MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

Daniel Rod

# Interakce testovacích částic s impulzními gravitačními vlnami

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Robert Švarc, Ph.D.
Studijní program: studijní program
Studijní obor: studijní obor

Praha 2021

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ............ dne ............ ....................................

Podpis autora

Poděkování.

Název práce: Interakce testovacích částic s impulzními gravitačními vlnami

Autor: Daniel Rod

Ústav: Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Robert Švarc, Ph.D., Ústav teoretické fyziky

Abstrakt: Abstrakt.

Klíčová slova: klíčová slova

Title: Interaction of test particles with impulsive gravitational waves

Author: Daniel Rod

Institute: Institute of Theorethical Physics

Supervisor: RNDr. Robert Švarc, Ph.D., Institute of Theorethical Physics

Abstract: Abstract.

Keywords: key words

# Obsah


**Úvod** **2**

**1 Prostoročasy konstantní křivosti** **3**
- 1.1 Minkowskeho prostoročas . . . . . 3
- 1.2 de Sitterův prostoročas . . . . . 4
- 1.3 Anti-de Sitterův prostoročas . . . . . 4

**2 Neexpandující impulzní gravitační vlny** **5**
- 2.1 Konstrukce . . . . . 5
  - 2.1.1 "Cut and paste" metoda konstrukce . . . . . 5
  - 2.1.2 Spojitý tvar metriky . . . . . 6
  - 2.1.3 Distribuční tvar metriky . . . . . 7
  - 2.1.4 Boost Schwarzchildova řešení . . . . . 7
- 2.2 Interakce s testovacími částicemi . . . . . 7
  - 2.2.1 Profil impulsní gravitační vlny . . . . . 7
  - 2.2.2 Refrakční rovnice . . . . . 7
  - 2.2.3 Interakce . . . . . 7

**3 Neexpandující gravitační vlny s gyratonovými členy** **8**
- 3.1 Konstrukce . . . . . 8
  - 3.1.1 "Cut and paste" metoda konstrukce . . . . . 8
  - 3.1.2 Spojitý tvar metriky . . . . . 8
- 3.2 Interakce s testovacími čísticemi v prostoročasech s gyratony . . . 9
  - 3.2.1 Refrakční rovnice . . . . . 9

**4 Expandující gravitační vlny a spinorový popis** **10**
- 4.1 Spinorový formalismus . . . . . 10
  - 4.1.1 Krátký úvod do 2-spinorů . . . . . 10
- 4.2 Expandující gravitační vlny . . . . . 13
  - 4.2.1 Refrakční rovnice . . . . . 13

**Závěr** **14**

**Seznam použité literatury** **15**

**A Přílohy** **16**
- A.1 První příloha . . . . . 16

# Úvod

## Obecná teorie relativity

Roku 1915 publikoval Albert Einstein Obecnou teorii relativity, nejmodernější a doposud nejúspěšnější teorii gravitace. Za více jak 100 let od její formulace byly v nesčetném množství experimentů úspěšně ověřeny její předpovědi, včetně první detekce gravitačních vln v roce 2015 na interferometrech LIGO v Livingstonu a Hanfordu, která byla následována desítkami dalších detekcí k nimž nyní přispívá i evropský projekt VIRGO. Další zajímavé experimentální ověření?.

Obecná teorie relativity je geometrická teorie popisující chování hmoty a energie v prostoročasu, který reprezentuje jako diferenciální varietu vybavenou metrickám tenzorem $g_{\mu\nu}$. Tvar metrického tenzoru, resp. jeho složek (metrických funkcí) je s fyzikální realitou gravitačního pole spojen Einsteinovými polními rovnicemi, které mají v geometrizovaných jednotkách tvar

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \tag{1}$$

Levá strana polních rovnic představuje geometrii na diferenciální varietě reprezentující prostoročas, $R_{\mu\nu}$ je Ricciho tenzor křivosti, $R$ je Ricciho skalární křivost a $\Lambda$ představuje tzv. kosmologickou konstantu. Tenzor energie a hybnosti $T_{\mu\nu}$ na pravé straně pak dává spojení geometrických objektů s fyzikálním modelem, představuje rozložení hmoty, energie a jejich toky a hybnosti. Jedná se o 10 nelineárních parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu, které

