



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA
Univerzita Karlova**

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Daniel Rod

**Interakce testovacích částic s
impulzními gravitačními vlnami**

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Robert Švarc, Ph.D.

Studijní program: studijní program

Studijní obor: studijní obor

Praha 2021

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne
Podpis autora

Poděkování.

Název práce: Interakce testovacích částic s impulzními gravitačními vlnami

Autor: Daniel Rod

Ústav: Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Robert Švarc, Ph.D., Ústav teoretické fyziky

Abstrakt: Abstrakt.

Klíčová slova: klíčová slova

Title: Interaction of test particles with impulsive gravitational waves

Author: Daniel Rod

Institute: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: RNDr. Robert Švarc, Ph.D., Institute of Theoretical Physics

Abstract: Abstract.

Keywords: key words

Obsah

Úvod	2
1 Prostoročasy konstantní křivosti	3
1.1 Minkowskeho prostoročas	3
1.2 de Sitterův prostoročas	4
1.3 Anti-de Sitterův prostoročas	6
2 Neexpandující impulsní gravitační vlny	8
2.1 Konstrukce	8
2.1.1 "Cut and paste" metoda konstrukce	8
2.1.2 Spojitý tvar metriky	9
2.1.3 Distribuční tvar metriky	10
2.1.4 \mathcal{C}^1 -matching a refrakční rovnice	11
2.1.5 Vizualizace geodetik prostoročasů s neexpandující impulsní vlnou	14
2.1.6 Impulsní gravitační vlna generovaná nehmotnými částicemi s multipólovou strukturou s $\Lambda = 0$	14
2.1.7 Impulsní gravitační vlna generovaná nehmotnými částicemi s multipólovou strukturou s $\Lambda \neq 0$	20
3 Neexpandující gravitační vlny s gyratonovými členy	21
3.1 Zobecnění impulsních vln na prostoročasy s gyratonovými členy	21
3.1.1 Zobecnění spojitého tvaru metriky	21
3.1.2 Gyraton s $J \propto \Theta$	22
3.2 Interakce gyratonů s testovacími částicemi	22
3.2.1 Refrakční rovnice	22
4 Spinorový popis expandujících gravitačních vln	23
4.1 Spinorový formalismus	23
4.1.1 Krátký úvod do 2-spinorů	23
4.2 Expandující gravitační vlny	26
4.2.1 Refrakční rovnice	26
Závěr	27
Seznam použité literatury	28

Úvod

Obecná teorie relativity

Roku 1915 publikoval Albert Einstein Obecnou teorii relativity, nejmodernější a doposud nejúspěšnější teorii gravitace. Za více jak 100 let od její formulace byly v nesčetném množství experimentů úspěšně ověřeny její předpovědi, včetně první detekce gravitačních vln v roce 2015 na interferometrech LIGO v Livingstonu a Hanfordu, která byla následována desítkami dalších detekcí k nimž nyní přispívá i evropský projekt VIRGO. **Další zajímavé experimentální ověření?**

Obecná teorie relativity je geometrická teorie popisující chování hmoty a energie v prostoročasu, který reprezentuje jako diferenciální varietu vybavenou metrickým tenzorem $g_{\mu\nu}$. Tvar metrického tenzoru, resp. jeho složek (metrických funkcí) je s fyzikální realitou gravitačního pole spojen Einsteinovými rovnicemi, které mají v geometrizovaných jednotkách tvar

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (1)$$

Jedná se o 10 nelineárních parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu, jejichž levá strana představuje geometrii na diferenciální varietě reprezentující prostoročas, $R_{\mu\nu}$ je Ricciho tenzor křivosti, R je Ricciho skalární křivost a Λ představuje tzv. kosmologickou konstantu. Tenzor energie a hybnosti $T_{\mu\nu}$ na pravé straně pak dává spojení geometrických objektů s fyzikálním modelem, představuje rozložení hmoty, energie a jejich toky a hybnosti. 10 nezávislých složek Ricciho tenzoru lze v Newman Penroseově formalismu **odkaz na příslušnou kapitolu (spinory nebo appendix, ještě uvidíme)** popsat pomocí šesti obecně komplexních skalárních funkcí, které závisí na tzv. lokální tetrádě. Tyto funkce značíme Φ_{ij} , kde indexy $i, j = 0, 1, 2$. **mám zde uvést i definici?**

Kromě metrického tenzoru je na prostoročasové varietě definovaná lineární konexe

1. Prostoročasy konstantní křivosti

V této kapitole představíme prostoročasy, které budou sloužit jako pozadí pro propagaci impulsních gravitačních vln. Jde o maximálně symetrická řešení Einsteinových polních rovnic (1) s nulovou pravou stranou a s konstantní skalární křivostí R na celém prostoročase. Celkem rozlišujeme 3 třídy řešení lišící se znaménkem skalární křivosti. Nulová skalární křivost odpovídá řešení s nulovou kosmologickou konstantou, kterému se říká Minkowského prostoročas, kladná křivost odpovídá tzv. de Sitterovu prostoročasu s kladnou kosmologickou konstantou a záporná odpovídá anti-de Sitterovu prostoročasu se zápornou kosmologickou konstantou. Vztah mezi kosmologickou konstantou a skalární křivostí ve vakuumových řešeních (tedy s nulovým tenzorem energie a hybnosti) dostaneme kontrakcí polních rovnic (1) jako

$$R = 4\Lambda. \quad (1.1)$$

Všechna tato řešení vykazují deset generátorů symetrie, které se však pro jednotlivá znaménka kosmologické konstanty liší.

I přes svou jednoduchost jsou zmíněné prostoročasy na poli teoretické fyziky velmi podstatné, čtyřdimenzionální Minkowského prostoročas je arénou speciální teorie relativity, vícenaměřicí Minkowského prostoročas pak běžně slouží jako vhodný prostor pro vnoření složitějších prostoročasů. De-Sitterův prostoročas je pro moderní fyziku důležitý při popisu vesmíru, experimentální data ukazují, že v approximaci do prvního rádu jej lze právě na velkých škálách (a také v inflační epoše) popsat právě jako de Sitterův prostoročas. Anti-de Sitterův prostoročas... [1] [zde zajímavosti o jednotlivých řešeních stručně \(Minkowski - STR, AdS - CFT korespondence atp...\)](#)

1.1 Minkowského prostoročas

Minkowského prostoročas $\mathbb{E}^{1,3}$ je nejjednodušší řešení Einsteinových polních rovnic s nulovou pravou stranou. Jde o řešení s nulovou křivostí v celém prostoročase. Grupou symetrií Minkowského prostoročasu je Poincarého grupa, která je tvořena všemi translacemi a Lorentzovou grupou představující rotace a boosty.

Metrika Minkowského prostoročasu má v nejpřirozenějším vyjádření, v kartézských souřadnicích, tvar

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (1.2)$$

Souřadnicovými transformacemi

$$\mathcal{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}(t - z), \quad \mathcal{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + z) \quad (1.3)$$

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy), \quad \bar{\eta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - iy) \quad (1.4)$$

přivedeme metriku do symetrického tvaru

$$ds^2 = -2 d\mathcal{U} d\mathcal{V} + 2 d\eta d\bar{\eta}. \quad (1.5)$$

Souřadnicím zavedeným transformací (1.3) se říká retardovaná a advancovaná souřadnice, metrika (1.5) je pak v tzv. světelných (nulových) souřadnicích. Pokud zkoumáme axiálně symetrickou situaci na pozadí Minkowského prostoročasu, je vhodné zavést cylindrické souřadnice parametrizací

$$x = \rho \cos(\varphi), \quad y = \rho \sin(\varphi), \quad (1.6)$$

kde $\rho \in [0, \infty)$ a $\varphi \in [0, 2\pi]$. Metrika pak nabývá tvaru

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2. \quad (1.7)$$

V Minkowského prostoročase jsou složky affinní konexe v kartézských souřadnicích, kterým odpovídá metrika 1.2, identicky nulové. Řešení rovnice geodetiky pak nabývá tvaru přímek

$$\begin{aligned} t(\lambda) &= t_0 + \lambda \dot{t}_0 \\ x(\lambda) &= x_0 + \lambda \dot{x}_0 \\ y(\lambda) &= y_0 + \lambda \dot{y}_0 \\ z(\lambda) &= z_0 + \lambda \dot{z}_0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

kde veličiny s dolním indexem 0 představují počáteční podmínky.

1.2 de Sitterův prostoročas

De Sitterův prostoročas dS_4 je maximálně symetrické vakuové řešení Einsteinových rovnic s kladnou kosmologickou konstantou Λ . Isometrie čtyřrozměrného de Sitterova prostoročasu tvoří grupu $SO(1, 4)$. De Sitterův prostoročas topologicky odpovídá $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^3$ a lze jej přirozeně reprezentovat jako vnoření hyperboloidu

$$-Z_0^2 + Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 = a^2 \quad (1.9)$$

do pětidimenzionálního Minkowského prostoru $\mathbb{E}^{1,4}$ s metrikou

$$ds^2 = -dZ_0^2 + dZ_1^2 + dZ_2^2 + dZ_3^2 + dZ_4^2. \quad (1.10)$$

Konstanta a je daná kosmologickou konstantou jako $a = \sqrt{3/\Lambda}$.

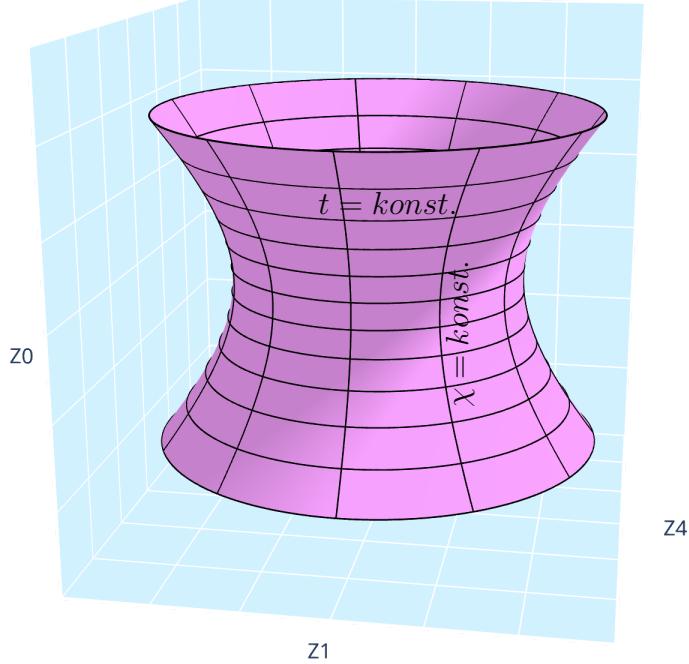
Přirozenou parametrizací celého de-Sitterova prostoročasu jsou souřadnice (t, χ, θ, ϕ)

$$\begin{aligned} Z_0 &= a \sinh \frac{t}{a} \\ Z_1 &= a \cosh \frac{t}{a} \cos \chi \\ Z_2 &= a \cosh \frac{t}{a} \sin \chi \cos \theta \\ Z_3 &= a \cosh \frac{t}{a} \sin \chi \sin \theta \cos \phi \\ Z_4 &= a \cosh \frac{t}{a} \sin \chi \sin \theta \sin \phi, \end{aligned} \quad (1.11)$$

kde $t \in (-\infty, +\infty)$, $\chi \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, \pi]$ a $\phi \in [0, 2\pi]$. Souřadnicové singularity v $\chi = 0, \pi$ a $\theta = 0, \pi$ odpovídají pólům ve sférických souřadnicích. V souřadnicích

(t, χ, θ, ϕ) má metriku de Sitterova prostoročasu formu FLRW metriky s křivostí prostorových řezů $k = 1$,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 \cosh^2 \frac{t}{a} \left(d\chi^2 + \sin^2 \chi \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \right). \quad (1.12)$$



Obrázek 1.1: Vnoření dS prostoročasu do $\mathbb{E}^{1,4}$. Plocha hyperboloidu je vykreslena pro $\theta = \phi = \frac{\pi}{2}$, tedy $Z_2 = Z_3 = 0$. Souřadnicové čáry odpovídají konstantním t a χ .

