



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA  
Univerzita Karlova**

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

Daniel Rod

**Interakce testovacích částic s  
impulzními gravitačními vlnami**

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Robert Švarc, Ph.D.

Studijní program: studijní program

Studijní obor: studijní obor

Praha 2021

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....  
Podpis autora

Poděkování.

Název práce: Interakce testovacích částic s impulzními gravitačními vlnami

Autor: Daniel Rod

Ústav: Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Robert Švarc, Ph.D., Ústav teoretické fyziky

Abstrakt: Abstrakt.

Klíčová slova: klíčová slova

Title: Interaction of test particles with impulsive gravitational waves

Author: Daniel Rod

Institute: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: RNDr. Robert Švarc, Ph.D., Institute of Theoretical Physics

Abstract: Abstract.

Keywords: key words

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Prostoročasy konstantní křivosti</b>	<b>3</b>
1.1 Minkowskeho prostoročas . . . . .	3
1.2 de Sitterův prostoročas . . . . .	4
1.3 Anti-de Sitterův prostoročas . . . . .	6
<b>2 Neexpandující impulsní gravitační vlny</b>	<b>8</b>
2.1 Konstrukce . . . . .	8
2.1.1 "Cut and paste" metoda konstrukce . . . . .	8
2.1.2 Spojitý tvar metriky . . . . .	9
2.1.3 Distribuční tvar metriky . . . . .	10
2.2 $\mathcal{C}^1$ -matching a refrakční rovnice . . . . .	11
2.3 Vizualizace geodetik prostoročasů s neexpandující impulsní vlnou	14
2.3.1 Impulsní gravitační vlna generovaná nehmotnými částicemi s multipólovou strukturou s $\Lambda = 0$ . . . . .	14
2.3.2 Impulsní gravitační vlna generovaná nehmotnými částicemi s multipólovou strukturou s $\Lambda \neq 0$ . . . . .	20
<b>3 Neexpandující gravitační vlny s gyratonovými členy</b>	<b>25</b>
3.1 Zobecnění impulsních vln na prostoročasy s gyratonovými členy .	25
3.1.1 Zobecnění spojitého tvaru metriky . . . . .	25
3.1.2 Frolovův-Fursaevův gyraton . . . . .	26
3.1.3 Frolovův-Fursaevův gyraton s kosmologickou konstantou .	27
3.2 Vizualizace geodetik v impulsních gyratonových prostoročasech .	27
3.2.1 Refrakční rovnice pro Frolovův-Fursaevův gyraton . . . . .	27
<b>4 Spinorový popis expandujících gravitačních vln</b>	<b>29</b>
4.1 Spinorový formalismus . . . . .	29
4.1.1 Krátký úvod do 2-spinorů . . . . .	29
4.2 Expandující gravitační vlny . . . . .	32
4.2.1 Refrakční rovnice . . . . .	32
<b>Závěr</b>	<b>33</b>
<b>Seznam použité literatury</b>	<b>34</b>

# Úvod

## Obecná teorie relativity

Roku 1915 publikoval Albert Einstein Obecnou teorii relativity, nejmodernější a doposud nejúspěšnější teorii gravitace. Za více jak 100 let od její formulace byly v nesčetném množství experimentů úspěšně ověřeny její předpovědi, včetně první detekce gravitačních vln v roce 2015 na interferometrech LIGO v Livingstonu a Hanfordu, která byla následována desítkami dalších detekcí k nimž nyní přispívá i evropský projekt VIRGO. **Další zajímavé experimentální ověření?**

Obecná teorie relativity je geometrická teorie popisující chování hmoty a energie v prostoročasu, který reprezentuje jako diferenciální varietu vybavenou metrickým tenzorem  $g_{\mu\nu}$ . Tvar metrického tenzoru, resp. jeho složek (metrických funkcí) je s fyzikální realitou gravitačního pole spojen Einsteinovými rovnicemi, které mají v geometrizovaných jednotkách tvar

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (1)$$

Jedná se o 10 nelineárních parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu, jejichž levá strana představuje geometrii na diferenciální varietě reprezentující prostoročas,  $R_{\mu\nu}$  je Ricciho tenzor křivosti,  $R$  je Ricciho skalární křivost a  $\Lambda$  představuje tzv. kosmologickou konstantu. Tenzor energie a hybnosti  $T_{\mu\nu}$  na pravé straně pak dává spojení geometrických objektů s fyzikálním modelem, představuje rozložení hmoty, energie a jejich toky a hybnosti. 10 nezávislých složek Ricciho tenzoru lze v Newman Penroseově formalismu **odkaz na příslušnou kapitolu (spinory nebo appendix, ještě uvidíme)** popsat pomocí šesti obecně komplexních skalárních funkcí, které závisí na tzv. lokální tetrádě. Tyto funkce značíme  $\Phi_{ij}$ , kde indexy  $i, j = 0, 1, 2$ . **mám zde uvést i definici?**

Kromě metrického tenzoru je na prostoročasové varietě definovaná lineární konexe

# 1. Prostoročasy konstantní křivosti

V této kapitole představíme prostoročasy, které budou sloužit jako pozadí pro propagaci impulsních gravitačních vln. Jde o maximálně symetrická řešení Einsteinových polních rovnic (1) s nulovou pravou stranou a s konstantní skalární křivostí  $R$  na celém prostoročase. Celkem rozlišujeme 3 třídy řešení lišící se znaménkem skalární křivosti. Nulová skalární křivost odpovídá řešení s nulovou kosmologickou konstantou, kterému se říká Minkowského prostoročas, kladná křivost odpovídá tzv. de Sitterovu prostoročasu s kladnou kosmologickou konstantou a záporná odpovídá anti-de Sitterovu prostoročasu se zápornou kosmologickou konstantou. Vztah mezi kosmologickou konstantou a skalární křivostí ve vakuumových řešeních (tedy s nulovým tenzorem energie a hybnosti) dostaneme kontrakcí polních rovnic (1) jako

$$R = 4\Lambda. \quad (1.1)$$

Všechna tato řešení vykazují deset generátorů symetrie, které se však pro jednotlivá znaménka kosmologické konstanty liší.

I přes svou jednoduchost jsou zmíněné prostoročasy na poli teoretické fyziky velmi podstatné, čtyřdimenzionální Minkowského prostoročas je arénou speciální teorie relativity, vícedimenzionální Minkowského prostoročas pak běžně slouží jako vhodný prostor pro vnoření složitějších prostoročasů. De-Sitterův prostoročas je pro moderní fyziku důležitý při popisu vesmíru, experimentální data ukazují, že v approximaci do prvního řádu jej lze právě na velkých škálách (a také v inflační epoše) popsat právě jako de Sitterův prostoročas. Anti-de Sitterův prostoročas... [1] [zde zajímavosti o jednotlivých řešeních stručně, sepíšu spolu s úvodem](#)

## 1.1 Minkowského prostoročas

Minkowského prostoročas  $\mathbb{E}^{1,3}$  je nejjednodušší řešení Einsteinových polních rovnic s nulovou pravou stranou. Jde o řešení s nulovou křivostí v celém prostoročase. Grupou symetrií Minkowského prostoročasu je Poincarého grupa, která je tvořena všemi translacemi a Lorentzovou grupou představující rotace a boosty.

Metrika Minkowského prostoročasu má v nejpřirozenějším vyjádření, v kartézských souřadnicích, tvar

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (1.2)$$

Souřadnicovými transformacemi

$$\mathcal{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}(t - z), \quad \mathcal{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + z) \quad (1.3)$$

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy), \quad \bar{\eta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - iy) \quad (1.4)$$

přivedeme metriku do symetrického tvaru

$$ds^2 = -2 d\mathcal{U} d\mathcal{V} + 2 d\eta d\bar{\eta}. \quad (1.5)$$

Souřadnicím zavedeným transformací (1.3) se říká retardovaná a advancovaná souřadnice, metrika (1.5) je pak v tzv. světelných (nulových) souřadnicích. Pokud zkoumáme axiálně symetrickou situaci na pozadí Minkowského prostoročasu, je vhodné zavést cylindrické souřadnice parametrizací

$$x = \rho \cos(\varphi), \quad y = \rho \sin(\varphi), \quad (1.6)$$

kde  $\rho \in [0, \infty)$  a  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Metrika pak nabývá tvaru

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2. \quad (1.7)$$

V Minkowského prostoročase jsou složky affinní konexe v kartézských souřadnicích, kterým odpovídá metrika 1.2, identicky nulové. Řešení rovnice geodetiky pak nabývá tvaru přímek

$$\begin{aligned} t(\lambda) &= t_0 + \lambda \dot{t}_0 \\ x(\lambda) &= x_0 + \lambda \dot{x}_0 \\ y(\lambda) &= y_0 + \lambda \dot{y}_0 \\ z(\lambda) &= z_0 + \lambda \dot{z}_0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

kde veličiny s dolním indexem 0 představují počáteční podmínky.

## 1.2 de Sitterův prostoročas

De Sitterův prostoročas  $dS_4$  je maximálně symetrické vakuové řešení Einsteinových rovnic s kladnou kosmologickou konstantou  $\Lambda$ . Isometrie čtyřrozměrného de Sitterova prostoročasu tvoří grupu  $SO(1, 4)$ . De Sitterův prostoročas topologicky odpovídá  $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^3$  a lze jej přirozeně reprezentovat jako vnoření hyperboloidu

$$-Z_0^2 + Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 = a^2 \quad (1.9)$$

do pětidimenzionálního Minkowského prostoru  $\mathbb{E}^{1,4}$  s metrikou

$$ds^2 = -dZ_0^2 + dZ_1^2 + dZ_2^2 + dZ_3^2 + dZ_4^2. \quad (1.10)$$

Konstanta  $a$  je daná kosmologickou konstantou jako  $a = \sqrt{3/\Lambda}$ .

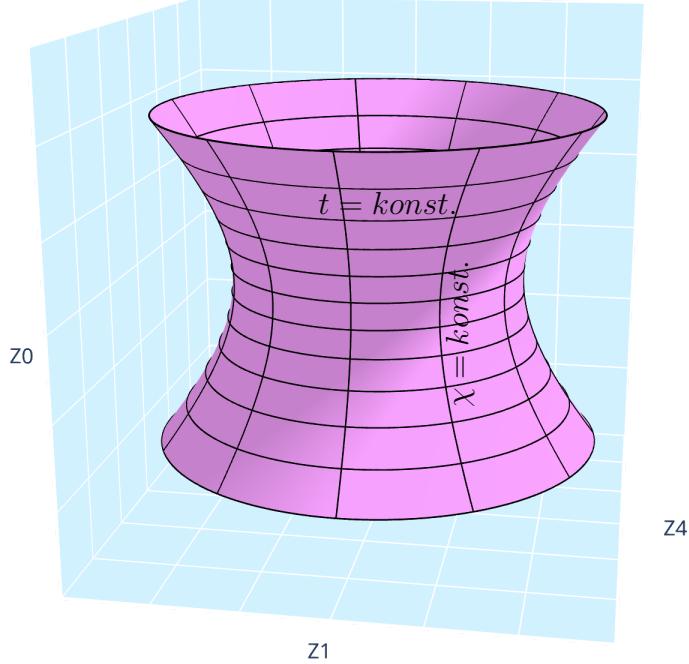
Přirozenou parametrizací celého de-Sitterova prostoročasu jsou souřadnice  $(t, \chi, \theta, \phi)$

$$\begin{aligned} Z_0 &= a \sinh \frac{t}{a} \\ Z_1 &= a \cosh \frac{t}{a} \cos \chi \\ Z_2 &= a \cosh \frac{t}{a} \sin \chi \cos \theta \\ Z_3 &= a \cosh \frac{t}{a} \sin \chi \sin \theta \cos \phi \\ Z_4 &= a \cosh \frac{t}{a} \sin \chi \sin \theta \sin \phi, \end{aligned} \quad (1.11)$$

kde  $t \in (-\infty, +\infty)$ ,  $\chi \in [0, \pi]$ ,  $\theta \in [0, \pi]$  a  $\phi \in [0, 2\pi]$ . Souřadnicové singularity v  $\chi = 0, \pi$  a  $\theta = 0, \pi$  odpovídají pólům ve sférických souřadnicích. V souřadnicích

$(t, \chi, \theta, \phi)$  má metriku de Sitterova prostoročasu formu FLRW metriky s křivostí prostorových řezů  $k = 1$ ,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 \cosh^2 \frac{t}{a} \left( d\chi^2 + \sin^2 \chi \left( d\theta^2 + \sin^2 \theta \, d\phi^2 \right) \right). \quad (1.12)$$



Obrázek 1.1: Vnoření dS prostoročasu do  $\mathbb{E}^{1,4}$ . Plocha hyperboloidu je vykreslena pro  $\theta = \phi = \frac{\pi}{2}$ , tedy  $Z_2 = Z_3 = 0$ . Souřadnicové čáry odpovídají konstantním  $t$  a  $\chi$ .

