^- = 0$) v nadploše $y = \sqrt{2}$ v Hottově–Tanakově řešení s parametrem $b_0 = 1$.



Obrázek 2.18: Časupodobné geodetiky ($\dot{\mathcal{U}}^- = \frac{1}{2N}$, $\dot{\mathcal{V}}^- = -\frac{1}{N}$, $\dot{\eta}^- = 0$), kde N je normalizační faktor, v (A)–dS a Hottově–Tanakově řešení s parametrem $b_0 = 3$.



Obrázek 2.19: Geodetický pohyb nulové částice ($\dot{\mathcal{U}}^- = 1$, $\dot{\mathcal{V}}^- = 0$, $\dot{\eta}^- = 0$) procházející vlnoplochou $\Lambda = 1$ Hottova–Tanakova řešení s parametrem $b_0 = 1$ v $\eta = 1,5$ a různých časech (tedy v různých hodnotách souřadnice \mathcal{V}) vyobrazený ve vnoření do $\mathbb{E}^{1,4}$.

3. Neexpandující gravitační vlny s gyratonovými členy

Distribuční vyjádření metriky impulzní vlny (2.12) není nejobecnější metrikou popisující impulzní vlny. Lze jí rozšířit o mimodiagonální členy do tvaru

$$\begin{aligned} ds^2 = & \frac{2d\eta d\bar{\eta} - 2d\mathcal{U} d\mathcal{V} + 2H(\eta, \bar{\eta})\delta(\mathcal{U}) d\mathcal{U}^2}{\left[1 + \frac{1}{6}\Lambda(\eta\bar{\eta} - \mathcal{U}\mathcal{V})\right]^2} \\ & + \frac{2J(\eta, \bar{\eta}, \mathcal{U}) d\eta d\mathcal{U} + 2\bar{J}(\eta, \bar{\eta}, \mathcal{U}) d\bar{\eta} d\mathcal{U}}{\left[1 + \frac{1}{6}\Lambda(\eta\bar{\eta} - \mathcal{U}\mathcal{V})\right]^2}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Tvar metriky s mimodiagonálními členy odpovídající gravitační vlně byl uvažován už v Brinkmannově studii [18] Einsteinových prostoročasů svázaných konformními transformacemi.

Obvyklým postupem je odstranění členů s funkcí J vhodnou souřadnicovou transformací (Brinkmannova forma metriky *pp*-vln [2] se také běžně uvádí už bez mimodiagonálních členů), to ale vede k odstranění možného rotačního charakteru zdroje gravitační vlny, taková transformace pak není globální a dochází ke změně topologických vlastností celého prostoročasu. Rotující charakter zdrojů byl zkoumán Bonnorem [19] a nezávisle objeven Frolovem a Fursaeve v [20] a [21]. Přehled a podrobnější fyzikální analýzy je možné najít v [22]. V této kapitole budeme studovat a vizualizovat vliv nedagonálních prvků metriky.

3.1 Zobecnění impulzních vln na prostoročasy s gyratonovými členy

Konstrukce neexpandujících gracitačních vln s mimodagonálními gyratonovými členy je obdobná konstrukci prostoročasů bez gyratonů z minulé kapitoly, popíšeme ji formalismem spojitých souřadnic použitým v [23], kde jsou také odvozeny refrakční rovnice pro pohyb testovacích částic, pomocí kterých budeme vizualizovat geodetický pohyb procházející impulzní vlnoplochou.

Penroseova "cut and paste" konstrukce vede i v případě gyratonových prostoročasů na Penroseovy lepící podmínky ve tvaru (2.1), začneme tedy rovnou zobecněním spojitého tvaru metriky z předchozí kapitoly.

3.1.1 Zobecnění spojitého tvaru metriky

Tvar spojité metriky pro gyratonové neexpandující impulzní vlny obdržíme zobecněním transformace (2.8), do tvaru který nalezli Podolský, Švarc, Säman a Steinbauer v [23]

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= U \\ \mathcal{V} &= V + \Theta H + U_+ H_{,Z} H_{,\bar{Z}} + W \\ \eta &= (Z + U_+ H_{,\bar{Z}}) \exp(iF), \end{aligned} \quad (3.2)$$

kde opět $H = H(Z, \bar{Z})$, zároveň funkce $W = W(Z, \bar{Z}, U)$ a $F = F(Z, \bar{Z}, U)$ jsou reálné a splňují

$$\begin{aligned} F_{,U} &= \frac{i\bar{J}}{Z + U_+ H_{,\bar{Z}}} \exp(-iF), \\ W_{,U} &= -J\bar{J}, \\ W &= 0 \text{ pro } U \leq 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Zavedením

$$\zeta \equiv Z + U_+ H_{,\bar{Z}} \tag{3.4}$$

a prostorového diferenciálu \underline{d} tak, že

$$\begin{aligned} \underline{d}\zeta &\equiv dZ + U_+(H_{,\bar{Z}}Z dZ + H_{,\bar{Z}}\bar{Z} d\bar{Z}), \\ \underline{d}H &\equiv H_{,Z}dZ + H_{,\bar{Z}}d\bar{Z}, \\ \underline{d}F &\equiv F_{,Z}dZ + F_{,\bar{Z}}d\bar{Z}, \\ \underline{d}W &\equiv W_{,Z}dZ + W_{,\bar{Z}}d\bar{Z}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

dosazením (3.2) do (3.1) a využitím vztahů (3.3), (3.5) a multiplikativních pravidel z nelineární teorie distribucí,

$$\Theta^2 = \Theta, \quad \Theta U_+ = U_+, \tag{3.6}$$

dostaneme metriku ve spojitém tvaru

$$ds^2 = \frac{2|\underline{d}\zeta + i\zeta\underline{d}F|^2 + 2\left[i\Theta(\zeta H_{,Z} - \bar{\zeta}H_{,\bar{Z}})\underline{d}F - \underline{d}W\right]dU - 2dUdV}{\left[1 + \frac{1}{6}\Lambda(Z\bar{Z} - UV - U_+G)\right]^2}, \tag{3.7}$$

kde byla zavedena funkce

$$G(Z, \bar{Z}, U) = H - ZH_{,Z} - \bar{Z}H_{,\bar{Z}} + W. \tag{3.8}$$

Oproti minulé kapitole se ve funkci G vyskytuje člen W . Aplikací transformace (3.2) na konformní faktor $\Omega = 1 + \frac{1}{6}\Lambda(\eta\bar{\eta} - \mathcal{U}\mathcal{V})$ dostáváme po použití pravidel násobení distribucí v nelineární teorii (3.6) tvar

$$\Omega = 1 + \frac{1}{6}\Lambda(Z\bar{Z} - UV - U_+(H - ZH_{,Z}\bar{Z}H_{,\bar{Z}}) - UW). \tag{3.9}$$

V případě že $W = 0$ pro $U \leq 0$, platí $UW = U_+W$. To je ale splněno v (3.3) a tvar funkce G je tedy ospravedlněn.

Volba $J = 0$ dovoluje řešení $F = W = 0$, přičemž se metrika (3.7) redukuje na (2.7). Metrika (3.7) je spojitá v případě, že $\underline{d}F$ a $\underline{d}W$ jsou funkce spojité v U a $\underline{d}F$ jde v $U = 0$ k nule. V tomto případě je metrika lokálně lipschitzovská a lze využít formalismu Filippovových řešení, jako v předchozí kapitole.

3.1.2 Frolovův–Fursaevův gyration

Dále budeme uvažovat konkrétní realizaci gyrationového prostoročasu, tedy metriku (3.1) s volbou

$$J(\eta, \mathcal{U}) = \frac{\chi}{2i\eta}\Theta(\mathcal{U}), \quad \Lambda = 0, \tag{3.10}$$

kde χ je konstantní. Rovnice (3.3) lze zintegrovat do tvaru

$$\begin{aligned} F &= \frac{\chi}{2(ZH_{,Z} - \bar{Z}H_{,\bar{Z}})} \log \frac{Z\bar{Z} + U_+\bar{Z}H_{,\bar{Z}}}{Z\bar{Z} + U_+ZH_{,Z}}, \\ W &= \frac{\chi}{2}F, \end{aligned} \quad (3.11)$$

kde přirozeně uvažujeme hlavní větev logaritmu, aby se zachovala rovnost $\eta = Z$ pro $U \leq 0$.

V případě že $ZH_{,Z} - \bar{Z}H_{,\bar{Z}} = 0 \iff \log \frac{Z\bar{Z} + U_+\bar{Z}H_{,\bar{Z}}}{Z\bar{Z} + U_+ZH_{,Z}} = 0$ není tvar (3.11) platný. Diferenciální operátor působící na funkci H v levé části ekvivalence lze (díky $Z = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho \exp(i\phi)$) zapsat jako $Z\partial_Z - \bar{Z}\partial_{\bar{Z}} = -i\partial_\phi$, jedná se tedy o generátor rotace kolem osy $Z = 0$. Tento případ tedy nastává ve všech axiálně symetrických prostoročasech, kde funkce H závisí pouze na $\rho^2 = 2Z\bar{Z}$, včetně Aichelburg–Sexlova řešení $H = b_0 \log(2\eta\bar{\eta}) = b_0 \log(2Z\bar{Z})$, kterým se budeme dále zabývat. Funkce F a W lze v takovém případě volit ve tvaru

$$\begin{aligned} F &= -\frac{\chi}{2} \frac{U_+}{Z\bar{Z} + b_0U_+}, \\ W &= \frac{\chi}{2}F, \end{aligned} \quad (3.12)$$

spojitá metrika nabývá tvaru z třídy Frolovových–Fursaevových gyratonů [21]

$$\begin{aligned} ds^2 = & 2 \left| dZ + U_+ \left(i \frac{\chi}{2} \frac{\bar{Z}dZ + Zd\bar{Z}}{\bar{Z}(Z\bar{Z} + b_0U_+)} - b_0 \frac{d\bar{Z}}{\bar{Z}^2} \right) \right|^2 \\ & - \frac{\chi^2}{2} U_+ \frac{\bar{Z}dZdU + Zd\bar{Z}dU}{(Z\bar{Z} + b_0U_+)^2} - 2dUdV \end{aligned} \quad (3.13)$$

reprezentujících zobecnění originální Aichelburg–Sexlovy metriky [15] na impulzní vlnu generovanou částicí s nenulovým vnitřním momentem hybnosti, přičemž $\chi\Theta(\mathcal{U})$ odpovídá hustotě momentu hybnosti gyratonu [22]. Při absenci gyratonu ($\chi = 0$) se metrika redukuje na standardní Aichelburg–Sexlovo řešení.