Hyperboloid představující de Sitterův prostoročas lze dále parametrisovat souřadnicemi $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \eta, \bar{\eta})$

$$\begin{aligned} Z_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathcal{U} + \mathcal{V}) \left[1 - \frac{1}{6} \Lambda (\mathcal{U}\mathcal{V} - \eta\bar{\eta}) \right]^{-1}, \\ Z_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathcal{V} - \mathcal{U}) \left[1 - \frac{1}{6} \Lambda (\mathcal{U}\mathcal{V} - \eta\bar{\eta}) \right]^{-1}, \\ Z_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\eta + \bar{\eta}) \left[1 - \frac{1}{6} \Lambda (\mathcal{U}\mathcal{V} - \eta\bar{\eta}) \right]^{-1}, \\ Z_3 &= \frac{-i}{\sqrt{2}} (\eta - \bar{\eta}) \left[1 - \frac{1}{6} \Lambda (\mathcal{U}\mathcal{V} - \eta\bar{\eta}) \right]^{-1}, \\ Z_4 &= a \left[1 + \frac{1}{6} \Lambda (\mathcal{U}\mathcal{V} - \eta\bar{\eta}) \right] \left[1 - \frac{1}{6} \Lambda (\mathcal{U}\mathcal{V} - \eta\bar{\eta}) \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

které pro $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in (-\infty, +\infty)$ a komplexní η pokrývají de Sitterův hyperboloid až

na singularity v $\mathcal{U}, \mathcal{V} = \infty$. Inverzní transformační vztahy jsou

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &= \sqrt{2}a \frac{Z_0 - Z_1}{Z_4 + a}, \\ \mathcal{V} &= \sqrt{2}a \frac{Z_0 + Z_1}{Z_4 + a}, \\ \eta &= \sqrt{2}a \frac{Z_2 + iZ_3}{Z_4 + a}.\end{aligned}\tag{1.14}$$

Tato parametrizace indukuje metriku

$$ds^2 = \frac{-2 d\mathcal{U} d\mathcal{V} + 2 d\eta d\bar{\eta}}{\left[1 - \frac{1}{6}\Lambda (\mathcal{U}\mathcal{V} - \eta\bar{\eta})\right]^2}.\tag{1.15}$$

Tato metrika je v takzvaném konformně plochém tvaru, tedy ve tvaru

$$ds^2 = \frac{ds_0^2}{\Omega^2},\tag{1.16}$$

kde ds_0^2 je metrika na $\mathbb{E}^{1,3}$ a Ω je hladkou funkcí souřadnic. Jak uvidíme dále, metrika (1.15) je ve tvaru, který unifikuje všechny prostoročasy konstantní křivosti. Pro $\Lambda = 0$ se redukuje na (1.5) a pro $\Lambda < 0$ představuje metriku na anti-de Sitterově prostoročase.

Souřadnicové čáry $\mathcal{U} = \text{konst.}$ a $\mathcal{V} = \text{konst.}$ tvoří na de Sitterově hyperboloidu nulové přímky, resp. nadplochy.

řešení rovnice geodetiky?

1.3 Anti-de Sitterův prostoročas

Anti-de Sitterův prostoročas AdS_4 je maximálně symetrické vakuové řešení Einsteinových rovnic se zápornou kosmologickou konstantou Λ . Isometrie tvoří grupu $SO(2, 3)$ a topologie AdS_4 odpovídá $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^3$. Vnořením AdS_4 do $\mathbb{E}^{2,3}$, tedy do prostoru s metrikou

$$ds^2 = -dZ_0^2 + dZ_1^2 + dZ_2^2 + dZ_3^2 - dZ_4^2,\tag{1.17}$$

vzniká hyperboloid

$$-Z_0^2 + Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 - Z_4^2 = a^2,\tag{1.18}$$

kde $a = \sqrt{3/|\Lambda|}$.

Celý hyperboloid je pokrytý souřadnicemi (T, r, θ, ϕ)

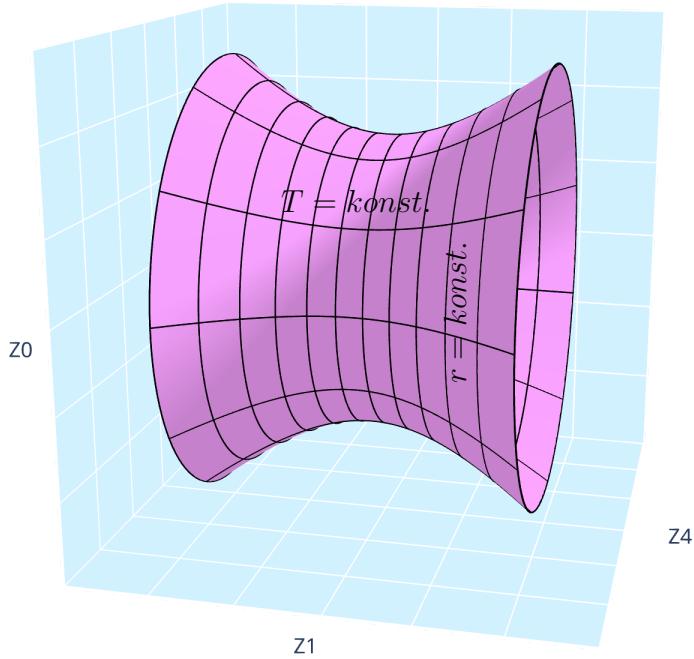
$$\begin{aligned}Z_0 &= a \cosh r \sin \frac{T}{a}, \\ Z_1 &= a \sinh r \cos \theta, \\ Z_2 &= a \sinh r \sin \theta \cos \phi, \\ Z_3 &= a \sinh r \sin \theta \sin \phi, \\ Z_4 &= a \cosh r \cos \frac{T}{a}.\end{aligned}\tag{1.19}$$

Metrika anti-de Sitterova prostoročasu v těchto souřadnicích nabývá tvaru

$$ds^2 = -\cosh^2 r \, dT^2 + a^2 \left(dr^2 + \sinh^2 r \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta \, d\phi^2 \right) \right) \quad (1.20)$$

a vidíme, že každý řez $T = \text{konst.}$ odpovídá pro $r \in [0, \infty], \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi]$ prostoru konstantní negativní křivosti (hyperbolickému prostoru H^3). Singularity v $r = 0$ a $\theta = 0, \pi$ jsou pouze souřadnicové.

T představuje časovou souřadnici, která je $2\pi a$ -periodická, což odpovídá již zmíněné topologii $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^3$. Obvykle se ale uvažuje $T \in (-\infty, +\infty)$, dochází tedy k rozvinutí \mathbb{S}^1 na celé \mathbb{R}^1 , a dostáváme prostor s topologií \mathbb{R}^4 , jehož univerzálním nakrytím je AdS prostoročas.



Obrázek 1.2: Vnoření AdS prostoročasu do $\mathbb{E}^{2,3}$. Plocha hyperboloidu je vykreslena pro $\theta = \phi = \frac{\pi}{2}$, tedy $Z_2 = Z_3 = 0$. Souřadnicové čáry odpovídají konstantním T a r .

Parametrizací (1.13) obdržíme totožný konformě plochý tvar metriky (1.15) jako v případě de Sitterova prostoročasu

$$ds^2 = \frac{-2 \, dU \, dV + 2 \, d\eta \, d\bar{\eta}}{\left[1 - \frac{1}{6}\Lambda (\mathcal{U}\mathcal{V} - \eta\bar{\eta}) \right]^2},$$

liší se pouze znaménkem kosmologické konstanty ($\Lambda < 0$).

řešení rovnice geodetiky?

2. Neexpandující impulsní gravitační vlny

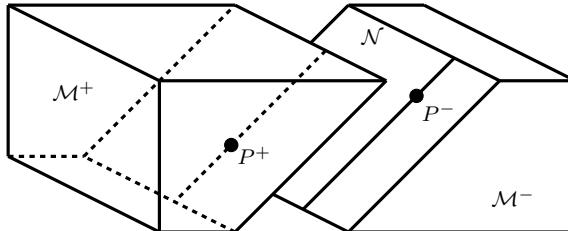
V této kapitole se budeme věnovat neexpandujícím impulsním gravitačním vlnám propagujícím se na pozadí Minkowského a (anti-)de Sitterova prostoročasu. Popíšeme matematickou konstrukci prostoročasů která vede k tzv. refrakčním rovnícím pro geodetiky, které využijeme k vizualizaci různých řešení impulsních vln a k interpretaci působení vln na různé testovací částice.

2.1 Konstrukce

Nejprve popíšeme konstrukci prostoročasů s neexpandujícími impulsními gravitačními vlnami pomocí Penroseovy geometrické metody [2] "cut and paste", zavedeme souřadnice ve kterých je metrika spojitá a dále se budeme věnovat distribučnímu popisu prostoročasů s impulsními gravitačními vlnami.

2.1.1 "Cut and paste" metoda konstrukce

Geometrická metoda konstrukce "cut and paste" impulsních gravitačních vln v Minkowského prostoročase (1.2) se zakládá na rozdelení celého prostoročasu podél rovinné světelné nadplochy \mathcal{N} , kde je implulzní vlna lokalizována na dvě části \mathcal{M}^+ a \mathcal{M}^- . Opětovným spojením těchto částí a ztotožněním bodů na hranici řezu \mathcal{N} se specifickým posunutím dostaneme prostoročas s impulsní gravitační vlnou.