Hyperboloid představující de Sitterův prostoročas lze dále parametrisovat souřadnicemi  $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \eta, \bar{\eta})$

$$\begin{aligned} Z_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathcal{U} + \mathcal{V}) \left[ 1 - \frac{1}{6} \Lambda (\mathcal{U}\mathcal{V} - \eta\bar{\eta}) \right]^{-1}, \\ Z_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathcal{V} - \mathcal{U}) \left[ 1 - \frac{1}{6} \Lambda (\mathcal{U}\mathcal{V} - \eta\bar{\eta}) \right]^{-1}, \\ Z_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\eta + \bar{\eta}) \left[ 1 - \frac{1}{6} \Lambda (\mathcal{U}\mathcal{V} - \eta\bar{\eta}) \right]^{-1}, \\ Z_3 &= \frac{-i}{\sqrt{2}} (\eta - \bar{\eta}) \left[ 1 - \frac{1}{6} \Lambda (\mathcal{U}\mathcal{V} - \eta\bar{\eta}) \right]^{-1}, \\ Z_4 &= a \left[ 1 + \frac{1}{6} \Lambda (\mathcal{U}\mathcal{V} - \eta\bar{\eta}) \right] \left[ 1 - \frac{1}{6} \Lambda (\mathcal{U}\mathcal{V} - \eta\bar{\eta}) \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

které pro  $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in (-\infty, +\infty)$  a komplexní  $\eta$  pokrývají de Sitterův hyperboloid až

na singularity v  $\mathcal{U}, \mathcal{V} = \infty$ . Inverzní transformační vztahy jsou

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &= \sqrt{2}a \frac{Z_0 - Z_1}{Z_4 + a}, \\ \mathcal{V} &= \sqrt{2}a \frac{Z_0 + Z_1}{Z_4 + a}, \\ \eta &= \sqrt{2}a \frac{Z_2 + iZ_3}{Z_4 + a}.\end{aligned}\tag{1.14}$$

Tato parametrizace indukuje metriku

$$ds^2 = \frac{-2 d\mathcal{U} d\mathcal{V} + 2 d\eta d\bar{\eta}}{\left[1 - \frac{1}{6}\Lambda(\mathcal{U}\mathcal{V} - \eta\bar{\eta})\right]^2}.\tag{1.15}$$

Tato metrika je v takzvaném konformně plochém tvaru, tedy ve tvaru

$$ds^2 = \frac{ds_0^2}{\Omega^2},\tag{1.16}$$

kde  $ds_0^2$  je metrika na  $\mathbb{E}^{1,3}$  a  $\Omega$  je hladkou funkcí souřadnic. Jak uvidíme dále, metrika (1.15) je ve tvaru, který unifikuje všechny prostoročasy konstantní křivosti. Pro  $\Lambda = 0$  se redukuje na (1.5) a pro  $\Lambda < 0$  představuje metriku na anti-de Sitterově prostoročase.

Souřadnicové čáry  $\mathcal{U} = \text{konst.}$  a  $\mathcal{V} = \text{konst.}$  tvoří na de Sitterově hyperboloidu nulové přímky, resp. nadplochy.

### 1.3 Anti-de Sitterův prostoročas

Anti-de Sitterův prostoročas  $AdS_4$  je maximálně symetrické vakuové řešení Einsteinových rovnic se zápornou kosmologickou konstantou  $\Lambda$ . Isometrie tvoří grupu  $SO(2, 3)$  a topologie  $AdS_4$  odpovídá  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^3$ . Vnořením  $AdS_4$  do  $\mathbb{E}^{2,3}$ , tedy do prostoru s metrikou

$$ds^2 = -dZ_0^2 + dZ_1^2 + dZ_2^2 + dZ_3^2 - dZ_4^2,\tag{1.17}$$

vzniká hyperboloid

$$-Z_0^2 + Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 - Z_4^2 = a^2,\tag{1.18}$$

kde  $a = \sqrt{3/|\Lambda|}$ .

Celý hyperboloid je pokrytý souřadnicemi  $(T, r, \theta, \phi)$

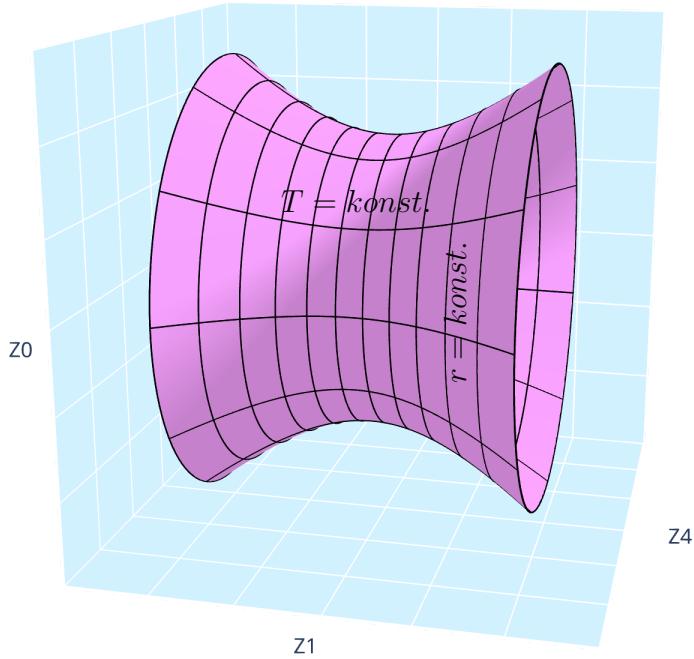
$$\begin{aligned}Z_0 &= a \cosh r \sin \frac{T}{a}, \\ Z_1 &= a \sinh r \cos \theta, \\ Z_2 &= a \sinh r \sin \theta \cos \phi, \\ Z_3 &= a \sinh r \sin \theta \sin \phi, \\ Z_4 &= a \cosh r \cos \frac{T}{a}.\end{aligned}\tag{1.19}$$

Metrika anti-de Sitterova prostoročasu v těchto souřadnicích nabývá tvaru

$$ds^2 = -\cosh^2 r \, dT^2 + a^2 \left( dr^2 + \sinh^2 r \left( d\theta^2 + \sin^2 \theta \, d\phi^2 \right) \right) \quad (1.20)$$

a vidíme, že každý řez  $T = \text{konst.}$  odpovídá pro  $r \in [0, \infty], \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi]$  prostoru konstantní negativní křivosti (hyperbolickému prostoru  $H^3$ ). Singularity v  $r = 0$  a  $\theta = 0, \pi$  jsou pouze souřadnicové.

$T$  představuje časovou souřadnici, která je  $2\pi a$ -periodická, což odpovídá již zmíněné topologii  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^3$ . Obvykle se ale uvažuje  $T \in (-\infty, +\infty)$ , dochází tedy k rozvinutí  $\mathbb{S}^1$  na celé  $\mathbb{R}^1$ , a dostáváme prostor s topologií  $\mathbb{R}^4$ , jehož univerzálním nakrytím je AdS prostoročas.



Obrázek 1.2: Vnoření AdS prostoročasu do  $\mathbb{E}^{2,3}$ . Plocha hyperboloidu je vykreslena pro  $\theta = \phi = \frac{\pi}{2}$ , tedy  $Z_2 = Z_3 = 0$ . Souřadnicové čáry odpovídají konstantním  $T$  a  $r$ .

Parametrizací (1.13) obdržíme totožný konformě plochý tvar metriky (1.15) jako v případě de Sitterova prostoročasu

$$ds^2 = \frac{-2 \, dU \, dV + 2 \, d\eta \, d\bar{\eta}}{\left[ 1 - \frac{1}{6}\Lambda (\mathcal{U}\mathcal{V} - \eta\bar{\eta}) \right]^2},$$

liší se pouze znaménkem kosmologické konstanty ( $\Lambda < 0$ ).

# 2. Neexpandující impulsní gravitační vlny

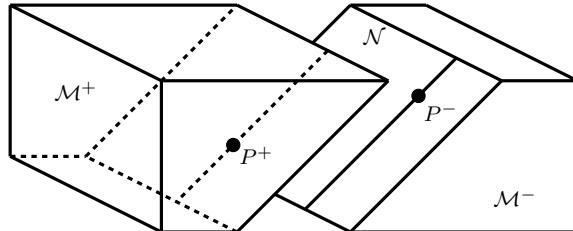
V této kapitole se budeme věnovat neexpandujícím impulsním gravitačním vlnám propagujících se na pozadí Minkowského a (anti-)de Sitterova prostoročasu. Popíšeme matematickou konstrukci prostoročasů, která vede k tzv. refrakčním rovnícím pro geodetiky, které využijeme k vizualizaci různých řešení impulsních vln a k interpretaci působení vln na různé testovací částice.

## 2.1 Konstrukce

Nejprve popíšeme konstrukci prostoročasů s neexpandujícími impulsními gravitačními vlnami pomocí Penroseovy geometrické metody [2] "cut and paste", zavedeme souřadnice, ve kterých je metrika spojitá, a dále se budeme věnovat distribučnímu popisu prostoročasů s impulsními gravitačními vlnami.

### 2.1.1 "Cut and paste" metoda konstrukce

Geometrická metoda konstrukce "cut and paste" impulsních gravitačních vln v Minkowského prostoročase (1.2) se zakládá na rozdelení celého prostoročasu podél rovinné světelné nadplochy  $\mathcal{N}$ , kde je implulzní vlna lokalizována na dvě části  $\mathcal{M}^+$  a  $\mathcal{M}^-$ . Opětovným spojením těchto částí a ztotožněním bodů na hranici řezu  $\mathcal{N}$  se specifickým posunutím dostaneme prostoročas s impulsní gravitační vlnou.



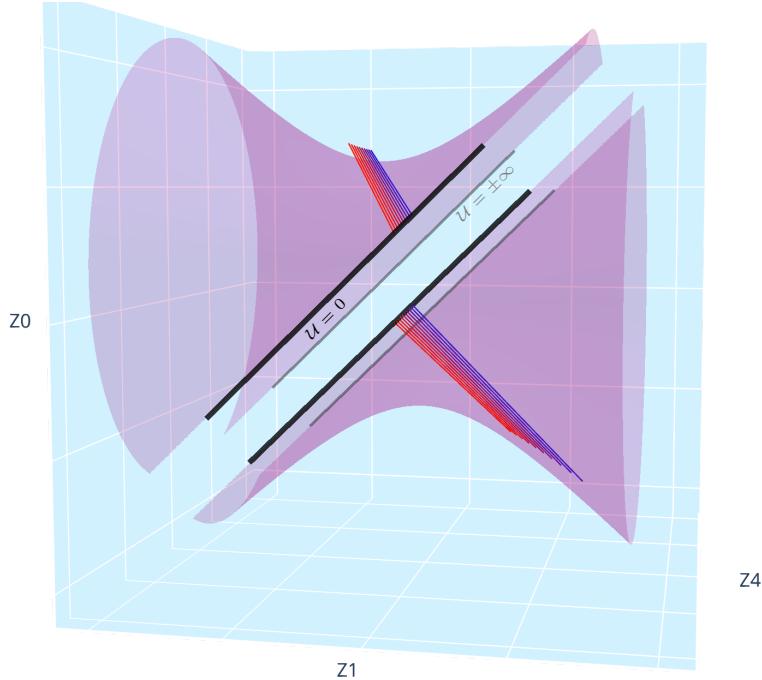
Obrázek 2.1: Geometrická konstrukce neexpandující impulsní gravitační vlny pomocí metody "cut and paste", podél nadplochy  $\mathcal{N}$  dojde k rozdelení prostoročasu na dvě části  $\mathcal{M}^+$  a  $\mathcal{M}^-$  a opětovnému ztotožněním bodů na hranici obou částí se specifickým posunem.

Pro světelnou nadplochu  $\mathcal{N}$  danou podmínkou  $\mathcal{U} = 0$  pak tato konstrukce odpovídá Penroseovým spojovacím podmínkám

$$[\eta, \bar{\eta}, \mathcal{V}, \mathcal{U} = 0_-]_{\mathcal{M}^-} \equiv [\eta, \bar{\eta}, \mathcal{V} - H(\eta, \bar{\eta}), \mathcal{U} = 0_+]_{\mathcal{M}^+}, \quad (2.1)$$

kde  $H(\eta, \bar{\eta})$  je holomorfní. Penrose [2] ukázal, že impulsní gravitační vlny jsou v tenzoru křivosti reprezentovány členy proporciálními Diracově delta distribuci  $\delta(\mathcal{U})$ . V Minkowského pozadí je nadplocha  $\mathcal{U} = 0$  rovina a řešení spadá do rodiny impulsních *pp*-vln, tedy rovnoběžně se propagujících rovinných vln. Obecně na

pozadích konstantní křivosti platí stejné napojovací podmínky (2.1) a nadplocha  $\mathcal{U} = 0$  představuje plochu konstantní Gaussovské křivosti  $K = \frac{1}{3}\Lambda$ , která je popsána metrikou  $d\sigma^2 = 2(1 + \frac{1}{6}\Lambda\eta\bar{\eta})^{-2}d\eta d\bar{\eta}$ . V případě  $\Lambda \neq 0$  se tedy jedná buďto o sféru ( $\Lambda > 0$ ), nebo o hyperbolickou plochu ( $\Lambda < 0$ ). Popis těchto nadploch konstantní křivostí v (A)dS prostoročasech a jejich geometrické vlastnosti jsou shrnutý v [3], kde je také ukázáno, že se jedná o neexpandující nadplochy.



Obrázek 2.2: Nulové geodetiky procházející impulsem nacházejícím se v  $\mathcal{U} = 0$  (černá čára) v AdS prostoročase jsou podle cut and paste konstrukce posunuty v souřadnici  $\mathcal{V}$  a dochází k refrakci. Geodetiky jsou opět nulovými generátory AdS na  $\mathcal{U} > 0$ , neleží už ale v  $\eta = 0$ , a proto neleží na ploše vykresleného hyperboloidu.