Díky tomu, že pracujeme v konformně plochých souřadnicích, nejsou výše uvedené závěry závislé na kosmologické konstantě. Za funkci H pak můžeme uvažovat například Hottovo–Tanakovo řešení (2.36). Pro toto řešení nebudeme explcitně odvozovat spojity tvar metriky, později ale využijeme formalismus refrakčních rovnic pro vykreslení geodetického pohybu gyratonového zdroje na (anti-)de Sitterově prostoročasu s výše uvedenou funkcí J a funkcí H odpovídající právě Hottově–Tanakově řešení. Zmíníme ale, že ekvivalence znemožňující integraci funkcí F a W do tvaru (3.11) neplatí ani v tomto případě, jedná se také o axiálně symetrické řešení.

3.2 Refrakční rovnice pro geodetiky v impulzních gyratonových prostoročasech

Stejně jako v případě bez gyratonových členů v předchozí kapitole, i zde k vizualizaci geodetik využijeme refrakčních rovnic, které byly pro impulzní neexpandující gyratonové prostoročasy s funkcemi F a W ve tvaru (3.11), resp. (3.12),

odvozeny z limity spojitéh souřadnic (3.7) v $\mathcal{U} = 0$ v článku [23]. Napojovací podmínky prostorových poloh jsou v tomto případě ve tvaru

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_i^+ &= \mathcal{U}_i^-, \\ \mathcal{V}_i^+ &= \mathcal{V}_i^- + H_i, \\ \eta_i^+ &= \eta_i^-, \end{aligned}\tag{3.14}$$

což přesně odpovídá Penroseovým napojovacím podmínkám (2.1), jejichž tvar nezávisí na přítomnosti gyratonových členů. Co se bude lišit od výsledků popsaných v minulé kapitole jsou refrakční rovnice pro složky rychlosti,

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{U}}_i^+ &= \dot{\mathcal{U}}_i^-, \\ \dot{\mathcal{V}}_i^+ &= \dot{\mathcal{V}}_i^- + H_{i,Z}\dot{\eta}_i^- + H_{i,\bar{Z}}\dot{\eta}_i^- + \left(H_{i,Z}H_{i,\bar{Z}} - \frac{\chi^2}{4\eta_i^-\bar{\eta}_i^-}\right)\dot{\mathcal{U}}_i^- \\ \dot{\eta}_i^+ &= \dot{\eta}_i^- + \left(H_{i,\bar{Z}} - \frac{i\chi}{2\bar{\eta}_i^-}\right)\dot{\mathcal{U}}_i^-, \end{aligned}\tag{3.15}$$

kde gyratonové členy s χ přispívají ke skoku ve složkách $\dot{\mathcal{V}}_i$ a $\dot{\eta}_i$ členy

$$\Delta\dot{\mathcal{V}}_i = -\frac{\chi^2}{4\eta_i^-\bar{\eta}_i^-}\dot{\mathcal{U}}_i^-, \quad \Delta\dot{\eta}_i = -\frac{i\chi}{2\bar{\eta}_i^-}\dot{\mathcal{U}}_i^-. \tag{3.16}$$

Tyto skoky navíc se díky C^1 -regularitě geodetik a spojitosti metriky kompenzují, neboť normalizace čtyřrychlosti musí být zachována, a platí

$$\Delta\dot{\eta}_i\Delta\dot{\eta}_i = -\dot{\mathcal{U}}_i\Delta\dot{\mathcal{V}}_i. \tag{3.17}$$

Tyto skoky pro $\eta_i^- \rightarrow 0$ rostou nad všechny meze, toto chování ale očekáváme – v $\eta_i = 0$ se nachází bodový zdroj. Pro $\chi \rightarrow 0$ se tyto rovnice redukují na rovnice (2.17) z minulé kapitoly.

Obdobně jako v předchozí kapitole, refrakční rovnice (3.15) můžeme také zapsat v reálných polárních souřadnicích jako

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{V}}_i^+ &= \dot{\mathcal{V}}_i^- + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{i\varphi_i^-}H_{i,Z} + e^{-i\varphi_i^-}H_{i,\bar{Z}}\right)\dot{\rho}_i^- + \frac{i}{\sqrt{2}}\left(e^{i\varphi_i^-}H_{i,Z} - e^{-i\varphi_i^-}H_{i,\bar{Z}}\right)\rho_i^-\dot{\varphi}_i^- \\ &\quad + \left(H_{i,Z}H_{i,\bar{Z}} - \frac{\chi^2}{2(\rho_i^-)^2}\right)\dot{\mathcal{U}}_i^-, \\ \dot{\rho}_i^+ &= \dot{\rho}_i^- + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\varphi_i^-}H_{i,\bar{Z}} + e^{i\varphi_i^-}H_{i,Z}\right), \\ \dot{\varphi}_i^+ &= \dot{\varphi}_i^- + \left[\frac{i}{\sqrt{2}\rho_i^-}\left(e^{i\varphi_i^-}H_{i,Z} - e^{-i\varphi_i^-}H_{i,\bar{Z}}\right) - \frac{\chi}{(\rho_i^-)^2}\right]\dot{\mathcal{U}}_i^-. \end{aligned}\tag{3.18}$$

Tento tvar potvrzuje interpretaci gyratonových členů jako interního momentu hybnosti částice generující impulz – přítomnost gyraonických členů nemá vliv na radiální složku $\dot{\rho}$, přispívá ale k další změně v axiální složce $\dot{\varphi}_i$ členem $\frac{\chi}{(\rho_i^-)^2}$.

3.3 Vizualizace geodetik v neexpandujících impulzních gyratonových prostoročasech

V této části budeme explicitně analyzovat geodetický pohyb v prostoročasech s gyratonovými zdroji, generujícími impulzní vlny.

3.3.1 Geodetický pohyb ve Frolovově–Fursaevově gyrationovém řešení

Stejně jako v minulé kapitole využijeme refrakční rovnice (3.14), (3.15) k vizualizaci interakce impulzního Frolova–Fursaevova gyrationu s geodetikami na prostoročasech tvořících pozadí impulzní vlny. V případě gyrationu je pozadí odlišné, pro $\Lambda = 0$ je prostoročas \mathcal{M}^- (před impulzní vlnou) Minkowského prostoročas, za impulzní vlnou je ale pozadí \mathcal{M}^+ popsáno metrikou

$$ds^2 = -2d\mathcal{U} d\mathcal{V} + 2d\eta d\bar{\eta} + i\chi d\mathcal{U} \left(\frac{d\bar{\eta}}{\bar{\eta}} - \frac{d\eta}{\eta} \right), \quad (3.19)$$

jediné nenulové Christoffelovy symboly jsou

$$\Gamma_{\eta\eta}^{\mathcal{V}} = -\frac{i\chi}{2\eta^2} \quad \Gamma_{\bar{\eta}\bar{\eta}}^{\mathcal{V}} = \frac{i\chi}{2\bar{\eta}^2}. \quad (3.20)$$

Rotující charakter zdroje je také dobře vidět z metriky za impulzní vlnou při parametrizaci reálnými souřadnicemi (x, y) (1.4), ve kterých metrika nabývá tvaru

$$ds^2 = -2d\mathcal{U} d\mathcal{V} + dx^2 + dy^2 + \frac{2\chi d\mathcal{U}(x dy - y dx)}{x^2 + y^2}. \quad (3.21)$$

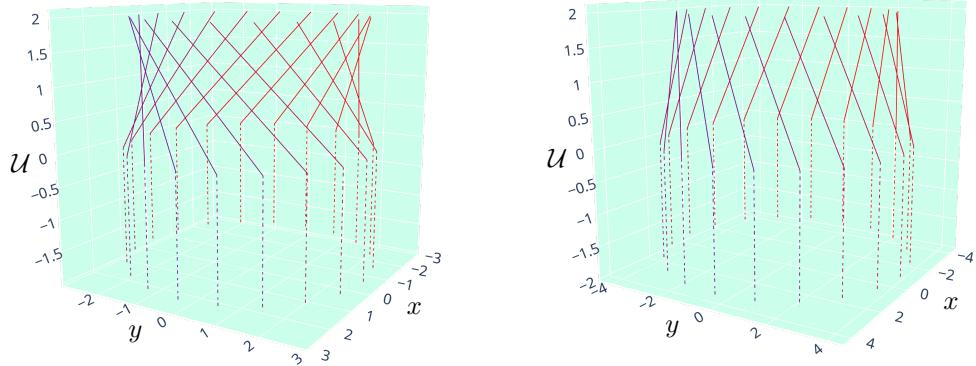
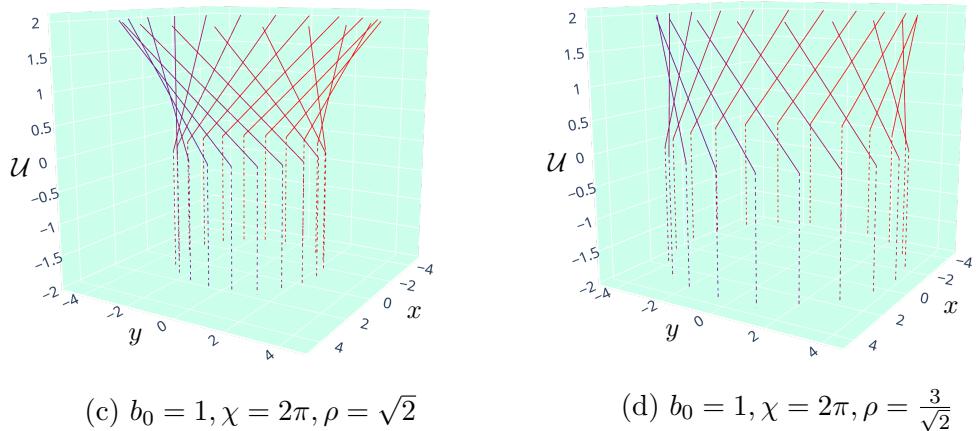
Transformací do standardních polárních souřadnic $x = r \sin \varphi, y = r \cos \varphi$ přechází metrika (3.21) do tvaru