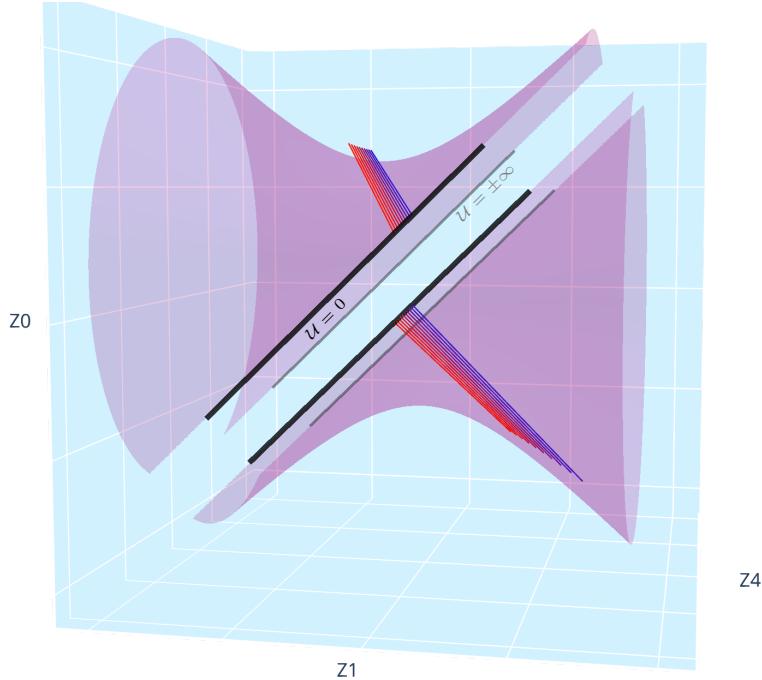
Obrázek 2.1: Geometrická konstrukce neexpandující impulsní gravitační vlny pomocí metody "cut and paste", podél nadplochy \mathcal{N} dojde k rozdelení prostoročasu na dvě části \mathcal{M}^+ a \mathcal{M}^- a opětovnému ztotožněním bodů na hranici obou částí se specifickým posunem.

Pro světelnou nadplochu \mathcal{N} danou podmínkou $\mathcal{U} = 0$ pak tato konstrukce odpovídá Penroseově spojovacím podmínkám

$$[\eta, \bar{\eta}, \mathcal{V}, \mathcal{U} = 0_-]_{\mathcal{M}^-} \equiv [\eta, \bar{\eta}, \mathcal{V} - H(\eta, \bar{\eta}), \mathcal{U} = 0_+]_{\mathcal{M}^+}, \quad (2.1)$$

kde $H(\eta, \bar{\eta})$ je holomorfní. Penrose [2] ukázal, že impulsní gravitační vlny jsou v tenzoru křivosti reprezentovány členy proporciálními Diracově delta distribuci $\delta(\mathcal{U})$. V Minkowského pozadí je nadplocha $\mathcal{U} = 0$ rovina a řešení spadá do rodiny impulsních *pp*-vln, tedy rovnoběžně se propagujících rovinných vln. Obecně na

pozadích konstantní křivosti platí stejné napojovací podmínky (2.1) a nadplocha $\mathcal{U} = 0$ představuje plochu konstantní Gaussovské křivosti $K = \frac{1}{3}\Lambda$ která je popisána metrikou $d\sigma^2 = 2(1 + \frac{1}{6}\Lambda\eta\bar{\eta})^{-2}d\eta d\bar{\eta}$. V případě $\Lambda \neq 0$ se tedy jedná buďto o sféru ($\Lambda > 0$) nebo o hyperbolickou plochu ($\Lambda < 0$). Popis těchto nadploch konstantní křivostí v (A)dS prostoročasech a jejich geometrické vlastnosti jsou shrnutý v [3], kde je také ukázáno, že se jedná o neexpandující nadplochy.



Obrázek 2.2: Nulové geodetiky procházející impulsem nacházejícím se v $\mathcal{U} = 0$ (černá čára) v AdS prostoročase jsou podle cut and paste konstrukce posunuty v souřadnici \mathcal{V} a dochází k refrakci. Geodetiky jsou opět nulovými generátory AdS na $\mathcal{U} > 0$, neleží už ale v $\eta = 0$ a proto neleží na ploše vykresleného hyperboloidu.

2.1.2 Spojitý tvar metriky

Metoda "cut and paste" nám dává identifikaci bodů prostoročasu na obou stranách impulsní vlny a tedy napojovací podmínky pro geodetiky, nic ale neříká o podobě metriky kompletního prostoročasu s impulsní vlnou. Potřebujeme tedy najít vhodný souřadnicový systém, ve kterém bude metrika spojitá funkce \mathcal{U} . Toho dosáhneme postupem použitým např. v [4], kde z metriky prostoročasu pozadí (1.15), respektive

$$ds_0^2 = \frac{2 d\eta d\bar{\eta} - 2 d\mathcal{U} d\mathcal{V}}{\left[1 - \frac{1}{6}\Lambda(\eta\bar{\eta} - \mathcal{U}\mathcal{V})\right]^2}, \quad (2.2)$$

souřadnicovou transformací

$$\mathcal{U} = U, \quad \mathcal{V} = V + H + UH_{,Z}H_{,\bar{Z}}, \quad \eta = Z + UH_{,\bar{Z}}, \quad (2.3)$$

kde uvažujeme libovolnou reálnou funkci $H(Z, \bar{Z})$, obdržíme metriku

$$ds^2 = \frac{2 \left| dZ - U \left(H_{,Z\bar{Z}} dZ + H_{,\bar{Z}\bar{Z}} d\bar{Z} \right) \right|^2 - 2dUdV}{\left[1 - \frac{1}{6}\Lambda(Z\bar{Z} - UV - UG) \right]^2} \quad (2.4)$$

kde $G(Z, \bar{Z}) \equiv H - ZH_{,Z} - \bar{Z}H_{,\bar{Z}}$. Metriku (2.4) pak uvažujeme pouze pro $U > 0$, zatímco na $U < 0$ provedeme ztotožnení souřadnic

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= U \\ \mathcal{V} &= V \\ \eta &= Z \end{aligned} \quad (2.5)$$

a uvažujeme metriku vzniklou právě touto transformací. Definováním tzv. kink funkce jako

$$U_+ \equiv U_+(U) = \begin{cases} 0 & \text{pro } U \leq 0 \\ U & \text{pro } U \geq 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

můžeme výslednou metriku zapsat jako

$$ds^2 = \frac{2 \left| dZ + U_- \left(H_{,Z\bar{Z}} dZ + H_{,\bar{Z}\bar{Z}} d\bar{Z} \right) \right|^2 - 2dUdV}{\left[1 - \frac{1}{6}\Lambda(Z\bar{Z} - UV - U_+G) \right]^2}. \quad (2.7)$$

Transformace (2.3) a (2.5) spojující separátně pro $\mathcal{U} > 0$ a $\mathcal{U} < 0$ metriku (2.2) s metrikou (2.7) lze pomocí Heavisideovy theta funkce $\Theta(U)$ přepsat do tvaru

$$\mathcal{U} = U, \quad \mathcal{V} = V + \Theta(U)H + U_+H_{,Z}H_{,\bar{Z}}, \quad \eta = Z + U_+H_{,\bar{Z}}. \quad (2.8)$$

Stále je ale nutné provádět transformaci separátně pro $\mathcal{U} > 0$ a $\mathcal{U} < 0$, Heavisideova funkce má při transformaci metriky (2.2) za následek vznik členů proporcionálních delta funkci. Je také nutné podotknout, že toto vyjádření je pak ve smyslu distribucí. Ukazuje se, že tato transformace spojuje tzv. distribuční vyjádření metriky (2.12), které bude zavedeno dále, se spojitým tvarem metriky (2.7). Transformace (2.8) zároveň obsahuje Penroseovy spojovací podmínky (2.1) v $U = 0$, kde vzniká nespojitost v souřadnici \mathcal{V} . Tato metoda konstrukce, ve smyslu distribucí, tedy představuje explicitní "cut and paste" konstrukci.

2.1.3 Distribuční tvar metriky

Dalším způsobem konstrukce impulsní gravitační vlny je přechod od příslušných rodin tzv. "sandwichových" gravitačních vln s hladkým profilem vlnoplochy k limitnímu distribučnímu vyjádření impulsní vlny. Pro případ neexpandujících vln, propagujících se na $\mathbb{E}^{1,3}$, byl tento limitní přechod uvažován např. v [5], [6], [7]. Výsledná metrika nabývá tvaru

$$ds^2 = 2 d\xi d\bar{\xi} - 2dudv + H(\xi, \bar{\xi})\delta(u) du^2 \quad (2.9)$$

Distribuční tvar metriky také dostaneme dosazením invezní transformace k (2.8) do spojité metriky (2.7). Vzhledem k nespojitosti v transformaci toto dosazení nemůže být provedeno v rámci klasické teorie distribucí, kde nelze konzistentně definovat násobení dvou distribucí. S využitím regularizačních metod

teorie nelineárních zobecněných funkcí [zde citace](#), které zakládají na Colombeových algebrách, lze ale odvodit pravidla pro násobení jisté třídy distribucí, která dostačují pro toto odvození. Konkrétně potřebujeme násobit distribuce

$$\Theta^2 = \Theta, \quad \Theta U_+ = U_+. \quad (2.10)$$

Kromě pravidel pro násobení ještě využijeme identity z klasické teorie distribucí

$$\Theta' = \delta, \quad U'_+ = \Theta \quad (2.11)$$

a dostáváme pro libovolnou hodnotu Λ metriku ve tvaru

$$ds^2 = \frac{2d\eta d\bar{\eta} - 2d\mathcal{U} d\mathcal{V} + 2H(\eta, \bar{\eta})\delta(\mathcal{U}) d\mathcal{U}^2}{\left[1 - \frac{1}{6}\Lambda(\eta\bar{\eta} - \mathcal{U}\mathcal{V})\right]^2}. \quad (2.12)$$