### 2.1.2 Spojitý tvar metriky

Metoda "cut and paste" nám dává identifikaci bodů prostoročasu na obou stranách impulsní vlny, a tedy napojovací podmínky pro geodetiky, nic ale neříká o podobě metriky kompletního prostoročasu s impulsní vlnou. Potřebujeme tedy najít vhodný souřadnicový systém, ve kterém bude metrika spojitá funkce  $\mathcal{U}$ . Toho dosáhneme postupem použitým např. v [4], kde z metriky prostoročasu pozadí (1.15), respektive

$$ds_0^2 = \frac{2 d\eta d\bar{\eta} - 2 d\mathcal{U} d\mathcal{V}}{\left[1 - \frac{1}{6}\Lambda(\eta\bar{\eta} - \mathcal{U}\mathcal{V})\right]^2}, \quad (2.2)$$

souřadnicovou transformací

$$\mathcal{U} = U, \quad \mathcal{V} = V + H + UH_{,Z}H_{,\bar{Z}}, \quad \eta = Z + UH_{,\bar{Z}}, \quad (2.3)$$

kde uvažujeme libovolnou reálnou funkci  $H(Z, \bar{Z})$ , obdržíme metriku

$$ds^2 = \frac{2 \left| dZ - U \left( H_{,Z\bar{Z}} dZ + H_{,\bar{Z}\bar{Z}} d\bar{Z} \right) \right|^2 - 2dUdV}{\left[ 1 - \frac{1}{6}\Lambda(Z\bar{Z} - UV - UG) \right]^2}, \quad (2.4)$$

kde  $G(Z, \bar{Z}) \equiv H - ZH_{,Z} - \bar{Z}H_{,\bar{Z}}$ . Metriku (2.4) pak uvažujeme pouze pro  $U > 0$ , zatímco na  $U < 0$  provedeme ztotožnení souřadnic

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= U \\ \mathcal{V} &= V \\ \eta &= Z \end{aligned} \quad (2.5)$$

a uvažujeme metriku vzniklou právě touto transformací. Definováním tzv. kink funkce jako

$$U_+ \equiv U_+(U) = \begin{cases} 0 & \text{pro } U \leq 0 \\ U & \text{pro } U \geq 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

můžeme výslednou metriku zapsat jako

$$ds^2 = \frac{2 \left| dZ + U_- \left( H_{,Z\bar{Z}} dZ + H_{,\bar{Z}\bar{Z}} d\bar{Z} \right) \right|^2 - 2dUdV}{\left[ 1 - \frac{1}{6}\Lambda(Z\bar{Z} - UV - U_+G) \right]^2}. \quad (2.7)$$

Transformace (2.3) a (2.5) spojující separátně pro  $\mathcal{U} > 0$  a  $\mathcal{U} < 0$  metriku (2.2) s metrikou (2.7) lze pomocí Heavisideovy theta funkce  $\Theta(U)$  přepsat do tvaru

$$\mathcal{U} = U, \quad \mathcal{V} = V + \Theta(U)H + U_+H_{,Z}H_{,\bar{Z}}, \quad \eta = Z + U_+H_{,\bar{Z}}. \quad (2.8)$$

Stále je ale nutné provádět transformaci separátně pro  $\mathcal{U} > 0$  a  $\mathcal{U} < 0$ , Heavisideova funkce má při transformaci metriky (2.2) za následek vznik členů proporcionálních delta funkci. Je také nutné podotknout, že toto vyjádření je pak ve smyslu distribucí. Ukazuje se, že tato transformace spojuje tzv. distribuční vyjádření metriky (2.12), které bude zavedeno dále, se spojitým tvarem metriky (2.7). Transformace (2.8) zároveň obsahuje Penroseovy spojovací podmínky (2.1) v  $U = 0$ , kde vzniká nespojitost v souřadnici  $\mathcal{V}$ . Tato metoda konstrukce, ve smyslu distribucí, tedy představuje explicitní "cut and paste" konstrukci.

### 2.1.3 Distribuční tvar metriky

Dalším způsobem konstrukce impulsní gravitační vlny je přechod od příslušných rodin tzv. "sandwichových" gravitačních vln s hladkým profilem vlnoplochy k limitnímu distribučnímu vyjádření impulsní vlny. Pro případ neexpandujících vln propagujících se na  $\mathbb{E}^{1,3}$  byl tento limitní přechod uvažován např. v [5], [6], [7]. Výsledná metrika nabývá tvaru

$$ds^2 = 2 d\xi d\bar{\xi} - 2dudv + H(\xi, \bar{\xi})\delta(u) du^2. \quad (2.9)$$

Distribuční tvar metriky také dostaneme dosazením invezní transformace k (2.8) do spojité metriky (2.7). Vzhledem k nespojitosti v transformaci toto dosazení nemůže být provedeno v rámci klasické teorie distribucí, kde nelze konzistentně definovat násobení dvou distribucí. S využitím regularizačních metod

teorie nelineárních zobecněných funkcí [zde citace](#), které zakládají na Colombeových algebrách, lze ale odvodit pravidla pro násobení jisté třídy distribucí, která dostačují pro toto odvození. Konkrétně potřebujeme násobit distribuce

$$\Theta^2 = \Theta, \quad \Theta U_+ = U_+. \quad (2.10)$$

Kromě pravidel pro násobení ještě využijeme identity z klasické teorie distribucí

$$\Theta' = \delta, \quad U'_+ = \Theta \quad (2.11)$$

a dostáváme pro libovolnou hodnotu  $\Lambda$  metriku ve tvaru

$$ds^2 = \frac{2d\eta d\bar{\eta} - 2d\mathcal{U} d\mathcal{V} + 2H(\eta, \bar{\eta})\delta(\mathcal{U}) d\mathcal{U}^2}{\left[1 - \frac{1}{6}\Lambda(\eta\bar{\eta} - \mathcal{U}\mathcal{V})\right]^2}. \quad (2.12)$$

V případě nenulové kosmologické konstanty můžeme také využít vnoření do  $\mathbb{E}^{1,4}$ , případně  $\mathbb{E}^{2,4}$  (podle znaménka kosmologické konstanty, jak je popsáno v kapitole 1) s dodatečným neexpandujícím impulsem

$$ds^2 = dZ_2^2 + dZ_3^2 + \epsilon dZ_4^2 - 2d\tilde{U}d\tilde{V} + \mathcal{H}(Z_2, Z_3, Z_4)\delta(\tilde{U})d\tilde{U}^2, \quad (2.13)$$

kde  $\epsilon = \text{sign}(\Lambda)$ ,  $\tilde{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}(Z_0 - Z_1)$ ,  $\tilde{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}(Z_0 + Z_1)$ . S podmínkou analogickou k (1.9) a (1.18),

$$Z_2^2 + Z_3^2 + \epsilon Z_4^2 - 2\tilde{U}\tilde{V} = \epsilon a^2, \quad (2.14)$$

dostáváme reprezentaci impulsních vln propagujících se na (A)dS prostoročasu s impulsem na  $\tilde{U} = 0$ . Funkce  $H$  a  $\mathcal{H}$  v metrikách (2.12) a (2.13) jsou svázány vztahem

$$\mathcal{H} = \frac{2H}{1 - \frac{1}{6}\Lambda\eta\bar{\eta}}. \quad (2.15)$$

Impulsní plocha má v těchto souřadnicích tvar  $Z_2^2 + Z_3^2 + \epsilon Z_4^2 = \epsilon a^2$ , a odpovídá tedy, jak již bylo zmíněno, 2-sféře pro  $\epsilon = 1$  a 2-hyperboloidu pro  $\epsilon = -1$ .

## 2.2 $\mathcal{C}^1$ -matching a refrakční rovnice

Dále budeme explicitně modelovat geodetiky na prostoročasech s neexpandujícími impulsními vlnami v souřadnicích (2.12). V těchto souřadnicích není řešení rovnice geodetiky dobře definované v klasické teorii distribucí, pro neexpandující impulsní vlny na Minkowského prostoročasu byla rovnice geodetiky a její řešení zkoumána v rámci teorie zobecněných funkcí ve smyslu Colombeových algeber a v článích [8] a [9] byla ukázána existence a jednoznačnost řešení v prostoru těchto funkcí a bylo ověřeno, že geodetiky na  $\mathcal{M}^-$  a  $\mathcal{M}^+$  odpovídají geodetikám na Minkowského pozadí se skokem v souřadnici  $\mathcal{V}$  při přechodu přes nadplochu  $\mathcal{U} = 0$ . V prostoročasech s nenulovou kosmologickou konstantou lze využít přístup vnoření do pětidimensionálního Minkowského prostoru, kde se v rovnici geodetiky nenachází výrazy nedefinované v klasické teorii distribucí, [Chápu to tak správně?](#) řešení rovnice geodetiky pro (anti-)de Sitterův prostoročas s impulsními neexpandujícími vlnami byly tímto způsobem odvozeny v [10]. V článku [4] byla odvozena rovnice geodetiky v souřadnicích (2.7). Odvozený tvar je v tomto

případě ve smyslu Filippových řešení (diferenciálních inkluze) [11], což je zobecnění teorie obyčejných diferenciálních rovnic. V článku je ukázána existence a jednoznačnost takových řešení, dále autoři využívají metodou  $C^1$ -matchingu, kde při splnění lokální lipschitzovskosti metriky lze řešení ve smyslu Filippova přiřadit řešením rovnice geodetiky na jednotlivých částech prostoročasu ("před a za impulsem"), bez nutné znalosti detailů teorie za Filippovými řešeními.

Výsledkem  $C^1$ -matchingu je sada refrakčních rovnic, které udávají jak skok v souřadnici  $\mathcal{V}$ , tak i změnu v rychlostech před a za impulsem. Geodetiku procházející impulsní plochou ve spojitých souřadnicích tedy ztotožníme transformací (2.8) (a její derivaci), v oblastech  $U > 0$  a  $U < 0$  separátně, s geodetikami v souřadnicích prostoročasu na pozadí. Pro polohy dostaváme limitou  $U \rightarrow 0^+$  a  $U \rightarrow 0^-$  rovnice

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_i^+ &= \mathcal{U}_i^- = 0, \\ \mathcal{V}_i^+ &= \mathcal{V}_i^- + H_i, \\ \eta_i^+ &= \eta_i^-,\end{aligned}\tag{2.16}$$

což odpovídá Penroseovým spojovacím podmínkám - geodetika je spojitá v  $\mathcal{U}$  a  $\eta$  a dochází ke skoku ve  $\mathcal{V}$ . Pro rychlosti obdržíme stejnou limitou rovnice

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{U}}_i^+ &= \dot{\mathcal{U}}_i^-, \\ \dot{\mathcal{V}}_i^+ &= \dot{\mathcal{V}}_i^- + H_{i,Z} \dot{\eta}_i^- + H_{i,\bar{Z}} \dot{\bar{\eta}}_i^- + H_{i,Z} H_{i,\bar{Z}} \dot{\mathcal{U}}_i^-, \\ \dot{\eta}_i^+ &= \dot{\eta}_i^- + H_{i,\bar{Z}} \dot{\mathcal{U}}_i^-. \end{aligned}\tag{2.17}$$

Index  $i$  znamená hodnotu na impulsní nadploše  $\mathcal{U} = 0$ , složky označené znakem + jsou za impulsem ( $\mathcal{U} > 0$ ), složky označené znakem - jsou před impulsem ( $\mathcal{U} < 0$ ).

Všimněme si, že při přechodu přes impulsní plochu platí  $\eta_i = Z_i$ , a tedy  $H_{i,Z} = \frac{\partial}{\partial \eta} H(\eta, \bar{\eta})$ .

Bližším pohledem na refrakční rovnice také vidíme, že zachovávají kauzální charakter. Složka rychlosti  $\dot{\mathcal{U}}$  se nemění, ve složkách  $\dot{\mathcal{V}}$  a  $\dot{\eta}$  dojde k refrakci tak, že nedochází ke změně normy čtyřrychlosti.

Dále uvedeme refrakční rovnice v reálných polárních prostorových souřadnicích, které odvodíme z transformace spojitých souřadnic  $\rho = \sqrt{2} |Z + U_+ H_{i,\bar{Z}}|$  a  $\varphi = \frac{1}{2i} \log \frac{Z + U_+ H_{i,\bar{Z}}}{\bar{Z} + U_+ H_{i,Z}}$ . Limitou  $U \rightarrow 0^+$  a  $U \rightarrow 0^-$  dostaváme

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_i^+ &= \mathcal{V}_i^- + H_i, \\ \rho_i^+ &= \rho_i^-, \\ \varphi_i^+ &= \varphi_i^-, \end{aligned}\tag{2.18}$$

tedy radiální i úhlová složka jsou spojité. Pro složky rychlosti pak provedeme stejnou limitu na derivaci souřadnic,

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{V}}_i^+ &= \dot{\mathcal{V}}_i^- + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( e^{i\varphi_i^-} H_{i,Z} + e^{-i\varphi_i^-} H_{i,\bar{Z}} \right) \dot{\rho}_i^- + \frac{i}{\sqrt{2}} \left( e^{i\varphi_i^-} H_{i,Z} - e^{-i\varphi_i^-} H_{i,\bar{Z}} \right) \rho_i^- \dot{\varphi}_i^- \\ &\quad + \left( H_{i,Z} H_{i,\bar{Z}} \right) \dot{\mathcal{U}}_i^-, \\ \dot{\rho}_i^+ &= \dot{\rho}_i^- + \frac{1}{2} \left( e^{i\varphi_i^-} H_{i,Z} + e^{-i\varphi_i^-} H_{i,\bar{Z}} \right) \dot{\mathcal{U}}_i^-, \\ \dot{\varphi}_i^+ &= \dot{\varphi}_i^- + \frac{i}{\sqrt{2} \rho_i^-} \left( e^{i\varphi_i^-} H_{i,Z} - e^{-i\varphi_i^-} H_{i,\bar{Z}} \right) \dot{\mathcal{U}}_i^-. \end{aligned}\tag{2.19}$$

Transformací

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}} (X + iY) \quad \bar{Z} = \frac{1}{\sqrt{2}} (X - iY) \quad (2.20)$$

můžeme odvodit refrakční rovnice v reálných souřadnicích  $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, x, y)$

$$\mathcal{U}_i^+ = \mathcal{U}_i^- = 0, \quad \mathcal{V}_i^+ = \mathcal{V}_i^- + H_i, x_i^+ = x_i^-, \quad y_i^+ = y_i^-, \quad (2.21)$$

a pro čtyřrychlosti

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{U}}_i^+ &= \dot{\mathcal{U}}_i^-, \\ \dot{\mathcal{V}}_i^+ &= \dot{\mathcal{V}}_i^- + H_{i,X} \dot{x}_i^- + H_{i,Y} \dot{y}_i^- + \frac{1}{2} ((H_{i,X})^2 + (H_{i,Y})^2) \dot{\mathcal{U}}_i^-, \\ \dot{x}_i^+ &= \dot{x}_i^- + H_{i,X} \dot{\mathcal{U}}_i^-, \\ \dot{y}_i^+ &= \dot{y}_i^- + H_{i,Y} \dot{\mathcal{U}}_i^-. \end{aligned} \quad (2.22)$$

$H_{i,X}$  a  $H_{i,Y}$  odpovídají derivacím funkce  $H$  ve směru  $X$  a  $Y$  v bodě impulzu, díky spojitosti tedy platí  $H_{i,X} = \frac{\partial}{\partial x} H$ ,  $H_{i,Y} = \frac{\partial}{\partial y} H$ .