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 - 2d\mathcal{U}(d\mathcal{V} + \chi d\varphi). \quad (3.22)$$

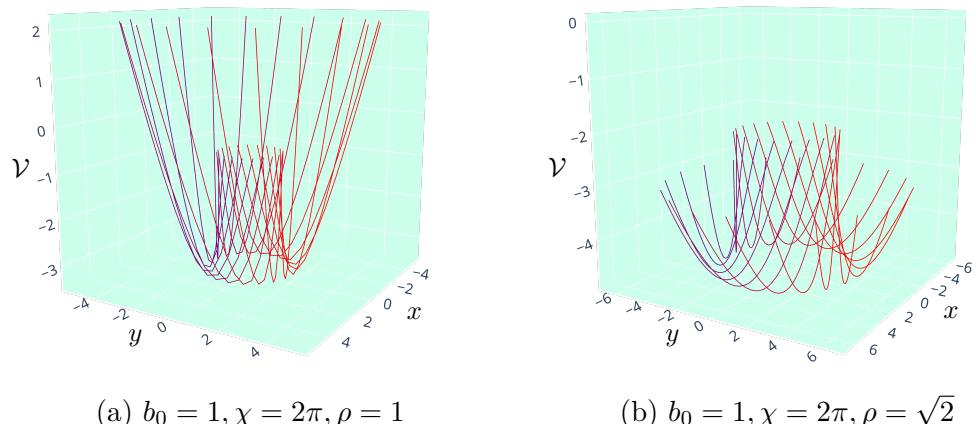
Prostoročas za vlnou se tak netriviálně liší od maximálně symetrického pozadí (nejedná se ani o statické řešení) a zvolený přístup numerické integrace rovnice geodetiky zde dostává plný význam.

Na následujících vizualizacích je pro různé hodnoty parametru χ znázorněno chování nejprve nulových a následně časupodobných geodetik procházejících impulzní plochou v axiálně symetrickém uspořádání kolem gyrationového zdroje na nadploše $\mathcal{U} = 0, \mathcal{V} = 0$ v různé vzdálenosti ρ od osy symetrie.

Na obrázku 3.1 jsou pro hodnoty $\chi = \pi, 2\pi$ vizualizovány nulové geodetiky procházející nadplochou $\mathcal{U} = 0$ s čtyřrychlostí $\dot{\mathcal{U}} = 1, \dot{\mathcal{V}} = 0, \dot{\eta} = 0$, oproti negyrationovému řešení, vizualizovanému v předchozí kapitole, dochází nejen ke strhnutí geodetik k ose symetrie, ale i k vychýlení vlivem rotačního charakteru zdroje. V této vizualizaci se přítomnost gyrationu projevuje pouze refrakcí na impulzní nadploše – jediné nenulové Christoffelovy symboly vstupují do geodetické rovnice pro \mathcal{V} . S rostoucím parametrem χ je strhávání silnější.

(a) $b_0 = 1, \chi = \pi, \rho = \sqrt{2}$ (b) $b_0 = 1, \chi = \pi, \rho = \frac{3}{\sqrt{2}}$ (c) $b_0 = 1, \chi = 2\pi, \rho = \sqrt{2}$ (d) $b_0 = 1, \chi = 2\pi, \rho = \frac{3}{\sqrt{2}}$

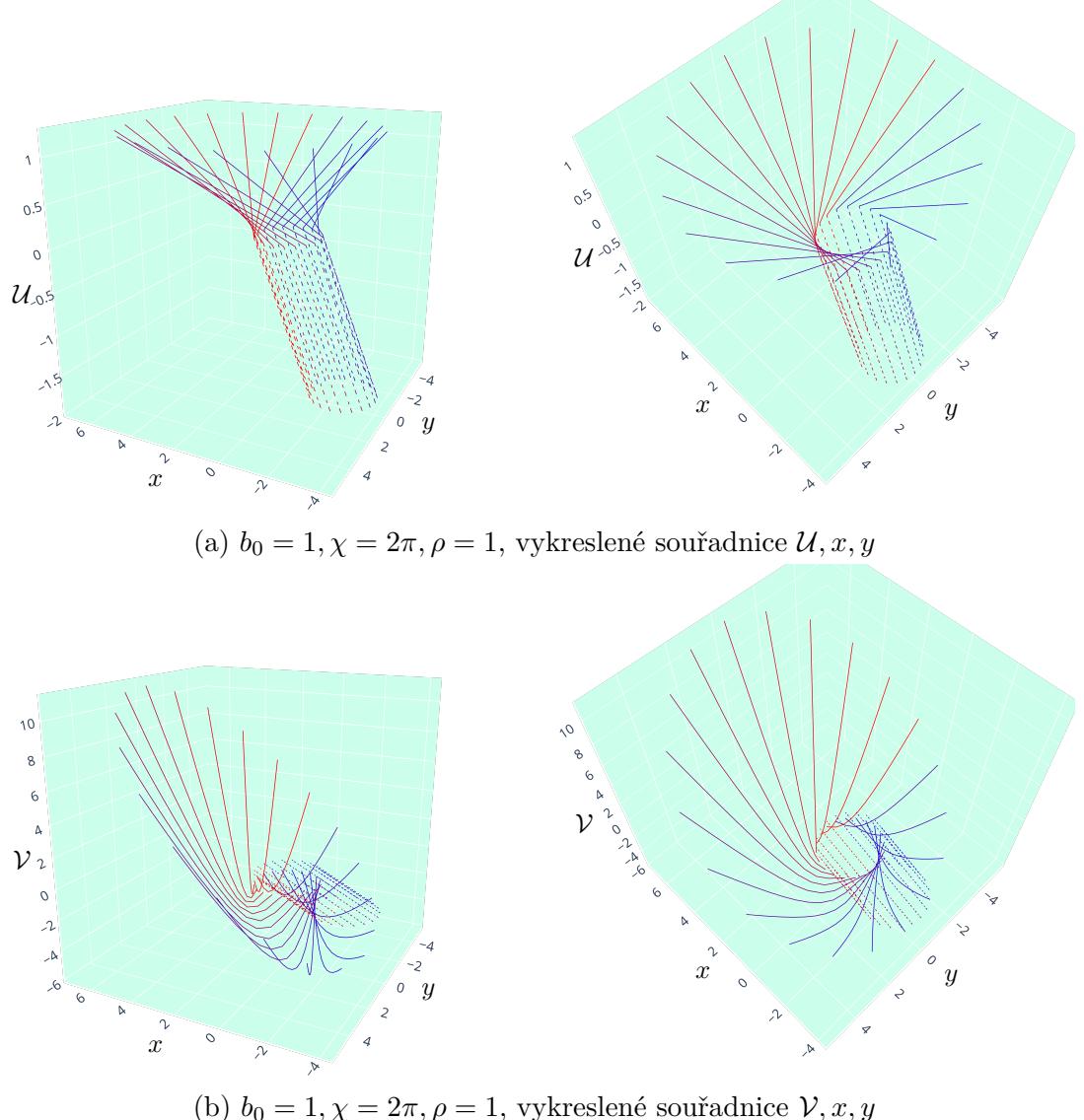
Obrázek 3.1: Nulové geodetiky procházející impulzní plochou Frolova–Fursaevova gyrationu, vykreslené souřadnice \mathcal{U}, x, y

(a) $b_0 = 1, \chi = 2\pi, \rho = 1$ (b) $b_0 = 1, \chi = 2\pi, \rho = \sqrt{2}$

Obrázek 3.2: Nulové geodetiky po průchodu impulzní plochou Frolova–Fursaevova gyrationu, vykreslené souřadnice \mathcal{V}, x, y

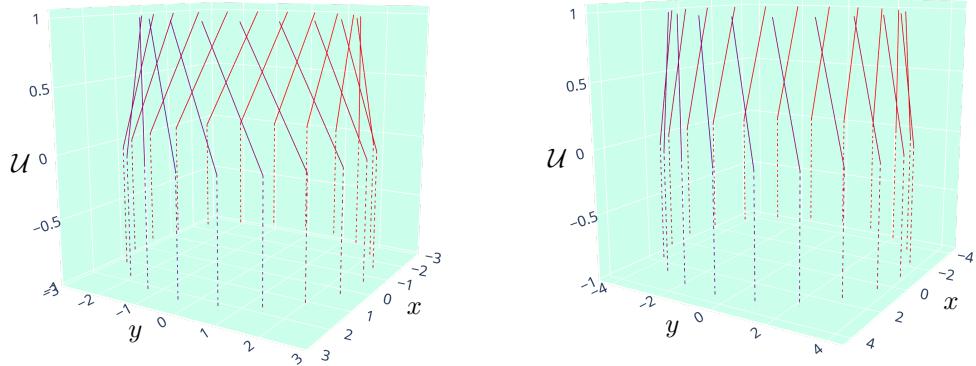
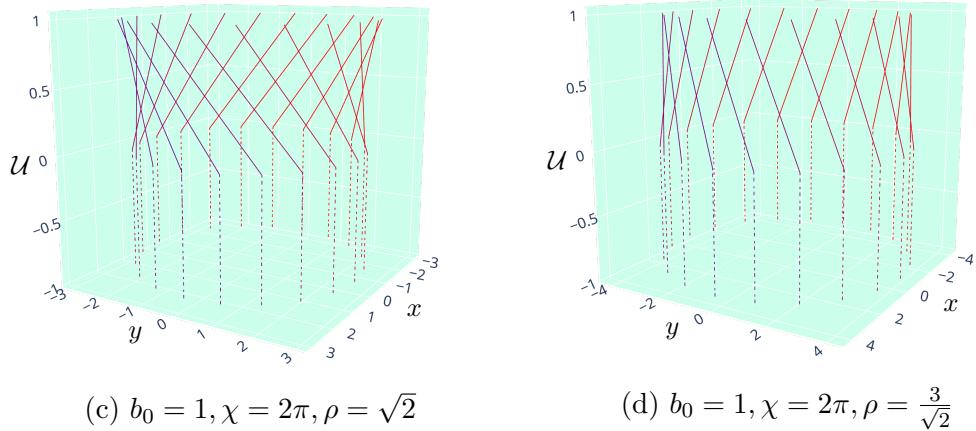
Vliv gyrationového charakteru prostoročasu za impulzní plochou je vidět při vizualizaci souřadnice \mathcal{V} (obrázek 3.2), při refrakci ve vizualizovaném případě kladná složka $\dot{\mathcal{V}}$ přechází v zápornou, vlivem gyrationu je ale vynucováno kladné zrychlení a geodetika se ve směru \mathcal{V} obrací.