V případě nenulové kosmologické konstanty můžeme také využít vnoření do $\mathbb{E}^{1,4}$, případně $\mathbb{E}^{2,4}$ (podle znaménka kosmologické konstanty, jak je popsáno v kapitole 1) s dodatečným neexpandujícím impulsem

$$ds^2 = dZ_2^2 + dZ_3^2 + \epsilon dZ_4^2 - 2d\tilde{U}d\tilde{V} + \mathcal{H}(Z_2, Z_3, Z_4)\delta(\tilde{U})d\tilde{U}^2, \quad (2.13)$$

kde $\epsilon = \text{sign}(\Lambda)$, $\tilde{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}(Z_0 - Z_1)$, $\tilde{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}(Z_0 + Z_1)$. S podmínkou analogickou k (1.9) a (1.18),

$$Z_2^2 + Z_3^2 + \epsilon Z_4^2 - 2\tilde{U}\tilde{V} = \epsilon a^2, \quad (2.14)$$

dostáváme reprezentaci impulsních vln propagujících se na (A)dS prostoročasu s impulsem na $\tilde{U} = 0$. Funkce H a \mathcal{H} v metrikách (2.12) a (2.13) jsou svázány vztahem

$$\mathcal{H} = \frac{2H}{1 - \frac{1}{6}\Lambda\eta\bar{\eta}} \quad (2.15)$$

2.1.4 \mathcal{C}^1 -matching a refrakční rovnice

Dále budeme explicitně modelovat geodetiky na prostoročasech s neexpandujícími impulsními vlnami v souřadnicích (2.12). V těchto souřadnicích není řešení rovnice geodetiky dobře definované v klasické teorii distribucí, pro neexpandující impulsní vlny na Minkowského prostoročasu byla rovnice geodetiky a její řešení zkoumána v rámci teorie zobecněných funkcí ve smyslu Colombeových algeber a v článích [8] a [9] byla ukázána existence a jednoznačnost řešení v prostoru těchto funkcí a bylo ověřeno, že geodetiky na \mathcal{M}^- a \mathcal{M}^+ odpovídají geodetikám na Minkowského pozadí se skokem v souřadnici \mathcal{V} při přechodu přes nadplochu $\mathcal{U} = 0$. V prostoročasech s nenulovou kosmologickou konstantou lze využít přístup vnoření do pětidimenzionálního Minkowského prostoru, kde se v rovnici geodetiky nenachází výrazy nedefinované v klasické teorii distribucí, [Chápu to tak správně?](#) řešení rovnice geodetiky pro (anti-)de Sitterův prostoročas s impulsními neexpandujícími vlnami byly tímto způsobem odvozeny v [10]. V článku [4] byla odvozena rovnice geodetiky v souřadnicích (2.7). Odvozený tvar je v tomto případě ve smyslu Filippových řešení (diferenciálních inkluze) [11], což je zobecnění teorie obyčejných diferenciálních rovnic. V článku je ukázána existence a jednoznačnost takových řešení, dále autoři využívají metodou \mathcal{C}^1 -matchingu, kde

při splnění lokální lipschitzovskosti metriky lze řešení ve smyslu Filippova přiřadit řešením rovnice geodetiky na jednotlivých částech prostoročasu ("před a za impulsem"), bez nutné znalosti detailů teorie za Filippovými řešeními.

Výsledkem \mathcal{C}^1 -matchingu je sada refrakčních rovnic, které udávají jak skok v souřadnici \mathcal{V} , tak i změnu v rychlostech před a za impulsem. Geodetiku procházející impulsní plochou ve spojitých souřadnicích tedy ztotožníme transformací (2.8) (a její derivací), v oblastech $U > 0$ a $U < 0$ separátně, s geodetikami v souřadnicích prostoročasu na pozadí. Pro polohy dostaváme limitou $U \rightarrow 0^+$ a $U \rightarrow 0^-$ rovnice

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_i^+ &= \mathcal{U}_i^- = 0, \\ \mathcal{V}_i^+ &= \mathcal{V}_i^- + H_i, \\ \eta_i^+ &= \eta_i^-,\end{aligned}\tag{2.16}$$

což odpovídá Penroseovým spojovacím podmínkám - geodetika je spojitá v \mathcal{U} a η a dochází ke skoku ve \mathcal{V} . Pro rychlosti obdržíme stejnou limitou rovnice

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{U}}_i^+ &= \dot{\mathcal{U}}_i^- \\ \dot{\mathcal{V}}_i^+ &= \dot{\mathcal{V}}_i^- + H_{i,Z}\dot{\eta}_i^- + H_{i,\bar{Z}}\dot{\eta}_i^- + H_{i,Z}H_{i,\bar{Z}}\dot{\mathcal{U}}_i^- \\ \dot{\eta}_i^+ &= \dot{\eta}_i^- + H_{i,\bar{Z}}\dot{\mathcal{U}}_i^-. \end{aligned}\tag{2.17}$$

Index i znamená hodnotu na impulsní nadploše $\mathcal{U} = 0$, složky označené znakem + jsou za impulsem ($\mathcal{U} > 0$), složky označené znakem - jsou před impulsem ($\mathcal{U} < 0$).

Všimněme si, že při přechodu přes impulsní plochu platí $\eta_i = Z_i$ a tedy $H_{i,Z} = \frac{\partial}{\partial \eta} H(\eta, \bar{\eta})$.

Bližším pohledem na refrakční rovnice také vidíme, že zachovávají kauzální charakter. Složka rychlosti $\dot{\mathcal{U}}$ se nemění, ve složkách $\dot{\mathcal{V}}$ a $\dot{\eta}$ dojde k refrakci tak, že nedochází ke změně normy čtyřrychlosti.

Dále uvedeme refrakční rovnice v reálných polárních prostorových souřadnicích, které odvodíme z transformace spojitých souřadnic $\rho = \sqrt{2} |Z + U_+ H_{i,\bar{Z}}|$ a $\varphi = \frac{1}{2i} \log \frac{Z + U_+ H_{i,\bar{Z}}}{\bar{Z} + U_+ H_{i,Z}}$. Limitou $U \rightarrow 0^+$ a $U \rightarrow 0^-$ dostaváme

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_i^+ &= \mathcal{V}_i^- + H_i, \\ \rho_i^+ &= \rho_i^- \\ \varphi_i^+ &= \varphi_i^-, \end{aligned}\tag{2.18}$$

tedy radiální i úhlová složka jsou spojité. Pro složky rychlosti pak provedeme stejnou limitu na derivaci souřadnic,

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{V}}_i^+ &= \dot{\mathcal{V}}_i^- + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i\varphi_i^-} H_{i,Z} + e^{-i\varphi_i^-} H_{i,\bar{Z}} \right) \dot{\rho}_i^- + \frac{i}{\sqrt{2}} \left(e^{i\varphi_i^-} H_{i,Z} - e^{-i\varphi_i^-} H_{i,\bar{Z}} \right) \rho_i^- \dot{\varphi}_i^- \\ &\quad + \left(H_{i,Z}H_{i,\bar{Z}} \right) \dot{\mathcal{U}}_i^- \\ \dot{\rho}_i^+ &= \dot{\rho}_i^- + \frac{1}{2} \left(e^{i\varphi_i^-} H_{i,Z} + e^{-i\varphi_i^-} H_{i,\bar{Z}} \right) \dot{\mathcal{U}}_i^- \\ \dot{\varphi}_i^+ &= \dot{\varphi}_i^- + \frac{i}{\sqrt{2}\rho_i^-} \left(e^{i\varphi_i^-} H_{i,Z} - e^{-i\varphi_i^-} H_{i,\bar{Z}} \right) \dot{\mathcal{U}}_i^-. \end{aligned}\tag{2.19}$$

Transfomrací

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}} (X + iY) \quad \bar{Z} = \frac{1}{\sqrt{2}} (X - iY) \quad (2.20)$$

můžeme odvodit refrakční rovnice v reálných souřadnicích $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, x, y)$

$$\mathcal{U}_i^+ = \mathcal{U}_i^- = 0, \quad \mathcal{V}_i^+ = \mathcal{V}_i^- + H_i, x_i^+ = x_i^-, \quad y_i^+ = y_i^-, \quad (2.21)$$

a pro čtyřrychlosti

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{U}}_i^+ &= \dot{\mathcal{U}}_i^-, \\ \dot{\mathcal{V}}_i^+ &= \dot{\mathcal{V}}_i^- + H_{i,X} \dot{x}_i^- + H_{i,Y} \dot{y}_i^- + \frac{1}{2} ((H_{i,X})^2 + (H_{i,Y})^2) \dot{\mathcal{U}}_i^-, \\ \dot{x}_i^+ &= \dot{x}_i^- + H_{i,X} \dot{\mathcal{U}}_i^-, \\ \dot{y}_i^+ &= \dot{y}_i^- + H_{i,Y} \dot{\mathcal{U}}_i^-. \end{aligned} \quad (2.22)$$

$H_{i,X}$ a $H_{i,Y}$ odpovídají derivacím funkce H ve směru X a Y v bodě impulzu, díky spojitosti tedy platí $H_{i,X} = \frac{\partial}{\partial x} H$, $H_{i,Y} = \frac{\partial}{\partial y} H$.

Díky tomu, že odvození rovnic (2.16) a (2.17) bylo provedeno v konformně plochých souřadnicích, jejich tvar nezávisí na hodnotě Λ a jedná se o jednotné rovnice pro refrakci způsobenou impulsními vlnami propagujícími se v Minkowského i (anti-)de Sitterově prostoročase.

V (anti-)de Sitterově prostoročasech můžeme také využít pětidimenzionaálního formalismu a odvodit refrakční rovnice v souřadnicích (2.13). Konformní faktor je na jednotlivých částech prostoročasu při cut and paste konstrukci daný jako $\Omega_i^\pm = 1 + \frac{1}{6} \Lambda \eta^\pm \bar{\eta}^\pm$, ze spojitosti $\eta, \bar{\eta}$ při přechodu přes $\mathcal{U} = 0$ však plyne, že pro konformní faktor stačí psát Ω_i , jelikož při přechodu přes impulsní nadplochu nedochází k jeho změně.

Z rovnic pro polohy (2.21) dostáváme Penroseovu napojovací podmínu v 5 dimenzionálním formalismu

$$\begin{aligned} \tilde{U}_i^+ &= 0 = \tilde{U}_i^-, & \tilde{V}_i^+ &= \tilde{V}_i^- + \frac{H_i}{\Omega_i}, \\ Z_{2i}^+ &= Z_{2i}^-, & Z_{3i}^+ &= Z_{3i}^-, & Z_{4i}^+ &= Z_{4i}^-. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Pro derivaci konformního faktoru podle affinního parametru máme $\dot{\Omega}_i^+ = \dot{\Omega}_i^- - \frac{1}{2\epsilon a^2} G_i \Omega_i \dot{\tilde{U}}_i^-$, kde (díky spojitosti) $G_i = G_i^\pm = H_i - \Omega_i (H_{i,X} Z_{2i}^\pm + H_{i,Y} Z_{3i}^\pm)$. Refrakční rovnice složek rychlostí pak mají tvar

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{U}}_i^- &= \dot{\tilde{U}}_i^+ \\ \dot{\tilde{V}}_i^- &= \dot{\tilde{V}}_i^+ + 2p \dot{\tilde{U}}_i^+ - H_{i,X} \dot{Z}_{2i}^+ - H_{i,Y} \dot{Z}_{3i}^+ - \frac{G_i}{2a} \dot{Z}_{4i}^+ \\ \dot{Z}_{2i}^- &= \dot{Z}_{2i}^+ - \dot{\tilde{U}}_i^+ \left(H_{i,X} + \frac{G_i}{2\epsilon a^2} Z_{2i}^+ \right) \\ \dot{Z}_{3i}^- &= \dot{Z}_{3i}^+ - \dot{\tilde{U}}_i^+ \left(H_{i,Y} + \frac{G_i}{2\epsilon a^2} Z_{3i}^+ \right) \\ \dot{Z}_{4i}^- &= \dot{Z}_{4i}^+ - \dot{\tilde{U}}_i^+ \frac{G_i}{\epsilon a \Omega_i} \end{aligned} \quad (2.24)$$

5dim formalismus!