Díky tomu, že odvození rovnic (2.16) a (2.17) bylo provedeno v konformně plochých souřadnicích, jejich tvar nezávisí na hodnotě  $\Lambda$  a jedná se o jednotné rovnice pro refrakci způsobenou impulsními vlnami propagujícími se v Minkowského i (anti-)de Sitterově prostoročase.

V (anti-)de Sitterově prostoročasech můžeme také využít pětidimenzionálního formalismu a odvodit refrakční rovnice v souřadnicích (2.13). Konformní faktor je na jednotlivých částech prostoročasu při cut and paste konstrukci daný jako  $\Omega_i^\pm = 1 + \frac{1}{6}\Lambda\eta^\pm\bar{\eta}^\pm$ , ze spojitosti  $\eta, \bar{\eta}$  při přechodu přes  $\mathcal{U} = 0$  však plyne, že pro konformní faktor stačí psát  $\Omega_i$ , jelikož při přechodu přes impulsní nadplochu nedochází k jeho změně.

Z rovnic pro polohy (2.21) dostáváme Penroseovu napojovací podmítku v 5 dimenzionálním formalismu

$$\begin{aligned} \tilde{U}_i^+ &= 0 = \tilde{U}_i^-, & \tilde{V}_i^+ &= \tilde{V}_i^- + \frac{H_i}{\Omega_i}, \\ Z_{2i}^+ &= Z_{2i}^-, & Z_{3i}^+ &= Z_{3i}^-, & Z_{4i}^+ &= Z_{4i}^-. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Pro derivaci konformního faktoru podle affinního parametru máme  $\dot{\Omega}_i^+ = \dot{\Omega}_i^- - \frac{1}{2\epsilon a^2} G_i \Omega_i \dot{\tilde{U}}_i^-$ , kde (díky spojitosti)  $G_i = G_i^\pm = H_i - \Omega_i(H_{i,X} Z_{2i}^\pm + H_{i,Y} Z_{3i}^\pm)$ . Refrakční rovnice složek rychlostí pak mají tvar

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{U}}_i^- &= \dot{\tilde{U}}_i^+, \\ \dot{\tilde{V}}_i^- &= \dot{\tilde{V}}_i^+ + 2p\dot{\tilde{U}}_i^+ - H_{i,X} \dot{Z}_{2i}^+ - H_{i,Y} \dot{Z}_{3i}^+ - \frac{G_i}{2a} \dot{Z}_{4i}^+, \\ \dot{Z}_{2i}^- &= \dot{Z}_{2i}^+ - \dot{\tilde{U}}_i^+ \left( H_{i,X} + \frac{G_i}{2\epsilon a^2} Z_{2i}^+ \right), \\ \dot{Z}_{3i}^- &= \dot{Z}_{3i}^+ - \dot{\tilde{U}}_i^+ \left( H_{i,Y} + \frac{G_i}{2\epsilon a^2} Z_{3i}^+ \right), \\ \dot{Z}_{4i}^- &= \dot{Z}_{4i}^+ - \dot{\tilde{U}}_i^+ \frac{G_i}{\epsilon a \Omega_i}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Vidíme, že i v 5 dimenzionálním formalismu dochází ke skoku na vlnoploše v souřadnici  $\tilde{V}$  a refrakce je ve všech směrech, kromě normály na vlnoplochu (tedy  $\tilde{U}$ ).

## 2.3 Vizualizace geodetik prostoročasů s neexpandující impulsní vlnou

Refrakční rovnice jsou vhodným nástrojem k vizualizaci geodetik v souřadnicích prostoročasů na pozadí impulsní vlny. Pro vybrané funkce  $H$ , resp.  $\mathcal{H}$  v prostoročasech s  $\Lambda \neq 0$ , byly zvolené geodetiky před impulsem ztotožněny s geodetikami za impulsem. Integrací rovnice geodetiky na oblastech před a za impulsem zvlášť pak obdržíme celé geodetiky v prostoročasu s impulsní vlnou. Pro účel vizualizace geodetik v těchto prostoročasech autor této práce vytvořil balíček GRImpulsiveWaves pro jazyk Python, tento open-source balíček je volně dostupný na platformě GitHub (<https://github.com/DSroD/GRImpulsiveWaves>) a na Python Package Index pod názvem GRImpulsiveWaves. Instalaci tedy lze provést přímo přes balíčkovací instalátor pip, příkazem `pip install GRImpulsiveWaves`. V následujících podsekčích představíme vizualizace pro tato vybraná řešení, pro různé parametry a počáteční podmínky geodetik. Všechny zde představené vizualizace lze jednoduše reproducovat pomocí kódu uveřejněného v repozitáři na platformě GitHub, kde se kromě statických obrázků generují i interaktivní grafy, kde lze měnit úhel pohledu a přesně odečítat hodnoty souřadnic na geodetikách, včetně vlastního času od průchodu vlnoplochou.

### 2.3.1 Impulsní gravitační vlna generovaná nehmotnými částicemi s multipólovou strukturou s $\Lambda = 0$

Řešení impulsní vlny generované nulovými částicemi s multipólovou strukturou v Minkowského prostoročase odvodili Griffiths a Podolský v [12]. Polní rovnice se pro tento případ redukují na

$$\Delta H = 2H_{,\eta\bar{\eta}} = 8\pi T_{\mathcal{U}\mathcal{U}}, \quad (2.25)$$

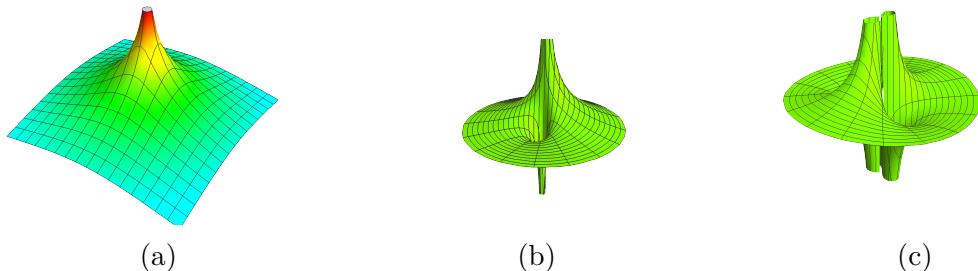
kde  $T_{\mathcal{U}\mathcal{U}} = f(\eta, \bar{\eta})\delta(\mathcal{U})$ . Řešení částice s multipólovou strukturou pak odpovídá funkci  $H$  v cylindrických prostorových souřadnicích ve tvaru

$$H = -b_0 \log(\rho) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \rho^{-m} \cos[m(\phi - \phi_m)], \quad (2.26)$$

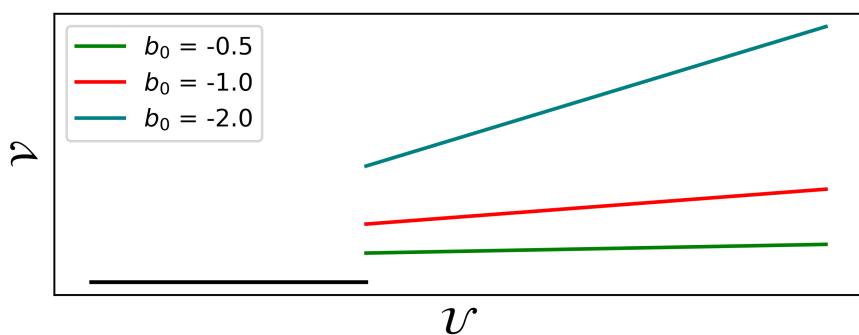
kde  $b_m$ ,  $\phi_m$  jsou konstanty.

Řešení s jedinou monopólovou částicí, tedy  $b_m = 0$  pro všechna  $m \geq 1$ , odpovídá Aichelburg-Sexlovu řešení - prostoročasu zkonztruovanému ultraboostem Schwarzschildova řešení [13].

Na obrázku 2.4 je vyobrazena refrakce v Aichelburg-Sexlově řešení pro různé parametry  $b_0$ . Dochází ke skoku v souřadnici  $\mathcal{V}$ , jak plyne z Penroseových napojovacích podmínek, a k refrakci. S rostoucí absolutní hodnotou parametru  $b_0$  dochází k větší změně ve složce rychlosti  $\dot{\mathcal{V}}$ . Skok ve složce  $\dot{\mathcal{V}}$  doprovází změna ve složce  $\dot{\eta}$ , pro kterou opět platí, že spolu s rostoucí absolutní hodnotou  $b_0$  dochází k větší změně. Tato závislost je také vidět na obrázku 2.5, kde vidíme geodetický pohyb v prostoru v závislosti na retardované souřadnici  $\mathcal{U}$ , kterou v případě neexpandujících vln v Minkowského prostoročase můžeme použít jako affinní parametr.



Obrázek 2.3: Funkce  $H$  v případě (a) Aichelburg-Sexlova řešení, impulsní vlny generované nulovou částicí s (b) dipólovou strukturou a s (c) kvadrupólovou strukturou.



Obrázek 2.4: Nulové geodetiky ( $\dot{\mathcal{U}}^- = 1$ ,  $\dot{\mathcal{V}}^- = 0$ ,  $\dot{\eta}^- = 0$ ) procházející impulsem Aichelburg-Sexlova řešení v  $\rho = 2$  pro různé parametry  $b_0$ .

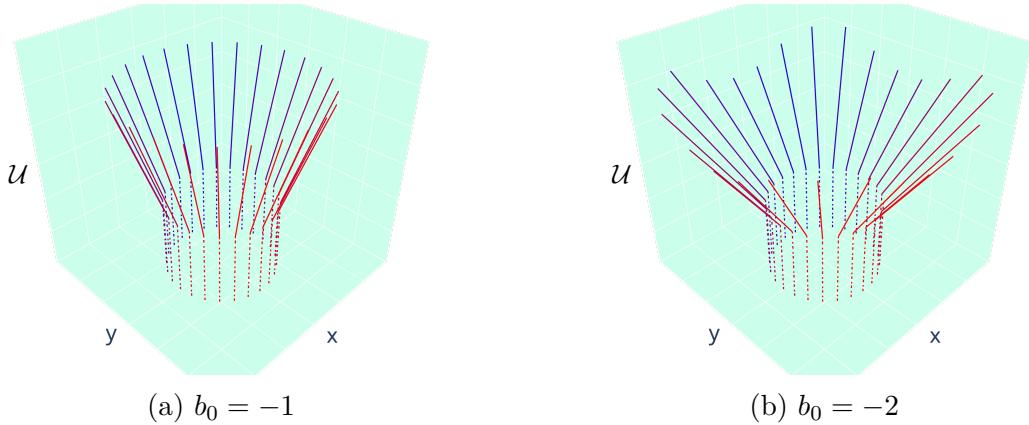
Záporné hodnoty parametru  $b_0$ , použité na obrázcích 2.4 a 2.5, byly vhodné pro přehlednější vizualizaci efektu impulsní vlny, nemají ale v originální konstrukci Aichelburg-Sexlova ultraboostu fyzikální význam. Parametr  $b_0$  představuje v ultraboostové limitě  $v \rightarrow 1, m \rightarrow 0$  konstantu, která splňuje  $8m = b_0\sqrt{1-v^2}$ , pro fyzikální systémy konstruované touto metodou tedy nabývá kladných hodnot. Příklady nulových geodetiky pro kladné hodnoty jsou na obrázku 2.6, kde vidíme, že geodetiky jsou refraktovány směrem k  $\rho = 0$  – jde tedy o přitažlivý efekt nulové částice generující impulsní vlnu.

Testovací částice s časupodobnými geodetikami se chovají stejným způsobem, na obrázku 2.7 je vyobrazeno šíření testovacích částic paralelně s osou  $z$ . Při průchodu  $\mathcal{U} = 0$  dochází k refrakci a částice po průchodu letí směrem k ose  $z$ .

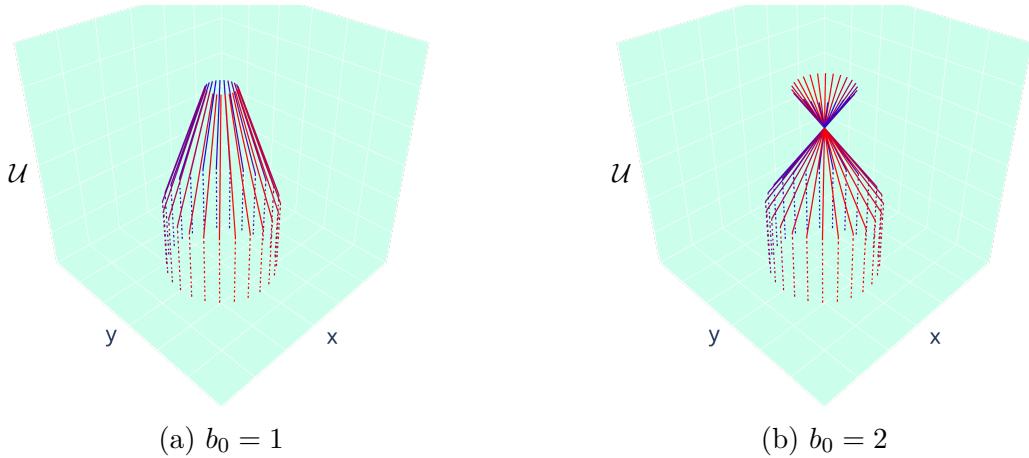
Refrakce je slabší s rostoucí vzdáleností od částice generující impuls. Na obrázku 2.8 jsou znázorněny už refruktované časupodobné geodetiky pro různé vzdálenosti od osy symetrie. Před refrakcí se jedná o pohyb testovacích částic ve směru osy  $z$ .

Pro potěšení oka čtenáře jsou přiloženy další vizualizace geodetického pohybu v Aichelburg-Sexlově řešení. Na obrázku 2.9 je systém časupodobných geodetik, které se před průchodem impulsní vlnou šíří směrem od osy symetrie  $z$ . V (b) dochází k refrakci, která otáčí směr šíření směrem zpět k ose  $z$ . Na obrázku 2.10 je pak zobrazení průchodu geodetik, které nejsou uspořádány axiálně symetricky.