Na obrázku 3.3 pak vidíme nulové geodetiky procházející impulzní nadplochou s čtyřrychlostí $\dot{\mathcal{U}} = 1, \dot{\mathcal{V}} = 1, \dot{\eta} = 1$, před průchodem $\mathcal{U} = 0$ se v Minkowského části prostoročasu jednotlivé geodetiky pohybují na nadploše t, x .

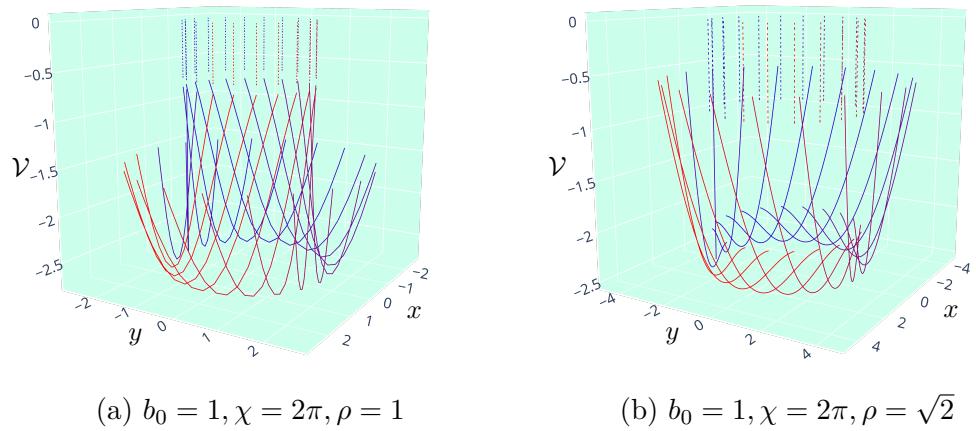


Obrázek 3.3: Nulové geodetiky procházející impulzní plochou Frolova–Fursaevova gyrationu, pro lepší zřetelnost vykresleno z různých úhlů pohledu.

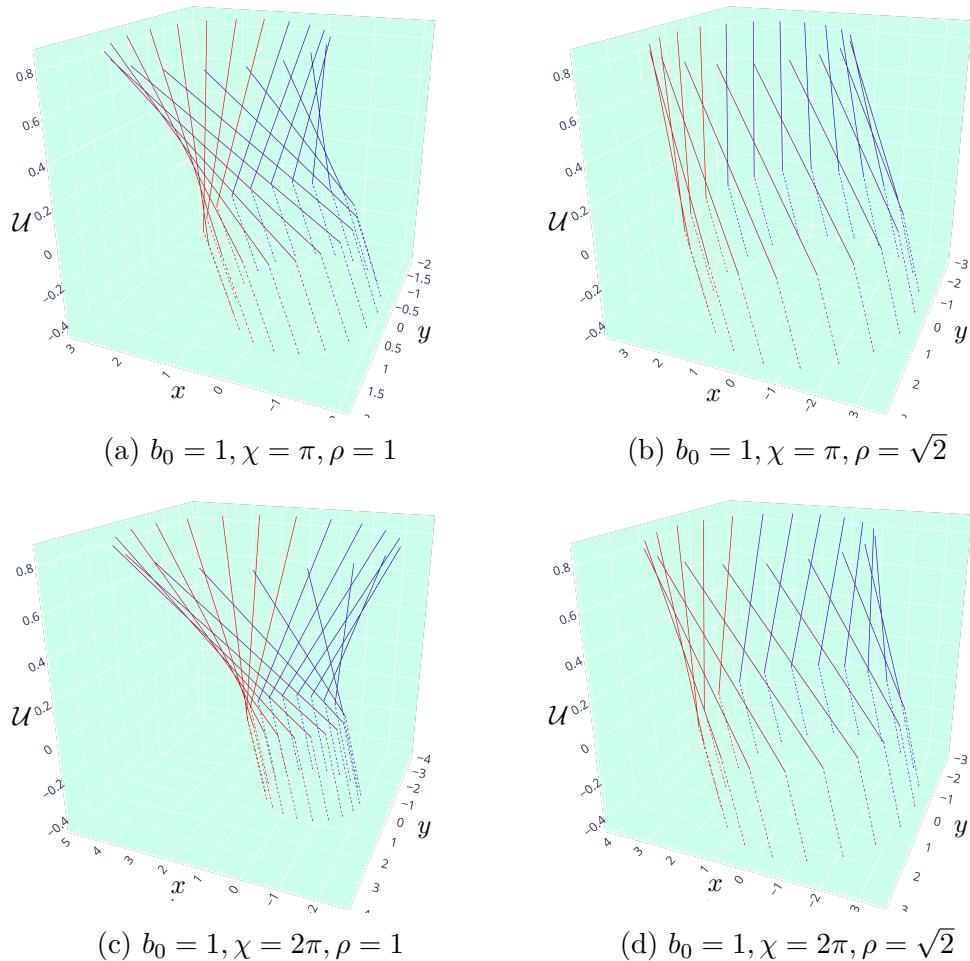
Časupodobné geodetiky byly vyzualizovány v několika uspořádáních, nejprve v případě kdy impulzní vlnoplochu protínají s tečným vektorem normovaným na jednotku ve směru $\dot{\mathcal{U}} = \frac{1}{2}, \dot{\mathcal{V}} = 1, \dot{\eta} = 0$, tato vizualizace je zobrazena na obrázcích 3.4 a 3.5 a obdobně jako u nulových geodetik pozorujeme vliv gyrationu reprezentovaný strháváním geodetiky ve smyslu rotace.

(a) $b_0 = 1, \chi = \pi, \rho = \sqrt{2}$ (b) $b_0 = 1, \chi = \pi, \rho = \frac{3}{\sqrt{2}}$ (c) $b_0 = 1, \chi = 2\pi, \rho = \sqrt{2}$ (d) $b_0 = 1, \chi = 2\pi, \rho = \frac{3}{\sqrt{2}}$

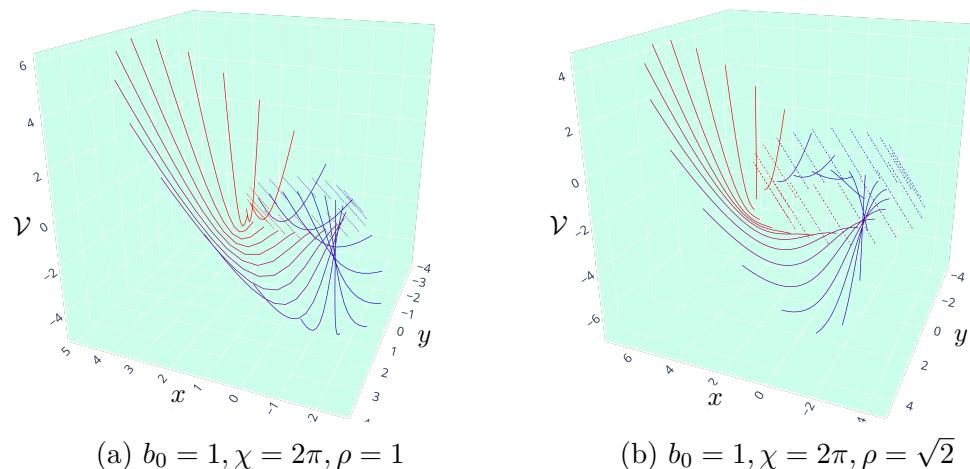
Obrázek 3.4: Časupodobné geodetiky procházející impulzní plochou gyratonu.

(a) $b_0 = 1, \chi = 2\pi, \rho = 1$ (b) $b_0 = 1, \chi = 2\pi, \rho = \sqrt{2}$ Obrázek 3.5: Časupodobné geodetiky procházející impulzní plochou gyratonu. Částice před impulzem letí ve směru rostoucí souřadnice \mathcal{V} , po impulzu jsou refraktovány zpět a složka čtyřrychlosti $\dot{\mathcal{V}}$ vlivem refrakce přechází do záporných hodnot.

Ve vizualizaci na obrázcích 3.6 a 3.7 protínají geodetiky impulzní plochu s jednotkovým tečným vektorem ve směru $\dot{\mathcal{U}} = 0,5$, $\dot{\mathcal{V}} = 1$, $\dot{\eta} = 0,5$.



Obrázek 3.6: Časupodobné geodetiky procházející impulzní plochou gyratonu.