# 1. Prostoročasy konstantní křivosti

V této kapitole představáme prostoročasy, které budou sloužit jako pozadí pro propagaci impulzlních gravitačních vln. Jde o maximálně symetrická řešení Einsteinových polních rovnic (1) s nulovou pravou stranou a s konstantní skalární křivostí $R$ na celém prostoorčase. Celkem rozlišujeme 3 třídy řešení lišící se znaménkem skalární křivosti. Nulová skalární křivost odpovídá řešení s nulovou kosmologickou konstantou kterému se říká Minkowského prostoročas, kladná křivost odpovídá tzv. de Sitterovu prostoročasu s kladnou kosmologickou konstantou a záporná odpovídá anti-de Sitterovu prostoročasu se zápornou kosmologickou konstantou. Vztah mezi kosmologickou konstantou a skalární křivostí ve vakuových řešeních (tedy s nulovým tenzorem energie a hybnosti) dostaneme kontrakcí polních rovnic (1) jako

$$R = 4\Lambda. \tag{1.1}$$

Všechna tato řešení vykazují deset symetrií, jejich interpretace jsou pro jednotlivé prostoročasy různé a budou dále diskutovány níže. Tohle vyjádřit trochu jinak, zní to neohrabaně :D I přes svou jednoduchost jsou zmíněné prostoročasy na poli teoretické fyziky velmi podstatné, čtyřdimenzionální Minkowskeho prostoročas je arénou speciální teorie relativity, vícedimenzionální Minkowského prostoročas pak běžně slouží jako vhodný prostor pro vnoření složitějších prostoročasů. De-Sitterův prostoročas je pro moderní fyziku důležitý při popisu vesmíru, experimentální data ukazují, že v aproximaci do prvního řádu jej lze právě na velkých škálách (a také v inflační epoše) popsat právě jako de Sitterův prostoročas. Anti-de Sitterův prostoročas... [1] zde zajímavosti o jednotlivých řešeních stručně (Minkowski - STR, AdS - CFT korespondence atp...)

## 1.1 Minkowskeho prostoročas

Minkowského prostoročas je nejjednodušší řešení Einsteinových polních rovnic s nulovou pravou stranou. Jde o řešení s nulovou křivostí v celém prostoročase. Grupou symetrií Minkowského prostoročasu je Poincarého grupa, která je tvořena všemi translacemi a Lorentzovou grupou představující rotace a boosty.

Metrika Minkowského prostoročasu má v nejpřirozenějším vyjádření, v karzézských souřadnicích, tvar

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2. \tag{1.2}$$

Souřadnicovými transformacemi

$$\mathcal{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}(t - z), \qquad \mathcal{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + z) \tag{1.3}$$

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy), \qquad \bar{\eta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - iy) \tag{1.4}$$

převedeme metriku do symetrického tvaru

$$\mathrm{d}s^2 = -2\mathrm{d}\mathcal{U}\ \mathrm{d}\mathcal{V} + 2\mathrm{d}\eta\ \mathrm{d}\bar{\eta}. \tag{1.5}$$

Souřadnicím zavedeným transformací (1.3) se říká retardovaná a advancovaná souřadnice, metrika (1.5) je pak v tzv. světelných (nulových) souřadnicích. Pokud zkoumáme axiálně symetrickou situaci na Minkowského pozadí, je vhodné zavést cylindrické souřadnice parametrizací

$$x = \rho \cos(\varphi), \qquad y = \rho \sin(\varphi), \tag{1.6}$$

kde $\rho \in [0, \infty)$ a $\varphi \in [0, 2\pi)$. Metrika pak nabývá tvaru

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2 \mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2. \tag{1.7}$$

## 1.2 de Sitterův prostoročas

De Sitterův prostoročas je maximálně symetrické vakuové řešení Einsteinových rovnic s kladnou kosmologickou konstantou. Isometrie čtyřrozměrného de Sitterova prostoročasu tvoří grupu $SO(1{,}4)$. Obvykle se de Sitterův prostoročas reprezentuje jako vnoření hyperboloidu

$$-Z_0^2 + Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 = a^2 \tag{1.8}$$

do pětidimenzionálního Minkowského prostoru s metrikou

$$ds^2 = -dZ_0^2 + dZ_1^2 + dZ_2^2 + dZ_3^2 + dZ_4^2. \tag{1.9}$$

Konstanta $a$ je daná kosmologickou konstantou jako $a = \sqrt{3/\Lambda}$.

## 1.3 Anti-de Sitterův prostoročas

Anti-de Sitterův prostoročas je maximálně symetrické vakuové řešení Einsteinových rovnic se zápornou kosmologickou konstantou.