Pro  $m > 0$  závisí změna geodetického pohybu na prostorovém úhlu. Derivace



Obrázek 2.5: Nulové geodetiky ( $\dot{\mathcal{U}}^- = 1$ ,  $\dot{\mathcal{V}}^- = 0$ ,  $\dot{\eta}^- = 0$ ) procházející impulsní vlnou Aichelburg-Sexlova řešení. Prstenec testovacích částic je před průchodem impulsem v  $\rho = 2$ .



Obrázek 2.6: Nulové geodetiky ( $\dot{\mathcal{U}}^- = 1$ ,  $\dot{\mathcal{V}}^- = 0$ ,  $\dot{\eta}^- = 0$ ) procházející impulsem v  $\rho = 2$  pro kladné hodnoty parametru  $b_0$ .

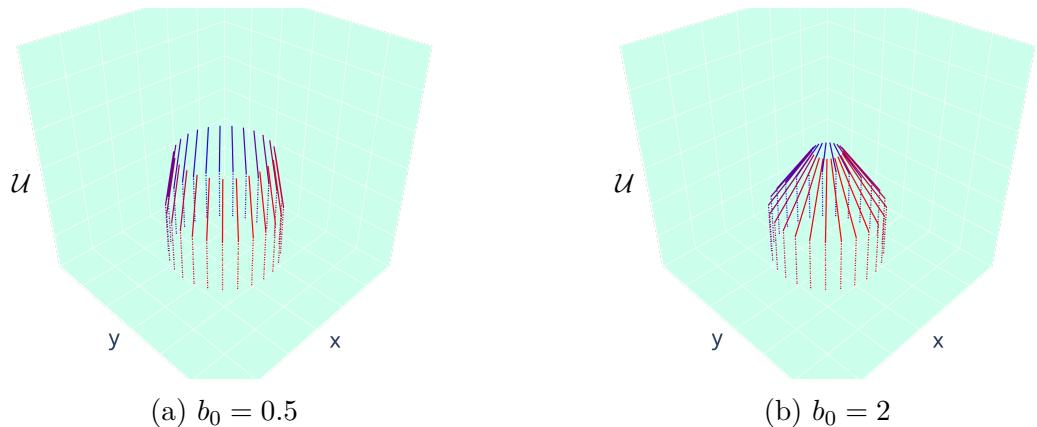
$H_{i,Z}$ , která vystupuje v refrakčních rovnicích, je pro jednotlivá  $m$

$$H_{i,Z}^{(m)}(\eta, \bar{\eta}) = -\frac{(\sqrt{2})^m b_m m}{\eta^{m+1}}. \quad (2.27)$$

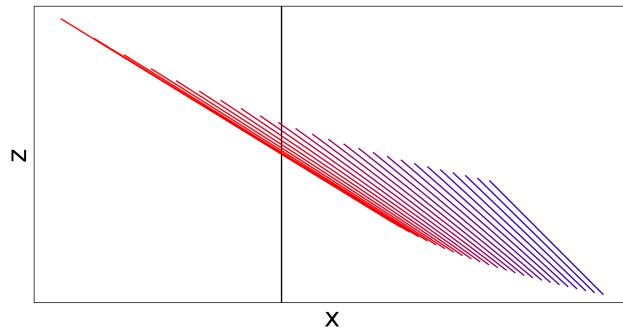
Speciálně pro  $m = 1$ , tedy impuls generovaný částicí s dipólovou strukturou, je  $H_{i,Z}^{(1)}$  vykreslena na obrázku 2.11. Reálná část a imaginární část odpovídají derivacím ve směru  $X$  a  $Y$  vystupujícím v refrakčních rovnicích (2.22) - přímo tedy ukazují závislost změny čtyřrychlosti v těchto směrech na místě průchodu geodetiky vlnoplochou.

$$\begin{aligned} Re(H_{i,Z}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} H_{i,X}, \\ Im(H_{i,Z}) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} H_{i,Y}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

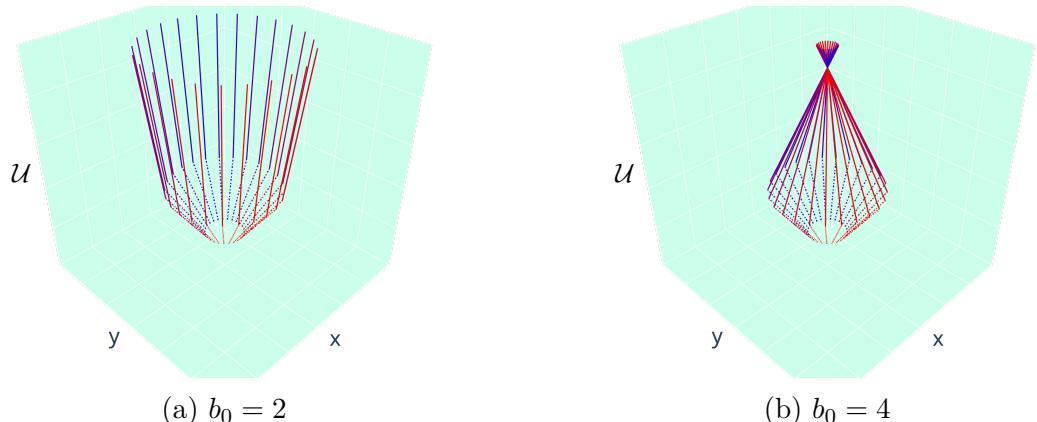
Příklad nulových geodetik procházejících impulsem s jediným nenulovým členem pro  $m = 1$  je na obrázku 2.11, pro časupodobné geodetiky dostáváme totožné chování (obrázek 2.13)



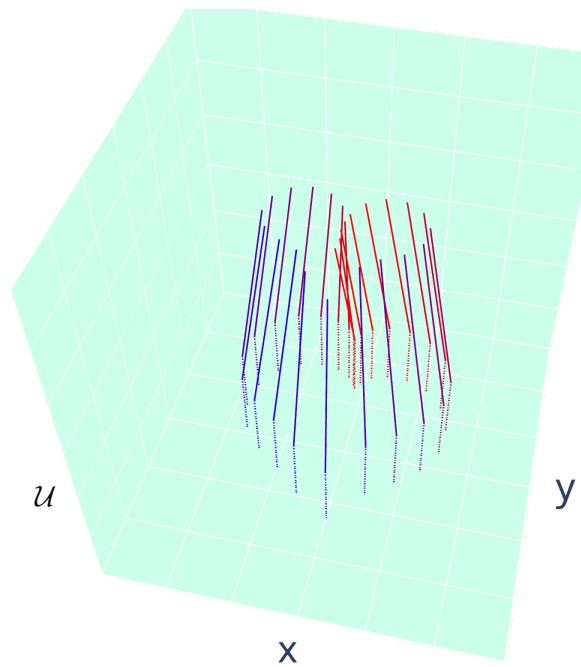
Obrázek 2.7: Časupodobné geodetiky ( $\dot{\mathcal{U}}^- = \frac{1}{2}$ ,  $\dot{\mathcal{V}}^- = 1$ ,  $\dot{\eta}^- = 0$ ) procházející impulsní vlnou AS řešení. Prstenec testovacích částic je před průchodem impulsem v  $\rho = 2$ .



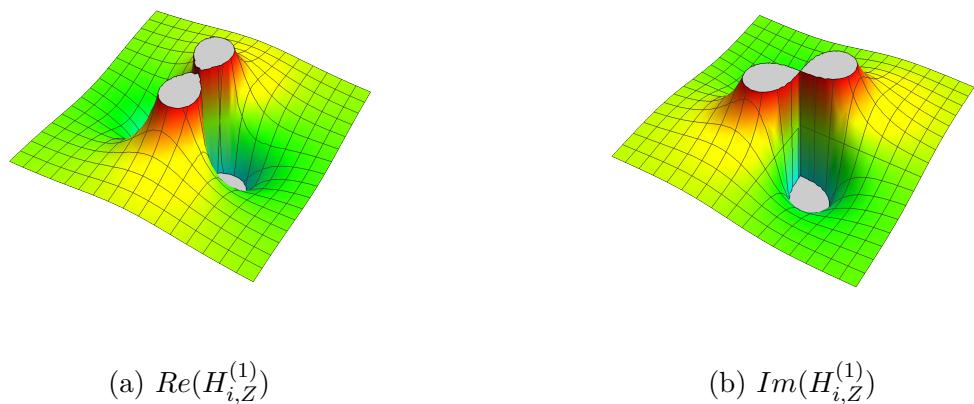
Obrázek 2.8: Refraktované časupodobné geodetiky po průchodu impulsem v různých vzdálenostech  $\rho$  pro  $b_0 = \frac{1}{2}$ . Červená barva odpovídá částici refraktované nejblíže ( $\rho = \frac{1}{2}$ ), modrá nejdále ( $\rho = 2$ ). Černá přímka odpovídá ose  $x = 0$ .



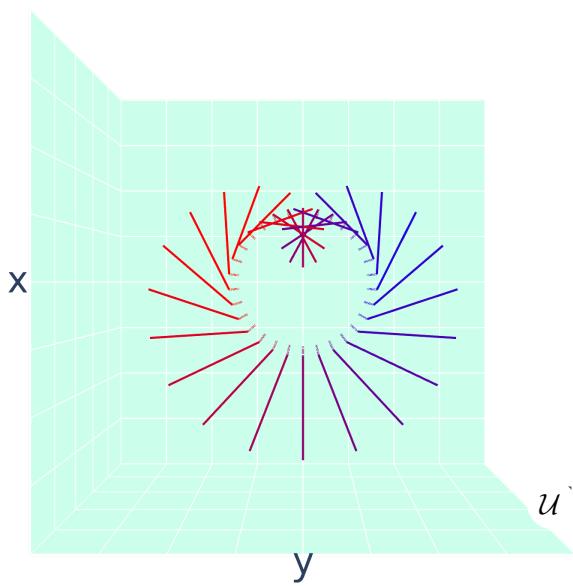
Obrázek 2.9: Časupodobné geodetiky ( $\dot{\mathcal{U}}^- = 1$ ,  $\dot{\mathcal{V}}^- = 2$ ,  $\dot{\eta}^- = \sqrt{\frac{3}{2}} e^{i\phi}$ ), kde  $\phi$  odpovídá úhlu v cylindrických souřadnicích, ve kterém částice leží, procházející impulsní vlnou AS řešení v  $\rho = 2$ .



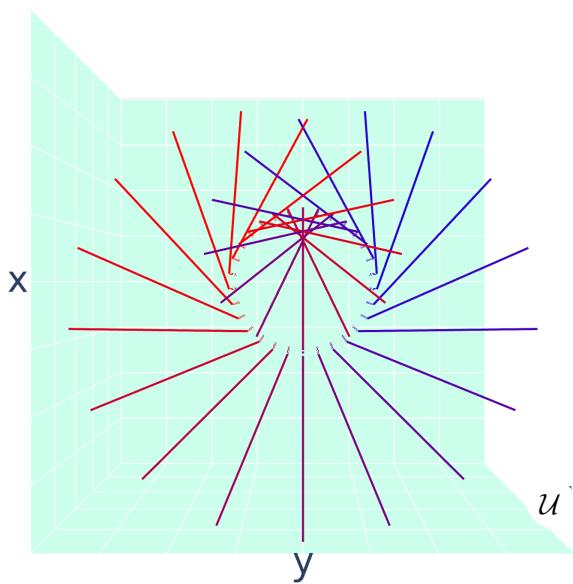
Obrázek 2.10: Časupodobné geodetiky ( $\dot{\mathcal{U}}^- = \frac{1}{2}$ ,  $\dot{\mathcal{V}}^- = 1$ ,  $\dot{\eta}^- = 0$ ) ve vybraném uspořádání procházející nadplochou  $\mathcal{U} = 0$ .



Obrázek 2.11: Reálná a imaginární část  $H_{i,Z}^{(1)}(x, y)$ .



Obrázek 2.12: Nulové geodetiky ( $\dot{\mathcal{U}}^- = 1, \dot{\mathcal{V}}^- = 0, \dot{\eta}^- = 0$ ) v axiálně symetrickém uspořádání ( $\rho = 1$ ) na  $\mathcal{M}^-$  procházející impulsní nadplochou vlny generované částicí s dipólovou strukturou, s parametrem  $b_1 = 0.2$ .



Obrázek 2.13: Časupodobné geodetiky ( $\dot{\mathcal{U}}^- = 0.5, \dot{\mathcal{V}}^- = 1, \dot{\eta}^- = 0$ ) v axiálně symetrickém uspořádání ( $\rho = 1$ ) na  $\mathcal{M}^-$  procházející impulsní nadplochou vlny generované částicí s dipólovou strukturou, s parametrem  $b_1 = 0.4$ .