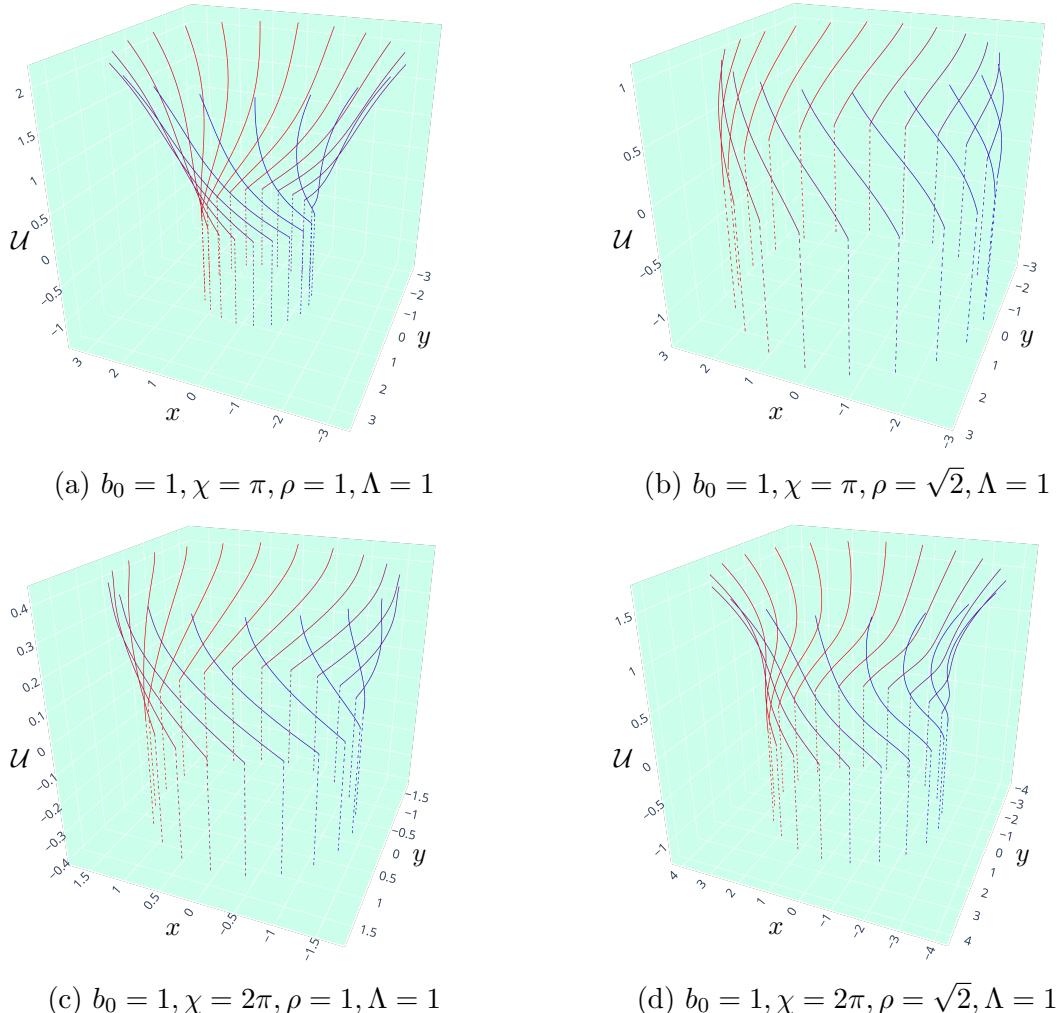


Obrázek 3.7: Časupodobné geodetiky procházející impulzní plochou gyratonu, vykreslené souřadnice \mathcal{V}, x, y .

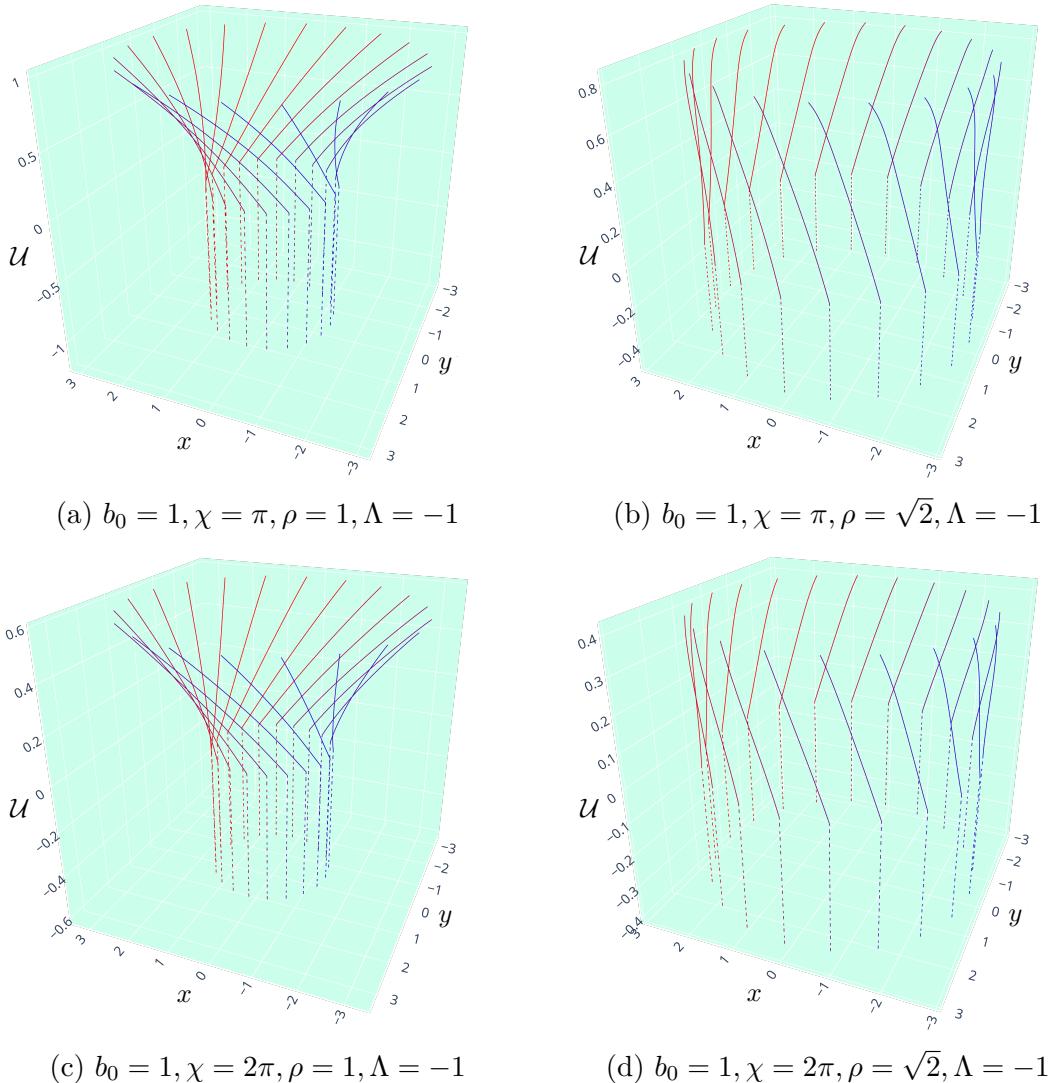
3.3.2 Geodetický pohyb v přítomnosti gyrationu s profilem odpovídajícím Hottově–Tanakově řešení

Dále byla vizualizovány geodetiky v explicitní realizaci gyrationového prostoročasu s parametrem $J = \frac{\chi}{2i\eta}\Theta(\mathcal{U})$, $\Lambda \neq 0$, s profilovou funkcí H odpovídající Hottově–Tanakově řešení (2.36). Stejně jako v plochém případě je gyrationový efekt prostoročasu za vlnou zřetelný už na skoku v úhlové části čtyřrychlosti.

Na obrázcích 3.8 a 3.9 je vizualizace nulových geodetik na de Sitterově a anti-de Sitterově pozadí v axiálně symetrickém uspořádání. Geodetiky procházejí, stejně jako v případě $\Lambda = 0$, v různých vzdálenostech od osy symetrie s tečným vektorem při průchodu $\dot{\mathcal{U}} = 1, \dot{\mathcal{V}} = 0, \dot{\eta} = 0$. K efektu způsobenému impulzní vlnou, který strhne geodetiky směrem k (respektive směrem od, pro opačné znaménko parametru b_0 v případě Hottova-Tanakova řešení) ose symetrie, přidává efekt gyrationu, který geodetiky strhne v rotačním smyslu.

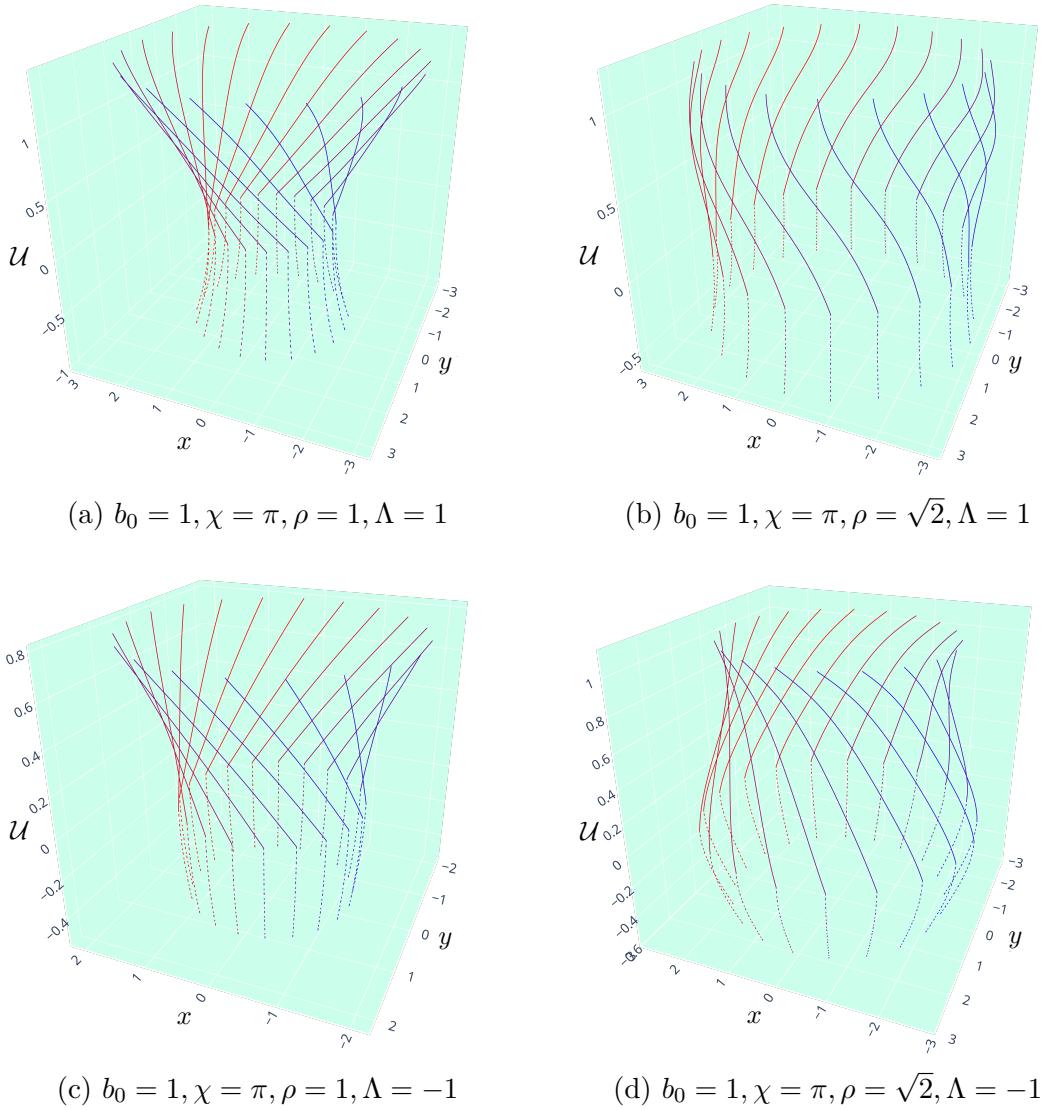


Obrázek 3.8: Nulové geodetiky procházející impulzní plochou "gyrationového Hottova-Tanakova řešení" s čtyřrychlostí $\dot{\mathcal{U}} = 1, \dot{\mathcal{V}} = 0, \dot{\eta} = 0$. Případ de Sitterova pozadí.