# 2. Neexpandující impulzní gravitační vlny

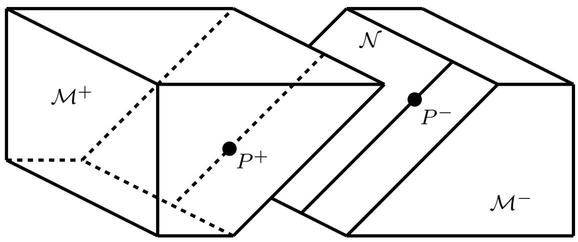
Neexpandující impulzní vlny

## 2.1 Konstrukce

Nejprve popíšeme několik způsobů konstrukce prostoročasů s neexpandujícíme impulzními gravitačními vlnami, začneme Penroseovou [2] geometrickou metodou "cut and paste"a zavedeme spojité souřadnice na tomto prostoročase. Dále zavedeme distribuční popis těchto prostoročasů

### 2.1.1 "Cut and paste" metoda konstrukce

Geometrická metoda konstrukce "cut and paste"impulzních gravitačních vln v Minkowského prostoročase (1.2) se zakládá na rozdělení celého prostoročasu podél rovinné světelné nadplochy $\mathcal{N}$ kde je implulzní vlna lokalizována na dvě části $\mathcal{M}^+$ a $\mathcal{M}^-$. Opětovným spojením těchto částí a ztotožněním bodů na hranici řezu $\mathcal{N}$ se specifickým posunutím dostaneme prostoročas s impulzní gravitační vlnou.




Obrázek 2.1: Geometrická konstrukce neexpandující impulzní gravitační vlny pomocí metody "cut and paste", podél nadplochy $\mathcal{N}$ dojde k rozdělení prostoročasu na dvě části $\mathcal{M}^+$ a $\mathcal{M}^-$ a opětovnému ztotožnění bodů na hranici obou částí se specifickým posunem.

Pro světelnou nadplochu $\mathcal{N}$ danou podmínkou $\mathcal{U} = 0$ pak tato konstrukce odpovídá Penroseově spojovacím podmínkám

$$[\eta, \bar{\eta}, \mathcal{V}, \mathcal{U} = 0_-]_{\mathcal{M}^-} \equiv [\eta, \bar{\eta}, \mathcal{V} - H(\eta, \bar{\eta}), \mathcal{U} = 0_+]_{\mathcal{M}^+}, \tag{2.1}$$

kde $H(\eta, \bar{\eta})$ je holomorfní. Penrose [2] ukázal, že impulzní gravitační vlny jsou v tenzoru křivosti reprezentovány členy proporciálními Diracově delta distribuci $\delta(\mathcal{U})$. V Minkowského pozadí je nadplocha $\mathcal{U} = 0$ rovina a řešení spadá do rodiny impulzních $pp-$vln, tedy rovnoběžně se propagujících rovinných vln. Obecně na pozadích konstantní křivosti platí stejné napojovací podmínky (2.1) a nadplocha představuje $\mathcal{U} = 0$ plochu konstantní Gaussovské křivosti $K = \frac{1}{3}\Lambda$ která je popsána metrikou $d\sigma^2 = 2(1 + \frac{1}{6}\Lambda\eta\bar{\eta})^{-2} d\eta\, d\bar{\eta}$. V případě $\Lambda \neq 0$ se tedy jedná buďto o sféru ($\Lambda > 0$) nebo o hyperboloid ($\Lambda < 0$). Popis těchto nadploch konstatní křivostsi v (A)dS prostoročasech a jejich geometrické vlastnosti jsou shrnuty v [3], kde je také ukázáno, že se jedná o neexpandující nadplochy.

### 2.1.2 Spojitý tvar metriky

Metoda "cut and paste" nám dává identifikaci bodů prostoročasu na obou stranách impulzní vlny a tedy napojovací podmínky pro geodetiky, nic ale neříká o podobě metriky kompletního prostoročasu s impulzní vlnou. Potřebujeme tedy najít vhodný souřadnicový systém, ve kterém bude metrika spojitá funkce $\mathcal{U}$. Toho dosáhneme postupem použitým např. v [4], kde z metriky prostoročasu pozadí (**??**), respektive

$$\mathrm{d}s_0^2 = \frac{2\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\bar{\eta} - 2\,\mathrm{d}\mathcal{U}\,\mathrm{d}\mathcal{V}}{\left[1 + \frac{1}{6}\Lambda\left(\eta\bar{\eta} - \mathcal{U}\mathcal{V}\right)\right]^2}, \tag{2.2}$$

souřadnicovou transformací

$$\mathcal{U} = U, \quad \mathcal{V} = V + H + UH_{,Z}H_{,\bar{Z}}, \quad \eta = Z + UH_{,\bar{Z}}, \tag{2.3}$$

kde uvažujeme libovolnou reálnou funkci $H(Z,\bar{Z})$, obdržíme metriku

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{2\left|\mathrm{d}Z + U\left(H_{,Z\bar{Z}}\mathrm{d}Z + H_{,\bar{Z}\bar{Z}}\mathrm{d}\bar{Z}\right)\right|^2 - 2\mathrm{d}U\mathrm{d}V}{\left[1 + \frac{1}{6}\Lambda(Z\bar{Z} - UV - UG)\right]^2} \tag{2.4}$$

kde $G(Z,\bar{Z}) \equiv H - ZH_{,Z} - \bar{Z}H_{,\bar{Z}}$. Metriku (2.4) pak uvažujeme pouze pro $U > 0$, zatímco na $U < 0$ provedeme ztotožnení souřadnic