2.1.5 Vizualizace geodetik prostoročasů s neexpandující impulsní vlnou

Refrakční rovnice jsou vhodným nástrojem k vizualizaci geodetik v souřadnicích prostoročasů na pozadí impulsní vlny. Pro vybrané funkce H , resp. \mathcal{H} v prostoročasech s $\Lambda \neq 0$, byly zvolené geodetiky před impulsem ztotožněny s geodetikami za impulsem. Integrací rovnice geodetiky na oblastech před a za impulsem zvlášť pak obdržíme celé geodetiky v prostoročasu s impulsní vlnou. Pro účel vizualizace geodetik v těchto prostoročasech autor této práce vytvořil balíček GRImpulsiveWaves pro jazyk Python, tento open-source balíček je volně dostupný na platformě GitHub. [přidat na pip!](#) V následujících podsekčích představíme vizualizace pro tato vybraná řešení, pro různé parametry a počáteční podmínky geodetik.

2.1.6 Impulsní gravitační vlna generovaná nehmotnými částicemi s multipólovou strukturou s $\Lambda = 0$

Řešení impulsní vlny generované nulovými částicemi s multipólovou strukturou v Minkowského prostoročase odvodili Griffiths a Podolský v [12]. Polní rovnice se pro tento případ redukují na

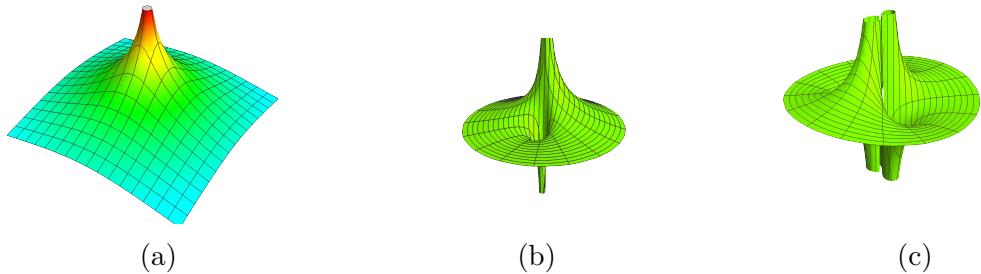
$$\Delta H = 2H_{,\eta\bar{\eta}} = 8\pi T_{\mathcal{U}\mathcal{U}}, \quad (2.25)$$

kde $T_{\mathcal{U}\mathcal{U}} = f(\eta, \bar{\eta})\delta(\mathcal{U})$. Řešení částice s multipólovou strukturou pak odpovídá funkci H v cylindrických prostorových souřadnicích ve tvaru

$$H = -b_0 \log(\rho) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \rho^{-m} \cos [m (\phi - \phi_m)], \quad (2.26)$$

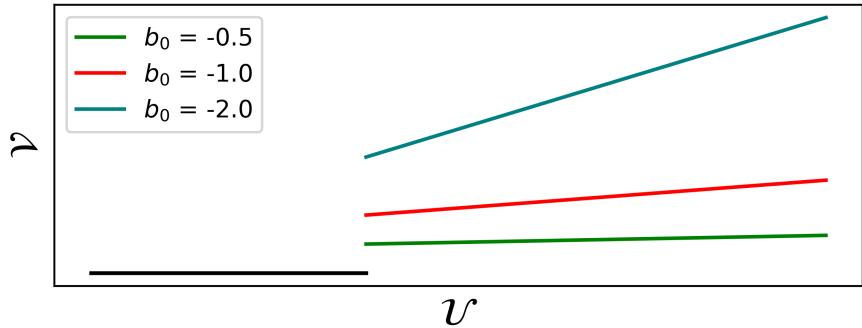
kde b_m, ϕ_m jsou konstanty.

Řešení s jedinou monopólovou částicí, tedy $b_m = 0$ pro všechna $m \geq 1$, odpovídá Aichelburg-Sexlova řešení - prostoročasu zkonztruovanému ultraboostem Schwarzschildova řešení [13].



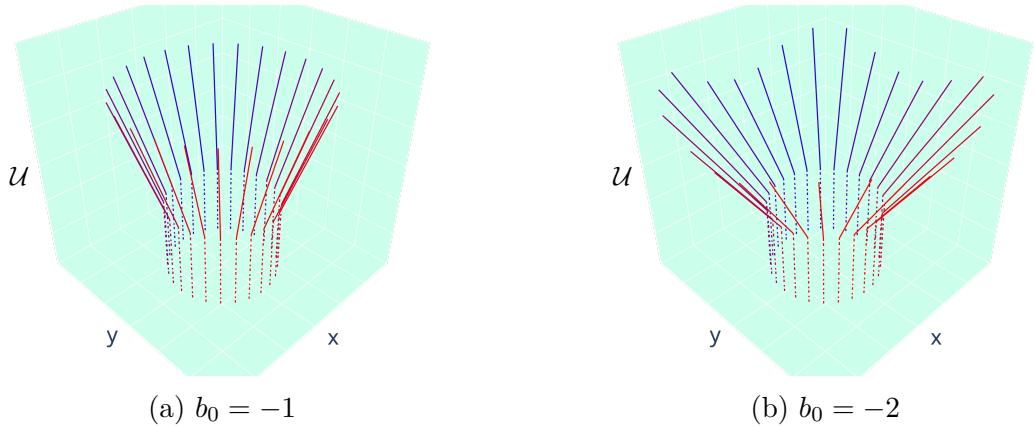
Obrázek 2.3: Funkce H v případě (a) Aichelburg-Sexlova řešení, impulsní vlny generované nulovou částicí s (b) dipólovou strukturou a s (c) kvadrupólovou strukturou

Na obrázku 2.4 je vyobrazena refrakce v Aichelburg-Sexlově řešení pro různé parametry b_0 . Dochází ke skoku v souřadnici \mathcal{V} , jak plyne z Penroseových napojovacích podmínek, a k refrakci. S rostoucí absolutní hodnotou parametru b_0



Obrázek 2.4: Nulové geodetiky ($\dot{\mathcal{U}}^- = 1$, $\dot{\mathcal{V}}^- = 0$, $\dot{\eta}^- = 0$) procházející impulsem Aichelburg-Sexlova řešení v $\rho = 2$ pro různé parametry b_0 .

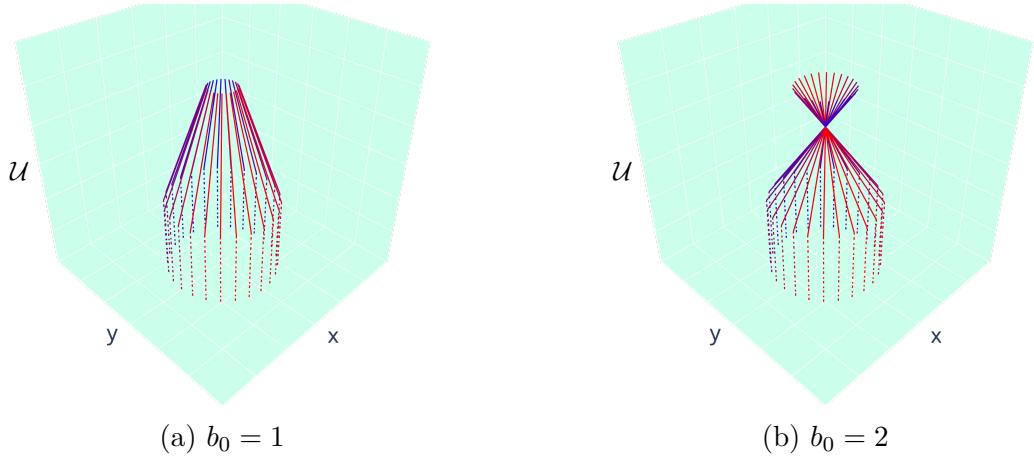
dochází k větší změně ve složce rychlosti $\dot{\mathcal{V}}$. Skok ve složce $\dot{\mathcal{V}}$ doprovází změna ve složce $\dot{\eta}$, pro kterou opět platí, že se spolu s rostoucí absolutní hodnotou b_0 dochází k větší změně. Tato závislost je také vidět na obrázku 2.5, kde vidíme geodetický pohyb v prostoru v závislosti na retardované souřadnici \mathcal{U} , kterou v případě neexpandujících vln v Minkowského prostoročase můžeme použít jako affinní parametr.



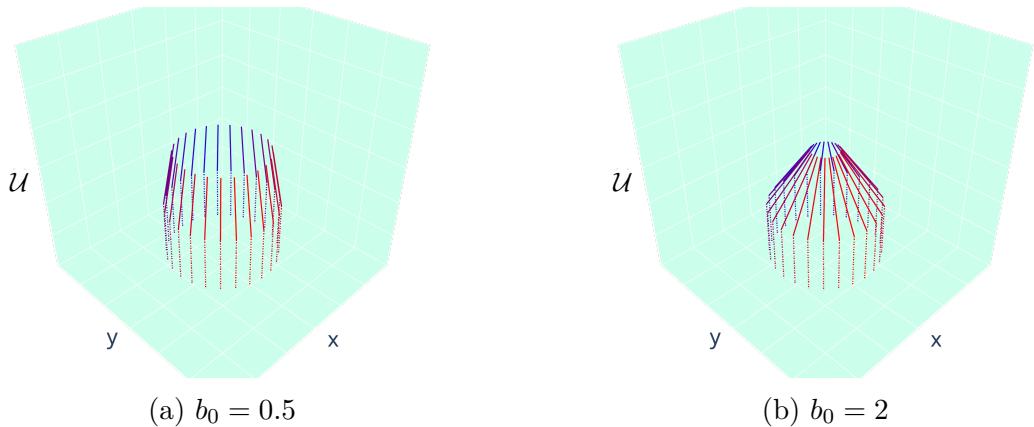
Obrázek 2.5: Nulové geodetiky ($\dot{\mathcal{U}}^- = 1$, $\dot{\mathcal{V}}^- = 0$, $\dot{\eta}^- = 0$) procházející impulsní vlnou Aichelburg-Sexlova řešení. Prstenec testovacích částic je před průchodem impulsem v $\rho = 2$.