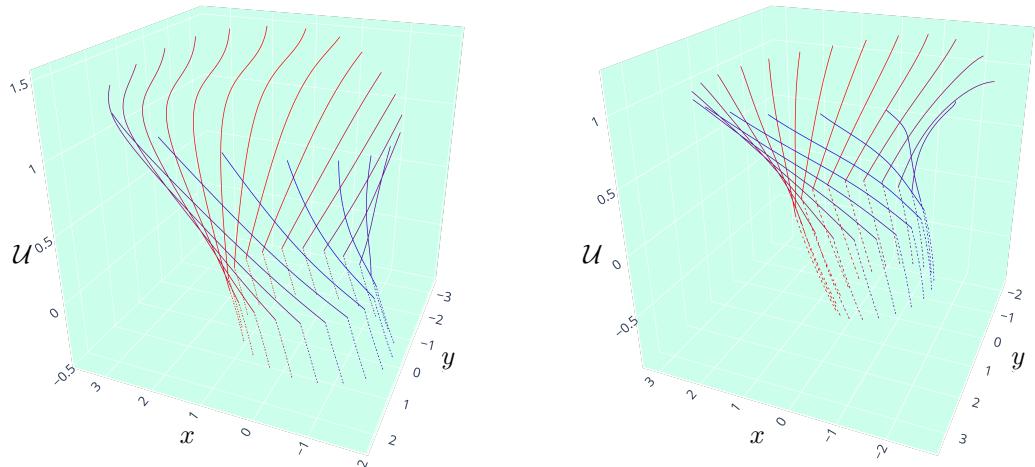


Obrázek 3.9: Nulové geodetiky procházející impulzní plochou "gyratonového Hottova–Tanakova řešení" pro anti-de Sitterovo pozadí.

Jako poslední byly vizualizovány časupodobné geodetiky procházející impulzní nadplochou s čtyřrychlostí (normovanou na -1) ve směru $\dot{\mathcal{U}} = 0,5$, $\dot{\mathcal{V}} = 1$, $\dot{\eta} = 0$ (obrázek 3.10) a dále, pro úplnost, časupodobné geodetiky procházející $\mathcal{U} = 0$ s (opět normovanou) čtyřrychlostí ve směru $\dot{\mathcal{U}} = 0,5$, $\dot{\mathcal{V}} = 1$, $\dot{\eta} = 0,3$ (obrázek 3.11).



Obrázek 3.10: Časupodobné geodetiky procházející impulzní plochou "gyratonomo-vého Hottova–Tanakova řešení" ve směru $\dot{\mathcal{U}} = 0,5$, $\dot{\mathcal{V}} = 1$, $\dot{\eta} = 0$ pro (anti-)de Sitterovo pozadí.



(a) $b_0 = 1, \chi = \pi, \rho = 1, \Lambda = 1$

(b) $b_0 = 1, \chi = \pi, \rho = 1, \Lambda = -1$

Obrázek 3.11: Časupodobné geodetiky procházející impulzní plochou "gyratono-vého Hottova–Tanakova řešení" ve směru $\dot{\mathcal{U}} = 0.5, \dot{\mathcal{V}} = 1, \dot{\eta} = 0.3$ pro (anti-)de Sitterovo pozadí.

Závěr

V této práci jsme rekapitulovali metody konstrukce prostoročasů s impulzními gravitačními vlnami,

Seznam použité literatury

- [1] Jiří Bičák. Selected solutions of Einstein's field equations: Their role in general relativity and astrophysics. *Lect. Notes Phys.*, 540:1–126, 2000.
- [2] Jerry B. Griffiths and Jiří Podolský. *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2009.
- [3] Roger Penrose. *The geometry of impulsive gravitational waves*, pages 101–115. 1972.
- [4] Jiří Podolský, Clemens Sämann, Roland Steinbauer, and Robert Švarc. The global existence, uniqueness and C^1 -regularity of geodesics in nonexpanding impulsive gravitational waves. *Class. Quant. Grav.*, 32(2):025003, 2015.
- [5] Jiří Podolský and Jerry B. Griffiths. Impulsive gravitational waves generated by null particles in de Sitter and anti-de Sitter backgrounds. *Phys. Rev. D*, 56:4756–4767, 1997.
- [6] Penrose Roger. Twistor quantisation and curved space-time. *Int J Theor Phys*, 1:61–99, 1968.
- [7] Jiří Podolský and Karel Veselý. New examples of sandwich gravitational waves and their impulsive limit. *Czechoslovak Journal of Physics*, 48(8):871–878, 1998.
- [8] Jiří Podolský. Non-expanding impulsive gravitational waves. *Classical and Quantum Gravity*, 15(10):3229–3239, oct 1998.
- [9] Michael Grosser, Michael Kunzinger, and Michael Oberguggenberger. *Steinbauer R : Geometric Theory of Generalized Functions with Applications to General Relativity*. 01 2001.
- [10] Ronald Steinbauer. Geodesics and geodesic deviation for impulsive gravitational waves. *Journal of Mathematical Physics*, 39(4):2201–2212, apr 1998.
- [11] Michael Kunzinger and Ronald Steinbauer. A rigorous solution concept for geodesic and geodesic deviation equations in impulsive gravitational waves. *Journal of Mathematical Physics*, 40(3):1479–1489, mar 1999.
- [12] Jiří Podolský and Marcello Ortaggio. Symmetries and geodesics in (anti-)de sitter spacetimes with non-expanding impulsive waves. *Classical and Quantum Gravity*, 18(14):2689–2706, jun 2001.
- [13] Alexej. F. Filippov. *Differential equations with discontinuous righthand sides*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Netherlands Boston, 1988.
- [14] Jerry B. Griffiths and Jiří Podolský. Null multipole particles as sources of pp-waves. *Physics Letters A*, 236(1-2):8–10, dec 1997.
- [15] Peter C. Aichelburg and Roman U. Sexl. On the gravitational field of a massless particle. *General Relativity and Gravitation*, 2(4):303–312, 1971.

- [16] Jiří Podolský and Jerry B. Griffiths. Impulsive waves in de sitter and anti-de sitter space-times generated by null particles with an arbitrary multipole structure. 1997.
- [17] M Hotta and M Tanaka. Shock-wave geometry with nonvanishing cosmological constant. *Classical and Quantum Gravity*, 10(2):307–314, feb 1993.
- [18] W. Hans Brinkmann. Einstein spaces which are mapped conformally on each other. *Mathematische Annalen*, 94(1):119–145, dec 1925.
- [19] W. B. Bonnor. Spinning null fluid in general relativity. *International Journal of Theoretical Physics*, 3(4):257–266, August 1970.
- [20] Valeri P. Frolov, Werner Israel, and Andrei Zelnikov. Gravitational field of relativistic gyratons. *Phys. Rev. D*, 72:084031, Oct 2005.
- [21] Valeri P. Frolov and Dmitri V. Fursaev. Gravitational field of a spinning radiation beam pulse in higher dimensions. *Physical Review D*, 71(10), may 2005.
- [22] Jiří Podolský, Ronald Steinbauer, and Robert Švarc. Gyratonic pp-waves and their impulsive limit. *Physical Review D*, 90(4), aug 2014.
- [23] Jiří Podolský, Robert Švarc, Ronald Steinbauer, and Clemens Sämann. Penrose junction conditions extended: Impulsive waves with gyratons. *Physical Review D*, 96(6), 2017.
- [24] Jiří Podolský and Jerry B. Griffiths. Expanding impulsive gravitational waves. *Classical and Quantum Gravity*, 16(9):2937–2946, aug 1999.
- [25] Jiří Podolský, Clemens Sämann, Roland Steinbauer, and Robert Švarc. The global uniqueness and C^1 -regularity of geodesics in expanding impulsive gravitational waves. *Class. Quant. Grav.*, 33(19):195010, 2016.
- [26] Roger Penrose and Wolfgang Rindler. *Spinors and Space-Time*, volume 1 of *Cambridge Monographs on Mathematical Physics*. Cambridge University Press, 1984.
- [27] Peter O’Donnell. *Introduction to 2-Spinors in General Relativity*. WORLD SCIENTIFIC, 2003.
- [28] Leopold Infeld. Die verallgemeinerte Spinorenrechnung und die Diracschen Gleichungen. *Phys. Z.*, 33:475–483, 1932.
- [29] Marián Fecko. *Differential Geometry and Lie Groups for Physicists*. Cambridge University Press, 2006.
- [30] Martin Scholtz. Impulsive waves - notes, 2019.
- [31] Yavuz Nutku and Roger Penrose. On impulsive gravitational waves. *Twistor Newsletter*, 34:9–12, May 1992.
- [32] Alikram N. Aliev and Yavuz Nutku. Impulsive spherical gravitational waves. *Classical and Quantum Gravity*, 18(5):891–906, February 2001.