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= U \\ \mathcal{V} &= V \\ \eta &= Z \end{aligned} \tag{2.5}$$

a uvažujeme metriku vzniklou právě touto transformací. Definováním tzv. kink funkce jako

$$U_+ \equiv U_+(U) = \begin{cases} 0 & \text{pro } U \leq 0 \\ U & \text{pro } U \geq 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

můžeme výslednou metriku zapsat jako

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{2\left|\mathrm{d}Z + U_+\left(H_{,Z\bar{Z}}\mathrm{d}Z + H_{,\bar{Z}\bar{Z}}\mathrm{d}\bar{Z}\right)\right|^2 - 2\mathrm{d}U\mathrm{d}V}{\left[1 + \frac{1}{6}\Lambda(Z\bar{Z} - UV - U_+G)\right]^2}. \tag{2.7}$$

Transformace (2.3) a (2.5) spojující separátně pro $\mathcal{U} > 0$ a $\mathcal{U} < 0$ metriku (2.2) s metrikou (2.7) lze pomocí Heavisideovy funkce $\Theta(U)$ přepsat do tvaru

$$\mathcal{U} = U, \quad \mathcal{V} = V + \Theta(U)H + U_+H_{,Z}H_{,\bar{Z}}, \quad \eta = Z + U_+H_{,\bar{Z}}. \tag{2.8}$$

Stále je ale nutné provádět transformaci separátně pro $\mathcal{U} > 0$ a $\mathcal{U} < 0$, Heavisideova funkce má při transformaci metriky (2.2) za následek vznik členů proporcionálních delta funkci. Ukazuje se, že tato transformace spojuje tzv. distribuční vyjádření metriky (2.9), které bude zavedeno dále, se spojitým tvarem metriky (2.7). Transformace (2.8) zároveň obsahuje Penroseovy spojovací podmínky (2.1) v $U = 0$, kde vzniká nespojitost v souřadnici $\mathcal{V}$. Tato metoda konstrukce tedy představuje explicitní "cut and paste" konstrukci.

### 2.1.3 Distribuční tvar metriky

Dalším způsobem konstrukce impulzní gravitační vlny je limitní přechod od příslušných rodin tzv. "sandwichových" gravtiačních vln s hladkým profilem vlnoplochy k limitnímu distribučnímu vyjádření impulzní vlny. Takové vyjádření také dostaneme dosazením invezní transformace k (2.8) do spojité metriky (2.7).

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{2\mathrm{d}\eta\ \mathrm{d}\bar{\eta} - 2\mathrm{d}\mathcal{U}\ \mathrm{d}\mathcal{V} + 2H(\eta,\bar{\eta})\delta(\mathcal{U})\ \mathrm{d}\mathcal{U}^2}{\left[1 + \frac{1}{6}\Lambda(\eta\bar{\eta} - \mathcal{U}\mathcal{V})\right]^2} \tag{2.9}$$

Pokud v případě nenulové konsmologické konstanty vnoříme prostoročas s impulsní vlnou do pětidimenzionálního plochého prostoročasu s Minkowského metrikou nejdříve dopsat dS a AdS, ať se můžu odkazovat!

### 2.1.4 Boost Schwarzchildova řešení

Další způsob, kterým lze prostoročas s impulzní pp-vlnou získat je boost Schwarzchildova řešení

## 2.2 Interakce s testovacími částicemi

### 2.2.1 Profil impulsní gravitační vlny

Einsteinovy rovnice (1) se pro metriku (2.9) redukují na

### 2.2.2 Refrakční rovnice

Zde více komentáře (ex. souř. systém kde jsou geodetiky spojité, zavést C1 matching a ospravedlnit použití refrakčních rovnic) Změna polohy (nalepení geodetiky) je dána Penroseovými spojovacími podmínkami, tento skok ale generuje změnu v derivacích poloh a dojde tedy k refrakci geodetik na impulzní nadploše $\mathcal{U} = 0$ podle sady tzv. refrakčních rovnic

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{U}}_\mathrm{i}^+ &= \dot{\mathcal{U}}_\mathrm{i}^- \\ \dot{\mathcal{V}}_\mathrm{i}^+ &= \dot{\mathcal{V}}_\mathrm{i}^- + H_{\mathrm{i},Z}\dot{\eta}_\mathrm{i}^- + H_{\mathrm{i},\bar{Z}}\dot{\bar{\eta}}_\mathrm{i}^- + H_{\mathrm{i},Z}H_{\mathrm{i},\bar{Z}}\dot{\mathcal{U}}_\mathrm{i}^- \\ \dot{\eta}_\mathrm{i}^+ &= \dot{\eta}_\mathrm{i}^- + H_{\mathrm{i},\bar{Z}}\dot{\mathcal{U}}_\mathrm{i}^- . \end{aligned} \tag{2.10}$$

Index $i$ znamená hodnotu na impulzní nadploše, složky označené znakem + jsou za impulzem a tedy v části prostoročasu $\mathcal{M}^+$, složky označené znakem - jsou před impulzem v $\mathcal{M}^-$.