### 2.3.2 Impulsní gravitační vlna generovaná nehmotnými částicemi s multipólovou strukturou s $\Lambda \neq 0$

V prostoročasech s nenulovou konstantou odvodili Griffiths a Podolský [14] tvar řešení obdobný (2.26), tedy impulsních vln generovaných nulovými částicemi s multipólovou strukturou. Vyšli z redukce Einsteinových rovnic pro distribuční metriku (2.13). V případě ryze gravitačních vln dostaváme podmínu

$$\left( \Delta + \frac{2}{3} \Lambda \right) \mathcal{H} = 0, \quad (2.29)$$

kde  $\Delta$  je Laplaceův operátor působící na impulsní nadploše. Při parametrizaci

$$\begin{aligned} Z_2 &= a\sqrt{\epsilon(1-z^2)} \cos \phi, \\ Z_3 &= a\sqrt{\epsilon(1-z^2)} \sin \phi, \\ Z_4 &= a z, \end{aligned} \quad (2.30)$$

kde  $|z| \leq 1$ , pokud je  $\Lambda > 0$ , a nebo  $|z| \geq 1$ , pokud je  $\Lambda < 0$ , nabývá funkce  $\mathcal{H}(z, \phi)$  tvaru

$$\mathcal{H}(z, \phi) = b_0 Q_1(z) + \sum_{m=1}^{\infty} b_0 Q_1^m(z) \cos[m(\phi - \phi_m)], \quad (2.31)$$

kde  $Q_1^m(z)$  jsou přidružené Legendrovy funkce druhého druhu

$$Q_1^m(z) = -(\epsilon)^m |1-z^2|^{m/2} \frac{d^m}{dz^m} Q_1(z). \quad (2.32)$$

První člen

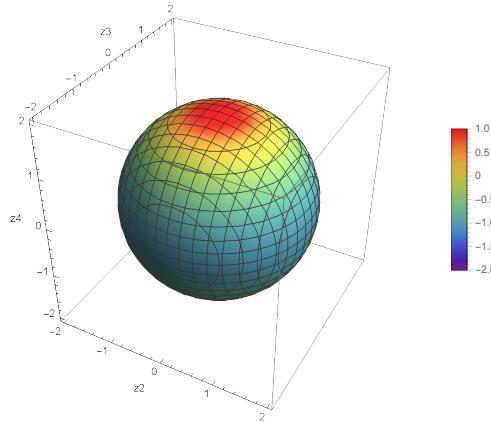
$$b_0 Q_1(z) = b_0 \left( \frac{z}{2} \log \left| \frac{1+z}{1-z} \right| - 1 \right) \quad (2.33)$$

představuje axiálně symetrické Hottovo-Tanakovo řešení [15], které odpovídá bohostu Schwarzschildova-(anti-)de Sitterova prostoročasu, jde o analogii Aichelburg-Sexlova řešení v (anti-)de Sitterově prostoročasu se singulární hmotou generující vlnu v  $z = 1$ . V případě de Sitterova prostoročasu je impulsní nadplocha neexpandující sféra generovaná dvěma nehmotnými částicemi, které letí v opačném směru. V anti-de Sitterově prostoročasu je impulsní nadplocha hyperboloidální plochou generovaná částicí, která se (díky tomu, že se jedná o nakrytí  $\mathbb{R}^4$  s topologií  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^3$ ) periodicky pohybuje mezi prostorovými nekonečny, z jedné strany na druhou.

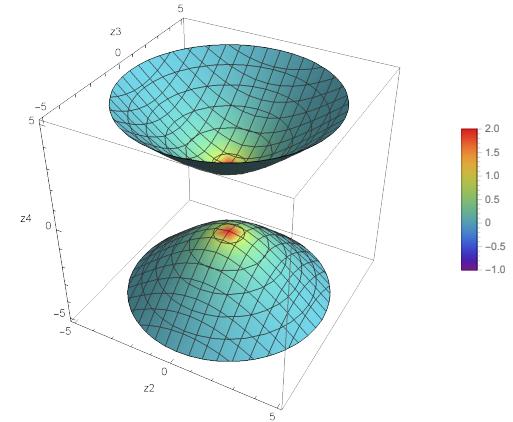
Na obrázku 2.14 vidíme hodnoty funkce  $\mathcal{H}(Z_2, Z_3, Z_4)$  Hotta-Tanakova řešení na vlnoploše v (a)-dS prostoročasu (s  $|\Lambda| = 1$ ).

Geodetický pohyb nulových částic je v konformně plochých souřadnicích nezávislý na hodnotě kosmologické konstanty, chování na impulsní ploše se pak liší pouze podle tvaru funkce  $H(\eta, \bar{\eta})$ , která má v případě Hottova-Tanakova řešení v konformně plochých souřadnicích tvar

$$H(\eta, \bar{\eta}) = \frac{1}{24} b_0 \left( (\Lambda \eta \bar{\eta} + 6) \log \left( \left| \frac{6}{\Lambda \eta \bar{\eta}} \right| \right) + 2(\Lambda \eta \bar{\eta} - 6) \right), \quad (2.34)$$



(a) de Sitterův prostoročas



(b) anti-de Sitterův prostoročas

Obrázek 2.14: Funkce  $\mathcal{H}$  má v de Sitterově prostoročasu singulární body na pólech sféry odpovídající vlnoploše ( $Z_4 = \pm a$ ), v anti-de Sitterově prostoročase singularity leží na vrcholech hyperboloidálních vlnoploch.

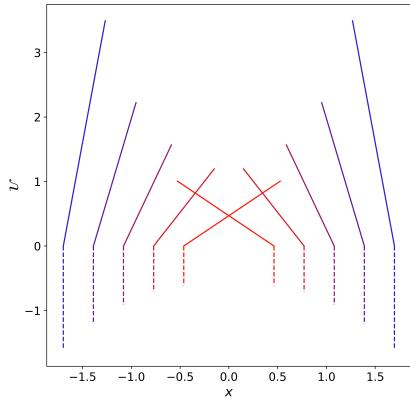
*podle několika výpočtů na papíře i v Mathematice to tak je, ale nelibí se mi chování pro  $\eta \rightarrow \infty$  a její derivaci ve směru  $\eta$ , resp.  $\bar{\eta}$ .*

První ukážeme pohyb nulových částic v nadploše  $y = 0$  (to znamená, že souřadnice  $\eta$  je reálná). Díky axiální symetrii tak zároveň prozkoumáme vlastnosti nulových geodetik ve všech nadplochách obsahujících osu této symetrie. Tento pohyb je pro řešení s  $b_0 = 1$  zobrazen v konformně plochých souřadnicích na obrázku 2.15.

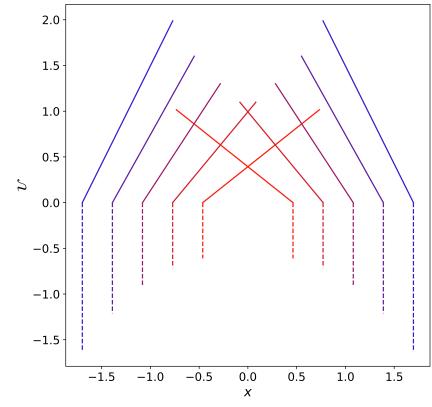
Pro nulové částice nenacházející se na nadploše obsahující osu symetrie dostáváme očekávané strhnutí k ose symetrie Hottova-Tanakova řešení, k  $\eta = 0$  (viz. 2.16).

Pro porovnání efektu impulsní vlny na časupodobné testovací částice v konformně plochých souřadnicích byly vykresleny případy geodetického pohybu v prostoročasu bez vlny a v prostoročasu s impulsní vlnou s parametrem  $b_0 = 3$ .

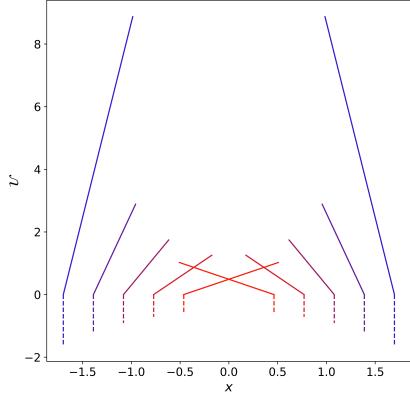
Dále vizualizujeme efekt refrakce geodetik v 5 dimenzionálním formalismu. Nulové geodetiky tvoří generátory (a)-dS hyperboloidu, protože při refrakci nedochází ke změně kauzálního charakteru, po refrakci zůstává geodetika generátorem hyperboloidu, ale, jak vyplývá z refrakčních rovnic, v jiné nadploše - dochází k refrakci ve všech směrech, kromě směru normály na vlnoplochu. Případ refrakce nulových částic na de Sitterově prostoročasu je na vizualizován na obrázku 2.18.



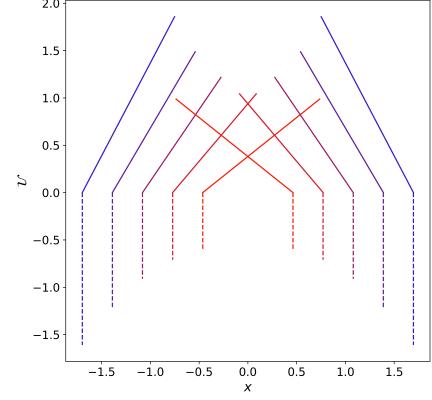
(a)  $\Lambda = 1$



(b)  $\Lambda = -1$

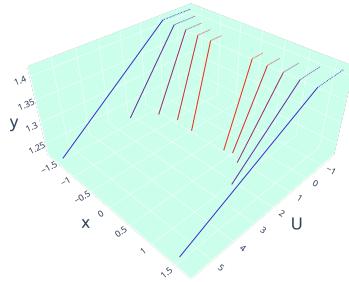


(c)  $\Lambda = 1.5$

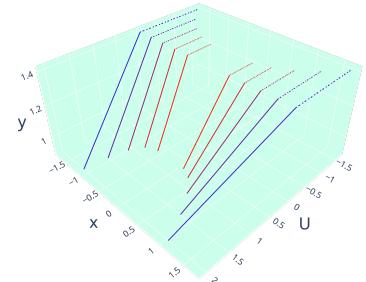


(d)  $\Lambda = -1.5$

Obrázek 2.15: Geodetický pohyb nulové částice ( $\dot{\mathcal{U}}^- = 1$ ,  $\dot{\mathcal{V}}^- = 0$ ,  $\dot{\eta}^- = 0$ ) v nadploše  $y = 0$  v Hottově-Tanakově řešení s parametrem  $b_0 = 1$ .

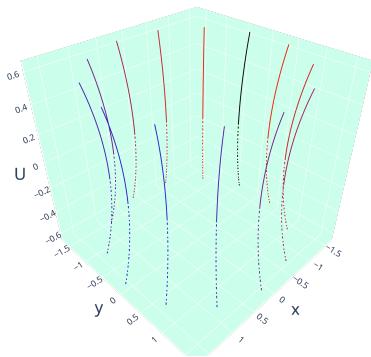


(a)  $\Lambda = 1$

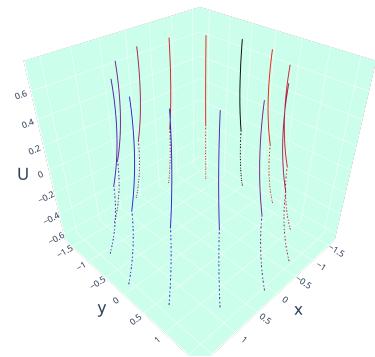


(b)  $\Lambda = -1$

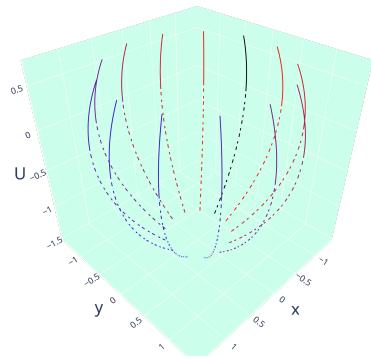
Obrázek 2.16: Geodetický pohyb nulové částice ( $\dot{\mathcal{U}}^- = 1$ ,  $\dot{\mathcal{V}}^- = 0$ ,  $\dot{\eta}^- = 0$ ) v nadploše  $y = \sqrt{2}$  v Hottově-Tanakově řešení s parametrem  $b_0 = 1$ .



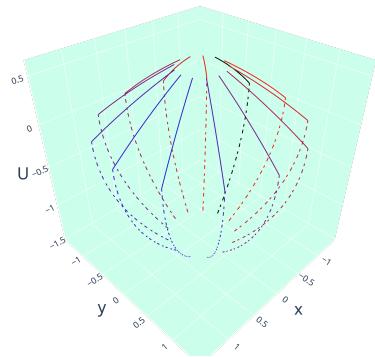
(a) de Sitter ( $\Lambda = 1$ )



(b) Hotta-Tanaka( $\Lambda = 1$ )

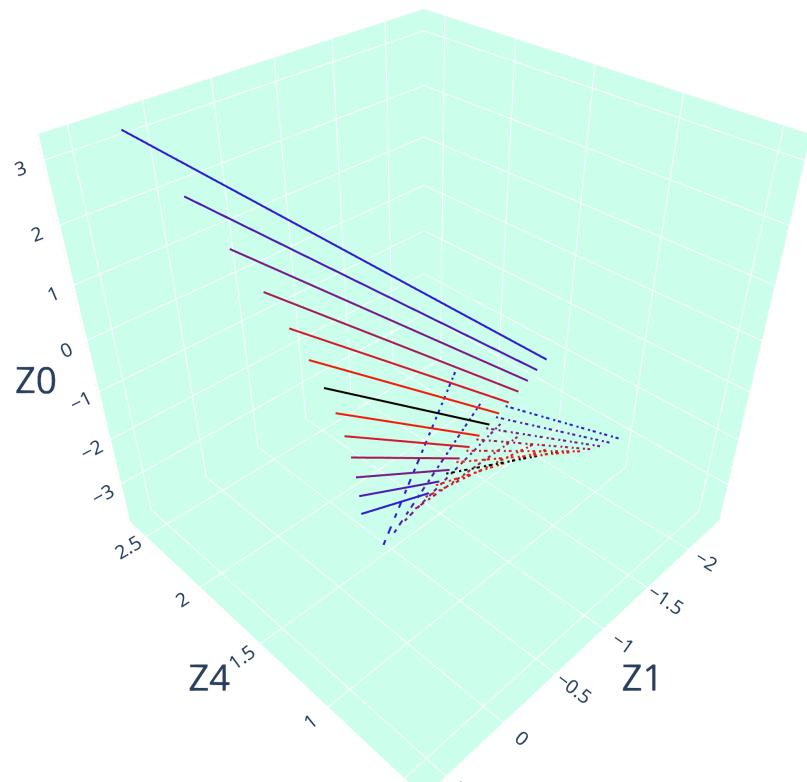


(c) Anti-de Sitter ( $\Lambda = -1$ )



(d) Hotta-Tanaka ( $\Lambda = -1$ )

Obrázek 2.17: Časupodobné geodetiky ( $\dot{\mathcal{U}}^- = \frac{1}{2N}$ ,  $\dot{\mathcal{V}}^- = -\frac{1}{N}$ ,  $\dot{\eta}^- = 0$ ), kde  $N$  je normalizační faktor, v (a)-dS a Hottově-Tanakově řešení s parametrem  $b_0 = 3$ .



Obrázek 2.18: Geodetický pohyb nulové částice ( $\dot{\mathcal{U}}^- = 1$ ,  $\dot{\mathcal{V}}^- = 0$ ,  $\dot{\eta}^- = 0$ ) procházející vlnoplochou  $\Lambda = 1$  Hottova-Tanakova řešení s parametrem  $b_0 = 1$  v  $\eta = 1,5$  a různých časech (tedy v různých hodnotách souřadnice  $\mathcal{V}$ ) vyobrazený ve vnoření do  $\mathbb{E}^{1,4}$ .