A. Spinorový popis expandujících impulzních gravitačních vln

Expandující impulzní gravitační vlny jsou třída řešení Einsteinových rovnic odpovídající impulzní limitě Robinson–Trautmanovy třídy řešení typu N. S běžným popisem expandujících gravitačních vln se lze seznámit např. v [24] nebo [25], v této části se budeme zabývat popisem expandujících impulzních vln v řeči $SL(2, \mathbb{C})$ spinorů.

Spinorová pole jsou v obecné relativitě konstruována zejména pomocí tetrádového formalismu, který je úzce spojen s Lorentzovskou invariancí tečných prostorů jednotlivých bodů v prostoročase. V tomto formalismu vycházíme ze čtyř nulových vektorů – nulové tetrády $(l^a, n^a, m^a, \bar{m}^a)$, která je lokálně determinována *spin–bází* (o^A, ι^A) podle relací

$$l^\mu = o^A o^{A'}, \quad m^\mu = o^A \iota^{A'}, \quad \bar{m}^\mu = \iota^A o^{A'}, \quad n^\mu = \iota^A \iota^{A'}, \quad (\text{A.1})$$

kde velké písmeno v indexu označuje spinorový index. Pro spinorové objekty zavádíme dva prostory, jednomu z nich odpovídá nečárkováný index, druhému z nich čárkováné prostory. Operace komplexního sdružení mapuje spinory z nečárkovitého spin–prostoru na čárkováný a naopak.

Mezi spin–bázemi nečárkovitého a čárkovitého prostoru platí relace $\bar{o}^A = \bar{o}^{A'} = o^{A'}$, $\bar{\iota}^A = \bar{\iota}^{A'} = \iota^{A'}$ – u spinorů z komplexně sdruženého prostoru explicitně nepíšeme operaci komplexního sdružení, čárkováný index sám o sobě značí, že se jedná o objekt v daném indexu komplexně sdružený ke svému nečárkovitému protějšku.

Formalismem dvoukomponentových spinorů v obecné teorii relativity se blíže zabývají publikace [26], [27], případně původní práce Leopolda Infelda [28], který se dvoukomponentovými spinory v obecné relativitě zabýval jako jeden z prvních. Na spinory se také běžně nahlíží jako na prvky v lineárních reprezentacích Cliffordových algeber, v tomto smyslu se s nimi lze seznámit např. v [29].

A.1 Expandující impulzní gravitační vlny

Pro popis expandujících gravitačních vln vycházíme zejména z poznámek Scholtze [30], kde konstrukce prostoročasu následuje klasický článek Penrose a Nutku [31], ve kterém představují možnost popisu impulzních gravitačních vln v řeči spinorů, a článek Alieva, Nutku a Yavuze [32], ve kterém je řešení zobecněno na impulzivní limitu Robinon–Trautmanových řešení typu N. Druhý zmíněný článek dále pokračuje zobecněním na řešení se zrychlením, kde vychází z ploché limity C-metriky, ve kterém konstruují impulzní vlnu metodou cut and paste. V této části se budeme věnovat pouze tzv. nulovému případu, kdy je Robinson–Trautmanův parametr $k = 0$. Nejprve zavedeme Schwarzovu derivaci, která se ukáže být vhodná pro efektivní zápis spojité metriky expandujících impulzních vln, dále se budeme věnovat samotnému popisu – pomocí cut and paste metody vygenerujeme impulzní nadplochu a následně pomocí spinorového formalismu přejdeme ke spojité metrice.

A.1.1 Schwarzova derivace

Nejobecnější bijektivní transformací $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ je Möbiova transformace

$$\zeta \mapsto \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta}, \quad (\text{A.2})$$

která odpovídá projektivní grupě $PGL(2, \mathbb{C})$. Definujme Schwarzovu derivaci funkce $h(\zeta)$ jako

$$\{h; \zeta\} = -\frac{1}{2} \left(\frac{h'''}{h'} - \frac{3}{2} \frac{h''^2}{h'^2} \right), \quad (\text{A.3})$$

tato konstrukce způsobuje anihilaci funkcí, které odpovídají Möbiově transformaci, tedy

$$\left\{ \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta}; \zeta \right\} = 0, \quad (\text{A.4})$$

a i naopak, jakákoli funkce s nulovou Schwarzovou derivací je Möbiova transformace.

Dále je Schwarzova derivace vůči $PGL(2, \mathbb{C})$ invariantní, tedy

$$\left\{ \frac{\alpha h(\zeta) + \beta}{\gamma h(\zeta) + \delta}; \zeta \right\} = \{h(\zeta); \zeta\}. \quad (\text{A.5})$$

Je vhodné zmínit, že pokud k Möbiově transformaci přidáme podmínu unimodularity (tedy $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$), bude se jednat o tzv. spin-transformaci, které lze zapsat pomocí matic reprezentujících grupu $SL(2, \mathbb{C})$, která je dvojlistým nakrytím omezené Lorentzovy grupy. Samotná unimodulární Möbiova transformace tvoří grupu $PSL(2, \mathbb{C})$.

A.1.2 Cut and paste metoda

Obdobně jako v případě neexpandujících impulzů začneme s metrikou Minkowského prostoročasu, ale s opačnou signaturou,

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (\text{A.6})$$

Transofrmací (1.3) a (1.4) přejdeme k metrice

$$ds^2 = 2d\mathcal{U}d\mathcal{V} - 2d\eta d\bar{\eta}. \quad (\text{A.7})$$

Pro popis expandujících impulzů jsou vhodné souřadnice, které popisují nulový kužel s vrcholem v kartézském počátku jako plochu konstantní souřadnice. Zavedeme tedy souřadný systém $(v, u, \zeta, \bar{\zeta})$ jako

$$\mathcal{U} = u, \quad \mathcal{V} = v + u\zeta\bar{\zeta}, \quad \eta = u\zeta, \quad \bar{\eta} = u\bar{\zeta}, \quad (\text{A.8})$$

nulový kužel s vrcholem v kartézském počátku je pak dán jako plocha $v = 0$. Metrika má v těchto souřadnicích tvar

$$ds^2 = 2du\,dv - 2u^2 d\zeta\,d\bar{\zeta} \quad (\text{A.9})$$

a inverzní transformace ke kartézským souřadnicím jsou

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}} (u + v + u\zeta\bar{\zeta}) z = \frac{1}{\sqrt{2}} (v + u\zeta\bar{\zeta} - u) \quad (\text{A.10})$$

$$x = \frac{u}{\sqrt{2}} (\zeta + \bar{\zeta}) y = \frac{u}{i\sqrt{2}} (\zeta - \bar{\zeta}). \quad (\text{A.11})$$

Světelný kužel $v = 0$ nazveme N , metrika na této nadploše je

$$ds_N^2 = -2u^2 d\zeta d\bar{\zeta}. \quad (\text{A.12})$$

Podél této nadplochy provedeme řez, obdržíme dvě části prostoročasu. Jako M^+ označíme vnitřek světelného kuželu, jako M^- označíme zbytek prsotoročasu a souřadnice na M^- budeme označovat jako $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{\zeta}, \hat{\bar{\zeta}})$. Tyto dvě části budeme chtít na nadploše N zpětně slepit s *warpem* - identifikací bodu $(v = 0, u, \zeta, \bar{\zeta})$ na $N \subset M^+$ s bodem $(v = 0, \hat{u}, \hat{\zeta}, \hat{\bar{\zeta}})$, kde $\hat{\zeta}$ je holomorfní transformací ζ ,

$$\hat{\zeta} = h(\zeta). \quad (\text{A.13})$$

Z požadavku spojitosti metriky na N po slepení platí

$$-2u^2 d\zeta d\bar{\zeta} = -2\hat{u}^2 d\hat{\zeta} d\hat{\bar{\zeta}}. \quad (\text{A.14})$$

Z toho plyne podmínka na transformaci souřadnice u ,

$$\hat{u} = \frac{u}{|h'(\zeta)|}, \quad (\text{A.15})$$

kde $h'(\zeta) = h_{,\zeta}(\zeta)$ je derivace funkce $h(\zeta)$. Obdrželi jsme lepící podmínky

$$(0, u, \zeta)_+ = \left(0, \frac{u}{|h'(\zeta)|}, h(\zeta) \right)_-. \quad (\text{A.16})$$

A.1.3 Odvození spojitého tvaru metriky pomocí spinorového formalismu

Transformace (A.16) se odehrává na světelném kuželu $v = 0$, lze jí tedy chápout jako nelineární holomorfní transformaci spin–prostoru ve vrcholu tohoto světelného kuželu [31].

Pro přechod ke spinorovému popisu použijeme Infeld-Van der Waerdenovy symboly, které pro kartézskou vektorovou bázi odpovídají hermitovským maticím

$$\begin{aligned} \sigma_0^{AA'} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \sigma_1^{AA'} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_2^{AA'} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_3^{AA'} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

spinorový ekvivalent vektoru se složkami $x^\mu = (t, x, y, z)$ je

$$x^{AA'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{V} & \eta \\ \bar{\eta} & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v+u\zeta\bar{\zeta} & u\zeta \\ u\bar{\zeta} & u \end{pmatrix}. \quad (\text{A.18})$$

Spinor (A.18) lze zapsat ve formě

$$x^{AA'} = u\xi^A \xi^{A'} + v\mu^A \mu^{A'}, \quad (\text{A.19})$$

kde jednotlivé spinory (resp. spin–vektory) mají složky

$$\xi^A = \begin{pmatrix} \zeta \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu^A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.20})$$

ve spin–bázi (o^A, ι^A) svázané se souřadnicemi (A.8) podle (A.1), tedy přes příslušnou nulovou tetrádu.

Kovariantní zápis nulového vektoru k^μ pomocí spinorů je pak

$$k^\mu = \xi^{A'} \sigma_{AA'}^\mu \xi^A, \quad (\text{A.21})$$

kde $\sigma_{AA'}^\mu$ je soldering forma – izomorfismus mezi prostory spinorů a tečným prostorem – která odpovídá Infeld–van der Waerdenovým symbolům (A.17).