### 2.2.3 Interakce

Zde vykreslené obrázky s popisem, jak pro světelné částice tak pro časupodobné geodetiky (případně i pro srandu prosoturupodobné)

# 3. Neexpandující gravitační vlny s gyratonovými členy

Distribuční vyjádření metriky impulzní vlny (2.9) není nejobecnější metrikou popisující impulzní vlny. Už Brinkmann (nezapomenout Brinkmanna v úvodu BP!) uvažoval i tzv. mimodiagonální členy, se kterými pak (i v případě nenulové kosmologické konstanty) metrika nabývá tvaru

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 = & \frac{2\mathrm{d}\eta\ \mathrm{d}\bar{\eta} - 2\mathrm{d}\mathcal{U}\ \mathrm{d}\mathcal{V} + 2H(\eta,\bar{\eta})\delta(\mathcal{U})\ \mathrm{d}\mathcal{U}^2}{\left[1+\frac{1}{6}\Lambda(\eta\bar{\eta}-\mathcal{U}\mathcal{V})\right]^2} \\
& + \frac{2J\left(\eta,\bar{\eta},\mathcal{U}\right)\mathrm{d}\eta\ \mathrm{d}\mathcal{U} + 2\overline{J}\left(\eta,\bar{\eta},\mathcal{U}\right)\mathrm{d}\bar{\eta}\ \mathrm{d}\mathcal{U}}{\left[1+\frac{1}{6}\Lambda(\eta\bar{\eta}-\mathcal{U}\mathcal{V})\right]^2}.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Obvyklým postupem je odstranění členů s funkcí $J$ vhodnou souřadnicovou transformací, to ale vede k odstranění možného rotačního charakteru zdroje gravitační vlny, taková transformace pak není globální, dochází k zanedbání topologických vlastností celého prostoročasu.

## 3.1 Konstrukce

Má tahle sekce vůbec smysl? Možná přejmenovat na zobecnění na prostoročasy s gyratonovými členy a totožnost cut and paste nechat jen v "úvodním slově". Konstrukce neexpandujících gracitačních vln s gyratonovými členy je obdobná případu bez gyratonových členů. Opět můžeme využít Penroseovu "cut and paste" metodu, v případě gyratonických prostoročasů ale bude konstrukce totožná s konstrukcí popsanou v (2.1.1) a jak je ukázáno v článku [5], Penroseovy lepící podmínky v přítomnosti gyratonů nabývají tvaru (2.1). (přeformulovat něják lépe...),

### 3.1.1 "Cut and paste" metoda konstrukce

Metoda "cut and paste" ... Tohle asi pryč.

### 3.1.2 Spojitý tvar metriky

Tvar spojité metriky pro gyratonové neexpandující impulsní vlny obdržíme zobecněním transformace (2.8), do tvaru který nalezli Podolský, Švarc, Säman a Steinbauer v [5]

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U} &= U \\
\mathcal{V} &= V + \Theta H + U_+ H_{,Z} H_{,\bar{Z}} + W \\
\eta &= \left(Z + U_+ H_{,\bar{Z}}\right) \exp\left(iF\right),
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

kde opět $H = H(Z,\bar{Z})$, zároveň funkce $W = W(Z,\bar{Z},U)$ a $F = F(Z,\bar{Z},U)$

jsou reálné a splňují

$$F_{,U} = \frac{i\bar{J}}{Z + U_+ H_{,\bar{Z}}} \exp\left(-iF\right),\qquad W_{,U} = -J\bar{J}. \tag{3.3}$$

Zavedením

$$\zeta \equiv Z + U_+ H_{,\bar{Z}} \tag{3.4}$$

a substitucí (3.2) do (3.1)

## 3.2 Interakce s testovacími čísticemi v prostoročasech s gyratony

### 3.2.1 Refrakční rovnice

Stejná struktura jako předchozí kapitola, stačí přepsat a trochu okomentovat (např. "delty"ve skocích v čtyřrychlosti - započítat metrické členy)