Záporné hodnoty parametru b_0 , použité na obrázcích 2.4 a 2.5, byly vhodné pro přehlednější vizualizaci efektu impulsní vlny, nemají ale v originální konstrukci Aichelburg-Sexlova ultraboostu fyzikální význam. Parametr b_0 představuje v ultraboostové limitě $v \rightarrow 1$, $m \rightarrow 0$ konstantu, která splňuje $8m = b_0\sqrt{1-v^2}$, pro fyzikální systémy konstruované touto metodou tedy nabývá kladných hodnot. Příklady nulových geodetiky pro tyto hodnoty jsou na obrázku 2.6, vidíme, že geodetiky jsou refraktovány směrem k $\rho = 0$ – jde tedy o přitažlivý efekt nulové částice generující impulsní vlnu.

Testovací částice na časupodobných geodetikách se chovají stejným způsobem, na obrázku 2.7 vidíme časupodobné geodetiky, po kterých se testovací částice šíří paralelně s osou z . Při průchodu $\mathcal{U} = 0$ dojde k refrakci a částice po průchodu letí směrem k ose z .



Obrázek 2.6: Nulové geodetiky ($\dot{\mathcal{U}}^- = 1$, $\dot{\mathcal{V}}^- = 0$, $\dot{\eta}^- = 0$) procházející impulsem v $\rho = 2$ pro kladné hodnoty parametru b_0 .



Obrázek 2.7: Časupodobné geodetiky ($\dot{\mathcal{U}}^- = \frac{1}{2}$, $\dot{\mathcal{V}}^- = 1$, $\dot{\eta}^- = 0$) procházející impulsní vlnou AS řešení. Prstenec testovacích částic je před průchodem impulsem v $\rho = 2$.

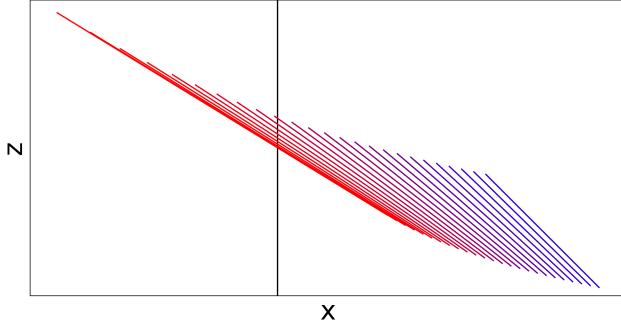
Refrakce je slabší s rostoucí vzdáleností od částice generující impuls. Na obrázku 2.8 jsou znázorněny už refraktované časupodobné geodetiky pro různé vzdálenosti od osy symetrie. Před refrakcí se jedná o pohyb testovacích částic ve směru osy z .

Pro potěšení oka čtenáře jsou přiloženy další vizualizace geodetického pohybu v Aichelburg-Sexlově řešení. Na obrázku 2.9 se jedná systém časupodobných geodetik, které se před průchodem impulsní vlnou šíří od osy symetrie z . V (b) dochází k refrakci, která otáčí směr šíření směrem zpět k ose z . Na obrázku 2.10 je pak zobrazení průchodu geodetik, které nejsou uspořádány axiálně symetricky.

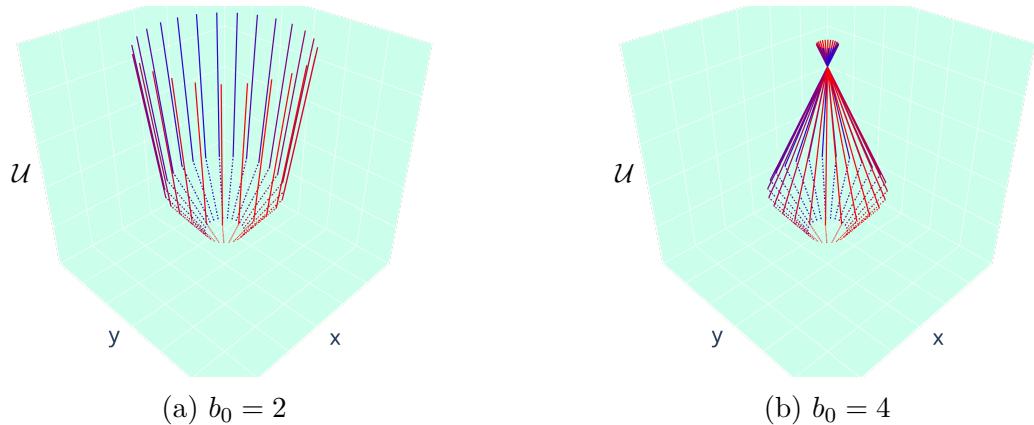
Pro $m > 0$ závisí změna geodetického pohybu na prostorovém úhlu. Derivace $H_{i,Z}$ která vystupuje v refrakčních rovnicích je pro jednotlivá m

$$H_{i,Z}^{(m)}(\eta, \bar{\eta}) = -\frac{(\sqrt{2})^m b_m m}{\eta^{m+1}}. \quad (2.27)$$

Speciálně pro $m = 1$, tedy impuls generovaný částicí s dipólovou strukturou, je $H_{i,Z}^{(1)}$ vykreslena na obrázku 2.11. Reálná část a imaginární část odpovídají



Obrázek 2.8: Refraktované časupodobné geodetiky po průchodu impulsem v různých vzdálenostech ρ pro $b_0 = \frac{1}{2}$. Červená barva odpovídá částici refraktované nejblíže ($\rho = \frac{1}{2}$), modrá nejdále ($\rho = 2$). Černá přímka odpovídá ose $x = 0$.

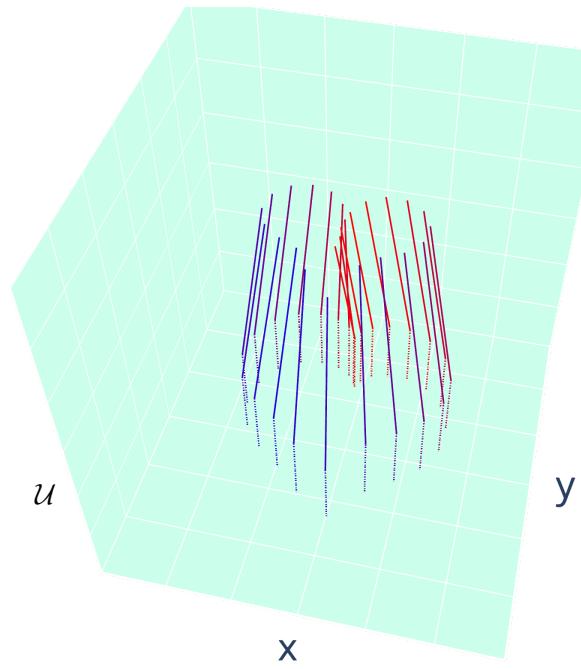


Obrázek 2.9: Časupodobné geodetiky ($\dot{\mathcal{U}}^- = 1$, $\dot{\mathcal{V}}^- = 2$, $\dot{\eta}^- = \sqrt{\frac{3}{2}}e^{i\phi}$), kde ϕ odpovídá úhlu v cylindrických souřadnicích ve kterém částice leží, procházející impulsní vlnou AS řešení v $\rho = 2$.

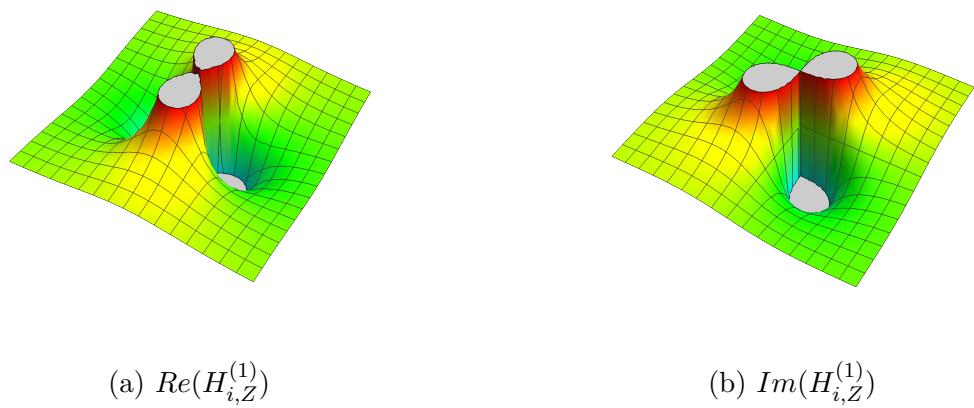
derivacím ve směru X a Y , vystupujícím v refrakčních rovnicích (2.22)

$$\begin{aligned} Re(H_{i,Z}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} H_{i,X}, \\ Im(H_{i,Z}) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} H_{i,Y}. \end{aligned} \tag{2.28}$$

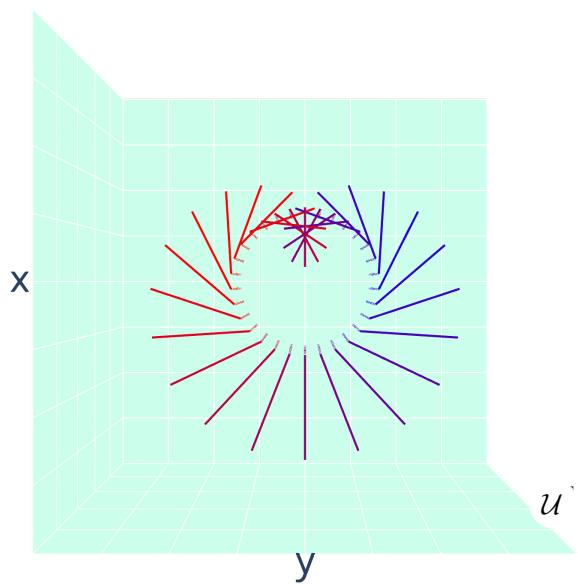
Příklad nulových geodetik procházejících impulsem s jediným nenulovým členem pro $m = 1$ je na obrázku 2.11



Obrázek 2.10: Časupodobné geodetiky ($\dot{\mathcal{U}}^- = \frac{1}{2}$, $\dot{\mathcal{V}}^- = 1$, $\dot{\eta}^- = 0$) ve vybraném uspořádání, procházející nadplochou $\mathcal{U} = 0$.



Obrázek 2.11: Reálná a imaginární část $H_{i,Z}^{(1)}(x, y)$.



Obrázek 2.12: Nulové geodetiky ($\dot{\mathcal{U}}^- = 1$, $\dot{\mathcal{V}}^- = 0$, $\dot{\eta}^- = 0$) ve axiálně symetrickém uspořádání ($\rho = 1$), procházející impulsní nadplochou vlny generované částicí s dipólovou strukturou, s parametrem $b_1 = 0.2$.