Penroseovy lepící podmínky (A.16) v řeči 2-spinorů můžeme zapsat jako identifikaci bodů na nulovém kuželu $x^\mu = u\xi^A \xi^{A'}$ a $\hat{x}^\mu = u\hat{\xi}^A \hat{\xi}^{A'}$, kde z (A.13) a (A.15) platí

$$\hat{\xi}^A = \frac{1}{\sqrt{h'}} \begin{pmatrix} h \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.22})$$

Pro stručnost píšeme $h(\zeta) = h$, $h'(\zeta) = h'$.

Metrika na N lze zapsat jako

$$ds_N^2 = -2u^2 |\xi_A d\xi^A|^2, \quad (\text{A.23})$$

kde ke snížení indexu u ξ_A používáme Levi-Civitův spinor, který odpovídá antisymetrické bilineární nedegenerované 2-formě na prostoru spinorů (a jeho komplexním sdružením),

$$\xi_A = \varepsilon_{AB} \xi^B. \quad (\text{A.24})$$

Objekt ξ_A je pak lineárním funkcionálem na prostoru spin–vektorů, považujeme ho za kovariantní spin–vektor.

Dále v souřadnicích (A.8) platí

$$\xi_A d\xi^A = \begin{pmatrix} -1 & \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\zeta \\ 0 \end{pmatrix} = -d\zeta. \quad (\text{A.25})$$

Také pro transformovaný spinor $\hat{\xi}^A$ platí

$$\hat{\xi}_A d\hat{\xi}^A = \frac{1}{\sqrt{h'}} \begin{pmatrix} -1 & h \end{pmatrix} \left(d(h')^{-1/2} \begin{pmatrix} h \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{h'}} \begin{pmatrix} h' \\ 0 \end{pmatrix} d\zeta \right) = -d\zeta, \quad (\text{A.26})$$

forma $\xi_A d\xi^A$ je invariantní vůči transformaci odpovídající Penroseovým lepícím podmínkám. Invarianci této formy lze chápat jako manifestaci spojitosti metriky procházející impulzní nadplochou N .

Dále ještě požadujeme, aby affinní parametr nulových generátorů N nabýval stejné hodnoty, nezávisle na tom jestli jej bereme z M^+ nebo M^- . Metrika celého prostoročasu lze zapsat pomocí spinorů ξ^A a μ^A pomocí relace [27]

$$\varepsilon_{AB} \varepsilon_{A'B'} \sigma_\mu^{AA'} \sigma_\nu^{BB'} = g_{\mu\nu} \quad (\text{A.27})$$

jako

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \varepsilon_{AB} \varepsilon_{A'B'} dx^{AA'} dx^{BB'}, \quad (\text{A.28})$$

kde po dosazení za $x^{AA'}$, resp. $x^{BB'}$ dostáváme

$$\begin{aligned} ds^2 = & 2du dv - 2u^2 |\xi_A d\xi^A|^2 + 4\Re(\xi_A d\mu^A)(udv - vdu) \\ & + 4u v (\Re(d\mu_A d\xi^A) - |\mu_A d\xi^A|^2) - 2v^2 |\mu_A d\mu^A|^2. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Jedná podmínka, kterou na spinory pokládáme je podmínka normalizace

$$\mu_A \xi^A = 1. \quad (\text{A.30})$$

Spinory μ^A a ξ^A tedy tvoří spin–bázi a pokud za ně explicitně dosadíme podle (A.20), metrika nabýde tvaru (A.12)

Položíme-li $v = 0$, restringujeme se na impulzní nadplochu N a metrika se redukuje na tvar

$$ds^2 = 2du dv - 2u^2 |\xi^A d\xi^A|^2 + 4\Re(\xi_A d\mu^A) u dv. \quad (\text{A.31})$$

Z tohoto tvaru pro zajištění spojitosti metriky vyeliminovat člen s $\Re(\xi_A d\mu^A)$. Oba spinory ξ^A, μ^A jsou díky holomorfnosti funkce $h(\zeta)$, udávající *warp*, také holomorfní. Aby tedy reálná část funkce $\xi_A d\mu^A$ byla nulová, musí být nulová celá funkce. Uvidíme, že triviální možnost konstantní funkce i přes svou holomorfnost nebude vyhovovat, Schwarzova derivace konstanty je 0 a nepředstavuje *warp* generující impulzní vlnu.

Splnění podmínek

$$\xi_A d\xi^A = \text{invariant}, \quad \mu_a \xi^A = 1, \quad \xi_A d\mu^A = 0 \quad (\text{A.32})$$

nám zajišťuje spojitost celé metriky při průchodu impulzní nadplochou.

Už víme, že spinor ξ^A se průchodem přes impulzní plochu transformuje jako $\xi^A \mapsto \frac{1}{\sqrt{h'}} \begin{pmatrix} h \\ 1 \end{pmatrix}$. Dále potřebujeme transformaci spinoru μ^A ve tvaru, ve kterém splňuje (A.32). Takový tvar je odvozen v [30], případně v [32] (s normalizací na -1),

$$\hat{\mu}^A = \sqrt{h'} \begin{pmatrix} 1 - \frac{h h''}{2h'^2} \\ -\frac{h''}{2h'^2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.33})$$

Dosazením těchto výsledků do (A.18) za využití (A.19) obdržíme transformaci

$$\begin{aligned} V &= u \frac{|h|^2}{|h'|} + v |h'| \left| 1 - \frac{h h''}{2h'} \right|^2 \\ U &= \frac{u}{|h'|} + \frac{v}{4} \left| \frac{h''^2}{h'^3} \right| \\ Z &= \frac{u h}{|h'|} - v |h'| \left(1 - \frac{h h''}{2h'^2} \right) \frac{\bar{h}''}{2\bar{h}'^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Ve spinorovém zápisu má metrika, splňující podmínky (A.32) tvar

$$ds^2 = 2du\ dv - 2u^2 |\xi_A d\xi^A|^2 + 4u\ v \Re(d\mu_A d\xi^A) - 2v^2 |\mu_A d\mu^A|^2. \quad (\text{A.35})$$

Diferenciály spinorů lze z (A.22) a (A.33) vyjádřit pomocí Schwarzovy derivace jako

$$d\hat{\xi}^A = \hat{\mu}^A d\zeta, \quad d\hat{\mu}^A = \{h; \zeta\} \hat{\xi}^A d\zeta, \quad (\text{A.36})$$

na M^+ má metrika tvar

$$ds_+^2 = 2du\ dv - 2|u\ d\hat{\zeta} + v\{h; \zeta\} d\zeta|^2 \quad (\text{A.37})$$

a na M^- tvar

$$ds_-^2 = 2du\ dv - 2u^2 d\zeta\ d\hat{\zeta} \quad (\text{A.38})$$

S použitím Heavisideovy theta funkce můžeme zapsat kompletní spojitou metriku jako

$$ds^2 = 2du\ dv - 2|u\ d\bar{\zeta} + v\Theta(v)\{h; \zeta\} d\zeta|^2. \quad (\text{A.39})$$

Z tohoto tvaru je pak zřejmé, že funkce h představující Möbiiovu transformaci negenerují impulzní vlnu, Schwarzova derivace ji anihiluje a metrika přechází na plochý tvar.

A.1.4 Geometrie impulzní nadplochy

Impulzní nadplocha N je nulová plocha rozdělující celý prostoročas na dva regiony, M^- a M^+ . Tyto regiony jsou slepeny zpět s *warpem* – jsou identifikovány odlišné body a na N dochází k nespojitosti. Penrose zavádí tři typy geometrie na N . První typ geometrie (Penroseův typ I) zajišťuje existenci takové metriky na N , že metriky indukované z M^+ a M^- se s tou na N shodují.

Penroseův II. typ geometrie navíc předpokládá, že pro všechny nulové generátory γ nadplochy N je afinní parametr stejný, nehledě na to, jestli N uvažujeme jako hranici M^+ nebo M^- . V geometrii II. typu lze zadefinovat paralelní transport vektorů tečných ke γ .

Penroseův III. typ geometrie pak umožňuje paralelní transport libovolného vektoru z libovolného tečného prostoru na N podél generátorů γ . V tomto typu geometrie tedy lze paralelně přenášet celá vektorová pole.

Nejprve se zaměříme na nejslabší geometrii I. typu. Mějme vektor l^μ tečný ke generátoru nulové nadplochy N ,

$$l^\mu = o^A o^{A'}, \quad (\text{A.40})$$

kde předpokládáme hladkost o^A na N .

Ve volbě spinoru o^A máme kalibrační volnost $o^A \mapsto \lambda o^A$, kde λ je libovolná komplexní funkce. Objekt, který se transformuje jako

$$\eta \mapsto \lambda^p \bar{\lambda}^q \eta \quad (\text{A.41})$$

nazveme objektem typu (p, q) . V geometrii I. typu můžeme hladce roznést o^A do M^+ i M^- , obecně ale o^A nebude hladký na $M^+ \cup M^-$. Na M^+ a M^- máme metrické a symetrické (ve smyslu affinní konexe) kovariantní derivace $\overset{+}{\nabla}_\mu$ a $\overset{-}{\nabla}_\mu$.

Symbolem $\overset{\pm}{\nabla}_\mu$ je myšlena kovariantní derivace na příslušeném prostoru M^+ nebo M^- . Derivace ve směru tečném na N je pak

$$k^\mu \overset{\pm}{\nabla}_\mu, \quad (\text{A.42})$$

kde $k^\mu = \xi^A o^{A'} + \xi^{A'} o^A$ je libovolný vektor tečný k N .

Kovariantní derivací můžeme přes příslušnou soldering formu působit na spinory, **Zeptat se na GM II** všechny derivace ve směru tečném k N jsou lineárními kombinacemi

$$o^A \overset{\pm}{\nabla}_{AA'}, \quad o^{A'} \overset{\pm}{\nabla}_{AA'}. \quad (\text{A.43})$$

Afinní konexe (a tedy kovariantní derivace) na M^+ a M^- lze sjednotit do jedné kovariantní derivace

$$\nabla_\mu = \Theta(v) \overset{+}{\nabla}_\mu + (1 - \Theta(v)) \overset{-}{\nabla}_\mu. \quad (\text{A.44})$$