# 4. Expandující gravitační vlny a spinorový popis

V této kapitole zavedeme spinorový formalismus na Minkowského prostoročase, následně jej použijeme k popisu expandujících gravitačních vln. Spinorový formalismus vybudujeme na základě geometrického přístupu i přes fakt, že nejpřirozenější popis spinorů je v řeči teorie reprezentací grup, kde spolu s pinory tvoří vektory v ireducibilních reprezentacích sudých subalgeber Cliffordových algeber, resp. v reprezentacích příslušných Pinových a Spinových grup. S tímto přístupem se setkáme například v zde přidat Cartana 1966 + novější články [6]. Geometrická konstrukce spinorů je ale pro použití v relativitě jakožto geometrické teorii, příhodnější a tohoto přístupu pak využívají právě práce zabývající se čistě relativistickým využitím spinorů, například [7], [8].

## 4.1 Spinorový formalismus

### 4.1.1 Krátký úvod do 2-spinorů

Definujme zde Minkowského prostor $\mathbb{M}$ jako čtyřdimenzionální vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ s Lorentzovskou metrikou $\eta_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1)$. V každém bodě prostoru $\mathbb{R}^4$ existuje množina bázových vektorů z $\mathbb{M}$ kterou nazýváme tetrádou. Vezměme světelný kužel v $\mathbb{M}$, tedy úplný podprostor kde pro každý vektor platí

$$\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = 0. \tag{4.1}$$

Každému časupodobnému nebo světelnému vektoru v prostoročasu přiřazujeme orientaci vůči počátku světelného kužele, může mířit do minulosti nebo do budoucnosti, světelný kužel tak rozdělíme na budoucí a minulý. Průnikem svetelného kuželu s plochou konstantního času dostaneme sféru v $\mathbb{R}^3$. Pokud leží nadplocha konstantního času v souřadnici $x^0 = t = 1$, představuje vzniklá sféra tzv. Riemannovu sféru $\Sigma$ pro kterou platí rovnice

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{4.2}$$

Stereografickou projekcí pak můžeme ztotožnit sféru $\Sigma$ s rozšířenou komplexní rovinou $\tilde{\mathbb{C}}$ (tedy $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$) a body $x$, $y$ a $z$ na sféře můžeme popsat jednou komplexní souřadnicí, které se obvykle říká stereografická souřadnice,

$$\xi = \frac{x + iy}{1 - z}, \tag{4.3}$$

případně v polárních souřadnicích $(\theta, \phi)$

$$\xi = e^{i\phi} \cos\frac{\theta}{2}. \tag{4.4}$$

Inverzní vztahy jsou pak

$$x = \frac{\xi + \bar{\xi}}{\xi\bar{\xi} + 1}, \quad y = \frac{\bar{\xi} - \xi}{\xi\bar{\xi} + 1}, \quad z = \frac{\xi\bar{\xi} - 1}{\xi\bar{\xi} + 1}. \tag{4.5}$$

Dále zavedeme složky spinoru $\xi^{\boldsymbol{A}}$, $\xi^A = (\zeta, \eta)$, jako

$$\xi = \frac{\zeta}{\eta}, \tag{4.6}$$

vyhneme se tak nekonečné hodnotě stereografické souřadnice pro horní (severní) pól Riemannovy sféry. Nyní potřebujeme udělat jistou formalizaci indexové notace. Pokud je horní (a později i dolní) index tučný, jedná se o tzv. abstraktní index, který není svázaný se spinorovou bází, kterou zavedeme dále, ale pouze naznačuje strukturu objektu. Pokud index není tučný, jedná se přímo o souřadnicový index, který nabývá hodnot $1, 2$ a je svázaný s bází. Je zřejmé, že spinor $\xi^{\boldsymbol{A}}$ a stereografická souřadnice $\xi$ jsou i přes použití podobného značení dva odlišné objekty. Pomocí komponent spinoru lze popsat libovolný bod $(t, x, y, z)$ na světelném kuželu jako

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\zeta\bar{\zeta} + \eta\bar{\eta}\right) \\ x &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\zeta\bar{\eta} + \eta\bar{\zeta}\right) \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\bar{\zeta}\eta - \eta\bar{\zeta}\right) \\ z &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\zeta\bar{\zeta} - \eta\bar{\eta}\right). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Na prostoru spinorů se dále zavádí 2-forma $[\cdot, \cdot]$, která je

(1) antisymetrická,

(2) bilineární a

(3) nedegenerovaná.