2.1.7 Impulsní gravitační vlna generovaná nehmotnými částicemi s multipólovou strukturou s $\Lambda \neq 0$

V prostoročasech s nenulovou konstantou odvodili Griffiths a Podolský [14] tvar řešení obdobný (2.26), tedy impulsních vln generovaných nulovými částicemi s multipólovou strukturou. Vyšli z redukce Einsteinových rovnic pro distribuční metriku (2.13). V případě ryze gravitačních vln dostaváme podmínu

$$\left(\Delta + \frac{2}{3} \Lambda \right) \mathcal{H} = 0, \quad (2.29)$$

kde Δ je laplaceův operátor působící na impulsní nadploše. Při parametrizaci

$$\begin{aligned} Z_2 &= a\sqrt{\epsilon(1-z^2)} \cos \phi \\ Z_3 &= a\sqrt{\epsilon(1-z^2)} \sin \phi \\ Z_4 &= a z \end{aligned} \quad (2.30)$$

nabývá funkce $\mathcal{H}(z, \phi)$ tvaru

$$\mathcal{H}(z, \phi) = b_0 Q_1(z) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m Q_1^m(z) \cos[m(\phi - \phi_m)], \quad (2.31)$$

kde $Q_1^m(z)$ jsou přidružené Legendrovy funkce druhého druhu

$$Q_1^m(z) = -(\epsilon)^m |1-z^2|^{m/2} \frac{d^m}{dz^m} Q_1(z) \quad (2.32)$$

První člen

$$b_0 Q_1(z) = b_0 \frac{z}{2} \log \left| \frac{1+z}{1-z} \right| - 1 \quad (2.33)$$

představuje axiálně symetrické Hottovo-Tanakovo řešení [15], které odpovídá bohostu Schwarzschildova-(anti-)de Sitterova prostoročasu, jde o analogii Aichelburg-Sexlova řešení v (anti-)de Sitterově prostoročasu. V případě de Sitterova prostoročasu je impulsní nadplocha neexpandující sféra generovaná dvěma nehmotnými částicemi které letí v opačném směru. V anti-de Sitterové prostoročasu je impulsní plochou nadplocha hyperboloidální plochou, generovanou částicí, která se (díky díky tomu, že se jedná o nakrytí \mathbb{R}^4 s topologií $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^3$) periodicky pohybuje mezi prostorovými nekonečny, z jedné strany na druhou.

3. Neexpandující gravitační vlny s gyrationovými členy

Distribuční vyjádření metriky impulsní vlny (2.12) není nejobecnější metrikou popisující impulsní vlny. Už Brinkmann ([nezapomenout Brinkmanna v úvodu BP!](#)) uvažoval i tzv. mimodiagonální členy, se kterými pak (i v případě nenulové kosmologické konstanty) metrika nabývá tvaru

$$\begin{aligned} ds^2 = & \frac{2d\eta d\bar{\eta} - 2d\mathcal{U} d\mathcal{V} + 2H(\eta, \bar{\eta})\delta(\mathcal{U}) d\mathcal{U}^2}{\left[1 + \frac{1}{6}\Lambda(\eta\bar{\eta} - \mathcal{U}\mathcal{V})\right]^2} \\ & + \frac{2J(\eta, \bar{\eta}, \mathcal{U}) d\eta d\mathcal{U} + 2\bar{J}(\eta, \bar{\eta}, \mathcal{U}) d\bar{\eta} d\mathcal{U}}{\left[1 + \frac{1}{6}\Lambda(\eta\bar{\eta} - \mathcal{U}\mathcal{V})\right]^2}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Obvyklým postupem je odstranění členů s funkcí J vhodnou souřadnicovou transformací, to ale vede k odstranění možného rotačního charakteru zdroje gravitační vlny, taková transformace pak není globální, dochází k zanedbání topologických vlastností celého prostoročasu.

3.1 Zobecnění impulsních vln na prostoročasy s gyrationovými členy

Konstrukce neexpandujících gracitačních vln s gyrationovými členy je obdobná případu bez gyrationových členů. Opět můžeme využít Penroseovu "cut and paste" metodu, v případě gyrationických prostoročasů ale bude konstrukce totožná s konstrukcí popsanou v (2.1.1) a jak je ukázáno v článku [16], Penroseovy lepící podmínky v přítomnosti gyrationů nabývají tvaru (2.1). ([přeformulovat nějak lépe...](#)),

3.1.1 Zobecnění spojitého tvaru metriky

Tvar spojité metriky pro gyrationové neexpandující impulsní vlny obdržíme zobecněním transformace (2.8), do tvaru který nalezli Podolský, Švarc, Säman a Steinbauer v [16]

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= U \\ \mathcal{V} &= V + \Theta H + U_+ H_{,Z} H_{,\bar{Z}} + W \\ \eta &= (Z + U_+ H_{,\bar{Z}}) \exp(iF), \end{aligned} \quad (3.2)$$

kde opět $H = H(Z, \bar{Z})$, zároveň funkce $W = W(Z, \bar{Z}, U)$ a $F = F(Z, \bar{Z}, U)$ jsou reálné a splňují

$$\begin{aligned} F_{,U} &= \frac{i\bar{J}}{Z + U_+ H_{,\bar{Z}}} \exp(-iF), \\ W_{,U} &= -J\bar{J}, \\ W &= 0 \text{ pro } U \leq 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Zavedením

$$\zeta \equiv Z + U_+ H_{,\bar{Z}} \quad (3.4)$$

a prostorového diferenciálu \underline{d} tak, že

$$\begin{aligned} \underline{d}\zeta &\equiv dZ + U_+(H_{,\bar{Z}}ZdZ + H_{,\bar{Z}}\bar{Z}d\bar{Z}), \\ \underline{d}H &\equiv H_{,Z}dZ + H_{,\bar{Z}}d\bar{Z}, \\ \underline{d}F &\equiv F_{,Z}dZ + F_{,\bar{Z}}d\bar{Z}, \\ \underline{d}W &\equiv W_{,Z}dZ + W_{,\bar{Z}}d\bar{Z}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Dosazením (3.2) do (3.1) a využitím vztahů (3.3), (3.5) a multiplikativních pravidel z nelineární teorie distribucí,

$$\Theta^2 = \Theta, \quad \Theta U_+ = U_+, \quad (3.6)$$

dostaneme metriku ve spojitém tvaru

$$ds^2 = \frac{2|\underline{d}\zeta + i\zeta\underline{d}F|^2 + 2\left[i\Theta(\zeta H_{,Z} - \bar{\zeta} H_{,\bar{Z}})\underline{d}F - \underline{d}W\right]dU - 2dUdV}{\left[1 + \frac{1}{6}\Lambda(Z\bar{Z} - UV - U_+G)\right]^2}. \quad (3.7)$$

Volba $J = 0$ dovoluje řešení $F = W = 0$, přičemž se metrika (3.7) redukuje na (2.7). (3.7) je spojitá v případě, že $\underline{d}F$ a $\underline{d}W$ jsou funkce spojité v U a $\underline{d}F$ jde v $U = 0$ k nule. V tomto případě je metrika lokálně lipschitzovská a lze využít formalismu Filippových řešení, jako v předchozí kapitole.

3.1.2 Gyraton s $J \propto \Theta$

3.2 Interakce gyratonů s testovacími částicemi

3.2.1 Refrakční rovnice

Stejná struktura jako předchozí kapitola, stačí přepsat a trochu okomentovat (např. "delta" ve skocích v čtyřechlosti - započítat metrické členy s J)

4. Spinorový popis expandujících gravitačních vln

V této kapitole zavedeme spinorový formalismus na Minkowského prostoročase, následně jej použijeme k popisu expandujících impulsních gravitačních vln. S běžným popisem expandujících gravitačních vln se lze seznámit např. v [17], [18], [další....](#) Spinorový formalismus vybudujeme na základě geometrického přístupu i přes široce uznávaný názor, že nejpřirozenější popis spinorů je v řeči teorie reprezentací (např. [19]). Geometrická konstrukce spinorů je ale pro použití v relativitě jakožto geometrické teorii, příhodnější a tohoto přístupu pak využívají právě práce zabývající se čistě relativistickým využitím spinorů, například [20], [21].

4.1 Spinorový formalismus

4.1.1 Krátký úvod do 2-spinorů

Definujme zde Minkowského prostor \mathbb{M} jako čtyřdimenzionální vektorový prostor nad \mathbb{R} s Lorentzovskou metrikou $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. V každém bodě prostoru \mathbb{R}^4 existuje množina bázových vektorů z \mathbb{M} kterou nazýváme tetrádou. Vezměme světelný kužel v \mathbb{M} , tedy úplný podprostor, kde pro každý vektor platí

$$\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = 0. \quad (4.1)$$

Každému časupodobnému nebo světelnému vektoru v prostoročasu přiřazujeme orientaci vůči počátku světelného kuželeg, může mít do minulosti nebo do budoucnosti, světelný kužel tak rozdělíme na budoucí a minulý. Průnikem světelného kuželeg s plochou konstantního času dostaneme sféru v \mathbb{R}^3 . Pokud leží nadplocha konstantního času v souřadnici $x^0 = t = 1$, představuje vzniklá sféra tzv. Riemannovu sféru Σ pro kterou platí rovnice

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (4.2)$$

Stereografickou projekcí pak můžeme ztotožnit sféru Σ s rozšířenou komplexní rovinou $\tilde{\mathbb{C}}$ (tedy $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$) a body x , y a z na sféře můžeme popsat jednou komplexní souřadnicí, které se obvykle říká stereografická souřadnice,

$$\xi = \frac{x + iy}{1 - z}, \quad (4.3)$$

případně v polárních souřadnicích (θ, ϕ)

$$\xi = e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2}. \quad (4.4)$$

Inverzní vztahy jsou pak

$$x = \frac{\xi + \bar{\xi}}{\xi \bar{\xi} + 1}, \quad y = \frac{\bar{\xi} - \xi}{\xi \bar{\xi} + 1}, \quad z = \frac{\xi \bar{\xi} - 1}{\xi \bar{\xi} + 1}. \quad (4.5)$$

Dále zavedeme složky spinoru ξ^A , $\xi^A = (\zeta, \eta)$, jako

$$\xi = \frac{\zeta}{\eta}, \quad (4.6)$$

vyhneme se tak nekonečné hodnotě stereografické souřadnice pro horní (severní) pól Riemannovy sféry. Nyní potřebujeme udělat jistou formalizaci indexové notace. Pokud je horní (a později i dolní) index tučný, jedná se o tzv. abstraktní index, který není svázaný se spinorovou bází, kterou zavedeme dále, ale pouze naznačuje strukturu objektu. Pokud index není tučný, jedná se přímo o souřadnicový index, který nabývá hodnot 1, 2 a je svázaný s bází. Je zřejmé, že spinor ξ^A a stereografická souřadnice ξ jsou i přes použití podobného značení dva odlišné objekty. Pomocí komponent spinoru lze popsat libovolný bod (t, x, y, z) na světelném kuželu jako

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\zeta \bar{\zeta} + \eta \bar{\eta}) \\ x &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\zeta \bar{\eta} + \eta \bar{\zeta}) \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\zeta} \eta - \eta \bar{\zeta}) \\ z &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\zeta \bar{\zeta} - \eta \bar{\eta}). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Na prostoru spinorů se dále zavádí 2-forma $[\cdot, \cdot]$, která je

- (1) antisymetrická,
- (2) bilineární a
- (3) nedegenerovaná.