# 3. Neexpandující gravitační vlny s gyrationovými členy

Distribuční vyjádření metriky impulsní vlny (2.12) není nejobecnější metrikou popisující impulsní vlny. Lze jí rozšířit o mimodiagonální členy do tvaru

$$\begin{aligned} ds^2 = & \frac{2d\eta d\bar{\eta} - 2d\mathcal{U} d\mathcal{V} + 2H(\eta, \bar{\eta})\delta(\mathcal{U}) d\mathcal{U}^2}{\left[1 + \frac{1}{6}\Lambda(\eta\bar{\eta} - \mathcal{U}\mathcal{V})\right]^2} \\ & + \frac{2J(\eta, \bar{\eta}, \mathcal{U}) d\eta d\mathcal{U} + 2\bar{J}(\eta, \bar{\eta}, \mathcal{U}) d\bar{\eta} d\mathcal{U}}{\left[1 + \frac{1}{6}\Lambda(\eta\bar{\eta} - \mathcal{U}\mathcal{V})\right]^2}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Tvar metriky s mimodiagonálními členy odpovídající gravitační vlně byl uvažován už v Brinkmannově studii [16] Einsteinových prostoročasů svázaných konformními transformacemi.

Obvyklým postupem je odstranění členů s funkcí  $J$  vhodnou souřadnicovou transformací (Brinkmannova forma metriky pp-vln [tady bude reference](#) se také běžně uvádí už bez mimodiagonálních členů), to ale vede k odstranění možného rotačního charakteru zdroje gravitační vlny, taková transformace pak není globální a dochází ke změně topologických vlastností celého prostoročasu. V této kapitole budeme studovat a vizualizovat vliv nediagonálních prvků metriky.

## 3.1 Zobecnění impulsních vln na prostoročasy s gyrationovými členy

Konstrukce neexpandujících gracitačních vln s mimodagonálními gyrationovými členy je obdobná konstrukci prostoročasů bez gyrationů z minulé kapitoly, popíšeme ji formalismem spojitých souřadnic použitým v [17], kde jsou také odvozeny refrakční rovnice, pomocí kterých budeme vizualizovat geodetický pohyb procházející impulsní vlnoplochou.

Penroseova "cut and paste" konstrukce vede i v případě gyrationických prostoročasů na Penroseovy lepící podmínky ve tvaru (2.1), začneme tedy rovnou zobecněním spojitého tvaru metriky z předchozí kapitoly.

### 3.1.1 Zobecnění spojitého tvaru metriky

Tvar spojité metriky pro gyrationové neexpandující impulsní vlny obdržíme zobecněním transformace (2.8), do tvaru který našli Podolský, Švarc, Säman a Steinbauer v [17]

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= U \\ \mathcal{V} &= V + \Theta H + U_+ H_{,Z} H_{,\bar{Z}} + W \\ \eta &= (Z + U_+ H_{,\bar{Z}}) \exp(iF), \end{aligned} \quad (3.2)$$

kde opět  $H = H(Z, \bar{Z})$ , zároveň funkce  $W = W(Z, \bar{Z}, U)$  a  $F = F(Z, \bar{Z}, U)$

jsou reálné a splňují

$$\begin{aligned} F_{,U} &= \frac{i\bar{J}}{Z + U_+ H_{,\bar{Z}}} \exp(-iF), \\ W_{,U} &= -J\bar{J}, \\ W &= 0 \text{ pro } U \leq 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Zavedením

$$\zeta \equiv Z + U_+ H_{,\bar{Z}} \tag{3.4}$$

a prostorového diferenciálu  $\underline{d}$  tak, že

$$\begin{aligned} \underline{d}\zeta &\equiv dZ + U_+(H_{,\bar{Z}}ZdZ + H_{,\bar{Z}}\bar{Z}d\bar{Z}), \\ \underline{d}H &\equiv H_{,Z}dZ + H_{,\bar{Z}}d\bar{Z}, \\ \underline{d}F &\equiv F_{,Z}dZ + F_{,\bar{Z}}d\bar{Z}, \\ \underline{d}W &\equiv W_{,Z}dZ + W_{,\bar{Z}}d\bar{Z}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Dosazením (3.2) do (3.1) a využitím vztahů (3.3), (3.5) a multiplikativních pravidel z nelineární teorie distribucí,

$$\Theta^2 = \Theta, \quad \Theta U_+ = U_+, \tag{3.6}$$

dostaneme metriku ve spojitém tvaru

$$ds^2 = \frac{2|\underline{d}\zeta + i\zeta\underline{d}F|^2 + 2\left[i\Theta(\zeta H_{,Z} - \bar{\zeta}H_{,\bar{Z}})\underline{d}F - \underline{d}W\right]dU - 2dUdV}{\left[1 + \frac{1}{6}\Lambda(Z\bar{Z} - UV - U_+G)\right]^2}. \tag{3.7}$$

Volba  $J = 0$  dovoluje řešení  $F = W = 0$ , přičemž se metrika (3.7) redukuje na (2.7). (3.7) je spojitá v případě, že  $\underline{d}F$  a  $\underline{d}W$  jsou funkce spojité v  $U$  a  $\underline{d}F$  jde v  $U = 0$  k nule. V tomto případě je metrika lokálně lipschitzovská a lze využít formalismu Filippových řešení, jako v předchozí kapitole.

### 3.1.2 Frolovův-Fursaevův gyration

Dále budeme uvažovat metriku (3.1) s

$$J(\eta, \mathcal{U}) = \frac{\chi}{2i\eta}\Theta(\mathcal{U}), \Lambda = 0, \tag{3.8}$$

kde  $\chi$  je konstantní. Rovnice (3.3) lze zintegrovat do tvaru

$$\begin{aligned} F &= \frac{\chi}{2(ZH_{,Z} - \bar{Z}H_{,\bar{Z}})} \log \frac{Z\bar{Z} + U_+\bar{Z}H_{,\bar{Z}}}{Z\bar{Z} + U_+ZH_{,Z}}, \\ W &= \frac{\chi}{2}F, \end{aligned} \tag{3.9}$$

kde uvažujeme hlavní větev logaritmu (aby se zachovala rovnost  $\eta = Z$  pro  $U \leq 0$ ).

V případě, že  $ZH_{,Z} - \bar{Z}H_{,\bar{Z}} = 0 \equiv \log \frac{Z\bar{Z} + U_+\bar{Z}H_{,\bar{Z}}}{Z\bar{Z} + U_+ZH_{,Z}} = 0$ , tvar (3.9) není platný. Diferenciální operátor působící na funkci  $H$  v levé části ekvivalence lze (díky

$Z = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho \exp(i\phi)$ ) zapsat jako  $Z\partial_Z - \bar{Z}\partial_{\bar{Z}} = -i\partial_\phi$ , jedná se tedy o generátor rotace kolem osy  $Z = 0$ . Tento případ tedy nastává ve všech axiálně symetrických prostoročasech, kde funkce  $H$  závisí pouze na  $\rho^2 = 2Z\bar{Z}$ , včetně Aichelburg-Sexlova řešení  $H = b_0 \log(2\eta\bar{\eta}) = b_0 \log(2Z\bar{Z})$ , kterým se budeme dále zabývat. Funkce  $F$  a  $W$  lze volit ve tvaru

$$\begin{aligned} F &= -\frac{\chi}{2} \frac{U_+}{Z\bar{Z} + b_0 U_+}, \\ W &= \frac{\chi}{2} F, \end{aligned} \quad (3.10)$$

spojitá metrika nabývá tvaru z třídy Frolovových-Fursaevových gyratonů [18]

$$\begin{aligned} ds^2 = & 2 \left| dZ + U_+ \left( i \frac{\chi}{2} \frac{\bar{Z}dZ + Zd\bar{Z}}{\bar{Z}(Z\bar{Z} + b_0 U_+)} - b_0 \frac{d\bar{Z}}{\bar{Z}^2} \right) \right|^2 \\ & - \frac{\chi^2}{2} U_+ \frac{\bar{Z}dZdU + Zd\bar{Z}dU}{(Z\bar{Z} + b_0 U_+)^2} - 2dUdV \end{aligned} \quad (3.11)$$

reprezentujících zobecnění originální Aichelburg-Sexlovy metriky [13] na impulsní vlnu generovanou částicí s nenulovým vnitřním momentem hybnosti -  $\chi\Theta(\mathcal{U})$  odpovídá hustotě momentu hybnosti gyratonu [19]. Při absenci gyratonu ( $\chi = 0$ ) se metrika redukuje na standardní Aichelburg-Sexlovo řešení.

### 3.1.3 Frolovův-Fursaevův gyration s kosmologickou konstantou

## 3.2 Vizualizace geodetik v impulsních gyratono-vých prostoročasech

### 3.2.1 Refrakční rovnice pro Frolovův-Fursaevův gyration

Stejně jako v případě bez gyratono-vých členů v předchozí kapitole, i zde k vizualizaci geodetik využijeme refrakčních rovnic, které byly pro impulsní neexpandující gyratono-vé prostoročasy odvozeny z limity souřadnic (3.7) v  $\mathcal{U} = 0$  v článku [17], napojovací podmínky prostorových poloh jsou ve tvaru **jak upozornit na chybu ve článku?**

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_i^+ &= \mathcal{U}_i^-, \\ \mathcal{V}_i^+ &= \mathcal{V}_i^- + H_i, \\ \eta_i^+ &= \eta_i^-, \end{aligned} \quad (3.12)$$

což odpovídá Penroseovým napojovacím podmínkám (2.1), jejichž tvar nezávisí na přítomnosti gyratonickej členů. Co se bude lišit od výsledků popsaných v minulé kapitole jsou refrakční rovnice pro rychlosti,

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{U}}_i^+ &= \dot{\mathcal{U}}_i^-, \\ \dot{\mathcal{V}}_i^+ &= \dot{\mathcal{V}}_i^- + H_{i,Z}\dot{\eta}_i^- + H_{i,\bar{Z}}\dot{\eta}_i^- + \left( H_{i,Z}H_{i,\bar{Z}} - \frac{\chi^2}{4\eta_i^-\bar{\eta}_i^-} \right) \dot{\mathcal{U}}_i^- \\ \dot{\eta}_i^+ &= \dot{\eta}_i^- + \left( H_{i,\bar{Z}} - \frac{i\chi}{2\bar{\eta}_i^-} \right) \dot{\mathcal{U}}_i^-, \end{aligned} \quad (3.13)$$

kde gyrationové členy s  $\chi$  přispívají ke skoku ve složkách  $\dot{\mathcal{V}}_i$  a  $\dot{\eta}_i$  členy

$$\Delta\dot{\mathcal{V}}_i = -\frac{\chi^2}{4\bar{\eta}_i^- \bar{\eta}_i^-} \dot{\mathcal{U}}_i^-, \quad \Delta\dot{\eta}_i = -\frac{i\chi}{2\bar{\eta}_i^-} \dot{\mathcal{U}}_i^-. \quad (3.14)$$

Tyto skoky navíc se díky  $C^1$ -regularitě geodetik a spojitosti metriky kompenzují – normalizace čtyřrychlosti musí být zachována a platí

$$\Delta\dot{\eta}_i \Delta\dot{\eta}_i = -\dot{\mathcal{U}}_i \Delta\dot{\mathcal{V}}_i. \quad (3.15)$$

Tyto skoky pro  $\eta_i^- \rightarrow 0$  rostou nad všechny meze, toto chování ale očekáváme – v  $\eta_i = 0$  se nachází bodový zdroj. Pro  $\chi \rightarrow 0$  se tyto rovnice redukují na rovnice (2.17) z minulé kapitoly.

Obdobně jako v předchozí kapitole, refrakční rovnice (3.13) můžeme také zapsat v reálných polárních souřadnicích jako

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_i^+ &= \dot{\mathcal{V}}_i^- + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( e^{i\varphi_i^-} H_{i,Z} + e^{-i\varphi_i^-} H_{i,\bar{Z}} \right) \dot{\rho}_i^- + \frac{i}{\sqrt{2}} \left( e^{i\varphi_i^-} H_{i,Z} - e^{-i\varphi_i^-} H_{i,\bar{Z}} \right) \rho_i^- \dot{\varphi}_i^- \\ &\quad + \left( H_{i,Z} H_{i,\bar{Z}} - \frac{\chi^2}{2(\rho_i^-)^2} \right) \dot{\mathcal{U}}_i^-, \\ \dot{\rho}_i^+ &= \dot{\rho}_i^- + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( e^{-i\varphi_i^-} H_{i,\bar{Z}} + e^{i\varphi_i^-} H_{i,Z} \right), \\ \dot{\varphi}_i^+ &= \dot{\varphi}_i^- + \left[ \frac{i}{\sqrt{2}\rho_i^-} \left( e^{i\varphi_i^-} H_{i,Z} - e^{-i\varphi_i^-} H_{i,\bar{Z}} \right) - \frac{\chi}{(\rho_i^-)^2} \right] \dot{\mathcal{U}}_i^-. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Z tohoto tvaru vidíme, že přítomnost gyraonických členů nemá vliv na radiální složku  $\dot{\rho}$ , přispívá ale k další změně v axiální složce  $\dot{\varphi}_i$  členem  $-\frac{\chi}{(\rho_i^-)^2}$ .

# 4. Spinorový popis expandujících gravitačních vln

V této kapitole zavedeme spinorový formalismus na Minkowského prostoročase, následně jej použijeme k popisu expandujících impulsních gravitačních vln. S běžným popisem expandujících gravitačních vln se lze seznámit např. v [20], [21], [další....](#) Spinorový formalismus vybudujeme na základě geometrického přístupu i přes široce uznávaný názor, že nejpřirozenější popis spinorů je v řeči teorie reprezentací (např. [22]). Geometrická konstrukce spinorů je ale pro použití v relativitě jakožto geometrické teorii, příhodnější a tohoto přístupu pak využívají právě práce zabývající se čistě relativistickým využitím spinorů, například [23], [24].