Všimněme si, že kombinací prvních dvou podmínek dostaneme pro dva lineárně závislé spinory (tedy pro dvojici $(\xi^{\boldsymbol{A}}, \kappa^{\boldsymbol{A}})$ takové, že $\kappa^{\boldsymbol{A}} = \lambda\xi^{\boldsymbol{A}}$, $\lambda \in \mathbb{C}$)

$$[\xi^{\boldsymbol{A}}, \kappa^{\boldsymbol{A}}] = 0. \tag{4.8}$$

Z třetí podmínky ale máme

$$[\xi^{\boldsymbol{A}}, \eta^{\boldsymbol{A}}] \neq 0 \tag{4.9}$$

pro všechny $\xi^{\boldsymbol{A}}$, $\eta^{\boldsymbol{A}}$ z prostoru spinorů.

Tuto 2-formu obvykle zapisujeme symbolem $\epsilon_{\boldsymbol{AB}}$, jedná se o tzv. Levi-Civitův spinor a na prostoru spinorů zavádí skalární součin

$$\epsilon_{\boldsymbol{AB}}\xi^{\boldsymbol{A}}\eta^{\boldsymbol{B}} = \xi_{\boldsymbol{B}}\eta^{\boldsymbol{B}} = -\xi^{\boldsymbol{A}}\eta_{\boldsymbol{A}} \tag{4.10}$$

a zastává tedy funkci obdobnou metrickému tenzoru. Zápis (4.10) lze také vyjádřit jako

$$\xi^{\boldsymbol{A}} = \epsilon^{\boldsymbol{AB}}\xi_{\boldsymbol{B}}, \qquad \xi_{\boldsymbol{A}} = \epsilon_{\boldsymbol{BA}}\xi^{\boldsymbol{B}}, \tag{4.11}$$

kde platí

$$\epsilon^{\boldsymbol{AC}}\epsilon_{\boldsymbol{BC}} = \delta^{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{B}}. \tag{4.12}$$

Dále se zavádí spin-báze $(o^{\boldsymbol{A}}, \iota^{\boldsymbol{A}})$ tak, aby platilo

$$[o^{\boldsymbol{A}}, \iota^{\boldsymbol{A}}] = -[\iota^{\boldsymbol{A}}, o^{\boldsymbol{A}}] = 1. \tag{4.13}$$

Tak formálně propojíme souřadnicový zápis $\xi^A$ se samotným spinorem $\xi^{\boldsymbol{A}}$

$$\xi^{\boldsymbol{A}} = \xi^0 o^{\boldsymbol{A}} + \xi^1 \iota^{\boldsymbol{A}} \tag{4.14}$$

Z prvků báze lze pomocí dyadického součinu sestrojit Levi-Civitův spinor. S využitím normalizačních podmínek (4.13) a vlastnosti (4.11) dostaneme vztah

$$\epsilon_{\boldsymbol{AB}} = o_{\boldsymbol{A}} \iota_{\boldsymbol{B}} - o_{\boldsymbol{B}} \iota_{\boldsymbol{A}}. \tag{4.15}$$

V transformaci spinorových složek na reálné souřadnice (4.7) máme komplexně sdružené složky spinorů, operace komplexního sdružení ale není uzavřená na prostor spinorů, což lze jednoduše ukázat když sečteme složky spinoru se složkami komplexně sdruženého - výsledný objekt má reálné složky. Operace komplexního sdružení tedy zobrazuje spinory na prostor komplexně sdružených spinorů a píšeme

$$\overline{\xi^{\boldsymbol{A}}} = \bar{\xi}^{\boldsymbol{A'}}. \tag{4.16}$$

Komplexním sdružením spinorové báze dostáváme bázi prostoru komplexně sdružených spinorů

$$\overline{o^{\boldsymbol{A}}} = \bar{o}^{\boldsymbol{A'}} = o^{\boldsymbol{A'}}, \quad \overline{\iota^{\boldsymbol{A}}} = \bar{\iota}^{\boldsymbol{A'}} = \iota^{\boldsymbol{A'}}. \tag{4.17}$$

U Levi-Civitova spinoru je stejně jako u složek spin-báze konvence psát $\overline{\epsilon_{\boldsymbol{AB}}} = \epsilon_{\boldsymbol{A'B'}}$ a ne $\bar{\epsilon}_{\boldsymbol{A'B'}}$ jak bychom mohli očekávat.

Nejobecnějším typem spinoru je pak spinor s tzv. valencí $(p, q; r, s)$ který zapisujeme jako

$$\chi^{\boldsymbol{A}\ldots\boldsymbol{C}\ \boldsymbol{S'}\ldots\boldsymbol{U'}}{}_{\boldsymbol{D}\ldots\boldsymbol{F}\ \boldsymbol{W'}\ldots\boldsymbol{Y'}}, \tag{4.18}$$

který má $p$ kontravariantních nečárkovaných indexů, $q$ kontravariantních čárkovaných indexů, $r$ kovariantních nečárkovaných indexů a $s$ kovariantních čarkovaných indexů. Obecně platí

$$\chi^{\boldsymbol{AB'}}{}_{\boldsymbol{CD'}} = \chi^{\boldsymbol{B'A}}{}_{\boldsymbol{D'C}} = \chi^{\boldsymbol{A}}{}_{\boldsymbol{C}}{}^{\boldsymbol{B'}}{}_{\boldsymbol{D'}}, \tag{4.19}$$

tedy čárkované indexy můžeme libovolně prohazovat s něčárkovanými, musí ale zůstat pozice čárkovaných mezi sebou a nečárkovaných mezi sebou.