Všimněme si, že kombinací prvních dvou podmínek dostaneme pro dva lineárně závislé spinory (tedy pro dvojici (ξ^A, κ^A) takové, že $\kappa^A = \lambda \xi^A$, $\lambda \in \mathbb{C}$)

$$[\xi^A, \kappa^A] = 0. \quad (4.8)$$

Z třetí podmínky ale máme

$$[\xi^A, \eta^A] \neq 0 \quad (4.9)$$

pro všechny ξ^A, η^A z prostoru spinorů.

Tuto 2-formu obvykle zapisujeme symbolem ϵ_{AB} , jedná se o tzv. Levi-Civitův spinor a na prostoru spinorů zavádí skalární součin

$$\epsilon_{AB} \xi^A \eta^B = \xi_B \eta^B = -\xi^A \eta_A \quad (4.10)$$

a zastává tedy funkci obdobnou metrickému tenzoru. Zápis (4.10) lze také vyjádřit jako

$$\xi^A = \epsilon^{AB} \xi_B, \quad \xi_A = \epsilon_{BA} \xi^B, \quad (4.11)$$

kde platí

$$\epsilon^{AC} \epsilon_{BC} = \delta_B^A. \quad (4.12)$$

Dále se zavádí spin-báze (o^A, ι^A) tak, aby platilo

$$[o^A, \iota^A] = -[\iota^A, o^A] = 1. \quad (4.13)$$

Tak formálně propojíme souřadnicový zápis ξ^A se samotným spinorem ξ^A

$$\xi^A = \xi^0 o^A + \xi^1 \iota^A \quad (4.14)$$

Z prvků báze lze pomocí dyadického součinu sestrojit Levi-Civitův spinor. S využitím normalizačních podmínek (4.13) a vlastnosti (4.11) dostaneme vztah

$$\epsilon_{AB} = o_A \iota_B - o_B \iota_A. \quad (4.15)$$

V transformaci spinorových složek na reálné souřadnice (4.7) máme komplexně sdružené složky spinorů, operace komplexního sdružení ale není uzavřená na prostor spinorů, což lze jednoduše ukázat když sečteme složky spinoru se složkami komplexně sdruženého - výsledný objekt má reálné složky. Operace komplexního sdružení tedy zobrazuje spinory na prostor komplexně sdružených spinorů a píšeme

$$\bar{\xi}^A = \bar{\xi}^{A'}. \quad (4.16)$$

Komplexním sdružením spinorové báze dostáváme bázi prostoru komplexně sdružených spinorů

$$\bar{o}^A = \bar{o}^{A'} = o^{A'}, \quad \bar{\iota}^A = \bar{\iota}^{A'} = \iota^{A'}. \quad (4.17)$$

U Levi-Civitova spinoru je stejně jako u složek spin-báze konvence psát $\bar{\epsilon}_{AB} = \epsilon_{A'B'}$ a ne $\bar{\epsilon}_{A'B'}$ jak bychom mohli očekávat.

Nejobecnějším typem spinoru je pak spinor s tzv. valencí $(p, q; r, s)$ který zapisujeme jako

$$\chi^{A\dots C \ S'\dots U'}_{\ D\dots F \ W'\dots Y'}, \quad (4.18)$$

který má p kontravariantní nečárkovany indexy, q kontravariantní čárkovany indexy, r kovariantní nečárkovany indexy a s kovariantní čárkovany indexy. Obecně platí

$$\chi^{AB'}_{\ CD'} = \chi^{B'A}_{\ D'C} = \chi^A_C \ ^{B'}_{D'}, \quad (4.19)$$

tedy čárkovany indexy můžeme libovolně prohazovat s nečárkovany, musí ale zůstat pozice čárkovany mezi sebou a nečárkovany mezi sebou.

Nyní jsme kompletně vybaveni k přepsání vztahů (4.7) do zápisu čistě pomocí spinorů. Využijeme k tomu Infield-van der Waerdenovy symboly $\sigma_\mu^{AA'}$. Ty můžeme v Minkowského prostoru reprezentovat čtyřmi hermitovskými maticemi

$$\begin{aligned} \sigma_0^{AA'} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \sigma_1^{AA'} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_2^{AA'} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_3^{AA'} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Tyto symboly nám dávají propojení mezi **world-tensor** (překlad) a spinory. Komponenty (4.7) vektoru ležícího na světelném kuželu pomocí spinoru se složkami $\xi^A = (\zeta, \eta)$ zapíšeme jako

$$x^\mu = \bar{\xi}^{A'} \sigma_{AA'}^\mu \xi^A. \quad (4.21)$$

Dále zavedeme spinorovou formu vektoru x^μ

$$x^{AA'} = \sigma_\mu^{AA'} x^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Je tohle správně? Je to jen speciální případ na Minkowského PČ - spinová struktura na varietě \mathcal{M} je ekvivariantní lift frame bandlu - rozmyslet jak ten funguje Z Levi-Civitových spinorů a Infield-van der Waerdenových symbolů můžeme zkonztruovat metriku

$$g_{\mu\nu} = \epsilon_{AB} \epsilon_{A'B'} \sigma_\mu^{AA'} \sigma_\nu^{BB'}. \quad (4.23)$$

Obecně můžeme s pomocí těchto symbolů vyjádřit spinory libovolné valence jako tenzory a naopak.

Ve výpočtech se obvykle Infield-van der Waerdenovy symboly vynechávají a rovnou se píše

$$g_{\mu\nu} = \epsilon_{AB} \epsilon_{A'B'}. \quad (4.24)$$

Z tvaru Infield-van der Waerdenových symbolů je vidět korespondence mezi tenzorovými a spinorovými indexy, každému tenzorovému indexu odpovídají dva spinorové.

Pomocí spinorové báze můžeme zavést světelnou (nulovou) tetrádu vztahy

$$\begin{aligned} l^a &= o^A o^{A'}, \\ n^a &= \iota^A \iota^{A'}, \\ m^a &= o^A \iota^{A'}, \\ \bar{m}^a &= \iota^A o^{A'} \end{aligned} \quad (4.25)$$

kde l^a, n^a, m^a a \bar{m}^a jsou normalizované světelné vektory tvořící bázi.

4.2 Expandující gravitační vlny

4.2.1 Refrakční rovnice

Závěr

Seznam použité literatury

- [1] Jiří Bičák. Selected solutions of Einstein's field equations: Their role in general relativity and astrophysics. *Lect. Notes Phys.*, 540:1–126, 2000.
- [2] Roger Penrose. *The geometry of impulsive gravitational waves*, pages 101–115. 1972.
- [3] Jiří Podolský and Jerry B. Griffiths. Impulsive gravitational waves generated by null particles in de Sitter and anti-de Sitter backgrounds. *Phys. Rev. D*, 56:4756–4767, 1997.
- [4] Jiří Podolský, Clemens Sämann, Roland Steinbauer, and Robert Švarc. The global existence, uniqueness and C^1 -regularity of geodesics in nonexpanding impulsive gravitational waves. *Class. Quant. Grav.*, 32(2):025003, 2015.
- [5] Penrose Roger. Twistor quantisation and curved space-time. *Int J Theor Phys*, 1:61–99, 1968.
- [6] Jiří Podolský and Karel Veselý. New examples of sandwich gravitational waves and their impulsive limit. *Czechoslovak Journal of Physics*, 48(8):871–878, 1998.
- [7] Jiří Podolský. Non-expanding impulsive gravitational waves. *Classical and Quantum Gravity*, 15(10):3229–3239, oct 1998.
- [8] Ronald Steinbauer. Geodesics and geodesic deviation for impulsive gravitational waves. *Journal of Mathematical Physics*, 39(4):2201–2212, apr 1998.
- [9] Michael Kunzinger and Ronald Steinbauer. A rigorous solution concept for geodesic and geodesic deviation equations in impulsive gravitational waves. *Journal of Mathematical Physics*, 40(3):1479–1489, mar 1999.
- [10] Jiří Podolský and Marcello Ortaggio. Symmetries and geodesics in (anti-)de sitter spacetimes with non-expanding impulsive waves. *Classical and Quantum Gravity*, 18(14):2689–2706, jun 2001.
- [11] Alexej. F. Filippov. *Differential equations with discontinuous righthand sides*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Netherlands Boston, 1988.
- [12] Jerry B. Griffiths and Jiří Podolský. Null multipole particles as sources of pp-waves. *Physics Letters A*, 236(1-2):8–10, dec 1997.
- [13] Peter C. Aichelburg and Roman U. Sexl. On the gravitational field of a massless particle. *General Relativity and Gravitation*, 2(4):303–312, 1971.
- [14] Jiří Podolský and Jerry B. Griffiths. Impulsive waves in de sitter and anti-de sitter space-times generated by null particles with an arbitrary multipole structure.
- [15] M Hotta and M Tanaka. Shock-wave geometry with nonvanishing cosmological constant. *Classical and Quantum Gravity*, 10(2):307–314, feb 1993.

- [16] Jiří Podolský, Robert Švarc, Ronald Steinbauer, and Clemens Sämann. Penrose junction conditions extended: Impulsive waves with gyratons. *Physical Review D*, 96(6), 2017.
- [17] Jiří Podolský and Jerry B. Griffiths. Expanding impulsive gravitational waves. *Classical and Quantum Gravity*, 16(9):2937–2946, aug 1999.
- [18] Jiří Podolský, Clemens Sämann, Roland Steinbauer, and Robert Švarc. The global uniqueness and C^1 -regularity of geodesics in expanding impulsive gravitational waves. *Class. Quant. Grav.*, 33(19):195010, 2016.
- [19] Marián Fecko. *Differential Geometry and Lie Groups for Physicists*. Cambridge University Press, 2006.
- [20] Roger Penrose and Wolfgang Rindler. *Spinors and Space-Time*, volume 1 of *Cambridge Monographs on Mathematical Physics*. Cambridge University Press, 1984.
- [21] Peter O’Donnell. *Introduction to 2-Spinors in General Relativity*. WORLD SCIENTIFIC, 2003.