## 4.1 Spinorový formalismus

### 4.1.1 Krátký úvod do 2-spinorů

Definujme zde Minkowského prostor  $\mathbb{M}$  jako čtyřdimenzionální vektorový prostor nad  $\mathbb{R}$  s Lorentzovskou metrikou  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . V každém bodě prostoru  $\mathbb{R}^4$  existuje množina bázových vektorů z  $\mathbb{M}$  kterou nazýváme tetrádou. Vezměme světelný kužel v  $\mathbb{M}$ , tedy úplný podprostor, kde pro každý vektor platí

$$\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = 0. \quad (4.1)$$

Každému časupodobnému nebo světelnému vektoru v prostoročasu přiřazujeme orientaci vůči počátku světelného kuželeg, může mít do minulosti nebo do budoucnosti, světelný kužel tak rozdělíme na budoucí a minulý. Průnikem světelného kuželeg s plochou konstantního času dostaneme sféru v  $\mathbb{R}^3$ . Pokud leží nadplocha konstantního času v souřadnici  $x^0 = t = 1$ , představuje vzniklá sféra tzv. Riemannovu sféru  $\Sigma$  pro kterou platí rovnice

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (4.2)$$

Stereografickou projekcí pak můžeme ztotožnit sféru  $\Sigma$  s rozšířenou komplexní rovinou  $\tilde{\mathbb{C}}$  (tedy  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ) a body  $x$ ,  $y$  a  $z$  na sféře můžeme popsat jednou komplexní souřadnicí, které se obvykle říká stereografická souřadnice,

$$\xi = \frac{x + iy}{1 - z}, \quad (4.3)$$

případně v polárních souřadnicích  $(\theta, \phi)$

$$\xi = e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2}. \quad (4.4)$$

Inverzní vztahy jsou pak

$$x = \frac{\xi + \bar{\xi}}{\xi \bar{\xi} + 1}, \quad y = \frac{\bar{\xi} - \xi}{\xi \bar{\xi} + 1}, \quad z = \frac{\xi \bar{\xi} - 1}{\xi \bar{\xi} + 1}. \quad (4.5)$$

Dále zavedeme složky spinoru  $\xi^A$ ,  $\xi^A = (\zeta, \eta)$ , jako

$$\xi = \frac{\zeta}{\eta}, \quad (4.6)$$

vyhneme se tak nekonečné hodnotě stereografické souřadnice pro horní (severní) pól Riemannovy sféry. Nyní potřebujeme udělat jistou formalizaci indexové notace. Pokud je horní (a později i dolní) index tučný, jedná se o tzv. abstraktní index, který není svázaný se spinorovou bází, kterou zavedeme dále, ale pouze naznačuje strukturu objektu. Pokud index není tučný, jedná se přímo o souřadnicový index, který nabývá hodnot 1, 2 a je svázaný s bází. Je zřejmé, že spinor  $\xi^A$  a stereografická souřadnice  $\xi$  jsou i přes použití podobného značení dva odlišné objekty. Pomocí komponent spinoru lze popsat libovolný bod  $(t, x, y, z)$  na světelném kuželu jako

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\zeta \bar{\zeta} + \eta \bar{\eta}) \\ x &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\zeta \bar{\eta} + \eta \bar{\zeta}) \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\zeta} \eta - \eta \bar{\zeta}) \\ z &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\zeta \bar{\zeta} - \eta \bar{\eta}). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Na prostoru spinorů se dále zavádí 2-forma  $[\cdot, \cdot]$ , která je

- (1) antisymetrická,
- (2) bilineární a
- (3) nedegenerovaná.

Všimněme si, že kombinací prvních dvou podmínek dostaneme pro dva lineárně závislé spinory (tedy pro dvojici  $(\xi^A, \kappa^A)$  takové, že  $\kappa^A = \lambda \xi^A$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ )

$$[\xi^A, \kappa^A] = 0. \quad (4.8)$$

Z třetí podmínky ale máme

$$[\xi^A, \eta^A] \neq 0 \quad (4.9)$$

pro všechny  $\xi^A, \eta^A$  z prostoru spinorů.

Tuto 2-formu obvykle zapisujeme symbolem  $\epsilon_{AB}$ , jedná se o tzv. Levi-Civitův spinor a na prostoru spinorů zavádí skalární součin

$$\epsilon_{AB} \xi^A \eta^B = \xi_B \eta^B = -\xi^A \eta_A \quad (4.10)$$

a zastává tedy funkci obdobnou metrickému tenzoru. Zápis (4.10) lze také vyjádřit jako

$$\xi^A = \epsilon^{AB} \xi_B, \quad \xi_A = \epsilon_{BA} \xi^B, \quad (4.11)$$

kde platí

$$\epsilon^{AC} \epsilon_{BC} = \delta_B^A. \quad (4.12)$$

Dále se zavádí spin-báze  $(o^A, \iota^A)$  tak, aby platilo

$$[o^A, \iota^A] = -[\iota^A, o^A] = 1. \quad (4.13)$$

Tak formálně propojíme souřadnicový zápis  $\xi^A$  se samotným spinorem  $\xi^A$

$$\xi^A = \xi^0 o^A + \xi^1 \iota^A \quad (4.14)$$

Z prvků báze lze pomocí dyadického součinu sestrojit Levi-Civitův spinor. S využitím normalizačních podmínek (4.13) a vlastnosti (4.11) dostaneme vztah

$$\epsilon_{AB} = o_A \iota_B - o_B \iota_A. \quad (4.15)$$

V transformaci spinorových složek na reálné souřadnice (4.7) máme komplexně sdružené složky spinorů, operace komplexního sdružení ale není uzavřená na prostor spinorů, což lze jednoduše ukázat když sečteme složky spinoru se složkami komplexně sdruženého - výsledný objekt má reálné složky. Operace komplexního sdružení tedy zobrazuje spinory na prostor komplexně sdružených spinorů a píšeme

$$\overline{\xi^A} = \bar{\xi}^{A'}. \quad (4.16)$$

Komplexním sdružením spinorové báze dostáváme bázi prostoru komplexně sdružených spinorů

$$\overline{o^A} = \bar{o}^{A'} = o^{A'}, \quad \overline{\iota^A} = \bar{\iota}^{A'} = \iota^{A'}. \quad (4.17)$$

U Levi-Civitova spinoru je stejně jako u složek spin-báze konvence psát  $\overline{\epsilon_{AB}} = \epsilon_{A'B'}$  a ne  $\bar{\epsilon}_{A'B'}$  jak bychom mohli očekávat.

Nejobecnějším typem spinoru je pak spinor s tzv. valencí  $(p, q; r, s)$  který zapisujeme jako

$$\chi^{A\dots C \ S'\dots U'}_{\ D\dots F \ W'\dots Y'}, \quad (4.18)$$

který má  $p$  kontravariantní nečárkovany indexy,  $q$  kontravariantní čárkovany indexy,  $r$  kovariantní nečárkovany indexy a  $s$  kovariantní čárkovany indexy. Obecně platí

$$\chi^{AB'}_{\ CD'} = \chi^{B'A}_{\ D'C} = \chi^A_C \delta^{B'}_{D'}, \quad (4.19)$$

tedy čárkovany indexy můžeme libovolně prohazovat s nečárkovany, musí ale zůstat pozice čárkovany mezi sebou a nečárkovany mezi sebou.

Nyní jsme kompletně vybaveni k přepsání vztahů (4.7) do zápisu čistě pomocí spinorů. Využijeme k tomu Infield-van der Waerdenovy symboly  $\sigma_\mu^{AA'}$ . Ty můžeme v Minkowského prostoru reprezentovat čtyřmi hermitovskými maticemi

$$\begin{aligned} \sigma_0^{AA'} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \sigma_1^{AA'} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_2^{AA'} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_3^{AA'} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Tyto symboly nám dávají propojení mezi **world-tensor** (překlad) a spinory. Komponenty (4.7) vektoru ležícího na světelném kuželu pomocí spinoru se složkami  $\xi^A = (\zeta, \eta)$  zapíšeme jako

$$x^\mu = \bar{\xi}^{A'} \sigma_{AA'}^\mu \xi^A. \quad (4.21)$$

Dále zavedeme spinorovou formu vektoru  $x^\mu$

$$x^{AA'} = \sigma_\mu^{AA'} x^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

**Je tohle správně? Je to jen speciální případ na Minkowského PČ - spinová struktura na varietě  $\mathcal{M}$  je ekvivariantní lift frame bandlu - rozmyslet jak ten funguje Z Levi-Civitových spinorů a Infield-van der Waerdenových symbolů můžeme zkonztruovat metriku**

$$g_{\mu\nu} = \epsilon_{AB} \epsilon_{A'B'} \sigma_\mu^{AA'} \sigma_\nu^{BB'}. \quad (4.23)$$

Obecně můžeme s pomocí těchto symbolů vyjádřit spinory libovolné valence jako tenzory a naopak.

Ve výpočtech se obvykle Infield-van der Waerdenovy symboly vynechávají a rovnou se píše

$$g_{\mu\nu} = \epsilon_{AB} \epsilon_{A'B'}. \quad (4.24)$$

Z tvaru Infield-van der Waerdenových symbolů je vidět korespondence mezi tenzorovými a spinorovými indexy, každému tenzorovému indexu odpovídají dva spinorové.

Pomocí spinorové báze můžeme zavést světelnou (nulovou) tetrádu vztahy

$$\begin{aligned} l^a &= o^A o^{A'}, \\ n^a &= \iota^A \iota^{A'}, \\ m^a &= o^A \iota^{A'}, \\ \bar{m}^a &= \iota^A o^{A'} \end{aligned} \quad (4.25)$$

kde  $l^a, n^a, m^a$  a  $\bar{m}^a$  jsou normalizované světelné vektory tvořící bázi.

## 4.2 Expandující gravitační vlny

### 4.2.1 Refrakční rovnice

# Závěr

# Seznam použité literatury

- [1] Jiří Bičák. Selected solutions of Einstein's field equations: Their role in general relativity and astrophysics. *Lect. Notes Phys.*, 540:1–126, 2000.
- [2] Roger Penrose. *The geometry of impulsive gravitational waves*, pages 101–115. 1972.
- [3] Jiří Podolský and Jerry B. Griffiths. Impulsive gravitational waves generated by null particles in de Sitter and anti-de Sitter backgrounds. *Phys. Rev. D*, 56:4756–4767, 1997.
- [4] Jiří Podolský, Clemens Sämann, Roland Steinbauer, and Robert Švarc. The global existence, uniqueness and  $C^1$ -regularity of geodesics in nonexpanding impulsive gravitational waves. *Class. Quant. Grav.*, 32(2):025003, 2015.
- [5] Penrose Roger. Twistor quantisation and curved space-time. *Int J Theor Phys*, 1:61–99, 1968.
- [6] Jiří Podolský and Karel Veselý. New examples of sandwich gravitational waves and their impulsive limit. *Czechoslovak Journal of Physics*, 48(8):871–878, 1998.
- [7] Jiří Podolský. Non-expanding impulsive gravitational waves. *Classical and Quantum Gravity*, 15(10):3229–3239, oct 1998.
- [8] Ronald Steinbauer. Geodesics and geodesic deviation for impulsive gravitational waves. *Journal of Mathematical Physics*, 39(4):2201–2212, apr 1998.
- [9] Michael Kunzinger and Ronald Steinbauer. A rigorous solution concept for geodesic and geodesic deviation equations in impulsive gravitational waves. *Journal of Mathematical Physics*, 40(3):1479–1489, mar 1999.
- [10] Jiří Podolský and Marcello Ortaggio. Symmetries and geodesics in (anti-)de sitter spacetimes with non-expanding impulsive waves. *Classical and Quantum Gravity*, 18(14):2689–2706, jun 2001.
- [11] Alexej. F. Filippov. *Differential equations with discontinuous righthand sides*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Netherlands Boston, 1988.
- [12] Jerry B. Griffiths and Jiří Podolský. Null multipole particles as sources of pp-waves. *Physics Letters A*, 236(1-2):8–10, dec 1997.
- [13] Peter C. Aichelburg and Roman U. Sexl. On the gravitational field of a massless particle. *General Relativity and Gravitation*, 2(4):303–312, 1971.
- [14] Jiří Podolský and Jerry B. Griffiths. Impulsive waves in de sitter and anti-de sitter space-times generated by null particles with an arbitrary multipole structure. 1997.
- [15] M Hotta and M Tanaka. Shock-wave geometry with nonvanishing cosmological constant. *Classical and Quantum Gravity*, 10(2):307–314, feb 1993.

- [16] W. Hans Brinkmann. Einstein spaces which are mapped conformally on each other. *Mathematische Annalen*, 94(1):119–145, dec 1925.
- [17] Jiří Podolský, Robert Švarc, Ronald Steinbauer, and Clemens Sämann. Penrose junction conditions extended: Impulsive waves with gyratons. *Physical Review D*, 96(6), 2017.
- [18] Valeri P. Frolov and Dmitri V. Fursaev. Gravitational field of a spinning radiation beam pulse in higher dimensions. *Physical Review D*, 71(10), may 2005.
- [19] Jiří Podolský, Ronald Steinbauer, and Robert Švarc. Gyratonic pp-waves and their impulsive limit. *Physical Review D*, 90(4), aug 2014.
- [20] Jiří Podolský and Jerry B. Griffiths. Expanding impulsive gravitational waves. *Classical and Quantum Gravity*, 16(9):2937–2946, aug 1999.
- [21] Jiří Podolský, Clemens Sämann, Roland Steinbauer, and Robert Švarc. The global uniqueness and  $C^1$ -regularity of geodesics in expanding impulsive gravitational waves. *Class. Quant. Grav.*, 33(19):195010, 2016.
- [22] Marián Fecko. *Differential Geometry and Lie Groups for Physicists*. Cambridge University Press, 2006.
- [23] Roger Penrose and Wolfgang Rindler. *Spinors and Space-Time*, volume 1 of *Cambridge Monographs on Mathematical Physics*. Cambridge University Press, 1984.
- [24] Peter O’Donnell. *Introduction to 2-Spinors in General Relativity*. WORLD SCIENTIFIC, 2003.