Nyní jsme kompletně vybaveni k přepsání vztahů (4.7) do zápisu čistě pomocí spinorů. Využijeme k tomu Infield-van der Waerdenovy symboly $\sigma_\mu^{\boldsymbol{AA'}}$. Ty můžeme v Minkowského prostoru reprezentovat čtyřmi hermitovskými maticemi

$$\sigma_0^{AA'} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1^{AA'} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2^{AA'} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3^{AA'} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

Tyto symboly nám dávají propojení mezi world-tensory (překlad) a spinory. Komponenty (4.7) vektoru ležícího na světelném kuželu pomocí spinoru se složkami $\xi^A = (\zeta, \eta)$ zapíšeme jako

$$x^\mu = \bar{\xi}^{A'} \sigma^\mu_{AA'} \xi^A. \tag{4.21}$$

Dále zavedeme spinorovou formu vektoru $x^\mu$

$$x^{AA'} = \sigma_\mu^{AA'} x^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

Je tohle správně? Je to jen speciální případ na Minkowského PČ - spinová struktura na varietě $\mathcal{M}$ je ekvivariantní lift frame bandlu - rozmyslet jak ten funguje Z Levi-Civitových spinorů a Infield-van der Waerdenových symbolů můžeme zkonstruovat metriku

$$g_{\mu\nu} = \epsilon_{AB}\epsilon_{A'B'}\sigma_{\mu}^{AA'}\sigma_{\nu}^{BB'}. \tag{4.23}$$

Obecně můžeme s pomocí těchto symbolů vyjádřit spinory libovolné valence jako tenzory a naopak.

Ve výpočtech se obvykle Infield-van der Waerdenovy symboly vynechávají a rovnou se píše

$$g_{\mu\nu} = \epsilon_{AB}\epsilon_{A'B'}. \tag{4.24}$$

Z tvaru Infield-van der Waerdenových symbolů je vidět korespondence mezi tenzorovými a spinorovými indexy, každému tenzorovému indexu odpovídají dva spinorové.

Pomocí spinorové báze můžeme zavést světelnou (nulovou) tetrádu vztahy

$$\begin{aligned} l^a &= o^A o^{A'}, \\ n^a &= \iota^A \iota^{A'}, \\ m^a &= o^A \iota^{A'}, \\ \bar{m}^a &= \iota^A o^{A'} \end{aligned} \tag{4.25}$$

kde $l^a, n^a, m^a$ a $\bar{m}^a$ jsou normalizované světelné vektory tvořící bázi.

## 4.2 Expandující gravitační vlny

### 4.2.1 Refrakční rovnice

# Závěr

# Seznam použité literatury


[1] Jiří Bičák. Selected solutions of Einstein's field equations: Their role in general relativity and astrophysics. *Lect. Notes Phys.*, 540:1–126, 2000.

[2] Roger Penrose. *The geometry of impulsive gravitational waves*, pages 101–115. 1972.

[3] Jiří Podolský and Jerry B. Griffiths. Impulsive gravitational waves generated by null particles in de Sitter and anti-de Sitter backgrounds. *Phys. Rev. D*, 56:4756–4767, 1997.

[4] Jiří Podolský, Clemens Sämann, Roland Steinbauer, and Robert Švarc. The global existence, uniqueness and $C^1$-regularity of geodesics in nonexpanding impulsive gravitational waves. *Class. Quant. Grav.*, 32(2):025003, 2015.

[5] Jiří Podolský, Robert Švarc, Ronald Steinbauer, and Clemens Sämann. Penrose junction conditions extended: Impulsive waves with gyratons. *Physical Review D*, 96(6), 2017.

[6] Marián Fecko. *Differential Geometry and Lie Groups for Physicists*. Cambridge University Press, 2006.

[7] Roger Penrose and Wolfgang Rindler. *Spinors and Space-Time*, volume 1 of *Cambridge Monographs on Mathematical Physics*. Cambridge University Press, 1984.

[8] Peter O'Donnell. *Introduction to 2-Spinors in General Relativity*. WORLD SCIENTIFIC, 2003.

# A. Přílohy

## A.1 První příloha